ANKARA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

GECİKMELİ DİFERENSİYEL DENKLEMLERİN ASİMPTOTİK KARARLILIĞI

Fatma KARAKOÇ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ANKARA
2002

Prof. Dr. Hüseyin BEREKETOĞLU danışmanlığında, Fatma KARAKOÇ tarafından hazırlanan bu çalışma 27.12.2002 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Matematik Anabilim Dalı'nda Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

Başkan Prof. Dr. Ethem ANAR

Prof. Dr. Hüseyin BEREKETOĞLU

Yard. Doç. Dr. Ogün DOĞRU

Yukarıdaki sonucu onaylarım

Prof. Dr. Metin OLGUN
Enstitü Müdürü

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

GECİKMELİ DİFERENSİYEL DENKLEMLERİN
ASİMPTOTİK KARARLILIĞI

Fatma KARAKOÇ

Ankara Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman : Prof. Dr. Hüseyin BEREKETOĞLU

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır.
Birinci bölümde, gecikmeli diferensiyel denklemlerle ilgili olarak adımlar yöntemi açıklandı ve bazı temel sonuçlar özetlendi. İkinci bölümde, gecikmeli $x'(t)=F(t,x_t)$ diferensiyel denkleminin sıfır çözümünün düzgün kararlılık tanımı ile birlikte Lyapunov yöntemi ifade edildi. Üçüncü bölümde, gecikmeli $x'(t)=F(t,x_t)$ diferensiyel denkleminin sıfır çözümünün asimptotik ve düzgün asimptotik kararlılığı incelendi. Dördüncü bölümde, lineer ve yarı lineer gecikmeli diferensiyel denklem sistemlerinin sıfır çözümünün düzgün asimptotik kararlılığı hakkında bazı sonuçlar ispatlandı. Son bölümde ise, üçüncü basamaktan belli bir gecikmeli diferensiyel denklem sınıfının sıfır çözümünün düzgün asimptotik kararlı olması ile ilgili olarak bir orijinal teorem ispatlandı.

2002 , 56 sayfa

ANAHTAR KELİMELER : Gecikmeli diferensiyel denklem, Lyapunov yöntemi, kararlılık, asimptotik kararlılık.

ABSTRACT

Master Thesis

ASYMPTOTIC STABILITY OF DELAY DIFFERENTIAL EQUATIONS

Fatma KARAKOÇ

Ankara University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor : Prof. Dr. Hüseyin BEREKETOĞLU

This thesis consists of five chapters.
In the first chapter, some basic concepts about delay differential equations are summarized and the method of steps is explained. In the second chapter, the definition of uniformly stability of the trivial solution of the delay differential equation $x'(t) = F(t, x_t)$ and Lyapunov method are stated. In the third chapter, the asymptotic stability and the uniformly asymptotic stability of the trivial solution of $x'(t) = F(t, x_t)$ are studied. In the fourth chapter, some results about uniformly asymptotic stability of the trivial solution of linear and quasi linear delay differential equation systems are proved. In the last chapter, an original theorem on uniformly asymptotic stability of the trivial solution of a certain third order delay differential equation has been proved.

2002 , 56 pages

Key Words : Delay differential equation, Lyapunov method, stability, asymptotic stability.

TEŞEKKÜR

Bu çalışma konusunu bana veren ve çalışmam boyunca yardımlarını esirgemeyen saygıdeğer hocam Prof. Dr. Hüseyin BEREKETOĞLU'na teşekkürlerimi sunarım.

Fatma KARAKOÇ
Ankara, Aralık 2002

İÇİNDEKİLER

ÖZET....................i
ABSTRACT....................ii
TEŞEKKÜR....................iii
1. GİRİŞ....................1
1.1. Temel Kavramlar....................1
1.2. Adımlar Yöntemi....................3
1.3. Bazı Tanımlar ve Sonuçlar....................6
2. KARARLILIK DURUMU....................10
2.1. Giriş....................10
2.2. Lyapunov Yöntemi....................19
3. ASİMPTOTİK KARARLILIK DURUMU....................26
3.1. Giriş....................26
3.2. Düzgün Asimptotik Kararlılık....................27
4. LİNEER ve YARI LİNEER GECİKMELİ DENKLEM SİSTEMLERİ....................32
4.1. Giriş....................32
4.2. Lineer Gecikmeli Sistemler....................33
4.3. Yarı Lineer Sistemler....................37
5. ÜÇÜNCÜ BASAMAKTAN BİR GECİKMELİ DİFERENSİYEL DENKLEM SINIFININ DÜZGÜN ASİMPTOTİK KARARLILIĞI....................46
5.1. Giriş....................46
5.2. Esas Sonuç....................47
KAYNAKLAR....................55
ÖZGEÇMİŞ....................56

1. GİRİŞ

1.1. Temel Kavramlar

Bir fiziksel olayı adi veya kısmi diferensiyel denklem yardımıyla tanımlamış olmak, o olayın gelecekteki durumunu geçmiş durumundan bağımsız kalarak hesaplamak demektir.

Halbuki gerçek durum böyle değildir. Pek çok fiziksel olayda bir sistemin şu anki durumu geçmiş durumuna bağlı kalınarak ifade edilir. Bir olayın tarihsel gelişimi ile birlikte ele alınarak modellenmesi halinde gecikmeli diferensiyel denklem olarak adlandırılan başka bir denklem sınıfı elde edilmiş olur. Aşağıdaki denklemler gecikmeli diferensiyel denklemler için birer örnektir:

$$x'(t) = 2x(t-\frac{3}{2}) - x(t-1),$$
$$x''(t) + x'(t-2) + x(t) = 0,$$
$$x'(t) + x(t-\cos^2 t) = 1,$$
$$x'(t) = 5x(t) - 2x(\frac{t}{4}).$$

Bu örneklerden de görüleceği üzere, bir gecikmeli diferensiyel denklem, bilinmeyen fonksiyon ve onun türevlerini (en yüksek türev hariç) farklı gecikme argümentlerine bağlı bırakan bir diferensiyel denklemdir. Bu tür bir denkleme literatürde ilk kez onsekizinci yüzyılın ikinci yarısında rastlanmasına rağmen, gecikmeli diferensiyel denklemler 1950 yılından sonra A.D. Myshkis, E.M. Wright, R. Bellman tarafından sistematik olarak incelenmeye başlanmıştır. Daha sonraki yıllarda L.E. El'sgol'ts, N.N. Krasovskii, J.K. Hale ve diğerlerinin yaptıkları çalışmalar bu teorinin gelişimini hızlandırmıştır. Gecikmeli diferensiyel denklemlerin fiziksel ve biyolojik sistemlerde birçok uygulama alanına sahip olması da bu teoriyi matematiğin en hızlı gelişen dallarından biri haline getirmiştir.

Şimdi,

$$x'(t) = F(t, x_t) \qquad (1.1.1)$$

gecikmeli diferensiyel denklemini

$$x(t) = \theta(t)\,,\ t_0 - r \le t \le t_0\ , \qquad (1.1.2)$$

başlangıç koşulu ile birlikte göz önüne alalım; burada $F:(\alpha,\infty)xC_D \to R^n$, $C_D = C([-r,0],D)$, $D \subset R^n$. Belirtelim ki

$$\chi : [t-r,t] \to D$$

fonksiyonu sürekli ise, $\chi_t \in C_D$. Çünkü

$$\chi_t(\sigma) = \chi(t+\sigma)\,,\ -r \le \sigma \le 0\,,$$

ve dolayısıyla

$$\chi_t : [-r,0] \to R^n$$

dir.

Öte yandan, (1.1.1) denklemindeki notasyona uygun olsun diye (1.1.2) koşulu aşağıdaki şekilde yeniden yazılabilir:
(1.1.2) koşulu

$$x(t_0+\sigma) = \theta(t_0+\sigma),\ -r \le \sigma \le 0\,,$$

ya da kısaca

$$x_{t_0} = \theta_{t_0}$$

ifadesine eşdeğerdir. Bu da $\phi = \theta_{t_0}$ alınırsa,

$$x_{t_0} = \phi \qquad (1.1.2')$$

şeklini alır. (1.1.2') koşulunu

$$x(t_0+\sigma) = \phi(\sigma)$$

ya da $t = t_0 + \sigma$ alarak

$$x(t) = \phi(t-t_0)\,,\ t_0 - r \le t \le t_0\ , \qquad (1.1.2'')$$

biçiminde hatırlamak gerektiğini not edelim. Özel olarak $x(t_0) = \phi(0)$ dır.

Ayrıca, $\phi \in C_D$ olduğunu kabul edelim. Buna göre (1.1.1)-(1.1.2') başlangıç değer probleminin çözümü

$$x(t;t_0,\phi) = \begin{cases} \phi(t-t_0) \ , t_0 - r \le t \le t_0 \ , \\ x(t) \qquad ,t \ge t_0 \ , \end{cases}$$

şeklinde ifade edilebilir.

Çözüm yöntemini vermeden önce aşağıdaki notasyonları tanıtalım:
Her $\xi \in R^n$ için $\|\xi\| = |\xi_1| + \ldots + |\xi_n|$ ve $\phi \in C$ olmak üzere

$$\|\phi\|_r = \sup_{-r\le\sigma\le 0} \|\phi(\sigma)\|$$

dır.

1.2. Adımlar Yöntemi

Birinci basamaktan bir skaler gecikmeli diferensiyel denklem ile bir başlangıç fonksiyonundan meydana gelen başlangıç değer

$$x'(t) = f(t, x(t), x(t-r)) \tag{1.2.1}$$

$$x(t) = \theta(t) \ , \ t_0 - r \le t \le t_0 \ , \tag{1.2.2}$$

problemini göz önüne alalım; burada $r > 0$ sabit gecikmedir. Bu problemin çözümü adımlar yöntemi yardımıyla aşağıdaki şekilde hesaplanır:

İlk olarak $t_0 \le t \le t_0 + r$ için çözüm aranırsa, $t-r$ argümenti $[t_0 - r, t_0]$ aralığında değişeceğinden $x(t-r) = \theta(t-r)$ dir. Dolayısıyla (1.2.1)-(1.2.2) problemi artık gecikme içermeyen

$$x'(t) = f(t, x(t), \theta(t-r)) \ , \ t_0 \le t \le t_0 + r \ , \tag{1.2.3}$$

$$x(t_0) = \theta(t_0) \tag{1.2.4}$$

başlangıç değer problemine dönüşür. (1.2.3)-(1.2.4) problemi

$$x(t) = \varphi_1(t)\ ,\ [t_0, t_0 + r],$$

çözümüne sahip olsun. İkinci adımda

$$x'(t) = f(t, x(t), \varphi_1(t - r))\ ,\ t_0 + r \le t \le t_0 + 2r\ , \tag{1.2.5}$$

$$x(t_0 + r) = \varphi_1(t_0 + r) \tag{1.2.6}$$

biçiminde gecikme içermeyen başka bir başlangıç değer problemi elde edilir. (1.2.5)-(1.2.6) probleminin çözümü

$$x(t) = \varphi_2(t)\ ,\ t_0 + r \le t \le t_0 + 2r\ ,$$

olsun. Üçüncü adımda gecikmesiz

$$x'(t) = f(t, x(t), \varphi_2(t - r))\ ,\ t_0 + 2r \le t \le t_0 + 3r\ , \tag{1.2.7}$$

$$x(t_0 + 2r) = \varphi_2(t_0 + 2r) \tag{1.2.8}$$

başlangıç değer problemi elde edilir. Böyle devam edilirse, n-yinci adımda

$$x'(t) = f(t, x(t), \varphi_{n-1}(t - r))\ ,\ t_0 + (n-1)r \le t \le t_0 + nr\ , \tag{1.2.9}$$

$$x(t_0 + (n-1)r) = \varphi_{n-1}(t_0 + (n-1)r) \tag{1.2.10}$$

problemi bulunur. (1.2.9)-(1.2.10) başlangıç değer probleminin çözümü

$$x(t) = \varphi_n(t)\ ,\ t_0 + (n-1)r \le t \le t_0 + nr\ ,$$

olsun. Böylece (1.2.1)-(1.2.2) probleminin $x(t)$ çözümü $[t_0, t_0 + nr]$ aralığı boyunca tanımlanmış oldu.

Adımlar yöntemi, $x(t)$ çözümünü sonlu aralıklar üzerinde belirlemekle beraber θ ve f sürekli olmak üzere $(t_0, \theta(t_0))$ noktasının bir komşuluğunda (1.2.3)-(1.2.4) probleminin bir çözümünün varlığını da ispatlar. Ayrıca, (1.2.3) denklemindeki f fonksiyonu ikinci argümente göre Lipschitz koşulunu sağladığı zaman çözümün tekliği de garanti edilmiş olur.

Örnek 1.2.1. Adımlar yöntemi yardımıyla

$$x'(t) = -cx(t-r) \tag{1.2.11}$$

$$x(t) = \theta_0 \ , t_0 - r \le t \le t_0 \ , \tag{1.2.12}$$

başlangıç değer problemini $t_0 \le t \le t_0 + 2r$ aralığında çözelim; burada c ve θ_0 pozitif sabitlerdir.

$[t_0, t_0 + r]$ üzerinde (1.2.11)-(1.2.12) problemi,

$$x'(t) = -c\theta_0 \ , \ t_0 \le t \le t_0 + r \ , \tag{1.2.13}$$

$$x(t_0) = \theta_0 \tag{1.2.14}$$

problemine indirgenir. (1.2.13)-(1.2.14) probleminin tek çözümü

$$x(t) = \varphi_1(t) = \theta_0[1 - c(t - t_0)] \, , \ t_0 \le t \le t_0 + r \ ,$$

dir. Şimdi meydana gelen yeni başlangıç değer

$$x'(t) = -cx(t-r) \ , \ t_0 + r \le t \le t_0 + 2r \ ,$$
$$x(t) = \theta_0[1 - c(t - t_0)] \, , \ t_0 \le t \le t_0 + r \ ,$$

problemini ele alalım. Buradan adi başlangıç değer

$$x'(t) = -c\theta_0[1 - c(t - r - t_0)] \, , \ t_0 + r \le t \le t_0 + 2r \ , \tag{1.2.15}$$

$$x(t_0 + r) = \theta_0[1 - cr] = \theta_0 - cr\theta_0 \tag{1.2.16}$$

problemi bulunur. Bu ise,

$$x(t) = \varphi_2(t) = \theta_0[\frac{c^2}{2}(t - r - t_0)^2 - c(t - t_0) + 1] \, , \ t_0 + r \le t \le t_0 + 2r \ ,$$

çözümüne sahiptir. Böylece (1.2.11)-(1.2.12) probleminin $[t_0, t_0 + 2r]$ aralığındaki tek çözümü

$$x(t) = \begin{cases} \varphi_1(t) \, , & t_0 \le t \le t_0 + r \ , \\ \varphi_2(t) \, , & t_0 + r \le t \le t_0 + 2r \ . \end{cases}$$

1.3. Bazı Tanımlar ve Sonuçlar

Tanım1.3.1. $F(t,\chi_t)$ verilen her sürekli $\chi:[t_0-r,\beta)\to D$ fonksiyonu için $[t_0,\beta)$ aralığında t ye göre sürekli ise, bu durumda F fonksiyoneline ***süreklilik koşulunu sağlıyor*** denir.

Bu koşul sağlandığı takdirde yani, $F:[t_0,\beta)xC_D\to R^n$ fonksiyoneli süreklilik koşulunu sağlıyorsa, bu durumda bir sürekli $x:[t_0-r,\beta_1)\to D$, $\beta_1\in[t_0,\beta]$, fonksiyonunun $(1.1.1)-(1.1.2')$ probleminin bir çözümü olması için gerek ve yeter koşul

$$x(t)=\begin{cases}\phi(t-t_0) & , \ t_0-r\le t\le t_0 \ , \\ \phi(0)+\int_{t_0}^{t}F(s,x_s)ds \ , & t_0\le t\le\beta_1 \ .\end{cases}$$

Tanım 1.3.2. $J=[t_0,\beta)$ veya $J=(\alpha,\beta)$ olmak üzere, $F:JxC_D\to R^n$ ve $\Omega\subset JxC_D$ olsun. Her (t,ψ) ve $(t,\overline{\psi})\in\Omega$ için

$$\|F(t,\psi)-F(t,\overline{\psi})\|\le K\|\psi-\overline{\psi}\|_r \qquad (1.3.1)$$

ise, bu durumda F fonksiyoneline Ω üzerinde K Lipschitz sabitli bir ***Lipschitz koşulunu sağlıyor*** ya da F ***Lipschitziandır*** denir.

Tanım 1.3.3. $F:JxC_D\to R^n$ fonksiyoneli verilsin. Her bir $(\bar{t},\overline{\psi})\in JxC_D$ için $\Omega_0\equiv([\bar{t}-a,\bar{t}+a]\cap J)x\{\psi\in C:\|\psi-\overline{\psi}\|_r\le b\}$ cümlesi JxC_D nin bir alt cümlesi ve F bu Ω_0 üzerinde Lipschitzian olacak şekilde $a>0$ ve $b>0$ sabitleri varsa, bu durumda F fonksiyoneline ***lokal Lipschitzian*** denir.

Böyle bir durumda K Lipschitz sabiti genellikle Ω_0 cümlesine bağlıdır.

Tanım 1.3.4. $F:[t_0,\beta)xC_D\to R^n$ fonksiyoneli $[t_0,\beta_1]xC_A$ biçimindeki her cümle üzerinde sınırlı ise, bu durumda F fonksiyoneline ***yarı sınırlıdır*** denir ; burada $t_0<\beta_1<\beta$ ve A cümlesi D nin bir kapalı sınırlı alt cümlesidir.

Tanım 1.3.5. x ve y (1.1.1) − (1.1.2') probleminin, sırasıyla, $[t_0 - r, \beta_1)$ ve $[t_0 - r, \beta_2)$ aralıklarında tanımlı olan çözümleri olsun. $\beta_2 > \beta_1$ ise, bu durumda y ye x in bir *sürdürülmesidir* ya da x e $[t_0 - r, \beta_2)$ aralığına *sürdürülebilir* denir. (1.1.1) − (1.1.2') probleminin bir x çözümü hiçbir sürdürülmeye sahip değilse, x e *sürdürülemeyendir* denir.

Teorem 1.3.1. (Lokal Varlık) $F:[t_0,\beta)xC_D \to R^n$ fonksiyoneli süreklilik koşulunu sağlamak üzere lokal Lipschitzian olsun. Bu durumda her bir $\phi \in C_D$ için (1.1.1) − (1.1.2') problemi bir $\Delta > 0$ sayısı için $[t_0 - r, t_0 + \Delta]$ üzerinde bir tek çözüme sahiptir.

Teorem 1.3.2. (Genişletilmiş Varlık) $F:[t_0,\beta)xC_D \to R^n$ fonksiyoneli süreklilik koşulunu sağlamak üzere lokal Lipschitzian ve yarı sınırlı olsun. Bu durumda her $\phi \in C_D$ için (1.1.1) − (1.1.2') problemi $[t_0 - r, \beta_1)$ üzerinde bir tek sürdürülemeyen x çözümüne sahiptir. Eğer $\beta_1 < \beta$ ise bu durumda her kapalı sınırlı $A \subset D$ üzerinde bir $t \in (t_0, \beta_1)$ için $x(t) \notin A$ dır.

Lemma 1.3.1. $[t_0 - r, \beta)$ üzerinde tanımlı olan $x(t)$, $x'(t) = F(x_t)$ otonom denklemini $[t_0, \beta)$ üzerinde sağlasın. Bu durumda a herhangi bir reel sayı olmak üzere

$$z(t) = x(t-a)\ ,\ t_0 + a - r \le t \le \beta + a\ ,$$

fonksiyonu da aynı denklemin bir çözümüdür.

Teorem 1.3.3. (Heine-Borel Teoremi) A, R^n de bir kapalı ve sınırlı cümle olsun. Bu durumda A nın her açık örtüsü yine A nın bir açık örtüsü olan bir sonlu alt koleksiyona sahiptir.

Teorem 1.3.4. (Sürekli Bağımlılık) $F:[t_0,\beta)xC_D \to R^n$ fonksiyoneli süreklilik koşulunu sağlasın ve K Lipschitz sabitli global Lipschitzian olsun. ϕ ve $\widetilde{\phi} \in C_D$ verilmek üzere x ve $\widetilde{x}$ (1.1.1) denkleminin, sırasıyla, $x_{t_0} = \phi$ ve $\widetilde{x}_{t_0} = \widetilde{\phi}$ koşullarını sağlayan tek çözümleri olsun. x ve $\tilde{x}$ çözümleri $[t_0 - r, \beta_1)$ üzerinde tanımlı ise, bu durumda

$$\|x(t) - \tilde{x}(t)\| \leq \|\phi - \tilde{\phi}\|_r e^{K(t-t_0)} \ , \ t_0 \leq t < \beta_1 \ , \tag{1.3.2}$$

dir.

Teorem 1.3.5. Sabit matris katsayılı ve sabit $r_j \in [0, r]$ gecikmeli lineer

$$x'(t) = \sum_{j=1}^{m} A_j x(t - r_j) \tag{1.3.3}$$

sistemini ve bu sisteme ilişkin

$$\det\left(\lambda I - \sum_{j=1}^{m} A_j e^{-\lambda r_j}\right) = 0 \tag{1.3.4}$$

karakteristik denklemini ele alalım. (1.3.4) denkleminin bütün kökleri negatif reel kısımlı ise, bu durumda

$$\|x(t; t_0, \phi)\| \leq M \|\phi\|_r e^{-\gamma(t-t_0)} \ , \ t \geq t_0 \ , \tag{1.3.5}$$

olacak biçimde M ve γ pozitif sabitleri vardır.

Lemma 1.3.2. (Reid Lemması) c verilen bir sabit, k, J aralığı üzerinde negatif olmayan sürekli bir fonksiyon ve $t_0 \in J$ olsun. Eğer $v : J \to [0, \infty)$ fonksiyonu sürekli ve her $t \in J$ için

$$v(t) \leq c + \left| \int_{t_0}^{t} k(s) v(s) ds \right| \tag{1.3.6}$$

ise, bu durumda her $t \in J$ için

$$v(t) \leq c e^{\left| \int_{t_0}^{t} k(s) ds \right|} \tag{1.3.7}$$

dir.

Teorem 1.3.6. (Parametrelerin Değişimi) Her bir A_j, $J = [t_0, \beta)$ üzerinde tanımlı nxn tipinde matris değerli sürekli bir fonksiyon; h, J üzerinde tanımlı n-vektör değerli sürekli bir fonksiyon ve $r_j \in [0,r]$ sabit olmak üzere

$$x'(t) = \sum_{j=1}^{m} A_j(t)x(t-r_j) + h(t) \tag{1.3.8}$$

$$x_{t_0} = \phi \tag{1.3.9}$$

problemini ele alalım; burada $\phi \in C$ dir. $u:[-r,0] \to R$ olmak üzere

$$u(\sigma) = \begin{cases} 0 \ , & -r \le \sigma < 0 \ , \\ 1 \ , & \sigma = 0 \ . \end{cases}$$

birimli basamak fonksiyonu tanımlansın. Verilen $\xi \in R^n$ ve $s \in [t_0, \beta)$ için $y:[s-r,\beta) \to R^n$ olmak üzere

$$y'(t) = \sum_{j=1}^{m} A_j(t)y(t-r_j) \tag{1.3.10}$$

homogen denkleminin çözümü $y(t;t_0,\phi)$ ise, bu durumda (1.3.8)-(1.3.9) sisteminin tek çözümü,

$$x(t) = y(t;t_0,\phi) + \int_{t_0}^{t} y(t;s,h(s)u)ds \ , \ t_0 - r \le t < \beta \ , \tag{1.3.11}$$

ile verilir; burada her bir $j=1,...,m$ için $t - r_j = s$ ve $y_s = \xi u$ dır.

Teorem 1.3.8. (Ortalama Değer Teoremi) $[\alpha,\beta]$ kapalı ve sınırlı bir aralık olmak üzere $f:[\alpha,\beta] \to R$ sürekli ve f', (α,β) üzerinde mevcut olsun. Bu durumda bir $\theta \in (\alpha,\beta)$ sayısı vardır öyle ki,

$$f(\beta) - f(\alpha) = f'(\theta)(\beta - \alpha).$$

2. KARARLILIK DURUMU

2.1. Giriş

Bu bölümde sınırlı gecikmeli denklemler için Lyapunov anlamında kararlılık tanımları ifade edilip bazı önemli sonuçlar ispatlanacaktır.

Sınırlı gecikmeli

$$x'(t) = F(t, x_t) \tag{2.1.1}$$

diferensiyel sistemini

$$x_{t_0} = \phi \tag{2.1.2}$$

başlangıç koşulu ile birlikte ele alalım; burada $F:(\alpha,\infty)xC_D \to R^n$, $C_D = C([-r,0],D)$, $D \subset R^n$ bir açık cümle, $t_0 > \alpha$ ve $\phi \in C_D$ dir.

Ayrıca her bir $t_0 > \alpha$ için F in $[t_0,\infty)xC_D$ üzerinde süreklilik koşulunu sağladığı, lokal Lipschitzian ve yarı sınırlı olduğu kabul edilmektedir. Bu hipotezler (2.1.1)-(2.1.2) probleminin bir tek sürdürülemez çözümünün varlığını garanti eder (Teorem 1.3.2).

Kararlılık teorisi, $[t_0 - r,\infty)$ üzerinde tanımlı olan belli bir $\bar{x} = x(t;t_0,\bar{\phi})$ çözümünün $\bar{\phi}$ başlangıç fonksiyonun da yapılan küçük değişiklikler durumunda ortaya çıkan yeni çözümlerin yine $[t_0 - r,\infty)$ aralığında tanımlı olup $\bar{x}$ ye yakın kalıp kalmadıkları konusunu inceler. Bir ϕ başlangıç fonksiyonunun $\bar{\phi}$ ye yakın kalması demek $\|\phi - \bar{\phi}\|_r$ nin küçük olması demektir.

Tanım 2.1.1. $\bar{x}:[t_0 - r,\infty) \to D$, (2.1.1) denklemini $[t_0,\infty)$ üzerinde sağlasın. Her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık

$$\|\phi - \bar{x}_{t_0}\|_r < \delta$$

olduğu zaman meydana gelen yeni $x(t;t_0,\phi)$ çözümleri $[t_0 - r,\infty)$ üzerinde tanımlı ve her $t \geq t_0 - r$ için

$$\|x(t;t_0,\phi)-\bar{x}(t)\|<\varepsilon$$

olacak şekilde bir $\delta=\delta(\varepsilon,t_0)>0$ var ise, $\bar{x}$ çözümüne t_0 *noktasında Lyapunov anlamında kararlıdır* denir.

Aksi durumda $\bar{x}$ çözümüne t_0 *noktasında Lyapunov anlamında kararsızdır* denir.

Özel olarak bir adi diferensiyel denklem sistemi (yani *r=0*) söz konusu olduğu zaman ϕ yerine x_0 ve x_t yerine de $x(t)$ konur.

Örnek 2.1.1. Adi diferensiyel

$$x'(t)=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & -1\end{pmatrix}x(t)$$

sisteminin bütün çözümleri her t_0 noktasında kararlıdır:

Sistem otonom olduğundan kısalık olsun diye $t_0=0$ alınabilir. Buradan sistemin çözümü her t için

$$x(t;0,x_0)=\begin{pmatrix}x_{01}(\cos t+\sin t)+2x_{02}\sin t\\ -x_{01}\sin t+x_{02}(\cos t-\sin t)\end{pmatrix}$$

dir. Şimdi $\bar{x}=x(t;0,\bar{x}_0)$ çözümü için

$$\begin{aligned}\|x(t;0,x_0)-x(t;0,\bar{x}_0)\| &= |(x_{01}-\bar{x}_{01})(\cos t+\sin t)+2(x_{02}-\bar{x}_{02})\sin t|\\ &\quad+|(-x_{01}+\bar{x}_{01})\sin t+(x_{02}-\bar{x}_{02})(\cos t-\sin t)|\\ &\le 3|x_{01}-\bar{x}_{01}|+4|x_{02}-\bar{x}_{02}|\\ &\le 4\|x_0-\bar{x}_0\|\end{aligned}$$

bulunur. Buradan her $\varepsilon>0$ için $\delta=\dfrac{\varepsilon}{4}$ seçilirse,

$$\|x(t;0,x_0)-\bar{x}(t)\|<\varepsilon$$

olur. Bu da $\bar{x}(t)$ nin $t_0=0$ da kararlı olması demektir.

Örnek 2.1.2. Skaler

$$x'(t)=x(t)$$

denkleminin bütün çözümleri her t_0 noktasında kararsızdır. Bu durum $x(t)=ce^t$

genel çözümünden hareket edilerek görülebilir.

Uyarı 2.1.1. $\bar{x}$, (2.1.1) denkleminin kararlılığı incelenen bir çözümü ve x de aynı sistemin başka bir çözümü olsun. Bu durumda

$$y(t) = x(t) - \bar{x}(t)$$

dönüşümü (2.1.1) sistemine uygulanırsa;

$$y'(t) = G(t, y_t) \tag{2.1.3}$$

sistemi elde edilir; burada

$$G(t,\psi) \equiv F(t, \bar{x}_t + \psi) - F(t, \bar{x}_t)$$

dir. Artık $G(t,0) \equiv 0$ olduğundan $y=0$ fonksiyonu (2.1.3) sisteminin bir çözümüdür. Böylece (2.1.1) denkleminin $\bar{x}$ çözümünün kararlılık problemi, (2.1.3) denkleminin sıfır çözümünün kararlılık problemine indirgenmiş olur. Bu yüzden genellikle,

$$0 \in D \text{ ve her } t > \alpha \text{ için } F(t,0) = 0 \tag{2.1.4}$$

kabul edilecektir; yani $-r \le \sigma \le 0$ için $\psi(\sigma) = 0$ ise, $F(t,\psi) = 0$.

Şimdi (2.1.1) denkleminin sıfır çözümünün kararlılık tanımını ifade etmeden önce D cümlesinin bundan böyle bir $H>0$ sayısı için

$$D \equiv \{\xi \in R^n : \|\xi\| < H\} \tag{2.1.5}$$

şeklinde olduğunu belirtelim. $H = \infty$ durumunda, $D = R^n$ dir.

Tanım 2.1.2. Her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık

$$\|\phi\|_r < \delta$$

olduğu zaman meydana gelen $x(t;t_0,\phi)$ çözümleri $[t_0 - r, \infty)$ üzerinde tanımlı ve her $t \ge t_0 - r$ için

$$\|x(t;t_0,\phi)\| < \varepsilon$$

olacak şekilde bir $\delta = \delta(\varepsilon, t_0) > 0$ sayısı mevcut ise, bu durumda (2.1.1) denkleminin sıfır çözümüne t_0 *noktasında kararlıdır* denir.

Aksi durumda sıfır çözümüne t_0 *noktasında kararsızdır* denir.

Tanım 2.1.3. (2.1.1) denkleminin sıfır çözümü her bir $t_0 > \alpha$ noktasında kararlı ve δ sayısı t_0 dan bağımsız ise, bu durumda sıfır çözümüne (α,∞) *üzerinde düzgün kararlıdır* denir.

Uyarı 2.1.2. Örnek 2.1.1 de olduğu gibi, bir otonom adi diferensiyel sistemde t_0 noktasındaki kararlılık kaçınılmaz olarak düzgün kararlılığı ifade eder. Böylece Örnek 2.1.1 deki her çözüm düzgün kararlıdır.

Benzer ifade bir gecikmeli otonom diferensiyel sistem için de ispatlanabilir.

Teorem 2.1.1. (2.1.1) denklemi otonom ise, bu durumda sıfır çözümünün bir $t_0 \in R$ noktasında kararlı olması düzgün kararlı olmasını ifade eder.

İspat: $\bar{x}(t) \equiv 0$,

$$x'(t) = F(x_t)$$

otonom sisteminin kararlı çözümü olsun. Bilinmektedir ki $x(t)$, $t \geq t_0 - r$ için tanımlı olup $t \geq t_0$ için $x'(t) = F(x_t)$ denkleminin bir çözümü ise, bu durumda $c \geq 0$ için $x(t+c)$ de $t \geq t_0 - c$ üzerinde aynı sistemin bir çözümüdür (Lemma1.3.1).

$c = t_1 - t_0$ ve $x(t + t_1 - t_0; t_0, x_{t_1}) \equiv \widetilde{x}(t; t_0, \widetilde{x}_{t_0})$ olsun. Buna göre $\widetilde{x}(t; t_0, \widetilde{x}_{t_0})$, $x'(t) = F(x_t)$ denkleminin $\widetilde{x}_{t_0} = x_{t_1}$ ve $t \in [2t_0 - t_1, \infty)$ için tanımlı olan bir çözümüdür.

$\bar{x}(t) \equiv 0$ kararlı olduğundan verilen bir $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık bir $\delta = \delta(\varepsilon)$ vardır öyle ki

$$\left\|\widetilde{x}_{t_0}\right\|_r < \delta$$

olduğu zaman her $t \geq t_0$ için

$$\left\|\widetilde{x}(t; t_0, \widetilde{x}_{t_0})\right\| < \varepsilon$$

dır. Bu ise şuna eşdeğerdir:

$$t_1 \geq t_0 \text{ ve } \|x_{t_1}\|_r \leq \delta$$

olduğu zaman $\tau = t + t_1 - t_0$ olmak üzere her $t \geq t_1$ için

$$\|x(\tau; t_0, x_{t_1})\| < \varepsilon$$

olup, δ sayısı t_1 e bağlı değildir. O halde $x'(t) = F(x_t)$ denkleminin sıfır çözümü düzgün kararlıdır.

Yukarıdaki sonuç otonom olmayan sistemler için sağlanmayabilir. Aşağıdaki örnekte bir otonom olmayan sistemin sıfır çözümünün her $t_0 > \alpha$ noktasında kararlı olduğu bilindiği halde düzgün kararlı olmadığı gösterilmektedir.

Örnek 2.1.3. $(0,\infty)xR$ üzerinde $f(t,\xi) = t^{-2}\xi$ olmak üzere skaler adi diferensiyel

$$x' = t^{-2}x$$

denkleminin sıfır çözümü her $t_0 > 0$ noktasında kararlıdır ama düzgün kararlı değildir. Gerçekten, $t_0 > 0$ ve $x(t_0) = x_0$ ise, bu durumda çözüm

$$x(t) = x(t; t_0, x_0) = x_0 e^{t_0^{-1} - t^{-1}} \ , \ t_0 \leq t < \infty ,$$

şeklinde bulunur. Dolayısıyla

$$|x(t)| \leq |x_0| e^{1/t_0} \text{ , her } t \geq t_0 .$$

Verilen bir $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık δ sayısı $\delta = \varepsilon e^{-1/t_0}$ şeklinde bulunur. $t_0 \to 0$ iken $\delta \to 0$ olduğundan kararlılık düzgün olamaz.

Diğer taraftan, aynı denklem ama bu defa f, $(1,\infty)xR$ (yani 0 yerine $\alpha = 1$) üzerinde tanımlı olmak üzere ele alınırsa, bu durumda her $t \geq t_0 > \alpha = 1$ için

$$|x(t)| \leq |x_0| e$$

olur ve dolayısıyla düzgün kararlılık bulunur.

Buradan f in tanım cümlesinde yapılan bir değişikliğin kararlılık üzerindeki etkisi açık bir şekilde anlaşılmaktadır.

Örnek 2.1.1 , 2.1.2 ve 2.1.3 de ele alınan diferensiyel denklemlerin çözümleri açık olarak bulunduktan sonra kararlılık problemi çözülebildi. Ancak diferensiyel denklemleri çözmeksizin kararlılık durumunu inceleyebilen yöntemler vardır ve bu yöntemlerin ele alınması elbette daha ilginç ve daha pratiktir. Bunu basit bir örnekle açıklayalım.

Örnek 2.1.4. (Krasovskii 1959) Skaler gecikmeli diferensiyel

$$x'(t) = ax(t) + bx(t-r) \tag{2.1.6}$$

denklemini ele alalım; burada a , b ve r sabitler olup, $a < 0$, $|b| \le |a|$ ve $r \ge 0$ dır. $\alpha = -\infty$ ve $H = +\infty$ olsun. $(t_0, \phi) \in RxC$ olmak üzere $x:[t_0 - r, \infty) \to R$, (2.1.6) denkleminin

$$x_{t_0} = \phi$$

koşulunu sağlayan tek sürdürülemeyen çözümü olsun. Şimdi

$$v(t) \equiv x^2(t) + |a| \int_{t-r}^{t} x^2(s)ds \ , t \ge t_0 ,$$

fonksiyonunu ele alalım. $v(t)$ nin t ye göre türevi $t \ge t_0$ için

$$\begin{aligned} v'(t) &= 2x(t)x'(t) + |a|x^2(t) - |a|x^2(t-r) \\ &= -|a|x^2(t) + 2bx(t)x(t-r) - |a|x^2(t-r). \end{aligned}$$

Buradan

$$\begin{aligned} v'(t) &< (-|a| + |b|)[x^2(t) + x^2(t-r)] \\ &\le 0 \qquad ,t \ge t_0 , \end{aligned}$$

dır. Dolayısıyla $v(t)$ artmayandır. Öte yandan

$$|x(t)|^2 \le v(t) \le (1 + |a|r)\|x_t\|_r{}^2 \tag{2.1.7}$$

hesaplanabilir. $x_{t_0} = \phi$ olduğundan , (2.1.7) den $t \ge t_0$ için

$$|x(t)| \le [v(t_0)]^{1/2} \le (1 + |a|r)^{1/2} \|\phi\|_r$$

yazılabilir. Buradan verilen bir $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık

$$\|\phi\|_r < \varepsilon(1+|a|r)^{-1/2}$$

alınırsa, her $t \geq t_0 - r$ için

$$|x(t;t_0,\phi)| < \varepsilon$$

bulunur. Bu da sıfır çözümünün düzgün kararlı olduğunu ifade eder.

Uyarı 2.1.3. Gecikmeli diferensiyel denklemlerde kararlılık tanımı, t_0 noktasının altı çizilerek ifade edilmektedir. Bu şu anlama gelmektedir:
Bir gecikmeli diferensiyel denklemin sıfır çözümü bir $t_0\,(t_0 > \alpha)$ noktasında kararlı olurken, bir sonraki t_0 noktasında kararsız olabilmektedir. Bununla ilgili olarak aşağıdaki örneği verelim:

Örnek 2.1.5. (Zverkin 1959) $\alpha = -\infty, D = R$ ve $r = \dfrac{3\pi}{2}$ olmak üzere

$$x'(t) = b(t)x(t-\frac{3\pi}{2}) \qquad (2.1.8)$$

denklemini ele alalım; burada b,

$$b(t) = \begin{cases} 0 & , t \leq \dfrac{3\pi}{2} \\ -\cos t & , \dfrac{3\pi}{2} < t \leq 3\pi \\ 1 & , t > 3\pi \end{cases}$$

şeklinde tanımlı bir sürekli fonksiyondur. Bu durumda, $t_0 = 0$ ve bir $\phi \in C([-\frac{3\pi}{2},0],R)$ için

$$x(t;0,\phi) = \begin{cases} \phi(0) & ,0 \leq t < \dfrac{3\pi}{2} \\ -\phi(0)\sin t & , t \geq \dfrac{3\pi}{2} \end{cases}$$

dir. Buna göre

$$|x(t;0,\phi)| \leq |\phi(0)| \leq \|\phi\|_r \ , \ t \geq 0 \ ,$$

elde edilir. Buradan $\|\phi\|_r$ ne kadar küçük ise $|x(t;0,\phi)|$ ifadesi de $t \geq -\frac{3\pi}{2}$ için o denli küçüktür. Yani sıfır çözümü $t_0 = 0$ noktasında kararlıdır.

Öte yandan t_0,

$$\widetilde{t}_0 \geq 3\pi$$

şeklinde seçilse ve ϕ,

$$\phi(s) = \delta\, e^{\lambda s}, s \in [-\frac{3\pi}{2}, 0],$$

biçiminde verilmiş olsa, o zaman

$$x(t;\widetilde{t}_0,\phi) = \delta\, e^{\lambda(t-\widetilde{t}_0)}, \text{her } t \geq \widetilde{t}_0 - \frac{3\pi}{2},$$

bulunur; burada λ,

$$\lambda = e^{-\frac{3\pi}{2}\lambda}$$

denkleminin pozitif köküdür. Buna göre $\|\phi\|_r = \delta > 0$ keyfi olarak küçük kılınabildiği halde, çözüm sınırsız olmaktadır.

Sonuç olarak, (2.1.8) denkleminin sıfır çözümü $t_0 = 0$ da kararlıdır ama $\widetilde{t}_0 \geq 3\pi$ noktalarında kararsızdır.

Şüphesiz, bu tür bir durum sabit katsayılı gecikmeli (2.1.6) denklemi için ya da daha genel olarak bir gecikmeli otonom sistem için ortaya çıkmaz (Teorem 2.1.1).

Adi diferensiyel denklemlerde böyle bir durum zaten söz konusu değildir. Yani t_0 da kararlı olan çözümler t_0 dan büyük noktalarda da kararlıdır. Ancak, bu özellik gecikmeli diferensiyel denklemler için sadece " bir yönde " geçerlidir. Bununla ilgili olarak bir teorem vermeden önce aşağıdaki lemmayı ispatlayalım.

Lemma 2.1.1. (Sürekli Bağımlılık) (2.1.1)-(2.1.2) başlangıç değer problemini ele alalım. $t_0 > \alpha$, $T > t_0$ ve $\varepsilon > 0$ verilsin. Bu durumda

$$\|\phi\|_r < \delta$$

olduğu zaman her $t \in [t_0 - r, T]$ için tanımlı ve

$$\|x(t;t_0,\phi)\| < \varepsilon \ , \ t_0 - r \le t \le T \ ,$$

olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı vardır.

İspat: $\varepsilon < H$ olsun. Her bir $t \in [t_0, T]$ için a_t ve $b_t \in (0, H)$ yeterince küçük seçilsin öyle ki $t - a_t > \alpha$ ve F fonksiyoneli $[t - a_t, t + a_t]x\{\psi \in C : \|\psi\|_r \le b_t\}$ üzerinde K_t Lipschitz sabitli Lipschitzian olsun. Heine-Borel Teoremi (Teorem 1.3.3) gereğince, bir sonlu $\{t_1, \ldots, t_l\} \subset [t_0, T]$ noktalar cümlesi vardır öyle ki

$$[t_0, T] \subset \bigcup_{k=1}^{l} (t_k - a_{t_k}, t_k + a_{t_k})$$

dır.

$$K = \min\{K_{t_1}, \ldots, K_{t_l}\},\ b = \min\{b_{t_1}, \ldots, b_{t_l}\} \text{ ve } D_1 = \{\xi \in R^n : \|\xi\| < b\}$$

olsun. Bu durumda F, $[t_0, T]xC_D$ üzerinde global olarak K Lipschitz sabitli Lipschitziandır. Şimdi

$$\delta\, e^{K(t-t_0)} \le \varepsilon$$

olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısını seçelim. $\|\phi\|_r < \delta$ ve $x(t;t_0,\phi)$ fonksiyonu $t_0 - r \le t < \beta_1$ aralığında (2.1.1)-(2.1.2) probleminin sürdürülemeyen çözümü olsun. Bu durumda Teorem1.3.4 gereği $t_0 - r \le t < \min\{\beta_1, T\}$ için

$$\|x(t;t_0,\phi)\| \le \|\phi\|_r e^{K(t-t_0)} < \varepsilon$$

yazılabilir.

Son olarak Teorem 1.3.2 den $\min\{\beta_1, T\} < \beta_1$ sonucuna ulaşılır ve dolayısıyla $\min\{\beta_1, T\} = T$ dir. Buradan

$$\|x(t;t_0,\phi)\| \le \|\phi\|_r e^{K(t-t_0)} < \varepsilon \ , \ t_0 - r \le t \le T \ ,$$

elde edilir.

Teorem 2.1.2. (2.1.1) denkleminin sıfır çözümü bir $t_0 > \alpha$ noktasında kararlı olsun. Bu durumda sıfır çözümü aynı zamanda her $\widetilde{t_0} \in (\alpha, t_0)$ noktasında kararlıdır.

İspat: Her bir $\varepsilon > 0$ için bir $\delta = \delta(\varepsilon, t_0) > 0$ vardır öyle ki $\|\phi\|_r < \delta$ olduğu zaman her $t \geq t_0$ için $\|x(t; t_0, \phi)\| < \varepsilon$. Buradan verilen herhangi bir $\widetilde{t_0} \in (\alpha, t_0)$ için bir $\widetilde{\delta} > 0$ sayısı seçilebilir öyle ki, $\|\widetilde{\phi}\|_r < \widetilde{\delta}$ olduğu zaman her $\widetilde{t_0} - r \leq t \leq t_0$ için $\|x(t; \widetilde{t_0}, \widetilde{\phi})\| < \delta$. Dolayısıyla her $t \geq \widetilde{t_0} - r$ için $\|x(t; \widetilde{t_0}, \widetilde{\phi})\| < \varepsilon$.

Uyarı 2.1.4. Örnek 2.1.5 de $\widetilde{t_0} > t_0$ olduğuna dikkat edelim. Ayrıca adi diferensiyel sistemler özelinde bir t_0 noktasındaki kararlılığın her $\widetilde{t_0} > \alpha$ noktasındaki kararlılığı ifade ettiğini belirtelim. Bu yüzden adi diferensiyel sistemler için "t_0 noktasında kararlıdır" demek yerine sadece "sıfır çözümü kararlıdır" ifadesi kullanılır.

2.2. Lyapunov Yöntemi

Örnek 2.1.4 de ele alınan gecikmeli diferensiyel denkleminin sıfır çözümünün kararlılık problemi, bir yardımcı *v(t)* fonksiyonunun $[t_0, \infty)$ aralığındaki davranışı yardımıyla incelendi. Lyapunov yöntemi olarak bilinen bu yöntem ilk kez A.M. Lyapunov tarafından 1892 de adi diferensiyel denklemler için tanımlandı. Daha sonra bu yöntem Krasovskii ve diğerleri tarafından 1959 yılında gecikmeli diferensiyel denklemlere genişletildi.

Şimdi

$$x'(t) = F(t, x_t) \tag{2.2.1}$$

sistemini tekrar ele alalım; burada $F : (\alpha, \infty) x C_D \to R^n$ fonksiyoneli süreklilik koşulunu sağlamak üzere lokal Lipschitzian ve yarı sınırlı olup D cümlesi

$$D = \{\xi \in R^n : \|\xi\| < H\}$$

şeklinde verilmektedir. Ayrıca $F(t,0) = 0$ olsun. Bu kesimde (2.2.1) sistemine ilişkin sıfır çözümünün kararlılığının Lyapunov yöntemi yardımıyla incelenmesi amaçlanmaktadır.

Lyapunov-Krasovskii yöntemi

$$V:(\alpha,\infty)xC_D \to [0,\infty)$$

şeklinde tanımlı bir

$$v(t) \equiv V(t,x_t)\,,\; t \geq t_0 > \alpha\,,$$

fonksiyonelinin bulunmasına dayanır; burada $V(t,0) \equiv 0$ olmak üzere $x = x(t;t_0,\phi)$, (2.2.1) denkleminin

$$x_{t_0} = \phi \qquad (2.2.2)$$

başlangıç koşulunu sağlayan çözümüdür. Bu yönteme göre sıfır çözümünün t_0 noktasında kararlı olduğunu anlamak için, $v(t_0) = V(t_0,\phi)$ yeterince küçük olduğu zaman $v(t) = V(t,x_t)$ ifadesinin de her $t \geq t_0$ için küçük kaldığını göstermek gerekmektedir. Böyle bir özelliğe sahip olan V fonksiyoneline bir *Lyapunov fonksiyoneli* denir.

Özel olarak, bir adi diferensiyel sistem için V fonksiyonu $(\alpha,\infty)xD$ üzerinde tanımlı bir *Lyapunov fonksiyonu* olur.

$V(t,x_t)$ fonksiyoneline bir örnek teşkil etmek için Örnek 2.1.4 de kullanılan

$$v(t) = x^2(t) + |a|\int_{t-r}^{t} x^2(s)ds$$

fonksiyonunu ele alalım. Buradan

$$v(t) = x_t^2(0) + |a|\int_{-r}^{0} x_t^2(\sigma)d\sigma$$

yazılabilir. Böylece RxC üzerinde tanımlı uygun bir V fonksiyoneli

$$V(t,\psi) = \psi^2(0) + |a|\int_{-r}^{0} \psi^2(s)ds$$

biçiminde verilebilir.

Fiziksel olaylar tarafından motive edilen örneklerde, Lyapunov fonksiyonları ya da fonksiyonelleri çoğunlukla karşılık gelen fiziksel sistemdeki enerjiyi temsil ederler. Öte yandan $v(t)=V(t,x_t)$ ifadesi, bilinmeyen fonksiyonla olan ilişkisinden dolayı genellikle t cinsinden tam olarak hesaplanamaz. Ama yine de bu fonksiyonu incelemek diferensiyel sistemin kendi çözümünü incelemekten daha ümit vericidir.

Teorem 2.2.1. w ve W, $[0,H]$ üzerinde sürekli azalmayan fonksiyonlar olmak üzere 0 da sıfır ve $(0,H)$ aralığında pozitif olsunlar. Aşağıdaki koşullar sağlanacak şekilde $(\alpha,\infty)xC_D$ üzerinde tanımlı negatif olmayan bir V fonksiyoneli var ise, bu durumda (2.2.1) denkleminin sıfır çözümü düzgün kararlıdır:

(a) $V(t,\psi)\geq w(\|\psi(0)\|)$,

(b) $V(t,\psi)\leq W(\|\psi\|_r)$,

(c) (2.2.1) denkleminin, $(t_0,\phi)\in(\alpha,\infty)xC_D$ noktasından geçen sürdürülemeyen $x=x(t;t_0,\phi)$, $t\in[t_0-r,\beta_1)$, çözümü boyunca $V(t,x_t)$ fonksiyoneli $[t_0,\beta_1)$ aralığında t ye göre artmayandır.

İspat: $\varepsilon>0$ verilsin ve $0<\varepsilon<H$ olsun. Bu durumda $w(\varepsilon)>0$ olup, W nun sürekliliğinden dolayı

$$W(\delta)<w(\varepsilon) \tag{2.2.3}$$

olacak şekilde bir $\delta=\delta(\varepsilon)\in(0,\varepsilon)$ seçilebilir. Şimdi $\|\phi\|_r<\delta$ olmak üzere herhangi bir $(t_0,\phi)\in(\alpha,\infty)xC_D$ noktasını göz önüne alalım. Bu durumda (2.2.1) denkleminin (t_0,ϕ) den geçen ve bir $\beta_1>t_0$ için $[t_0-r,\beta_1)$ üzerinde tanımlı olan bir tek sürdürülemeyen $x=x(t;t_0,\phi)$ çözümü vardır.

Buradan *(a)*, *(b)* ve *(c)* hipotezleri ile birlikte (2.2.3) koşulu kullanılırsa, $t_0\leq t<\beta_1$ için

$$w(\|x(t)\|)\leq V(t,x_t)\leq V(t_0,\phi)\leq W(\|\phi\|_r)\leq W(\delta)<w(\varepsilon)$$

elde edilir. w azalmayan bir fonksiyon olduğundan, yukarıdaki eşitsizlik sadece

$$\|x(t)\| < \varepsilon \ , \quad t_0 \le t < \beta_1 \ ,$$

olduğu zaman gerçeklenir. O halde Teorem 1.3.2 den dolayı $\beta_1 = \infty$ dur ve böylece ispat tamamlanmış olur.

Tanım 2.2.1. $r > 0$ için $w(r) > 0$ ve $w(0) = 0$ olmak üzere skaler artan $w \in C[0,\infty)$ fonksiyonlarının cümlesi Ω olsun. Ayrıca

$$Q_H = \{\psi \in C[-h,0] : \|\psi\|_r < H\}$$

cümlesini göz önüne alalım. Her $t \in R$ ve $\psi \in Q_H$ için

(a) $$V(t,\psi) \ge w(\|\psi(0)\|)$$

olacak şekilde bir $w \in \Omega$ fonksiyonu varsa, $V(t,\psi)$ fonksiyoneline *pozitif definittir* denir;

(b) $$V(t,\psi) \le -w(\|\psi(0)\|)$$

olacak şekilde bir $w \in \Omega$ fonksiyonu varsa, $V(t,\psi)$ fonksiyoneline *negatif definittir* denir;

(c) $$|V(t,\psi)| \le w(\|\psi\|_r)$$

olacak şekilde bir $w \in \Omega$ fonksiyonu varsa, $V(t,\psi)$ fonksiyoneline bir *infinitesimal üst limite* sahiptir ya da *decrescent* denir.

Bu tanıma göre Teorem 2.2.1 deki $V(t,\psi)$ fonksiyoneli pozitif definit olup bir infinitesimal üst limite sahiptir.

Uyarı 2.2.1. ψ fonksiyonu sabit ise, bu durumda her $s \in [0,H)$ için $w(s) \le W(s)$ dir. Öte yandan *(c)* koşulu, genellikle, $V(t,x_t)$ fonksiyoneli $t \ge t_0$ için sürekli ve $t > t_0$ için $\frac{d}{dt}V(t,x_t) \le 0$ olduğu zaman gerçeklenmiş olur. Bu durumda $V(t,x_t)$ nin artmayanlık özelliği Ortalama Değer Teoreminden ortaya çıkar.

Örnek 2.2.1. Gecikmeli diferensiyel

$$x'(t) = ax(t) + bx(t-r) \qquad (2.2.4)$$

denklemini $\alpha = -\infty$ ve $D = R$ olmak üzere tekrar ele alalım. $a \le 0$, $r > 0$ ve

$-\frac{1}{r} \le b \le 0$ koşulları altında (2.2.4) denkleminin sıfır çözümü düzgün kararlıdır:

$x = x(t;t_0,\phi)$, (2.2.4) denkleminin $x_{t_0} = \phi$ başlangıç koşulunu sağlayan çözümü ise, bu durumda

$$x(t-r) = x(t) - \int_{t-r}^{t} x'(s)ds$$
$$= x(t) - \int_{t-r}^{t} [ax(s) + bx(s-r)]ds \ , \quad t \ge t_0 + r \ ,$$

dir. Adımlar yönteminden x in $[t_0 - r, \infty)$ üzerinde mevcut olduğu bilinmektedir. Dolayısıyla

$$x'(t) = (a+b)x(t) - b\int_{t-r}^{t} [ax(s) + bx(s-r)]ds \ , \quad t \ge t_0 + r, \tag{2.2.5}$$

yazılabilir. (2.2.5) denklemi, sonsuz sayıda gecikme üreten bir gecikmeli diferensiyel denklemdir. Ancak bu denklemin maksimum gecikmesi $2r$ dir.

V fonksiyoneli, $RxC([-2r,0],R)$ üzerinde

$$V(t,\psi) \equiv \psi^2(0) + \frac{|a|}{r}\int_{-r}^{0}\int_{\sigma}^{0} \psi^2(s)dsd\sigma + \frac{|b|}{r}\int_{-r}^{0}\int_{\sigma-r}^{0} \psi^2(s)dsd\sigma$$

şeklinde tanımlansın.Buradan

$$|\psi(0)|^2 \le V(t,\psi) \le (1 + \frac{1}{2}|a|r + \frac{3}{2}|b|r)\|\psi\|_{2r}^2 \tag{2.2.6}$$

hesaplanır; burada

$$\|\psi\|_{2r} \equiv \sup_{-2r \le \sigma \le 0} |\psi(\sigma)|$$

dır. (2.2.6) eşitsizliği Teorem 2.2.1 in *(a)* ve *(b)* hipotezlerine karşılık gelir. Ancak *(c)* koşulunu tam olarak hesaplamak yerine (2.2.4) denkleminin $x = x(t;t_0,\phi)$ çözümünü $t \ge t_0 + r$ için ele alalım. Bu durumda $-2r \le \sigma \le 0$ için $x_t(\sigma) \equiv x(t+\sigma)$ olmak üzere

$$V(t,x_t) = x^2(t) + \frac{|a|}{r}\int_{-r}^{0}\int_{t+\sigma}^{t} x^2(u)dud\sigma + \frac{|b|}{r}\int_{-r}^{0}\int_{t+\sigma-r}^{t} x^2(u)dud\sigma$$

yazılabilir. Böylece (2.2.5) den $t \ge t_0 + r$ için,

$$\frac{d}{dt}V(t,x_t) = 2(a+b)x^2(t) - 2abx(t)\int_{t-r}^{t} x(s)ds - 2b^2x(t)\int_{t-r}^{t} x(s-r)ds$$

$$+\frac{|a|}{r}\int_{-r}^{0}[x^2(t) - x^2(t+\sigma)]d\sigma + \frac{|b|}{r}\int_{-r}^{0}[x^2(t) - x^2(t+\sigma-r)]d\sigma$$

$$= \frac{1}{r}\int_{-r}^{0}\{(a+b)x^2(t) - 2abr\, x(t)x(t+\sigma)$$

$$-2b^2r\, x(t)x(t+\sigma-r) + ax^2(t+\sigma) + bx^2(t+\sigma-r)\}d\sigma$$

$$\leq \frac{1}{r}\int_{-r}^{0}\{a(1+br)[x^2(t)+x^2(t+\sigma)] + b(1+br)[x^2(t)+x^2(t+\sigma-r)]\}d\sigma$$

$$\leq 0$$

elde edilir. *(c)* koşulu tam olarak sağlanmadığından Teorem 2.2.1 doğrudan uygulanamaz. Bununla beraber (2.2.6) eşitsizliğinden verilen bir $\varepsilon > 0$ için

$$\sup_{t_0 - r \leq t \leq t_0 + r} |x(t;t_0,\phi)| < \varepsilon(1 + \frac{1}{2}|a|r + \frac{3}{2}|b|r)^{-1/2} \tag{2.2.7}$$

alınırsa,

$$|x(t;t_0,\phi)| < \varepsilon \quad , \ t \geq t_0 - r \ ,$$

bulunur. O halde (2.2.4) denkleminin sıfır çözümü düzgün kararlıdır.

Teorem 2.2.2. Bir sürekli pozitif definit $V : RxQ_H \to R$ fonksiyoneli varsa ve bunun için $\dot{V} \leq 0$ ise, bu durumda (2.2.1) denkleminin sıfır çözümü kararlıdır (Kolmanovskii ve Myshkis 1999).

İspat: $\varepsilon \in (0,H)$ verilsin. $V(t_0,0) \equiv 0$ olduğundan,

$$\max_{\|\phi\|_r \leq \delta(\varepsilon,t_0)} V(t_0,\phi) \leq w_1(\varepsilon)$$

olacak şekilde bir $\delta(\varepsilon,t_0) \in (0,H)$ sayısı seçilebilir. $\dot{V} \leq 0$ koşulundan dolayı V fonksiyonu (2.2.1) denkleminin çözümü boyunca artmayandır. Buradan $t \geq t_0$ için

$$w_1(\|x(t)\|) \leq V(t,x_t) \leq V(t_0,x_{t_0}) = V(t_0,\phi) \leq w_1(\varepsilon)$$

yazılabilir. w_1 in monotonluk özelliği göz önüne alındığı takdirde $t \geq t_0$ için $\|x(t)\| \leq \varepsilon$ bulunur.

Uyarı 2.2.2. Teorem 2.2.2 nin hipotezlerine ek olarak $V(t,\psi)$ fonksiyoneli bir infinitesimal üst sınıra sahip ise, o zaman sıfır çözümü düzgün kararlı olur (Teorem 2.2.1).

3. ASİMPTOTİK KARARLILIK DURUMU

3.1. Giriş

Bu bölümde asimptotik ve düzgün asimptotik kararlılık tanımları verilecek ve bazı sonuçlardan söz edilecektir.

Yine sınırlı gecikmeli

$$x'(t) = F(t, x_t) \tag{3.1.1}$$

sistemini ve

$$x_{t_0} = \phi \tag{3.1.2}$$

başlangıç koşulunu ele alalım; burada $F:(\alpha,\infty)xC_D \to R^n$, $D = \{\xi \in R^n : \|\xi\| < H\}$, $C_D = C([-r,0], D)$ ve $F(t,0) = 0$ dır. Ayrıca F fonksiyonelinin $[t_0,\infty)xC_D$ üzerinde süreklilik koşulunu sağladığı, lokal Lipschitzian ve yarı sınırlı olduğu kabul edilmektedir.

Tanım 3.1.1. (3.1.1) denkleminin sıfır çözümü $t_0 > \alpha$ noktasında kararlı ve

$$\|\phi\|_r < \delta_1$$

olduğu zaman

$$\lim_{t\to\infty} x(t; t_0, \phi) = 0$$

olacak şekilde bir $\delta_1 = \delta_1(t_0) > 0$ sayısı varsa, bu durumda (3.1.1) denkleminin sıfır çözümüne t_0 noktasında *asimptotik kararlıdır* denir.

Örnek 3.1.1. Sabit matris katsayılı ve sabit $r_j \in [0,r]$ gecikmeli

$$x'(t) = \sum_{j=1}^{m} A_j x(t - r_j) \tag{3.1.3}$$

sistemine ilişkin karakteristik

$$\det\left(\lambda I - \sum_{j=1}^{m} A_j e^{-\lambda r_j}\right) = 0 \tag{3.1.4}$$

denkleminin bütün kökleri negatif reel kısımlı ise, bu durumda (3.1.3) denkleminin sıfır çözümü her bir $t_0 \in R$ noktasında asimptotik kararlıdır. Gerçekten, Teorem1.3.5 den dolayı,

$$\|x(t;t_0,\phi)\| \le M\|\phi\|_r e^{-\gamma(t-t_0)} \ , \ t \ge t_0 \ , \qquad (3.1.5)$$

olacak şekilde M ve γ pozitif sabitleri vardır.

3.2. Düzgün Asimptotik Kararlılık

Tanım 3.2.1. (3.1.1) denkleminin sıfır çözümü düzgün kararlı olmak üzere $t_0 > \alpha$, $t \ge t_0 + T(\eta)$ ve $\|\phi\|_r < \delta_1$ için

$$\|x(t;t_0,\phi)\| < \eta$$

olacak şekilde t_0 dan bağımsız bir $\delta_1 > 0$ sayısı varsa ve ayrıca her $\eta > 0$ sayısına karşılık bir $T(\eta) > 0$ sayısı bulunabiliyorsa, o zaman sıfır çözümüne *düzgün asimptotik kararlıdır* denir.

Örnek 3.2.1. (3.1.3) denkleminin sıfır çözümü aynı zamanda *RxC* üzerinde düzgün asimptotik kararlıdır. Çünkü herhangi bir $\delta_1 > 0$ sayısı için $t_0 \in R$ ve $\|\phi\|_r < \delta_1$ ise, Teorem1.3.5 den

$$\|x(t;t_0,\phi)\| \le M\delta_1 e^{-\gamma(t-t_0)} \ , t \ge t_0 \ ,$$

yazılabilir. Buradan da her $\eta > 0$ sayısına karşılık $T(\eta) \ge \gamma^{-1}\ln(M\delta_1/\eta)$ şeklinde bir $T(\eta) > 0$ sayısı belirlenebilir öyle ki her $t \ge t_0 + T(\eta)$ için

$$\|x(t;t_0,\phi)\| < \eta$$

dır.

Teorem 3.2.1. (3.1.1) denklemi otonom olsun. (3.1.1) in sıfır çözümü bir $t_0 \in R$ noktasında asimptotik kararlı ise, bu durumda aynı sıfır çözümü düzgün asimptotik kararlıdır.

Bu teoremin ispatı Teorem 2.1.1 in ispatına benzerdir.

Teorem 3.2.2. (3.1.1) denkleminin sıfır çözümü bir $t_0\,(t_0 > \alpha)$ noktasında asimptotik kararlı ise, bu durumda sıfır çözümü aynı zamanda her bir $\tilde{t}_0 \in (\alpha, t_0)$ noktasında da asimptotik kararlıdır.

Bu teoremin ispatı Teorem 2.1.2 nin ispatına benzerdir.

Aşağıdaki teorem, gecikmeli diferensiyel denklemlere uygulanabilen, asimptotik kararlılıkla ilgili bir temel Lyapunov teoremi niteliğindedir.

Teorem 3.2.3. w, W ve w_1 skaler fonksiyonları $[0,H)$ üzerinde azalmayan, sürekli, 0 da sıfır ve $(0,H)$ üzerinde pozitif olsunlar. Her $(t,\psi) \in (\alpha,\infty)xC_D$ için $\|F(t,\psi)\| \le B$ olsun; burada B>0 bir sabittir. $(\alpha,\infty)xC_D$ üzerinde tanımlı olan ve aşağıdaki şartları sağlayan bir V fonksiyoneli mevcut ise, bu durumda (3.1.1) denkleminin sıfır çözümü düzgün asimptotik kararlıdır:

(a) $V(t,\psi) \ge w(\|\psi(0)\|)$,

(b) $V(t,\psi) \le W(\|\psi\|_r)$,

(c) $(t_0,\phi) \in (\alpha,\infty)xC_D$ ve $x = x(t,t_0,\phi)$ çözümü $[t_0 - r, \beta_1)$ üzerinde tanımlı olmak üzere $t_0 \le t < \beta_1$ için $\frac{d}{dt}V(t,x_t) \le -w_1(\|x(t)\|)$.

İspat: Bu teoremin hipotezleri Teorem 2.2.1 in hipotezlerini kapsadığı için sıfır çözümü düzgün kararlıdır.

Düzgün asimptotik kararlılığın kanıtı için bir $H_1 \in (0,H)$ sayısını ve

$$W(\delta_1) < w(H_1)$$

olacak şekilde t_0 dan bağımsız bir $\delta_1 > 0$ sayısını seçelim; burada $\delta_1 < H$ dır. Verilen bir keyfi $\eta \in (0,\delta_1]$ sayısı için

$$W(\gamma) < w(\eta)$$

sağlanacak şekilde bir $\gamma > 0$ seçelim. Buna göre $0 < \gamma < \eta \le \delta_1$ dir. Bir pozitif K tamsayısı

$$K > \frac{W(\delta_1)}{w_1(\gamma/2)\gamma} 2B$$

şeklinde seçilmek üzere $T(\eta) = Kr_1$ olsun; burada $r_1 = \max\left\{r, \gamma/_B\right\}$ dir. Şimdi (3.1.1) denkleminin $\|\phi\|_r < \delta_1$ olmak üzere $(t_0, \phi) \in (\alpha, \infty)xC_D$ den geçen çözümü $x = x(t; t_0, \phi)$ olsun. Bu durumda, düzgün kararlılık kanıtından ve δ_1 in seçiminden dolayı x çözümü mevcut olup her $t \geq t_0 - r$ için

$$\|x(t)\| \leq H_1 < H$$

sağlanır. Şimdi bir $t_1 \in [t_0, t_0 + T(\eta)]$ için

$$\|x_{t_1}\|_r < \gamma$$

olduğunu gösterelim. Çelişkiye varmak için, $\|x_t\|_r \geq \gamma$, her $t \in [t_0, t_0 + T(\eta)]$, olduğunu kabul edelim. Bu durumda $k = 0,1,\ldots,$K-1 için her bir $[t_0 + kr_1, t_0 + (k+1)r_1]$ aralığında uzunluğu en az $\gamma/_{2B}$ olan bir alt aralık vardır ki bu aralık üzerinde

$$\|x(t)\| \geq \frac{\gamma}{2}$$

dir. Bu aralıklar üzerinde

$$\frac{d}{dt}V(t, x_t) \leq -w_1(\gamma/_2)$$

dir. Buradan $t = t_0 + T(\eta) = t_0 + Kr_1$ için (b) ve K nın seçiminden dolayı,

$$\begin{aligned} V(t, x_t) &\leq V(t_0, \phi) - Kw_1(\frac{\gamma}{2})\frac{\gamma}{2B} \\ &< W(\delta_1) - W(\delta_1) = 0 \end{aligned}$$

dır. Bu ise $V(t, \psi)$ nin negatif olmaması durumuyla çelişir. O halde bir $t_1 \in [t_0, t_0 + T(\eta)]$ için $\|x_{t_1}\|_r < \gamma$ olup her $t \geq t_1$ için

$$V(t, x_t) \leq V(t_1, x_{t_1}) \leq W(\gamma) < w(\eta)$$

sonucu çıkar. Böylece her $t \geq t_1$ (özel olarak her $t \geq t_0 + T(\eta)$) için

$$\|x(t)\| < \eta$$

olduğundan dolayı sıfır çözümü düzgün asimptotik kararlıdır.

Örnek 3.2.2.

$$x'(t) = ax(t) + bx(t-r) \tag{3.2.1}$$

denklemini ele alalım; burada $a < 0$, $|b| < |a|$ ve $r \geq 0$ dır.

$\alpha = -\infty$ ve bir $H > 0$ için $D = (-H, H)$ alınırsa, her $(t,\psi) \in RxC_D$ için

$$|F(t,\psi)| \leq (|a| + |b|)H$$

olur. Ayrıca

$$V(t,\psi) = \psi^2(0) + |a| \int_{-r}^{0} \psi^2(\sigma) d\sigma \ , \ (t,\psi) \in RxC_D \ ,$$

şeklinde tanımlanan V fonksiyoneli Teorem 3.2.3 ün (*a*), (*b*) ve (*c*) koşullarını sağlar. (*c*) koşulunu gerçeklemek için keyfi bir $(t_0,\phi) \in RxC_D$ için $x = x(t;t_0,\phi)$ olsun. Buradan her $t \geq t_0$ için

$$V(t,x_t) = x^2(t) + |a| \int_{t-r}^{t} x^2(s) ds$$

olup

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} V(t,x_t) &\leq (-|a| + |b|)[x^2(t) + x^2(t-r)] \\ &\leq (-|a| + |b|) x^2(t) \end{aligned}$$

dir. Bu ise,

$$w_1(s) = (|a| - |b|) s^2$$

olmak üzere (*c*) koşuludur. Böylece Teorem 3.2.3 ün bütün koşulları sağlandığından, (3.2.1) denkleminin sıfır çözümü düzgün asimptotik kararlıdır.

Şimdi otonom sistemler için (*c*) koşulunu daha esnek hale koyan bir sonuç verelim. Bu önemli sonuç ilk defa Barbasin ve Krasovskii tarafından 1952 de ispatlandı. Daha sonra bu sonuç, Krasovskii tarafından 1959 yılında gecikmeli diferensiyel sistemlere genişletildi.

Teorem 3.2.4.

$$x'(t) = F(x_t) \tag{3.2.2}$$

denklemini ele alalım; burada $\alpha = -\infty$ ve $F : C_D \to R^n$ olmak üzere $\psi = 0$ için $F(\psi) = 0$ dır. w ve W Teorem 3.2.3 deki gibi olsunlar. Aşağıdaki koşulları sağlayan bir $V : C_D \to [0,\infty)$ fonksiyoneli mevcut ise, bu durumda (3.2.2) denkleminin sıfır çözümü düzgün asimptotik kararlıdır:

(a) $V(\psi) \geq w(\|\psi(0)\|)$,

(b) $V(\psi) \leq W(\|\psi\|_r)$,

(c') $(t_0, \phi) \in RxC_D$ ve $x = x(t; t_0, \phi)$ çözümü $[t_0 - r, \beta)$ üzerinde tanımlı olduğu sürece $t_0 \leq t < \beta_1$ için

$$\frac{d}{dt}V(x_t) \leq 0 \, ;$$

$\frac{d}{dt}V(x_t) \equiv 0$ özdeşliği sadece $\phi = 0$ halinde sağlanır.

Örnek 3.2.3. (Krasovskii 1959)

$$mz''(t) + bz'(t) + qz'(t-r) + kz(t) = 0$$

denklemini veya buna eşdeğer olan gecikmeli

$$\begin{aligned} x_1'(t) &= x_2(t) \\ x_2'(t) &= -\frac{k}{m}x_1(t) - \frac{b}{m}x_2(t) - \frac{q}{m}x_2(t-r) \end{aligned} \qquad (3.2.3)$$

sistemini ele alalım; burada *m, b, q, k* ve *r* pozitif sabitler olup $\alpha = -\infty$ ve $H = +\infty$ dur.

Lyapunov fonksiyoneli

$$V(\psi) = \frac{1}{2}k\psi_1^2(0) + \frac{1}{2}m\psi_2^2(0) + \frac{1}{2}b\int_{-r}^{0}\psi_2^2(s)ds$$

şeklinde tanımlansın. Bu V fonksiyoneli Teorem 3.2.4 ün (a) ve (b) koşullarını sağlar. $(t_0, \phi) \in RxC$ ve $x = x(t; t_0, \phi)$ olduğu zaman $t \geq t_0$ için

$$\frac{d}{dt}V(x_t) = -\frac{1}{2}bx_2^2(t) - qx_2(t)x_2(t-r) - \frac{1}{2}bx_2^2(t-r)$$

elde edilir. Buradan $q < b$ olduğu zaman aynı teoremin (c') koşulu da sağlanmış olur. O halde Teorem 3.2.4 den dolayı (3.2.3) sisteminin sıfır çözümü düzgün asimptotik kararlıdır.

4. LİNEER ve YARI LİNEER GECİKMELİ DİFERENSİYEL DENKLEM SİSTEMLERİ

4.1. Giriş

Adi diferensiyel denklemler teorisinden bilinmektedir ki lineer diferensiyel sistemin sıfır çözümü düzgün asimptotik kararlı olduğu zaman, diferensiyel sistemin ikinci yanına uygun bir şekilde küçük lineer olmayan terimler eklendiğinde ortaya çıkan yeni lineer olmayan sistemlerin sıfır çözümü de düzgün asimptotik kararlı olur. Örneğin skaler lineer olmayan

$$x' = -3x + (\sin t)\sin x^2$$

denklemine ait sıfır çözümünün düzgün asimptotik kararlı olması durumu

$$x' = -3x$$

lineer denklemi yardımıyla söylenebilir. Çünkü verilen denklem $x' = -3x$ lineer denkleminin bir *pertürbasyonlu* haline karşılık gelmektedir; burada pertürbasyon terimi $(\sin t)\sin x^2$ olup küçük x ler için küçük olduğu açıktır.

Adi diferensiyel denklemler için bu konuda yapılan incelemeler genel olarak lineer homogen

$$y' = A(t)y \tag{4.1.1}$$

sistemini ve buna ilişkin pertürbid

$$x' = A(t)x + h(t,x) \tag{4.1.2}$$

sistemini kapsamaktadır.

Bu bölümde (4.1.1) ve (4.1.2) adi denklemleri için elde edilen bazı sonuçlar lineer

$$y'(t) = \sum_{j=1}^{m} A_j(t)y(t-r_j) \tag{4.1.3}$$

sistemine ve

$$x'(t) = \sum_{j=1}^{m} A_j(t)x(t-r_j) + h(t,x_t) \equiv F(t,x_t) \tag{4.1.4}$$

şeklinde tanımlı pertürbid sistemine genişletilecektir. Burada her bir A_j katsayısı (α,∞) üzerinde sürekli nxn türünde matris değerli bir fonksiyondur ve her bir r_j gecikmesi $[0,r]$ içinde bir sabittir; $h:(\alpha,\infty)xC_D \to R^n$; $F:(\alpha,\infty)xC_D \to R^n$, $D=\{\xi \in R^n : \|\xi\| < H\}$ ve $F(t,0)=0$ olmak üzere F fonksiyoneli süreklilik koşulunu sağlar, lokal Lipschitzian ve yarı sınırlıdır. Ayrıca (4.1.3) ve (4.1.4) deki gecikmeler aynı sayıda olmayabilir. Hatta, (4.1.4) deki gecikmeler sabit bile olmayabilir.

4.2. Lineer Gecikmeli Sistemler

Bu kesimde gecikmeli (4.1.3) lineer homogen

$$y'(t)=\sum_{j=1}^{m} A_j(t)y(t-r_j) \tag{4.2.1}$$

sistemi ele alınacak ve bununla ilgili olan bazı sonuçlar üzerinde durulacaktır.

Lemma 4.2.1. (4.2.1) denklemine ait sıfır çözümünün düzgün kararlı olması için gerek ve yeter koşul

$$\|y(t;t_0,\phi)\| \le M_1\|\phi\|_r \,,\ \forall t \ge t_0 > \alpha \text{ ve } \phi \in C, \tag{4.2.2}$$

olacak şekilde bir M_1 sabitinin mevcut olmasıdır. Ayrıca $M_1 \ge 1$ olduğundan, (4.2.2) eşitsizliği her $t \ge t_0 - r$ için geçerlidir.

İspat: (4.2.2) koşulu sağlanıyorsa açık olarak, (4.2.1) denkleminin sıfır çözümü düzgün kararlıdır.

Karşıt olarak (4.2.1) denkleminin sıfır çözümü düzgün kararlı olsun. Buna göre $\delta=\delta(1)$ alınabilir. Bu durumda $\|\phi\|_r < \delta$ ve $t \ge t_0 > \alpha$ olduğu zaman

$$\|y(t;t_0,\phi)\| < 1$$

dir.

$M_1 = 1/\delta$ olsun. Açık olarak, $\phi = 0$ iken (4.2.2) sağlanır. Keyfi bir $\phi \neq 0$ ele alalım. Bu durumda her bir $\delta^* \in (0,\delta)$ için

$$\left\| y(t;t_0,\delta^*\phi/\|\phi\|_r) \right\| < 1$$

elde edilir ya da lineerlikten her $t \geq t_0$ için

$$\|y(t;t_0,\phi)\| < \|\phi\|_r/\delta^*$$

yazılabilir. Şimdi her bir sabit $t_0 > \alpha$ değeri ve $t \geq t_0$ için $\delta^* \to \delta$ alınırsa,

$$\|y(t;t_0,\phi)\| \leq \|\phi\|_r/\delta = M_1\|\phi\|_r$$

bulunur. Ayrıca, buradan $M_1 \geq 1$ sonucu çıkar ki buradan (4.2.2) eşitsizliği $t_0 - r \leq t \leq t_0$ için de sağlanmış olur.

Teorem 4.2.1. (4.2.1) denkleminin sıfır çözümünün düzgün asimptotik kararlı olması, ancak ve ancak her $(t_0,\phi) \in (\alpha,\infty)xC$ için

$$\|y(t;t_0,\phi)\| \leq M\|\phi\|_r e^{-\gamma(t-t_0)} \quad , \; t \geq t_0 \; , \tag{4.2.3}$$

ya da buna eşdeğer olarak

$$\|y_t(.;t_0,\phi)\|_r \leq Me^{\gamma r}\|\phi\|_r e^{-\gamma(t-t_0)} \quad , \; t \geq t_0 \; , \tag{4.2.4}$$

olacak şekilde $M \geq 1$ ve $\gamma > 0$ sabitlerinin mevcut olmasıdır.

İspat: Birbirine eşdeğer olan (4.2.3) ve (4.2.4) eşitsizliklerinden biri sağlandığı takdirde (4.2.1) denkleminin sıfır çözümünün düzgün asimptotik kararlı olacağı kolayca görülebilir.

Tersini göstermek için (4.2.1) denklemine ait sıfır çözümünün düzgün asimptotik kararlı olduğunu kabul edelim. Bu durumda Lemma 4.2.1 den dolayı her $t \geq t_0 > \alpha$ ve $\phi \in C$ için

$$\|y(t;t_0,\phi)\| \leq M_1\|\phi\|_r \tag{4.2.2'}$$

olacak şekilde bir M_1 sabiti vardır.

Şimdi $\delta_1 > 0$ düzgün asimptotik kararlılık tanımındaki gibi olsun. Buradan $\eta = \dfrac{\delta_1}{2}$ alınırsa, bir $T > 0$ vardır öyle ki her $t_0 > \alpha$ ve $\phi \in C$ için

$$\|\phi\|_r < \delta_1$$

olduğu zaman

$$\|y(t;t_0,\phi)\| < \delta_1/2 \;, \; \forall t \geq t_0 + T \,,$$

dir. Herhangi bir $\phi \neq 0$ ele alalım. Buradan her bir $\delta_1^* \in (0,\delta_1)$ için

$$\left\|y(t;t_0,\delta_1^*\phi/\|\phi\|_r)\right\| < \delta_1/2$$

ya da lineerlikten

$$\|y(t;t_0,\phi)\| < \frac{\delta_1}{2\delta_1^*}\|\phi\|_r \;, \; t \geq t_0 + T \,,$$

elde edilir. Şimdi sabit $t_0 > \alpha$ değeri ve $t \geq t_0 + T$ için $\delta_1^* \to \delta_1$ alınırsa,

$$\|y(t;t_0,\phi)\| \leq \frac{1}{2}\|\phi\|_r \;, \; t \geq t_0 + T \,,$$

bulunur. Bu ise

$$\|y_t(.;t_0,\phi)\|_r \leq \frac{1}{2}\|\phi\|_r \;, \; t \geq t_0 + T + r \;, \tag{4.2.5}$$

eşitsizliğini ifade eder. (4.2.5) in uygulaması tekrarlanırsa tümevarım yönteminden $k = 1,2,\ldots$ için $t_0 + k(T+r) \leq t \leq t_0 + (k+1)(T+r)$ aralıklarında

$$\|y_t(.;t_0,\phi)\|_r \leq 2^{-k}\|\phi\|_r = \|\phi\|_r e^{-(\ln 2)k}$$

elde edilir. Buradan $t \geq t_0 + T + r$ için

$$\begin{aligned}\|y_t(.;t_0,\phi)\|_r &\leq \|\phi\|_r e^{-(\ln 2)(t-t_0-T-r)/(T+r)} \\ &= 2\|\phi\|_r e^{-(\ln 2)(t-t_0)/(T+r)}\end{aligned}$$

çıkar. Bu eşitsizlik ve (4.2.2') birlikte ele alınırsa her $t \geq t_0$ için

$$\|y_t(.;t_0,\phi)\|_r \leq 2M_1\|\phi\|_r e^{-(\ln 2)(t-t_0)/(T+r)}$$

elde edilir. Bu ise, $\gamma = (\ln 2)/(T+r)$ ve $M = 2M_1 e^{-\gamma r}$ olmak üzere (4.2.4) eşitsizliğidir.

Aşağıdaki teoremde (4.2.3) eşitsizliğinin sadece $y_{t_0} = \phi$ sürekli fonksiyonuna değil aynı zamanda $y_{t_0} = \xi u$ şeklinde sürekli olmayan bir fonksiyona da uygulanabileceği gösterilecektir; burada $\xi \in R^n$ ve u

$$u(\sigma) \equiv \begin{cases} 0 \ , \ -r \le \sigma < 0 \\ 1 \ , \ \sigma = 0 \end{cases}$$

biçiminde tanımlı birimli basamak fonksiyonudur.

Teorem 4.2.2. (4.2.1) denkleminin sıfır çözümü düzgün asimptotik kararlı ise bu durumda, her bir $t_0 > \alpha$ ve her bir $\xi \in R^n$ için

$$\|y(t;t_0,\xi u)\| \le M\|\xi\| e^{-\gamma(t-t_0)} \ , \ t \ge t_0 \ , \tag{4.2.6}$$

dır; burada M ve γ sabitleri (4.2.3) eşitsizliğinde olduğu gibi olsunlar; ayrıca $\|\xi u\|_r = \|\xi\|$.

İspat: u fonksiyonuna yakın olan sürekli $u_{(l)}$ (l=1,2,...) fonksiyonlarını göz önüne alalım; burada

$$u_{(l)}(\sigma) \equiv \begin{cases} 0 & , -r \le \sigma < -r/l \ , \\ 1 + l\sigma/r & , -r/l \le \sigma \le 0 \ . \end{cases}$$

$y(t) = y(t;t_0,\xi u)$ ve $y_{(l)}(t) = y(t;t_0,\xi u_{(l)})$ olsun. Buradan $t \ge t_0$ için

$$y(t) - y_{(l)}(t) = \int_{t_0}^{t} \left\{ \sum_{j=1}^{m} A_j(s)\left[y(s-r_j) - y_{(l)}(s-r_j)\right] \right\} ds$$

dir. Her bir j için

$$K_j(t) = \max_{t_0 \le s \le t} \|A_j(s)\| \ \text{ve} \ K(t) = K_1(t) + \ldots + K_m(t)$$

alındığında, her $t \ge t_0$ için

$$\|y(t) - y_l(t)\| = \left\| \sum_{j=1}^{m} \left\{ \int_{t_0-r_j}^{t-r_j} A_j(s+r_j)\left[y(s) - y_l(s)\right] \right\} ds \right\|$$

$$\leq \sum_{j=1}^{m}\left\{\int_{t_0-r/l}^{t} K_j(t)\|y(s)-y_{(l)}(s)\|ds\right\}$$

$$\leq K(t)\|\xi\|\frac{r}{l}+\int_{t_0}^{t} K(t)\|y(s)-y_{(l)}(s)\|ds$$

elde edilir. Lemma 1.3.2 uygulanırsa,

$$\|y(t)-y_{(l)}(t)\|\leq \frac{K(t)r}{l}\|\xi\|e^{K(t)(t-t_0)} \quad , t\geq t_0 \ ,$$

bulunur. $\xi u_{(l)}\in C$ olduğundan,

$$\|y(t)\|\leq \|y(t)-y_{(l)}(t)\|+\|y_{(l)}(t)\|$$

$$\leq \frac{K(t)r}{l}\|\xi\|e^{K(t)(t-t_0)}+M\|\xi\|e^{-\gamma(t-t_0)} \quad , t\geq t_0 \ ,$$

dır. Bu eşitsizlik her l için sağlandığından, $l\rightarrow\infty$ alınabilir ve (4.2.6) eşitsizliği elde edilir.

4.3. Yarı Lineer Sistemler

Bu kesimde (4.1.4) lineer olmayan gecikmeli

$$x'(t)=\sum_{j=1}^{m}A_j(t)x(t-r_j)+h(t,x_t) \tag{4.3.1}$$

sistemi ele alınarak $h(t,\psi)$ nin küçük olması durumunda sıfır çözümünün düzgün asimptotik kararlı olması hakkında bazı sonuçlar ispatlanacaktır.

Önce, (4.3.1) sisteminin kararlılık durumu incelenirken karşılaşılan bir skaler gecikmeli diferensiyel eşitsizlikten ve bununla ilgili bir lemmadan söz edelim:

$$v'(t)\leq -\gamma\, v(t)+p(t)\|v_t\|_r \quad , t\geq t_0 \ , \tag{4.3.2}$$

burada γ ve p, $0<p<\gamma$ şeklinde sabitler olup $v(t)\geq 0$ dır.

Lemma 4.3.1. γ ve p sabitleri için $0 < p < \gamma$ olsun. v, $[t_0 - r, \beta)$ üzerinde negatif olmayan sürekli bir fonksiyon olmak üzere $t_0 \le t < \beta$ için (4.3.2) eşitsizliğini sağlasın. Bu durumda

$$v(t) \le \|v_{t_0}\|_r e^{-\lambda(t-t_0)} \quad , \; t_0 \le t < \beta \, , \tag{4.3.3}$$

dır; burada λ sabiti

$$\lambda = \gamma - pe^{\lambda r} \tag{4.3.4}$$

denkleminin tek pozitif köküdür (Halanay 1966).

İspat: (4.3.4) denkleminin bir tek pozitif köke sahip olduğunu göstermek için

$$\Delta(\mu) = \mu - \gamma + pe^{\mu r}$$

şeklinde tanımlı olan $\Delta(\mu)$ fonksiyonunu ele alalım. $\Delta(0) < 0$, $\Delta(\gamma) > 0$ ve $\Delta'(\mu) > 0$ olduğundan, $\Delta(\lambda) = 0$ olacak biçimde bir tek $\lambda \in R$, $0 < \lambda < \gamma$, vardır. $t_0 - r \le t < \beta$ için

$$w(t) = \|v_{t_0}\|_r e^{-\lambda(t-t_0)}$$

fonksiyonu tanımlansın ve $k > 1$ keyfi bir sayı olsun. Bu durumda $t_0 - r \le t \le t_0$ için

$$v(t) < k\, w(t)$$

dir. Şimdi çelişki bulmak için bir $t \in (t_0, \beta)$ için $v(t) = k\, w(t)$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda v ve w sürekli fonksiyonlar olduklarından, bir $t_1 \in (t_0, \beta)$ mevcut olmalıdır öyle ki

$$v(t) < k\, w(t) \, , \; t_0 - r \le t < t_1 \, ,$$

ve

$$v(t_1) = k\, w(t_1) \;\; , \; t_1 \in (t_0, \beta) \, ,$$

dır. Eğer $v'(t_1) < k\, w'(t_1)$ olsaydı, yukarıdaki durum ortaya çıkmazdı. Ancak, diğer taraftan

$$\begin{aligned} v'(t_1) &\le -\gamma\, v(t_1) + p\|v_{t_1}\|_r \\ &< -\gamma\, k\, w(t_1) + pkw(t_1 - r) = k\, w'(t_1) \end{aligned}$$

bulunur. Bu ise bir çelişkidir. O halde,

$$v(t) < k\,w(t)\;,\; t_0 \le t < \beta\;,$$

dır. Sonuç olarak $k \to 1$ alınırsa $v(t) \le w(t)$ eşitsizliği bulunur. Bu ise (4.3.3) dir.

Teorem 4.3.1. (4.2.1) sisteminin sıfır çözümü düzgün asimptotik kararlı olmak üzere M ve γ sabitleri (4.2.3) deki gibi olsunlar. Bir $N \in (0, \gamma/M)$ sabiti için

$$\|h(t,\psi)\| \le N\|\psi\|_r \;,\; (t,\psi) \in (\alpha,\infty) x C_D \;, \tag{4.3.5}$$

eşitsizliği sağlamıyor ise, bu durumda (4.3.1) sisteminin sıfır çözümü de düzgün asimptotik kararlıdır.

İspat: $0 < N < \gamma/M$ olmak üzere h fonksiyoneli (4.3.5) koşulunu sağlasın. Ayrıca, $(t_0,\phi) \in (\alpha,\infty) x C_D$ ve $x = x(.;t_0,\phi)$, $x_{t_0} = \phi$ olmak üzere (4.3.1) sisteminin $[t_0 - r, \beta)$ üzerinde tanımlı olan tek sürdürülemeyen çözümü olsun. (4.3.1) sistemine parametrelerin değişimi yöntemi (Teorem 1.3.6) uygulanırsa, $t_0 - r \le t < \beta_1$ için

$$x(t) = y(t;t_0,\phi) + \int_{t_0}^{t} y(t;s,h(s,x_s)u)ds$$

elde edilir. Buna (4.2.3) ve (4.2.6) kestiremleri ve (4.3.5) koşulu uygulanırsa, $t_0 \le t < \beta_1$ için

$$\|x(t)\| \le M\|\phi\|_r e^{-\gamma(t-t_0)} + \int_{t_0}^{t} MN\|x_s\|_r e^{-\gamma(t-s)}ds \tag{4.3.6}$$

bulunur.

Şimdi

$$v(t) = \begin{cases} M\|\phi\|_r & , t_0 - r \le t \le t_0\;, \\ Me^{-\gamma(t-t_0)}\|\phi\|_r + e^{-\gamma t}\int_{t_0}^{t} MNe^{\gamma s}\|x_s\|_r ds & , t_0 < t < \beta_1\;, \end{cases}$$

fonksiyonunu göz önüne alalım. Bu durumda $v(t)$ sürekli, negatif olmayan ve

$t_0 - r \le t < \beta$ için $\|x(t)\| \le v(t)$ dir. Ayrıca $t_0 \le t < \beta_1$ için

$$v'(t) = -\gamma\, v(t) + MN\|x_t\|_r \le -\gamma\, v(t) + MN\|v_t\|_r$$

dir.

$MN < \gamma$ olduğundan Lemma 4.3.1 den $t_0 \le t < \beta_1$ için

$$\|x(t)\| \le v(t) \le M\|\phi\|_r e^{-\lambda(t-t_0)} \tag{4.3.7}$$

çıkar; burada λ,

$$\lambda = \gamma - MNe^{\lambda r} \tag{4.3.8}$$

denkleminin pozitif köküdür. (4.3.7) eşitsizliği ve Teorem 1.3.2 göz önüne alındığında,

$$\|\phi\|_r < H/M$$

olması koşuluyla $\beta_1 = \infty$ sonucu bulunur.

O halde daha önceki tartışmalardan (4.3.7) eşitsizliği (4.3.1) sisteminin sıfır çözümünün düzgün asimptotik kararlı olduğunu ortaya koyar.

Örnek 4.3.1. Pertürbid olmayan sistem

$$y'(t) = A_1(t)y(t) \tag{4.3.9}$$

şeklinde bir adi lineer diferensiyel sistem ve pertürbid sistem de

$$x'(t) = A_1(t)x(t) + \sum_{j=2}^{m} A_j(t)x(t - r_j(t)) \tag{4.3.10}$$

olsun; burada her bir A_j sürekli matris değerli bir fonksiyon ve her bir r_j gecikme fonksiyonu $t > \alpha$ için sürekli olmak üzere $0 \le r_j(t) \le r$ dir.

(4.3.9) denkleminin sıfır çözümü düzgün asimptotik kararlı olsun. Bu durumda bir $M \ge 1$ ve $\gamma > 0$ için

$$\|y(t;t_0,\xi)\| \le M\|\xi\|e^{-\gamma(t-t_0)}\ ,\ \forall t \ge t_0 > \alpha \text{ ve } \xi \in R^n\ ,$$

yazılabilir. (4.3.9) denklemine bir gecikmeli diferensiyel denklem gibi dikkat edilirse, bu durumda (4.2.3) ve (4.2.6) eşitsizlikleri yerine

$$\|y(t;t_0,\phi)\| \le M\|\phi\|_r e^{-\gamma(t-t_0)} \quad , \quad t \ge t_0 > \alpha \ ,$$

bulunur; burada $\phi \in C$ veya $\phi = \xi u$ dır.

O halde $t > \alpha$ için

$$\sum_{j=2}^{m} \|A_j(t)\| \le N < \gamma/M \tag{4.3.11}$$

olacak şekilde bir N sayısı varsa, Teorem 4.3.1 den dolayı (4.3.10) sisteminin sıfır çözümü düzgün asimptotik kararlıdır.

Sonuç 4.3.1. (4.3.5) koşulu yerine her $(t,\psi) \in (\alpha,\infty)xC_D$ için

$$\|h(t,\psi)\| \le w(\|\psi\|_r)\|\psi\|_r \tag{4.3.12}$$

koşulu ele alınırsa, Teorem 4.3.1 in hükmü yine doğru kalır; burada $w : [0,\infty) \to [0,\infty)$ olup, $\lim_{\rho \to 0^+} w(\rho) = 0$ dır.

İspat: M ve γ sabitleri (4.2.3) eşitsizliğindeki gibi olsunlar. Buradan, gerekli olduğu zaman, H sayısı

$$\sup_{0<\rho<H} w(\rho) < \gamma/M$$

sağlanacak şekilde küçültülürse (4.3.12) eşitsizliğinden (4.3.5) bulunur. Bu da kanıtı tamamlar.

Örnek 4.3.2.

$$x'(t) = ax(t) + bx(t-r) + cx(t)x(t-\frac{r}{2}) \tag{4.3.13}$$

denkleminin sıfır çözümü, $a < 0$, $|b| < |a|$ veya $a < 0$, $-\frac{1}{r} < b \le 0$ olması durumunda düzgün asimptotik kararlıdır. Çünkü, bu koşullar altında Örnek 3.2.2 den

$$x'(t) = ax(t) + bx(t-r)$$

denklemine ait sıfır çözümünün düzgün asimptotik kararlı olduğu bilinmektedir.

Öte yandan $h(t,\psi)=c\psi(0)\psi(-\frac{r}{2})$ fonksiyonu için (4.3.12) koşulu sağlanır. Dolayısıyla Sonuç 4.3.1 verilen denkleme uygulanabilir ve istenen sonuç elde edilir.

Şimdi h ın küçük olması koşulunu biraz daha hafifleten ve dolayısıyla gecikmelerdeki pertürbasyonların incelenmesini olanaklı kılan aşağıdaki teoremi verelim.

Teorem 4.3.2. (4.2.1) sisteminin sıfır çözümü düzgün asimptotik kararlı olmak üzere M ve γ sayıları (4.2.3) deki gibi olsunlar. Aşağıdaki koşullar sağlanacak şekilde $K>0$ ve $N\in(0,\gamma/M)$ sabitleri mevcutsa, bu durumda (4.3.1) sisteminin sıfır çözümü düzgün asimptotik kararlıdır:

(i) $\|F(t,\psi)-F(t,\overline{\psi})\|\le K\|\psi-\overline{\psi}\|_r$, $(t,\psi),(t,\overline{\psi})\in(\alpha,\infty)xC_D$,

(ii) ψ sürekli türevlenebilir olmak üzere $(t,\psi)\in(\alpha,\infty)xC_D$ için

$$\|h(t,\psi)\|\le N\max\{\|\psi\|_r,\|\psi'\|_r/K\}.$$

İspat: İspat esnasında $[-r,0]$ aralığı yerine $[-2r,0]$ aralığında tanımlı olan bazı fonksiyonları ele almak gerekebilecektir. Bu yüzden aşağıdaki notasyonları göz önüne alalım:

$$\|\psi\|_{2r}=\sup_{-2r\le\sigma\le0}\|\psi(\sigma)\| \ ,\ \psi\in C([-2r,0],R^n)\,,$$

ve $\|x_t\|_{2r}$ ifadesindeki x_t,

$$x_t(\sigma)=x(t+\sigma)\ ,\ -2r\le\sigma\le0\,,$$

şeklinde tanımlıdır.

Parametrelerin değişimi yöntemi, Teorem 4.3.1 deki gibi $t\ge t_0$ yerine $t\ge t_0+r$ için uygulanacaktır.

Verilen herhangi bir $\varepsilon\in(0,H)$ sayısına karşılık bir $\delta=\varepsilon e^{-Kr}/M$ sayısını seçelim öyle ki Teorem 1.3.4 den dolayı $t_0>\alpha$ ve $\|\phi\|_r<\delta$ olduğu zaman (4.3.1) denkleminin $x_{t_0}=\phi$ koşulunu sağlayan tek çözümü için

$$\|x(t;t_0,\phi)\| \le \varepsilon/M \quad , t_0 \le t \le t_0 + r \ ,$$

gerçeklensin. $\|\phi\|_r < \delta$ olmak üzere herhangi bir $(t_0,\phi) \in (\alpha,\infty)xC_D$ noktası için $x(t;t_0,\phi)$, (4.3.1) denkleminin (t_0,ϕ) den geçen ve $[t_0 - r, \beta_1)$ üzerinde tanımlı olan tek sürdürülemeyen çözümü olsun. δ nın seçiminden dolayı $\beta_1 > t_0 + r$ dir.

Şimdi $t_0 \le t < \beta_1$ için

$$\|x'(t)\| = \|F(t,x_t)\| \le K\|x_t\|_r$$

olduğundan, $t_0 + r \le s < \beta_1$ için

$$\|x_s'(\sigma)\| \le K\|x_s\|_{2r} \quad , -2r \le \sigma \le 0 \ ,$$

yazılabilir. Dolayısıyla (*ii*) hipotezinden

$$\|h(s,x_s)\| \le N\|x_s\|_{2r} \quad , t_0 + r \le s < \beta_1 \ ,$$

dir.

Parametrelerin değişimi yöntemi uygulanırsa, Teorem 4.3.1 in ispatında olduğu gibi (4.3.6) eşitsizliğinde t_0 yerine $t_0 + r$, ϕ yerine x_{t_0+r} ve $\|.\|_r$ yerine de $\|.\|_{2r}$ gelmiş hali elde edilir:

$$\|x(t)\| \le Me^{-\gamma(t-t_0-r)}\|x_{t_0+r}\|_{2r} + \int_{t_0}^{t} Me^{-\gamma(t-s)}N\|x_s\|_{2r}ds \quad , t_0 + r \le t < \beta_1 \ , \tag{4.3.14}$$

Buradan (4.3.7) de yapıldığı gibi

$$\|x(t)\| \le M\|x_{t_0+r}\|_{2r} e^{\lambda(t-t_0-r)} \quad , t_0 + r \le t < \beta_1 \ , \tag{4.3.15}$$

bulunur; burada λ sayısı

$$\lambda = \gamma - MNe^{2\lambda r}$$

denkleminin pozitif köküdür. Böylece δ nın seçimine göre

$$\|x(t)\| < \begin{cases} \varepsilon / M & , t_0 - r \le t \le t_0 + r \ , \\ \varepsilon e^{-\lambda(t - t_0 - r)} & , t_0 + r \le t < \beta_1 \ , \end{cases} \tag{4.3.16}$$

yazılabilir. (4.3.16) ve Teorem 1.3.2 den $\beta_1 = \infty$ olup (4.3.1) denkleminin sıfır çözümü düzgün kararlıdır.

(4.3.16) dan (4.3.1) denkleminin sıfır çözümünün düzgün asimptotik kararlı olduğu da bulunabilir:

Sabit bir $H_1 \in (0,H)$ değerini ve buna bağlı olarak $\delta_1 = H_1 e^{-Kr}/M$ sayısını seçelim. $\|\phi\|_r < \delta_1$ olmak üzere $(t_0, \phi) \in (\alpha, \infty) x C_D$ noktası ve $\eta > 0$ sayısı verilsin. Bu durumda $T = T(\eta) > 0$ için

$$H_1 e^{-\lambda(T-r)} < \eta$$

sağlanmak koşuluyla

$$\|x(t)\| < \eta \ , \ \forall t \ge t_0 + T \ ,$$

elde edilir.

Örnek 4.3.3. Teorem 4.3.2 yi (4.3.10) sistemine uygulayalım. Ancak şimdi pertürbid olmayan sistem

$$y'(t) = \sum_{j=1}^{m} A_j(t) y(t) \tag{4.3.17}$$

şeklinde olmak üzere

$$h(t,\psi) = \sum_{j=2}^{m} A_j(t) \left[y(t - r_j) - y(t) \right] \tag{4.3.18}$$

dir. (4.3.17) denkleminin sıfır çözümü düzgün asimptotik kararlı olsun. Bu durumda yeterince küçük r ler için (4.3.10) sisteminin sıfır çözümünün de düzgün asimptotik kararlı olacağı beklenebilir. Şimdi bunun gerçekten sağlandığını gösterelim.

(4.3.17) denkleminin çözümleri bir $M \ge 1$ ve $\gamma > 0$ sayıları için

$$\|y(t;t_0,\xi)\| \le M\|\xi\|e^{-\gamma(t-t_0)} \quad , \; t \ge t_0 > \alpha \; ,$$

eşitsizliğini sağlarlar. Buradan (4.3.17) bir gecikmeli diferensiyel denklem gibi düşünülürse, herhangi bir $\phi \in C$ için

$$\|y(t;t_0,\phi)\| \le M\|\phi\|_r e^{-\gamma(t-t_0)} \quad , \; t \ge t_0 > \alpha \; ,$$

yazılabilir. Şimdi gösterilecektir ki her bir $A_j, (\alpha,\infty)$ üzerinde sınırlı, sürekli bir matris değerli fonksiyon ise, o zaman

$$\left(r \sup_{t>\alpha} \sum_{j=2}^{m} \|A_j(t)\| \right)\left(\sup_{t>\alpha} \sum_{j=1}^{m} \|A_j(t)\| \right) < \frac{\gamma}{M} \tag{4.3.19}$$

olması koşuluyla (4.3.10) sisteminin sıfır çözümü düzgün asimptotik kararlıdır. $H = \infty$ alalım. Bu durumda

$$K = \sup_{t>\alpha} \sum_{j=1}^{m} \|A_j(t)\|$$

olmak üzere Teorem 4.3.2 nin (*i*) koşulu sağlanır. (*ii*) koşulunu görmek için $(t,\psi) \in (\alpha,\infty)xC$ ve ψ sürekli türevlenebilir olmak üzere

$$\|h(t,\psi)\| \le \sup_{t>\alpha} \sum_{j=2}^{m} \|A_j(t)\| . \|\psi'\|_r . r$$

olduğuna dikkat edelim. Buradan

$$N = r \sup_{t>\alpha} \sum_{j=2}^{m} \|A_j(t)\| . K$$

olmak üzere (4.3.19) dan $N < \dfrac{\gamma}{M}$ dir. Bu ise Teorem 4.3.2 nin (*ii*) koşulunu verir.

5. ÜÇÜNCÜ BASAMAKTAN BİR GECİKMELİ DİFERENSİYEL DENKLEM SINIFININ DÜZGÜN ASİMPTOTİK KARARLILIĞI

5.1. Giriş

Bu bölümde üçüncü basamaktan gecikmeli diferensiyel

$$\dddot{x}(t)+f(x(t),\dot{x}(t),\ddot{x}(t))\ddot{x}(t)+g(x(t-\tau),\dot{x}(t-\tau))+h(x(t-\tau))=0 \qquad (5.1.1)$$

denklemi ele alınacak ve (5.1.1) denkleminin sıfır çözümünün düzgün asimptotik kararlılığını garanti eden yeter koşullar verilecektir; burada $f:R^3\to R$, $g:R^2\to R$, $h:R\to R$ sürekli fonksiyonlar olup $g(x,0)=h(0)=0, \tau\geq 0$ dır. Ayrıca $h'(x)$, $\frac{\partial g(x,y)}{\partial x}$, $\frac{\partial g(x,y)}{\partial y}$, $\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x}$, $\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial z}$ türevleri her x,y,z için süreklidir.

Belirtelim ki (5.1.1) denklemi ilk defa Chukwu tarafından

$$\dddot{x}(t)+f(x(t),\dot{x}(t),\ddot{x}(t))\ddot{x}(t)+g(x(t-\tau),\dot{x}(t-\tau))$$
$$+h(x(t-\tau))=p(t,x(t),\dot{x}(t),x(t-\tau),\dot{x}(t-\tau),\ddot{x}(t))$$

şeklinde ele alınarak bu denklemin en az bir periyodik çözüme sahip olması için yeter koşullar bulunmuştur (Chukwu 1978).

Daha sonra Bereketoğlu (1998) tarafından benzer yapıda olan dördüncü basamaktan gecikmeli

$$x^{(4)}(t)+e(t,x(t),\dot{x}(t),\ddot{x}(t),\dddot{x}(t))\dddot{x}(t)+f(t,\ddot{x}(t-\tau))+g(t,\dot{x}(t-\tau))+h(x(t-\tau))=0$$

denkleminin sıfır çözümünün düzgün asimptotik kararlı olduğu ispatlandı.

Şimdi esas sonucu vermeden önce aşağıdaki önemli teoremi göz önüne alalım:

Teorem 5.1.1. Aşağıdaki koşullar sağlanacak şekilde $0\leq t<\infty$, $\|\varphi\|<H$ üzerinde tanımlı ve φ ye göre lokal Lipschitzian olan bir sürekli $V(t,\varphi)$ fonksiyonelinin mevcut olduğunu kabul edelim:

olduğunu kabul edelim:

(H_1) $W(|\varphi(0)|) \le V(t,\varphi) \le W_1(|\varphi(0)|) + W_2(\|\varphi\|)$,

(H_2) $\dot{V}(t,\varphi) \le -W_3(|\varphi(0)|)$,

burada W, W_1, W_2 ve W_3 fonksiyonları $[0,\infty)$ dan $[0,\infty)$ a sürekli olup $W_i(0)=0$ (i=1,2,3), $r>0$ için $W_i(r)>0$ ve W_i $(i=1,2,3)$ azalmayandır. Ayrıca $x \in R^n$ için $|x|$ ifadesi R^n de öklid normudur, $\varphi \in C$ için $\|\varphi\| = \sup_{-r\le\theta\le 0} |\varphi(\theta)|$ ve $\varphi \in C_H$ için

$\|\varphi\| = \left[\sum_{i=1}^{n} \int_{-r}^{0} \varphi_i^2(s)ds\right]^{1/2}$ dir; burada φ_i, φ nin i yinci bileşenidir.

Bu durumda

$$x'(t) = F(t, x_t)$$

denkleminin sıfır çözümü düzgün asimptotik kararlıdır (Burton 1978).

5.2. Esas Sonuç

Önce

$$\Omega := \{(x,y,z) : |x| < H_1, |y| < H_1, |z| < H_1, H_1 \le H\}$$

bölgesini göz önüne alalım.

Teorem 5.2.1. Her $x,y,z \in \Omega$ için aşağıdaki koşullar sağlanacak şekilde a, a', b, b', c, δ, L pozitif sabitleri mevcut olsun:

(i) $a' \ge f(x,y,z) \ge a$;

(ii) $\dfrac{g(x,y)}{y} \ge b$ $(y \ne 0)$, $\dfrac{\partial g(x,y)}{\partial y} \le b'$, $-L \le \dfrac{\partial g(x,y)}{\partial x} \le 0$;

(iii) $ab > c$ olmak üzere $\dfrac{h(x)}{x} \ge \delta$ $(x \ne 0)$ ve $h'(x) \le c$;

(iv) $y\dfrac{\partial f(x,y,0)}{\partial x} \le 0$, $y\dfrac{\partial f(x,y,z)}{\partial z} \ge 0$;

(v) τ,

$$D_3 - 2k\tau > 0$$

sağlanacak şekilde negatif olmayan bir sabittir; burada

$D_3 = D_3(a, a', b, b', c, \delta, \delta_1, \delta_2)$ pozitif bir sabit olup,

$k = \max\{D_4(L+c), D_4 b'\}$, $D_4 = \max\{1+\delta_1, 1+a, \delta_2\}$,

ve $\delta_1 > 0$, $\delta_2 > 0$,

$$\frac{1}{a} < \delta_1 < \frac{b}{c}\ ,\ ab - c > a\delta_2 > 0\ ,\ \delta > [(b'-b)+(a'-a)]\frac{\delta_2}{4}$$

eşitsizliklerini sağlayan pozitif sabitlerdir.

Bu durumda (5.1.1) denkleminin sıfır çözümü düzgün asimptotik kararlıdır.

İspat için hazırlık

İspat, bazı diferensiyel eşitsizliklere (Harrow 1968) ve karşılık gelen eşdeğer sistem için bir Lyapunov fonksiyonelinin bulunmasına dayanır.

İlk olarak (5.1.1) denklemine eşdeğer olan aşağıdaki sistemi ele alalım:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = y(t) \\ \dot{y}(t) = z(t) \\ \dot{z}(t) = -f(x(t), y(t), z(t))z(t) - g(x(t), y(t)) - h(x(t)) + G(t), \end{cases} \tag{5.2.1}$$

burada

$$G(t) = \int_{-\tau}^{0} g_x(x(t+\theta), y(t+\theta))y(t+\theta)d\theta + \int_{-\tau}^{0} g_y(x(t+\theta), y(t+\theta))z(t+\theta)d\theta$$
$$+ \int_{-\tau}^{0} h'(x(t+\theta))y(t+\theta)d\theta\ . \tag{5.2.2}$$

Şimdi $V(t,\varphi)$ Lyapunov fonksiyonelini

$$V(t,\varphi) = V_1 + V_2 + V_3 + V_4(t,\varphi) \tag{5.2.3}$$

şeklinde tanımlayalım; burada

$$2V_1(t)=2\int_0^{x(t)} h(s)ds+2\int_0^{y(t)} sf(x(t),s,0)ds+2\delta_1\int_0^{y(t)} g(x(t),s)ds$$
$$+\delta_1 z^2(t)+2y(t)z(t)+2\delta_1 y(t)h(x(t)) \quad , \tag{5.2.4}$$

$$2V_2(t)=\delta_2 bx^2(t)+2a\int_0^{x(t)} h(s)ds+(a^2-\delta_2)y^2(t)$$
$$+2\int_0^{y(t)} g(x(t),s)ds+z^2(t)+2a\delta_2 x(t)y(t) \tag{5.2.5}$$
$$+2\delta_2 x(t)z(t)+2ay(t)z(t)+2y(t)h(x(t)) \quad ,$$

$$2V_3(t)=2a\int_0^{y(t)} sf(x(t),s,0)ds-a^2y^2(t) \ , \tag{5.2.6}$$

$$V_4(t,\varphi)=\frac{2\gamma}{\tau}\int_{-\tau}^{0}\left\{\int_{\theta_1}^{0}(x^2(t+\theta)+y^2(t+\theta)+z^2(t+\theta))d\theta\right\}d\theta_1 \tag{5.2.7}$$

olup

$$2\gamma=D_3-(D_3^2-4k^2\tau^2)^{1/2} \tag{5.2.8}$$

sabiti (v) den dolayı negatif olmayandır.

$V_i(t)\equiv V_i(x(t),y(t),z(t)),\ i=1,2,3$, fonksiyonları kullanılarak sürekli $p(t)$ için üçüncü basamaktan

$$\dddot{x}(t)+f(x(t),\dot{x}(t),\ddot{x}(t))\ddot{x}(t)+g(x(t),\dot{x}(t))+h(x(t))=p(t) \tag{5.2.9}$$

diferensiyel denklemi hakkında aşağıdaki eşitsizlikler elde edildi (Harrow 1968).

$$D_1(x^2(t)+y^2(t)+z^2(t))\le\sum_{i=1}^{3}V_i(t)\le D_2(x^2(t)+y^2(t)+z^2(t)) \tag{5.2.10}$$

$$\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{3}V_i(t)\le -4D_3(x^2(t)+y^2(t)+z^2(t))+D_4\left(|x(t)|+|y(t)|+|z(t)|\right)|p(t)|, \tag{5.2.11}$$

burada $D_1 = D_1(a,b,c,\delta_1,\delta_2)$, $D_2 = D_2(a,a',b,b',c,\delta_1,\delta_2)$ pozitif sabitler olup D_3 ve D_4 sabitleri (v) de tanımlandıkları gibidir.

İspat: Teorem 5.1.1 kullanılarak ispat yapılacaktır. (5.2.3) ile tanımlanan $V(t,\varphi)$ fonksiyoneli φ ye göre lokal Lipschitziandır. Çünkü $V(t,\varphi)$ fonksiyoneli $0 \le t < \infty$, $\|\varphi\| < H_1$ için φ ye göre sürekli diferensiyellenebilirdir.

Şimdi $V(t,\varphi)$ fonksiyonelinin Teorem 5.1.1 in (H_1) ve (H_2) hipotezlerini sağladığını gösterelim. (H_1) hipotezini gerçeklemek kolaydır. Gerçekten (5.2.10) eşitsizliğinin her iki yanına (5.2.7) ile tanımlanan $V_4(t,\varphi)$ eklenirse,

$$V_4(t,\varphi) + D_1|\varphi(0)|^2 \le V(t,\varphi) \le D_2|\varphi(0)|^2 + V_4(t,\varphi)$$

elde edilir. $V_4(t,\varphi)$ negatif olmayan olduğundan ,

$$\begin{aligned} D_1|\varphi(0)|^2 \le V(t,\varphi) &\le D_2|\varphi(0)|^2 + 2\gamma\int_{-\tau}^{0}(x^2(t+\theta)+y^2(t+\theta)+z^2(t+\theta))d\theta \\ &= D_2|\varphi(0)|^2 + 2\gamma\int_{-\tau}^{0}|\varphi(\theta)|^2 d\theta \\ &= D_2|\varphi(0)|^2 + 2\gamma\|\varphi\|^2 . \end{aligned} \tag{5.2.12}$$

Buradan $W(r) = D_1 r^2$, $W_1(r) = D_2 r^2$ ve $W_2(r) = 2\gamma r^2$ olur ve bunlar (H_1) hipotezindeki bütün koşulları sağlar.

(H_2) hipotezinin sağlandığını göstermek için (5.2.1) sisteminin bir $(x(t), y(t), z(t))$ çözümü boyunca $V(t,\varphi)$ fonksiyonelinin türevini hesaplayalım:

$$\begin{aligned} \dot{V}(t,\varphi) &\equiv \frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{3}V_i(t) + \frac{d}{dt}V_4(t,\varphi) \\ &= y(t)\int_0^{y(t)} s\frac{\partial f(x(t),s,0)}{\partial x(t)}ds + \delta_1 y(t)\int_0^{y(t)}\frac{\partial g(x(t),s)}{\partial x(t)}ds \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
& -y(t)\frac{\partial f(x(t),y(t),\bar{z}(t))}{\partial z(t)}z^2(t)-\left[\delta_1 f(x(t),y(t),z(t))-1\right]z^2(t) \\
& -\left[\frac{g(x(t),y(t))}{y(t)}-\delta_1 h'(x(t))\right]y^2(t)-\delta_2\left[\frac{g(x(t),y(t))}{y(t)}-b\right]x(t)y(t) \\
& -a\left[f(x(t),y(t),z(t))-a\right]y(t)z(t)-\left[f(x(t),y(t),z(t))-a\right]z^2(t) \\
& +y(t)\int_0^{y(t)}\frac{\partial g(x(t),s)}{\partial x(t)}ds-\left[\frac{a\,g(x(t),y(t))}{y(t)}-h'(x(t))-a\delta_2\right]y^2(t) \\
& -\delta_2\frac{h(x(t))}{x(t)}x^2(t)-\delta_2\left[f(x(t),y(t),z(t))-a\right]x(t)z(t) \\
& +a\,y(t)\int_0^{y(t)}s\frac{\partial f(x(t),s,0)}{\partial x(t)}ds+a\,z(t)y(t)f(x(t),y(t),0)-a^2y(t)z(t) \\
& +(\delta_1 z(t)+y(t)+z(t)+\delta_2 x(t)+ay(t))G(t) \\
& +\frac{2\gamma}{\tau}\int_{-\tau}^{0}\left[x^2(t)+y^2(t)+z^2(t)-x^2(t+\theta)-y^2(t+\theta)-z^2(t+\theta)\right]d\theta
\end{aligned}
\tag{5.2.13}
$$

$$
\begin{aligned}
\le & -\left[\delta_1 f(x(t),y(t),z(t))-1\right]z^2(t)-\left[\frac{g(x(t),y(t))}{y(t)}-\delta_1 h'(x(t))\right]y^2(t) \\
& -\left[a\frac{g(x(t),y(t))}{y(t)}-h'(x(t))-a\delta_2\right]y^2(t)-\delta_2\frac{h(x(t))}{x(t)}x^2(t) \\
& -\left[f(x(t),y(t),z(t))-a\right]z^2(t)-a\left[f(x(t),y(t),z(t))-a\right]y(t)z(t) \\
& -\delta_2\left[f(x(t),y(t),z(t))-a\right]x(t)z(t)-\delta_2\left[\frac{g(x(t),y(t))}{y(t)}-b\right]x(t)y(t) \\
& +a\left[f(x(t),y(t),0)-a\right]y(t)z(t)+\left[\delta_2 x(t)+(1+a)y(t)+(1+\delta_1)z(t)\right]G(t) \\
& +\frac{2\gamma}{\tau}\int_{-\tau}^{0}\left[x^2(t)+y^2(t)+z^2(t)-x^2(t+\theta)-y^2(t+\theta)-z^2(t+\theta)\right]d\theta
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\le & -\left[f(x(t),y(t),z(t))-a\right]\left(z(t)+\frac{\delta_2}{2}x(t)\right)^2+\left[f(x(t),y(t),z(t))-a\right]\frac{\delta_2^2}{4}x^2(t) \\
& -\left[\delta_1 f(x(t),y(t),z(t))-1\right]z^2(t)-\left[\frac{g(x(t),y(t))}{y(t)}-b\right]\left(y(t)+\frac{\delta_2}{2}x(t)\right)^2
\end{aligned}
$$

$$+\left[\frac{g(x(t),y(t))}{y(t)}-b\right]\frac{\delta_2^2}{4}x^2(t)-\delta_2\frac{h(x(t))}{x(t)}x^2(t)$$

$$-\left[a\frac{g(x(t),y(t))}{y(t)}-h'(x(t))-a\delta_2\right]y^2(t)+\left[\delta_2x(t)+(1+a)y(t)+(1+\delta_1)z(t)\right]G(t)$$

$$+\frac{2\gamma}{\tau}\int_{-\tau}^{0}\left[x^2(t)+y^2(t)+z^2(t)-x^2(t+\theta)-y^2(t+\theta)-z^2(t+\theta)\right]d\theta$$

$$\leq-(\delta_1a-1)z^2(t)-(ab-c-a\delta_2)y^2(t)-\left[\delta\delta_2-(b'-b)\frac{\delta_2^2}{4}-(a'-a)\frac{\delta_2^2}{4}\right]x^2(t)$$

$$+\left[\delta_2x(t)+(1+a)y(t)+(1+\delta_1)z(t)\right]G(t)$$

$$+\frac{2\gamma}{\tau}\int_{-\tau}^{0}\left[x^2(t)+y^2(t)+z^2(t)-x^2(t+\theta)-y^2(t+\theta)-z^2(t+\theta)\right]d\theta\,.$$

(5.2.9) da $p(t)$ yerine $G(t)$ alınırsa, (5.2.11) ve (5.2.13) den

$$\leq-4D_3\left(x^2(t)+y^2(t)+z^2(t)\right)+D_4\left(|x(t)|+|y(t)|+|z(t)|\right)|G(t)|$$

$$+\frac{2\gamma}{\tau}\int_{-\tau}^{0}\left[x^2(t)+y^2(t)+z^2(t)-x^2(t+\theta)-y^2(t+\theta)-z^2(t+\theta)\right]d\theta$$

elde edilir; burada

$$D_3=\frac{1}{4}\min\left\{\delta\delta_2-(b'-b)\frac{\delta_2^2}{4}-(a'-a)\frac{\delta_2^2}{4},ab-c-a\delta_2,\delta_1a-1\right\},$$

$$D_4=\max\left\{\delta_2,1+a,1+\delta_1\right\}.$$

Buradan ve Teorem 5.2.1 in hipotezlerinden

$$\dot{V}(t,\varphi)\leq-4D_3\left(x^2(t)+y^2(t)+z^2(t)\right)$$

$$+D_4\left(|x(t)|+|y(t)|+|z(t)|\right)\left[(L+c)\int_{-\tau}^{0}|y(t+\theta)|d\theta+b'\int_{-\tau}^{0}|z(t+\theta)|d\theta\right]$$

$$+\frac{2\gamma}{\tau}\int_{-\tau}^{0}\left[x^2(t)+y^2(t)+z^2(t)-x^2(t+\theta)-y^2(t+\theta)-z^2(t+\theta)\right]d\theta$$

$$
\begin{aligned}
&\le -4D_3\left(x^2(t)+y^2(t)+z^2(t)\right) \\
&\quad + k\left(|x(t)|+|y(t)|+|z(t)|\right)\left(\int_{-\tau}^{0}|y(t+\theta)|\,d\theta+\int_{-\tau}^{0}|z(t+\theta)|\,d\theta\right) \\
&\quad + \frac{2\gamma}{\tau}\int_{-\tau}^{0}\left(x^2(t)+y^2(t)+z^2(t)-x^2(t+\theta)-y^2(t+\theta)-z^2(t+\theta)\right)d\theta
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= -4D_3\left(x^2(t)+y^2t)+z^2(t)\right) \\
&\quad + k\int_{-\tau}^{0}\left(|x(t)|+|y(t)|+|z(t)|\right)\left(|y(t+\theta)|+|z(t+\theta)|\right)d\theta \qquad (5.2.14) \\
&\quad + \frac{2\gamma}{\tau}\int_{-\tau}^{0}\left(x^2(t)+y^2(t)+z^2(t)-x^2(t+\theta)-y^2(t+\theta)-z^2(t+\theta)\right)d\theta
\end{aligned}
$$

elde edilir.

(5.2.14) eşitsizliği aşağıdaki biçimde tekrar yazılabilir:

$$
\begin{aligned}
\dot V(t,\varphi) &\le -2D_3\left(x^2(t)+y^2(t)+z^2(t)\right) \\
&\quad -\frac{1}{\tau}\int_{-\tau}^{0}\left(\gamma^* x^2(t)-k\tau|x(t)||y(t+\theta)|+\frac{1}{2}\gamma\, y^2(t+\theta)\right)d\theta \\
&\quad -\frac{1}{\tau}\int_{-\tau}^{0}\left(\gamma^* y^2(t)-k\tau|y(t)||y(t+\theta)|+\frac{1}{2}\gamma\, y^2(t+\theta)\right)d\theta \\
&\quad -\frac{1}{\tau}\int_{-\tau}^{0}\left(\gamma^* z^2(t)-k\tau|z(t)||y(t+\theta)|+\frac{1}{2}\gamma\, y^2(t+\theta)\right)d\theta \qquad (5.2.15) \\
&\quad -\frac{1}{\tau}\int_{-\tau}^{0}\left(\gamma^* x^2(t)-k\tau|x(t)||z(t+\theta)|+\frac{1}{2}\gamma\, z^2(t+\theta)\right)d\theta \\
&\quad -\frac{1}{\tau}\int_{-\tau}^{0}\left(\gamma^* y^2(t)-k\tau|y(t)||z(t+\theta)|+\frac{1}{2}\gamma\, z^2(t+\theta)\right)d\theta \\
&\quad -\frac{1}{\tau}\int_{-\tau}^{0}\left(\gamma^* z^2(t)-k\tau|z(t)||z(t+\theta)|+\frac{1}{2}\gamma\, z^2(t+\theta)\right)d\theta-\frac{2\gamma}{\tau}\int_{-\tau}^{0}x^2(t+\theta)d\theta,
\end{aligned}
$$

burada

$$2\gamma^* = D_3 + (D_3^2 - 4k^2\tau^2)^{1/2}\ .$$

(5.2.15) deki bütün integraller pozitif olduğundan,

$$\begin{aligned}\dot{V}(t,\varphi) &\leq -2D_3\left(x^2(t)+y^2(t)+z^2(t)\right)\\ &= -2D_3|\varphi(0)|^2\end{aligned}$$

bulunur. Buradan $W_3(r)=2D_3r^2$ çıkar ki bu $r>0$ için sürekli, pozitif ve artandır. Böylece (H_2) nin gerçeklenmesi tamamlanmış oldu.

Sonuç olarak Teorem 5.1.1 in bütün koşulları sağlanmaktadır.

KAYNAKLAR

Bereketoğlu, H. 1998. Asymptotic stability in a fourth order delay differential equations. Dynamic Systems and Applications, 7; 105-116.

Burton, T. A. 1978. Uniform asymptotic stability in functional differential equations. Proc. Amer. Math. Society, 68(2); 195-199.

Burton, T. A. 1985. Stability and periodic solutions of ordinary and functional differential equations. Academic Press, 331 p., New York.

Chukwu, E. N. 1978. On the boundedness and the existence of a periodic solution of some nonlinear third order delay differential equation. Atti Accad. Naz. Lincei. Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur., 64(5); 440-447.

Driver, R. D. 1977. Ordinary and delay differential equations. Springer Verlag, 501 p., New York.

Haddock, J. R. and Kuang, Y. 1992. Theory for a class of nonautonoms delay differential equations. J. Math. Anal. Appl., 168; 147-162.

Halanay, A. 1966. Differential equations. Academic Press, 525 p., New York.

Hale, J. K. and Lunel, S. M. V. 1993. Introduction to fuctional differential equations. Springer Verlag, 447 p., New York.

Harrow, M. 1968. Further results for the solution of certain third order differential equations. J. London Math. Society, 43; 587-592.

Kolmanovskii, V. and Myshkis, A. 1999. Introduction to the theory and applications of functional differential equations. Kluwer Academic Publishers, Boston.

Krasovskii, N. N. 1959. Stability of motion. Stanford Univer. Press, 186 p., California.

Zverkin, A. M. 1959. Dependence of the stability of solutions of differential equations with a delay on the choice of the initial instant. Vestnik Moskov Univ. Ser. Mat. Meh. Astr. Fiz. Him. 5; 15-20.

ÖZGEÇMİŞ

İstanbul'da 1976 yılında doğdu. İlk, orta, lise öğrenimini Ankara'da tamamladı. 1995 yılında girdiği Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü'nden 1999 yılında Matematikçi ünvanıyla mezun oldu. Eylül 2000 de Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yüksek Lisans sınavını kazandı. Şubat 2001 de Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü'nce açılan araştırma görevliliği sınavını kazandı. Halen aynı bölümde bu görevine devam etmektedir.