SİMETRİK GRUPLARIN GÖSTERİMLERİ

Figen AŞILIPINAR

83434

Yüksek Lisans Tezi

MATEMATİK ANABİLİM DALI

1999

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

SİMETRİK GRUPLARIN GÖSTERİMLERİ

FİGEN AŞILIPINAR

Ankara Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman : Doç. Dr. Sait HALICIOĞLU
Jüri : Prof. Dr. Abdullah HARMANCI
Doç. Dr. Sait HALICIOĞLU
Yrd. Doç. Dr. Nurhayat İSPİR

Bu tez dört bölümden oluşmaktadır. Birinci ve ikinci bölüm sırasıyla giriş ve temel kavramlara ayrılmıştır.

Üçüncü bölümde; S_n Simetrik grubunun tüm indirgenmez modüllerini ve indirgenmez gösterimlerini belirlemek için kolay bir yöntem verildi.

Dördüncü bölümde; indirgenmez modüllerin inşasında ortaya çıkan M^μ modülünün ayrışımı elde edildi.

1999, 73 sayfa

ANAHTAR KELİMELER: Gösterim, F[G]-modül, Simetrik grup, Parçalanma, λ-tablo, λ-tabloid, λ-polytabloid, Specht modül, Genelleştirilmiş Young tablo, Young doğal gösterimi.

ABSTRACT

Master Thesis

REPRESENTATIONS OF SYMMETRIC GROUPS

Figen AŞILIPINAR

Ankara University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor : Assoc. Prof. Dr. Sait HALICIOĞLU
Juri : Prof. Dr. Abdullah HARMANCI
Assoc. Prof. Dr. Sait HALICIOĞLU
Asst. Prof. Dr. Nurhayat İSPİR

The thesis consists of four chapters. Introduction and necessary theorems are given in the first and second chapters.

In the third chapter is mainly concerned with G. D.James' construction of all the irreducible modules of the symmetric groups over an arbitrary field.

In the final chapter, the decomposition of the module M^{μ} is presented.

1999, 73 pages

KEY WORDS: Representation, F[G]-module, Symmetric group, Partition, λ-tableau, λ-tabloid, λ-polytabloid, Specht module, Generalized Young tableau, Young's natural representation.

TEŞEKKÜR

Bana araştırma olanağı sağlayan ve çalışmamın her safhasında yakın ilgi ve önerileri ile beni yönlendiren danışman hocam, Sayın Doç. Dr. Sait HALICIOĞLU'na, yardımlarını gördüğüm Sayın Yücel KADIOĞLU 'na ve Sayın Zafer ÜNAL'a teşekkürlerimi sunarım.

Figen AŞILIPINAR
Ankara, Eylül 1999

İÇİNDEKİLER

SİMGELER DİZİNİ

$\mathbf{Z}$	Tamsayılar cümlesi
$\mathbf{R}$	Reel sayılar cümlesi
$\mathbf{C}$	Kompleks sayılar cümlesi
D_n	Dihadral grup
S_n	Simetrik grup
T	Gösterim
T_B	B bazına göre matris gösterimi
$F[G]$	G nin grup cebiri
χ	T nin karakteri
$CharF$	F nin karakteristliği
$GL(V)$	V nin tersinin lineer dönüşümlerinin grubu
$GL_d)$	F üzerindeki $d \times d$ tipindeki tersinir matrislerin grubu
$Ker\theta$	θ nın çekirdeği
İzA	A nın izi
$[\lambda]$	λ nın diagramı
S_λ	Young altgrubu
R_t	t nin satır altgrubu
C_t	t nin sütun altgrubu
T	Genelleştirilmiş Young tablo
$T^{\circ}_{\lambda\mu}$	Semistandart tablo
$\{t\}$	t nin satır denklik sınıfı
$[t]$	t nin sütun denklik sınıfı
e_t	λ-polytabloid
M^λ	λ-tabloidler tarafından gerilen vektör uzay
S^λ	Specht modül
$G_{A,B}$	A, B kümeleri üzerindeki Garnir elemanı
$Hom(V,W)$	V den Wye giden modül homomorfizması

1.GİRİŞ

Karakteristliği sıfır olan cisimler üzerinde simetrik grupların gösterimleri ilk olarak G. Frobenius, I. Schur ve A. Young tarafından incelenmiştir. (Specht, 1935), 1935 yılında simetrik gruplar için bütün indirgenmez modülleri veren yeni bir yöntem vermiş ve zaman içerisinde bu yöntemle belirlenen modüller Specht modül olarak adlandırılmıştır. (James, 1976), 1976 yılında keyfi cisimler üzerinde simetrik gruplar için indirgenmez modüllerin inşası ile ilgili oldukça kolay ve doğal bir yöntem vermiştir.

Bu çalışmada G. D. James'in inşa yöntemiyle, S_n simetrik grubu için, F keyfi bir cisim ve λ, n nin bir parçalanması olmak üzere, λ verildiğinde λ ya karşılık M^λ vektör uzayının inşası ve bu M^λ nın nasıl $F[S_n]$-modül yapıldığı verildi. Sonra M^λ nın Specht modül adı verilen S^λ altmodülünün inşa yöntemi verildi ve $CharF = 0$ durumunda, λ lar değiştikçe S^λ ların S_n in tüm indirgenemez modüllerini verdiği ispatlandı.

Son bölümde simetrik gruplar için Young doğal gösterimi ve M^λ nın ayrışımının nasıl elde edileceği detayları ile incelenmiştir.

2.TEMEL KAVRAMLAR

2.1 Sonlu Bir Grubun Gösterimleri ve F[G]−Modüller

Tanım 2.1.1 (Gösterim ve Matris Gösterimi)

G sonlu bir grup, GL_d; $X = (x_{i,j})_{d\times d}$ tipinde C kompleks sayıları üzerinde tanımlı matrislerin kümesi olmak üzere,

$$\begin{array}{rccc} X: & G & \longrightarrow & Gl_d \\ & g & \longrightarrow & X(g) \end{array}$$

homomorfizmasına G grubunun matris gösterimi denir. Eğer X; G nin matris bir gösterimi ise bu durumda $X(g_1g_2) = X(g_1)X(g_2)$, $X(1_G) = 1$ ve $m \in \mathbf{Z}$ için $X(g^m) = X(g)^m$ dır.

$V; F$ cismi üzerinde sonlu boyutlu vektör uzayı olmak üzere, V den V ye tersinir lineer dönüşümlerin kümesi $GL(V)$ fonksiyonların bileşke işlemine göre bir gruptur ve bu gruba genel lineer grubu adı verilir.

V; F cismi üzerinde sonlu boyutlu vektör uzayı ve $boy_F V = d$ olsun. Bu durumda $GL(V)$ ile GL_d birbirine izomorftur. Böylece,

$$\begin{array}{rccc} X: & G & \longrightarrow & GL(V) \\ & g & \longrightarrow & X(g) \end{array}$$

dönüşümü bir homomorfizmadır. Bu homomorfizmaya G nin V/F üzerindeki bir gösterimi denir.

Örnek 2.1.2 $\pi \in S_n$ olmak üzere

$$x_{i,j} = \begin{cases} 1, & \pi(j) = i \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

$\pi \in S_3$ için,

$$\begin{aligned} X: \; S_3 &\longrightarrow Gl_d \\ \pi &\longrightarrow X(\pi) = (x_{i,j})_{d\times d} \end{aligned}$$

şeklinde tanımlarsak X bir homomorfizmadır. Dolayısıyla X, derecesi 3 olan bir matris gösterimidir. Böylece

π	(1)	(12)	(13)
X(π)	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

π	(23)	(123)	(132)
X(π)	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Örnek 2.1.3 G herhangi bir grup olsun.

$$\begin{aligned} X: \; G &\longrightarrow Gl_3 \\ g &\longrightarrow X(g) = I_3 \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan X bir homomorfizmadır. Dolayısıyla X, G nin derecesi 3 olan bir matris gösterimidir.

Bu örnek gösteriyor ki, her grup keyfi dereceden matris gösterimine sahiptir.

Tanım 2.1.4 (Sonlu Bir Grubun Grup Cebiri) G elemanları $x_1, x_2, \ldots, x_m$ olan sonlu bir grup ve F bir cisim olsun. $1 \leq i \leq m$ için $a_i \in F$ ve $x_i \in G$ olmak üzere, $F[G]$ nin elemanları $x = \sum\limits_{i=1}^{m} a_i x_i$ şeklinde formal lineer bileşimlerden oluşur. Ayrıca,

$x_i \in G$ ve $a_i,\ b_i,\ k \in F$ için $x = \sum\limits_{i=1}^{m} a_i x_i,\ y = \sum\limits_{j=1}^{m} b_j x_j \in F[G]$ olmak üzere,

$$x \oplus y = \sum_{i=1}^{m}(a_i + b_i)x_i$$
$$k \odot x = \sum_{i=1}^{m}(ka_i)x_i$$
$$x \otimes y = \sum_{i,j=1}^{m} a_i b_i (x_i x_j)$$

işlemleriyle $F[G]$, F üzerinde bir cebir olacaktır. Ayrıca $F[G]$ nin bazı $\{x_1, \ldots, x_m\}$ ve dolayısıyla $[F[G] : F] =\mid G \mid$ dır. Sonuç olarak $F[G]$ ye G nin F üzerinde grup cebiri denir.

Örnek 2.1.5 $G =< a :\ a^2 = e >$, $\mathbf{Z}_2 = \{\overline{0}, \overline{1}\}$ cismini gözönüne alalım.

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}_2[G] &= \{r_1 e + r_2 a \mid r_1, r_2 \in Z_2\} \\ &= \{\overline{0}e + \overline{0}a, \overline{1}e + \overline{0}a, \overline{0}e + \overline{1}a, \overline{1}e + \overline{1}a\} \\ &= \{0, e, a, e + a\} \end{aligned}$$

$(\mathbf{Z}_2[G], \oplus, \otimes, \odot)$ dörtlüsü bir cebir dir. $\oplus$ ve $\otimes$ işlemlerine ilişkin tabloları;

$\oplus$	$\overline{0}_{Z_2[G]}$	e	a	$e+a$
$\overline{0}_{Z_2[G]}$	$\overline{0}_{Z_2[G]}$	e	a	$e+a$
e	e	0	$e+a$	a
a	a	$e+a$	0	e
$e+a$	$e+a$	a	e	0

$\otimes$	$\overline{0}_{Z_2[G]}$	e	a	$e+a$
0	0	0	0	0
e	0	e	a	$e+a$
a	0	a	e	$e+a$
$e+a$	0	$e+a$	$+ae$	0

Tanım 2.1.6 (Bir Gösterim Tarafından Belirlenen Modül)

G sonlu bir grup ve T, G nin V/F üzerindeki bir gösterimi olsun. Bu durumda,

$$\begin{aligned} \odot :\ & F[G] \times V && \longrightarrow V \\ & (\sum_{i=1}^{m} a_i x_i, v) && \longrightarrow (\sum_{i=1}^{m} a_i x_i) \odot v = \sum_{i=1}^{m} a_i T(x_i)(v) \end{aligned}$$

dış işlemiyle V bir $F[G]-$ modül yapılabilir. V ye G nin T gösterimi tarafından belirlenen modül adı verilir.

Tersine, eğer V bir $F[G]$-modül ise bu durumda,

$$\begin{array}{lllll} T: & G & \longrightarrow & GL(V) & \\ & g & \longrightarrow & T(g): & V \longrightarrow V \\ & & & & v \longrightarrow T(g)(v) = gv \end{array}$$

şeklinde tanımlanan T, G nin V/F üzerindeki bir gösterimidir. T ye V; $F[G]$-modülü tarafından belirlenen gösterim denir.

Sonuç olarak G nin bir T gösterimi verildiğinde bu gösterime karşılık bir $F[G]$-modül, bir $F[G]$-modül verildiğinde bu modüle karşılık G nin bir gösterimi bulunabilir.

Örnek 2.1.7 $G = D_4 =< a, b : a^4 = b^2 = 1,\ b^{-1}ab = a^{-1} >$ ve G nin bir matris gösterimi

$$T(a) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix},\ T(b) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

olmak üzere,

$$\begin{array}{llll} T: & G & \longrightarrow & GL_2 \\ & g & \longrightarrow & T(g) \end{array}$$

şeklinde verilsin. $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ olmak üzere $V = F^2$ $v_1,\ v_2$ sütun vektörleri tarafından gerilen vektör uzayı olsun.

Aşağıdaki dış işlemle V bir $F[G]-$modüldür.

$$av_1 = T(a)v_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} = -v_1$$

$$av_2 = T(a)v_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = v_1$$

$$bv_1 = T(b)v_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = v_1$$

$$bv_1 = T(b)v_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} = -v_2$$

Tersine, $G = C_3 =< a : \; a^3 = 1 >$ ve $V = Sp\{v_1, v_2, v_3\}$
$1v_1 = v_1$, $1v_2 = v_2$, $1v_3 = v_3$, $av_1 = v_2$, $av_2 = v_3$, $av_3 = v_1$, $a^2v_1 = v_3$
$a^2v_2 = v_1$, $a^2v_3 = v_2$ etkisiyle bir $F[G]$-modül olsun. Bu durumda, $1, a, a^2 \in G$ için

$$T(1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \; T(a) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \; T(a^2) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

olmak üzere;

$$\begin{aligned} T: \; G &\longrightarrow GL_3 \\ g &\longrightarrow T(g) \end{aligned}$$

G nin V/F üzerindeki derecesi 3 olan bir matris gösterimidir.

Tanım 2.1.8 G; S_n nin bir altgrubu ve V; $B = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ bazıyla bir $F[G]-$modül olsun. Eğer V nin dış işlemi her $1 \leq i \leq n$ ve $g \in G$ için

$$gv_i = v_{g(i)}$$

ise, bu durumda V ye bir permütasyon modülü denir.

V bir permütasyon modülü ise, her $g \in G$ için $T_B(g)$ matrisleri; her satır ve sütununda bir tane 1 diğer bileşenleri 0 olan matrislerdir. Bu tipteki matrislere permütasyon matrisi denir.

Örnek 2.1.9 $G = S_4$ olsun. $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ 3-boyutlu vektör uzayını alalım. Eğer $g = (12)$ ise V aşağıdaki dış işlemle bir $F[G]$-modüldür.

$$gv_1 = v_2,\ gv_2 = v_1,\ gv_3 = v_3,\ gv_4 = v_4$$

Ayrıca Tanım 2.1.8 den V bir permütasyon modülüdür.

Ayrıca T_B, B; bazına göre V ye karşılık gelen matris gösterimi olmak üzere, $g = (12)$ için $g \longrightarrow gv$ dönüşümüne karşılık gelen matris ;

$$[g]_B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

şeklindedir.

Tanım 2.1.10 **($F[G]$-altmodül)** V/F bir $F[G]-$modül ve $\emptyset \neq W \subseteq V$ olsun. Eğer W; V nin bir alt uzayı ve her $w \in W$, $g \in G$ için $gw \in W$ ise W ya V nin bir $F[G]-$altmodülü denir.

Tanım 2.1.11 **(İndirgenemez (İndirgenebilir) $F[G]-$ modül)**
V bir $F[G]-$modül olsun. V nin $\{0\}$ ve kendisinden başka $F[G]-$altmodülü yoksa V ye indirgenemez $F[G]$-modül denir.

Eğer V; $\{0\}$ ve kendisinden başka $F[G]-$altmodülüne sahip ise bu durumda V ye indirgenebilir $F[G]-$modül denir.

$T : G \longrightarrow GL(V)$; G nin bir gösterimi olsun. T ye karşılık gelen V; $F[G]$-modülü indirgenmez ise T ye indirgenemez gösterim denir.

Eğer T ye karşılık gelen V $F[G]$-modülü indirgenebilir ise bu durumda T ye indirgenebilir gösterim denir.

Kabul edelim ki V bir indirgenebilir $F[G]-$modül olsun. Bu durumda $0 < boy_F W < boy_F V$ olacak şekilde V nin bir W; $F[G]-$altmodülü vardır ve B_1; W nun bir bazı ise bu baz V nin bir B bazına genişletilebilir.

Eğer T_B, V ye karşılık gelen matris gösterimi ise bu durumda, $\forall g \in G$ için $T_B(g)$ matrisi; $X(g)$, $Y(g)$ ve $Z(g)$ birer matris ve $X(g)$; $k \times k$ tipinde olmak üzere,

$$\begin{bmatrix} X(g) & Y(g) \\ 0 & Z(g) \end{bmatrix} \qquad (*)$$

formundadır.

n.dereceden bir matris gösteriminin indirgenebilir olması için gerek ve yeter şart bu gösterimin (*) formunda olmasıdır.

Örnek 2.1.12 $G = C_3 =< a : a^3 = 1 >$ ve $V = Sp\{v_1, v_2, v_3\}$ aşağıdaki etkiyle bir $F[G]-$modül olsun.
$1v_1 = v_1, 1v_2 = v_2, 1v_3 = v_3, av_1 = v_2, av_2 = v_3, av_3 = v_1, a^2v_1 = v_3,$
$a^2v_2 = v_1, a^2v_3 = v_2$
$W = Sp\{v_1 + v_2 + v_3\}$ için, W; V nin bir $F[G]-$altmodülüdür. W nun $v_1 + v_2 + v_3$ bazını V nin bir $B' = \{v_1 + v_2 + v_3, v_1, v_2\}$ bazına genişletirsek, $T_{B'}$, V ye karşılık gelen matris gösterimi olmak üzere , $\forall g \in G$ için $T_{B'}(g)$ matrisleri,

$$T_{B'}(1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \ T_{B'}(a) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \ T_{B'}(a^2) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

şeklindedir. Görüldüğü gibi $\forall g \in G$ için $T_{B'}(g)$ matrisi (*) formundadır. Dolayısıyla $T_{B'}$ matris gösterimi indirgenebilirdir.

2.2 $F[G]-$ Homomorfizmalar

Gruplar ve vektör uzayları için yapı koruyan fonksiyonlar sırasıyla grup homomorfizmaları ve lineer dönüşümlerdir. $F[G]-$modüller için benzer fonksiyonlara $F[G]-$homomorfizmalar denir.

Tanım 2.2.1 V ve W; $F[G]-$modül olsun. Eğer $\theta : V \longrightarrow W$ fonksiyonu, bir lineer dönüşüm ve $\forall v \in V$, $g \in G$ için

$$\theta(gv) = g\theta(v)$$

şartını sağlıyorsa, bu durumda θ ya $F[G]$-homomorfizma denir.

Örnek 2.2.2 V ve W birer $F[G]-$modül ve $\theta : V \longrightarrow W$ bir $F[G]-$ homomorfizma olsun. Bu durumda $Ker\theta$, V nin ve $Im\theta$ da , W nun birer $F[G]-$altmodülüdür.

Örnek 2.2.3 G, S_n nin bir altgrubu olsun. $V = Sp\{v_1, \ldots, v_n\}$ permütasyon modülü ve $W = Sp\{w\}$ aşikar $F[G]-$modül olsun.

Eğer

$$\begin{aligned} \theta : V &\longrightarrow W \\ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i &\longrightarrow \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\right) w \end{aligned}$$

ise kolayca gösterilebilir ki θ bir lineer dönüşümdür. Şimdi $\forall g \in G$ ve $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i$ için,

$$\begin{aligned} \theta(gv) &= \theta\left(g \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i\right) \\ &= \theta\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i g v_i\right) \\ &= \theta\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_{g(i)}\right), \ V \text{ permütasyon modülü olduğundan } gv_i = v_{g(i)} = v_j \\ &= \theta\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\right) w \qquad (i) \\ g\theta(v) &= g\left(\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i\right) w\right) \\ &= \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\right) gw, \ W \text{ aşikar } F[G]-\text{modül olduğundan } gw = w \\ &= \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\right) w \qquad (ii) \end{aligned}$$

(i) ve (ii) den $\theta(gv) = g\theta(v)$ dir. Dolayısıyla θ bir $F[G]-$homomorfizmadır.

Ayrıca,

$$\begin{aligned} Ker\theta &= \left\{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i \ : \theta\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i\right) = 0\right\} \\ &= \left\{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i \ : \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\right) w = 0\right\} \\ &= \left\{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i \ : \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 0\right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Im\theta &= \left\{\theta\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i v_i\right) \ : \sum_{i=1}^{n}\lambda_i v_i \in V\right\} \\ &= \left\{\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\right) w \ : \sum_{i=1}^{n}\lambda_i \in F \ \ , \ w \in W\right\} \\ &= Sp\{w\} = W \end{aligned}$$

şeklindedir.

Tanım 2.2.4 **(İzomorfik $F[G]$-modüller)**
V, W; $F[G]-$modüller olmak üzere, V den W ya $\theta : V \longrightarrow W$ fonksiyonu verilsin.

Eğer θ; $F[G]$-homomorfizması, birebir ve örten ise bu durumda θ ya bir $F[G]-$izomorfizma denir.

Eğer V ile W arasında bir $F[G]$-izomorfizma mevcut ise bu durumda V ve W ya izomorfik $F[G]$-modüller denir ve $V \cong W$ ile gösterilir.

2.3 Maschke Teoremi

Bu kısımda gösterim teorisinde önemli bir yeri olan Maschke teoremini vereceğiz. Bu teoremle sıfırdan farklı her $F[G]-$modülün indirgenemez $F[G]$ -altmodüllerinin bir direkt toplamı olarak yazılabileceğini göstereceğiz. Bu kısımda F; **R** veya **C** olarak alınacaktır.

Lemma 2.3.1 Eğer V bir $F[G]$-modül ve $\theta^2 = \theta$ olacak biçimde θ, V den V ye bir $F[G]$-homomorfizma ise bu durumda

$$V = Im\theta \oplus Ker\theta$$

dır. (James ve Leibeck, 1993)

Teorem 2.3.2 G sonlu bir grup ve V bir $F[G]$-modül olsun. Eğer U, V nin bir $F[G]$-altmodülü ise bu durumda V nin bir W $F[G]$- altmodülü vardır öyleki,

$$V = U \oplus W$$

dir.

İspat U; V nin verilen bir $F[G]$-altmodülü olmak üzere V nin bir W_0 altuzayını seçelim öyleki,

$$V = U \oplus W_0$$

olsun.

ϕ fonksiyonunu,

$$\begin{aligned} \phi : V &\longrightarrow V \\ v &\longrightarrow \phi(v) = u \end{aligned}$$

şeklinde tanımlarsak, ϕ bir lineer dönüşümdür. Ayrıca $Ker\phi = W_0$, $Im\phi = U$ ve $\phi^2 = \phi$ dir.

Şimdi ϕ yardımıyla V den V ye bir $F[G]$-homomorfizma tanımlayalım.

$$\begin{aligned} \theta : V &\longrightarrow V \\ v &\longrightarrow \theta(v) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g\phi(g^{-1}v) \end{aligned}$$

olsun. Açıkça θ iyi tanımlıdır.

θ bir lineer dönüşümdür. Gerçekten $\lambda, \mu \in F$ ve $v_1, v_2 \in V$ için

$$\theta(\lambda v_1 + \mu v_2) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g\phi(g^{-1}(\lambda v_1 + \mu v_2))$$

$V = U \oplus W_0$ olduğundan $u_1, u_2 \in U$ ve $w_1, w_2 \in W_0$ olmak üzere bir tek şekilde $v_1 = u_1 + w_1$ ve $V_2 = u_2 + w_2$ olarak yazılabilir.Böylece

$$\begin{aligned} \theta(\lambda v_1 + \mu v_2) &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g\phi(g^{-1}(\lambda u_1 + \lambda w_1 + \mu u_2 + \mu w_2)) \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g\phi(\lambda g^{-1} u_1 + \mu g^{-1} u_2 + \lambda g^{-1} w_1 + \mu g^{-1} w_2) \end{aligned}$$

U bir $F[G]$-altmodül olduğundan $\lambda g^{-1}u_1 + \mu g^{-1}u_2 \in U$ dur. Eğer $\lambda g^{-1}w_1 + \mu g^{-1}w_2 \in U$ ise U bir $F[G]$-altmodül olduğundan $g \in G$ için

$$g(\lambda g^{-1} w_1 + \mu g^{-1} w_2) = \lambda g g^{-1} w_1 + \mu g g^{-1} w_2 = \lambda w_1 + \mu w_2 \in U$$

olurdu. Bu ise $V = U \oplus W_0$ olmasıyla dolayısıyla $U \cap W_0 = \emptyset$ olmasıyla çelişkidir. O halde $\lambda g^{-1}w_1 + \mu g^{-1}w_2 \notin U$ ve $V = U \oplus W_0$ olduğundan $\lambda g^{-1}w_1 + \mu g^{-1}w_2) \notin W_0$ dır.

$$
\begin{aligned}
\theta(\lambda v_1 + \mu v_2) &= \tfrac{1}{|G|}\sum_{g\in G} g\phi(\lambda g^{-1}u_1 + \mu g^{-1}u_1 + \lambda g^{-1}w_1 + \mu g^{-1}w_2) \\
&= \tfrac{1}{|G|}\sum_{g\in G} g(\lambda g^{-1}u_1 + \mu g^{-1}u_2) \\
&= \lambda\tfrac{1}{|G|}\sum_{g\in G} u_1 + \mu\sum_{g\in G} u_2 \\
&= \lambda\tfrac{1}{|G|}\sum_{g\in G} g\phi(g^{-1}u_1 + g^{-1}w_1) + \mu\tfrac{1}{|G|}\sum_{g\in G} g\phi(g^{-1}u_2 + g^{-1}w_2) \\
&= \lambda\tfrac{1}{|G|}\sum_{g\in G} g\phi(g^{-1}(u_1 + w_1)) + \mu\tfrac{1}{|G|}\sum_{g\in G} g\phi(g^{-1}(u_2 + w_2)) \\
&= \lambda\phi(v_1) + \mu\phi(v_2)
\end{aligned}
$$

dır. Şimdi $\forall v \in V$ ve $x \in G$ için $\theta(xv) = x\theta(v)$ dir. Gerçekten,

$$\theta(xv) = \tfrac{1}{|G|}\sum_{g\in G} g\phi(g^{-1}xv),$$

$h^{-1} = g^{-1}x$ dersek $g^{-1} = h^{-1}x^{-1}$ ve $g = xh$ dır. Böylece,

$$
\begin{aligned}
\theta(xv) &= \tfrac{1}{|G|}\sum_{xh\in G} xh\phi(h^{-1}x^{-1}xv) \text{ , } xh \in G \rightarrow h \in (x^{-1}G = G) \\
&= x\left(\tfrac{1}{|G|}\sum_{h\in G} h\phi(h^{-1}v)\right) \\
&= x\theta(v)
\end{aligned}
$$

dır. Sonuç olarak θ bir $F[G]$-homomorfizmadır.

Şimdi $\theta^2 = \theta$ dır. Gerçekten, öncelikle $\forall u \in U$, $g^{-1} \in G$ için $g^{-1}u \in U$ olup ϕ nin tanımından $\phi(g^{-1}u) = g^{-1}u$ dur. Bunu kullanırsak,

$$
\begin{aligned}
\theta(u) &= \tfrac{1}{|G|}\sum_{g\in G} g\phi(g^{-1}u) \\
&= \tfrac{1}{|G|}\sum_{g\in G} gg^{-1}u \\
&= \tfrac{1}{|G|}\mid G \mid u \\
&= u \qquad\qquad (*)
\end{aligned}
$$

dur. Şimdi $\forall v \in V$ için θ nın tanımından $\theta(v) \in U$ olup, (*) dan

$$\theta(\theta(v)) = \theta(v)$$

dolayısıyla $\theta^2 = \theta$ dır.

Nihayet,

$$\begin{aligned} Im\theta &= \{\theta(v) : v \in V\} \\ &= \{\theta(u+w) : u \in U\} \\ &= \{u : u \in U\} \\ &= U \end{aligned}$$

ve $Ker\theta = W$ dersek Örnek 2.2.2 den W, V nin bir $F[G]$-altmodülüdür.
Böylece Lemma 2.3.1 in hipotezleri sağlanmış oldu. Dolayısıyla,

$$\begin{aligned} V &= Im\theta \oplus Ker\theta \\ &= U \oplus W \end{aligned}$$

dur. Bu ise ispatı tamamlar. ■

Örnek 2.3.3 $G = S_3$ ve $V = Sp\{v_1, v_2, v_3\}$, $U = Sp\{v_1 + v_2 + v_3\}$ altmodülüyle bir permütasyon modülü olsun.

$$V = U \oplus W$$

olacak şekilde V nin bir W $F[G]$-altmodülünü bulmak için Maschke teoremini kullanalım.

İlk olarak $W_0 = Sp\{v_1, v_2\}$ seçersek, $V = U \oplus W_0$ olacaktır. (Tabiki W_0 bir $F[G]$-altmodül değildir.)

V den V ye bir ϕ dönüşümü, $v_3 = v_1 + v_2 + v_3 - v_1 - v_2$ olduğundan,

$$\phi(v_1) = 0,\ \phi(v_2) = 0 \ ve\ \phi(v_3) = v_1 + v_2 + v_3$$

şeklindedir.

Buradan Maschke teoreminin ispatında olduğu gibi V den V ye bir θ; $F[G]$-homomorfizması, $i = 1, 2, 3$ için

$$\theta : v_i \longrightarrow \tfrac{1}{3}(v_1 + v_2 + v_3)$$

şeklindedir. Gerçekten, $i = 1$ için

$$\begin{aligned}
\theta(v_1) &= \frac{1}{|S_3|}\sum_{g\in S_3} g\phi(g^{-1}v_1) \\
&= \tfrac{1}{6}\,[(1)\phi((1)v_1) + (13)\phi((13)v_1) + (12)\phi((12)v_1) \\
&+ (23)\phi((23)v_1) + (123)\phi((132)v_1) + (132)\phi((123)v_1)] \\
&= \tfrac{1}{6}\,[0 + (13)(v_1+v_2+v_3) + 0 + 0 + (123)(v_1+v_2+v_3) + 0] \\
&= \tfrac{1}{6}(2(v_1+v_2+v_3)) \\
&= \tfrac{1}{3}(v_1+v_2+v_3)
\end{aligned}$$

$i = 2, 3$ için de aynı yolla kolayca görülebilir.

Şimdi V nin W; $F[G]$-altmodülünü belirleyelim.

$$\begin{aligned}
W &= Ker\theta = \{a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3 \in V :\ \theta(a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3) = 0\} \\
&= \{a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3 \in V :\ a_1\theta(v_1) + a_2\theta(v_2) + a_3\theta(v_3) = 0\} \\
&= \Big\{a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3 \in V :\ \tfrac{1}{3}(a_1+a_2+a_3)(v_1+v_2+v_3) = 0\Big\} \\
&= \{a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3 \in V :\ a_1 + a_2 + a_3 = 0\} \\
&= \{a_1v_1 - a_1v_2 - a_3v_2 + a_3v_3 :\ a_2 = -a_1 - a_3\} \\
&= \{a_1(v_1 - v_2) - a_3(v_2 - v_3) :\ a_1, -a_3 \in F\} \\
&= Sp\{v_1 - v_2, v_2 - v_3\}
\end{aligned}$$

Tanım 2.3.4 (Tamamen İndirgenebilir F[G]-altmodül) V bir $F[G]$-modül ve her $1 \le i \le r$ için U_i, V nin indirgenmez $F[G]$-modülü olsun. Eğer

$$V = U_1 \oplus \ldots \oplus U_r$$

ise bu durumda V ye tamamen indirgenebilir $F[G]$-modül denir.

Teorem 2.3.5 Eğer $CharF = 0$ olmak üzere G sonlu bir grup ise, bu durumda sıfırdan farklı her $F[G]$-modül tamamen indirgenebilirdir.(James ve Leibeck, 1993)

Önerme 2.3.6 V ve $WF[G]$-modüller, $\theta : V \longrightarrow W$ bir $F[G]$ homomorfizma olsun. Bu durumda V nin $V = Ker\theta \oplus U$ ve $U \cong Im\theta$ olacak şekilde bir U $F[G]$-altmodülü vardır. (James ve Leibeck, 1993)

Önerme 2.3.7 V bir $F[G]$-modül ve $1 \le i \le s$ olmak üzere U_i indirgenmez $F[G]$-altmodülleri için

$$V = U_1 \oplus \ldots \oplus U_s$$

olsun. Eğer U; V nin herhangi bir indirgenmez $F[G]$-altmodülü ise bu durumda $1 \leq i \leq s$ için $U \cong U_i$ dir ve $U \cong U_i$ olan $F[G]$-altmodüllerinin sayısı $boy_F U$ ya eşittir. (James ve Leibeck, 1993)

U herhangi bir indirgenmez $F[G]$-modül ise, bu durumda U; U_i lerden herhangi birisine eşit olmak zorunda değildir. Bunu bir örnek ile gösterelim.

Örnek 2.3.8 G herhangi bir grup ve V; $g \in G$, $v \in V$ için $gv = v$ çarpımı ve $\{v_1, v_2\}$ bazıyla 2-boyutlu bir $F[G]$-modül olsun. Bu durumda $U_1 = Sp\{v_1\}$ ve $U_2 = Sp\{v_2\}$ olmak üzere

$$V = U_1 \oplus U_2$$

dır. $U = Sp\{v_1 + v_2\}$; Vnin indirgenmez $F[G]$-altmodülü olmasına rağmen ne U_1 ne de U_2 ye eşittir.

Teorem 2.3.9 $F[G]$ regüler $F[G]$-modülü, indirgenmez $F[G]$-altmodüllerin direkt toplamı, yani

$$F[G] = U_1 \oplus \ldots \oplus U_r$$

ise, bu durumda her indirgenmez $F[G]$-modül, $1 \leq i \leq r$ için U_i indirgenmez $F[G]$-altmodüllerinden birisine izomorftur. (James ve Leibeck, 1993)

Sonuç 2.3.10 Eğer G sonlu bir grup ise, bu durumda sadece sonlu sayıda izomorfik olmayan indirgenmez $F[G]$-modül vardır. (James ve Leibeck, 1993)

Tanım 2.3.11 Eğer her indirgenmez $F[G]$-modül , herhangi ikisi izomorf olmayan $V_1, \ldots, V_k$ indirgenmez $F[G]$-modüllerinden birine izomorf ise, $\{V_1, \ldots, V_k\}$ cümlesine indirgenmez $F[G]$-modüllerin bir tam cümlesi adı verilir.

Şimdi bütün indirgenmez $F[G]$-modüllerinin boyutları ile grubun eleman sayısı arasındaki ilişkiyi veren teorem verelim.

Teorem 2.3.12 $\{V_1, \ldots, V_k\}$ izomorfik olmayan indirgenmez $F[G]$-modüllerinin bir tam cümlesi olsun. Bu durumda

$$\sum_{i=1}^{k}(dimV_i)^2 = |G|$$

dir. (James ve Leibeck, 1993)

Önerme 2.3.13 V ve W indirgenmez $F[G]$-modüller olsunlar. O halde W nin V de görünme sayısı $boyHom(V,W)$ dir. (Sagan,1991)

Tanım 2.3.14 (Bir Matrisin İzi) $A = (a_{ij})$ $n \times n$ tipinde matris olsun. A nın izi

$$\text{İz}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

şeklinde tanımlanır.

Önerme 2.3.15 $A = (a_{ij})$ ve $n \times n$ tipinde matrisler olsunlar. Bu durumda

$$\text{İz}(A+B) = \text{İz}A + \text{İz}B \quad \text{ve} \quad \text{İz}(AB) = \text{İz}(BA)$$

dır. Ayrıca C; $n \times n$ tipinde tersinir bir ise,

$$\text{İz}(C^{-1}AC) = \text{İz}A$$

dır.

Tanım 2.3.16 G sonlu bir grup, V; B bazıyla bir $F[G]$- modül ve T, G nin V/F üzerindeki bir gösterimi olsun.

$$\begin{aligned} \chi : G &\longrightarrow F \\ g &\longrightarrow \chi(g) = \text{İz}T_B(g) \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan χ fonksiyonuna T ye karşılık gelen karakter denir.

3. Simetrik Grupların Gösterimleri

Bu bölümde S_n simetrik grubunun tüm indirgenmez $F[S_n]$- modülleri ve S_n nin tüm indirgenmez gösterimlerini belirleyeceğiz. Ayrıca bu $F[S_n]$- modüller için bir standart baz elde edeceğiz.

3.1 Diyagram, Tablo ve Tabloidler

Tanım 3.1.1 A boş olmayan bir küme ve S_A da A dan A ya birebir örten fonksiyonların kümesi olsun. Bu durumda S_A fonksiyonların bileşke işlemine göre bir gruptur. Bu gruba A üzerindeki simetrik grup denir.

Eğer A kümesi sonlu ise S_A yı S_n ile göstereceğiz.

Tanım 3.1.2 (Parçalanma ve Diyagram) m, $n \in \mathbf{N}$ ve $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m)$ pozitif sayıların $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_m$ şeklindeki bir dizisi olsun. Eğer,

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i = n$$

oluyorsa λ ya n nin bir parçalanması denir.

Örneğin; $(4), (3,1), (2,1,1), (2,2), (1,1,1,1)$; n=4 ün birer parçalanmalarıdır.

S_n nin eşlenik sınıflarının sayısı, n nin parçalanmalarının sayısına eşittir.

Tanım 3.1.3 $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m)$, n nin bir parçalanması olsun. Herbir satırı $1 \le i \le m$ için, soldan başlayan λ_i kutucuktan oluşan şekle λ nın diyagramı denir.

Örnek 3.1.4 n=9 sayısının $\lambda = (3,3,2,1) = (3^2,2,1)$ parçalanmasının diyagramı,

$$\begin{array}{lll} \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \\ \bullet & & \end{array}$$

şeklindedir.

Tanım 3.1.5 λ; n nin bir parçalanması olsun. λ ya karşılık gelen

$$S_\lambda = S_{\{1,2,\ldots,\lambda_1\}} \times S_{\{\lambda_1+1,\lambda_1+2,\ldots,\lambda_1+\lambda_2\}} \times \ldots \times S_{\{n-\lambda_m+1,n-\lambda_m+2,\ldots,n\}}$$

grubuna S_n nin Young altgrubu denir.

Örnek 3.1.6 $S_{(3,3,2,1)} = S_{\{1,2,3\}} \times S_{\{4,5,6\}} \times S_{\{7,8\}} \times S_{\{9\}} \cong S_3 \times S_3 \times S_2 \times S_1$

Genel olarak,

$$S_\lambda = S_{(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_m)} \cong S_{\lambda_1} \times S_{\lambda_2} \times \ldots \times S_{\lambda_m}$$

dır.

Tanım 3.1.7 λ; n nin bir parçalanması olsun. λ nın diyagramındaki kutucuklara 1,2,...,n sayılarının keyfi sırayla yerleştirilmesiyle elde edilen ifadelere λ-tablo adı verilir.

Örnek 3.1.8 n=3 ün $\lambda = (2,1)$ parçalanması

$$\begin{array}{ll} 1 & 2 \\ 3 & \end{array}$$

bir (2,1)-tablodur.

n=8 in (4,3,1) parçalanması için,

$$\begin{array}{llll} 1 & 3 & 5 & 6 \\ 4 & 7 & 8 & \\ 2 & & & \end{array}$$

bir (4,3,1)-tablodur.

Örneğin, λ=(2,1) parçalanması için mümkün olan tüm (2,1)-tabloları,

$$\begin{array}{cccccc} 1\,2, & 2\,1, & 1\,3, & 3\,1, & 2\,3, & 3\,2 \\ 3 & 3 & 2 & 2 & 1 & 1 \end{array}$$

şeklindedir.

Tanım 3.1.9 λ; n nin bir parçalanması ve t bir λ-tablo olsun.

$$R_t = \{\pi \in S_n \ : \text{her } 1 \le i \le n \text{ için, i ile } \pi(i) \text{ t nin aynı satırına ait ise}\}$$

$$C_t = \{\pi \in S_n \ : \text{her } 1 \le i \le n \text{ için, i ile } \pi(i) \text{ t nin aynı sütununa ait ise}\}$$

gruplarına sırasıyla t nin satır ve sütun altgrupları denir.

Örnek 3.1.10

$$t = \begin{array}{c} 1\,2 \\ 3 \end{array}$$

(2,1)-tablosu için,

$$R_t = S_{\{1,2\}} \times S_{\{3\}} = \{(1),(1\ 2)\} \times \{(3)\} = \{(1),(1\ 2)\} \cong S_2 \times S_1$$

$$C_t = S_{\{1,3\}} \times S_{\{2\}} = \{(1),(1\ 3)\} \times \{(2)\} = \{(1),(1\ 3)\} \cong S_2 \times S_1$$

Lemma 3.1.11 t bir λ-tablo ve $\pi \in S_n$ olsun. Bu durumda,

(i) $R_{\pi t} = \pi R_t \pi^{-1}$

(ii) $C_{\pi t} = \pi C_t \pi^{-1}$

dır.

İspat (i)

$$R_{\pi t} = \{\sigma \in S_n \ : \text{her } 1 \le i \le n \text{ için } i \text{ ile } \sigma(i) \ \pi t \text{ nin aynı satırına ait ise}\}$$

$$\pi R_t \pi^{-1} = \left\{\pi \rho \pi^{-1} : \rho \in R_t \text{ her } 1 \le i \le n \text{ için } j \text{ ile } \rho(j) \text{ t nin aynı satırına ait ise}\right\}$$

biçimindedir.

$x \in R_{\pi t}$ olsun. Bu durumda, her $1 \le i \le n$ için i ile x(i); πt nin aynı satırına aittir.

$\Longrightarrow \pi^{-1}(i)$ ile $\pi^{-1}x(i)$ t nin aynı satırına aittir.

$\Longrightarrow \pi^{-1}(i)$ ile $\pi^{-1}x\pi(\pi^{-1}(i))$ t nin aynı satırına aittir. $(\pi^{-1}(i) = j)$

$\Longrightarrow j$ ile $\pi^{-1}x\pi(j)$ t nin aynı satırına aittir.

$\Longrightarrow \pi^{-1}x\pi \in R_t$

$\Longrightarrow x \in \pi R_t \pi^{-1}$

$\Longrightarrow R_{\pi t} \subseteq \pi R_t \pi^{-1}$ (1)

dır.

Tersine, $y \in \pi R_t \pi^{-1}$ olsun. Bu durumda, $y=\pi\rho\pi^{-1}$ olacak şekilde $\rho \in R_t$ vardır. Dolayısıyla, her $1 \leq i \leq n$ için, i ile $\rho(i)$; t nin aynı satırına aittir.

$\Longrightarrow \pi(i)$ ile $\pi\rho(i)$ πt nin aynı satırına aittir.

$\Longrightarrow \pi(i)$ ile $\pi\rho\pi^{-1}(\pi(i))$ πt nin aynı satırına aittir. $(\pi(i) = j)$

$\Longrightarrow$ j ile $\pi\rho\pi^{-1}(j)$ πt nin aynı satırına aittir.

$\Longrightarrow \pi\rho\pi^{-1} \in R_{\pi t}$

$\Longrightarrow y \in R_{\pi t}$

$\Longrightarrow \pi R_t \pi^{-1} \subseteq R_{\pi t}$ (2)

(1) ve (2) den,

$$R_{\pi t} = \pi R_t \pi^{-1}$$

dir.

(ii) ; (i) nin ispatına benzer olarak yapılabilir. ∎

Şimdi λ-tabloların kümesi üzerinde bir bağıntı tanımlayalım. t_1 ve t_2 herhangi iki λ-tablo olmak üzere,

$$t_1 \approx t_2 \Longleftrightarrow \pi t_1 = t_2 \text{ olacak şekilde bir } \pi \in R_{t_1} \text{varsa}$$

Bu bağıntı bir denklik bağıntısıdır. Gerçekten,

(1) Yansıma Özelliği: t bir λ-tablo ise $(1) \in R_{t_1}$ ve (1)t=t olduğundan t $\approx$ t dır.

(2) Simetri Özelliği: $t_1 \approx t_2 \Longrightarrow \pi t_1 = t_2$ olacak şekilde bir en az bir $\pi \in R_{t_1}$ vardır.

$$
\begin{aligned}
&\Longrightarrow R_{\pi t_1} = R_{t_2} \\
&\Longrightarrow \pi R_{t_1} \pi^{-1} = R_{t_2} \qquad \text{(Lemma 3.1.11)} \\
&\Longrightarrow R_{t_1} = \pi^{-1} R_{t_2} \pi
\end{aligned}
$$

Diğer taraftan $\pi \in R_{t_1}$ olduğundan,

$$
\begin{aligned}
&\Longrightarrow \pi \in \pi^{-1} R_{t_2} \pi \\
&\Longrightarrow (1) \in \pi^{-1} R_{t_2} \\
&\Longrightarrow \pi \in R_{t_2}
\end{aligned}
$$

dir. R_{t_2} bir grup olduğundan $\pi^{-1} \in R_{t_2}$ ve $\pi t_1 = t_2 \Longrightarrow t_1 = \pi^{-1} t_2$ ve $\pi^{-1} \in R_{t_2}$ olur. Böylece $t_2 \approx t_1$ dır.

(3) Geçişme Özelliği: $t_1 \approx t_2$ ve $t_2 \approx t_3$ olsun. Bu durumda, $\pi_1 t_1 = t_2$ ve $\pi_2 t_2 = t_3$ olacak şekilde $\pi_1 \in R_{t_1}$ ve $\pi_2 \in R_{t_2}$ vardır. Böylece, $t_3 = \pi_2 \pi_1 t_1$ olur.

$$
\begin{aligned}
\pi_2 \in R_{t_2} &\Longrightarrow \pi_2 \in (R_{\pi_1 t_1} = \pi_1 R_{t_1} \pi_1^{-1}) \\
&\Longrightarrow \pi_2 \pi_1 \in (\pi_1 R_{t_1} = R_{t_1}) \\
&\Longrightarrow t_1 \approx t_3
\end{aligned}
$$

dır.

Tanım 3.1.12 **(λ-tabloid)** Yukarıda tanımlanan denklik bağıntısı sonunda ortaya çıkan denklik sınıflarına λ-tabloid adı verilir ve eğer t bir λ-tablo ise t nin denklik sınıfı $\{t\}$ ile gösterilir.

Örnek 3.1.13 λ=(2,2); n=4 ün bir parçalanması olsun. Bu durumda bütün λ-tablolar,

12,	12,	21,	21,	13,	13,	31,	31,
34	43	34	43	24	42	24	42

14,	14,	41,	41,	23,	23,	32,	32,
23	32	23	32	14	41	14	41

$$\begin{matrix} 24, & 24, & 42, & 42, & 34, & 34, & 43, & 43, \\ 13 & 31 & 13 & 31 & 12 & 21 & 12 & 21 \end{matrix}$$

Ve bütün λ-tabloidler;

$$\begin{Bmatrix} 12 \\ 34 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 12, & 12, & 21, & 21 \\ 34 & 43 & 34 & 43 \end{Bmatrix}$$
$$\begin{Bmatrix} 13 \\ 24 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 13, & 13, & 31, & 31 \\ 24 & 42 & 24 & 42 \end{Bmatrix}$$
$$\begin{Bmatrix} 14 \\ 23 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 14, & 14, & 41, & 41 \\ 23 & 32 & 23 & 32 \end{Bmatrix}$$
$$\begin{Bmatrix} 23 \\ 14 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 23, & 23, & 32, & 32 \\ 14 & 41 & 14 & 41 \end{Bmatrix}$$
$$\begin{Bmatrix} 24 \\ 13 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 24, & 24, & 42, & 42 \\ 13 & 31 & 13 & 31 \end{Bmatrix}$$
$$\begin{Bmatrix} 34 \\ 12 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 34, & 34, & 43, & 43 \\ 12 & 21 & 12 & 21 \end{Bmatrix}$$

şeklindedir.

Eğer $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m)$; n nin bir parçalanması ise $|\ S_n\ |=n!$ olduğundan, $n!$ tane λ-tablo vardır. Ayrıca her bir denklik sınıfında $\lambda_1!\lambda_2!\ldots!\lambda_m!$ tane eleman vardır. λ-tabloidlerin sayısı da, $\dfrac{n!}{\lambda_1!\lambda_2!\ldots!\lambda_m!}$ dir.

Şimdi S_n simetrik grubunun λ-tabloidlerin üzerinde nasıl etki yaptığını görelim. $\sigma \in S_n$ ve $\{t\}$ bir λ-tabloid olmak üzere,

$$\sigma\{t\} = \{\sigma t\}$$

şeklindedir. Örneğin,

$$(1234)\begin{Bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{Bmatrix}$$

dır.

Bu etki iyi tanımlıdır. t_1 ve t_2 herhangi iki λ-tablo, π_1 ve $\pi_2 \in S_n$ olmak üzere

$$(\pi_1, \{t_1\}) = (\pi_2, \{t_2\})$$

olsun. $\{t_1\} = \{t_2\} \Longrightarrow t_1 \approx t_2 \Longleftrightarrow \sigma t_1 = t_2$ olacak şekilde bir $\sigma \in R_{t_1}$ vardır. $\pi_1 = \pi_2 = \pi \in S_n$ ile gösterirsek, $\pi t_2 = \pi\sigma t_1 = \pi\sigma\pi^{-1}\pi t_1$ dır. $\sigma \in R_{t_1}$ olmak üzere $\pi\sigma\pi^{-1} \in \pi R_{t_1}\pi^{-1} = R_{\pi t_1}$ dir. O halde, $\pi t_2 = \pi\sigma t_1 = \pi\sigma\pi^{-1}\pi t_1$ olacak şekilde $\pi\sigma\pi^{-1} \in R_{\pi t_1}$ vardır. $\Longleftrightarrow \pi t_2 \approx \pi t_1 \Longrightarrow \{\pi t_2\} = \{\pi t_1\}$ olup bu etki iyi tanımlıdır. Kolaylıkla gösterilebilir ki, bu etki örtendir.

Tanım 3.1.14 F keyfi bir cisim ve $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m)$; n nin bir parçalanması olsun. M^λ, baz elemanları farklı λ-tabloidler olan, F üzerinde bir vektör uzayı olarak tanımlanır.
Örneğin, $\lambda = (3,1)$ parçalanması için,

$$M^\lambda = Sp\left\{\left\{\begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & & \end{matrix}\right\}, \left\{\begin{matrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & & \end{matrix}\right\}, \left\{\begin{matrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & & \end{matrix}\right\}, \left\{\begin{matrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & & \end{matrix}\right\}\right\}$$

şeklindedir.

Örnek 3.1.15 λ=(5) için

$$M^{(5)} = C[\{1 \ \ 2 \ \ 3 \ \ 4 \ \ 5\}]$$

dır.

Teorem 3.1.16 M^λ , herhangi bir λ-tabloid tarafından üretilen devirli bir $F[S_n]$-modüldür ve $boy_F M^\lambda = \dfrac{n!}{\lambda_1!\lambda_2!\ldots\lambda_m!}$ dır.

İspat $A = \{\{t_1\}, \ldots, \{t_k\}\}$ ve herhangi bir $v \in M^\lambda = Sp\{A\}$ olsun. Bu durumda $\alpha_i \in F$ olmak üzere,

$$v = \alpha_1\{t_1\} + \alpha_2\{t_2\} + \ldots + \alpha_k\{t_k\}$$

dır.
İddia ediyoruz ki, her $\{t_i\} \in A$ için , $\{t_i\} = \sigma_i\{t\}$ olacak şekilde $\sigma_i \in S_n$ ve bir $\{t\} \in A$ vardır.

Gerçekten, $\{t_i\} \in A$ için etki örten olduğundan,

$$\sigma_1\{t_{i1}\} = \{t_i\}$$

olacak şekilde $\sigma_1 \in S_n$ ve $\{t_{i1}\} \in A$ vardır.

Yine $\{t_{i1}\} \in A$ için örtenlikten,

$$\sigma_2\{t_{i2}\} = \{t_{i1}\}$$

olacak şekilde $\sigma_2 \in S_n$ ve $\{t_{i2}\} \in A$ vardır. Böyle devam edersek tabloidlerin sayısı sonlu olduğundan, sonlu adımdan sonra,

$$\sigma_k\{t_{ik}\} = \{t_{ik-1}\} \text{ ve } \sigma_{k+1}\{t\} = \{t_{ik}\}$$

olacak şekilde σ_k, $\sigma_{k+1} \in S_n$ ve $\{t_{ik-1}\}, \{t_{ik}\}$ ve $\{t\} \in A$ vardır.

Böylece,

$$\begin{aligned}
\sigma_1\{t_{i1}\} &= \{t_i\} \\
\sigma_2\{t_{i2}\} &= \{t_{i1}\} \\
\vdots &= \vdots \\
\sigma_k\{t_{ik}\} &= \{t_{ik-1}\} \\
\sigma_{k+1}\{t\} &= \{t_{ik}\}
\end{aligned}$$

olup, $\{t_i\} = (\sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_k\sigma_{k+1})\{t\}$ dır. $\sigma_i = \sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_k\sigma_{k+1}$ dersek, $\{t_i\} = \sigma_i\{t\}$ elde ederiz. Ohalde $\forall v \in M^\lambda$ için,

$$\begin{aligned}
v &= \alpha_1\{t_1\} + \alpha_2\{t_2\} + \ldots + \alpha_k\{t_k\} \\
&= \alpha_1\sigma_1\{t\} + \alpha_2\sigma_2\{t\} + \ldots + \alpha_k\sigma_k\{t\} \\
&= (\alpha_1\sigma_1 + \alpha_2\sigma_2 + \ldots + \alpha_k\sigma_k)\{t\}
\end{aligned}$$

$(\alpha_1\sigma_1 + \alpha_2\sigma_2 + \ldots + \alpha_k\sigma_k) \in F[S_n]$ olup , $v \in < \{t\} >$ dir.

$$M^\lambda \subseteq < \{t\} >$$

dir. M^λ, λ-tabloidler tarafından gerilen bir vektör uzayı ve λ-tabloidlerin sayısı, $\dfrac{n!}{\lambda_1!\lambda_2!\ldots\lambda_m!}$ olduğundan, $boy_F M^\lambda = \dfrac{n!}{\lambda_1!\lambda_2!\ldots\lambda_m!}$ dır. ∎

3.2 Parçalanmalar İçin Sıralamalar

Bu kısımda n nin parçalanmaları üzerinde sıralamalar tanımlayacağız.

Tanım 3.2.1 $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m)$ ve $\mu = (\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_m)$; n nin iki parçalanması olsun. Eğer her $i \geq 1$ için, $\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_i \geq \mu_1 + \mu_2 + \ldots + \mu_i$ oluyorsa λ, μ ye baskındır denir ve $\lambda \trianglerighteq \mu$ ile gösterilir. Eğer $i > m$ veya $i > l$ ise bu durumda sırasıyla λ_i ve μ_i ler yerine sıfır alırız.

Örnek 3.2.2 $\lambda_1 = (3,3)$, $\lambda_2 = (2,2,1,1)$ ve $\lambda_3 = (4,1,1)$; n=6 nın parçalanmaları olsunlar.

$$3 \geq 2, \quad 3+3 \geq 2+2, \quad 3+3+0 \geq 2+2+1, \quad 3+3+0+0 \geq 2+2+1+1$$

olduğundan $\lambda_1 \trianglerighteq \lambda_2$ dir. Diğer taraftan $3 \leq 4$ fakat $3+3 \leq 4+1$ olduğundan λ_1 ile λ_3 karşılaştırılamaz. Örneğin n=6 için aşağıdaki diyagramı verebiliriz.

$$\begin{tikzcd}
 & (6) & \\
 & (5,1) \arrow[u] & \\
 & (4,2) \arrow[u] & \\
(3^2) \arrow[ur] & & (4,1^2) \arrow[ul] \\
 & (3,2,1) \arrow[ul] \arrow[ur] & \\
(3,1^3) \arrow[ur] & & (2^3) \arrow[ul] \\
 & (2^2,1^2) \arrow[ul] \arrow[ur] & \\
 & (2,1^4) \arrow[u] & \\
 & (1^6) \arrow[u] &
\end{tikzcd}$$

Lemma 3.2.3 (Temel Kombinatoriyel Lemma)

λ ve μ; n nin parçalanmaları olmak üzere, t_1 bir λ-tablo ve t_2 bir μ-tablo olsunlar. Eğer her i için t_2 nin i inci satırındaki elemanlar t_1 in farklı sütunlarına ait ise bu durumda $\lambda \trianglerighteq \mu$ dür.

İspat t_2 nin ilk satırındaki elemanların sayısı μ_1 olsun. Hipotezden bu μ_1-tane eleman t_1 in farklı sütunlarında yer alacağından t_1 in en az μ_1-tane sütunu bulunmalıdır. Dolayısıyla t_1 in birinci satırında en az μ_1-tane eleman vardır. Böylece t_1 in birinci satırındaki elemanların sayısına λ_1 dersek,

$$\lambda_1 \geq \mu_1$$

olur. t_2 nin ikinci satırındaki elemanların sayısı μ_2 olsun. Bu elemanlar t_1 in farklı sütunlarında olduğundan, t_1 in en az μ_2-tane sütunu bulunmalıdır. Eğer t_1 in ikinci satırındaki elemanların sayısına λ_2 dersek,

$$\lambda_2 \geq \mu_2$$

olacaktır.

$$\lambda_1 + \lambda_2 \geq \mu_1 + \mu_2$$

Böyle devam edersek sonlu l adımdan sonra,

$$\lambda_1 + \lambda_2 \ldots + \lambda_l \geq \mu_1 + \mu_2 + \ldots + \mu_l$$

elde edilir. Bu ise $\lambda \trianglerighteq \mu$ demektir. ■

Tanım 3.2.4 λ ve μ; n nin parçalanmaları olsunlar.

$$\lambda < \mu \text{ dür} \iff \text{Bir i indisi için } j < i \text{ iken } \lambda_j = \mu_j \text{ ve } \lambda_i > \mu_i \text{ ise.}$$

Bu sıralamaya alfabetik (lexicographic) sıralama denir. Bu sıralama parçalanmalar üzerinde bir tam sıralamadır.

Örnek 3.2.5 $n = 6$ için $(2^2, 1^2) < (2,2,2)$ dir. Gerçekten, $i = 3$ seçersek $j = 1,2 < 3$ olmak üzere $j = 1$ için $2 = 2$, $j = 2$ için $2 = 2$ ve nihayet $i = 3$ için $1 < 2$ olur.

$n = 6$ için;
$(1^6) < (2,1^4) < (2^2,1^2) < (2^3) < (3,1^3) < (3,2,1) < (3^2) < (4,1^2) < (4,2) < (5,1) < (6)$

Önerme 3.2.6 λ ve μ; n nin parçalanmaları olsunlar. Eğer $\lambda \trianglerighteq \mu$ ise bu durumda $\lambda \geq \mu$ dür.

İspat Eğer $\lambda \neq \mu$ ise bu durumda farklılığın ilk olduğu yerde bir i indisi vardır öyleki $j < i$ için $\lambda_j = \mu_j$ dir. Dolayısıyla,

$$\sum_{j=1}^{i-1} \lambda_j = \sum_{j=1}^{i-1} \mu_j$$

dir. Fakat $\lambda \trianglerighteq \mu$ olduğundan,

$$\sum_{j=1}^{i} \lambda_j > \sum_{j=1}^{i} \mu_j$$

olmalıdır. Buradan $\lambda_i > \mu_i$ olup $\lambda \geq \mu$ dür. ■

3.3 Specht Modüller

Bu kısımda S_n nin tüm indirgenmez modüllerini inşa edeceğiz ve bunları Specht modüller olarak adlandıracağız.

Tanım 3.3.1 $H \subseteq S_n$ olmak üzere $H^- \in F[S_n]$ elemanı

$$H^- = \sum_{\pi \in H} sgn(\pi)\pi$$

olarak tanımlanır.

Tanım 3.3.2 **(λ-polytabloid)** t bir λ-tablo olsun. $K_t \in F[S_n]$ elemanı,

$$K_t = \sum_{\pi \in C_t} sgn(\pi)\pi$$

şeklinde tanımlanır. Ayrıca ,

$$e_t = K_t\{t\}$$

ye $\lambda-$polytabloid adı verilir.

Örnek 3.3.3 $\lambda = (3,2)$; n=5 in bir parçalanması ve $t = \begin{matrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 5 & \end{matrix}$ bir λ-tablo olsun. Bu durumda,

$$K_t = (1) - (1\ 3) - (2\ 5) + (1\ 3)(2\ 5)$$

$$e_t = \left\{ \begin{matrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 5 & \end{matrix} \right\} - \left\{ \begin{matrix} 3 & 2 & 4 \\ 1 & 5 & \end{matrix} \right\} - \left\{ \begin{matrix} 1 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} 3 & 5 & 4 \\ 1 & 2 & \end{matrix} \right\}$$

şeklindedir.

Lemma 3.3.4 t bir $\lambda-$tablo ve $\pi \in S_n$ olsun. Bu durumda,

(i) $K_{\pi t} = \pi K_t \pi^{-1}$

(ii) $e_{\pi t} = \pi e_t$

(iii) Eğer $\pi \in C_t$ ise bu durumda $\pi e_t = sgn(\pi) e_t$ dir.

İspat

(i) Lemma 3.1.11 den $C_{\pi t} = \pi C_t \pi^{-1}$ olup, $\sigma \in C_{\pi t} = \pi C_t \pi^{-1}$ ise $\sigma = \pi \rho \pi^{-1}$ olacak şekilde $\rho \in C_t$ vardır. Böylece,

$$\begin{aligned} K_{\pi t} &= \sum_{\pi\rho\pi^{-1} \in \pi C_t \pi^{-1}} sgn(\pi\rho\pi^{-1})\pi\rho\pi^{-1} \\ &= \sum_{\rho \in C_t} sgn(\pi) sgn(\pi^{-1}) sgn(\rho) \pi\rho\pi^{-1} \qquad (sgn(\pi)sgn(\pi^{-1} = 1) \text{ old.}) \\ &= \pi \left(\sum_{\rho \in C_t} sgn(\rho)\rho \right) \pi^{-1} \\ &= \pi K_t \pi^{-1} \end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned} e_{\pi t} &= K_{\pi t}\{\pi t\} \\ &= \pi K_t \pi^{-1}\{\pi t\} \qquad ((i) \text{ den}) \\ &= \pi K_t\{t\} = \pi e_t \end{aligned}$$

(iii) $\pi \in C_t$ olsun. (ii) den $\pi e_t = e_{\pi t}$ dir. Böylece,

$$\begin{aligned} \pi e_t &= e_{\pi t} \\ &= K_{\pi t}\{\pi t\} \\ &= \left(\sum_{\sigma \in C_{\pi t}} sgn(\sigma)\sigma \right) \{\pi t\} \end{aligned}$$

$\sigma \in C_{\pi t} = \pi C_t \pi^{-1}$ ise $\sigma = \pi\rho\pi^{-1}$ olacak şekilde $\rho \in C_t$ dir. Bu durumda,

$$
\begin{aligned}
\pi e_t &= \left(\sum_{\pi\rho\pi^{-1} \in \pi C_t \pi^{-1}} sgn(\pi\rho\pi^{-1})\pi\rho\pi^{-1} \right) \{\pi t\} \\
&= \left(\sum_{\rho \in C_t} sgn(\pi\rho) sgn(\pi^{-1})\pi\rho \right) \pi^{-1}\{\pi t\} \\
&= sgn(\pi^{-1}) \left(\sum_{\rho \in C_t} sgn(\pi\rho)\pi\rho \right) \{t\} \qquad (sgn(\pi^{-1}) = sgn(\pi)) \\
&= sgn(\pi) \left(\sum_{\pi^{-1}x \in C_t} sgn(x)x \right) \{t\} \qquad (\pi\rho = x) \\
&= sgn(\pi) \left(\sum_{x \in \pi C_t} sgn(x)x \right) \{t\} \qquad (\pi \in C_t = \pi C_t = C_t) \\
&= sgn(\pi) \left(\sum_{x \in C_t} sgn(x)x \right) \{t\} \\
&= sgn(\pi) K_t \{t\} \\
&= sgn(\pi) e_t
\end{aligned}
$$

■

Tanım 3.3.5 (Specht Modül) λ; n nin bir parçalanması olmak üzere, M^λ nın $\lambda-$ polytabloidler tarafından gerilen altmodülüne Specht modül adı verilir ve S^λ ile gösterilir.

Lemma 3.3.6 λ; n nin bir parçalanması olmak üzere, S^λ Specht modülü herhangi bir $\lambda-$polytabloidi tarafından üretilen devirli bir $F[S_n]$-modüldür.

İspat $S^\lambda = Sp\{e_{\sigma t} : \sigma \in S_n\}$ olmak üzere $s \in S^\lambda$ olsun. Bu durumda $\lambda_\sigma \in F$ olmak üzere,

$$s = \sum_{\sigma \in S_n} \lambda_\sigma e_{\sigma t}$$

dır. Lemma 3.3.4 den $e_{\sigma t} = \sigma e_t$ olup, $s = \sum_{\sigma \in S_n} \lambda_\sigma \sigma e_t$ dir.

$\sum_{\sigma \in S_n} \lambda_\sigma \sigma \in F[S_n]$ olduğundan,

$$s \in < e_t > \text{ ve } S^\lambda \subseteq < e_t >$$

dir. Her zaman $< e_t > \subset S^\lambda$ olduğundan,

$$S^\lambda = < e_t >$$

dir. ■

3.4 Alt Modül Teoremi

Aşağıdaki şekilde tanımlanan $<,>$, M^λ üzerinde bir bilineer form olsun.

$$< \{t_1\}, \{t_2\} > = \begin{cases} 1 & \{t_1\} = \{t_2\} \text{ ise} \\ 0 & \{t_1\} \neq \{t_2\} \text{ ise} \end{cases}$$

Bu bilineer form cismin karakteristliğine bağlı olmaksızın M^λ üzerinde simetrik, S_n -invaryant ve non-singülerdir. Eğer $F = Q$ ise bu lineer form bir iççarpımdır.

Simetriklik:

$$\begin{aligned} < \{t_1\}, \{t_2\} > &= \begin{cases} 1 & \{t_1\} = \{t_2\} \text{ ise} \\ 0 & \{t_1\} \neq \{t_2\} \text{ ise} \end{cases} \\ &= \begin{cases} 1 & \{t_2\} = \{t_1\} \text{ ise} \\ 0 & \{t_2\} \neq \{t_1\} \text{ ise} \end{cases} \\ &= < \{t_2\}, \{t_1\} > \end{aligned}$$

S_n-invaryantlık: $\forall \pi \in S_n$ için,

$$< \pi\{t_1\}, \pi\{t_2\} > = < \{\pi t_1\}, \{\pi t_2\} > = \begin{cases} 1 & \{\pi t_1\} = \{\pi t_2\} \\ 0 & \{\pi t_1\} \neq \{\pi t_2\} \end{cases}$$

S_n nin $\lambda-$tabloidlerin kümesi üzerinde etkisi iyi tanımlı olduğundan ,
$\pi^{-1} \in S_n$ için,

$$\{\pi t_1\} = \{\pi t_2\} \Longrightarrow \pi^{-1}(\{\pi t_1\}) = \pi^{-1}(\{\pi t_2\}) \Longrightarrow \{t_1\} = \{t_2\}$$
$$\{\pi t_1\} \neq \{\pi t_2\} \Longrightarrow \pi^{-1}(\{\pi t_1\}) \neq \pi^{-1}(\{\pi t_2\}) \Longrightarrow \{t_1\} \neq \{t_2\}$$

dir. Buradan,

$$< \pi\{t_1\}, \{\pi t_2\} > \;= \begin{cases} 1 & \{\pi t_1\} = \{\pi t_2\} \\ 0 & \{\pi t_1\} \neq \{\pi t_2\} \end{cases}$$
$$= \begin{cases} 1 & \{t_1\} = \{t_2\} \\ 0 & \{t_1\} \neq \{t_2\} \end{cases}$$
$$=< \{t_1\}, \{t_2\} >$$

olup, $<,>$ S_n-invaryanttır.

Non-Singülerlik:

Sıfırdan farklı her $m \in M^\lambda$ için, $< m, m' > \neq 0$ olacak şekilde en az bir $m' \in M^\lambda$ var mıdır?

$0 \neq m \in M^\lambda$ olsun. O halde $m = a_1\{t_1\} + a_2\{t_2\} + \ldots + a_n\{t_n\} \neq 0 \Longrightarrow$ en az i için $a_i \neq 0$ dır. $< m, \{t_i\} >= a_i \neq 0$ olduğundan her zaman $m' = \{t_i\}$ olacak şekilde $m' \in M^\lambda$ vardır. Dolayısıyla $<,>$ non-singülerdir.

Lemma 3.4.1 (Sign Lemma) $H \leq S_n$ bir altgrup olsun. (i) Eğer $\pi \in H$ ise $\pi H^- = H^-\pi = (sgn\pi)H^-$

(ii) $u,\ v \in M^\lambda$ olmak üzere $< H^-u, v >=< u, H^-v >$

(iii) $(b\ c) \in H$ ve $k \in C[S_n]$ olmak üzere $H^- = k(c - (b\ c))$

(iv) t bir $\lambda-$tablo olsun. Eğer b ve c; t nin aynı satırında ve $(b\ c) \in H$ ise $H^-\{t\} = 0$ dır.

İspat (i)

$$\begin{aligned}
\pi H^- &= \pi(\sum_{\sigma\in H} sgn(\sigma)\sigma) \\
&= \sum_{\sigma\in H} sgn(\sigma)\pi\sigma && (\pi\sigma = \rho) \\
&= \sum \lim\nolimits_{\pi^{-1}\rho\in H} sgn(\pi^{-1}\rho)\rho && (\pi^{-1}\rho \in H \Longrightarrow \rho \in \pi H = H) \\
&= \sum_{\rho\in H} sgn(\pi^{-1})sgn(\rho)\rho \\
&= sgn(\pi^{-1}) \sum_{\rho\in H} sgn(\rho)\rho && (sgn(\pi^{-1}) = sgn(\pi)) \\
&= sgn(\pi) \sum_{\rho\in H} sgn(\rho)\rho \\
&= sgn(\pi)H^-
\end{aligned}$$

(ii)

$$
\begin{aligned}
< H^{-}u, v > &=< \sum_{\pi \in H} sgn(\pi)\pi u, v > \\
&= \sum_{\pi \in H} < sgn(\pi)\pi u, v > \\
&= \sum_{\pi \in H} sgn(\pi) < u, \pi^{-1}v > \qquad (<,> S_n - \text{invaryant olduğundan}) \\
&=< u, \sum_{\pi \in H} sgn(\pi)\pi^{-1}v > \\
&=< u, \sum_{\rho \in H} sgn(\rho)\rho v > \\
&=< u, H^{-}v >
\end{aligned}
$$

(iii) $K = \{(1), (b\ c)\} \leq H$ alt grubunu gözönüne alalım. K nın H içinde öyle $k_1, k_2 \ldots, k_t$ koset temsilcileri vardır öyleki

$$H = k_1K \cup k_1K \cup \ldots \cup k_tK$$

dır. Buradan,

$$
\begin{aligned}
H &= k_1\{(1), (b\ c)\} \cup k_2\{(1), (b\ c)\} \cup \ldots \cup k_t\{(1), (b\ c)\} \\
&= \{k_1, k_2 \ldots, k_t, k_1(b\ c), k_2(b\ c), \ldots, k_t(b\ c)\}
\end{aligned}
$$

yazılır.

$$
\begin{aligned}
H^{-} &= sgn(k_1)k_1 + sgn(k_2)k_2 + \ldots + sgn(k_t)k_t \\
&\quad + sgn(k_1(b\ c))k_1(b\ c) + sgn(k_2(b\ c))k_2(b\ c) + \ldots + sgn(k_t(b\ c))k_t(b\ c) \\
&= sgn(k_1)k_1 + sgn(k_2)k_2 + \ldots + sgn(k_t)k_t \\
&\quad - sgn(k_1)k_1(b\ c) - sgn(k_2)k_2(b\ c) - \ldots - sgn(k_t)k_t(b\ c) \\
&= sgn(k_1)\,[k_1 - k_1(b\ c)] + sgn(k_2)\,[k_2 - k_2(b\ c)] + \ldots + sgn(k_t)\,[k_t - k_t(b\ c)] \\
&= sgn(k_1)\,[k_1((1) - (b\ c))] + sgn(k_2)\,[k_2((1) - (b\ c))] + \ldots + sgn(k_t)\,[k_t((1) - (b\ c))] \\
&= [sgn(k_1)k_1 + sgn(k_2)k_2 + \ldots + sgn(k_t)k_t]\,((1) - (b\ c))
\end{aligned}
$$

$k = sgn(k_1)k_1 + sgn(k_2)k_2 + \ldots + sgn(k_t)k_t \in C[S_n]$ dersek,

$$H^{-} = k((1) - (b\ c))$$

dir.

(iv)Hipotezden $(b\ c) \in R_t$ olduğundan $(b\ c)\{t\} = \{t\}$ dır.

$$H^{-} = k((1) - (b\ c))\{t\} = k(\{t\} - (b\ c)\{t\}) = k(\{t\} - \{t\}) = 0$$

dır. ∎

Lemma 3.4.2 t ve t' herhangi iki $\lambda-$ tablo olsun. Bu durumda aşağıdakiler denktir.

(i) $\{t'\}, e_t$ de gözükür.

(ii) $\rho \in R_{t'}$ ve $\gamma \in C_t$ mevcuttur öyle ki, $\rho t' = \gamma t$ dir.

(iii) Herhangi a, b nın t' nün aynı satırına ait olması a, b nin t nin farklı sütunlarına ait olmasını gerektirir.

İspat $(i) \Longrightarrow (ii)$: $\{t'\}, e_t$ de gözükür ise, $\{t'\} = \sigma\{t\}$ olacak şekilde $\sigma \in C_t$ vardır.

$$\Longrightarrow \{t'\} = \sigma\{t\} = \{\sigma t\}$$
$$\Longrightarrow t' \approx \sigma t$$
$$\Longrightarrow \pi \in R_{t'} \text{ için } \sigma t = \pi t' \text{ dır.}$$

$\pi = \rho$, ve $\sigma = \gamma$ dersek,

$$\rho t' = \gamma t$$

dir. $(ii) \Longrightarrow (i)$: $\rho \in R_{t'}$, $\gamma \in C_t$ olmak üzere, $\rho t' = \gamma t$ olsun. Bu durumda $\rho \in R_{t'}$ olduğundan $\{\rho t'\} = \{t'\}$ dır. Buradan,

$$\Longrightarrow \{\rho t'\} = \{\gamma t\}$$
$$\Longrightarrow \{t'\} = \gamma\{t\} \quad , \gamma \in C_t$$

Bu ise $\{t'\}$, e_t de gözükür demektir.

$(i) \Longrightarrow (iii)$: (i) den $\{t'\} = \sigma\{t\}$ olacak şekilde $\sigma \in C_t$ dır. a, b t' nün aynı satırına ait olsun. Bu durumda $\{t'\} = \{\sigma t\}$ olduğundan a ve b σt nin aynı satırına aittir. Bu ise a, b t' nin σt nin farklı sütunlarına ait olmasını gerektirir.

a, b σt nin farklı sütunlarına ait ise $\sigma^{-1}(a), \sigma^{-1}(b)$ de t nin farklı sütunlarına aittir. $\sigma \in C_t \Longrightarrow \sigma^{-1} \in C_t \Longrightarrow$ olacağından, a ile $\sigma^{-1}at$ nin aynı sütununa ve b ile $\sigma^{-1}(b)$ t nin aynı sütununa ait tir. Dolayısıyla $\sigma^{-1}(a)$, $\sigma^{-1}(b)t$ nin farklı sütunlarına ait olduğundan a, b de t nin farklı sütunlarına ait olmak zorundadır. Bu da istenilendir.

$(iii) \Longrightarrow (i)$: a, b t' nün aynı satırına ait ise a, b t nin farklı sütununa ait olsun.

1) a, b t' nün r yinci satırına ait olsun. Yani,

$$
t' = \begin{array}{ccccc}
 & \bullet & \bullet & \dots & \bullet \\
 & \bullet & \bullet & \dots & \bullet \\
 & \vdots & \vdots & & \vdots \\
r. & \bullet & a & \dots & b \\
 & \vdots & \vdots & & \vdots \\
 & \bullet & \bullet & \dots & \bullet
\end{array}
$$

olsun. Bu durumda a ve b t nin farklı sütunlarına ait olup, $\sigma = (1) \in C_t$ için $\{t'\} = (1)\{t\}$ dir.

(2) Eğer a, t nin r. satırına ait fakat b r. satırına ait değilse bu durumda hipotezden b , a ile aynı sütunda bulunamaz. b nin bulunduğu sütun k olsun. Yani,

$$
t = \begin{array}{ccccccc}
 & & & & k & & \\
 & \bullet & \bullet & & \dots & & \bullet \\
 & \bullet & \bullet & & \dots & & \bullet \\
 & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
r. & \bullet & a & & \dots & & \bullet \\
 & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
 & \bullet & \bullet & \dots & b & \dots & \bullet \\
 & \vdots & \vdots & & & & \vdots \\
 & \bullet & \bullet & & \dots & & \bullet
\end{array}
$$

Bu durumda r. satır ve k. sütundaki bir i sayısı için, $\{t'\} = (b\ i)\{t\}, (b\ i) \in C_t$ dir.

(3) Eğer b, t nin r. satırına ait fakat a r.satırına ait değilse bu durumda a nın bulunduğu sütuna l dersek r. satır l. sütundaki bir j sayısı için,

$$\{t'\} = (a\ j)\{t\}, \quad (a\ j) \in C_t$$

dir.

(4) Eğer hem a hem de b t nin r.satırına ait değilse, bu durumda a nın bulunduğu sütuna m ve b nin bulunduğu sütuna n denirse, r.satır ve m.sütundaki bir j ve r.satır ve n.sütundaki bir i sayısı için,

$$\{t'\} = (a\ j)(b\ i)\{t\}, (a\ j)(b\ i) \in C_t \quad dir.$$

Böylece a, b keyfi olduğundan her durumda $\{t'\} = \sigma\{t\}$ olacak şekilde $\sigma \in C_t$ vardır. Bu ise ispatı bitirir.

■

Lemma 3.4.3 λ ve μ n nin parçalanmaları olsunlar. Kabul edelim ki, t bir $\lambda-$tablo, t' bir $\mu-$tablo ve $K_t\{t'\} \neq 0$ olsun. Bu durumda $\lambda \trianglerighteq \mu$ dır. Ayrıca, eğer $\lambda = \mu$ ise bu durumda

$$K_t\{t'\} = \mp K_t\{t\} = \mp e_t$$

dir.

İspat a, b; t' nün aynı satırına ait olan herhangi iki sayı olsun. Bu durumda $(a\ b) \in R_{t'}$ olup,

$$((1) - (a\ b))\{t'\} = (\{t'\} - (a\ b)\{t'\}) = \{t'\} - \{t'\} = 0 \qquad (*)$$

Şimdi iddia ediyoruz ki, a, b t nin aynı sütununa ait olamaz. Kabul edelim ki a ve b t nin aynı sütununa ait olsun. Bu durumda (1) ve $(a\ b) \in C_t$ olup, $H = \{(1), (a\ b)\} \in C_t$ nin bir alt grubudur. $\sigma_1, \sigma_2 \ldots, \sigma_t$ ler H nın C_t içindeki koset temsilcileri olarak seçersek ,

$$C_t = \sigma_1 H \cup \sigma_2 H \cup \ldots \cup \sigma_t H$$

dır. Buradan,

$$\begin{aligned} C_t &= \sigma_1\{(1), (a\ b)\} \cup \sigma_1\{(1), (a\ b)\} \cup \ldots \cup \sigma_t\{(1), (a\ b)\} \\ &= \{\sigma_1, \sigma_2 \ldots, \sigma_t, \sigma_1(a\ b), \sigma_2(a\ b), \ldots, \sigma_t(a\ b)\} \end{aligned}$$

olur. Buradan,

$$\begin{aligned} K_t &= sgn(\sigma_1)\sigma_1 + sgn(\sigma_2)\sigma_2 + \ldots + sgn(\sigma_t)\sigma_t \\ &+ sgn(\sigma_1(a\ b))\sigma_1 + (a\ b)sgn(\sigma_2(a\ b))\sigma_2(a\ b) \ldots + sgn(\sigma_t(a\ b))\sigma_t(a\ b) \\ &= sgn(\sigma_1)\sigma_1 + sgn(\sigma_2)\sigma_2 + \ldots + sgn(\sigma_t)\sigma_t \\ &- sgn(\sigma_1)\sigma_1(a\ b) - sgn(\sigma_2)\sigma_2(a\ b) - \ldots - sgn(\sigma_t)\sigma_t(a\ b) \\ &= sgn(\sigma_1)\left[\sigma_1 - \sigma_1(a\ b)\right] + sgn(\sigma_2)\left[\sigma_2 - \sigma_2(a\ b)\right] + \ldots + sgn(\sigma_t)\left[\sigma_t - \sigma_t(a\ b)\right] \\ &= sgn(\sigma_1)\left[\sigma_1((1) - (a\ b))\right] + sgn(\sigma_2)\left[\sigma_2((1) - (a\ b))\right] + \ldots + sgn(\sigma_t)\left[\sigma_t((1) - (a\ b))\right] \\ &= \left[sgn(\ \sigma_1)\sigma_1 + sgn(\sigma_2)\sigma_2 + \ldots + sgn(\sigma_t)\right]((1) - (a\ b)) \end{aligned}$$

dır. Bu durumda, (*) dan

$$\begin{aligned} K_t\{t'\} &= [sgn(\sigma_1)\sigma_1 + + \ldots + sgn(\sigma_t)\sigma_t]\,((1)-(a\ b))\{t'\} \\ &= 0 \end{aligned}$$

olur ki, bu hipoteze çelişkidir. Bu çelişkiden dolayı iddiamız doğrudur. a, b keyfi olduğundan t' nün keyfi r. satırına ait olan bütün elemanlar t nin farklı sütunlarına aittir.

Böylece Lemma 3.2.4 gereğince $\lambda \trianglerighteq \mu$ dür.

Şimdi eğer $\lambda = \mu$ ise t ve t' aynı $\lambda-$ tablodur ve a, b t' nün aynı satırına ait ise Bu durumda a, b; t nin farklı sütunlarına aittir. Buradan Lemma 2.3.4$(iii) \Longrightarrow (i)$ gerektirmesinden dolayı $\{t'\}$, e_t de gözükür. Yani $\{t'\} = \pi\{t\}$ olacak şekilde $\pi \in C_t$ vardır.

$$\begin{aligned} K_t\{t'\} &= K_t\pi\{t\} \\ &= \sum_{\sigma\in C_t} sgn(\sigma)\sigma\pi\{t\} \\ &= \sum_{\sigma\in C_t} sgn(\pi^{-1})sgn(\sigma)sgn(\pi)\sigma\pi\{t\} \\ &= sgn(\pi)\sum_{\sigma\in C_t} sgn(\sigma\pi)\sigma\pi\{t\} \end{aligned}$$

$\sigma\pi = \rho$ dersek $\sigma = \rho\pi^{-1} \in C_t \Longrightarrow \rho \in C_t\pi = C_t$ dir. O halde,

$$\begin{aligned} K_t\{t'\} &= sgn(\pi)\sum_{\rho\pi^{-1}\in C_t} sgn(\rho)\rho\{t\} \\ &= sgn(\pi)\sum_{\rho\in C_t} sgn(\rho)\rho\{t\} \qquad (\ sgn(\pi) = \mp 1) \\ &= \mp K_t\{t\} \\ &= \mp e_t \end{aligned}$$

■

Sonuç 3.4.4 Eğer u, M^λ nın bir elemanı ve t bir $\lambda-$tablo ise $K_t u$, e_t nin bir katıdır.

İspat $M^\lambda = Sp\{\{t'_1\}, \{t'_2\}, \ldots, \{t'_k\}\}$ ve $u \in M^\lambda$ olsun.

$a_i \in F$ olmak üzere $u = a_1\{t'_1\} + a_2\{t'_2\} + \ldots + a_k\{t'_k\}$ dır.

$$\Longrightarrow K_t u = K_t(a_1\{t'_1\} + a_2\{t'_2\} + \ldots + a_k\{t'_k\})$$

M^λ bir $F[S_n]$-modül olduğundan,

$$
\begin{aligned}
K_t u &= a_1 K_t\{t'_1\} + a_2 K_t\{t'_2\} + \ldots + a_k K_t\{t'_k\} \\
&= a_1(\mp e_t) + a_2(\mp e_t)\ldots + a_k(\mp e_t) \\
&= (\mp a_1 \mp \ldots \mp a_k)e_t \\
&= \lambda e_t \qquad (\lambda = (\mp a_1 \mp \ldots \mp a_k) \in F)
\end{aligned}
$$

olur. ∎

Teorem 3.4.5 (Alt Modül Teoremi) Eğer U, M^λ nın bir alt modülü ise bu durumda

$$U \supseteq S^\lambda \text{ veya } U \subseteq S^{\lambda\perp}$$

İspat Kabul edelim ki, $u \in U$ ve t bir λ−tablo olsun. Bu durumda Lemma 3.4.4 den $K_t u$, e_t nin bir katı olup, bir $\lambda \in F$ için $K_t u = \lambda e_t$ dir. Eğer en az bir $u \in U$ için $\lambda \neq 0$ ise bu durumda $\lambda^{-1}K_t u = e_t$ ve U bir $F[S_n]-$ altmodül olduğundan $e_t = \lambda^{-1}K_t u \in U$dır. Buradan her $s \in S^\lambda =< e_t >$ için, $s \in U$ olup, $S^\lambda \subseteq U$ dır. Eğer her $u \in U$ için $\lambda = 0$ ise bu durumda $K_t u = 0$ dır. Dolayısıyla her $u \in U$ için $< u, e_t >=< u, K_t\{t\} >=< K_t u, \{t\} >= 0$ dır. Buradan her $s \in S^\lambda =< e_t >$ için $< u, s >= 0$ olup, $u \in S^{\lambda\perp}$ dolayısıyla $U \subseteq S^{\lambda\perp}$ dur. ∎

Sonuç 3.4.6 S^λ ile $S^\lambda \cap S^{\lambda\perp}$ arasında başka bir alt modül yoktur.

İspat Kabul edelim ki $S^\lambda \cap S^{\lambda\perp} \subseteq U \subseteq S^\lambda$ olacak şekilde M^λ nın bir U alt modülü mevcut olsun. Bu durumda Teorem 3.4.5 dan $U \supseteq S^\lambda$ veya $U \subseteq S^{\lambda\perp}$ dır.

(1) $S^\lambda \subseteq U$ ise kabulümüzden $U \subseteq S^\lambda$ olup, $U = S^\lambda$ dır.

(2) $U \subseteq S^{\lambda\perp}$ ise bu durumda , $U \cap S^\lambda \subseteq S^\lambda \cap S^{\lambda\perp}$ dolayısıyla $U \subseteq S^\lambda \cap S^{\lambda\perp}$ dır. Ayrıca kabulümüzden $S^\lambda \cap S^{\lambda\perp} \subseteq U$ olup , $S^\lambda \cap S^{\lambda\perp} = U$ dur.

∎

Teorem 3.4.7 $\dfrac{S^\lambda}{S^\lambda \cap S^{\lambda\perp}}$ bölüm modülü sıfır yada indirgenemezdir.

İspat Kabul edelim ki, $\dfrac{S^\lambda}{(S^\lambda \cap S^{\lambda\perp})} \neq \{0\}$ olsun. Gösterelim ki, $\dfrac{S^\lambda}{(S^\lambda \cap S^{\lambda\perp})}$ indirgenemezdir. $\dfrac{U}{(S^\lambda \cap S^{\lambda\perp})}$, $\dfrac{S^\lambda}{(S^\lambda \cap S^{\lambda\perp})}$ nin bir alt modülü olsun. Bu durumda,

$S^\lambda \cap S^{\lambda\perp} \subseteq U \subseteq S^\lambda$ olup, Sonuç 3.4.6 dan $U = S^\lambda$ veya $U = S^\lambda \cap S^{\lambda\perp}$ dır. $U = S^\lambda$ ise $\dfrac{U}{(S^\lambda \cap S^{\lambda\perp})} = \dfrac{S^\lambda}{(S^\lambda \cap S^{\lambda\perp})} \neq \{0\}$ veya $U = S^\lambda \cap S^{\lambda\perp}$ ise $\dfrac{U}{(S^\lambda \cap S^{\lambda\perp})} = \{0\}$ dır.
O halde $\dfrac{S^\lambda}{(S^\lambda \cap S^{\lambda\perp})}$ indirgenemezdir. ■

Önerme 3.4.8 **C** kompleks sayılar cismi üzerinde θ $Hom(S^\lambda, M^\mu)$ nün sıfırdan farklı bir elemanı ise $\lambda \trianglerighteq \mu$ dür ayrıca $\lambda = \mu$ ise θ bir skalerin katıdır.

İspat Kabul edelim ki **C** kompleks sayılar cismi üzerinde $\theta \in Hom(S^\lambda, M^\mu)$ sıfırdan farklı olsun. $<,>$; **C** kompleks sayılar üzerinde bir iç çarpım olduğundan
$M^\lambda = S^\lambda \oplus S^{\lambda\perp}$ dir. Böylece $Hom(M^\lambda, M^\mu)$ nin bir θ için $\theta(S^{\lambda\perp}) = 0$ olur.
$s_i \in \mu$-tablo olmak üzere,

$$0 \neq \theta(e_t) = \theta(K_t\{t\}) = K_t\theta(\{t\}) = K_t\left(\sum_i c_i\{s_i\}\right)$$

dır. Lemma 3.4.3 den $\lambda \trianglerighteq \mu$ olur. Ayrıca $\lambda = \mu$ olduğunda Sonuç 3.4.4 den $\theta(e_t) = ce_t$ idi. π herhangi bir permütasyon olmak üzere

$$\theta(e_{\pi t}) = \theta(\pi e_t) = \pi(\theta e_t) = \pi(ce_t) = ce_{\pi t}$$

Böylece θ bir c skalarının katıdır. ■

Teorem 3.4.9 λ; n nin bir parçalanması olsun. S^λ, kompleks sayılar cismi üzerinde bütün indirgenmez S_n-modüllerin listesini oluşturur. (Sagan, 1991)

Sonuç 3.4.10 M^μ nün ayrışımı

$$M^\mu = \bigoplus_{\lambda \trianglerighteq \mu} m_{\lambda\mu} S^\lambda$$

ise $m_{\mu\mu} = 1$ dir.

İspat $\lambda = \mu$ ise Önerme 2.3.13 den açık olarak

$$m_{\mu\mu} = boy Hom(S^\mu, M^\mu) = 1$$

dir. ■

3.5 Specht Modüller İçin Bir Baz

Tanım 3.5.1 Bir t λ−tablosunun satırları ve sütunları artan bir dizi ise t λ-tablosuna standart λ-tablo denir. Eğer $\{t\}$ λ-tabloidi standart bir λ- tablo içeriyorsa, bu durumda $\{t\}$ λ-tabloidine standart λ-tabloid denir. t standart λ-tablo ise e_t λ-polytabloidine standart λ-polytabloid denir.

Örnek 3.5.2

$$t_1 = \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 6 & \\ 5 & & \end{array} \quad \text{ve} \quad t_2 = \begin{array}{ccc} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & \\ 6 & & \end{array}$$

standart tablolardır.

Fakat , $t_3 = \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 4 & \\ 6 & & \end{array}$ standart tablo değildir.

Örnek 3.5.3 S_4 simetrik grubunda $\lambda = (2,2)$ parçalanması için,

$$\left\{\begin{array}{cc} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{array}\right\}, \left\{\begin{array}{cc} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{array}\right\}$$

tabloidleri standart tabloidleridir.

Teorem 3.5.4

$$\{e_t : t \text{ standart bir } \lambda - \text{tablo}\}$$

kümesi S^λ için bir bazdır.

Bu teoremin ispatını iki aşamada yapacağız. Önce bu kısımda bu kümenin lineer bağımsızlığını ve kısım 3.6 de ise bu kümenin S^λ yı gerdiğini ispatlayacağız.

Tanım 3.5.5 **(Kompozisyon)** $\sum_{i=1}^{l} \lambda_i = n$ koşulunu sağlayan $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_l)$ pozitif tamsayılardan oluşan diziye n nin kompozisyonu denir. Buradaki her bir λ_i sayılarına kompozisyonun parçaları denir. $(1,3,2)$ ve $(3,2,1)$ n=6 nın birer kompozisyonlarıdır.

NOT: $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_l)$ lerin sırası parçalanmalardaki olduğu gibi büyükten küçüğe gitmeli diye bir zorunluluk yoktur. Her parçalanma birer kompozisyondur. Kompozisyonlardaki baskın sıralama Tanım 3.2.1 deki gibidir.

$\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m)$ n nin bir parçalanması, $\{t\}$ bir $\lambda-$tabloid olsun. $1 \leq i \leq n$ olmak üzere her bir i indeksi için,

$\{t^i\}$ $= \{t\}$ de i den küçük veya eşit bütün elemanlar tarafından oluşturulan tabloid.
λ^i $= \{t^i\}$ tabloidine karşılık gelen kompozisyon.

Örneğin, $\{t\} = \left\{ \begin{array}{cc} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{array} \right\}$ olmak üzere ,

$$\{t^1\} = \left\{ \begin{array}{c} \emptyset \\ 1 \end{array} \right\} \qquad \Longrightarrow \lambda^1 = (0,1)$$

$$\{t^2\} = \left\{ \begin{array}{c} 2 \\ 1 \end{array} \right\} \qquad \Longrightarrow \lambda^2 = (1,1)$$

$$\{t^3\} = \left\{ \begin{array}{cc} 2 & \\ 1 & 3 \end{array} \right\} \Longrightarrow \lambda^3 = (1,2)$$

$$\{t^4\} = \left\{ \begin{array}{cc} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{array} \right\} \Longrightarrow \lambda^4 = (2,2)$$

Tanım 3.5.6 $\{s\}$ ve $\{t\}$ herhangi iki tabloidler ve sırasıyla bunlara karşılık gelen kompozisyonlar λ^i ve μ^i olsunlar. $1 \leq i \leq n$ olmak üzere tüm i ler için $\lambda^i \trianglerighteq \mu^i$ ise $\{s\}$,$\{t\}$ ye baskındır denir.

Bu sıralamaya göre n=4 için (2,2)-tabloidini gözönünde bulundurursak, aşağıdaki dallanmayı elde ederiz.

$$
\begin{tikzcd}
 & \begin{matrix}\overline{12}\\ \overline{34}\end{matrix} & \\
 & \begin{matrix}\overline{13}\\ \overline{24}\end{matrix} \arrow[u] & \\
\begin{matrix}\overline{23}\\ \overline{14}\end{matrix} \arrow[ur] & & \begin{matrix}\overline{14}\\ \overline{23}\end{matrix} \arrow[ul] \\
 & \begin{matrix}\overline{24}\\ \overline{13}\end{matrix} \arrow[ul] \arrow[ur] & \\
 & \begin{matrix}\overline{34}\\ \overline{12}\end{matrix} \arrow[u] &
\end{tikzcd}
$$

Teorem 3.5.7 (Tabloidler için Baskınlık Lemması) $\{t\}$ bir λ–tabloid olsun. Eğer $k < l$ ve k, $\{t\}$ de l den daha altaki satırda görünüyorsa,

$$\{t\} \lhd (kl)\{t\}$$

dir.

İspat Kabul edelim ki, $\{t\}$ ve $(kl)\{t\}$ tabloidlerine karşılık gelen kompozisyonlar sırasıyla λ^i ve μ^i olsunlar. $1 \leq i \leq n$ olmak üzere, i indeksini k ve l sayılarıyla karşılaştırırsak,

$$i < k, \; i \geq l \;\text{ ve }\; k \leq i < l$$

olacak şekilde üç durum ortaya çıkar. Bu durumları sırasıyla inceleyelim.

1) $i < k$ olsun.

$$
\{t\} = \left\{ \begin{array}{ccccc} & \bullet & \bullet & \dots & \bullet \\ & \bullet & \bullet & \dots & \bullet \\ q. & \bullet & l & \dots & \bullet \\ r. & k & \bullet & \dots & \bullet \\ & \bullet & \bullet & \dots & \bullet \end{array} \right\}
\qquad
(kl)\{t\} = \left\{ \begin{array}{ccccc} & \bullet & \bullet & \dots & \bullet \\ & \bullet & \bullet & \dots & \bullet \\ q. & \bullet & k & \dots & \bullet \\ r. & l & \bullet & \dots & \bullet \\ & \bullet & \bullet & \dots & \bullet \end{array} \right\}
$$

olmak üzere, $\{t\}$ λ-tabloidinde l ve k nın göründüğü satırlar sırasıyla q ve r olsun. Bu tabloidlere karşılık gelen kompozisyonlar,

$$\lambda^i = (\lambda_1, \dots, \lambda_q, \dots \lambda_r, \dots)$$

$$\mu^i = (\mu_1, \ldots, \mu_q, \ldots \mu_r, \ldots)$$

olurlar. $i < k < l$ olduğundan,

$$\lambda_1 = \mu_1, \lambda_2 = \mu_2, \ldots, \lambda_q = \mu_q, \ldots, \lambda_r = \mu_r, \ldots$$

dır. Bu yüzden $\lambda^i = \mu^i$ olur.

(2) $i \geq l$ olsun.

$\lambda^i = (\lambda_1, \ldots, \lambda_q, \ldots \lambda_r, \ldots)$ olmak üzere, λ_q parçasında , l bir bileşendir. λ_r parçasında ise k bir bileşendir. $(kl)\{t\}$ tablosunun $\{t\}$ tablosundan farkı k ve l yerleri değiştiğinden $i \geq l > k$ aralığında sadece k, l nin rolleri değişir. Bu yüzden, $\lambda_q = \mu_q, \lambda_r = \mu_r$ dir. O halde,

$$\lambda_1 = \mu_1, \lambda_2 = \mu_2, \ldots, \lambda_q = \mu_q, \ldots, \lambda_r = \mu_r, \ldots$$

Bu da, $\lambda^i = \mu^i$ demektir.

(3) $k \leq i < l$ olsun. Yukarıdaki aralıkta, λ_q bileşenine l dahil değildir. λ_r bileşenine de k dahil değildir. $(kl)\{t\}$ nin kompozisyonunu $\{t\}$ λ-tabloidinin kompozisyonu cinsinden yazarsak, $\mu^i = (\ldots, \lambda_q+1, \ldots, \lambda_r-1, \ldots)$ olur. Ohalde,

$$\Longrightarrow \mu^i \rhd \lambda^i$$
$$\Longrightarrow \forall i \text{ için } \mu^i \rhd \lambda^i$$
$$\Longrightarrow (kl)\{t\} \rhd \{t\}$$

■

Sonuç 3.5.8 Eğer t standart bir λ-tablo ve $\{s\}$ e_t de görülen bir λ-tabloid ise bu durumda $\{t\} \trianglerighteq \{s\}$ dır.

İspat $\pi \in C_t$ olmak üzere $s = \pi t$ olsun. Bu durumda $\{s\} = \pi\{t\}$ olduğundan $\{s\}$, e_t de gözükür. Eğer $\pi = (1)$ ise ispat açıktır. $\pi \neq (1)$ ise s sütun olarak standart olmadığından s tablosunun bir sütunda $k < l$ olmak üzere, k, l den daha aşağıda olacak şekilde k, l sayıları vardır. Buradan Teorem 3.5.7 den $\{s\} \lhd (kl)\{s\}$

dir.

Şimdi $\{(k\ l)s\}$, e_t de gözükür. Gerçekten,

$$(kl)\{s\} = (kl)\{\pi t\} = (kl)\pi\{t\}$$

ve $(kl) \in C_s$ olup $(kl) \in C_{\pi t} = \pi C_t \pi^{-1}$ dir. $\Longrightarrow (kl)\pi \in \pi C_t = C_t \Longrightarrow (kl)\pi \in C_t$

dır. Ohalde $\{(kl)s\}, e_t$ polytabloidinde gözükür. Buradaki amacımız tümevarım yoluyla $\{t\}$ yi e_t de görülen tabloidlerden büyük bırakmaktır. Eğer $(kl)\{s\} = \{t\}$ ise ispat bitmiştir. $(kl)\{s\} \neq \{t\}$ ise yine aynı düşünceyle $(kl)\{s\}$ nin bir sütununda $y < z$ olmak üzere y, z den daha aşağıdaki satırda olacak şekilde y, z sayıları vardır. Yine Lemma 3.5.7 den $(kl)\{s\} \lhd (yz)(kl)\{s\}$ dir. Eğer $(yz)(kl)\{s\} = \{t\}$ ise ispat bitmiştir. $(yz)(kl)\{s\} \neq \{t\}$ ise, yine aynı düşünceyle devam edersek sonlu adımdan sonra $\sigma_1\sigma_2 \ldots \sigma_r\{s\} = \{t\}$ elde ederiz. Buradan,

$$\{s\} \lhd (kl)\{s\} \lhd (yz)(kl)\{s\} \lhd \ldots \lhd \sigma_1\sigma_2 \ldots \sigma_r\{s\} = \{t\}$$

olur. Böylece, $\{s\} \trianglelefteq \{t\}$ dır. ∎

Tanım 3.5.9 $(A, \leq)$ kısmi sıralı bir küme olsun. Bir $b \in A$ elemanı , her $c \in A$ elemanı için $b \geq c$ oluyorsa b ye maksimum eleman denir. Eğer $c > b$ olacak şekilde $c \in A$ elemanı yoksa b ye maksimal eleman denir.

Sonuç 3.5.10 Eğer t standart bir tablo ise bu durumda $\{t\}$, e_t de görülen maksimum tabloiddir.

Lemma 3.5.11 $v_1, v_2, \ldots, v_m$, M^λ nın elemanları olsunlar. Kabul edelim ki, her bir v_i için $\{t_i\}$ ler v_i de gözüksün.

(1) $\{t_i\}$, v_i de görülen maksimum tabloid olsun.

(2) Bütün $\{t_i\}$ ler birbirinden farklı olsunlar.

Bu durumda $v_1, v_2, \ldots, v_m$ ler lineer bağımsızdır.

İspat Tabloidler üzerinde kısmi sıralama olduğundan bu sıralamaya göre maksimal olan elemanı $\{t_1\}$ ile gösterelim. Hipotezden $\{t_1\}$ sadece v_1 de gözükür. Gerçekten

eğer $\{t_1\}$ $i > 1$ için v_i de görünseydi , (1) den $\{t_i\}$, v_i de maksimum eleman ve (2) den $\{t_1\} \neq \{t_i\}$ olduğundan $\{t_1\} \lhd \{t_i\}$ olur ki, bu da $\{t_1\}$ in maksimal olmasıyla çelişir. Amacımız $c_1v_1 + c_2v_2 + \ldots + c_mv_m = 0$ yazılışında $c_1 = c_2 = \ldots = c_m = 0$ olduğunu göstermektir. Bunun için de m üzerinde tümevarım uygulayalım.
m=1 için $v_1 = a_1\{t_1\}, a_1 = 0$ dır. Sıfırdan farklı her eleman lineer bağımsız olduğundan, v_1 lineer bağımsızdır.

m=k için iddiamız doğru olsun.

m=k+1 için doğruluğunu görelim. $\{t_1\}$ maksimal olduğundan sadece v_1 de gözükeceğinden t_1 in katsayısı aşağıdaki gibi bellidir.

$$(c_1a_1)\{t_1\} + (A_2)\{t_2\} + \ldots + (A_k)\{t_k\} + (A_m)\{t_{k+1}\} = 0$$

dır. $\{t_1\}, \{t_2\}, \ldots, \{t_{k+1}\}$ lineer bağımsız olduğundan, $c_1a_1 = 0, a_1 \neq 0 \Longrightarrow c_1 = 0$ dır. m=k için iddia doğru olduğundan k tane eleman lineer bağımsızdır.

Ohalde $v_1, v_2, \ldots, v_m$ F üzerinde lineer bağımsızdır. ■

Önerme 3.5.12 $\{e_t : t$ standart bir $\lambda-$tablo$\}$ kümesi F üzerinde lineer bağımsızdır.

İspat t ler değiştikçe e_t ler M^λ nın elemanlarıdır. t standart olduğundan $\{t\}$, e_t de görülen maksimum tabloidlerdir. Ayrıca t ler farklı standart tabloları tararken $\{t\}$ ler de birbirinden farklıdır. Böylece Lemma 3.5.11 den $\{e_t : t$ standart bir λ-tablo$\}$ kümesi F üzerinde lineer bağımsızdır. ■

3.6 Garnir Bağıntıları

Bu bölümde standart $\lambda-$tabloların S^λ yı gerdiğini göstereceğiz. Garnir elemanlarından faydalanarak keyfi bir t $\lambda-$tablosuna karşılık gelen e_t polytabloidini standart polytabloidlerin lineer birleşimi olarak yazmaya çalışacağız.

Tanım 3.6.1 λ n nin bir parçalanması olmak üzere, t bir $\lambda-$tablo ve A, t nin i.sütununun ve B de t nin (i+1). sütununun bir alt kümesi olsun. $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_n$ permütasyonları $S_A \times S_B$ nin $S_{A\cup B}$ içindeki koset temsilcileri olmak üzere,

$$G_{AB} = \sum_{j=1}^{n} sgn(\pi_j)\pi_j$$

toplamına Garnir Elemanı denir.

Koset temsilcileri basit bir yöntemle bulunabilir. $S_{A\cup B}$ grubunun (A', B') şeklindeki sıralı parçalara etkisi $|A'| = |A|, |B'| = |B|$ ve $A' \uplus B' = A \uplus B$ şeklindedir. Mümkün olan (A', B') sıralı çifti için, $\pi(A, B) = (A', B')$ olacak şekilde $\pi \in S_{A\cup B}$ bulabiliriz.

Keyfi olarak alınan t $\lambda-$tablosunun sütunlarını artan olarak kabul edebiliriz. Aksi taktirde öyle bir $\sigma \in C_t$ vardır ki, $s = \sigma t$ artan sütunlara sahiptir. $\sigma \in C_t$ olduğundan Lemma 3.3.4 den $e_s = e_{\sigma t} = \sigma e_t = sgn(\sigma)e_t$ dir. Böylece e_s polytabloidlerin bir lineer kombinasyonu olduğundan e_t de işaret farkıyla polytabloidlerin bir lineer birleşimidir.

Uygulamalarımızda, A, t nin i. sütununun sonundan ve B de t nin (i+1).sütununun başlangıcından itibaren alınır. $S_A \times S_B$ nın $S_{A\cup B}$ deki koset temsilcileri tek değildir.

Örnek 3.6.2 $A = \{5, 6\}, B = \{2, 4\}$ olmak üzere,

$$(A', B) = (56, 24), (46, 25), (26, 45), (45, 26), (25, 46), (24, 56)$$

dır. Dikkat edilirse, sıralı çiftlerde bir artış söz konusudur. Ohalde $\pi(A, B) = (A', B')$ şartını sağlayan π ler sırasıyla,

$$(1), (45), (245), (465), (2465), (25)(46)$$

dır. O zaman,

$$G_{AB} = (1) - (45) + (245) + (465) - (2465) + (25)(46)$$

dır.

Önerme 3.6.3 t bir $\lambda-$tablo olsun. A ve B Garnir elemanlarının tanımındaki şartları sağlasın. Eğer $|A \cup B|$, t nin i. sütunundaki şartları sağlasın. Eğer $|A \cup B|$,t nin i. sütunundaki eleman sayısından büyük ise bu durumda

$$G_{AB}e_t = 0$$

dır.

İspat $\overline{S_A \times S_B} = \sum_{\sigma \in S_A \times S_B} sgn(\sigma)\sigma$ ve $\overline{S_{A\cup B}} = \sum_{\sigma \in S_{A\cup B}} sgn(\sigma)\sigma$ olsun. $| A \cup B |$, t nin i. sütunundaki eleman sayısından büyük olduğundan her $\rho \in C_t$ için ρt nin aynı satırında yer alan $a,\ b \in A \cup B$ elemanları vardır öyleki $(ab) \in S_{A\cup B}$ dir. Gerçekten, olmak üzere t nin i. sütunundaki eleman sayısı, k ve $| A |= 0$ olsun. Bu durumda A nın üstünde $k - t$ tane eleman vardır. $A \cap B = 0$ olduğundan ve hipotezden $| A \cup B |> k$ olduğundan,

$$| A \cup B |> k$$
$$| A | + | B |> k$$
$$| B |> k - t$$

olur. Bu sebeple A ile B nin mutlaka kesiştiği en az bir satır vardır ve bu satırda $i \in A$ ve $j \in B$ olacak şekilde $i,\ j \in A \cup B$ elemanı vardır. Dolayısıyla her $\rho \in C_t$ için ρ, i veya j yi yer değiştirirse bile ρt nin aynı satırında yer alan $a,\ b \in A \cup B$ elemanları vardır ve $(ab) \in S_{A\cup B}$ dir.

$(ab) \in S_{A\cup B}$ olduğundan $H = \{(1),(ab)\}, S_{A\cup B}$ nin bir altgrubudur. Dolayısıyla H nın $S_{A\cup B}$ içinde öyle $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_s$ koset temsilcileri vardırki ;

$$S_{A\cup B} = \sigma_1 H \cup \sigma_2 H \cup \ldots \cup \sigma_s H$$

dır. Buradan,

$$\begin{aligned}
\overline{S_{A\cup B}}\{\pi t\} &= \sum_{\sigma \in S_{A\cup B}} sgn(\sigma)\sigma\{\rho t\} \\
&= \sum_{\sigma \in \sigma_1 H \cup \sigma_2 H \cup \ldots \cup \sigma_s H} sgn(\sigma)\sigma\{\rho t\} \\
&= sgn(\sigma_1)\sigma_1\{\rho t\} - sgn(\sigma_1)\sigma_1(ab)\{\rho t\} + \ldots + \\
&\quad sgn(\sigma_s)\sigma_s\{\rho t\} - sgn(\sigma_s)\sigma_s(ab)\{\rho t\} \\
&= \Big(\sum_{i=1}^{s} sgn(\sigma_i)\sigma_i\Big)((1) - (ab))\{\pi t\} \\
&= \Big(\sum_{i=1}^{s} sgn(\sigma_i)\sigma_i\Big)(\{\pi t\} - (ab)\{\pi t\}) \quad (a \text{ ve } b\ \ \rho t \text{ nin aynı satırında olduğundan}) \\
&= \Big(\sum_{i=1}^{s} sgn(\sigma_i)\sigma_i\Big)(\{\pi t\} - \{\pi t\}) \\
&= 0
\end{aligned}$$

Bu her bir $\rho \in C_t$ için geçerli ve $K_t = \sum_{\sigma \in C_t} sgn(\sigma)\sigma$ da gözüken her bir σ içinde doğru olacağından,

$$\begin{aligned}
\overline{S_{A\cup B}}e_t &= \left(\sum_{\sigma \in S_{A\cup B}} sgn(\sigma)\sigma\right)\left(\sum_{\rho \in C_t} sgn(\rho)\rho\{t\}\right) \\
&= \sum_{\sigma \in S_{A\cup B}} sgn(\sigma)\sigma sgn(\rho_1)\rho_1\{t\} + \ldots + \sum_{\sigma \in S_{A\cup B}} sgn(\sigma)\sigma sgn(\rho_r)\rho_r\{t\} \\
&= sgn(\rho_1)\left(\sum_{\sigma \in S_{A\cup B}} sgn(\sigma)\sigma\{\rho_1 t\}\right) + \ldots + sgn(\rho_r)\left(\sum_{\sigma \in S_{A\cup B}} sgn(\sigma)\sigma\{\rho_r t\}\right) \\
&= 0 + \ldots + 0 \\
&= 0
\end{aligned}$$

$S_A \times S_B \subseteq \overline{S_A \times S_B}$, K_t nin bir çarpanı olduğundan,

$$\overline{S_{A\cup B}} = G_{AB}\overline{S_A \times S_B}$$

dır. Gerçekten, $S_A \times S_B$, $S_{A\cup B}$ nin bir altgrubu olduğundan öyle $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_k$ koset temsilcileri vardırki;

$$S_{A\cup B} = \sigma_1(S_A \times S_B) \cup \sigma_2(S_A \times S_B) \cup \ldots \cup \sigma_k(S_A \times S_B)$$

yazabiliriz. Buradan,

$$\overline{S_{A\cup B}} = \sum_{\sigma \in S_{A\cup B}} sgn(\sigma)\sigma = \left(\sum_{i=1}^{k} sgn(\sigma_i)\sigma_i\right)\overline{S_A \times S_B} = G_{AB}\overline{S_A \times S_B}$$

bulunur. Diğer taraftan, $S_A \times S_B \subseteq C_t$ ve $\mid S_A \times S_B \mid = \mid S_A \mid\mid S_B \mid = \mid A \mid ! \mid B \mid !$ olduğundan,

$$\overline{S_A \times S_B}e_t = \mid A \mid ! \mid B \mid ! e_t$$

dir. Gerçekten,

$$\begin{aligned}
\overline{S_A \times S_B}e_t &= \left(\sum_{\rho \in S_A \times S_B} sgn(\rho)\rho\right) e_t \\
&= (sgn(\rho_1)\rho_1 + \ldots + sgn(\rho_l)\rho_l)\, e_t \\
&= sgn(\rho_1)\rho_1 e_t + \ldots + sgn(\rho_l)\rho_l e_t \quad \text{(Lemma 3.3.4)} \\
&= sgn(\rho_1)sgn(\rho_1) + \ldots + sgn(\rho_l)sgn(\rho_l)e_t \\
&= e_t + e_t + \ldots + e_t \\
&= \mid A \mid ! \mid B \mid ! e_t
\end{aligned}$$

Nihayet, $\overline{S_{A\cup B}} = G_{AB}\overline{S_A \times S_B}$ ve $\overline{S_{A\cup B}}e_t = 0$ olduğundan,

$$0=\overline{S_{A\cup B}}e_t=G_{AB}\overline{S_A\times S_B}e_t=G_{AB}\mid A\mid!\mid B\mid!e_t=\mid A\mid!\mid B\mid!G_{AB}e_t$$

$$\Longrightarrow G_{AB}e_t=0$$

dır. ∎

Örnek 3.6.4 t= $\begin{matrix}4&2\\3&1\end{matrix}$ bir (2,2)-tablo olsun. e_t nin standart polytabloidlerin lineer birleşimi olarak yazılabileceğini gösterelim.

$$e_{\begin{smallmatrix}4&2\\3&1\end{smallmatrix}}=e_{(34)(12)\begin{smallmatrix}3&1\\4&2\end{smallmatrix}}=sgn((34)(12))e_{\begin{smallmatrix}3&1\\4&2\end{smallmatrix}}=e_{\begin{smallmatrix}3&1\\4&2\end{smallmatrix}}$$

olduğundan $t_1=\begin{matrix}3&1\\4&2\end{matrix}$ alalım.

$A=\{3,4\}$ ve $B=\{1\}$ olsun. Bu durumda,

$$S_{A\cup B}=\{(1),(13),(14),(34),(134),(143)\}$$

$$H=S_A\times S_B=\{(1),(34)\}$$

dir. $(A',B')=(34,1),(14,3),(13,4)$ şeklindedir. O halde $\pi(A,B)=(A',B')$ şartını sağlayan π ler (1),(13),(143) dir. Başka bir deyişle, H nın $S_{A\cup B}$ deki koset temsilcileri (1),(13),(143) dir. Buradan Garnir elemanı,

$$G_{AB}=\sum_{\sigma}sgn(\sigma)\sigma=(1)-(13)+(143)$$

dir. Önerme 3.6.3 den $G_{AB}e_t=0$ dır.

$$\Longrightarrow e_{\begin{smallmatrix}3&1\\4&2\end{smallmatrix}}-e_{\begin{smallmatrix}1&3\\4&2\end{smallmatrix}}+e_{\begin{smallmatrix}1&4\\3&2\end{smallmatrix}}=0$$

$$\Longrightarrow e_{\begin{smallmatrix}3&1\\4&2\end{smallmatrix}}=e_{\begin{smallmatrix}1&3\\4&2\end{smallmatrix}}-e_{\begin{smallmatrix}1&4\\3&2\end{smallmatrix}}$$

Burada,

$$e_{\begin{smallmatrix}1&4\\3&2\end{smallmatrix}} = e_{(24)\begin{smallmatrix}1&2\\3&4\end{smallmatrix}} = sgn(24)e_{\begin{smallmatrix}1&2\\3&4\end{smallmatrix}} = -e_{\begin{smallmatrix}1&2\\3&4\end{smallmatrix}} \qquad \text{(standart)}$$

$$e_{\begin{smallmatrix}1&3\\4&2\end{smallmatrix}} = e_{(23)\begin{smallmatrix}1&2\\4&3\end{smallmatrix}} = sgn(23)e_{\begin{smallmatrix}1&2\\4&3\end{smallmatrix}} = -e_{\begin{smallmatrix}1&2\\4&3\end{smallmatrix}} \qquad \text{(standart değil)}$$

$t_2 = \begin{smallmatrix}1&2\\4&3\end{smallmatrix}$ tablosu içinde aynı yöntem uygulanırsa,

$$e_{\begin{smallmatrix}1&2\\4&3\end{smallmatrix}} = e_{\begin{smallmatrix}1&2\\3&4\end{smallmatrix}} - e_{\begin{smallmatrix}1&3\\2&4\end{smallmatrix}}$$

olacaktır.

$$e_{\begin{smallmatrix}3&1\\4&2\end{smallmatrix}} = e_{\begin{smallmatrix}1&3\\2&4\end{smallmatrix}} - e_{\begin{smallmatrix}1&2\\3&4\end{smallmatrix}} + e_{\begin{smallmatrix}1&2\\3&4\end{smallmatrix}}$$

$$e_{\begin{smallmatrix}4&2\\3&1\end{smallmatrix}} = e_{\begin{smallmatrix}3&1\\4&2\end{smallmatrix}} = e_{\begin{smallmatrix}1&3\\2&4\end{smallmatrix}}$$

olur.

Tanım 3.6.5 t_1 ve t_2 iki $\lambda-$tablo olsunlar. Bu durumda,

$$t_1 \approx t_2 \Longleftrightarrow \pi t_1 = t_2 \text{ olacak şekilde bir } \pi \in C_{t_1} \text{varsa.}$$

şeklinde tanımlanan "$\approx$ " bağıntısı bir denklik bağıntısıdır.
Bu denklik bağıntısı sonunda ortaya çıkan denklik sınıflarına sütun $\lambda-$tabloid adı verilir ve bir t $\lambda-$tablosunun sütun denklik sınıfı [t] ile gösterilir. Kısaca,
$[t] = \{s \ : \text{bir } \ \pi \in C_t \ \text{ için } \ s = \pi t\}$ dir.

Örnek 3.6.6 $\lambda = (2,2)$ n=4 ün bir parçalanması olsun. Bu durumda mümkün olan bütün sütun $\lambda-$tabloidler,

$$\begin{bmatrix} 12 \\ 34 \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} 12, & 14, & 32, & 34 \\ 34 & 32 & 14 & 12 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 13 \\ 24 \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} 13, & 14, & 23, & 24 \\ 24 & 23 & 14 & 13 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 12 \\ 43 \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} 12, & 13, & 42, & 43 \\ 43 & 42 & 13 & 12 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 21 \\ 34 \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} 21, & 31, & 24, & 34 \\ 34 & 24 & 31 & 21 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 31 \\ 42 \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} 31, & 32, & 41, & 42 \\ 42 & 41 & 32 & 31 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 21 \\ 43 \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} 21, & 23, & 43, & 41 \\ 43 & 41 & 21 & 23 \end{Bmatrix}$$

Satırca denk olan tabloidler için tanımladığımız sıralamalar sütunca denk olan tabloidler için de uygulanabilir. Şimdi standart polytabloidlerin S^λ Specht modülünü gerdiğini gösterelim.

Teorem 3.6.7 $\{e_t : t \text{ standart } \lambda - \text{tablo}\}$ kümesi S^λ yı gerer.

İspat t yi sütun sıralı olarak alalım. Kabul edelim ki t standartλ-tablo olmasın. İspatı tümevarım ile yapacağız. Tümevarım hipotezi için, kabul edelimki, $[s] \rhd [t]$ iken e_s standart polytabloidlerin lineer kombinasyonu olarak yazılabilsin. Sonra aynı şeyi e_t polytabloidi için gösterelim. t standart λ-tablo olmadığından t λ-tablosunun bileşenleri,

$$a_1 < a_2 < \ldots < a_p \text{ ve } b_1 < b_2 < \ldots < b_q$$

olan öyle ardışık j ve (j+1) sütunları vardır ki, en az bir i için $a_i > b_i$ dir. Yani,

$$
\begin{array}{ccc}
a_1 & & b_1 \\
\wedge & & \wedge \\
a_2 & & b_2 \\
\wedge & & \wedge \\
\vdots & & \vdots \\
a_i & > & b_i \\
\wedge & & \wedge \\
\vdots & & \vdots \\
a_q & & b_q \\
\wedge & & \\
\vdots & & \\
a_p & &
\end{array}
$$

$A = \{a_1, a_2, \ldots, a_p\}$ ve $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_i\}$ alalım ve bunlara karşılık gelen Garnir elemanı gözönünde bulunduralım.

$$G_{AB} = \sum_{\pi} sgn(\pi)\pi$$

olmak üzere, Önerme 3.6.3 den $G_{AB}e_t = 0$ dır. Böylece,

$$e_t = -\sum_{\pi \neq (1)} sgn(\pi)\pi e_t = -\sum_{\pi \neq (1)} sgn(\pi)e_{\pi t}$$

olur. Şimdi $\pi \neq (1)$ ve π ler $S_A \times S_B$ nin $S_{A \cup B}$ içindeki koset temsilcileri olduğundan $\pi \notin S_A \times S_B$ dır. Bu yüzden π nin $\pi = \pi_1 \pi_2 \ldots \pi_r$ transpozisyonların çarpımı olarak yazılışında mutlaka en az bir $\pi_k = (a_k a_l)$ $(1 \leq k \leq p, 1 \leq l \leq i)$ formunda olmalıdır.

$b_1 < b_2 < \ldots < b_i < a_i < \ldots < a_p$ olduğundan $[(a_k b_l)] \rhd [t]$ dir. Gerçekten $i = a_k$ seçersek $j > i$ iken j ler $[(a_k b_l)t]$ ve $[t]$ nin aynı sütunlarına aittirler ve $i = a_k$ $[t]$ de $[(a_k b_l)t]$ den daha soldaki sütuna aittir.

Fakat $\pi = \pi_1 \pi_2 \ldots \pi_r$ yazılışındaki bazı tranpozisyonlar S_A veya S_B nin elemanı olabilirler. Bu durumda örneğin π_m böyle bir transpozisyon ise $[\pi_m t] = [t]$ olacağından sıkıntımız olmaz. Böylece,

$$[\pi_r t] \trianglerighteq [t]$$
$$[\pi_{r-1}\pi_r t] \trianglerighteq [t]$$
$$\vdots$$
$$[\pi_k \pi_{k+1} \dots \pi_r t] \trianglerighteq \dots \trianglerighteq [\pi_k t] \triangleright [t]$$
$$[\pi_1 \pi_2 \dots \pi_r] \triangleright [t]$$
$$[\pi t] \triangleright [t]$$

Başlangıçtaki tümevarım hipotezinden dolayı $e_{\pi t}$ standart polytabloidlerin bir lineer birleşimi olarak yazılabilir.

$$e_t = - \sum_{\pi \neq (1)} sgn(\pi) e_{\pi t}$$

olduğundan e_t de standart polytabloidlerin bir lineer kombinasyonudur. t standart λ-tablo değil iken e_t yi standart polytabloid lerin bir lineer kombinasyonu olarak yazdık. O halde S^λ Specht modülündeki herhangi bir eleman standart polytabloidlerin bir lineer kombinasyonu olarak yazılabilir. Dolayısıyla ispatımız tamamdır. ■

$$f^\lambda = \text{standart} \quad \lambda - \text{tabloların sayısı}$$

olsun

Teorem 3.6.8 λ n nin bir parçalanması olmak üzere,

(1) $\{e_t : t \text{ standart } \lambda - \text{tablo}\}$ kümesi S^λ nın bazıdır.

(2) $boy S^\lambda = f^\lambda$

(3) $\sum_{\lambda \vdash n} (f^\lambda)^2 = n!$

dir.

İspat (1) ve (2) açıktır.

(3) Önerme 2.3.12 den, $\sum_{i=1}^{k} (boy V_i)^2 = | G |$ idi. S^λ Specht modülü için bu ifade, $\sum_{\lambda \vdash n} (boy S^\lambda)^2 = | S_n |$ olur. Bu da $\sum_{\lambda \vdash n} (f^\lambda)^2 = n!$ dır. ■

Örnek 3.6.9 $n = 4$ için S_4 simetrik grubunu gözönüne alalım. S_4 ün eşlenik sınıfları:

$$C_1 = \{(1)\}, \qquad C_2 = \{2 \text{ Li devirler}\}, \qquad C_3 = \{3 \text{ Lü devirler}\}$$
$$C_4 = \{4 \text{ Lü devirler}\} \quad C_4 = \{(12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$$

dır. F karakteri sıfır olan keyfi bir cisim olsun. $i = 1,2,3,4,5$ için M^{λ_i} $F[S_4]$-modül olduğundan karakteri χ_i olan T_i matris gösterimleri vardır. $T_i^{(1)} = 1,2,3,4,5$ için $\chi_i^{(1)}$ karakteriyle S^{λ_i} Specht modülüne karşılık gelen matris gösterimleri olsun.

(1) $\lambda_1 = (4)$ ise $Boy_F^{M^{\lambda_1}} = \dfrac{4!}{4!} = 1$ dir.
Böylece $M^{\lambda_1} = Sp\{\{1234\}\}$ ve $S^{\lambda_1} \cong M^{\lambda_1}$ dir.

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5
$\chi_1^{(1)}$	1	1	1	1	1

(2) $\lambda_2 = (3,1)$ ise $Boy_F^{M^{\lambda_2}} = \dfrac{4!}{3!1!} = 4$ dir. Böylece

$$M^{\lambda_2} = Sp\left\{\left\{\begin{array}{l}123\\4\end{array}\right\}, \left\{\begin{array}{l}134\\2\end{array}\right\}, \left\{\begin{array}{l}124\\3\end{array}\right\}, \left\{\begin{array}{l}234\\1\end{array}\right\}\right\}$$

$$S^{\lambda_2} = Sp\left\{ e_{\begin{array}{l}123\\4\end{array}}, e_{\begin{array}{l}134\\2\end{array}}, e_{\begin{array}{l}124\\3\end{array}} \right\}$$

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5
$\chi_1^{(2)}$	3	1	0	-1	-1

(3) $\lambda_3 = (2,2)$ ise $Boy_F^{M^{\lambda_3}} = \dfrac{4!}{2!2!} = 6$ dir. Böylece

$$M^{\lambda_3} = Sp\left\{\left\{\begin{array}{l}12\\34\end{array}\right\}, \left\{\begin{array}{l}34\\12\end{array}\right\}, \left\{\begin{array}{l}13\\24\end{array}\right\}, \left\{\begin{array}{l}24\\13\end{array}\right\}, \left\{\begin{array}{l}14\\23\end{array}\right\}, \left\{\begin{array}{l}23\\14\end{array}\right\}\right\}$$

$$S^{\lambda_3} = Sp\left\{ e_{\begin{array}{l}12\\34\end{array}}, e_{\begin{array}{l}13\\24\end{array}} \right\}$$

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5
$\chi_1^{(3)}$	2	0	-1	0	2

(4) $\lambda_3 = (2, 1^2)$ ise $Boy_F^{M^{\lambda_4}} = \dfrac{4!}{2!1!1!} = 12$ dir. Böylece

$$M^{\lambda_4} = Sp\left\{\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{c}12\\3\\4\end{array}\right\}, \left\{\begin{array}{c}12\\4\\3\end{array}\right\}, \left\{\begin{array}{c}13\\2\\4\end{array}\right\}, \left\{\begin{array}{c}13\\4\\2\end{array}\right\}, \left\{\begin{array}{c}14\\2\\3\end{array}\right\}, \left\{\begin{array}{c}14\\3\\2\end{array}\right\}, \\ \left\{\begin{array}{c}23\\1\\4\end{array}\right\}, \left\{\begin{array}{c}23\\4\\1\end{array}\right\}, \left\{\begin{array}{c}24\\1\\3\end{array}\right\}, \left\{\begin{array}{c}24\\3\\1\end{array}\right\}, \left\{\begin{array}{c}34\\1\\2\end{array}\right\}, \left\{\begin{array}{c}34\\2\\1\end{array}\right\} \end{array}\right\}$$

$$S^{\lambda_4} = Sp\left\{ e_{\begin{array}{c}12\\3\\4\end{array}}, e_{\begin{array}{c}13\\2\\4\end{array}}, e_{\begin{array}{c}14\\2\\3\end{array}} \right\}$$

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5
$\chi_1^{(4)}$	3	-1	0	1	-1

(5) $\lambda_5 = (1^4)$ ise $Boy\ _F^{M^{\lambda_5}} = \dfrac{4!}{1!1!1!1!} = 24$ dir. Böylece

$$M^{\lambda_5} = Sp\left\{\begin{matrix}
\left\{\begin{matrix}1\\2\\3\\4\end{matrix}\right\}, & \left\{\begin{matrix}1\\2\\4\\3\end{matrix}\right\}, & \left\{\begin{matrix}1\\3\\2\\4\end{matrix}\right\}, & \left\{\begin{matrix}1\\3\\4\\2\end{matrix}\right\}, & \left\{\begin{matrix}1\\4\\2\\3\end{matrix}\right\}, & \left\{\begin{matrix}1\\4\\3\\2\end{matrix}\right\}, & \left\{\begin{matrix}2\\1\\3\\4\end{matrix}\right\}, & \left\{\begin{matrix}2\\1\\4\\3\end{matrix}\right\}, \\
\left\{\begin{matrix}2\\3\\1\\4\end{matrix}\right\}, & \left\{\begin{matrix}2\\3\\4\\1\end{matrix}\right\}, & \left\{\begin{matrix}2\\4\\1\\3\end{matrix}\right\}, & \left\{\begin{matrix}2\\4\\3\\1\end{matrix}\right\}, & \left\{\begin{matrix}3\\1\\2\\4\end{matrix}\right\}, & \left\{\begin{matrix}3\\2\\1\\4\end{matrix}\right\}, & \left\{\begin{matrix}3\\2\\1\\4\end{matrix}\right\}, & \left\{\begin{matrix}3\\4\\1\\2\end{matrix}\right\}, \\
\left\{\begin{matrix}3\\4\\2\\1\end{matrix}\right\}, & \left\{\begin{matrix}4\\1\\2\\3\end{matrix}\right\}, & \left\{\begin{matrix}4\\1\\3\\2\end{matrix}\right\}, & \left\{\begin{matrix}4\\2\\1\\3\end{matrix}\right\}, & \left\{\begin{matrix}4\\2\\1\\3\end{matrix}\right\}, & \left\{\begin{matrix}4\\2\\3\\1\end{matrix}\right\}, & \left\{\begin{matrix}4\\3\\1\\2\end{matrix}\right\}, & \left\{\begin{matrix}4\\3\\2\\1\end{matrix}\right\}
\end{matrix}\right\}$$

$$S^{\lambda_5} = Sp\left\{ e \begin{matrix} \\ 1\\2\\3\\4\end{matrix} \right\}$$

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5
$\chi_1^{(5)}$	1	-1	1	-1	1

4. M^μ nün Ayrışımı

4.1 Young Doğal Gösterimleri

İkinci bölümde , her modüle bir matrisin karşılık geldiği söylenmişti. Bu kısımda S^λ Specht modülüne karşılık gelen matrisleri elde etmenin kolay bir yöntemi verilecektir.

λ; n nin bir parçalanması olmak üzere,

$$\begin{array}{llllll} T: & S_n & \longrightarrow & GL(S^\lambda) & & \\ & \sigma & \longrightarrow & T(\sigma): S^\lambda & \longrightarrow & S^\lambda \\ & & & e_t & \longrightarrow & \sigma e_t = e_{\sigma t} \end{array}$$

bir gösterimdir. Bu gösterimlere karşılık gelen matrislere Young doğal gösterimleri adını vereceğiz.

S_n simetrik grubu, $k = 1, 2, \ldots, n-1$ olmak üzere (k k+1) şeklindeki tranpozisyonlar tarafından üretildiğinden S_n nin elemanlarını bu formdaki transpozisyonların çarpımı şeklinde yazıp, $\pi e_t = e_{\pi t}$ eşitliğini kullanıp matrislerin k. sütununu elde edeceğiz.

t standart tablo olmak üzere, $\pi = (k\ k+1) \in S_n$ nin k ve k+1 doğal sayılarının t $\lambda-$ tablosunda bulunma yerlerine göre üç farklı durumu söz konusudur.

(1) Eğer k ve $k+1$ t nin aynı sütununda ise $(k\ k+1) \in C_t$ dir. Lemma 3.4.1 den,

$$(k\ k+1)e_t = sgn(k\ k+1)e_t = -e_t$$

olacaktır.

(2) Eğer k ve $k+1$ t nin aynı satır yada sütununda bulunmuyorsa $t' = (k\ k+1)t$ standarttır. Gerçekten,

$$t = \begin{array}{cccc} \bullet & \bullet & \cdots & \bullet \\ \bullet & k & \cdots & \bullet \\ \bullet & \bullet & \cdots & \bullet \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ k+1 & \bullet & \cdots & \bullet \\ \bullet & \bullet & \cdots & \bullet \end{array} \qquad (k\ k+1) = \begin{array}{cccc} \bullet & \bullet & \cdots & \bullet \\ \bullet & k+1 & \cdots & \bullet \\ \bullet & \bullet & \cdots & \bullet \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ k & \bullet & \cdots & \bullet \\ \bullet & \bullet & \cdots & \bullet \end{array}$$

şeklindedir.

$(k\ k+1)t$ λ-tablosunda $k+1$ den sonra gelen eleman, t standart λ-tablo olduğundan en az $(k+2)$ olacaktır. Yine aynı düşünceyle $(k\ k+1)t$ λ - tablosunda k dan sonra gelen eleman en az k+2 elemanı olacaktır. Dolayısıyla,

$t' = (k\ k{+}1)t$ standart $\lambda-$tablo $\Longrightarrow (k\ k{+}1)e_t = e_{t'}$ standart polytabloiddir.

(3) Eğer (k) ve $(k+1)$ t nin aynı satırında ise $(k\ k+1)t$ de t standart olduğundan bir azalma olur. Başka bir ifadeyle standartlık bozulur. Ohalde $(k\ k+1)t$ λ-tablosuna Garnir operasyonunu uygularsak,

$$(k\ k+1)e_t = e_t \pm ([t'] \rhd [t] \text{ olan } e_{t'} \text{ polytabloidler})$$

Bu eşitlik $e_t = -\sum\limits_{\pi \neq (1)} sgn(\pi)e_{\pi t}$ daki eşitlikten elde edilir. Gerçekten,

$$\begin{aligned} e_t &= -\sum_{\sigma \neq (1)} sgn(\sigma)e_{\sigma t} \\ &= -sgn(k\ k+1)e_{(k\ k+1)t} - \sum_{\sigma \neq (1),(k\ k+1)} sgn(\sigma)e_{\sigma t} \\ &= e_{(k\ k+1)t} - \sum_{\sigma \neq (1),(k\ k+1)} sgn(\sigma)e_{\sigma t} \\ &\Longrightarrow (k\ k+1)e_t = e_t + \sum_{\sigma \neq (1),(k\ k+1)} sgn(\sigma)e_{\sigma t} \end{aligned}$$

Örnek 4.1.1 S_3 de , $\lambda = (2,1)$ parçalanması için Young's doğal gösterimini bulalım.

$$S_3 = \{(1),(12),(13),(23),(123),(132)\}$$

$$S^{\lambda} = \left\{ e_{\begin{smallmatrix} 1 & 3 \\ 2 & \end{smallmatrix}}, e_{\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 3 & \end{smallmatrix}} \right\}$$

dir.

$$\begin{aligned} T: \ S_n &\longrightarrow GL(S^{(2,1)}) \\ \sigma &\longrightarrow T(\sigma) : S^{(2,1)} \longrightarrow S^{(2,1)} \\ & \qquad\qquad e_t \longrightarrow \sigma e_t = e_{\sigma t} \end{aligned}$$

bir gösterimdir.

1) (12) için matris bulalım.

$$(12)e_{\begin{smallmatrix} 1 & 3 \\ 2 & \end{smallmatrix}} = -e_{\begin{smallmatrix} 1 & 3 \\ 2 & \end{smallmatrix}} \qquad \text{(1. durum)}$$

$$(12)e_{\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 3 & \end{smallmatrix}} = e_{\begin{smallmatrix} 2 & 1 \\ 3 & \end{smallmatrix}} \qquad \text{(3. durum)}$$

$t_1 = \begin{smallmatrix} 2 & 1 \\ 3 & \end{smallmatrix}$ için Garnir bağıntısını uygulayalım.

$A = \{2,3\}, B = \{1\}$ alınırsa,

$$H = S_A \times S_B = \{(1),(23)\}$$

$$S_{A\cup B} = \{(1),(12),(13),(23),(123),(132)\}$$

H nın $S_{A\cup B}$ deki koset temsilcileri $\{(1),(12),(132)\}$ dir. Ohalde

$$G_{AB} = \sum_{\pi} sgn(\pi)\pi = (1) - (12) + (132) \ \text{ dır.}$$

Önerme 3.6.3 den $G_{AB} = 0$ idi. Ozaman,

$$e_{\begin{smallmatrix}2&1\\3&\end{smallmatrix}} - (12)e_{\begin{smallmatrix}2&1\\3&\end{smallmatrix}} + (132)e_{\begin{smallmatrix}2&1\\3&\end{smallmatrix}} = 0$$

Buradan,

$$e_{\begin{smallmatrix}2&1\\3&\end{smallmatrix}} = (12)e_{\begin{smallmatrix}1&2\\3&\end{smallmatrix}} = e_{\begin{smallmatrix}1&2\\3&\end{smallmatrix}} - e_{\begin{smallmatrix}1&3\\2&\end{smallmatrix}}$$

Ohalde, (12) ye karşılık gelen matris

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

dır.

2) Şimdi (23) e karşılık gelen matrisi bulalım.

$$(23)e_{\begin{smallmatrix}1&3\\2&\end{smallmatrix}} = e_{\begin{smallmatrix}1&2\\3&\end{smallmatrix}} \qquad \text{(2. durum)}$$

$$(23)e_{\begin{smallmatrix}1&2\\3&\end{smallmatrix}} = e_{\begin{smallmatrix}1&3\\2&\end{smallmatrix}} \qquad \text{(2. durum)}$$

dır. Bu durumda (23) e karşılık gelen matris

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

şeklindedir.

3) (123) = (12)(23) olduğundan, (123) e karşılık gelen matris

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

şeklindedir.

4) $(13) = (12)(23)(12)$ olduğundan, (13) e karşılık gelen matris,

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

Diğerleride benzer yollarla yapılabilir.

4.2 M^μ Modülünün Ayrışımı

Bu kısımda M^μ yü ayrıştırdığımız da M^μ de S^λ Specht modülünün kaç defa göründüğünü söyleyen $m_{\lambda\mu}$ katsayısını belirleyebilmek için, yeni bir tablo tanımlayacağız.

Tanım 4.2.1 (Genelleştirilmiş Young Tablo) λ; n nin bir parçalanması olsun. λ diyagramının kutularına pozitif tamsayılarını yerleştirilmesiyle oluşan tabloya genelleştirilmiş Young tablo adı verilir ve büyük harflerle gösterilir.

Tanım 4.2.2 (Genelleştirilmiş Young Tablonun Tipi) $\mu = (\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_m)$ deki her bir μ_i, T de görülen i lerin sayısı olmak üzere, μ ye T nin tipi denir.

$$T_{\lambda\mu} = \{T : T \text{ ler } \lambda \text{ şeklinde ve } \mu \text{ tipinde ise }\}$$

Örnek 4.2.3 T= $\begin{matrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & \\ 3 & & \end{matrix}$ genelleştirilmiş Young tablosu $\mu = (2,2,2)$ tipinde $\lambda = (3,2,1)$ şeklindedir.

Örnek 4.2.4 $\lambda = (3,1)$ ve $\mu = (2,2)$ olsun. Bu durumda,

$$T_{\lambda\mu} = \left\{ \begin{matrix} 112 \\ 2 \end{matrix}, \begin{matrix} 121 \\ 2 \end{matrix}, \begin{matrix} 211 \\ 2 \end{matrix}, \begin{matrix} 221 \\ 1 \end{matrix}, \begin{matrix} 212 \\ 1 \end{matrix}, \begin{matrix} 122 \\ 1 \end{matrix} \right\}$$

İleride $C[T_{\lambda\mu}]$ nün M^μ nün bir kopyası olduğunu göstereceğiz. Bir T genelleştirilmiş Young tablosunu belirleyen T(i) bileşenleri keyfi seçilen bir t λ–tablosuna göre belirlenir. Başka bir ifadeyle t λ-tablosunu sabitleştirilir.

Örneğin, t= $\begin{matrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & \\ 6 & & \end{matrix}$ seçersek , T= $\begin{matrix} T(2) & T(3) & T(4) \\ T(1) & T(5) & \\ T(6) & & \end{matrix}$ olacaktır. Bir önceki örnekteki T tablosuna göre,

$$T(2) = T(6) = 3, \quad T(3) = T(5) = 2, \quad T(1) = T(4) = 1$$

olur.

Bu bölümde ve ilerideki bölümlerde kolaylık olsun diye, λ =(3,2) ve t sabit λ-tablosunu da $\begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & \end{matrix}$ olarak alacağız.

μ şeklinde herhangi bir $T \in T_{\lambda\mu}$ elmanını elde edebiliriz. Şöyleki, her bir $T(i)$ bileşeni $\{s\}$ tabloidinde görülen i lerin satır numarası olmak üzere, T tablosunu oluşturabiliriz.

Örnek 4.2.5 $\mu = (2,2,1)$ ve $\{s\} = \left\{ \begin{matrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \\ 4 & \end{matrix} \right\}$ olsun. T nin bileşenleri, $\begin{matrix} T(1) & T(2) & T(3) \\ T(4) & T(5) & \end{matrix}$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} T(1) &= \{s\}\text{de görülen 1 in satır numarası} \\ &= 2 \\ T(2) &= \{s\}\text{de görülen 2 nin satır numarası} \\ &= 1 \end{aligned}$$

diğerlerine de benzer olarak devam edilirse, T genelleştirilmiş Young tablosu,

$$T = \begin{matrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & \end{matrix}$$

şeklinde elde edilir.

M^μ ve $C[T_{\lambda\mu}]$ ların bazları arasında kurulan $\phi : \{s\} \longrightarrow T$ dönüşümü birebir ve örtendir. Bunu lineer olarak genişletirsek bu iki uzay izomorfik vektör uzayları olurlar. M^μ ve $C[T_{\lambda\mu}]$ ların izomorfik modüller olduğunu gösterebilmemiz için genelleştirilmiş Young tabloları üzerinde S_n nin etkisini tanımlamaya ihtiyacımız vardır.

$\pi \in S_n$, $T \in T_{\lambda\mu}$ olmak üzere,

$$(\pi T)(i) := T(\pi^{-1} i)$$

olarak tanımlarız.

$$\begin{aligned}(\pi T)i &= \pi\{s\} \text{ de } i \text{ nin göründüğü satır numarası}\\ &= \{s\} \text{ de } \pi^{-1}(i) \text{ nin göründüğü satır numarası}\\ &= T(\pi^{-1})\end{aligned}$$

Örnek 4.2.6 T= $\begin{matrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & \end{matrix}$ ve $(124) \in S_5$ olmak üzere,

$$(124)\begin{matrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & \end{matrix} = \begin{matrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & \end{matrix}$$

dir. Gerçekten,

$$(124)\begin{matrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & \end{matrix} = (124)\begin{matrix} T(1) & T(2) & T(3) \\ T(4) & T(5) & \end{matrix}$$

$$= \begin{matrix} T((142)1) & T((142)2) & T((142)3) \\ T((142)4) & T((142)5) & \end{matrix}$$

$$= \begin{matrix} T(4) & T(1) & T(3) \\ T(2) & T(5) & \end{matrix}$$

$$= \begin{matrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & \end{matrix}$$

olur.

Önerme 4.2.7 λ; n nin herhangi bir parçalanması olsun. Bu durumda M^μ ve $C[T_{\lambda\mu}]$ modülleri izomorfiktir.

İspat

$$\phi : M^\mu \longrightarrow C[T_{\lambda\mu}]$$

(1) İyi tanımlı olduğunu görelim.

$$\{t_1\} = \{t_2\} \Longrightarrow \phi(\{t_1\}) = \phi(\{t_2\})$$

$\{t_1\} = \{t_2\}$ denklik sınıfları eşit olduğundan t_1 ve t_2 λ- tablolarının satır elemanları aynı fakat yerlerinin sırası farklıdır. Ohalde t_1 ve t_2 λ-tablolarına ϕ dönüşümüyle karşılık gelen genelleştirilmiş Young tablolarının $T(i)$ bileşenleri eşit olacağından, bunlara karşılık gelen genelleştirilmiş Young tabloları birbirine eşit olur. O zaman ϕ iyi tanımlıdır.

(2) $T(i)$ bileşenlerinin tanımı gözönüne alınırsa, açık olarak ϕ dönüşümü birebir ve örtendir.

(3) $\pi \in S_n$ olmak üzere $\phi(\{\pi t\}) = \pi\phi\{t\}$ dir. Gerçekten,

$$\begin{aligned}
\phi(\{\pi t\})(i) &:= \{\pi t\} \text{ de i nin göründüğü satır numarası} \\
&= \{t\} \text{ de } \pi^{-1}(i)\text{nin göründüğü satır numarası} \\
&= T(\pi^{-1}i) \\
&= \pi T(i) \\
&= \pi(\phi\{t\})(i)
\end{aligned}$$

■

Şimdi de genelleştirilmiş Young tabloları kümesi üzerinde bir denklik bağıntısı tanımlayalım:

T_1 ve T_2 herhangi iki Young Tablo ve t sabit $\lambda-$ tablo olmak üzere,

$$T_1 \approx T_2 \Longleftrightarrow \pi T_1 = T_2 \text{ olacak şekilde bir } \pi \in R_t \text{ varsa.}$$

Bu bağıntı bir denklik bağıntısıdır. Bu bağıntı sonunda ortaya çıkan denklik sınıflarına satır denklik sınıfları denir ve bu denklik sınıfları $\{T\}$ ile gösterilir. Sütun denklik sınıfları da benzer olarak tanımlanabilir.

Tanım 4.2.8 Her bir $T \in T_{\lambda\mu}$ için homomorfizma $\phi_T \in (M^\lambda, M^\mu)$ olmak üzere,

$$\{t\} \longrightarrow \sum_{S\in\{T\}} S$$

şeklinde tanımlanır. M^λ nın her bir elemanı $g \in C[S_n]$ olmak üzere , $g\{t\}$ formunda olduğundan, ϕ_T dönüşümünü de $\phi_T(g\{t\}) = g \sum_{S\in\{T\}} S$ şeklinde genişletebiliriz.

Örneğin, T= $\begin{matrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & \end{matrix}$ ise,

$$\phi_T\{t\} = \begin{matrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & \end{matrix} + \begin{matrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & \end{matrix} + \begin{matrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & \end{matrix} + \begin{matrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & \end{matrix} + \begin{matrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & \end{matrix} + \begin{matrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & \end{matrix}$$

$$\phi_T(124)\{t\} = \begin{matrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & \end{matrix} + \begin{matrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & \end{matrix} + \begin{matrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & \end{matrix} + \begin{matrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & \end{matrix} + \begin{matrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & \end{matrix} + \begin{matrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & \end{matrix}$$

dır.

Şimdi $Hom(S^\lambda, M^\mu)$ nun elemanlarını belirleyelim.

$$\overline{\phi_T} = \phi_T \text{ nın } S^\lambda \text{ ya kısıtlanması.}$$

t sabitleştirilmiş λ−tablo olmak üzere,

$$\overline{\phi_T}(e_t) = \overline{\phi_T}(K_t\{t\}) = K_t(\phi_t\{t\}) = K_t(\sum_{S\in\{T\}} S)$$

Önerme 4.2.9 t sabit λ-tablo ve $T \in T_{\lambda\mu}$ olsun.

$$K_tT = 0 \iff T \text{aynı sütununda da iki eşit eleman var ise}$$

İspat $K_tT = 0$ olsun. Ohalde,

$$T + \sum_{\substack{\pi \in C_t \\ \pi \neq (1)}} sgn(\pi)\pi T = 0$$

olacak şekilde yazabiliriz. Bu ise, $\pi T = T$, $sgn(\pi) = -1$ olacak şekilde $\pi \in C_t$ var demektir. Bu ifade de, T nin bir sütununda en az iki elemanın eşit olduğunu söyler.

Tersine, kabul edelim ki, $T(i) = T(j)$ T nin aynı sütununda olan herhangi iki eleman olsunlar . Ohalde $((1) - (ij))T = 0$ olur. (*)

$K = \{(1), (ij)\}$ C_t nin mertebesi 2 olan bir altgrubudur.

Eğer $k_1, k_2, \ldots, k_t$ leri K nın C_t içindeki koset temsilcileri olarak seçersek,

$$\begin{aligned} C_t &= k_1K \cup k_2K \cup \ldots \cup k_tK \\ &= k_1\{(1), (ij)\} \cup k_2\{(1), (ij)\} \cup \ldots \cup k_t\{(1), (ij)\} \\ &= \{k_1, k_2, \ldots, k_t, k_1(ij), k_2(ij), \ldots, k_t(ij)\} \end{aligned}$$

olur. Buradan,

$$\begin{aligned}
K_t &= sgn(k_1)k_1 + sgn(k_2)k_2 + \ldots + sgn(k_t)k_t \\
&\quad -sgn(k_1)k_1(ij) - sgn(k_2)k_2(ij) - \ldots - sgn(k_t)k_t(ij) \\
&= sgn(k_1)(k_1 - k_1(ij)) + \ldots + sgn(k_t)(k_t - k_t(ij)) \\
&= sgn(k_1)(k_1((1) - (ij))) + \ldots + sgn(k_t)(k_t((1) - (ij))) \\
&= (sgn(k_1)k_1 + sgn(k_2)k_2 + \ldots + sgn(k_t)k_t)((1) - (ij))
\end{aligned}$$

$K_tT = (sgn(k_1)k_1 + sgn(k_2)k_2 + \ldots + sgn(k_t)k_t)((1) - (ij))T = 0$ (*) dan

dır. ∎

Tanım 4.2.10 (Semistandart Tablo) Bir T genelleştirilmiş Young tablonun satırları zayıfça , sütunları güçlü olarak artan bir dizi ise T genelleştirilmiş Young tablosuna semistandart tablo denir ve bu tablolar $T^{\circ}_{\lambda\mu}$ ile gösterilir.

Örneğin,

$T = \begin{array}{ccc} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & \end{array}$ semistandart fakat, $\begin{array}{ccc} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & \end{array}$ semistandart değildir.

4.3 Hom(S^{λ}, M^{μ}) için Standart Bazlar

Bu bölümde aşağıdaki teorem ispatlanacaktır.

Teorem 4.3.1 $\{\overline{\phi_T} : T \in T^{\circ}_{\lambda\mu}\}$ kümesi $Hom(S^{\lambda}, M^{\mu})$ için bir bazdır.

Buradaki ispatlar bir önceki bölümde S^{λ}-Specht modülünün bazlarını oluşturmada izlediğimiz metodlara paralel olarak yapılacaktır.

Genelleştirilmiş Young tablolar üzerinde tanımlanacak olan sütun baskınlık sıralaması tabloidler üzerinde tanımlanan sıralamaya benzer olarak tanımlanır. Gerçekten, S ve T genelleştirilmiş Young tablo, bunlara karşılık gelen kompozisyonlar da sırasıyla λ^i ve μ^i olsunlar. Eğer $\lambda \trianglerighteq \mu^i$ ise $[S] \trianglerighteq [T]$ denir.

Örneğin, $[S] = \begin{array}{ccc} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & \end{array}$ ve $[T] = \begin{array}{ccc} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & \end{array}$ olsun. $[S]$ ve $[T]$ karşılık gelen kompozisyonlar sırasıyla λ^i, μ^i olmak üzere,

$$\lambda^1 = (0,1,1) \quad \mu^1 = (1,1,0)$$
$$\lambda^2 = (1,2,1) \ , \ \mu^2 = (2,1,1)$$
$$\lambda^1 = (2,2,1) \quad \mu^3 = (2,2,1)$$

olurlar. O zaman,

$$\begin{array}{lll} 1 \geq 0 & ,1+1 \geq 0+1 & ,1+1+0 \geq 0+1+1 \\ 2 \geq 1 & ,2+1 \geq 1+2 & ,2+1+1 \geq 1+2+1 \\ 2 \geq 2 & ,2+2 \geq 2+2 & ,2+2+1 \geq 2+2+1 \end{array}$$

O zaman,

$$\mu^i \trianglerighteq \lambda^i \Longrightarrow [T] \trianglerighteq [S]$$

olur.

Teorem 4.3.2 (Genelleştirilmiş Young Tablolar İçin Baskınlık Lemması) Kabul edelim ki, $k < l$ olmak üzere T de k, l den daha soldaki sütunda görülsün. S, T de k ve l nin yer değiştirmesiyle oluşan Young tablo olmak üzere, $[T] \triangleright [S]$ dir.

İspat İspatı Teorem 3.5.7 ye benzer olarak yapılabilir. ∎

Sonuç 4.3.3 T semitandart tablo olsun. $S \in \{T\}$ ve S, T den farklı bir Young tablo ise, $[T] \triangleright [S]$ dir.

İspat T semistandart tablo olduğundan, T nin satırlarında $k < l$ olacak şekilde k, l elemanları vardır. k, l nin yerdeğiştirmesiyle oluşan yeni tablo , bunu S ile gösterirsek $S \in \{T\}$ dedir. Teorem 4.3.2 dan dolayı ,

$$[T] \triangleright [S]$$

olur. ∎

Şimdi $\overline{\phi}_T$ nin lineer bağımsızlığını ispatlamadan önce , vektör uzayları hakkında genel bir bilgi verelim.

V bir vektör uzayı olsun ve V nin bir sabit bazını $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$ olarak seçelim. $v \in V$ olmak üzere eğer, $v = \sum_i c_i b_i$ iken $c_i \neq 0$ olacak şekilde c_i varsa, b_i, v de görünür denir. Kabul edelim ki, V vektör uzayı denklik sınıfları üzerinde tanımlansın. Bu denklik sınıflarını da $[v]$ ile gösterelim. Ve bu denklik sınıfları üzerinde kısmi sıralama olsun. Böylece Lemma 3.5.11 ri aşağıdaki gibi genelleştirebiliriz.

Lemma 4.3.4 V vektör uzayı ve B bazı yukarıda tanımladığımız gibi olsunlar. Ve $v_1, v_2, \ldots, v_m \in V$ vektörlerin bir kümesi olsun. Kabul edelimki, her i için $b_i \in b$ olmak üzere b_i ler v_i de görünsün. Öyleki,

(1) $[b_i] \trianglerighteq [b]$ (v_i de görülen herbir $b \neq b_i$ için)

(2) $[b_i]$ lerin hepsi birbirinden farklı olsunlar.

Ohalde $v_1, v_2, \ldots, v_m \in V$ lineer bağımsızdır.

İspat $V = Sp\{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$ olsun. $[b_i]$ denklik sınıfları arasındaki sıralama kısmi sıralama olduğundan, bu sıralamaya göre maksimal elemanı $[b_1]$ olarak seçelim. Hipotezden b_1 sadece v_1 de görünür. Gerçekten, eğer b_1, $i > 1$ için v_i de görünseydi, (1) den $[b_i] \trianglerighteq [b_1]$ alacağından ve $[b_i] \neq [b_1]$ ayrık olduğundan bu durum $[b_1]$ in maksimal olmasıyla çelişir. Lineer bağımsızlığı m üzerinde tümevarım yaparak göstereceğiz.
m=1 olsun.
$v_1 = a_1 b_1$, $a_1 \neq 0$ olduğundan $v_1 \neq 0$ dır. Sıfırdan farklı her vektör lineer bağımsızdır.
m=k için iddiamız doğru olsun.
m=k+1 için iddiamızın doğruluğunu gösterelim.
$[b_1]$ maksimal olduğundan sadece v_1 de gözükeceğinden b_1 in katsayısı bellidir.

$$(c_1 a_1)b_1 + (A_2)b_2 + \ldots + (A_n)b_k + (A_m)b_{k+1} = 0$$

olur. b_1 baz olduğundan yukarıdaki eşitlikten dolayı b_1 in katsayısı 0 olacaktır.
O halde, $c_1 + a_1 = 0 \Longrightarrow a_1 \neq 0$ olduğundan $c_1 = 0$ olur. İddiamız m=k için doğru olduğundan biz $k+1$ tane eleman için lineer bağımsızlığı göstermiş olduk. O halde ispat tamamdır. ∎

Şimdi de lineer dönüşümlerin , lineer bağımsızlığı hakkında bilgi veren bir lemma verelim.

Lemma 4.3.5 V ve W vektör uzayları olsunlar. $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_m$ V den W ye lineer dönüşümler olmak üzere, $\theta_1(v), \theta_2(v), \ldots, \theta_m(v)$ yi W de lineer bağımsız yapan bir $v \in V$ varsa $\{\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_m\}$ ler lineer bağımsızdırlar.

İspat Kabul edelim ki, θ_i ler lineer bağımlı olsunlar. O zaman,

$$c_1\theta_1 + c_2\theta_2 + \ldots + c_m\theta_m = 0 \text{ olacak şekilde en az } c_i \neq 0$$

dır. Her $v \in V$ için,

$$\begin{aligned}(c_1\theta_1 + c_2\theta_2 + \ldots + c_m\theta_m)(v) &= 0(v) = 0 \quad (\theta \text{ lineer olduğundan}) \\ c_1\theta_1(v) + c_2\theta_2(v) + \ldots + c_m\theta_m(v) &= 0 \quad \text{en az } c_i \neq 0\end{aligned}$$

Bu da hipotezimize yani, $c_1\theta_1(v) + c_2\theta_2(v) + \ldots + c_m\theta_m(v)$ nin lineer bağımsızlığıyla çelişir. O halde kabulümüz hatalıdır. ∎

Teorem 4.3.6 $\{\overline{\theta}_T : T \in T^{\circ}_{\lambda\mu}\}$ kümesi lineer bağımsızdır.

İspat $T_1, T_2, \ldots, T_m \in T^{\circ}_{\lambda\mu}$ olsun. $\overline{\theta}_{T_1}e_t, \overline{\theta}_{T_2}e_t, \ldots, \overline{\theta}_{T_m}e_t$ (t ler sabitleştirilmiş $\lambda-$tablo) lerin lineer bağımsız olduğunu gösterirsek, Lemma 4.3.5 den $\overline{\theta}_{T_1}, \overline{\theta}_{T_2}, \ldots, \overline{\theta}_{T_m}$ ler lineer bağımsızdır diyeceğiz. Her i için,

$$\overline{\theta}_{T_i}e_t = \theta_{T_i}K_t\{t\} = K_t\theta_{T_i}\{t\}$$

yazabiliriz. T_i semistandart olduğundan $\theta_{T_i}\{t\}$ ifadesinin eşitindeki toplamda bulunan herhangi S Young tablosu için Sonuç 4.3.3 dan dolayı $[T] \trianglerighteq [S]$ olur. Bu durum $K_t\theta_{T_i}\{t\}$ toplamındaki Young tablolar içinde geçerlidir. Çünkü, K_t deki permütasyonlar sütunlar üzerinde oynadığından sütun denklik sınıfları değişmez. Ayrıca bir semistandart Young tablonun sütun denklik sınıfında sadece bir tane semistandart tablo olduğundan $[T_i]$ lerin hepsi ayrıktır. Lemma 4.3.4 daki hipotezler sağlandığından dolayı θ_{T_i} ler lineer bağımsızdır. ∎

Lemma 4.3.7 $\theta \in Hom(S^{\lambda}, M^{\mu})$ ve $\theta e_t = \sum\limits_{T} c_T T$, t sabitleştirilmiş $\lambda-$tablo olmak üzere,

(1) $\pi \in C_t$ ve $T_1 = \pi T_2 \Longrightarrow c_{T_1} = (sgn\pi)c_{T_2}$

(2) Herhangi bir T_1 genelleştirilmiş Young tablosunun sütunundaki elemanlarda bir tekrarlanma varsa, $c_{T_1} = 0$ dır.

(3) θ sıfır dönüşümü değil ise, $c_{T_2} \neq 0$ olacak şekilde bir T_2 semistandart tablosu vardır.

İspat (1) $\pi \in C_t$ ise $\pi C_t = sgn(\pi)\theta(e_t)$ olduğu 3. bölümde gösterilmişti.

$$\begin{aligned}\pi\theta(e_t) &= \theta(\pi e_t) && (\theta \text{ homomorfizma olduğundan})\\ &= \theta(sgn(\pi)e_t)\\ &= (sgn\pi)\theta(e_t) && (\theta \text{ lineer olduğundan})\end{aligned}$$

$\theta(e_t) = \sum_T c_T T$, $c_T \in F$ olmak üzere,

$$\begin{aligned}\pi(c_{T_1}T_1 + c_{T_2}T_2 + \ldots + c_{T_n}T_n) &= sgn(\pi)(c_{T_1}T_1 + c_{T_2}T_2 + \ldots + c_{T_n}T_n)\\ c_{t_1}\pi T_1 + c_{t_2}\pi T_2 + \ldots + c_{t_n}\pi T_n &= sgn(\pi)(c_{T_1}T_1 + sgn(\pi)c_{T_2}T_2 + \ldots + sgn(\pi)c_{T_n}T_n)\end{aligned}$$

Buradan, $c_{T_2} = (sgn\pi)c_{T_1}$ dir. $sgn(\pi)$ ile her iki tarafı çarparsak $c_{T_1} = (sgn\pi)c_{T_2}$ olur.

(2) Hipotezden $(ij) \in C_t$ vardır öyleki $(ij)T_1 = T_1$ dir. (1) den $c_{T_1} = -c_{T_2}$ yazılabilir. O zaman, $2c_{T_1} = 0$ ise $c_{T_1} = 0$ olur. (F, C veya R olmak üzere)

(3) $\theta \neq 0$ olduğundan, $\theta(e_t) = c_{T_1}T_1 + c_{T_2}T_2 + \ldots + c_{T_n}T_n$ olacak şekilde $T_1, T_2, \ldots, T_n$ Young tabloları vardır. O halde $c_{T_2} \neq 0$ olan T_2 Young tablosunu $\theta(e_t)$ de görülen Young tablolar arasında $[T_2]$ olmak üzere maksimal seçelim. (1) ve (2) den T_2 yi ları güçlü bir şekilde artacak olarak seçebiliriz. Gerçekten, T_2 nin sütunlarında tekrarlanma olsa $c_{T_2} = 0$ olurdu. T_2 nin sütunlarını artan kabul edebiliriz. Aksi taktirde, öyle bir $\pi \in C_t$ vardır ki, $T_1 = \pi T_2$ artan sütunlara sahiptir. (1) den $\pi \in C_t$ olduğundan $c_{T_1} = (sgn\pi)c_{t_2}$ olacaktır.

Kabul edelim ki, T_2 nin i. satırında bir azalma olsun. Yani,

$$\begin{array}{ccc} & & b_1\\ & & \wedge\\ & & b_2\\ \vdots & & \vdots\\ a_i & > & b_i\\ \wedge & & \\ \vdots & & \\ \wedge & & \\ a_p & & \end{array}$$

A ve B yi her zamanki gibi seçersek, $G_{AB} = \sum_\pi sgn(\pi)\pi$ olmak üzere,

$$G_{AB}(\sum_T c_T T) = G_{AB}(\theta e_t) = \theta(G_{AB}e_t) = \theta(0) = 0$$

olur. Yukarıdaki eşitlikten, $T \neq T_2$ olmak üzere $\pi T = T_2$ olacak şekilde bazı $\pi \in G_{AB}$ ler vardır. Bu ise T nin T_2 de bazı a_j ve b_k elemanlarının yer değiştirmesiyle oluştuğunu söyler. Genelleştirilmiş Young tabloların baskınlık Lemmasından dolayı $[T] \rhd [T_2]$ olur. Bu sonuç da T_2 nin seçimiyle çelişkidir. ■

Teorem 4.3.8 $\{\overline{\theta}_T : T \in T^{\circ}_{\lambda\mu}\}$ kümesi $Hom(S^{\lambda},\ M^{\mu})$ yı gerer.

İspat Herhangi bir $\theta \in Hom(S^{\lambda}, M^{\mu})$ için

$$\theta e_t = \sum_T c_T T \qquad (*)$$

yazabiliriz.

$$L_\theta = \{S \in T^{\circ}_{\lambda\mu} \ \mid \ [S] \trianglelefteq [T] : T, \theta e_t \ \text{ de gözüken tablo } \}$$

L_θ; θe_t deki bir T tarafından üretilen düşük sıralı ideal (lower order ideal) olsun. Biz ispatı $\mid L_\theta \mid$ üzerinde tümevarım ile göstereceğiz.

Eğer $\mid L_\theta \mid = 0$ ise Lemma 4.3.7 nin (3) den θ bir sıfır dönüşümüdür. Böylece θ; L_θ yı gerer.

Eğer $\mid L_\theta \mid > 0$ ise (*) daki eşitlikten $c_{T_2} \neq 0$ olacak şekilde bir T_2 semistandart tablosu bulunur. Ayrıca Lemma 4.3.7 nin (3) ispatında olduğu gibi $[T_2]$ yi, toplamda görülen tüm tablolar arasında maxsimal seçebiliriz.

$$\theta_2 = \theta - c_{T_2}\overline{\theta}_{\theta_2}$$

olmak üzere, iddiamız L_θ dan T_2 tablosunun çıkarılmasıyla oluşan L_{θ_2} nin, L_θ kümesinin altkümesi olduğunu göstermektir. Sonuç 4.3.3 den $\overline{\theta}e_t$ görülen S tabloları $[S] \trianglelefteq [T_2]$ yi sağlar. Bu sebeple $L_\theta \subseteq L_\theta$ dır. Ayrıca Lemma 4.3.7 (1) den $[S] = [T_2]$ şartını sağlayan her S tablosu, $c_{T_2}\overline{\theta}_{T_2}e_t$ ve θe_t de aynı katsayı ile gözükür. T_2 maksimal olduğundan, böylece $T_2 \notin L_{\theta_2}$ dır. Dolayısıyla tümevarımdan, θ_2, $\overline{\theta}_T$ yı gerer.

■

4.4 Kostka Sayıları ve Young Kuralı

Tanım 4.4.1 (Kostka Sayıları) Kostka sayıları , semistandart tabloların sayısına eşittir;

$$K_{\lambda\mu} = \mid T^{\circ}_{\lambda\mu} \mid$$

Şimdi Teorem 4.3.1 in bir sonucu olan aşağıdaki teoremi verelim.

Teorem 4.4.2 (Young Kuralı)M^{μ} de S^{λ} nın katsayısı, λ şeklinde, μ tipindeki semistandart tabloların sayısına eşittir; yani

$$M^{\mu} \cong \bigoplus_{\lambda} K_{\lambda\mu} S^{\lambda}$$

dır. (Sagan, 1991)

Sonuç 3.4.10 dan, direk toplamı $\lambda \trianglerighteq \mu$ olan parçalanmalara kısıtlayabiliriz.

Örnek 4.4.3 $\mu = (2,2,1)$ olsun. Buna göre $\lambda \trianglerighteq \mu$ olacak şekildeki tipi μ olan tüm λ lar ve bu parçalanmalara karşılık gelen semistandart tablolar aşağıdaki gibidir.

$$\lambda = (2,2,1), \quad \lambda = (3,1,1), \quad \lambda = (3,2), \quad \lambda = (4,1), \quad \lambda = (5)$$

$$= \begin{array}{ll} \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet \\ \bullet & \end{array} \qquad = \begin{array}{lll} \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & & \\ \bullet & & \end{array} \qquad = \begin{array}{lll} \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \end{array} \qquad = \begin{array}{llll} \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & & & \end{array} \qquad = \begin{array}{lllll} \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \end{array}$$

$$T : \begin{array}{ll} 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 3 & \end{array} \qquad : \begin{array}{lll} 1 & 1 & 2 \\ 2 & & \\ 3 & & \end{array} \qquad : \begin{array}{lll} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & \end{array} \qquad : \begin{array}{llll} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 3 & & & \end{array} \qquad : \begin{array}{lllll} 1 & 1 & 2 & 2 & 3 \end{array}$$

$$: \begin{array}{lll} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & \end{array} \qquad : \begin{array}{llll} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & & & \end{array}$$

dir. Böylece,

$$M^{(2,2,1)} \cong S^{(2,2,1)} \oplus S^{(3,1,1)} \oplus 2S^{(3,2)} \oplus 2S^{(4,1)} \oplus S^{(2,2,1)}$$

Örnek 4.4.4 $\mu = (3,2,2)$ olsun. Buna göre $\lambda \trianglerighteq \mu$ olacak şekildeki tipi μ olan tüm λ lar ve bu parçalanmalara karşılık gelen semistandart tablolar aşağıdaki gibidir.

$$\lambda = (7),(6,1),(5,2),(5,1,1),(4,3),(4,2,1),(3,3,1),(3,2,2)$$

O halde

$\lambda = (7)$ parçalanmasına karşılık gelen semistandart tablo;

1 1 1 2 2 3 3 dır.

$\lambda = (6,1)$ parçalanmasına karşılık gelen semistandart tablolar;

1 1 1 2 2 3 , 1 1 1 2 3 3 dır.
3 2

$\lambda = (5,2)$ parçalanmasına karşılık gelen semistandart tablolar;

1 1 1 2 2 , 1 1 1 2 3 , 1 1 1 3 3 dır.
3 3 2 3 2 2

$\lambda = (5,1,1)$ parçalanmasına karşılık gelen semistandart tablo;

1 1 1 2 3

2

3

$\lambda = (4,3)$ parçalanmasına karşılık gelen semistandart tablolar;

1 1 1 2 , 1 1 1 3 dır.
2 3 3 2 3 3

$\lambda = (4,2,1)$ parçalanmasına karşılık gelen semistandart tablolar;

1 1 1 2 1 1 1 3

2 3 , 2 2 dır.

3 3

$\lambda = (3,3,1)$ parçalanmasına karşılık gelen semistandart tablo;

1 1 1

2 2 3 dır.

3

$\lambda = (3,2,2)$ parçalanmasına karşılık gelen semistandart tablo;

1 1 1

2 2

3 3

şeklindedir.

$$M^{(3,2,2)} \cong S^{(3,2,2)} \oplus S^{(3,3,1)} \oplus 2S^{(4,2,1)} \oplus 2S^{(4,3)} \oplus S^{(5,1,1)} \oplus 3S^{(5,2)} \oplus 2S^{(6,1)} \oplus S^{(7)}$$

Örnek 4.4.5 Herhangi μ için $K_{\mu\mu} = 1$ olur. $\mu-$tipindeki semistandart Young tablo birinci satırında sadece birler , ikinci satırında ikilerden vs. oluşan tablodur. Böylece $K_{\mu\mu} = 1$ dir.

Örnek 4.4.6 Herhangi bir μ ve $\lambda = (n)$ alındığında bu değerlere göre oluşan Young tabloların satırlarında zayıfça bir artış söz konusudur. Bu yüzden sadece bir tane semistandart tablo vardır. Bu sebepten dolayı da $K_{(\lambda)\mu} = 1$ olur.

KAYNAKLAR

JAMES, G. D. 1976. The irreducible representations of the symmetric groups. Lond. Math. Soc,229-232.

JAMES, G. D. 1978. Representations theory of the symmetric groups, Lecture notes in mathematics.Springer, 632, Verlag Berlin.

JAMES, G. D. 1981. The Representations theory of the symmetric groups, Encyclo pedia of mathematics and its applications, 234, Wesley.

JAMES, G. D. and LEİBECK, Martin. 1993. Representions and characters of groups. Cambridge University press.

KNUTH, D. E. 1970. Permutations, matrices and generalized Young tablleaux. Pacific j. Math. 34.

PEEL, M. H. 1975. Specht modules and the symmetric groups. J. Algebra 36, 88-97

SAGAN,B. E. 1991. The symmetric groups, Represention, Combinatorial algorithms and symmetric functions. Wadsworth and Brooks California.

SPECHT, W. 1935. Die irreduziblen darstellngen der symmetrichen gruppe. Mat Z. $39, 679-711$

ÖZGEÇMİŞ

1974 yılında Ankara'da doğdu. İlk ve orta öğrenimini Ankara'da tamamladı. 1991 yılında girdiği Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü'nden 1995 yılında mezun oldu. Aynı yıl Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim dalında yüksek lisans öğrenimine başladı. Bir sene, Fen Bilimleri Enstitüsünün İngilizce hazırlık okuluna devam etti. 1997 yılının Mayıs ayında Cumhuriyet Üniversitesinde Araştırma Görevlisi olarak göreve başladı. Şu an Ankara Üniversitesi'nde geçici görevle araştırma görevlisi olarak çalışmaktadır.