VARYANS UNSURLARININ TAHMİNİNDE BAYES
TAHMİN METODUNUN KULLANIMI VE EŞİKLİ
KARAKTERLERE UYGULANMASI

Bahar ÇITAK

YÜKSEK LİSANS TEZİ
ZOOTEKNİ ANABİLİM DALI
1998

ANKARA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

VARYANS UNSURLARININ TAHMİNİNDE BAYES TAHMİN METODUNUN KULLANIMI VE EŞİKLİ KARAKTERLERE UYGULANMASI

Bahar ÇITAK

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ZOOTEKNİ ANABİLİM DALI

Bu tez 09.09./ 1998 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından
Oybirliği/ Oyçokluğu ile kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Tahsin KESİCİ (Danışman)	Prof. Dr. Yüksel BEK	Doç. Dr. Zahide KOCABAŞ

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

VARYANS UNSURLARININ TAHMİNİNDE BAYES TAHMİN METODUNUN KULLANIMI VE EŞİKLİ KARAKTERLERE UYGULANMASI

Bahar ÇITAK

Ankara Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Zootekni Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Tahsin KESİCİ

1998, Sayfa:51

Jüri: Prof. Dr. Tahsin KESİCİ
Prof. Dr. Yüksel Bek
Doç. Dr. Zahide Kocabaş

Bu çalışmada, yavru verimi için oluşturulan eşikli modelin parametreleri ve varyans unsurları Bayes metodu kullanılarak tahmin edilmiş ve bunlardan yararlanarak kalıtım derecesi hesaplanmıştır. Bu yöntem ile elde edilen sonuçlar, χ^2 ve varyans analizi (ANOVA) ile elde edilen sonuçlarla karşılaştırılmıştır. Karşılaştırma sonucunda, Bayes metodunun eşikli modelin parametrelerinin ve varyans unsurlarının tahmininde diğer metodlardan daha doğru ve güvenilir sonuçlar verdiği gözlenmiştir.

ANAHTAR KELİMELER: Bayes metodu, varyans unsurları, eşikli model, kalıtım derecesi.

ABSTRACT

Master Thesis

USE OF BAYES METHODS IN PREDICTION OF VARIANCE COMPONENTS AND AN APPLICATION TO A THRESHOLD CHARACTER

Bahar ÇITAK

Ankara University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Animal Science

Supervisor: Prof. Dr. Tahsin KESİCİ

1998, Page: 51

Jury : Prof. Dr. Tahsin KESİCİ
Prof. Dr. Yüksel BEK
Assoc. Prof. Dr. Zahide KOCABAŞ

In this study, the variance components and parameters of threshold model for multiple birth were estimated by using Bayes method. The heritabiltiy of the multiple birth was calculated using the obtained parameters. Moreover, the parameters were predicted by means of the analysis of variance technique and χ^2-method. When the heritability calculated using the Bayes estimates was compared with those estimated using the ANOVA and χ^2 method, the results showed that Bayes method was more accurate to assess the parameters of threshold model.

Key Words: **Bayes methods, variance components, threshold model, heritabiltiy.**

TEŞEKKÜR

Bana bu konuda çalışma olanağı veren ve çalışmalarım boyunca yardımlarını esirgemeyen danışmanım Sayın Prof. Dr. Tahsin KESİCİ'ye (A.Ü.Z.F.), materyal olarak verilerini kullanmama izin veren ve çalışmalarımı destekleyen Sayın Prof. Dr. Ayhan ELİÇİN'e (A.Ü.Z.F.), yardımlarını ve desteğini hiçbir zaman esirgemeyen Sayın Doç. Dr. Zahide KOCABAŞ'a (A.Ü.Z.F.), çalışmanın analizi sırasında bilgisayar programını kullanmama izin veren Sayın Dr. Ignacy Misztal'a (G.U.A.F.), çalışmalarımın her safhasında yanımda olan ve destekleyen Sayın Araş. Gör. Ahmet Taşdelen'e (Y.Y.Ü.Z.F.) ve aileme teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

SİMGELER DİZİNİ

A	Eklemeli genetik etki
c	Doğal logaritması hesaplanan fonksiyona ait sabit değer
C_{uu}	Eklemeli genetik etkilerin varyans-kovaryans matrisi
Cov	Kovaryans
D	Dominant etki
E	Çevre unsurlarının etkisi
e_{ij}	Basit şansa bağlı baba modeline ait hata terimi
F	F dağılımına ait tablo değeri
G	Rasgele etkilerin gösterdiği dağılıma ait singüler olmayan varyans-kovaryans matrisi
h^2	Kalıtım derecesi
I	Epistatik etki
L	Olabilirlik fonksiyonu
n_{jk}	Açıklayıcı değişkenlerin seviyelerinin j. kombinasyonunda k. kategorideki döl sayısı
$n_{j.}$	Açıklayıcı değişkenlerin j. kombinasyonundaki toplam döl sayısı
P	Fenotipik değer
Q	Tam sütun ranklı katsayı matrisi
r	Prametre sayısı
r^G	Akrabalık derecesi
R	Risk fonksiyonu
s	Baba sayısı
s_i	Basit şansa bağlı baba modelinde i. babaya ait tesadüf etkisi
t_k	Standartlaştırılmış eşik değeri
u	Eşikli modelde eklemeli gen etkilerine ait parametre vektörü
v	Eşikli modelin konum parametresi
V(A)	Eklemeli genetik varyans
V(E)	Çevre varyansı
V(P)	Fenotipik varyans
W	Diagonal matris
X	Sabit etkilerin katsayı matrisi
Z	Rasgele etkilerin katsayı matrisi
μ	Populasyon ortalaması
σ^2_e	Hata varyansı
σ^2_s	Babalar arası varyans
χ^2	Khi-kare değeri
δ'	Sabit eşiklerin kümesi
δ_m	m. eşik değeri
η_j	Açıklayıcı değişkenlerin seviyelerinin j. kombibasyonuna ait konum parametresi
β	Sabit etkilere ait parametre vektörü
$\Phi(.)$	Standart normal dağılım fonksiyonu
τ	Eşik değişkeninin dağılımının ortalama vektörü
Ω	Eşik değişkeninin dağılımının diagonal varyans-kovaryans matrisi
α	Sabit etkilerin dağılımının ortalama vektörü
Γ	Sabit etkilerin dağılımının diagonal varyans-kovaryans matrisi

$\Delta^{[i]}$	Prametrelerin i. iterasyon ile (i-1). İterasyon tahminleri arasındaki fark vektörü
θ'	Parametre vektörü
$\hat{\mu}_{ML}$	Populasyon ortalaması için ML tahmini
$\hat{\sigma}^2_{e_{ML}}$	Hata varyansı için ML tahmini
$\hat{\sigma}^2_{e_R}$	Hata varyansı için REML tahmini
$\hat{\sigma}^2_{s_{ML}}$	Babalar arası varyans için ML tahmini
$\hat{\sigma}^2_{s_R}$	Babalar arası varyans için REML tahmini

Kısaltmalar

ABD	Amerika Birleşik Devletleri
ANOVA	Varyans analizi
A.Ü.	Ankara Üniversitesi
B.A.K.T.	Babalar arası kareler toplamı
B.A.K.O.	Babalar arası kareler ortalaması
G.K.T.	Genel kareler toplamı
G.U.Z.F.	Georgia University Agricultural Faculty
H.K.T.	Hata kareler toplamı
H.K.O.	Hata kareler ortalaması
IID	Bağımsız benzer dağılımlı
LSE	En küçük kareler tahmin edicisi
ML	En çok olabilirlik tahmin edicisi
REML	Kısıtlanmış en çok olabilirlik tahmin edicisi

ÇİZELGELER DİZİNİ

1. GİRİŞ

Islah çalışmalarında varyans-kovaryans unsurlarının tahminleri yaygın olarak kullanılan bir yoldur. Bu tahminlerin kullanım alanları arasında; seleksiyon indekslerinin belirlenmesi, karışık modellerde sapmasız kestirimler, kalıtım derecesinin tahmini, genetik, çevresel ve fenotipik korrelasyonların tahminleri, yetiştirme programlarının planlanması, kantitatif özelliklerin genetik mekânizmalarının yorumlanması sayılabilir (Henderson 1986).

Bilindiği üzere ıslah, üzerinde çalışılan populasyonun belirli bir veya birkaç özellik bakımından genotipik değerini yükseltmek amacı ile yapılan çalışmalardır. Bu tanımlamaya göre, ıslah edilecek populasyonun genotipik yapısı belirli bir doğrultuda değiştirilmiş olacaktır. Başka bir ifadeyle, sözkonusu özellikleri determine eden genlerden yüksek etkili olanların allellerine nazaran nisbi frekanslarının yükseleceği, böylece de ekonomik verim seviyesini aşan canlıların sayılarında sürekli artış olacağı açıktır. Islahçının böyle bir gelişme için kullanabileceği tek araç seleksiyondur.

Üzerinde çalışılan populasyonun verim özelliklerine ait kalıtım derecesinin bilinmesi, bu karakterlerin seleksiyonla geliştirilmesi amacı ile yapılan çalışmalarda büyük önem taşır. Bir populasyonda herhangi bir verime ait kalıtım derecesi doğru olarak tahmin edilebilirse, uygulanacak seleksiyonun başarısı da artar. Kalıtım derecesinin doğru olarak hesaplanabilmesi ise, varyans unsurlarının doğru olarak tahmin edilmesine bağlıdır. Bu amaçla geliştirilmiş olan birçok tahmin yöntemi mevcuttur. Varyans unsurlarının tahmin edilmesine ilişkin çalışmalar ilk olarak 1947 yılında Eisenhart tarafından ele alınmıştır. Bu yıllarda varyans unsurları ancak alt grup sayıları eşit veri setlerinde tahmin edilebiliyordu. Dengesiz verilerde karşılaşılan problemlerin çözümü için ilk adım Henderson (1953) tarafından atılmıştır. Bu dönemde Henderson I, II ve III olarak bilinen ve rastgele etkilere ait varyans-kovaryans unsurlarının tahmin edilmesinde kullanılan modeller geliştirilmiştir. 1960 'lı yılların sonuna kadar bu modeller hayvan ıslahçıları tarafından oldukça sık kullanılmıştır. Daha sonra hesaplama tekniğinde meydana gelen hızlı gelişmeler sayesinde maksimum olabilirlik (ML) esasına dayalı yöntemler önem kazanmaya başlamıştır. Bunlardan en çok kullanılan tahmin yöntemlerinden ilki, en küçük kareler tahmin yöntemini (LSE) temel alan yöntemlerdir. Diğeri ise, 1971 yılında ML metodundan kaynaklanan sorunların önüne geçebilmek için geliştirilen kısıtlanmış maksimum olabilirlik metodu (REML)'dur (Patterson and Thompson 1971). REML ıslahçılar tarafından en çok kullanılan yöntem olmuştur. Bu yöntemler normallik varsayımını esas alan tahmin yöntemleridir. Ancak özellikle hayvancılıkta, eşikli (threshold) karakterler, var-yok (binary) tipinde gözlenen özelliklere ait veri setlerinin analizleri bu varsayımdan yola çıkılarak yapılamazlar (Foulley et al. 1987). Bu sebepten dolayı, bu yöntemlere alternatif olarak geliştirilmiş olan diğer bir yaklaşım Bayes tahmin metodudur. Literatürde bu metodun uygulandığı birçok çalışma mevcuttur. Yapılan çalışmalar göstermektedir ki, bu yöntem sürekli, kesikli ve yaklaşık- sürekli dağılım gösteren karakterlere uygulanabilir (Höeschele et al. 1986, Gianola 1982).

Hayvan ıslahında, kantitatif genetik uygulamalarının çoğu sürekli fenotipik dağılım gösteren karakterlerle yapılmıştır. Mendel mekanizmasına dayalı çok faktörlü modeller genellikle sürekli verilere uygundur. Bunun yanı sıra, kesikli fenotipik dağılım gösteren basit Mendel modelleri, allel ve/veya lokus sayısı, gen frekanslarının dağılımı, harita uzaklığı, penetrans ve akrabalık dereceleri üzerine odaklanmıştır (Gianola 1982).

Hayvan yetiştirmede birçok önemli özellik (bir batında yavru sayısı, doğum zorluğu, kayıtların şekil ve tipi, hayatta kalma veya ölüm, hastalığa karşı duyarlılık gibi) sürekli olmayan fenotipik dağılım gösterir. Bu tip karakterler eşikli (threshold) veya yaklaşık- sürekli (quasi-continuous) karakterler olarak adlandırılır (Falconer 1981) Bu tür karakterlerin kalıtımı kantitatif karakterlerdeki gibi poligenik, fenotipik dağılımı ise kalitatif karakterlerdeki gibi kesiklidir.

Bu çalışmada, yavru verimi için geliştirilen modele ait varyans unsurları ve kalıtım derecesi tahmin edilmeye çalışılmıştır. Tahmin yöntemi olarak Bayes tahmin yöntemi kullanılarak, yapılan tahminler diğer tahmin yöntemleriyle karşılaştırılmıştır.

2. KURAMSAL TEMELLER ve KAYNAK ARAŞTIRMASI

2.1. Varyans Unsurları ve Tahmin Metodları

Varyans unsurlarının tahmini için birçok yöntem mevcuttur. Varyans analizi (ANOVA), maksimum olabilirlik (ML), kısıtlanmış maksimum olabilirlik (REML) ve Bayes tahmin metodu gibi.

2.1.1. Maksimum Olabilirlik (ML) Metodu

Varyans unsurlarının maksimum olabilirlik tahmin edicileri arasındaki farklılık basit şansa bağlı bir model ile açıklanabilir.

Normallik varsayımı ile, değişik babaların döllerine ait N adet bağımsız gözlem için basit şansa bağlı model:

$$Y_{ij} = \mu + s_i + e_{ij}$$

$i = 1, \ldots, m$

$j = 1, \ldots, n$

Y_{ij} = i. babanın j. dölüne ait fenotipik değer

s_i = i. babaya ait tesadüf etkisi

e_{ij} = hata terimi

Baba etkilerinin ortalaması 0, varyansı σ_s^2 olan normal bir dağılım gösterdiği, hata etkisinin ortalaması 0, varyansı σ^2_e olan normal bir dağılım gösterdiği varsayılmaktadır. Ayrıca,

$$\mathrm{Cov}(e_{ij} | i \neq j) = 0$$

$$\mathrm{Cov}(s_i, e_{ij}) = 0$$

$$Y_{ij} \approx N\left(\mu, \sigma_s^2 + \sigma_e^2\right)$$

varsayımı da yapılmaktadır. Bu durumda gözlemlere ait olabilirlik fonksiyonu;

$$L\left(\mu, \{s_i\} \sigma_s^2, \sigma_e^2 \middle| \{Y_{ij}\}\right) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}mn} \left(\sigma_e^2\right)^{\frac{1}{2}mn}}$$

$$* \exp\left\{ -\frac{1}{2\sigma_e^2} \left[\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \left(Y_{ij} - \mu - s_i\right)^2 \right] \right\}$$

şeklinde yazılabilir.

Bu fonksiyonun s_i' ler üzerinden integrali alınırsa,

$$L\left(\mu,\sigma_s^2,\sigma_e^2 \middle| \{Y_{ij}\}\right) \approx \left(\sigma_e^2\right)^{-\frac{1}{2}m(n-1)}\left(\sigma_e^2+n\sigma_s^2\right)^{-\frac{1}{2}m}$$

$$*\exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\frac{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\left(Y_{ij}-\overline{Y}_{i.}\right)^2}{\sigma_e^2}+\frac{n\sum_{i=1}^{m}\left(\overline{Y}_{i.}-\mu\right)^2}{\sigma_e^2+n\sigma_s^2}\right]\right\}$$

$$\approx \left(\sigma_e^2\right)^{-\frac{1}{2}s(n-1)}\left(\sigma_e^2+n\sigma_s^2\right)^{-\frac{1}{2}s}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\frac{HKT}{\sigma_e^2}+\frac{BAKT+sn\left(\overline{Y}_{..}-\mu\right)^2}{\sigma_e^2+n\sigma_s^2}\right]\right\}$$

elde edilir. Daha sonra bu fonksiyonun logaritması alınarak aşağıdaki eşitlik elde edilir.

$$l=\log L \approx -\frac{1}{2}m(n-1)\log\sigma_e^2-\frac{1}{2}m\log\lambda-\frac{HKT}{2\sigma_e^2}-\frac{BAKT+mn\left(\overline{Y}_{..}-\mu\right)^2}{2\lambda}$$

Burada HKT ve BAKT sırasıyla hata kareler toplamı ve babalar arası kareler toplamıdır. İşlemleri kolaylaştırmak amacıyla σ^2_e + $n\sigma^2_s$ yerine λ notasyonu kullanılmıştır. Fonksiyonun μ, σ^2_e ve λ' ya göre kısmi türevleri alınıp 0'a eşitlenerek herbir parametre için maksimum olabilirlik tahminleri elde edilir.

$$\frac{\partial \log L}{\partial \mu}=\frac{mn\left(\overline{Y}_{..}-\mu\right)}{\lambda}=0$$

$$\frac{\partial \log L}{\partial \sigma_e^2}=-\frac{m(n-1)}{2\sigma_e^2}+\frac{HKT}{2\sigma_e^4}=-\frac{m(n-1)}{2\sigma_e^4}\left[\sigma_e^2-\frac{HKT}{m(n-1)}\right]=0$$

$$\frac{\partial \log L}{\partial \lambda}=-\frac{m}{2\lambda}+\frac{BAKT+mn\left(\overline{Y}_{..}-\mu\right)^2}{2\lambda^2}=0$$

$$\hat{\mu}_{ML}=\overline{Y}_{..}$$

$$\hat{\sigma}_e^2=\frac{HKT}{m(n-1)}=HKO$$

$$\hat{\lambda}_{ML}=\frac{BAKT}{m}=\left(1-\frac{1}{m}\right)BAKO$$

$$\hat{\sigma}^2_{s_{ML}}=\frac{\hat{\lambda}_{ML}-\sigma^2_{e_{ML}}}{n}=\frac{(n-1)BAKT-HKT}{mn(n-1)}=\frac{(1-1/m)BAKO-HKO}{n}$$

Burada da HKO ve BAKO sırasıyla hataya ait kareler ortalaması ve babalar arası kareler ortalamasıdır.

$$\hat{\mu}_{ML},\hat{\sigma}^2_{e_{ML}}\ \text{ve}\ \hat{\sigma}^2_{s_{ML}}$$

ise sırasıyla populasyon ortalamasının, hata ve babalar arası varyansın maksimum olabilirlik tahminleridir.

2.1.2. Kısıtlanmış Maksimum Olabilirlik (REML) Metodu

REML tahmin edicileri, olabilirlik fonksiyonunun şansa bağlı olan kısmının maksimize edilmesi ile elde edilirler (Patterson and Thompson 1971).Her ne kadar bu işlem zor görünse de, bilgisayar teknolojisindeki hızlı gelişmeler sayesinde kolaylıkla yapılabilmektedir.

REML tahmin edicilerini bulmak için önce olabilirlik fonksiyonu faktörlerine ayrılır. Burada basit şansa bağlı model için faktörlerden biri genel ortalama diğerleri ise hataya ait varyans ve babalar arası varyans unsurlarıdır. O halde olabilirlik fonksiyonu genel ortalama ve varyans unsurlarına göre faktörize edilir.

$$L\left(\mu \middle| \overline{Y}_{..}\right)=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}m}(\lambda/mn)^{\frac{1}{2}}}\exp\left[-\frac{1}{2}\frac{(\overline{Y}_{..}-\mu)^2}{\lambda/mn}\right]$$

$$L\left(\sigma_s^2,\sigma_e^2 \middle| HKT,BAKT\right)=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}m(n-1)}\left(\sigma_e^2\right)^{\frac{1}{2}m(n-1)}(\lambda)^{\frac{1}{2}(m-1)}(mn)^{\frac{1}{2}}}*\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{HKT}{\sigma_e^2}+\frac{BAKT}{\lambda}\right)\right]$$

Varyans unsurlarını içeren olabilirlik fonksiyonunun logaritması alınırsa;

$$l=\log L\approx-\frac{s(n-1)}{2}\log\sigma_e^2-\frac{(s-1)}{2}\log\lambda-\frac{HKT}{2\sigma_e^2}-\frac{BAKT}{2\lambda}$$

bulunur. Daha sonra bu fonksiyonun σ^2_e ve λ' ya göre kısmi türevleri alınıp sıfıra eşitlenerek bunlara ait REML tahmin edicileri elde edilir.

$$\frac{\partial \log L}{\partial\sigma_e^2}=-\frac{s(n-1)}{2\sigma_e^4}+\frac{HKT}{2\sigma_e^4}=0$$

$$\hat{\sigma}^2_{e_R}=\frac{HKT}{s(n-1)}=HKO$$

2.1.3. Varyans Analizi (ANOVA) Metodu

Varyans analizi metodu varyans unsurlarını tahmin etmek için uygulamada en sık kullanılan metoddur. Bu metodun temeli, kareler ortalamalarını beklenen değerlerine eşitledikten sonra elde edilen lineer eşitlikleri çözmeye dayanır.

Henderson (1953), varyans unsurlarının tahmini için gerekli esasları ortaya koymuştur. Hayvan ıslahında genetik ve çevreye bağlı etkileri tahmin etmek amacıyla Henderson' un I, II ve III nolu metodları çok sık kullanılmıştır. Ancak I ve II nolu metodlar sapmalı tahminler verebilirler. Aynı zamanda bu tahminler negatif değer alabilirler. Bunun sebebi ise genellikle denemenin yanlış kurulmasına veya tahmin metoduna bağlanır. Bu sebeple REML metodu karışık etkili modellerin varyans unsurlarını tahmin etmede en çok kullanılan metod olmuştur (Fırat 1997).

2.1.4. Bayes Metodu

Bayes analizinde elde edilen veriler için parametrik model belirlenirken, bilinmeyen parametreler hakkında bir ön (prior) dağılım belirlenir. Bu dağılım önceki bilgileriden yararlanarak belirlenebilir.

Son yıllarda Bayes metodunun ıslah alanında kullanılmaya başlanmasından sonra invers χ^2 ve invers Wishart dağılımları da önem kazanmıştır. σ^2_s ve σ^2_e varyans unsurları için genellikle ön dağılım olarak invers χ^2 ve invers Wishart dağılımları kullanılmıştır (Fırat ve Bek 1997).

Parametrelerin ön dağılımı, hayvan yetiştiricilerinin parametre değerleri hakkındaki ön bilgisini doğru olarak ortaya koymalıdır. Ön bilgiyi kullanan yöntemler bu bilgiyi dikkate almayan yöntemlere oranla daima daha kesin ve doğru sonuçlar verirler. Bu da Bayes metodunun hayvan ıslahında ne kadar önemli olduğunu ifade etmektedir. Bu yöntem kullanılarak parametre tahminleri daha sonraki bölümde ele alınacaktır.

2.2. Varyans Unsurlarının Negatif Tahmini

Varyans unsurlarının hayvan ıslahında, özellikle damızlığa ayrılacak hayvanların damızlık değerlerini belirlemede önemli bir yeri olduğu bilinmektedir. Bu sebeple varyans unsurlarının tahmini için geliştirilen metodlardan ve bu tahminlerin negatif değer alabileceğinden önceki bölümde bahsedildi.

Bilindiği üzere, varyanslar tanımlanan parametre aralığı dışında değerler alabilirler. Bundan dolayı bu parametrelerin negatif tahminlerinin olasılığını bilmek oldukça önemlidir. Ancak varyans daima pozitif olacağından negatif bir değer elde edilmesi önemli bir sorundur. Ayrıca kalıtım derecesinin negatif değer alması söz konusu olamaz. Oysa varyans unsurlarının negatif tahmin edilmesi kalıtım derecesinin de hatalı tahmin edilmesi demektir. Bununla birlikte hataya ait varyans, σ^2_e, daima pozitiftir. Fırat (1997)'a göre σ^2_s'nın negatif olma olasılığı,

$$P\left(\sigma^2_s < 0\right) = P\left\{F\left(m-1, m(n-1)\right) < \frac{\sigma^2_s}{n\sigma^2_s + \sigma^2_e}\right\}$$

dır (Searle et al. 1992). Burada F(m-1,m(n-1)), m-1 ve m(n-1) serbestlik dereceli F tablo değeridir.

Negatif olmayan unsurların tahmini için çalışmalar mevcuttur (Fırat 1997).Olabilirlik teorisine dayalı metodlar en sık kullanılan tahmin metodlarıdır. Belirli koşullar gerçekleştiğinde bu metodlar negatif olmayan parametre tahminlerini verirler.

Eğer (1-1/s) BAKO ≥ HKO ise maksimum olabilirlik tahmin edicileri önceki bölümde verildiği gibi hesaplanır. Aksi takdirde,

$$\hat{\sigma}^2_{s_{ML}} = 0$$

$$\hat{\sigma}^2_{e_{ML}} = \frac{GKT}{mn}$$

dır. Burada GKT genel kareler toplamıdır. Eğer BAKO ≥ HKO ise kısıtlanmış maksimum olabilirlik tahmin edicileri önceki bölümde verildiği gibi hesaplanır. Ancak BAKO < HKO ise,

$$\sigma^2_{s_R} = 0$$

$$\sigma^2_{e_R} = \frac{GKT}{mn-1}$$

dır.

Fırat (1997) tarafından yapılan bir çalışmada, tek yönlü boğa modelinin analizinde boğa sayısı sabit tutulup her bir boğaya düşen yavru sayısı arttırıldığı takdirde σ^2_s tahmin edicisinin negatif olma olasılığının azaldığı görülmüştür. Yine aynı çalışmada yavru sayısı sabit tutulup boğa sayısı arttırıldığında da σ^2_s tahmin edicisinin negatif değer alma olasılığının azaldığı görülmüştür.

Bundan dolayı bu parametrelerin negatif değer alması genellikle denemenin yanlış kurulmasına bağlanır. Tabii burada kullanılan tahmin metodunun etkisinide göz ardı etmemek gerekir.

2.3. Bayes Teorisi

Hayvan yetiştirme teorisi, optimal sonuç elde edecek şekilde çiftleştirme ve seleksiyon için geliştirilen matematiksel modellerin geliştirilmesi ve uygunluğunu ele alır. Uygulanan modelin parametrelerini tahmin etmek için kullanılan metodlardan birisi Bayes tahmin metodudur.

Bayes metodlarının temel bazı tanımlamalar aşağıdaki gibi verilebilir.

Bayes Çıkarımı: Parametrelerin, ön (prior) dağılımı bilinen rasgele değişkenler olarak ele alındığı bir çıkarım şeklidir.

Bayes Tahmini: İnvers olasılık metodlarını kullanarak populasyon parametrelerinin tahmin edilmesidir.

Hayvan ıslahında istatistiksel prensiplerin gelişimi Bayes yönteminin kullanılmasına kadar pek düzenli olmamıştır. Eğer beklenen genetik ilerlemeyi maksimize etmek için bu yöntemler kullanılıyorsa, yansızlık, minimum varyans veya normallik göz ardı edilebilir. Benzer şekilde olabilirlik fonksiyonunun maksimum yapılması hayvanların en uygun nasıl sıralanacağı hakkında fikir vermek için gerekli değildir. Hayvan ıslahındaki bu tip problemlerin önüne geçmek için Bayes yaklaşımı verilmiştir.

Bayes yaklaşımında istatistikçi, veriler bilindiğinde bilinmeyen parametrelerin olasılık dağılımını hesaplamakla ilgilenir. Bu yaklaşımın temel dayanağı ise Bayes teoremidir. Parametreler ve rasgele değişkenlere ait ön (prior) ve son (posterior) dağılımlar mevcuttur.

Verilere ait vektör y, bilinmeyen parametrelerin vektörü ise θ olsun. Bunların ortak yoğunluk fonksiyonu $f(\theta, y)$'dır. Standart olasılık teorisinden;

$$f(\theta,y)=f(y|\theta)f(\theta)$$
$$f(\theta,y)=f(\theta|y)f(y)$$

olduğu bilinir. f(θ) ve **f(y)** sırasıyla θ ve y'nin marjinal yoğunluk fonksiyonlarıdır. Buradan;

$$f(\theta|y)=f(y|\theta)f(\theta)/f(y)$$

elde edilir. Dikkat edilirse;

$$f(y)=\int_{R_\theta} f(y,\theta)d\theta$$
$$=\int_{R_\theta} f(y|\theta)f(\theta)d\theta=E_\theta[f(y|\theta)]$$

olduğu görülür. Buradan f(y) ifadesinin θ'nın bir fonksiyonu olmayacağı açıktır. Bundan dolayı;

$$f(\theta|y)\approx f(y|\theta)f(\theta)$$

şeklinde yazılabilir. Burada, θ rasgele değişkendir. Bayes yönteminde, sabit ve rasgele değişkenler arasında bir fark yoktur. Bu fark genellikle hayvan ıslahında ortaya çıkar. Sabit etkinin rasgele değişken olarak alınmasının Bayes çıkarımı için hiç bir sakıncası yoktur. Üzerinde çalışılan örneklerin bir dağılımdan rasgele alınmış örnekler olması da gerekli değildir. Veriler toplanmadan önce parametre değerleri arasındaki ilişkinin kesin olmayışı ön yoğunluğun rasgele olduğunu gösterir (Gianola and Fernando 1986).

Bayes terminolojisinde, f(θ) ifadesi θ'nın ön yoğunluğu olarak bilinir. Bu da y vektörü gözlenmeden önce θ'nın mümkün değerleri için nispeten şüpheli ilişkiyi verir. f(y|θ) olabilirlik fonksiyonudur. θ bilindiğinde y'nin olasılığını verir. Sonuç olarak f(θ|y) son yoğunluk fonksiyonudur. θ hakkında çıkarımlar son yoğunluk fonksiyonundan yararlanılarak yapılır.

Veriye bağlı veya veriden bağımsız ön bilgiler olmak üzere iki tip ön bilgi tanımlanabilir (Gianola and Fernando 1986). Kullanılan ön bilgi daha önce yapılmış araştırmalardan elde edilmiş olabileceği gibi teorik veya araştırıcının varsayımları doğrultusunda belirlenmiş bilgiler de olabilir. Kişisel ön bilgiye karşılık veriye bağlı veya teorik ön bilgi kullanmak istatistiksel olarak tercih edilir. Örneğin, daha önceki verilerden elde edilen kalıtım derecesi tahminleri, doğrusal veya doğrusal olmayan yöntemler kullanılarak genetik ilerlemeyi hesaplamak için kullanılır (Gianola and Foulley 1983, Smith and Allaire1985).

Parametrelerin tahmin edilmesi için hesaplaması kolay ön dağılımlar seçmek mümkün olabilir. Gianola and Fernando (1986) damızlık değer ve genetik parametrelerin tahmininde Bayes metodlarını kullanmışlar ve kalıtım derecesinin hatalı tahmin edilmesi gibi durumlara engel olabilecek ön bilginin elde edilebileceğini göstermişlerdir. Baba bir üvey kardeş familyalarında varyans unsurları tahmin edilirken model belli doğal şartlardan etkilenir. Burada babalar arası varyans toplam genotipik varyansın ¼'i yani $\sigma^2_s=\sigma^2_G/4$ olduğundan,

$$h^2 = \frac{\sigma^2_G}{\sigma^2_P} = \frac{4\sigma^2_s}{\sigma^2_s + \sigma^2_e}$$

yazılabilir. Buradan,

$$\sigma^2_e = \frac{4-h^2}{h^2}\sigma^2_s$$

ve $0 \leq h^2 \leq 1$ olduğundan,

$$\sigma^2_s \geq 0;\ \sigma^2_e > 0;\ \sigma^2_e / \sigma^2_s \geq 3$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada σ^2_s, babalar arası varyans ve σ^2_e hataya ait varyansdır.

$$\{\ 0< \sigma^2_e < \infty;\ 0 \leq \sigma^2_s < \infty\ \}$$

olduğundan;

$$\{\ 0 < \sigma^2_e < \infty;\ 0 \leq \sigma^2_s \leq \sigma^2_e / 3\ \}$$

olur. Bir tahmin metodunun bu kısıtlamalara önem vermemesi kalıtım derecesinin tahmininde yanlışlıklara sebep olabilir.

Yetiştirme için çiftlik hayvanlarının seleksiyonunda en az iki sebepten dolayı ön bilgi kullanmak gerekir. Birincisi, uygun karara varabilmek ikincisi ise yetiştiricilerin benzer çiftleştirmelere ait parametre değerler hakkında ön bilgiye sahip olmalarıdır. Bu ön bilgi seleksiyon yöntemi ile sistematik bir şekilde birleştirilebilir. Hayvan yetiştirmede sabit etkiler için düz (flat) ön dağılımlar oldukça sık kullanılır. Çünkü sabit etkilere ait ön dağılım varyans unsurları için fazla etkili değildir. Bunun yanında, bir çalışmada varyans-kovaryans matrislerinin ön dağılımı için invers Wishart dağılımı kullanılırken (Foulley et. al. 1987) başka bir çalışmada, hataya ait varyans unsuru için invers χ^2 dağılımı kullanılmıştır (Höeschele et. al. 1986).

Varyans unsurları için invers χ^2 dağılımının kullanılmasının sebebi ise bu dağılımdan yararlanarak diğer birçok dağılımın elde edilebilmesidir. İnvers Wishart dağılımı ise invers χ^2 dağılımının çok değişkenli karakterler için genelleştirilmiş halidir.

2.4. Eşikli (Threshold) Karakterler ve Analizi

Son yıllara kadar hayvan yetiştirme çalışmalarının çoğu sürekli fenotipik dağılım gösteren karakterlerlerle yapılıyordu. Bunun sebebi ise mendel mekanizmasına dayalı çok faktörlü modellerin genellikle sürekli veriler için uygun sonuçlar vermesidir. Ancak, genetik ıslah çalışmalarında allel veya lokus sayıları, gen frekanslarının dağılımı, harita uzaklığı, penetrans gibi kesikli fenotipik dağılım gösteren karakterlerde mevcuttur. Hayvan yetiştirmede üzerinde en çok çalışılan kesikli fenotipik dağılım gösteren özelliklere örnek olarak; bir hayvanın n-batında yavrulama sayısı (0, 1, 2, 3), doğum güçlüğü, hayatta kalma veya ölüm, belirli bir hastalığa dayanıklılık gibi özellikler verilebilir.

Bu şekilde, kalıtımı kantitatif karakterlerdeki gibi poligenik, fakat fenotipik dağılımı kalitatif karakterlerdeki gibi kesikli olan karakterlere eşikli (threshold) veya yaklaşık sürekli (quasi- continuous) karakterler adı verilir. Bu karakterlere eşikli karakter denilmesinin sebebi bir örnekle şöyle açıklanabilir: memeli hayvanlar belirli bir yılda döl verme bakımından doğuranlar ve kısır kalanlar olmak üzere kesin olarak iki sınıfa ayrılabilir. Kısır kalanların bir seri hormon yapımı bakımından belirli bir eşiğin altında kaldıkları, doğuranların ise bu eşiği aştıkları söylenir (Düzgüneş, Eliçin ve Akman 1996). Bu tip karakterlerin analizi doğrudan sınıflandırılmış (categorical) bağımlı değişkenler ile açıklayıcı değişkenler arasındaki ilişki ile açıklanabilir (Gianola and Foulley 1983).

Kullanılan verinin çok değişkenli normal dağılım göstermesi durumunda baba seçimi için en iyi doğrusal sapmasız kestirimin (BLUP) uygun olduğu bilinir. Ancak kategorik değişkenler normal dağılmadıkları için doğrusal yöntem kullanmak zorlaşır (Gianola 1982, Foulley and Gianola 1984). Bayes yöntemi normallik veya doğrusallık varsayımları gerektirmediğinden sınıflandırılmış verilerin analizi için uygundur.

2.5. Kalıtım Derecesi

Bilindiği üzere, fenotipik varyasyonu meydana getiren unsurlar kalıtsal olan genotipik unsur ile kalıtsal olmayan çevre unsurlarıdır ve P = G + E eşitliği ile ifade edilir. Burada, üzerinde durulan özelliğe ait fenotipik varyasyonda genotipik varyasyonun payı kalıtım derecesi olarak bilinir. Genotipik unsur bazen eklemeli gen etkisi A, dominant gen etkisi D ve Epistatik etki I 'nın toplamı olarak gösterilir. Fakat bilindiği üzere, seleksiyon damızlık değeri yüksek olan hayvanların gelecek generasyonun ebeveynleri olarak seçilip diğerlerini sürüden uzaklaştırmaktır. Fertlerin damızlık değerlerinde dominantlık ve epistasi etkilerinin payları yoktur. Bilindiği üzere dominantlık heterozigotların genotip değerini yükseltmekte, homozigotlarınkini ise düşürmektedir. Bu durum seleksiyonda heterozigotların tercih edilmesine sebep olmaktadır. Fakat ileriki generasyonlarda heterozigotların nisbi miktarı azaldığından beklenen ilerleme elde edilememektedir. Benzer şekilde epistatik etki de damızlık seçiminde yanılmalara sebep olabilir. Bu etkiler bazı fertlerin yüksek bazılarının da düşük fenotipik değer göstermelerinde rol oynarlar. Yüksek fenotipik değerli oldukları için damızlığa ayrılan hayvanların damızlık değerleri gerçekte yüksek olmayabilir. Bu durum seleksiyonda yanılmalara sebep olur (Düzgüneş 1963).

Buna göre selesiyonda başarı, etkileri eklemeli olan genlerden ileri gelen varyasyonun artması ile artar. Bu yüzden genotipik varyans eklemeli gen etkilerinden kaynaklanan varyans önem kazanır. Dolayısıyla fenotipik varyans V(P) = V(A) + V(E) ile gösterilebilir. V(A) / V(P) ise kalıtım derecesini verir. Burada sözü edilen kalıtım derecesi dar anlamlı kalıtım derecesidir.

Bu çalışmada da dar anlamlı kalıtım derecesinin tahmin edilebilmesi için gerekli olan varyans unsurları tahmin edilmeye çalışılacaktır. Ancak çalışmada üzerinde durulan karakter eşikli karakter olduğundan, bu karaktere ait kalıtım derecesinin hesabının sürekli fenotipik dağılım gösteren karakterlerdeki gibi yapılması uygun sonuçlar vermeyebilir. Bu tip karakterlere ait kalıtım derecesinin hesaplanması için bazı kaynaklar, verilerin transformasyon uygulandıktan sonra analize tabi tutulmalarını veya χ^2' den yararlanarak kalıtım derecesinin hesaplanmasını önerirler (Düzgüneş ve ark.1996, Gianola 1982).

χ^2'den yararlanarak kalıtım derecesinin hesaplanması için öncelikle baba familyalarına göre Çizelge 2.1.'deki gibi iki yönlü tablo oluşturulur.

Çizelge 2.1. Baba familyaları ile kategorilere ait iki yönlü tablo

Familyalar	1. Kategori	2. Kategori	Toplam
1. Baba	n_{11}	n_{12}	$n_{1.}$
.	...	...	...
.	...	...	...
k. Baba	n_{k1}	n_{k2}	$n_{k.}$

Daha sonra, bu tablodan yararlanarak χ^2 değeri hesaplanır. Bulunan χ^2 değeri aşağıdaki eşitlikte yerine koyularak üzerinde durulan özellik için kalıtım derecesi tahmin edilir.

$$h^2 = \frac{\chi^2 - (k-1)}{(k-1)nr^G}$$

Burada kullanılan n_0 değeri eğer fert sayısı familyadan familyaya değişiyorsa,

$$n_0 = \frac{\sum n_i - \frac{\sum n_i^2}{\sum n_i}}{k-1} - 1$$

formülü yardımıyla bulunur. Ayrıca, r^G değeri familya içindeki fertlerin birbirleriyle akrabalık derecesi olup, baba-bir üvey kardeş familyaları için ¼'e, aynı baba ile çiftleşmiş anaların döllerinden oluşmakta ise yine ¼'e eşittir (Düzgüneş ve ark. 1996). Bu yöntem ile bulunan kalıtım derecesinin negatif çıkma olasılığı mevcuttur. Dolayısıyla pek güvenilir bir yöntem olduğunu söylemek mümkün değildir.

3. MATERYAL VE YÖNTEM

3.1. Materyal

Araştırmada materyal olarak kullanılan, Alman yapağı et merinosu ırkına ait koyunlardan elde edilen yavru verimi verileri, A. Ü. Ziraat Fakültesi Zootekni Bölümü öğretim üyelerinden Prof. Dr. Ayhan Eliçin'den temin edilmiştir. Kullanılan veriler 5 yıl süreyle yetiştirilen 190 anadan elde edilen değerlerdir. Araştırmada eşikli karakter olarak kastedilen, tek ve ikiz doğumlardır. Üçüz doğum sayısı çok az olduğundan gözardı edilmiştir. Ayrıca, üzerinde durulan özelliğe ait modelin parametrelerini ve varyans unsurlarını tahmin etmek için A.B.D. Georgia Üniversitesi öğretim üyelerinden Dr. Ignacy Misztal'a ait WWW[1] sayfasındaki bilgisayar programı kendisiyle e-mail ile haberleşilerek sağlanmış ve kullanılmıştır.

3.2. Yöntem

Üzerinde durulan özelliğe ait veriler Çizelge 3. 1.'deki gibi bir s x m boyutlu iki yönlü bir tablo ile gösterilebilir. Tabloda, satırlar bireyleri veya açıklayıcı değişkenlerin seviyelerinin kombinasyonlarını, sütunlar ise bağımlı değişkenin kategorilerini gösterir.

Çizelge 3. 1. Sıralı kategorik veriler için düzenlenen iki yönlü tablo

Bireyler	Bağımlı değişken kategorileri							Toplam
	1	2	...	k	...	m		
1	n_{11}	n_{12}	...	n_{1k}	...	n_{1m}		$n_{1.}$
2	n_{21}	n_{22}	...	n_{2k}	...	n_{2m}		$n_{2.}$
.								
.								
.								
j	n_{j1}	n_{j2}	...	n_{jk}	...	n_{jm}		$n_{j.}$
.								
.								
.								
s	n_{s1}	n_{s2}	...	n_{sk}	...	n_{sm}		$n_{s.}$

[1] WWW adresi: nce.ads.uga.edu/~ignacy/

İlgilenilen rasgele değişkenler j = 1, ..., s için n_{j1}, n_{j2}, ..., n_{jk} dır.Satır toplamları $n_{j.}$ (j=1, ..., s) sabit kabul edilir. Tek koşul her j değeri için $n_{j.} \neq 0$ olmasıdır. Marjinal toplamlar sabit olduğundan tablo s(m-1) parametreli bir modelle açıklanabilir.

Tablodaki veriler sembolik olarak m x s matrisi ile gösterilebilir.

$$Y = [y_1, y_2, \ldots, y_j, \ldots, y_s]$$

Y: m x 1 boyutlu vektör ve

$$Y_j = \sum_{r=1}^{n_j} Y_{jr} \quad (j = 1, \ldots, s)$$

$$Y_{jr} = \begin{cases} 1, & \text{gözlem varsa} \\ 0, & \text{gözlem yoksa} \end{cases}$$

Y, y_1, y_2 ve θ parametre vektörünün ortak bir olasılık dağılışına sahip olduğu varsayımı ile;

$$f(Y, y_1, y_2, \theta) = f_2(Y, y_1, y_2 | \theta) f_1(\theta) \tag{1}$$

yazılabilir. Buradan θ için son yoğunluk fonksiyonu aşağıdaki gibi elde edilir;

$$f_4(\theta | Y, y_1, y_2) = f_2(Y, y_1, y_2 | \theta) / f_3(Y, y_1, y_2) \tag{2}$$

Burada;

f_3 (Y, y_1, y_2) : Veriye ait marjinal yoğunluk fonksiyonu,

f_1 (θ) : θ için prior yoğunluk fonksiyonudur.

f_3 (Y, y_1, y_2), θ' ya bağımlı olmadığından,

$$f_4(\theta | Y, y_1, y_2) \cong f_2(Y, y_1, y_2 | \theta) f_1(\theta) \tag{3}$$

yazılabilir.

θ hakkında istatistiksel çıkarımlar son yoğunluk fonksiyonundan yararlanarak yapılabilir. θ'nın Bayes tahmin edicisi beklenen riski minimum yapan θ^* vektörüdür.

$$R(\theta^*;Y,y_1,y_2)=\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty} l(\theta^*,\theta)f_4(\theta|Y,y_1,y_2)d(\theta) \tag{4}$$

$l(\theta^*, \theta)$ beklenen kayıp fonksiyonudur. Kayıp fonksiyonu kuadratik ise, riskin θ^*'a göre türevi alındığı zaman;

$$\frac{\partial R(\theta^*;Y,y_1,y_2)}{\partial\theta^*}=2[\theta^*-E(\theta|Y,y_1,y_2)] \tag{5}$$

elde edilir.

İspat: Kayıp fonksiyonu kuadratik fonksiyon ise

$$l(\theta^*,\theta)=\sum_{i=1}^{k}(\theta_i^*-\theta_i)^2=(\theta^*-\theta)'(\theta^*-\theta)$$

yazılabilir. (4) de yerine koyulursa aşağıdaki eşitlikler elde edilir;

$$R=\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}\left(\theta^{*'}\theta^*-\theta^{*'}\theta-\theta'\theta^*+\theta'\theta\right)f_4(\theta|Y,y_1,y_2)d\theta$$

$$R=\theta^{*'}\theta^*\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}f_4(\theta|Y,y_1,y_2)d\theta+\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}\theta f_4(\theta|Y,y_1,y_2)d\theta$$

$$-\theta^{*'}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}\theta' f_4(\theta|Y,y_1,y_2)d\theta+\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}\theta'\theta f_4(\theta|Y,y_1,y_2)d\theta$$

Risk fonksiyonunun θ^* ya göre türevi alınırsa;

$$\frac{\partial R}{\partial\theta^*}=2\theta^*\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}f_4(\theta|Y,y_1,y_2)d\theta-\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}\theta f_4(\theta|Y,y_1,y_2)d\theta$$

$$-\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}\theta' f_4(\theta|Y,y_1,y_2)d\theta+0$$

bulunur.

$$\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty} f_4\left(\theta \middle| Y,y_1,y_2\right)d\theta = 1$$

ve

$$\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty} \theta f_4\left(\theta \middle| Y,y_1,y_2\right)d\theta = E\left(\theta \middle| Y,y_1,y_2\right)$$

olduğundan,

$$\frac{\partial R}{\partial \theta^*} = 2\theta^* - 2E\left(\theta \middle| Y,y_1,y_2\right) = 2\left[\theta^* - E\left(\theta \middle| Y,y_1,y_2\right)\right] \tag{6}$$

olur. Denklem 0' a eşitlendiği zaman θ^*'ın posterior tahmini

$$\theta^* = E\left(\theta \middle| Y,y_1,y_2\right)$$

olarak bulunur.

Pratikte bu işlemleri yapmak zor; bazende imkansızdır (Henderson 1973). Lindley and Smith (1972) bu zorlukları gidermek için son yoğunluğun tepe değeri ile ortalamaya yaklaşımı önermiştir. Son yoğunluk fonksiyonu yaklaşık olarak simetrik ise tepe değeri ortalamaya yaklaşır. Harville (1977), yanlış prior kullanıldığı zaman, son yoğunluğun tepe değerinin ortalamadan daha avantajlı olduğunu ve uygun sonuç verdiğini göstermiştir.

3.2.1. Eşikli Model

Bağımlı değişkenin bir sürekli değişken (l) ile ilişkili olduğu ve sabit eşiklerin kümesinin

$$\delta' = \left[\delta_1 < \delta_2 \ldots < \delta_{m-1}\right]\left(\delta_0 = -\infty, \delta_m = +\infty\right) \tag{7}$$

olduğu varsayılır. l değişkeni bir çok lokustaki allellerin açılımının etkilerinin ve çevre unsurlarının lineer kombinasyonlarının sonucudur. Tablo 1' deki her bir satır için konum parametresi, η_j vardır. Tabloda j. satırdaki q. Deney üniteleri için model;

$$l_{jq} = \eta_j + \varepsilon_{jq}$$

j= 1,...,s q=1,...,n (8)

ve

$$\eta_j = q_j{}' v + z_j{}' u \qquad (9)$$

şeklinde yazılabilir. ϵ_{jq} ~ IID N (0, σ^2) dağılır. v sabit etkilerin vektörü, u rasgele etkilerin vektörüdür. Bütün konum parametreleri matris gösteriminde;

$$\eta_{sx1} = Qv + zu \qquad (10)$$

yazılabilir. Q tam sütun ranklı matristir. η_j bilindiğinde j. satırda k. kategorideki gözlemin olasılığı,

$$P_{jk} = P\left(\delta_{k-1} < l < \delta_k \middle| \eta_j\right) = P\left(l < \delta_k \middle| \eta_j\right) - P\left(l < \delta_{k-1} \middle| \eta_j\right)$$
$$= \Phi\left(\frac{\delta_k - \eta_j}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\delta_{k-1} - \eta_j}{\sigma}\right) \qquad (11)$$

şeklindedir. Burada, $\phi(.)$ standart normal dağılım fonksiyonudur. σ tanımlanamadığı için 1 olarak alınır (Gianola, 1982, Gianola and Foulley, 1983). Rank (X) = r-1 olacak şekilde Q = [1X] alınırsa,

$$\eta = 1v + X\beta + zu$$

olur. β, r-1 elemanlı vektördür. O zaman,

$$\delta_k - \eta_j = \left(\delta_k - v_j\right) - \left(x_j{}'\beta + z_j{}'u\right) = t_k - \mu_j \qquad (12)$$

ve

$$P_{jk} = \Phi\left(t_k - \mu_j\right) - \Phi\left(t_{k-1} - \mu_j\right)$$

k= 1, ..., m-1

s= 1, ..., s

yazılabilir.

Bazı araştırmacılar lojistik fonksiyon ile normal integralin birbirine yaklaştığını öne sürmüşlerdir (Gianola and Foulley 1983).

$$t_k^* - \mu_j^* = \frac{\pi}{\sqrt{3}}\left(t_k - \mu_j\right) \qquad (13)$$

alındığı takdirde,

$$\varphi\left(t_k - \mu_j\right) = \left[1 + e^{-\left(t_k^* - \mu_j^*\right)}\right]^{-1} \qquad (14)$$

elde edilir. O zaman,

$$P_{jk} = \left[1 + e^{-\left(t_k^* - \mu_j^*\right)}\right]^{-1} - \left[1 + e^{-\left(t_{k-1}^* - \mu_j^*\right)}\right]^{-1} = e_{jk} - e_{j(k-1)} \qquad (15)$$

olur. $-5 < t_k - \mu_j < 5$ için (14) ile $\phi\ (t_k - \mu_j)$ arasındaki farkın 0.022'yi geçmeyeceği ispatlanmıştır (Gianola and Foulley 1983).

3.2.2. Ön (Prior) Dağılım

Tahmin edilecek parametrelerin vektörü $\theta' = [t', \beta', u']$ olmak üzere, t, β ve u 'nun birbirinden bağımsız oldukları ve her birinin çok değişkenli normal dağılım gösterdiği düşünülürse,

$$p(\theta) \cong p_1(t)p_2(\beta)p_3(u) \qquad (16)$$

yazılabilir. Burada, $p_1(t)$, $p_2(\beta)$ ve $p_3(u)$ sırasıyla t, β ve u için prior yoğunluklardır.

$$t \sim N(\tau, \Omega)$$
$$\beta \sim N(\alpha, \Gamma)$$
$$u \sim N(0, G)$$

Ω ve Γ diagonal varyans-kovaryans matrisleri, G ise singüler olmayan varyans-kovaryans matrisidir. Genetik uygulamalarda, u genellikle eklemeli gen etkisinin veya babaya ait etkinin bir vektörüdür. Dolayısıyla G eklemeli ilişkilerin ve kalıtım derecesinin bir fonksiyonudur. O zaman eşitlik (16) aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$p(\theta) \cong \exp\left\{-\frac{1}{2}\left[(t-\tau)'\Omega^{-1}(t-\tau)+(\beta-\alpha)'\Gamma^{-1}(\beta-\alpha)+u'G^{-1}u\right]\right\}$$

(17)

t ve β hakkındaki prior bilginin şüpheli olduğu varsayılırsa, yani Ω = ∞ ve Γ = ∞ ise, $p_1(t)$ ve $p_2(\beta)$ düz (flat) dağılır. Artık posterior yoğunluk τ ve α'ya bağlı değildir. Dolayısıyla,

$$\ln p(\theta) \sim -\frac{1}{2}u'G^{-1}u \tag{18}$$

olur.

3.2.3. Son (Posterior) Dağılım

θ bilindiğinde, Y'deki tanımlayıcı değişkenlerin koşullu olarak bağımsız oldukları ve $p_{j1},\ldots,p_{jk},\ldots,p_{jm}$ (j=1,...,s) olasılıkları ile multinomial dağılım gösterdikleri varsayılır. O zaman logaritmik olabilirlik fonksiyonu,

$$\ln(Y|\theta) \sim \sum_{j=1}^{s}\sum_{k=1}^{m} n_{jk}\ln(p_{jk}) \tag{19}$$

şeklindedir. Son yoğunluğun logaritması ise,

$$L(\theta) = \ln f(\theta|Y) \sim \sum_{j=1}^{s}\sum_{k=1}^{m} n_{jk}\ln(p_{jk}) - \frac{1}{2}u'G^{-1}u + c \tag{20}$$

olur. Bundan sonra L(θ)'yı maksimum yapacak şekilde θ'ya göre birinci dereceden türevler alınıp 0 'a eşitlenerek θ^* için çözüm elde edilmeye çalışılır. Ancak denklem sistemi doğrusal olmadığından iterativ bir çözüm gerekir (Misztal and Schaeffer 1986). En çok kullanılan iterasyon metodu ise Newton-Raphson algoritmasıdır. Buna göre,

$$\theta^{*[i]} = \theta^{*[i-1]} - \left[\frac{\partial^2 L(\theta)}{\partial\theta\partial\theta'}\right]^{-1}_{\theta=\theta^{*[i-1]}}\left[\frac{\partial L(\theta)}{\partial\theta}\right]_{\theta=\theta^{*[i-1]}} \tag{21}$$

dır. İkinci dereceden türevlerin matrisi tam sütun ranklıdır (Foulley and Gianola 1984). O halde eşitlik aşağıdaki gibi yeniden düzenlenebilir.

$$\left[\frac{\partial^2 L(\theta)}{\partial\theta\partial\theta'}\right]_{\theta=\theta^{*[i-1]}}\left(\theta^{*[i]}-\theta^{*[i-1]}\right)=\left[\frac{\partial L(\theta)}{\partial\theta}\right]_{\theta=\theta^{*[i-1]}} \tag{22}$$

İterasyon $\Delta^{[i]} = \theta^{*[i]}-\theta^{*[i-1]} < \varepsilon$ olduğu zaman durdurulur. Genellikle kritik değer olarak $\Delta'\Delta/r < 10^{-12}$ alınır. Burada r tahmin edilecek parametre sayısıdır. O halde, normal durumda,

$$\frac{\partial p_{jk}}{\partial\left(t_k-\mu_j\right)}=\frac{\partial}{\partial\left(t_k-\mu_j\right)}\left[\Phi\left(t_k-\mu_j\right)-\Phi\left(t_{k-1}-\mu_j\right)\right] \tag{23a}$$

$$=\Phi\left(t_k-\mu_j\right)$$

$$\frac{\partial p_{jk}}{\partial t_k}=\Phi\left(t_k-\mu_j\right) \tag{23b}$$

$$\frac{\partial p_{jk}}{\partial \mu_j}=\Phi\left(t_{k-1}-\mu_j\right)-\Phi\left(t_k-\mu_j\right) \tag{23c}$$

$$\frac{\partial p_{jk}}{\partial \beta}=\left[\Phi\left(t_{k-1}-\mu_j\right)-\Phi\left(t_k-\mu_j\right)\right]X_j \tag{23d}$$

$$\frac{\partial p_{jk}}{\partial u}=\left[\Phi\left(t_{k-1}-\mu_j\right)-\Phi\left(t_k-\mu_j\right)\right]Z_j \tag{23e}$$

olduğu ispatlanabilir.

$$p_{jk}=\Phi\left(t_k-\mu_j\right)-\Phi\left(t_{k-1}-\mu_j\right)$$

ve

$$p_{j(k+1)}=\Phi\left(t_{k+1}-\mu_j\right)-\Phi\left(t_k-\mu_j\right)$$

olacağı açıktır. O halde olabilirlik fonksiyonu aşağıdaki gibi yeniden yazılabilir.

$$L(\theta)=\sum_{j=1}^{s}\left(n_{j1}\ln p_{j1}+\ldots+n_{jk}\ln p_{jk}+n_{j(k+1)}\ln p_{j(k+1)}+\ldots+n_{jm}\ln p_{jm}\right) \tag{24a}$$

Buna göre, olabilirlik fonksiyonunun t_k 'ya göre türevi alınırsa,

$$\frac{\partial L(\theta)}{\partial t_k}=\sum_{j=1}^{s}\left(\frac{n_{jk}}{p_{jk}}\frac{\partial p_{jk}}{\partial t_k}+\frac{n_{j(k+1)}}{p_{j(k+1)}}\frac{\partial p_{j(k+1)}}{\partial t_k}\right)$$

$$=\sum_{j=1}^{s}\left(\frac{n_{jk}}{p_{jk}}-\frac{n_{j(k+1)}}{p_{j(k+1)}}\right)\Phi\left(t_k-\mu_j\right) \tag{24b}$$

$k = 1,\ldots, m-1$

elde edilir. Benzer şekilde,

$$\frac{\partial L(\theta)}{\partial \beta}=\frac{\partial}{\partial \beta}\left[\sum_{j=1}^{s}\sum_{k=1}^{m}n_{jk}\ln p_{jk}\right]$$

$$=\sum_{j=1}^{s}\sum_{k=1}^{m}\frac{n_{jk}}{p_{jk}}\frac{\partial p_{jk}}{\partial \beta} \tag{24c}$$

$$=\sum_{j=1}^{s}\left\{\sum_{k=1}^{m}\frac{n_{jk}}{p_{jk}}\left[\Phi\left(t_{k-1}-\mu_j\right)-\Phi\left(t_k-\mu_j\right)\right]\right\}\mathbf{X}_j$$

ve

$$\frac{\partial L(\theta)}{\partial \mathbf{u}}=\frac{\partial}{\partial \mathbf{u}}\left[\sum_{j=1}^{s}\sum_{k=1}^{m}n_{jk}\ln p_{jk}-\frac{1}{2}\mathbf{u}'\mathbf{G}^{-1}\mathbf{u}\right]$$

$$=\sum_{j=1}^{s}\sum_{k=1}^{m}\frac{n_{jk}}{p_{jk}}\frac{\partial p_{jk}}{\partial \mathbf{u}}-\mathbf{G}^{-1}\mathbf{u} \tag{24d}$$

$$=\sum_{j=1}^{s}\left\{\sum_{k=1}^{m}\frac{n_{jk}}{p_{jk}}\left[\Phi\left(t_{k-1}-\mu_j\right)-\Phi\left(t_k-\mu_j\right)\right]\right\}\mathbf{Z}_j-\mathbf{G}^{-1}\mathbf{u}$$

bulunur.

$$v_j = \sum_{k=1}^{m} \frac{n_{jk}}{p_{jk}} \left[\Phi\left(t_{k-1} - \mu_j\right) - \Phi\left(t_k - \mu_j\right) \right]$$

alınırsa, $\mathbf{v}' = [v_1, \ldots, v_j, \ldots, v_s]$ olduğundan (24c) ve (24d) matris gösteriminde aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\frac{\partial L(\theta)}{\partial \beta} = \mathbf{X}'\mathbf{v} \tag{25}$$

$$\frac{\partial L(\theta)}{\partial \mathbf{u}} = \mathbf{Z}'\mathbf{v} - \mathbf{G}^{-1}\mathbf{u} \tag{26}$$

Eğer lojistik fonksiyon kullanılırsa denklem sistemi aşağıdaki gibidir.

$$\frac{\partial p_{jk}}{\partial t_k^*} = \frac{\partial}{\partial t_k^*} \left[[1 + e^{-\left(t_k^* - \mu_j^*\right)}]^{-1} - [1 + e^{-\left(t_{k-1}^* - \mu_j^*\right)}]^{-1} \right]$$

$$= \frac{\partial}{\partial t_k^*} \left[\frac{1}{1 + e^{-\left(t_k^* - \mu_j^*\right)}} \right] = \frac{e^{-\left(t_k^* - \mu_j^*\right)}}{\left[1 + e^{-\left(t_k^* - \mu_j^*\right)}\right]^2} \tag{27a}$$

$$= \frac{1 + e^{-\left(t_k^* - \mu_j^*\right)}}{\left[1 + e^{-\left(t_k^* - \mu_j^*\right)}\right]^2} - \frac{1}{\left[1 + e^{-\left(t_k^* - \mu_j^*\right)}\right]^2} = e_{jk} - e_{jk} e_{jk}$$

bulunur. Benzer şekilde,

$$\frac{\partial p_{jk}}{\partial \beta^*} = \left[e_{j(k-1)} \left(1 - e_{j(k-1)}\right) - e_{jk} (1 - e_{jk}) \right] X_j \tag{27b}$$

olduğu ispatlanabilir. O zaman,

$$\frac{\partial L(\theta)}{\partial t_k^*} = \sum_{j=1}^{s} \left[\frac{n_{jk}}{p_{jk}} - \frac{n_{j(k+1)}}{p_{j(k+1)}} \right] e_{jk} \left(1 - e_{jk}\right) \tag{28}$$

$$\frac{\partial L(\theta)}{\partial \beta^*} = X' v^* \tag{29}$$

$$\frac{\partial L(\theta)}{\partial u^*} = Z' v^* - G^{-1} u^* \left(\pi^2/3\right) \tag{30}$$

olarak bulunur. Burada v^*, s x 1 boyutlu bir vektördür. Öyle ki;

$$v_j^* = \sum_{k=1}^{m} n_{jk} \left\{ \frac{e_{j(k-1)}\left[1 - e_{j(k-1)}\right] - e_{jk}\left[1 - e_{jk}\right]}{p_{jk}} \right\}$$

dır.

İkinci dereceden türevler ise aşağıdaki gibi elde edilir.

a) t (threshold) : t (threshold) için ikinci dereceden türev;

$$\frac{\partial^2 L(\theta)}{\partial t_g \partial t_k} = \sum_{j=1}^{s} \left\{ \left[\frac{n_{jk}}{p_{jk}} - \frac{n_{j(k+1)}}{p_{j(k+1)}} \right] \frac{\partial^2 p_{jk}}{\partial t_g \partial t_k} + \left[\frac{n_{j(k+1)}}{p_{j(k+1)}^2} \frac{\partial p_{j(k+1)}}{\partial t_g} - \frac{n_{jk}}{p_{jk}^2} \frac{\partial p_{jk}}{\partial t_g} \right] \frac{\partial p_{jk}}{\partial t_k} \right\} \tag{31}$$

n_{jk} yerine $E(n_{jk} | \theta) = n_{j.} p_{jk}$ alınırsa eşitlik basitleşir.

$$E\left[\frac{\partial^2 L(\theta)}{\partial t_g \partial t_k} \right] = \sum_{j=1}^{s} n_{j.} \left[\frac{1}{p_{j(k+1)}} \frac{\partial p_{j(k+1)}}{\partial t_g} - \frac{1}{p_{jk}} \frac{\partial p_{jk}}{\partial t_g} \right] \frac{\partial p_{jk}}{\partial t_k} \tag{32}$$

g = k için eşitlik

$$E\left[\frac{\partial^2 L(\theta)}{\partial t_k^2} \right] = -\sum_{j=1}^{s} n_{j.} \left[\frac{1}{p_{j(k+1)}} - \frac{1}{p_{jk}} \right] \left(\frac{\partial p_{jk}}{\partial t_k} \right)^2 \tag{33}$$

olur. Böylece eşitlik, normal durumda,

$$E\left[\frac{\partial^2 L(\theta)}{\partial t_k^2}\right] = -\sum_{j=1}^{s} n_{j.}\left[\frac{p_{jk}+p_{j(k+1)}}{p_{jk}p_{j(k+1)}}\right]\Phi^2\left(t_k-\mu_j\right) \qquad k = 1,\ldots, m-1 \qquad (34)$$

lojistik durumda ise,

$$E\left[\frac{\partial^2 L(\theta)}{\partial t_k^{*2}}\right] = -\sum_{j=1}^{s} n_{j.}\left[\frac{p_{jk}+p_{j(k+1)}}{p_{jk}p_{j(k+1)}}\right]e_{jk}^2\left(1-e_{jk}\right)^2 \qquad k = 1,\ldots, m-1 \qquad (35)$$

şeklindedir. g = k+1 için ise, normal durumda,

$$E\left(\frac{\partial^2 L(\theta)}{\partial t_{k+1}\partial t_k}\right) = \sum_{j=1}^{s} n_{j.}\frac{\Phi\left(t_{k+1}-\mu_j\right)\Phi\left(t_k-\mu_j\right)}{p_{j(k+1)}} \qquad (36)$$

lojistik durumda,

$$E\left(\frac{\partial^2 L(\theta)}{\partial t_{k+1}^{*}\partial t_k^{*}}\right) = \sum_{j=1}^{s} n_{j.}\frac{e_{j(k+1)}\left(1-e_{j(k+1)}\right)e_{jk}\left(1-e_{jk}\right)}{p_{j(k+1)}} \qquad (37)$$

olur.

b) β : t (threshold) için ikinci dereceden türev; normal durumda,

$$\frac{\partial^2 L(\theta)}{\partial\beta\partial t_k} = \frac{\partial}{\partial\beta}\left\{\sum_{j=1}^{s}\left[\frac{n_{jk}}{p_{jk}}-\frac{n_{j(k+1)}}{p_{j(k+1)}}\right]\Phi\left(t_k-\mu_j\right)\right\} \qquad (38)$$

şeklindedir. Bazı cebirsel işlemlerden sonra eşitlik n_{jk} yerine $n_{j.}p_{jk}$ koyulursa,

$$E\left[\frac{\partial^2 L(\theta)}{\partial\beta\partial t_k}\right] = -\sum_{j=1}^{s} l(k,j)X_j \qquad (39)$$

$$l(k,j) = -n_{j.}\Phi\left(t_k-\mu_j\right)\left[\frac{\Phi\left(t_k-\mu_j\right)-\Phi\left(t_{k-1}-\mu_j\right)}{p_{jk}}-\frac{\Phi\left(t_{k+1}-\mu_j\right)-\Phi\left(t_k-\mu_j\right)}{p_{j(k+1)}}\right]$$

elde edilir. Denklem, matris gösteriminde aşağıdaki gibidir.

$$E\left[\frac{\partial^2 L(\theta)}{\partial \beta \partial t_k}\right] = \sum_{j=1}^{s} l(k,j)X_j = X'l(k) \tag{40}$$

Burada l(k) s x 1 boyutlu bir vektördür. Lojistik durumda ise eşitlik,

$$E\left[\frac{\partial^2 L(\theta)}{\partial \beta \partial t_k^*}\right] = -\sum_{j=1}^{s} l^*(k,j)X_j = -X'l^*(k) \tag{41}$$

şeklindedir.

c) u : t (threshold) için ikinci dereceden türev; normal durumda,

$$E\left[\frac{\partial^2 L(\theta)}{\partial u \partial t_k}\right] = -\sum_{j=1}^{s} l(k,j)Z_j = -Z'l(k) \tag{42}$$

lojistik durumda,

$$E\left[\frac{\partial^2 L(\theta)}{\partial u \partial t_k^*}\right] = -\sum_{j=1}^{s} l^*(k,j)Z_j = -Z'l^*(k) \tag{43}$$

olarak bulunur.

d) β : β için ikinci dereceden türev; normal durumda,

$$\frac{\partial^2 L(\theta)}{\partial \beta \partial \beta'} = \frac{\partial}{\partial \beta}\left[\sum_{j=1}^{s}\left\{\sum_{k=1}^{m} n_{jk}\left[\frac{\Phi(t_{k-1}-\mu_j)-\Phi(t_k-\mu_j)}{p_{jk}}\right]\right\}X_j\right] \tag{44}$$

$$= \sum_{j=1}^{s}\sum_{k=1}^{m}\left\{\frac{n_{jk}}{p_{jk}}\left[\Phi(t_{k-1}-\mu_j)(t_{k-1}-\mu_j)-\Phi(t_k-\mu_j)(t_k-\mu_j)\right]-\frac{n_{jk}}{p_{jk}^2}\left[\Phi(t_{k-1}-\mu_j)-\Phi(t_k-\mu_j)\right]^2\right\}X_j X_j'$$

şeklindedir. Basitleştirmek **için** n_{jk} yerine $n_{j.}p_{jk}$ koyulursa,

$$E\left[\frac{\partial^2 L(\theta)}{\partial\beta\partial\beta'}\right]=\sum_{j=1}^{s} n_{j.}\sum_{k=1}^{m}\left\{\left[\Phi(t_{k-1}-\mu_j)(t_k-\mu_j)-\Phi(t_k-\mu_j)(t_k-\mu_j)\right]-\frac{1}{p_{jk}}\left[\Phi(t_{k-1}-\mu_j)-\Phi(t_k-\mu_j)\right]^2\right\}X_j X_j'$$

elde edilir. Burada,

$$\sum_{k=1}^{m}\left[\Phi(t_{k-1}-\mu_j)(t_{k-1}-\mu_j)-\Phi(t_k-\mu_j)(t_k-\mu_j)\right]=0$$

olduğundan,

$$\begin{aligned}E\left[\frac{\partial^2 L(\theta)}{\partial\boldsymbol{\beta}\partial\boldsymbol{\beta}'}\right]&=-\sum_{j=1}^{s} n_{j.}\left\{\sum_{k=1}^{m}\frac{\left[\Phi(t_{k-1}-\mu_j)-\Phi(t_k-\mu_j)\right]^2}{p_{jk}}\right\}\mathbf{X}_j\mathbf{X}_j' \\ &=-\mathbf{X'WX}\end{aligned} \qquad (45)$$

olur. Burada **W** diagonal bir matristir.

Lojistik durumda ise eşitlik,

$$\begin{aligned}E\left[\frac{\partial^2 L(\theta)}{\partial\boldsymbol{\beta}\partial\boldsymbol{\beta}'}\right]&=-\sum_{j=1}^{s} n_{j.}\left[\frac{\left[e_{j(k-1)}(1-e_{j(k-1)})-e_{jk}(1-e_{jk})\right]^2}{p_{jk}}\right]\mathbf{X}_j\mathbf{X}_j' \\ &=-\mathbf{X'W^{*}X}\end{aligned} \qquad (46)$$

şeklinde yazılabilir.

e) **β : u için ikinci dereceden türev**; yukarıdaki gibi cebirsel işlemlerden sonra,

$$E\left[\frac{\partial^2 L(\theta)}{\partial\boldsymbol{\beta}\partial\mathbf{u}}\right]=-\mathbf{X'WZ} \qquad (47)$$

olarak bulunur.

f) u : u için ikinci dereceden türev de benzer işlemler yapıldıktan sonra aşağıdaki gibi bulunur.

$$E\left[\frac{\partial^2 L(\theta)}{\partial u \partial u'}\right] = -Z'WZ - G^{-1} \tag{48}$$

Elde edilen birinci ve ikinci dereceden türevler (22) nolu eşitlikte yerine koyulursa aşağıdaki çözüm matrisi elde edilir.

$$\begin{bmatrix} T^{[i-1]} & L'^{[i-1]} & L'^{[i-1]}Z \\ X'L^{[i-1]} & X'W^{[i-1]}X & X'W^{[i-1]}Z \\ Z'L^{[i-1]} & Z'W^{[i-1]}X & Z'W^{[i-1]}Z + G^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta_t^{[i]} \\ \Delta_\beta^{[i]} \\ \Delta_u^{[i]} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p'^{[i-1]} \\ X'v^{[i-1]} \\ Z'v^{[i-1]} - G^{-1}u^{[i-1]} \end{bmatrix} \tag{49}$$

Burada $T^{[i-1]}$ (m-1)x(m-1) boyutlu bir matristir. Eğer bağımlı değişkenin kategorilerinin seviyelerinin sayısı 3 ise normal durumda T matrisi,

$$T = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{s} n_{j.}\left[\frac{p_{j1}+p_{j2}}{p_{j1}p_{j2}}\right]\Phi^2(t_1-\mu_j) & -\sum_{j=1}^{s} n_{j.}\frac{\Phi(t_1-\mu_j)\Phi(t_2-\mu_j)}{p_{j2}} \\ -\sum_{j=1}^{s} n_{j.}\frac{\Phi(t_2-\mu_j)\Phi(t_1-\mu_j)}{p_{j2}} & \sum_{j=1}^{s} n_{j.}\left[\frac{p_{j2}+p_{j3}}{p_{j2}p_{j3}}\right]\Phi^2(t_2-\mu_j) \end{bmatrix} \tag{50}$$

olur. Ayrıca (49) nolu eşitlikte,

$$X'L = [X'l(1) \quad X'l(2) \quad \ldots \quad X'l(m-1)]$$
$$Z'L = [Z'l(1) \quad Z'l(2) \quad \ldots \quad Z'l(m-1)]$$

ve

$$p^{[i-1]} = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{s} \left[\frac{n_{j1}}{p_{j1}} - \frac{n_{j2}}{p_{j2}} \right] \Phi\left(t_1 - \mu_j\right) \\ \sum_{j=1}^{s} \left[\frac{n_{j2}}{p_{j2}} - \frac{n_{j3}}{p_{j3}} \right] \Phi\left(t_2 - \mu_j\right) \end{bmatrix}$$

dır. Lojistik durumda ise aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\begin{bmatrix} T^{*[i-1]} & L'^{*[i-1]}X & L'^{*[i-1]}Z \\ X'L^{*[i-1]} & X'W^{*[i-1]}X & X'W^{*[i-1]}Z \\ Z'L^{*[i-1]} & Z'W^{*[i-1]}X & Z'W^{*[i-1]}Z + G^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta_{t^*}^{[i]} \\ \Delta_{\beta^*}^{[i]} \\ \Delta_{u^*}^{[i]} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p'^{*[i-1]} \\ X'v^{*[i-1]} \\ Z'v^{*[i-1]} - G^{-1}u^{[i-1]} \end{bmatrix}$$

Burada T^* matrisi,

$$T^* = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{s} n_{j.} \left[\frac{p_{j1} + p_{j2}}{p_{j1} p_{j2}} \right] e_{j1}^2 (1 - e_{j1})^2 & -\sum_{j=1}^{s} n_{j.} \frac{e_{j1}(1 - e_{j1}) e_{j2}(1 - e_{j2})}{p_{j2}} \\ -\sum_{j=1}^{s} n_{j.} \frac{e_{j2}(1 - e_{j2}) e_{j1}(1 - e_{j1})}{p_{j2}} & \sum_{j=1}^{s} n_{j.} \left[\frac{p_{j2} + p_{j3}}{p_{j2} p_{j3}} \right] e_{j2}^2 (1 - e_{j2})^2 \end{bmatrix}$$

$$X'L^* = \left[X'l^*(1) \quad X'l^*(2) \quad \dots \quad X'l^*(m-1) \right]$$
$$Z'L^* = \left[Z'l^*(1) \quad Z'l^*(2) \quad \dots \quad Z'l^*(m-1) \right]$$

$$p'^{*[i-1]} = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{s} \left[\frac{n_{j1}}{p_{j1}} - \frac{n_{j2}}{p_{j2}} \right] e_{j1}(1 - e_{j1}) \\ \sum_{j=1}^{s} \left[\frac{n_{j2}}{p_{j2}} - \frac{n_{j3}}{p_{j3}} \right] e_{j2}(1 - e_{j2}) \end{bmatrix}$$

İterasyon için gerekli tüm hesaplamalar yapıldıktan sonra $t^{[0]}$, $\beta^{[0]}$ ve $u^{[0]}$ başlangıç değerleri ile hesaplamalara başlanır ve daha önce de belirtildiği gibi $\Delta^{[i]} < \varepsilon$ olduğu zaman iterasyon durdurulur.

3.2.4. Varyans Unsurlarının Tahmini

Günümüze kadar birçok araştırıcı tarafından, varyans unsurlarının tahmininde kullanılan Bayes metodlarının, genellikle parametrelerin nokta tahminlerinde (ortalama, ortanca değer, tepe değeri) veya bulunan son dağılımlarında farklılık gösterdiğini ifade etmişlerdir (Höeschele et al. 1986). Araştırıcı, varyans unsurlarının marjinal son dağılımını veya varyans ve diğer parametrelerin ortak son dağılımını kullanmayı önermişlerdir. Nokta tahmini olarak hesaplama kolaylığı bakımından tepe değeri tercih edilir.

Harville (1974), eğer β ve σ için düz bir ön dağılım kullanılırsa, ortak son yoğunluğunun tepe değerinin, bu parametrelerin ML tahminlerini verdiğini göstermiştir. Diğer taraftan, varyans unsurlarının marjinal yoğunluk fonksiyonunun tepe değerinin σ'nın REML tahminini verdiğini de göstermiştir.

Genellikle, β ve u parametrelerinin parçalanması sakıncalı olacağından, σ'nın marjinal posterior yoğunluk fonksiyonunun kullanılması önerilir (Gianola and Fernando 1986, Höeschele et al. 1986).

3.2.4.1. Marjinal Posterior Yoğunluk Kullanılarak Varyans Unsurlarının Tahmini

$\theta' = [\ t', \beta', u']$ eşikli modelin parametreleri ve σ bilinmeyen varyans unsurlarının vektörü olsun. Varyans unsurlarının marjinal posterior yoğunluğu, ortak posterior yoğunluğun θ'ya göre integrali alınarak elde edilir.

$$f(\sigma|y) = \int_{R_\theta} f(\theta,\sigma|Y)d\theta \tag{51}$$

Bu marjinal son yoğunluğun tepe değerini bulmak için (51)'in σ_i'ye göre (σ'nın i. elemanı) maksimize edilmesi gerekir.

$$s(\sigma|Y) = \frac{\partial \ln}{\partial \sigma_i}\left[\int_{R_\theta} f(\theta,\sigma|y)d\theta\right] \tag{52}$$

Bilindiği gibi burada,

$$f(\theta,\sigma|y) = f(\theta|y,\sigma).f(\sigma|y)$$

olduğundan ,

$$s(\sigma|Y) = \frac{\partial \ln}{\partial \sigma_i}\left[\int_{R_\theta} f(\sigma|y).f(\theta|y,\sigma)d\theta\right]$$

$$= \frac{\partial \ln}{\partial \sigma_i}\left[\iint_{R_\theta} f(\theta,\sigma|y).f(\theta|y,\sigma)d\theta\right]$$

$$= \int_{R_\theta} \frac{\partial \ln}{\partial \sigma_i}(f(\theta,\sigma|y))f(\theta|y,\sigma)d\theta$$

olur. t ve β için düz bir ön dağılım kullanılırsa,

$$f(\theta,\sigma|Y) \cong g(Y|\theta,\sigma).f(u|\sigma).f(\sigma) \tag{53}$$

elde edilir. Burada, $g(Y|\theta,\sigma)$ olabilirlik fonksiyonu, $f(u|\sigma)$ u'nun σ'ya bağlı ön yoğunluğu, $f(\sigma)$ ise varyans unsurlarının ön yoğunluğudur. Buradan, (52) nolu eşitlik aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$s(\sigma|Y) = E_{u|Y,\sigma_i^2}\left\{\frac{\partial}{\partial \sigma_i}\left[\ln g(Y|\theta,\sigma) + \ln f(u|\sigma)\right]\right\} + \frac{\partial \ln}{\partial \sigma_i} f(\sigma) \tag{54}$$

Burada, tahmin edilmesi gereken tek varyans unsuru babanın damızlık değeri olan u'nun varyansı σ_u^2'dur. Bu durumda (54),

$$s(\sigma_u^2|Y) = E_{u|Y,\sigma_u^2}\left[\frac{\partial \ln}{\partial \sigma_u^2} f(u|\sigma_u^2) + \frac{\partial \ln}{\partial \sigma_u^2} f(\sigma_u^2)\right] \tag{55}$$

şeklinde yazılabilir.

$$\ln f(u|\sigma_u^2) = -\frac{1}{2}\ln|G| - \frac{1}{2}u'G^{-1}u + c$$

olduğundan,

$$\frac{\partial \ln}{\partial \sigma_u^2}\left[f\left(u|\sigma_u^2\right)\right]=-\frac{1}{2}\mathrm{tr}\left(G^{-1}\frac{\partial G}{\partial \sigma_u^2}\right)+\frac{1}{2}u'G^{-1}\left(\frac{\partial G}{\partial \sigma_u^2}\right)G^{-1}u \tag{56}$$

olur.

Eşitlik (55)'i elde etmek için (56)'nın $u|Y,\sigma_u^2$ koşullu dağılımına göre beklenen değerini bulmak gerekir. Bu dağılımın şekli gerçekte bilinmez, ancak bazı araştırıcılar bu dağılımın, $\hat{u}$ ortalamalı, C_{uu} varyans- kovaryans matrisine sahip normal dağılım olduğunu öne sürmüşlerdir (Harville and Mee 1984, Stiratelli et al. 1984). Burada $\hat{u}$, u'nun (49) nolu eşitlikten elde edilen tahmini ve C_{uu} aynı eşitlikteki katsayı matrisinin inversinin u'ya ait kısmıdır. Bu yaklaşım kullanılarak,

$$E_{u|Y,\sigma_u^2}\left[u'G^{-1}\left\{\frac{\partial G}{\partial \sigma_u^2}\right\}G^{-1}u\right]\cong\hat{u}'G^{-1}\left\{\frac{\partial G}{\partial \sigma_u^2}\right\}G^{-1}\hat{u}+\mathrm{tr}\left[G^{-1}\left\{\frac{\partial G}{\partial \sigma_u^2}\right\}G^{-1}C_{uu}\right] \tag{57}$$

elde edilir. O zaman $s(\sigma_u^2 | Y)$ aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$s\left(\sigma_u^2|Y\right)\cong\frac{1}{2}\hat{u}'G^{-1}\left\{\frac{\partial G}{\partial \sigma_u^2}\right\}G^{-1}\hat{u}-\frac{1}{2}\mathrm{tr}\left[G^{-1}\left\{\frac{\partial G}{\partial \sigma_u^2}\right\}G^{-1}\left(G-C_{uu}\right)\right]+\frac{\partial \ln f\left(\sigma_u^2\right)}{\partial \sigma_u^2} \tag{58}$$

Bu eşitlik sıfıra eşitlenip σ_u^2 için çözüldüğü zaman σ_u^2'nun marjinal son dağılımının tepe değeri σ_u^2 unsurunun tahminini verir. Elde edilen tahmin ediciler $f(\sigma_u^2)$'nun şekline bağlıdır. Eğer bu dağılım düz ise (58)'in üçüncü terimi sıfır kabul edilebilir. Böylece $G = A\sigma_u^2$ alınıp eşitlik sıfıra eşitlenerek, σ_u^2 için iterativ bir çözüm elde edilir.

$$\hat{\sigma}_u^{2[i]}=\hat{u}'A^{-1}\hat{u}\Big/\left[q-\mathrm{tr}\left(A^{-1}C_{uu}\right)^{[i-1]}\sigma_u^{-2[i-1]}\right] \tag{59}$$

Burada q, u 'nun eleman sayısıdır.

Bunun yanında bazı uygulamalarda σ_u^2 hakkında ön bilgi mevcut olabilir. Yapılan bazı çalışmalarda σ_u^2 için invers χ^2 dağılımı ön dağılım olarak alınmıştır (Gianola and Fernando 1986, Höeschele et al. 1986). Bu durumda, σ_u^2'nun ön yoğunluk fonksiyonu;

$$f(\sigma_u^2) \cong \left(\frac{1}{\sigma_u^2}\right)^{1+\frac{q^*}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2}q^* \frac{\sigma_u^{2*}}{\sigma_u^2}\right) \tag{60}$$

olur. Burada σ_u^{2*}, σ_u^2'nun bir tahminidir. q^* ise serbestlik derecesidir. O zaman σ_u^2 için diğer bir çözüm aşağıdaki gibidir.

$$\hat{\hat{\sigma}}_u^{2[i]} = \left[q\hat{\sigma}_u^{2[i-1]} + q^* \sigma_u^{2*}\right] / \left(q + q^* + 2\right)$$
$$\hat{\sigma}_u^2 = \hat{u}'A^{-1}\hat{u} / \left[q + 2 - tr\left(A^{-1}C_{uu}\right)^{[i-1]} \sigma_u^{-2[i-1]}\right] \tag{61}$$

Dikkat edilecek olursa, q^* =0 ise, yani ön bilgi elde edilememiş ise (61) aşağıdaki gibidir.

$$\tilde{\sigma}_u^{2[i]} = \hat{u}'A^{-1}\hat{u} / \left[q + 2 - tr\left(A^{-1}C_{uu}\right)^{[i-1]} \sigma_u^{-2[i-1]}\right] \tag{62}$$

3.2.4.2. Ortak Son Yoğunluk Kullanılarak Varyans Unsurlarının Tahmini

Burada söz konusu olan, ortak son yoğunluğun tepe değerinin σ_u^2 unsuru kullanılarak varyans unsuru tahminidir. Bunun için,

$$\frac{\partial \ln}{\partial \sigma_u^2}\left[f\left(\theta, \sigma_u^2 | Y\right)\right] = \frac{\partial \ln}{\partial \sigma_u^2}\left[f\left(u|\sigma_u^2\right)\right] + \frac{\partial \ln}{\partial \sigma_u^2}\left[f\left(\sigma_u^2\right)\right] \tag{63}$$

eşitliğinde σ_u^2 için türev alınırsa,

$$\frac{\partial \ln}{\partial \sigma_u^2} f\left(\theta, \sigma_u^2 | Y\right) = -\frac{q}{2\sigma_u^2} + \frac{u'A^{-1}u}{2\sigma_u^4} + \frac{\partial \ln}{\partial \sigma_u^2} f\left(\sigma_u^2\right) \tag{64}$$

elde edilir. σ_u^2 için düz bir ön dağılım kullanıldığı takdirde, (64) nolu eşitlik sıfıra eşitlenerek,

$$\hat{\sigma}_u^{2[i]} = \left[\hat{u}'A^{-1}\hat{u}\right]^{[i-1]}/q \quad (65)$$

bulunur. Çok değişkenli duruma genelleştirilecek olursa;

$$d_{ij} = \hat{u}_i'A^{-1}\hat{u}_j$$

olmak üzere,

$$\hat{\Sigma}_u^{[i]} = q^{-1}D^{[i]} \quad (66)$$

olur. Bunun yanında, σ_u^2 için (60)'daki ön dağılım kullanılırsa,

$$\hat{\sigma}_u^2 = \left\{[\hat{u}'A^{-1}\hat{u}]^{[i]} + q^*\sigma_u^{2*}\right\}/\left(q+q^*+2\right) \quad (67)$$

bulunur. Çok değişkenli durumda ise Σ_u için ön dağılım olarak invers Wishart dağılımı kullanılır.

3.2.5. Kalıtım Derecesinin Tahmini

Daha öncede belirtildiği gibi bu çalışmada dar anlamlı kalıtım derecesi tahmin edilmeye çalışılmıştır. Bunun için ise önceki bölümde elde edilen varyans unsurları kullanılmıştır. Burada kullanılan model, eşikli modelde veriler standartlaştırıldığı için bu modele ait hata varyansı 1 olarak alınmıştır. Buradan yola çıkılarak eklemeli gen etkilerinin varyans unsuru σ_u^2 tahmin edilmiştir. Dolayısıyla bu model için kalıtım derecesi;

$$h^2 = \frac{\sigma_u^2}{1+\sigma_u^2}$$

ile ifade edilir (Gianola and Fernando 1986).

Eğer σ_u^2 için düz ön dağılım kullanılarak, ortak son yoğunluktan elde edilen tahmin kullanılacak olursa kalıtım derecesi için ilk tahmin aşağıdaki gibidir.

$$\hat{h}^2 = \frac{\hat{u}A^{-1}\hat{u}/q}{1+\hat{u}A^{-1}\hat{u}/q} \qquad (68)$$

σ_u^2 için ön yoğunluk olarak invers-χ^2 fonksiyonu kullanılarak, ortak son yoğunluktan elde edilen tahmin kullanıldığı zaman ise kalıtım derecesi,

$$\hat{\hat{h}}^2 = \frac{\left\{\hat{u}A^{-1}\hat{u} + q^*\sigma_u^{2*}\right\}/\left(q+q^*+2\right)}{1+\left\{\hat{u}A^{-1}\hat{u} + q^*\sigma_u^{2*}\right\}/\left(q+q^*+2\right)} \qquad (69)$$

şeklindedir.

4. SONUÇLAR ve TARTIŞMA

Bu çalışmada, Alman Yapağı Et Merinosu Irkından koyunlarla 5 yıl boyunca yürütülen bir araştırmada, tamamen tesadüfi olarak seçilen 8 babanın yavru verimleri, doğan kuzunun tek ve ikiz oluşuna göre Çizelge 4.1'deki iki yönlü tabloda özetlenmiştir.

Kullanılan verilerde ana yaşları hep onar günlük aralarla kaydedildiğinden, 460, 470, 480, 490, 500, 510, 520, 530, 540, 550 gün olmak üzere on gruptan oluşmaktadır. Doğum sırası ise 1 = 1. doğum ve 2 = 2. doğum olmak üzere 2 gruptan oluşmaktadır. Yavru verimi için kullanılan model karışık (mixed) model olup aşağıdaki gibidir.

$$l_{ijmnq} = \tau + y_i + s_j + a_m + u_n + e_{ijmnq}$$

Burada τ, modele ait ortalama y_i i. yılın etkisi (i=1,...,5), s_j j. doğum sırasının etkisi (j=1,2), a_m m. ana yaşının etkisi (m=1,...,10) ve u_n n. babanın etkisi (n=1,...,8) e_{ijmnq} hata miktarıdır. Sabit etkilere ait parametre vektörü;

$\beta' = [y_2-y_1,\ y_3-y_1,\ y_4-y_1,\ y_5-y_1,\ s_2-s_1,\ a_2-a_1,\ a_3-a_1,\ a_4-a_1,\ a_5-a_1,\ a_6-a_1,\ a_7-a_1,\ a_8-a_1,$
$a_9-a_1,\ a_{10}-a_1]$

şeklindedir. Eşikli karakterin iki kategorisi olduğundan, yalnızca bir tane eşik değişkeni vardır.

Rastgele etkilerin parametre vektörü ise aşağıdaki gibidir.

$$u' = [u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, u_7, u_8]$$

Çizelge 4.1. Yavru veriminin yıl, baba no, ana yaşı ve doğum sırasına göre dağılımı

Yıl	Baba no	Ana yaşı	Doğum sırası	Yavru verimi		Yıl	Baba no	Ana yaşı	Doğum sırası	Yavru verimi		Yıl	Baba no	Ana Yaşı	Doğum sırası	Yavru verimi	
				Tek	İkiz					Tek	İkiz					Tek	İkiz
1	1	540	1	1	0	1	6	510	1	4	0	1	8	510	1	4	0
1	1	540	2	1	0	1	6	510	2	5	0	1	8	510	2	4	0
1	3	460	1	1	0	1	6	510	2	0	2	1	8	510	2	0	4
1	3	490	1	4	0	1	6	520	1	2	0	1	8	520	1	0	2
1	3	490	2	1	0	1	6	520	2	1	0	2	2	510	1	0	2
1	3	490	2	0	2	1	6	520	1	0	2	2	2	510	2	0	2
1	3	500	1	3	0	1	6	520	2	0	2	2	3	470	2	2	0
1	3	500	2	3	0	1	6	530	1	1	0	2	3	470	1	0	4
1	3	510	2	1	0	1	6	530	1	0	2	2	3	490	2	1	0
1	3	520	2	1	0	1	6	530	2	0	2	2	3	500	1	1	0
1	3	530	1	1	0	1	7	480	1	0	2	2	3	500	2	1	0
1	4	500	2	0	2	1	7	490	2	0	2	2	3	510	1	1	0
1	4	510	1	1	0	1	7	500	1	3	0	2	3	510	2	0	4
1	4	520	1	2	0	1	7	500	2	3	0	2	3	520	1	5	0
1	4	520	2	1	0	1	7	500	2	0	2	2	3	520	2	3	0
1	4	530	1	1	0	1	7	520	1	1	0	2	3	520	2	0	4
1	4	530	2	1	0	1	7	520	2	1	0	2	3	530	2	1	0
1	4	530	2	0	2	1	7	530	2	1	0	2	4	500	1	1	0
1	6	480	2	0	2	1	8	460	1	2	0	2	4	500	2	0	2
1	6	490	1	2	0	1	8	460	2	1	0	2	4	510	1	3	0
1	6	490	2	0	2	1	8	460	2	0	2	2	4	510	2	3	0
1	6	500	1	5	0	1	8	500	1	5	0	2	4	510	1	0	2
1	6	500	2	4	0	1	8	500	2	3	0	2	4	510	2	0	2
1	6	500	1	0	2	1	8	500	1	0	2	2	4	520	1	1	0
1	6	500	2	0	4	1	8	500	2	0	6	2	4	520	2	0	2

Çizelge 4.1.(Devam) Yavru veriminin yıl, baba no, ana yaşı ve doğum sırasına göre dağılımı

Yıl	Baba no	Ana yaşı	Doğum sırası	Yavru verimi Tek	Yavru verimi İkiz	Yıl	Baba no	Ana yaşı	Doğum sırası	Yavru verimi Tek	Yavru verimi İkiz	Yıl	Baba no	Ana Yaşı	Doğum sırası	Yavru verimi Tek	Yavru verimi İkiz
2	6	490	2	2	0	3	3	540	2	3	0	3	6	520	2	1	0
2	6	490	1	0	2	3	3	540	1	0	4	3	6	540	1	0	2
2	6	510	1	1	0	3	3	540	2	0	4	3	6	540	2	0	2
2	6	510	2	2	0	3	4	480	1	1	0	4	1	470	1	1	0
2	6	520	1	3	0	3	4	480	2	1	0	4	1	470	2	0	2
2	6	520	1	0	2	3	4	490	1	2	0	4	1	490	1	0	2
2	6	520	2	0	4	3	4	490	2	2	0	4	1	490	2	0	2
2	7	500	1	0	2	3	4	500	1	1	0	4	1	500	1	4	0
2	7	500	2	0	2	3	4	500	2	1	0	4	1	500	2	3	0
2	7	510	1	2	0	3	4	510	1	2	0	4	1	500	1	0	2
2	7	510	2	2	0	3	4	510	2	2	0	4	1	500	2	0	2
2	7	520	1	1	0	3	4	510	1	0	2	4	1	510	1	3	0
2	7	520	2	1	0	3	4	510	2	0	2	4	1	510	2	2	0
3	3	470	1	1	0	3	4	520	1	5	0	4	1	510	2	0	2
3	3	470	2	0	2	3	4	520	2	4	0	4	1	520	1	1	0
3	3	510	1	3	0	3	4	520	1	0	4	4	1	520	2	1	0
3	3	510	2	4	0	3	4	520	2	0	6	4	1	520	1	0	2
3	3	510	1	0	2	3	4	530	1	2	0	4	1	520	2	0	2
3	3	520	1	3	0	3	4	530	2	2	0	4	1	530	1	2	0
3	3	520	2	1	0	3	4	530	1	0	2	4	1	530	2	1	0
3	3	520	2	0	4	3	4	530	2	0	2	4	1	530	1	0	2
3	3	530	1	2	0	3	4	540	2	0	2	4	1	530	2	0	2
3	3	530	2	3	0	3	6	490	1	1	0	4	1	540	1	1	0
3	3	530	1	0	2	3	6	490	2	0	2	4	1	540	2	1	0
3	3	540	1	4	0	3	6	520	1	1	0	4	3	480	2	1	0

Çizelge 4.1.(Devam) Yavru veriminin yıl, baba no, ana yaşı ve doğum sırasına göre dağılımı

Yıl	Baba no	Ana yaşı	Doğum sırası	Yavru verimi Tek	Yavru verimi İkiz	Yıl	Baba no	Ana yaşı	Doğum sırası	Yavru verimi Tek	Yavru verimi İkiz	Yıl	Baba no	Ana Yaşı	Doğum sırası	Yavru verimi Tek	Yavru verimi İkiz
4	3	480	1	0	2	4	5	510	2	0	2	5	3	500	2	1	0
4	3	500	1	1	0	4	5	520	1	2	0	5	3	500	1	0	2
4	3	500	2	1	0	4	5	520	2	0	4	5	3	500	2	0	2
4	3	510	2	0	2	4	5	530	1	1	0	5	3	510	1	2	0
4	3	520	1	5	0	4	5	530	2	1	0	5	3	510	2	0	2
4	3	520	2	2	0	5	1	500	1	3	0	5	3	520	1	1	0
4	3	520	1	0	2	5	1	500	2	3	0	5	3	520	2	1	0
4	3	520	2	0	8	5	1	510	1	3	0	5	3	530	1	1	0
4	3	530	1	2	0	5	1	510	2	2	0	5	3	530	2	0	2
4	3	530	2	1	0	5	1	510	2	0	4	5	3	550	2	0	2
4	4	480	1	1	0	5	1	520	1	1	0	5	4	500	1	1	0
4	4	480	2	1	0	5	1	520	2	1	0	5	4	500	2	1	0
4	4	500	1	0	4	5	1	530	1	4	0	5	4	510	1	2	0
4	4	500	2	0	4	5	1	530	2	5	0	5	4	510	2	3	0
4	4	510	1	1	0	5	1	530	1	0	2	5	4	510	1	0	2
4	4	510	2	1	0	5	1	540	1	1	0	5	4	520	1	1	0
4	4	520	1	2	0	5	2	500	1	4	0	5	4	520	2	3	0
4	4	520	2	3	0	5	2	500	2	3	0	5	4	520	1	0	2
4	4	520	1	0	2	5	2	500	2	0	2	5	4	540	2	1	0
4	4	530	1	1	0	5	2	510	1	5	0						
4	4	530	2	2	0	5	2	510	2	2	0						
4	4	530	1	0	2	5	2	510	2	0	2						
4	4	530	2	0	2	5	2	520	1	1	0						
4	5	510	2	1	0	5	2	520	2	1	0						
4	5	510	1	0	4	5	3	500	1	1	0						

Hesaplamalara başlayabilmek için Bayes teorisinden dolayı her parametre için ön bilgiye ihtiyaç duyulur. Ancak t ve β için ön bilginin şüpheli olduğu varsayılmıştır.

Daha önce yapılmış çalışmalardan koyunlarda yavru verimine ait kalıtım derecesinin ortalama h^2 =.15 olduğu bilinmektedir (Massey and Vogt 1993). Buna göre u için ön bilgi olarak, ilkinde h^2 =.10 alınarak, $\sigma_e^2/\sigma_u^2 =(4-h^2)/h^2=39$ olduğundan, u~N(0,I/39) kullanılmıştır (Gianola and Foulley 1983).

Buradan yola çıkarak, parametre vektörlerinin ve eşik parametresinin iterasyon ile tahmin edilebilmesi için, her bir parametreye ait başlangıç değerler aşağıdaki gibidir (Gianola and Foulley 1983).

$$t^{[0]} = \Phi^{-1}(\sum_{i=1}^{k} n_i/N)$$

$$\hat{\beta}^{[0]} = 0 \text{ ve } \hat{u}^{[0]} = 0$$

Burada n_i, i. kategorideki gözlem sayısı N, toplam gözlem sayısıdır. İterasyon $\Delta'\Delta/26<10^{-12}$ kuralı sağlandığı zaman durdurulmuştur.Ön bilgilerden yararlanarak parametrelere ait son tahminler Misztal'ın bilgisayar programı kullanılarak 8 iterasyon sonucunda Çizelge 4.2.' deki gibi elde edilmiştir. Değerler 9. iterasyondan sonra sabit kaldığı için 10 iterasyonda işlem durdurulmuştur. Prametrelerin son dağılımlarına ait standart hatalar, (49)'daki katsayı matrisinin genelleştirilmiş inversinin alınarak elde edilen matrisin köşegen elemanlarının karekökleridir.

Çizelge 4. 2. Parametre tahminlerine ait iterasyon sonuçları (h^2=0.10)

	İterasyonlar									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
t	.710355049	.778241918	.783328897	.783604053	.783618198	.783618918	.783618955	.783618957	.783618957	
β_1	.304322719	.318715422	.319227821	.319271671	.319273221	.319273310	.319273313	.319273314	.319273314	
β_2	.193643065	.210642521	.211816029	.211857514	.211859645	.211859734	.211859739	.211859739	.211859739	
β_3	.476926501	.501698993	.502634679	.502670743	.502672386	.502672471	.502672475	.502672475	.502672475	
β_4	-.119810830	.143322937	-.142471994	-.142442789	-.142440598	-.142440512	-.142440507	-.142440507	-.142440507	
β_5	.463758716	.495394440	.496269237	.496310512	.496312137	.496312237	.496312242	.496312242	.496312242	
β_6	.679687478	.740298046	.743968318	.744207109	.744218453	.744219071	.744219101	.744219103	.744219103	
β_7	.377802881	.411774204	.415364892	.415608683	.415619478	.415620205	.415620226	.415620229	.415620229	
β_8	.255862658	.285780557	.288690113	.288880063	.288890038	.288890564	.288890591	.288890593	.288890593	
β_9	.149249118	.182191752	.185751319	.185968785	.185980585	.185981186	.185981217	.185981219	.185981219	
β_{10}	.029420098	.052832312	.056293874	.056501012	.056512199	.056512765	.056512794	.056512796	.056512796	
β_{11}	.138247078	.171557636	.175284791	.175506329	.175518302	.175518906	.175518937	.175518938	.175518939	
β_{12}	.108787176	.140310895	.144446055	.144668978	.144681274	.144681880	.144681912	.144681914	.144681914	
β_{13}	.429096545	.471106062	.474734825	.474965436	.474977257	.474977869	.474977900	.474977902	.474977902	
β_{14}	1.045299352	1.167766625	1.176568337	1.177199909	1.177240283	1.177242930	1.177243106	1.177243118	1.177243118	
u_1	-.132857859	-.137757489	-.138050834	-.138055808	-.138056315	-.138056345	-.138056347	-.138056348	-.138056348	
u_2	.007431666	.005606093	.004811126	.004800818	.004800314	.004800309	.004800308	.004800308	.004800308	
u_3	-.093372926	-.098339103	-.098426946	-.098440391	-.098440897	-.098440919	-.098440920	-.098440920	-.098440920	
u_4	-.013875724	-.012451408	-.012209325	-.012211465	-.012211482	-.012211487	-.012211488	-.012211487	-.012211488	
u_5	.063006361	.064574765	.064711433	.064714439	.064714601	.064714607	.064714608	.064714608	.064714608	
u_6	.099958333	.104690656	.105052710	.1050630875	.105063671	.105063691	.105063693	.105063693	.105063693	
u_7	-.021809611	-.021410031	-.021274381	-.021271599	-.021271499	-.021271491	-.021271491	-.021271491	-.021271491	
u_8	.0915519759	.095086517	.095386218	.095400918	.095404604	.095401636	.095401638	.095401638	.095404638	

O halde, parametre tahminlerinin son dağılımlarına ait ortalama ve standart hatalar aşağıdaki gibi yazılabilir.

$t = 0.783618957 \pm 0.557290$

$y_2 - y_1 = 0.319273314 \pm 0.207610$

$y_3 - y_1 = 0.211859739 \pm 0.210646$

$y_4 - y_1 = 0.502672475 \pm 0.196349$

$y_5 - y_1 = -0.142440507 \pm 0.215965$

$s_2 - s_1 = 0.496312242 \pm 0.118532$

$a_2 - a_1 = 0.744219103 \pm 0.686472$

$a_3 - a_1 = 0.415620229 \pm 0.681387$

$a_4 - a_1 = 0.288890593 \pm 0.607297$

$a_5 - a_1 = 0.185981219 \pm 0.567431$

$a_6 - a_1 = 0.056512796 \pm 0.571765$

$a_7 - a_1 = 0.175518939 \pm 0.576324$

$a_8 - a_1 = 0.144681914 \pm 0.587190$

$a_9 - a_1 = 0.474977902 \pm 0.627985$

$a_{10} - a_1 = 1.177243118 \pm 0.960410$

$u_1 = -0.138056348 \pm 0.127961$

$u_2 = 0.004800308 \pm 0.143270$

$u_3 = -0.098440920 \pm 0.112789$

$u_4 = -0.012211488 \pm 0.115817$

$u_5 = 0.064714608 \pm 0.146954$

$u_6 = 0.105063693 \pm 0.125388$

$u_7 = -0.021271491 \pm 0.140046$

$u_8 = 0.095401638 \pm 0.139788$

İkinci olarak, $h^2 = .20$ alınarak **u** için ön bilgi olarak $u \sim N(0,I/19)$ kullanılmıştır. t ve β için ön bilgi önceki gibidir. Parametre tahminlerini bulmak için tekrar iterasyon uygulanmış ve sonuçlar Çizelge 4.3.'deki gibi elde edilmiştir. Burada da değerler 9. iterasyondan sonra sabit kaldığı için işlemler 10. iterasyonda durdurulmuştur.

Çizelge 4. 3. Parametre tahminlerine ait iterasyon sonuçları (h^2=0.20)

	İterasyonlar								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
t	.753847047	.829947983	.835888957	.836223618	.836241769	.836242732	.836242784	.836242787	.836242787
β_1	.335741951	.353586990	.354382891	.354444883	.354447331	.354447469	.354447475	.354447475	.354447475
β_2	.230834001	.252575146	.254202966	.254270968	.254274518	.254274683	.254274692	.254274692	.254274692
β_3	.529359601	.560391853	.561760632	.561817235	.561820158	.561820308	.561820315	.561820316	.561820316
β_4	-.062593740	-.080599991	-.079133386	-.079090257	-.079086325	-.079086181	-.079086171	-.079086170	-.079086170
β_5	.463556793	.496576065	.497581957	.497633547	.497635737	.497635872	.497635879	.497635879	.497635879
β_6	.726234685	.793655701	.797944632	.798232045	.798246643	.798247469	.798247512	.798247515	.798247515
β_7	.400480029	.439429401	.443531997	.443818274	.443832011	.443832923	.443832956	.443832959	.443832959
β_8	.284412407	.318201253	.321426516	.321648295	.321660545	.321661228	.321661265	.321661266	.321661267
β_9	.171410418	.208568078	.212563451	.212818426	.212832933	.212833713	.212833755	.212833757	.212833758
β_{10}	.045351689	.072742199	.076655100	.076897895	.076911616	.076912346	.076912386	.076912388	.076912389
β_{11}	.156857683	.194128925	.198222438	.198480433	.198494949	.198495726	.198495768	.198495771	.198495771
β_{12}	.141693399	.177336703	.181870236	.182134293	.182149354	.182150145	.182150188	.182150191	.182150191
β_{13}	.461584329	.509694604	.513851915	.514123563	.514138251	.514139052	.514139094	.514139096	.514139097
β_{14}	1.075511676	1.206189028	1.215783185	1.216515138	1.216562633	1.216565913	1.216566136	1.216566151	1.216566153
u_1	-.198524092	-.208875628	-.209339549	-.209348177	-.209349175	-.209349231	-.209349235	-.209349236	-.209349236
u_2	-.000630318	-.002679610	-.004009110	-.004027578	-.004028904	-.004028917	-.004028918	-.004028918	-.004028919
u_3	-.126244012	-.134700545	-.134931224	-.134958633	-.134959628	-.134959687	-.134959689	-.134959689	-.134959689
u_4	-.030830171	-.030252072	-.030027141	-.030034929	-.030035061	-.030035082	-.030035082	-.030035082	-.030035082
u_5	.097746027	.100392815	.100588788	.100591122	.100591301	.100591305	.100591305	.100591305	.100591305
u_6	.138067849	.146554422	.147219712	.147240696	.147241957	.147242005	.147242008	.147242008	.147242008
u_7	-.029990810	-.029083733	-.028769803	-.028761527	-.028761108	-.028761086	-.028761086	-.028761086	-.028761086
u_8	.150405528	.158644351	.159268327	.159299027	.159300618	.159300694	.159300697	.159300698	.159300698

Buradan, parametrelerin son dağılımlarına ait ortalamalar ve standart hatalar aşağıdaki gibi elde edilmiştir.

$t = 0.836242787 \pm 0.568507$

$y_2 - y_1 = 0.354447475 \pm 0.211285$

$y_3 - y_1 = 0.254274692 \pm 0.217356$

$y_4 - y_1 = 0.561820316 \pm 0.207351$

$y_5 - y_1 = -0.079086170 \pm 0.227116$

$s_2 - s_1 = 0.497635879 \pm 0.118664$

$a_2 - a_1 = 0.798247515 \pm 0.691780$

$a_3 - a_1 = 0.443832959 \pm 0.688398$

$a_4 - a_1 = 0.321661267 \pm 0.614837$

$a_5 - a_1 = 0.212833758 \pm 0.572690$

$a_6 - a_1 = 0.076912389 \pm 0.576788$

$a_7 - a_1 = 0.198495771 \pm 0.582472$

$a_8 - a_1 = 0.182150191 \pm 0.593648$

$a_9 - a_1 = 0.514139097 \pm 0.634377$

$a_{10} - a_1 = 1.216566153 \pm 0.965755$

$u_1 = -0.209349236 \pm 0.160511$

$u_2 = -0.004028918 \pm 0.188005$

$u_3 = -0.134959689 \pm 0.138201$

$u_4 = -0.030035083 \pm 0.142174$

$u_5 = 0.100591305 \pm 0.196292$

$u_6 = 0.147242008 \pm 0.156333$

$u_7 = -0.028761086 \pm 0.181841$

$u_8 = 0.159300698 \pm 0.181303$

Parametre tahminleri yapıldıktan sonra eklemeli gen etkilerine ait varyans unsuru, $u \sim N(0, I/39)$ için, $A = I_{8x8}$ olduğundan:

$$\sigma_u^2 = \frac{\hat{u}' A^{-1} \hat{u}}{q} = .000839$$

olarak bulunur. Buradan yavru verimi için kalıtım derecesi:

$$h^2 = \frac{0.000839}{1+0.000839} = .0067$$

bulunur.

u~N(0,I/19) için rasgele etkilere ait varyans unsuru:

$$\sigma_u^2 = \frac{\hat{u}'A^{-1}\hat{u}}{q} = .015125$$

yavru verimi için kalıtım derecesi ise aşağıdaki gibi elde edilir.

$$h^2 = \frac{0.015125}{1+0.015125} = .014899$$

Eşikli karakterler için kalıtım derecesi, daha öncede belirtildiği üzere transformasyon teknikleri yardımı ile analiz edildikten sonra veya χ^2'den yararlanarak tahmin edilebilir. Değerlere karekök transformasyonu uygulandıktan sonra, SAS paket programında VARCOMP yöntemi kullanılarak elde edilen analiz sonuçları Çizelge 4.4.'deki gibi elde edilmiştir.

Çizelge 4.4. Karekök transformasyonu yapıldıktan sonra bulunan varyans analizi sonuçları

V. K.	S. D.	K. T.	K. O.	F	E(K. O.)
Yıllar	4	.42305	.10576	3.56*	$\sigma^2_e + 13.481\sigma^2_u + Q_y$
Doğum Sıraları	1	.52046	.52046	17.53*	$\sigma^2_e + 0.0325\sigma^2_u + Q_s$
Ana Yaşları	9	.17291	.01921	0.65	$\sigma^2_e + 2.1825\sigma^2_u + Q_a$
Babalar	7	.27905	.03986	1.34	$\sigma^2_e + 45.859\sigma^2_u$
Hata	460	13.65731	.02969		σ^2_e
Genel	481	15.05277			

* P<0.01

Buradan, σ^2_e = .02960 olduğundan babalara ait varyans unsuru,

$$\sigma_u^2 = \frac{.03986-.02969}{48.859} = 0.00022$$

olarak bulunur.

Buradan kalıtım derecesi;

$$h^2 = \frac{.00022}{.02969 + .00022} = 0.00735$$

bulunur.

Bunun yanında kalıtım derecesi χ^2' den yararlanarak aşağıdaki gibi de hesaplanabilir. Öncelikle baba familyalarına göre Çizelge 4.5.'deki gibi bir iki yönlü tablo oluşturulur.

Çizelge 4. 5. Yavru verimi ile baba familyaları arasındaki iki yönlü tablo

Familyalar	Tek Doğum	İkiz Doğum	Toplam
1. Baba	45	26	71
2. Baba	16	8	24
3. Baba	74	56	130
4. Baba	63	50	113
5. Baba	5	10	15
6. Baba	35	34	69
7. Baba	15	10	25
8. Baba	19	16	35

8x2'lik bağımlılık tablosundan hesaplanan χ^2 =6.8167 değeri kullanılarak kalıtım derecesi;

$$h^2 = \frac{V(G)}{P(1-P)} = \frac{\chi^2 - (n-1)}{(n-1)vr^G} = \frac{6.8167 - 7}{7.55.(1/4)} = -0.0019$$

olarak bulunur. Familyalar baba-bir üvey kardeşlerden oluştuğundan r^G =1/4'dir.

Araştırmada baba etkilerine ait ön bilgi ilkinde, u~N(0,I/39) alınarak babalar arası varyans unsuru σ^2_u = .000839, kalıtım derecesi h^2 = .0067, ikincisinde ise u~N(0,I/19) alınarak σ^2_u = .015125 ve h^2 = .014899 bulunmuştur. İki farklı prior bilgi kullanılarak elde edilen tahminler arasında azda olsa bir faklılık söz konusudur. Bu farklılığın sebebi ise, ilkinde bireylerin alındığı populasyonda yavru verimine ait kalıtım derecesinin h^2 = .10, ikincisinde ise h^2 = .20 olduğu varsayımı ile baba etkileri için ön dağılım belirlenmiş olmasıdır. Bunun yanı sıra, kullanılan yöntemi karşılaştırmak amacıyla verilere transformasyon uygulanarak varyans unsuru ve kalıtım derecesi hesaplanmıştır. Bu yöntem ile kalıtım derecesi $h^2 = 0.00735$ bulunmuştur. Elde edilen değerin Bayes metodu kullanılarak bulunan kalıtım derecesinden düşük olması, Bayes'in rasgele etkilere ait parametre tahminlerini yaparken REML gibi olabilirlik fonksiyonunu faktörlerine ayırmasından ileri gelmektedir.

χ^2' den yararlanarak kalıtım derecesi hesaplandığı zaman, $h^2 = -.0019$ bulunmuştur. Burada kalıtım derecesinin negatif çıkmasının nedeni ise Çizelge 4.5.'deki iki yönlü tablodan hesaplanan χ^2 değerinin serbestlik derecesinden küçük olmasıdır (6.8167<7). Halbuki kalıtım derecesi daima 0 ile 1 arasında pozitif bir değer olduğundan ($0 \leq h^2 \leq 1$), elde edilen sonuç kullanılan yöntemin uygun olmadığını göstermektedir.

Tüm sonuçlar dikkate alındığı zaman Bayes metodunun, parametreler için ön bilgi kullanması ve parametre vektörünün olabilirlik fonksiyonunu sabit ve rasgele etkilere göre faktörize etmesi, daha doğru tahminler elde edilmesini sağlamaktadır. Dolayısıyla Bayes metodu, her tip karakterin analizi için uygun ve güvenilir sonuçlar vermektedir.

Literatürde Bayes metodunun kesikli, sürekli ve yaklaşık sürekli verilerle genetik parametrelerin, varyans unsurlarının ve kalıtım derecesinin tahmini için uygulandığı bir çok çalışma mevcuttur. Bayes metodu günümüze kadar daha çok boğa modellerine ait parametrelerin tahmininde kullanılmıştır. Gianola and Foulley (1983), sığırlarda doğum zorluğu için geliştirdikleri eşikli modelin parametrelerini tahmin etmek ve bu tahminlerden yararlanarak boğa seçimi yapmak için Bayes metodunu kullanmışlardır. Bu çalışmada, rasgele etkilere için ön dağılım belirlerken tamamen araştırıcının önceki deneyimlerinden yararlanırken, sabit etkilere ait ön bilginin şüpheli olduğu varsayılmıştır. Araştırmadan elde edilen sonuçlar baba seçiminde kullanılmış ve Bayes metodu oldukça uygun sonuçlar vermiştir.

Höeschele et al. (1987), varyans unsurları için ön bilgi varsa, bu bilgi kullanılarak elde edilen tahminlerin hata kareler ortalamasının (MSE) çok küçük olacağını fakat sapmanın artabileceğini belirtmiştir. Bunun yanında ön bilgi elde edilemediği zaman, varyans unsurları için düz ön dağılım ile REML tipi tahmin edicilerin kullanılabileceğini ifade etmiştir.

Toro and Prunonasa (1984), kalıtım dercesinin Bayes tahminini elde etmek için $h^2 \sim U(0,1)$ şeklinde ön dağılım kullanmışlardır. Buradan yola çıkılarak elde edilen tahminlerin, özellikle örnek genişliği küçük olduğu zaman, en küçük kareler (LS) ve en çok olabilirlik (ML) metotları ile bulunan tahminlerden daha iyi olduğunu göstermişlerdir.

Höeschele and Gianola (1989), Bayes metodunun konum ve dağılım parametreleri için oldukça iyi bir örnekleme performansına sahip olduğunu göstermişlerdir. Ayrıca son dağılımın, seleksiyondan kaynaklanan sapmadan etkilenmediğini, seleksiyon şekli ne olursa olsun Bayes metodu ile analiz yapılabileceğini belirtmişlerdir. Bunun yanında veri setinin büyüklüğüne bağlı olarak, kategori sayısı ikiden fazla olan bağımlı değişkenler için kullanılan metotlar arasında farklılık olabileceğini ifade etmişlerdir.

Araştırmada kullanılan bağımlı değişken yavru verimi iki kategoriye sahiptir. Bu verilere uygulanan Bayes metodunun hesaplama süresi bakımından oldukça iyi bir performans gösterdiği görülmüştür. Ancak bağımlı değişkenin kategorilerinin sayısı arttıkça ve üzerinde çalışılan veri seti büyüdükçe aynı performansı göstermeyebilir (Höeschele and Gianola 1989). Bu çalışmada kullanılan bilgisayar programında da kategori sayısı 5 ile sınırlıdır. Fakat şu ana kadar bu tip verilerin analizi için Bayes metodundan daha iyi ve güvenilir bir metot mevcut değildir.

KAYNAKLAR

DÜZGÜNEŞ, O. 1963. Hayvan Islahında Kalıtım Derecesi. Ata. Üniv. Ziraat Fak. Yayn. No: 30

DÜZGÜNEŞ, O., ELİÇİN, A. ve AKMAN, N. 1996. Hayvan Islahı. Ank. Üniv. Ziraat Fak. Yayn. No: 1437.

FALCONER, D. S. 1981. Introduction to Quantitative Genetics. Longman, New York.

FIRAT, M. Z. ve BEK, Y. 1997. Hayvan ıslahı uygulamalarında kullanılan invers-χ^2 ve invers Wishart dağılışlarının matematik esasları. Turkish J. of Veterinary and Animal Sciences, (Yayında).

FIRAT, M. Z. 1997. Hayvan ıslahında negatif varyans unsuru tahmini ve tahmin yöntemlerinin incelenmesi. Çukurova Üniversitesi Ziraat Fakültesi Dergisi, 12, s.169-176.

FIRAT, M. Z. ve BEK, Y. 1997. Varyans unsurlarının tahmini için maximum olabilirlik metodlarının karşılaştırmalı olarak incelenmesi. Çukurova Üniversitesi Ziraat Fakültesi Dergisi, 12, s.1-8.

FOULLEY, J. L. and GIANOLA, D. 1984. Estimation of genetic merit from bivariate "all or none" response. Genet. Sel. Evol., 16 (3), p.285-306.

FOULLEY, J. L., Im, S., GIANOLA, D., and HOESCHELE, I. 1987. Emprical Bayes estimation of parameters for n polygenic binary traits. Genet. Sel. Evol. 19, p.197-224

GIANOLA, D. 1982. Theory and analysis of threshold characters. Journal of Animal Science, 54, p.1079-1096.

GIANOLA, D. and FOULLEY, J. I., 1983. Sire evoluation for ordered categorical data with a threshold model. Genet. Sel. Evol., p.201-224.

GIANOLA, D. and FERNANDO, R. L. 1986. Bayesian methods in animal breeding theory. Journal of Animal Science, 63, p.217-244.

GIANOLA, D., FOULLEY, J. I., and FERNANDO, R. L. 1986. Prediction of breeding values when variances are not known. 3rd World Congress on Genetics applied to Livestock Pruduction, Lincoln, Nebraska, USA, p.356-370.

HARVILLE, D. A. 1974. Bayesian inference for variance components using only error contrasts. Biometrika 61, p.383-385.

HARVILLE, D. A. 1977. Maximum likelihood approaches to variance component estimation and to related problems. J. American Statist. Assoc. 72, p.320-338.

HARVILLE, D. A. and MEE, R. W. 1984. A mixed model procedure for analyzing ordered categorical data. Biometrics 40, p.393-408.

HENDERSON, C. R. 1953. Estimation of variance and covariance components. Biometrics, 9, p.226-252.

HENDERSON, C. R. 1986. Recent developments in variance and covariance estimation. Journal of Animal Science, 63, p.208-216.

HOESCHELE, I., GIANOLA, D., and FOULLEY, J. L. 1986. Estimation of variance components with quasi-continuous data using Bayesian methods. J. of Anim. Breed. and Genet., 104, p.334-349.

HOESCHELE, I. and GIANOLA, D. 1989. Bayesian versus maximum quasi-likelihood methods for sire evoluation with categorical data. J. Dairy Sci., 72:6, p.1569-1577.

LINDLEY, D. V. and SMITH, A. F. M. 1972. Bayes estimates for the linear model. J. Roy. Statist. Soc. Ser. B. 34:1.

MASSEY, J. W. and VOGT, D. W. 1993. Heritability and its use in animal breeding. Agricultural Publication GO2910.

MISZTAL, I. and SCHAEFFER, L. R. 1986. Nonlinear model for describing convergence rate of iterative methods of variance component estimation. J. Dairy Science 69, p.2209-2213.

MISZTAL, I., GIANOLA, D., and FOULLEY, J. L. 1989. Computing aspects of a nonlinear method of sire evoluation for categorical data. J. Dairy Sci. 72, p.1557-1568.

PATTERSON, H. D. and THOMPSON, R. 1971. Recovery of interblock information when block sizes are unequal. Biometrika 58:545

SMITH, S. P. and ALLAIRE, F. R. 1985. Efficient selection rules to increase non-linear merit: Application in mate selection. Genet. Sel. Evol. 17:293.

STIRATELLI, R., LAIRD, N., and WARE, J. H. 1984. Random effects models for serial observations with binary response. Biometrics 40, p.961-971.

TORO, M. A. and PRUNONOSA, J. V. 1984. The use of prior information in the estimation of heritability by parent-offspring regression. Genet. Sel. Evol. 16, p.177-184.

ÖZGEÇMİŞ

1974 yılında Rize'de doğdu. İlk ve orta öğrenimini Bitlis'te, lise öğrenimini Ankara'da tamamladı. 1990 yılında girdiği Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi İstatistik Bölümü'nden 1994 yılında İstatistikçi olarak mezun oldu. 1996 yılında Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Zootekni Anabilim Dalı'nda Yüksek Lisans Öğrenimine başladı.

1996 yılından beri aynı Anabilim Dalı'nda Araştırma Görevlisi olarak görev yapmaktadır.