LORENTZ MANİFOLDLARI ÜZERİNDE
DİFERENSİYELLENEBİLİR YAPILARA DAİR

Ömer TARAKÇI

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
1993

ANKARA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

LORENTZ MANİFOLDLARI ÜZERİNDE DİFERENSİYELLENEBİLİR YAPILARA DAİR

Ömer TARAKCI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Bu tez 28.12.9./1993 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından 90.(...Doksan....) not takdir edilerek Oybirliği/~~Oyçokluğu~~ ile kabul edilmiştir.

Prof.Dr. H.Hilmi HACISALİHOĞLU (Danışman)	Prof.Dr. Rüstem KAYA	Yard.Doç.Dr. Yusuf YAYLI

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

LORENTZ MANİFOLDLARI ÜZERİNDE DİFERENSİYELLENEBİLİR YAPILARA DAİR

Ömer TARAKCI

Ankara Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. H. Hilmi HACISALİHOĞLU
1993, Sayfa: 49
Jüri : Prof. Dr. H. Hilmi HACISALİHOĞLU
Prof. Dr. Rüstem KAYA
Yrd. Doç. Dr. Yusuf YAYLI

Bu tezdeki amaç, R_v^n yarı-Öklid uzayı olmak üzere, R_v^n den R_v^n ye lineer izometrilerin grubu olan $O_v(n)$ yarı-ortogonal grubu üzerindeki sol invaryant 1-formlar için yapı denklemlerinin hesaplanmasıdır.

Bu tez üç bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde, skalar çarpmalı uzaylardan bahsedildi ve R_v^n yarı-Öklid uzayı tanıtılarak skalar çarpmalı uzaylar arasındaki lineer izometriler verildi.

İkinci bölüm Lie grupları teorisine ayrıldı ve GL(n,R) genel lineer grubu, O(n) ortogonal grubu ve $O_v(n)$ yarı-ortogonal grubuna karşılık gelen Lie cebirleri belirtildi. Genel olarak Lie grupları üzerindeki sol invaryant vektör alanları ve sol invaryant 1-formlar ele alındı.

Üçüncü bölümde GL(n,R) ve O(n) üzerindeki sol invaryant 1-formlar için yapı denklemleri verildi. $O_v(n)$ yarı-ortogonal grubu üzerindeki sol invaryant 1-formlar ve bu sol invaryant 1-formların yapı denklemleri hesaplandı.

ANAHTAR KELİMELER: Simetrik bilineer form, skalar çarpmalı uzay, lineer izometri, indeks, yarı-Öklid uzayı, yarı-ortogonal uzay, Lie grubu, Lie cebiri, sol invaryant vektör alanı, sol invaryant 1-form, yapı denklemi.

ABSTRACT

Masters Thesis

THE DIFFERENTIAL GEOMETRIC STRUCTURES ON LORENTZIAN MANIFOLDS

Ömer TARAKCI

Ankara University
Graduate School of Natural and Applied Science
Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. H. Hilmi HACISALİHOĞLU
1993, Page: 49
Jury: Prof. Dr. H. Hilmi HACISALİHOĞLU
Prof. Dr. Rüstem KAYA
Asst.Prof.Dr. Yusuf YAYLI

This thesis has three parts.

In the first part, we present semi-Euclidean space R^n_v and scalar product spaces. After that we give the linear isometries between scalar product spaces.

In the second part, we give some fundamental concepts on the theory of Lie groups. Following this we explained Lie algebras related to the Lie groups. Finally left invariant vector field and left invariant 1-forms are studied on the Lie groups.

In the third part, the structure equations of left invariant 1-forms, on GL(n,R) and O(n), are given. Finally we calculated the structure equations for left invariant 1-forms on semi-orthogonal group $O_v(n)$.

Key Words: Symmetric bilinear forms, scalar product space, linear isometry, index, semi-Euclidean space, semi-orthogonal space, Lie group, Lie algebra, left invariant 1-form, left invariant vector field, structure equations.

TEŞEKKÜR

Bana bu çalışmayı veren ve çalışmalarım boyunca yakın ilgi ve yardımlarını esirgemeyen sayın hocam Prof. Dr. H. Hilmi HACISALİHOĞLU'na en derin saygı ve teşekkürlerimi sunmayı bir borç bilirim.

İÇİNDEKİLER

SİMGELER

V,W,...	: Vektör uzayları
boyV	: V vektör uzayının boyutu
$<\ ,\ >$	: Skalar çarpma
$W^{\perp}$	: $\{v\in V: <v,w>=0,\ \forall w\in W\ ,W\subset V\}$
$\lVert v \rVert$	: v vektörünün normu
indV, n	: V skalar çarpmalı uzayın indeksi
ε_i	: $\begin{cases} -1, & 1\leq i\leq \nu \quad \text{ise} \\ 1, & \nu+1\leq i\leq n \quad \text{ise} \end{cases}$
det	: Determinant fonksiyonu
$T_p(M)$	: M manifoldunun $p\in M$ noktasındaki tanjant uzayı
$T_p^*(M)$	: M manifoldunun $p\in M$ noktasındaki kotanjant uzayı
$\otimes$	: Tensör çarpımı
$g\ell(n,\mathbb{R})$	: Bütün nxn reel matrislerin cümlesi
$GL(n,\mathbb{R})$	: $\{g\in g\ell(n,\mathbb{R}):\ \det g\neq 0\}$
[,]	: Bracket operatörü
G	: Lie grubu
$\ell_{(g_o)}$	: $g_o\in G$ noktasındaki sol paralelizm dönüşümü
$r_{(g_o)}$	: $g_o\in G$ noktasındaki sağ paralelizm dönüşümü
$\ell_{(g_o)*}$	: sol grup paralelizmi
$r_{(g_o)*}$	: sağ grup paralelizmi
$\chi(G)$	: G üzerindeki vektör alanlarının cümlesi
$\chi_\ell(G)$	: G üzerindeki sol invaryant vektör alanlarının cümlesi
$\chi_r(G)$	: G üzerindeki sağ invaryant vektör alanlarının cümlesi
O(n)	: Ortogonal grup
$O_\nu(n)$	: Yarı-ortogonal grup
$\mathbb{R}^n_\nu$	: Yarı-Öklid uzayı
i	: İnclusion dönüşümü
$\Omega_\ell(G)$	: G üzerindeki sol invaryant 1-formların cümlesi

1. SKALAR ÇARPMALI UZAYLAR

Bu bölümde skalar çarpmalı uzaylar ve skalar çarpmalı uzaylar arasındaki lineer izometrilerden bahsedilecek, daha sonra yarı-Riemann manifoldu tanıtılacak ve yarı-Riemann manifoldunun özel bir hali olan $\mathbb{R}^n_v$ yarı Öklid uzayının tanımı verilecektir. Böylece diğer bölümler için bir hazırlık yapılmış olacaktır.

1.1. Simetrik Bilineer Formlar

Tanım 1.1.1: V bir reel vektör uzayı olsun.

$$< , > \ : V \times V \to \mathbb{R}$$

dönüşümü her a, b $\in \mathbb{R}$ ve $\forall\ \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V$ için

(i) $<\vec{u},\vec{v}> = <\vec{v},\vec{u}>$

(ii) $<a\vec{u}+b\vec{v}, \vec{w}> = a<\vec{u},\vec{w}> + b<\vec{v},\vec{w}>$

$<\vec{u}, a\vec{v}+b\vec{w}> = a<\vec{u},\vec{v}> + b<\vec{u},\vec{w}>$

özelliklerine sahip ise $< , >$ dönüşümüne V vektör uzayı üzerinde bir simetrik bilineer form denir (O'Neill 1983).

Tanım 1.1.2: V vektör uzayı üzerinde bir simetrik bilineer form $< , >$ olsun.

(i) $\forall\ \vec{v} \in V$ ve $\vec{v} \neq 0$ için $<\vec{v},\vec{v}> > 0$ ise $< , >$ simetrik bilineer formuna pozitif definit,

(ii) $\forall\ \vec{v} \in V$ ve $\vec{v} \neq 0$ için $<\vec{v},\vec{v}> < 0$ ise $< , >$ simetrik bilineer formuna negatif definit,

(iii) $\forall\ \vec{v} \in V$ için $<\vec{v},\vec{v}> \geq 0$ ise $< , >$ ye pozitif semi-definit,

(iv) $\forall\ \vec{v} \in V$ için $<\vec{v},\vec{v}> \leq 0$ ise $< , >$ ye negatif semi-definit,

(v) $\forall\ \vec{w} \in V$ için $<\vec{v},\vec{w}>=0$ den $\vec{v}=0$ olmak zorunda ise $< , >$ ya non-dejenere, non-dejenere değilse dejeneredir denir (O'Neill 1983).

Bu tanımdaki (i) ve (ii) özelliklerine sahip $<\, ,\, >$ simetrik bilineer forma definit'tir, (iii) ve (iv) ödelliklerine sahip $<\, ,\, >$ simetrik bilineer forma semi-definit'tir denir.

Eğer $<\, ,\, >$ definit ise hem semi-definit hem de non-dejeneredir. $<\, ,\, >$ definit değilse $<\, ,\, >$ ye V üzerinde indefinitdir denir.

V vektör uzayı üzerinde $<\, ,\, >$ simetrik bilineer formu indefinit ise, $\vec{v} \in V$ vektörleri için

$$<\vec{v},\vec{v}> \, >0 \text{ veya } <\vec{v},\vec{v}> \, <0 \text{ veya } <\vec{v},\vec{v}> \, =0$$

olur.

V üzerinde bir simetrik bilineer form $<\, ,\, >$ ise V nin herhangi bir W altuzayı için $<\, ,\, >|_W$ kısıtlamasıda yine simetrik ve bilineerdir.

Tanım 1.1.3: V bir vektör uzayı ve

$$<\, ,\, >: V \times V \to \mathbb{R}$$

bir simetrik bilineer form olsun.

$$<\, ,\, >|_W : W \times W \to \mathbb{R}$$

negatif definit olacak şekildeki en büyük boyutlu W alt uzayının boyutuna $<\, ,\, >$ simetrik bilineer formunun indeksi denir ve ν ile gösterilir (O'Neill 1983).

Buna göre $1 \leq \nu \leq \text{boy}V$ dir. $\nu=0$ olması için gerek ve yeter şart $<\, ,\, >$ nın pozitif semi-definit olmasıdır.

V nin bir bazı $e_1, e_2, \ldots, e_n$ olsun. $b_{ij}=<e_i,e_j>$ olarak tanımlanan $[b_{ij}]$ nxn matrisine, $e_1,e_2,\ldots,e_n$ bazına göre $<\, ,\, >$ nın matrisi denir. $<\, ,\, >$ simetrik olduğundan $[b_{ij}]$ matrisi de simetriktir.

$$<\vec{v},\vec{v}> \, = \, <\sum_{i=1}^{n} v_i\, e_i, \sum_{j=1}^{n} w_j\, e_j> \, = \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}\, v_i\, w_j$$

olduğundan $[b_{ij}]$ matrisi $<\, ,\, >$ yi belirtir.

Teorem 1.1.4: Bir $<\, ,\, >$ simetrik bilineer formunun non-dejenere olması için gerek ve yeter şart $<\, ,\, >$ nın herhangi bir baza göre matrisinin tersinin olmasıdır (O'Neill 1983).

Tanım 1.1.5: Bir $\vec{v} \in V$ vektörü için

$\langle\vec{v},\vec{v}\rangle > 0$ veya $\vec{v}=0$ ise bu $\vec{v}$ vektörüne space-like vektör,

$\langle\vec{v},\vec{v}\rangle < 0$ ise bu $\vec{v}$ vektörüne time-like vektör,

$\langle\vec{v},\vec{v}\rangle = 0$ ve $\vec{v}\neq 0$ ise bu $\vec{v}$ vektörüne null vektör denir (O'Neill 1983).

Örnek 1.1.6: $\mathbb{R}^2$ de $\vec{X}=(x_1,x_2)$, $\vec{Y}=(y_1,y_2)$ olmak üzere

$$\langle\vec{X},\vec{Y}\rangle=-x_1y_1+x_2y_2$$

olarak tanımlansın.

$\vec{X}=(1,0)$ için $\langle\vec{X},\vec{X}\rangle=-1$ olduğundan $\vec{X}$ bir time-like vektördür.

$\vec{Y}=(0,1)$ için $\langle\vec{Y},\vec{Y}\rangle= 1$ olduğundan $\vec{Y}$ bir space-like vektördür.

$\vec{Z}=(1,1)$ için $\langle\vec{Z},\vec{Z}\rangle= 0$ olduğundan $\vec{Z}$ bir null vektördür.

1.2. Skalar Çarpmalı Uzaylar

Tanım 1.2.1: Bir V vektör uzayı üzerinde non-dejenere, simetrik bilineer forma V vektör uzayı üzerinde bir skalar çarpma denir. V üzerindeki bir skalar çarpma $\langle\ ,\ \rangle$ ise (V, $\langle,\rangle$) ikilisine skalar çarpmalı vektör uzayı denir.

Pozitif definit skalar çarpmaya bir iç çarpma diyeceğiz. Buna örnek olarak, $\mathbb{R}^n$ üzerinde $\vec{v}\bullet\vec{w}=\sum_{i=1}^{n} v_iw_i$ şeklinde tanımlanan nokta çarpmasını verebiliriz.

İç çarpmanın çoğu özellikleri sakalar çarpmada vardır. Bununla birlikte $\langle\ ,\ \rangle$ skalar çarpmanın indefinit olmasından bazı farklılıklar ortaya çıkar.

Örnek 1.2.2: $\langle\ ,\ \rangle: \mathbb{R}^2 X \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$$(\vec{v},\vec{w}) \rightarrow \langle\vec{v},\vec{w}\rangle= v_1w_1-v_2w_2$$

olarak tanımlansın. Açıkça $\langle\ ,\ \rangle$ simetrik ve bilineerdir. $\vec{w}$ yerine (1,0) ve (0,1) alınarak, < , > nın non-dejenere olduğu aşağıdaki gibi görülür.

$<\vec{u},\vec{w}>=v_1w_1-v_2w_2$

$<(v_1,v_2),(1,0)>=0 \Rightarrow v_1=0$ ve

$<(v_1,v_2),(0,1)>=0 \Rightarrow -v_2=0 \Rightarrow v_2=0.$

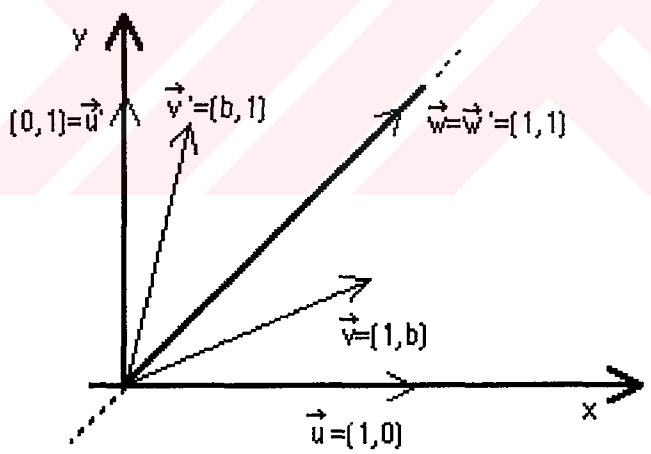
Böylece < , > bir skalar çarpmadır. $<\vec{v},\vec{v}>= v_1^2-v_2^2$ olduğundan < , > indefinittir. Zira $v_1=v_2$ için $<\vec{v},\vec{v}>=0$, $|v_1|>|v_2|$ için $<\vec{v},\vec{v}> >0$ ve $|v_1|<|v_2|$ için $<\vec{v},\vec{v}> <0$ dır.

Tanım 1.2.3: $\vec{v}$, $\vec{w} \in V$ için $<\vec{v},\vec{w}>=0$ ise $\vec{v}$ ve $\vec{w}$ vektörlerine diktir denir ve $\vec{v}\perp\vec{w}$ şeklinde gösterilir.

Örnek 1.2.4: $< , >: \mathbb{R}^2 x \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$(\vec{v}\ ,\ \vec{w}) \to <\vec{v},\vec{w}>=v_1w_1-v_2w_2$$

olarak tanımlansın.



Şekil 1.2.1

Şekil 1.2.1 de görülen $\vec{u}$ ve $\vec{u}'$, $\vec{v}$ ve $\vec{v}'$, $\vec{w}$ ve $\vec{w}'$ vektörleri < , > skalar çarpmaya göre diktirler.

V vektör uzayının bir altuzayı W olsun.

$W^{\perp}=\{\vec{v}\in V:\ <\vec{v},\vec{w}>=0,\ \forall\vec{w}\in W\}$ olarak tanımlıyoruz. Burada $W^{\perp}$e W nın ortogonal komplemanı diyemeyiz, çünkü < , > indefinit olduğunda $W+W^{\perp}$ genel olarak V nin tümünü vermeyebilir. Örnek 1.2.4 de eğer $W=S_p\{(1,1)\}$ olarak alırsak $W^{\perp}=W$ ve $W+W^{\perp}=W\neq V$ olur.

Teorem 1.2.5: V skalar çarpmalı uzayının bir altuzayı W olsun. Bu durumda şu özellikler vardır:

(1) $\text{boy}W+\text{boy}W^{\perp}=n=\text{boy}V$

(2) $(W^{\perp})^{\perp}=W$

(O'Neill 1983).

Tanım 1.2.6: V üzerinde bir skalar çarpma < , > ve W da V nin bir altuzayı olsun. Eğer W üzerinde < , > non-dejenere ise W ya non-dejenere altuzay, non-dejenere değil ise W ya dejenere altuzay denir.

Eğer < , > indefinit ise V nin daima dejenere altuzayı vardır. Örneğin; Örnek 1.2.4 deki (1,1) vektörlerinin gerdiği uzay W ise $\forall\vec{v}\in W$ için $<\vec{v},\vec{u}>=0 \Rightarrow 0\neq\vec{u}\in W$ olduğundan W dejenere altuzaydır.

Böylece bir V skalar çarpmalı uzayın herhangi bir altuzayı, skalar çarpmalı uzay olmak zorunda değildir.

Teorem 1.2.7: V bir skalar çarpmalı uzay ve W da V nin bir altuzayı olsun. W nın non-dejenere altuzay olması için gerek ve yeter şart $V=W\oplus W^{\perp}$ olmasıdır. (O'Neill 1983)

Tanım 1.2.8: Bir V vektör uzayı üzerindeki skalar çarpma < , > olsun. Bir $\vec{v}\in V$ vektörünün normu

$$\|\vec{v}\|=|<\vec{v},\vec{v}>|^{1/2}$$

olarak tanımlanır. Normu 1 birim olan vektöre birim vektör ve ortogonal birim vektörlerin cümlesine ortonormal sistem denir (O'Neill 1983).

Teorem 1.2.9: Bir $V \neq \{0\}$ skalar çarpmalı uzay bir ortonormal baza sahiptir.

İspat: $< , >$ non-dejenere olduğundan $v \neq 0$ için $<v,v> \neq 0$ olacak şekilde bir $\vec{v} \in V$ vektörü vardır. $\frac{v}{\|v\|}$ birim vektördür. Böylece $k<n$ olmak üzere ortonormal $\{e_1,e_2,...,e_k\}$ cümlesini tümevarımla genişletmek yeterlidir. Teorem 1.1.4 gereğince bu vektörler k- boyutlu bir W non-dejenere altuzayını gererler. Geriye yalnız $W^{\perp} \neq \{0\}$ da bir birim vektör bulmak kaldı. W non-dejenere olduğundan $W^{\perp}$ de non-dejeneredir. O halde $W^{\perp}$ bir birim vektör ihtiva eder. Böylece V nin bir ortonormal bazı bulunabilir.

$< , >$ ye karşılık gelen matris V nin $\{e_1,e_2,...,e_n\}$ ortonormal bazına göre diyagonaldır. Gerçekten,

$$<e_i,e_j>= \delta_{ij}\varepsilon_j$$

ve burada $\varepsilon_j=<e_j,e_j>=\pm 1$ dir.

Teorem 1.2.10: V vektör uzayı için bir ortonormal baz $\{e_1,e_2,...,e_n\}$ olsun. $\varepsilon_i=<e_i,e_i>$ olmak üzere $\forall\ \vec{v} \in V$ vektörü

$$\vec{v}=\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i<\vec{v},e_i>e_i$$

olacak şekilde tek türlü yazılabilir.

İspat: $\forall\ \vec{v} \in V$ vektörünün $\{e_1,e_2,...,e_n\}$ bazına göre tek türlü yazıldığını biliyoruz. Buna göre,

$$\vec{v}=\sum_{i=1}^{n}a_ie_i$$

$$<\vec{v},e_k>=\sum_{i=1}^{n}a_i<e_i,e_k>\ ,\ <e_i,e_j>=\delta_{ij}\varepsilon_j \text{ olduğundan,}$$

$$<\vec{v},e_k>=\sum_{i=1}^{n}a_i\delta_{ik}\varepsilon_k$$

$$<\vec{v},e_k>=a_k\varepsilon_k \quad , \qquad 1\leq k\leq n$$

$\varepsilon_k = <e_k, e_k> = \pm 1$ olduğundan

$a_k=\varepsilon_k<\vec{v},e_k>$, $1\leq k\leq n$, olur.

O halde

$$\vec{v}=\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i<\vec{v},e_i>e_i$$

bulunur.

Tanım 1.2.11: V bir skalar çarpmalı uzay ve W da V nin non-dejenere bir altuzayı olsun.

$$\pi:V\to W$$

$$\pi(\vec{v})=\vec{v}, \ \vec{v}\in W$$

$$\pi(\vec{v})=0, \ \vec{v}\in W^{\perp}$$

olarak tanımlanan lineer dönüşüme $\vec{v}$ nin W üzerine dik izdüşümü denir (O'Neill 1983).

W nın bir ortonormal bazı $\{e_1,e_2,...,e_k\}$ ise bu baz daima V nin bir bazına tamamlanabilir. Böylece

$$\pi(\vec{v})=\sum_{i=1}^{k} \varepsilon_i <\vec{v},e_i>e_i$$

dır.

Teorem 1.2.12: V nin bir $\{e_1,e_2,...,e_n\}$ ortanormal bazı için $(\varepsilon_1,\varepsilon_2,...,\varepsilon_n)$ işaretindeki negatif terimlerin sayısı V nin ν indeksidir.

İspat: Kabul edelim ki ilk m tane ε_i nin işareti negatiftir. Eğer $< , >$ definit ise sonuç aşikardır. Böylece $0<m<n$ dir. Daha açık olarak $e_1,e_2,...,e_m$ ile gerilen S altuzayı üzerinde $< , >$ negatif definittir ve böylece $\nu\geq m$ dir.

Eşitsizliğin tersinin ispatı için W yı, $< , >$ negatif definit olacak şekildeki keyfi bir altuzay olarak alıp

$\pi: W \to S$

$\pi(\vec{w})=-\sum_{i\leq m} \varepsilon_i <\vec{w},e_i>e_i$

şeklinde tanımlayalım. π nin lineer ve birebir olduğunu göstermek yeterlidir. π nin lineer olduğu açıktır. Şimdi π nin birebir olduğunu gösterelim. Bu halde boy$W\leq$boy$S=m$, dolayısıyla $\nu\leq m$ bulunur.

Eğer $\pi(\vec{w})=0$ ise

$$\vec{w}=\sum_{j>m} \varepsilon_i <\vec{w},e_j>e_j$$

olur. Fakat $\vec{w}\in W$ olduğundan

$$0\geq <\vec{w},\vec{w}>=<\sum_{j>m} <\vec{w},e_j>e_j \; , \; \sum_{j>m} <\vec{w},e_j>e_j>$$
$$=\sum_{j>m} <\vec{w},e_j>^2$$

ve buradan $j>m$ için $<\vec{w},e_j>=0$ bulunur. Böylece $\vec{w}=0$ dır.

$m=\nu$ ve negatif işaretli terimlerin sayısı V nin ν indeksidir.

Sonuç olarak söyleyebiliriz ki, V nin non-dejenere W altuzayı için

$$\mathrm{ind}V = \mathrm{ind}W + \mathrm{ind}W^{\perp}$$

olur.

1.3. Lineer İzometriler

Tanım 1.3.1: V ve $\overline{V}$, sırasıyla, $<\,,\,>$ ve $\overline{<\,.\,>}$ skalar çarpmaları ile verilen skalar çarpmalı uzaylar ve $T:V\to \overline{V}$ lineer dönüşümü verilsin. $\forall$ $\vec{v},\vec{w}\in V$ için

$$\overline{<T(\vec{v}),T(\vec{w})>}=<\vec{v},\vec{w}>$$

ise T ye skalar çarpmayı koruyor denir (O'Neill 1983).

T lineer dönüşümü için $T(\vec{v})=\vec{0}$ ise $<\vec{v},\vec{w}>=\vec{0}$ ve $<\,,\,>$ non-dejenere olduğundan $\forall\vec{w}\in V$ için $\vec{v}=\vec{0}$ dır. Bu da T lineer dönüşümünün birebir olduğunu gösterir.

Tanım 1.3.2: Skalar çarpmayı koruyan bir $T:V \to W$ lineer izomorfizmine bir lineer izometri denir.

Bir $T:V \to W$ lineer dönüşümü bir lineer izometri ise boy$V$ = boy$W$ dır. Bunun tersi de doğrudur (O'Neill 1983).

Teorem 1.3.3: V ve W skalar çarpmalı uzayların aynı boyut ve aynı indekse sahip olması için gerek ve yeter şart V den W ya bir lineer izometrinin var olmasıdır.

İspat: $\Rightarrow$: Kabul edelim ki V ve W aynı boyutlu ve aynı indeksli skalar çarpmalı uzaylar ve V nin bir ortonormal bazı $e_1,e_2,\ldots,e_n$, W nin bir ortonormal bazı da $e'_1,e'_2,\ldots,e'_n$ olsun. Teorem 1.2.12 den her i için $<e_i,e_i>=<e'_i,e'_i>$ alabiliriz. T, her i için $T(e_i)=e'_i$ olacak şekilde bir lineer dönüşüm olsun. Her i,j için

$$<T(e_i),T(e_j)>=<e'_i,e'_j>$$

olur. O halde T bir lineer izometridir.

$\Leftarrow$: Eğer T lineer izometri ise V nin ortonormal bazını W nın ortonormal bazına dönüştürür. Böylece boy$V$=boy$W$ ve Teorem 1.2.12 den ind$V$ = ind$W$ dır.

1.4. Yarı-Riemann Manifoldları

Tanım 1.4.1: Diferensiyellenebilir bir manifold M ve

$$
\begin{aligned}
< \, , \, >: TM \times TM &\to C^{\infty}(M,\mathbb{R}) \\
(x, y) \quad &\quad <x,y>:M \to \mathbb{R} \\
&\qquad\qquad p \quad <x,y>|_p=<x_p,y_p>
\end{aligned}
$$

şeklinde tanımlı, simetrik, bilineer ve non-dejenere ve sabit indeksli $<\ ,\ >$ fonksiyonuna M manifoldu üzerinde bir metrik tensör denir.

Diğer bir deyişle her $T_p(M)$ tanjant uzayı üzerinde sabit indekse sahip $<\ ,\ >|_p: T_p(M)xT_p(M) \to \mathbb{R}$ simetrik, bilineer, non-dejenere dönüşüm tanımlayan $<\ ,\ >$ fonksiyonuna M üzerinde metrik tensör denir.

Tanım 1.4.2: Diferensiyellenebilir bir manifold M ve $<\ ,\ >$ de M üzerinde sabit indeksli metrik tensör olmak üzere (M, $<\ ,\ >$) ikilisine bir yarı-Riemann manifoldu denir (O'Neill 1983).

(M, $<\ ,\ >$) yarı-Riemann manifoldundaki $<\ ,\ >|_p$ nin sabit indeksine M yarı-Riemann manifoldunun indeksi denir ve ν ile gösterilen bu indeks için $o \leq \nu \leq n = boyM$ dir.

Eğer $\nu = o$ ise M bir Riemann manifoldudur. Bu takdirde $<\ ,\ >|_p$, $T_p(M)$ üzerinde bir iç çarpma (pozitif tanımlı) dır.

Eğer $\nu=1$ ve $n \geq 2$ ise M ye Lorentz manifoldu denir. Buna göre

(M, $<\ ,\ >$) Lorentz manifoldu için $<\ ,\ >$ Lorentz metriği

$$<v_p,w_p>=\sum_{i=1}^{n-1} v_i|_p w_i|_p - v_n|_p w_n|_p,\ p\in M,\ v_p,w_p\in T_p(M)$$

dir.

Eğer $U \subset M$ üzerinde bir koordinat sistemi $x^1, x^2,...,x^n$ ise $<\ ,\ >$ metrik tensörünün bileşenleri $g_{ij}=<\partial_i,\partial_j>$, $1\leq i,j\leq n$, $\partial_i = \dfrac{\partial}{\partial x_i}$; dir.

$v=\sum_{i=1}^{n} v^i\partial_i$ ve $w=\sum_{j=1}^{n} w^j\partial_j$ vektör alanları için

$$\begin{aligned} <v,w> &= <\sum_{i=1}^{n} v^i\partial_i, \sum_{j=1}^{n} w^j\partial_j> \\ &= \sum_{i,j=1}^{n} <\partial_i,\partial_j>\ v^i w^j \\ &= \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij} v^i w^j \end{aligned}$$

dir.

matrisinin tersi vardır ve $(g^{ij}(p))$ ile gösterilir. $<\ ,\ >$ simetrik olduğundan $1\leq i,j\leq n$ için $g_{ij}=g_{ji}$ ve $g^{ij}=g^{ji}$ dir. Sonuç olarak U üzerindeki $<\ ,\ >$ metrik tensörü

$$<\ ,\ >=\sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}dx^i\otimes dx^j$$

olarak yazılabilir.

Her $p\in\mathbb{R}^n$ için

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^n &\to T_p(\mathbb{R}^n) \\ v &\quad v_p=\sum_{i=1}^{n} v^i\partial_i \end{aligned}$$

şeklinde $\mathbb{R}^n$ den $T_p(\mathbb{R}^n)$ e bir lineer izomorfizm vardır. Böylece $\mathbb{R}^n$ üzerindeki nokta çarpımı

$$<v_p,w_p>=v.w=\sum_{i=1}^{n} v^i w^i$$

ile $\mathbb{R}^n$ üzerinde bir metrik tensör verir. $\mathbb{R}^n$ bu anlamda ele alındığında bir Riemann manifoldudur ve n-boyutlu Öklid uzayı adını alır.

$0\leq v\leq n$ tamsayısı için, $\mathbb{R}^n$ üzerindeki metrik tensörü

$$<v_p,w_p>=-\sum_{i=1}^{v} v^i w^i+\sum_{j=v+1}^{n} v^j w^j$$

olarak alırsak, $\mathbb{R}^n$ indeksi v olan yarı-Öklid uzayı adını alır ve $\mathbb{R}^n_v$ ile gösterilir. $n\geq 2$ icin $\mathbb{R}^n_1$ e n-boyutlu Minkowsky uzayı denir.

$$\varepsilon_i=\begin{cases} -1, & 1\leq i\leq v \quad \text{ise} \\ 1, & v+1\leq i\leq n \quad \text{ise} \end{cases}$$

olmak üzere $\mathbb{R}^n_v$ yarı-Öklid uzayının metrik tensörü

$$<\ ,\ >=\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i\, du^i \otimes du^i$$

olarak yazılabilir.

2. LİE GRUPLARI

Bu bölümde Lie grupları ve Lie gruplarına karşılık gelen Lie cebirleri verilecektir. Önce GL(n,$\mathbb{R}$) genel lineer grubu, O(n) ortogonal grubu ve $O_v(n)$ yarı-ortogonal grubu ele alınacak, daha sonra Lie grupları üzerindeki sol invaryant vektör alanları ve sol invaryant 1-formlardan bahsedilecektir.

2.1. Lie Grubu

Lie grupları öyle gruplardır ki aynı zamanda birer diferensiyellenebilen manifoldlardır. Bu da Lie grubunun işleminin diferensiyellenebilir olduğunu ifade eder.

Bundan sonra diferensiyellenebilir kelimesi yerine kısaca dif.bilir yazacağız.

Tanım 2.1.1: Bir M dif.bilir manifoldu ve bir G grubu verilmiş olsun. Eğer aşağıdaki aksiyomlar sağlanıyorsa (M,G) ikilisine bir Lie grubu denir.

(L.1) M nin noktaları ile G nin elemanları çakışır.

(L.2) $M \times M \to M$

$(a, b) \to ab^{-1}$

işlemi her yerde dif.bilir dir.

M ye Lie grubunun temel manifoldu ve G ye de temel grubu denir (Hacısalihoğlu 1980).

Buna göre bir Lie grubunu kısaca şu şekilde ifade edebiliriz:

G bir grup ve $(a,b) \to ab^{-1}$ şeklinde tanımlanan

$$G \times G \to G$$

grup işlemi C^{∞} sınıfından dif.bilir olsun. Eğer G bir dif.bilir manifold ise G ye bir Lie grubu denir. G Lie grubu aynı zamanda bir grup olduğundan özdeşlik elemanı vardır ve bu özdeşlik elemanını e ile göstereceğiz.

Örnek 2.1.2: (GL(n,$\mathbb{R}$) Lie grubu)

Bütün nxn tipindeki reel matrislerin cümlesi olan $g\ell(n,\mathbb{R})$, reel sayılar cismi üzerinde n^2-boyutlu bir vektör uzayıdır ve dolayısıyla bir manifolddur. Her bir $a=[a_{ij}] \in g\ell(n,\mathbb{R})$ için,

$$[a_{ij}]=(a_{11}, a_{21},\dots,a_{n1}, a_{12},\dots,a_{n2},\dots,a_{1n},\dots,a_{nn})$$

alıp

$$a_{ij}=b_{i+(j-1)n}$$

dersek $g\ell(n,\mathbb{R})$ nin $a=[a_{ij}]$ matrisine $\mathbb{R}^{n^2}$ nin $(b_1, b_2,\dots,b_{n^2})$ noktasını karşılık tutabiliriz. Böylece $g\ell(n,\mathbb{R})$ ile $\mathbb{R}^{n^2}$ arasında bir birebir tekabül kurmuş oluruz. Bu $g\ell(n,\mathbb{R})$ den $\mathbb{R}^{n^2}$ ye bir lineer izomorfizm (dolayısıyla koordinat sistemi) verir.

$$GL(n,\mathbb{R})=\{g\in g\ell(n,\mathbb{R}) \mid \det g\neq 0\}$$

cümlesi matris çarpımı altında bir gruptur.

$$\det: g\ell(n,\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$$

$$A \qquad \det A=\det[a_{ij}]= \sum_{\sigma\in S_n} s(\sigma)\, a_{\sigma(1)1}a_{\sigma(2)2}\cdots a_{\sigma(n)n}$$

determinant fonksiyonu dif.bilir fonksiyonların çarpımlarının toplamına eşit olduğundan dif.bilir ve dolayısıyla süreklidir. Sürekli bir fonksiyonda, değer cümlesinde bir kapalı (veya açık) cümlenin ters görüntüsü yine kapalı (veya açık) dır.

$$\det: g\ell(n,\mathbb{R})\to\mathbb{R}$$

fonksiyonu sürekli ve $\{0\}$ cümlesi $\mathbb{R}$ de kapalı olduğundan

$$\det^{-1}\{0\}=\{g\in g\ell(n,\mathbb{R}) \mid \det g=0\}$$

cümlesi $g\ell(n,\mathbb{R})$ de kapalıdır. Bu cümle ise $g\ell(n,\mathbb{R})$ ye göre $GL(n,\mathbb{R})$ nin tümleyenidir. O halde $GL(n,\mathbb{R})$ cümlesi $g\ell(n,\mathbb{R})$ nin bir açık altcümlesidir.

Böylece GL(n,$\mathbb{R}$) bir manifolddur.

Şimdi a, b $\in$ GL(n,$\mathbb{R}$) için

$$GL(n,\mathbb{R}) \times GL(n,\mathbb{R}) \to GL(n,\mathbb{R})$$
$$(\ a\ ,\ b\ )\qquad ab^{-1}$$

grup işlemi (matris çarpımı) nin dif.bilir olduğunu gösterelim. $a=[a_{ij}]$, $b=[b_{ij}]$ ve $b^{-1}=[\frac{B_{ij}}{|b|}]$ için

$$ab^{-1}=[\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\frac{B_{ij}}{|b|}]$$

olarak yazılır. Burada $\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\frac{B_{ij}}{|b|}$ fonksiyonları dif.bilir olduğundan ab^{-1} dif.bilirdir.

Böylece GL(n,$\mathbb{R}$) bir Lie grubudur.

Örnek 2.1.3: (GL(n,$\mathbb{C}$) Lie grubu)

Kompleks bileşenli bütün nxn matrislerin cümlesi $g\ell(n,\mathbb{C})$ olsun. $g\ell(n,\mathbb{C})$, $\mathbb{C}$ kompleks sayılar cismi üzerinde n^2 boyutlu bir vektör uzayıdır. $g\ell(n,\mathbb{C})$ yi $\mathbb{R}$ reel sayılar cismi üzerinde düşündüğümüz zaman $2n^2$ boyutlu vektör uzayı olur. $a\in g\ell(n,\mathbb{C})$ için

$$u_{ij}(a)=\mathrm{Re}\ a_{ij},\ v_{ij}(a)=\mathrm{Im}\ a_{ij}$$

olsun. $\{u_{ij}, v_{ij}: 1\le i,j\le n\}$, $g\ell(n,\mathbb{C})$ üzerinde bir doğal koordinat sistemidir.

$GL(n,\mathbb{C})=\{a\in g\ell(n,\mathbb{C}) \mid \det a\neq 0\}$ cümlesini gözönüne alalım. Bu cümle matris çarpımı altında bir gruptur.

$$\det: g\ell(n,\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$$
$$a \qquad \det a$$

fonksiyonunu alalım. Bu fonksiyon süreklidir.

$$\det^{-1}\{0\}=\{a\in g\ell(n,\mathbb{C}) \mid \det a=0\}$$

cümlesi $g\ell(n,\mathbb{R})$ de kapalıdır. Bu cümle $g\ell(n,\mathbb{C})$ ye göre $GL(n,\mathbb{C})$ nin tümleyenidir. O halde $GL(n,\mathbb{C})$ cümlesi $g\ell(n,\mathbb{C})$ nin bir açık alt cümlesi ve dolayısıyla bir manifolddur.

Ayrıca a, b $\in$ GL(n,$\mathbb{C}$) için

$$GL(n,\mathbb{C}) \times GL(n,\mathbb{C}) \rightarrow GL(n,\mathbb{C})$$
$$(\ a\ ,\ b\ ) \quad ab^{-1}$$

grup işleminin bir önceki örnekte olduğu gibi dif.bilir olduğu gösterilebilir.

Böylece GL(n,$\mathbb{C}$) bir Lie grubudur.

2.2. Lie Altgrupları

Tanım 2.2.1: H ve G birer Lie grubu olsunlar. Eğer H Lie grubu G nin bir alt grubu ve bir immersed altmanifoldu ise H Lie grubuna G Lie grubunun bir Lie altgrubu denir (O'Neill 1983).

Tanım 2.2.2: Bir G Lie grubunun kapalı bir altgrubu diye G de kapalı bir cümle olan atgrubuna denir (O'Neill 1983).

Teorem 2.2.3: Eğer bir G Lie grubunun kapalı bir altgrubu H ise bu durumda H, G nin bir altmanifoldu ve böylece G nin bir Lie altgrubudur (O'Neill 1983).

Örnek 2.2.4: (Kapalı altgrup örnekleri)

(1) Bir f:G$\rightarrow$H dif.bilir homomorfizminin

$$K=\{a\in G \mid f(a)=e\}$$

çekirdeği G nin bir kapalı altgrubudur.

(2) det:GL(n,$\mathbb{R}$)$\rightarrow \mathbb{R}$-{0} determinant fonksiyonu bir dif.bilir homomorfizmdir. O nun çekirdeği

$$SL(n,\mathbb{R})=\{a \mid \det a=1\}$$

GL(n,$\mathbb{R}$) nin kapalı bir altgrubudur ve buna özel lineer grup denir.

2.3. Lie Cebiri

Tanım 2.3.1: $\mathcal{G}$ bir reel vektör uzayı olsun. $\mathcal{G}$ üzerinde bracket operatörü denen bir ikilineer

$$[\ ,\ ]: \mathcal{G} \times \mathcal{G} \to \mathcal{G}$$

$$(x\ ,\ y) \quad [\ ,\ ](x,y)=[x,y]$$

dönüşümü

(i) $[x,y]=-[y,x]$ (ters simetri özelliği)

(ii) $[[x,y],z]+[[y,z],x]+[[z,x],y]=0$ (Jacobi özdeşliği)

olacak şekilde tanımlanırsa $\mathcal{G}$ vektör uzayına yani ($\mathcal{G}$, [,]) ikilisine bir Lie cebiri denir (Hacısalihoğlu 1980).

Her bir Lie grubuna eşlik eden sonlu boyutlu bir Lie cebiri vardır. Bu nedenle Lie grupları teorisi Lie cebirleri ile Lie grupları arasındaki bağlılığa önemli bir yer ayırır. Böylece Lie grubunun özellikleri bu gruba karşılık gelen Lie cebirlerine birer özellik olarak aksettirilir.

Örnek 2.3.2: $g\ell(n,\mathbb{R})=\{A \mid A=[a_{ij}]\in \mathbb{R}^n_n\}$ vektör uzayı üzerinde bracket operatörü

$$[\ ,\ ]:g\ell(n,\mathbb{R}) \times g\ell(n,\mathbb{R}) \longrightarrow g\ell(n,\mathbb{R})$$

$$(\ A\ ,\ B\ ) \qquad [A,B]=AB-BA$$

olarak tanımlarsak $gl(n,\mathbb{R})$ vektör uzayı bir Lie cebiri olur.

Tanım 2.3.3: $g\ell$ bir Lie cebiri olsun. Bir $h\ell \subset g\ell$ altuzayı için $\forall\ x,y\in h\ell \Rightarrow [x,y]\in h\ell$ ise $h\ell$ uzayına $g\ell$ nin bir altcebiridir denir (Hacısalihoğlu 1980).

2.4. Matris Lie Grupları İçin Paralelizm Teorisi

Elemanları birer matris olan Lie gruplarına bir matris Lie grubu denir. Genel olarak bir G matris Lie grubu değişimli olmadığından sağ ve sol olmak üzere G için iki farklı paralelizm vardır.

Tanım 2.4.1: G bir Lie grubu olsun. Belli bir $g_0 \in G$ noktasında

$$\ell_{(g_o)}:G \to G$$

dönüşümü $\forall\ g \in G$ için

$$\ell_{(g_o)}(g)=g_0 g$$

şeklinde tanımlanır ve G üzerinde bir sol paralelizm adını alır. Benzer şekilde

$$r_{(g_o)}(g)=g g_0,\ \forall\ g \in G$$

ile de

$$r_{(g_o)}:G \to G$$

sağ paralelizm denen dönüşüm tanımlanır (Hacısalihoğlu 1980).

Teorem 2.4.2: Bir G Lie grubunun $\ell_{(g_o)}$ ve $r_{(g_o)}$ sol ve sağ paralelizmleri için şu özellikler vardır:

(1) $\ell_{(g_o)}$ ve $r_{(g_o)}$ dönüşümleri birebir ve örtendir.

(2) $\forall\ g_1, g_2 \in G$ için

$$\ell_{(g_1)} \circ r_{(g_2)} = r_{(g_2)} \circ \ell_{(g_1)}$$

dir.

(3) $\forall\ g_1, g_2 \in G,\ g_1 \neq g_2$ için

$$\ell_{(g_o)}(g_1)=g_2$$

olacak şekilde bir tek $g_0 \in G$ vardır (Hacısalihoğlu 1980).

Tanım 2.4.3: G bir Lie grubu ve $\forall\ g_1, g_2 \in G$ için

$$\ell_{(g_o)*}:T(g_1)\to T(g_2)$$

dönüşümüne G üzerinde $T(g_1)$ den $T(g_2)$ ye bir sol grup paralelizmi denir. Benzer şekilde sağ grup paralelizmi de tanımlanır (Hacısalihoğlu 1980).

Matris Lie grubunun tanımından $\ell_{g_o}:G \to G$ dönüşümü daima dif.bilirdir. Dolayısıyla $\ell(g_o)_*$ türev dönüşümünden söz edebiliriz. Aynı şey $r_{(g_o)}$ için de geçerlidir.

$$\ell(g_o)_*:T(g_1) \to T(g_2)$$

sol grup paralelizmi lineer birebir ve örtendir.

2.5. Sol ve Sağ İnvaryant Vektör Alanları

Tanım 2.5.1: G bir matris Lie grubu ve G üzerinde bir vektör alanı X olsun. Eğer $\forall\ g_1, g_2 \in G$ için

$$\ell(g_o)_*\ X\ (g_1)=X(g_o g_1)$$

yani $\forall\ g \in G$ için $\ell(g_o)_* \circ X = X \circ \ell_{(g)}$ ise X vektör alanına bir sol invaryant vektör alanı denir.

Benzer şekilde $\forall\ g_1, g_2 \in G$ için $r_{(g_o)*}X(g_1)=X(g_1 g_0)$ yani $\forall\ g \in G$ için $r_{(g)*} \circ X = X \circ r_{(g)}$ ise X vektör alanına bir sağ invaryant vektör alanı denir (Hacısalihoğlu 1980).

NOTASYON: $\mathcal{X}=\{X:X,$ G üzerinde vektör alanıdır$\}$.

G bir matris Lie grubu ve $\mathcal{X}$ de G üzerindeki bütün vektör alanlarının cümlesi olsun. $\forall\ X,Y \in \mathcal{X}$ ve $\forall\ c \in \mathbb{R}$ için

$(X+Y)(g)=X(g)+Y(g),\ \forall\ g \in G$ (toplama)

$(cX)(g)=c.X(g),$ (skalar ile çarpma)

işlemlerine göre $\mathcal{X}$ cümlesi $\mathbb{R}$ üzerinde bir vektör uzayıdır.

$$\mathcal{X}_\ell=\{X:X \in \mathcal{X},\ \ell_{(g)*} \circ X = X \circ \ell_{(g)}\ \forall\ g \in G\}$$

sol invaryant vektör alanlarının cümlesi ve

$\mathcal{X}_r=\{X : X\in\mathcal{X},\ r(g)_* \circ X = X \circ r(g)\ \ \forall\ g\in G\}$

sağ invaryant vektör alanlarının cümlesi $\mathcal{X}$ vektör uzayının birer altuzaylarıdırlar (Hacısalihoğlu 1980).

Teorem 2.5.2: G bir Lie grubu olsun. $\ell(g)_*$ ve $r(g)_*$ G üzerinde sırası ile sol grup paralelizmi ve sağ grup paralelizmi için aşağıdaki özellikler vardır.

(1) $\ell(g_1g_2)_* = \ell(g_1)_* \circ \ell(g_2)_*, \qquad \forall\ g_1, g_2 \in G,$

(2) $r(g_1g_2)_* = r(g_2)_* \circ r(g_1)_*, \qquad \forall\ g_1, g_2 \in G,$

(3) $[r(g_2) \circ r(g_1)]_* = r(g_2)_* \circ r(g_1)_*, \qquad \forall\ g_1, g_2 \in G,$

(Hacısalihoğlu 1980).

2.6. Lie Gruplarına Karşılık Gelen Lie Cebirleri

Bu kısımda sol invaryant vektör alanlarının Lie cebiri ve bu cebire karşılık gelen Lie grubu arasındaki ilgiyi ele alacağız.

Teorem 2.6.1: G bir Lie grubu ve G nin sol invaryant vektör alanlarının vektör uzayı $\mathcal{X}_\ell(G)$ olsun.

(1) $\alpha: \mathcal{X}_\ell(G) \longmapsto T_e(G)$

$\qquad X \qquad\qquad \alpha(X)=X(e)$

dönüşümü bir lineer izomorfizmdir. Burada $e\in G$ elemanı grup işleminin birim elemanıdır.

(2) boy $\mathcal{X}_\ell(G)$=boy $T_e(G)$=boy G dir.

(3) G üzerindeki sol invaryant vektör alanları C^∞ sınıfından dif.bilirdir.

(4) Sol invaryant vektör alanlarının Lie bracketi de sol invaryant vektör alanıdır.

(5) $\chi_\ell(G)$ vektör uzayı vektör alanlarının Lie bracket operatörü altında bir Lie cebiridir.

İspat (1): $\chi_\ell(G)$ cümlesi $\chi(G)$ nin bir alt vektör uzayıdır. Diğer taraftan

$$\alpha: \chi_\ell(G) \longmapsto T_e(G)$$

$$X \qquad \alpha(X)=X(e)$$

dönüşümü lineerdir. Gerçekten, $\forall$ X,Y $\in$ $\chi_\ell(G)$ için

$$\begin{aligned}\alpha(X+Y)&=(X+Y)(e)\\&=X(e)+Y(e)\\&=\alpha(X)+\alpha(Y)\end{aligned}$$

ve $\forall$ X$\in$ χ_ℓ ve $\forall$ c $\in$ $\mathbb{R}$ için

$$\begin{aligned}\alpha(c.X)&=(cX)(e)\\&=cX(e)\\&=c\alpha(X)\end{aligned}$$

dir.

α **birebirdir:** $\alpha(X)=\alpha(Y)$ alalım. Buradan,

$$X(e)=Y(e)$$

olur. $\forall$ g $\in$ G için X ve Y sol invaryant vektör alanı olduklarından

$$X(g)= \ell_{(g)*}\ (X(e))= \ell_{(g)*}\ (Y(e))=Y(g)$$

olur. Fonksiyonların eşitliği tanımından X=Y olur.

α **örtendir:** $t_e \in T_e(G)$ alalım. X bir sol invaryant vektör alanı olduğundan $\forall g \in G$ için,

$$X(g)= \ell_{(g)*}\ (t_e)$$

$$\ell_{(g)*}\ (X(e))=\ell_{(g)*}\ (t_e)$$

ve $\ell_{(g)*}$ birebir olduğundan

$$X(e)=t_e$$

bulunur ki bu α nın örten olması demektir. O halde α bir lineer izomorfizmdir.

(2): (1) den dolayı boy $\chi_\ell(G)$=boy $T_e(G)$ olur. boy $T_e(G)$=boy G olduğundan

$$\text{boy } \chi_\ell(G) = \text{ boy } T_e(G) = \text{ boy } G$$

dir.

(3): (Hacısalihoğlu 1980)

(4): $X,Y \in \chi_\ell(G)$ olsun. $[X,Y] \in \chi_\ell(G)$ olduğunu göstereceğiz. Bunun için $\forall g_0 \in G$ ye karşılık

$$\ell_{(g_o)*} \circ [X,Y] = [X,Y] \circ \ell_{(g_o)} \text{ yani } \forall\ g, g_0 \in G \text{ için}$$

$$\ell_{(g_o)*} \circ ([X,Y]_g) = [X,Y]_{g_o g} \text{ olduğunu göstermeliyiz.}$$

$\forall\ g \in G$ ve $\forall\ f \in C^\infty(G,\mathbb{R})$ için

$$\ell_{(g_o)*}([X,Y]_g)f = \ell_{(g_o)*}\{X_g(Yf) - Y_g(Xf)\}$$

$\ell_{(g_o)*}$ lineer olduğundan sağ taraf

$$\ell_{(g_o)*}([X,Y]_g)f = \ell_{(g_o)*} X_g(Yf)\ell_{(g_o)*}Y_g(Xf)$$

$$= X_{g_o g}(Yf) - Y_{g_o g}(Xf)$$

$$= ([X,Y]_{g_o g})f$$

$\forall\ f \in C^\infty(G,\mathbb{R})$ için bu doğru olduğundan

$$\ell_{(g_o)*}([X,Y]_g) = [X,Y]_{g_o g}$$

$$\ell_{(g_o)*} \circ [X,Y](g) = ([X,Y] \circ \ell_{(g_o)})(g)$$

$\forall\ g$ için doğru olduğundan

$$\ell_{(g_o)*} \circ [X,Y] = [X,Y] \circ \ell_{(g_o)}$$

elde edilir.

(5): $\chi_\ell(G)$ bir vektör uzayı olduğundan Lie bracket operatörü $\chi_\ell(G)$ yi bir Lie cebiri yapar.

Tanım 2.6.2: G Lie grubunun Lie cebiri G üzerindeki sol invaryant vektör alanlarının $g\ell$ Lie cebiri olarak tanımlanır.

Bunun yanında G Lie grubunun Lie cebiri olarak G nin e birim noktasındaki $T_e(G)$ tanjant uzayını Lie cebir yapısı ile birlikte alabiliriz. $\chi_\ell(G)$ ile $T_e(G)$ izomorf olduklarından bunu yapmaya hakkımız vardır. Bu izomorfizm adı geçen vektör uzayları üzerinde kurulan Lie cebirlerinin izomorfizmi olarak da alınabilir.

Örnek 2.6.3: (GL(n,$\mathbb{R}$) nin Lie Cebiri)

GL(n,$\mathbb{R}$) Lie grubunun Lie cebiri $g\ell(n,\mathbb{R})$ matris Lie cebiridir, yani kanonik olarak $g\ell(n,\mathbb{R})$ Lie cebirine izomorftur. Şimdi bunu gösterelim:

u_{ij}, $g\ell(n,\mathbb{R})$ üzerinde her bir a matrisi için $u_{ij}(a)=a_{ij}$ olacak şekilde reel değerli bir fonksiyon olsun. Bu durumda

$$\{u_{ij}:\ 1\leq i,j\leq n\}$$

$g\ell(n,\mathbb{R})$ üzerinde bir koordinat sistemidir. Dolayısıyla GL(n,$\mathbb{R}$) açık altmanifoldu üzerinde de koordinat sistemidir.

Şimdi

$$\begin{array}{ccc} g\ell(n,\mathbb{R}) \text{ nin Lie cebiri} & \longrightarrow & g\ell(n,\mathbb{R}) \\ X & & X_e(u_{ij}) \end{array}$$

dönüşümünün GL(n,$\mathbb{R}$) nin Lie cebirinden $g\ell(n,\mathbb{R})$ ye bir Lie cebiri izomorfizmi olduğunu gösterelim.

Bu dönüşüm kanonik izomorfizmlerin bir bileşkesidir:

$$GL(n,\mathbb{R}) \text{ nin Lie cebiri} \overset{1}{\leftrightarrow} T_e(GL(n,\mathbb{R})\ ) \overset{2}{\leftrightarrow} T_e(g\ell(n,\mathbb{R})) \overset{3}{\leftrightarrow} g\ell(n,\mathbb{R})$$

(1). Teorem 2.6.1 in (1) maddesine göre "bir Lie grubunun sol invaryant vektör alanlarının uzayı $T_e(G)$ ye izomortur". Buradan,

$$\begin{array}{ccc} \chi_\ell(GL(n,\mathbb{R})) & \rightarrow & T_e(GL(n,\mathbb{R})) \\ X & & X_e \end{array}$$

dönüşümü lineer izomorfizmdir.

(2). GL(n,$\mathbb{R}$), $g\ell(n,\mathbb{R})$ nin aynı boyutlu bir açık altmanifoldu idi. Dolayısıyle $T_e(GL(n,\mathbb{R}))$ ve $T_e(g\ell(n,\mathbb{R}))$ kanonik olarak izomorftur.

(3). $g\ell(n,\mathbb{R})$ ve $T_e(g\ell(n,\mathbb{R}))$ vektör uzaylarıdır. Bu dönüşüm, manifoldlar olarak bu vektör uzayları için kanonik izomorfizmdir.

O halde bu dönüşümlerin birleşimi

$$\begin{array}{ccc} GL(n,\mathbb{R}) \text{ nin Lie Cebiri} & \longrightarrow & g\ell(n,\mathbb{R}) \\ X & & X_e(u_{ij}) \end{array}$$

biçiminde bir Lie cebiri izomorfizmidir. dolayısıyla $GL(n,\mathbb{R})$ nin Lie cebiri $g\ell(n,\mathbb{R})$ dir.

Örnek 2.6.4: ($GL(n,\mathbb{C})$ nin Lie Cebiri)

Kompleks bileşenli bütün nxn matrislerin cümlesi $g\ell(n,\mathbb{C})$ olsun. $g\ell(n,\mathbb{C})$, $\mathbb{R}$ üzerinde $2n^2$ boyutlu bir vektör uzayıdır. $\forall X,Y\in g\ell(n,\mathbb{C})$ için $[X,Y]=XY-YX$ matris bracketi $g\ell(n,\mathbb{C})$ yi bir reel Lie cebiri yapar. $a \in g\ell(n,\mathbb{C})$ için

$$u_{ij}(a)=\mathrm{Re}\ a_{ij},\quad v_{ij}(a)=\mathrm{Im}\ a_{ij}$$

olsun. $\{u_{ij},\ v_{ij}:\ 1\leq i,j\leq n\}$ $g\ell(n,\mathbb{C})$ üzerinde bir doğal koordinat sistemidir. Bir önceki örnektekine benzer olarak $GL(n,\mathbb{C})$ Lie grubunun Lie cebirinin, $g\ell(n,\mathbb{C})$ Lie cebiri olduğu gösterilebilir. Yani $g\ell(n,\mathbb{C})$ kanonik olarak $GL(n,\mathbb{C})$ nin Lie cebirine izomorftur.

2.7. O(n) Ortogonal Grubu

$O(n)=\{g\in GL(n,\mathbb{R}):\ g^t=g^{-1}\}$ cümlesini gözönüne alalım. Bu cümlenin elemanları $\mathbb{R}^n$ üzerinde tanımlanan $\forall X,Y\in \mathbb{R}^n$ için $\langle X,Y\rangle=\sum_{i=1}^{n}x_iy_i$ öklid iç çarpmasına göre $\mathbb{R}^n$ in izometrilerinin grubudur. Yani, $g\in O(n)$ için

$$\begin{array}{l} g:\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \\ \quad X \quad g(X) \end{array}$$

lineer dönüşümü $\langle g(X),g(Y)\rangle=\langle X,Y\rangle$ bağıntısını sağlar.

$g\in O(n)$ için $g^t=g^{-1}$ olduğundan

$gg^t = I_n$

$\det(gg^t) = \det I_n$

$(\det g)^2 = 1$

$\det g = \pm 1$

dir. Buna göre

O(n), GL(n,$\mathbb{R}$) nin bir kapalı altgrubu dur ve teorem 2.2.3 gereğince bir alt Lie grubudur.

O(n) ortogonal grubunun Lie cebirini o(n) ile gösterirsek, o(n) Lie cebiri bütün nxn (reel) antisimetrik matrislerden oluşur. Yani

$o(n) = \{g \in g\ell(n,\mathbb{R}) : g^t = -g\}$

dir (O'Neill 1983).

Örnek 2.7.1. (O(2) Ortogonal Grubu)

$$\mathbb{R}_\theta = \begin{pmatrix} \mathrm{Cos}\ \theta & -\mathrm{Sin}\ \theta \\ \mathrm{Sin}\ \theta & \mathrm{Cos}\ \theta \end{pmatrix}$$

matrisini gözönüne alalım. Bu matris $\forall\ \theta \in \mathbb{R}$ sayısı için $\mathbb{R}^2$ de θ açısı kadar dönmeye karşılık gelir (Şekil 2.7.1).

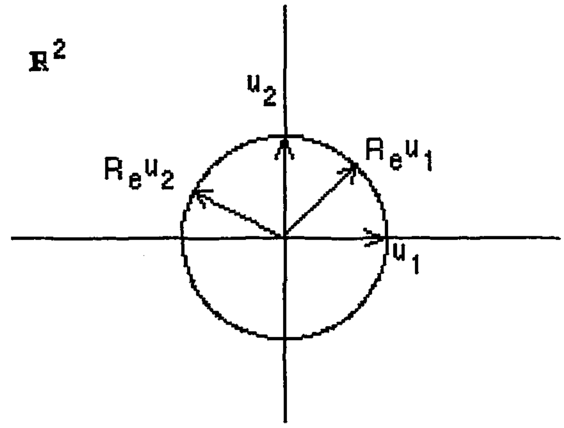
$$\mathbb{R}_\theta \mathbb{R}_\theta^t = \begin{pmatrix} \mathrm{Cos}\ \theta & -\mathrm{Sin}\ \theta \\ \mathrm{Sin}\ \theta & \mathrm{Cos}\ \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{Cos}\ \theta & \mathrm{Sin}\ \theta \\ -\mathrm{Sin}\ \theta & \mathrm{Cos}\ \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$$

yani

$$\mathbb{R}^{-1}_\theta = \mathbb{R}^t_\theta$$

olur.

Böylece $\forall\ \theta \in \mathbb{R}$ için $\mathbb{R}_\theta$ matrisi O(2) ortogonal grubunun bir elemanıdır.



Şekil 2.7.1

2.8. Yarı Ortogonal Gruplar

$g:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ lineer operatörünü, g bir nxn reel matris ve $x \in \mathbb{R}^n$ için

$$(gx)_i = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij} x_j \quad , \qquad 1 \le i,j \le n$$

olarak tanımlayalım. Bu tanımlama altında fonksiyonların ileşkesi g.h matris çarpımına karşılık gelir gx matrisi bize

$$\begin{bmatrix} g_{11} & \cdots & g_{1n} \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ g_{n1} & \cdots & g_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{n} g_{1j}\, x_j \\ \cdot \\ \cdot \\ \sum_{j=1}^{n} g_{nj}\, x_j \end{bmatrix}$$

şeklinde bir nx1 matris verir.

$o \le \nu \le n$ için, ε işaret matrisi $(\delta_{ij}\varepsilon_j)$ diyagonal matrisidir. Bu matrisin diagonal elemanları $\varepsilon_1=\varepsilon_2=...=\varepsilon_\nu=-1$ ve $\varepsilon_{\nu+1}=...=\varepsilon_n=+1$ dir. Buna göre

$$\varepsilon^{-1} = \varepsilon = \varepsilon^t$$

olur.

Yukarıdaki tanımlamalara göre $\mathbb{R}^n_\nu \to \mathbb{R}^n_\nu$ bütün lineer izometrilerin cümlesini $O(\nu,n-\nu)$ ile gösterelim. Burada $g\in GL(n,\mathbb{R})$, $\mathbb{R}^n_\nu$ nın $<v,w>=\varepsilon v w$ olarak tanımlanan skalar çarpmayı korur.

$O(\nu,n-\nu)$, $GL(n,\mathbb{R})$ nin kapalı bir altgrubu ve dolayısıyla teorem 2.2.3 gereğince $GL(n,\mathbb{R})$ nin bir Lie alt grubudur. Bu gruba yarı-ortogonal grup denir.

NOTASYON: $O(\nu,n-\nu)$ yarı ortogonal grubu kısaca $O_\nu(n)$ ile gösterilecektir.

Teorem 2.8.1: Bir g nxn matrisi için aşağıdaki şartlar denktir.

(1) $g\in O_\nu(n)$.

(2) $g^t= \varepsilon g^{-1}\varepsilon$ ve $g^{-1}= \varepsilon g^t\varepsilon$.

(3) g nin kolonları (veya satırları) $\mathbb{R}^n_\nu$ için bir baz oluşturur.

(4) $g\in O_\nu(n)$ matrisi, $\mathbb{R}^n_\nu$ nın ortonormal bazlarını ortonormal bazlara taşır.

İspat: (1)$\Leftrightarrow$(2): bir nxn matrisin tronspozu nokta çarpımına göre adjointine eşittir. Böylece $g\in O_\nu(n)$ ve $\forall v,w\in \mathbb{R}^n_\nu$ için

$$<gv,gw>=<v,w>$$
$$\varepsilon gv\bullet gw=\varepsilon v\bullet w$$
$$g^t\varepsilon gv\bullet w= \varepsilon v\bullet w$$
$$g^t\varepsilon gv= \varepsilon v$$
$$g^t\varepsilon g= \varepsilon$$
$$g^t\varepsilon= \varepsilon g^{-1}$$
$$g^t= \varepsilon g^{-1}\varepsilon$$

bulunur. $\varepsilon^{-1}=\varepsilon$ olduğundan,

$$g^t= \varepsilon g^{-1}\varepsilon$$
$$\varepsilon g^t= g^{-1}\varepsilon$$

$$\varepsilon g^t \varepsilon = g^{-1}$$

olur.

(1)⇔(4): Teorem 1.3.3 den görülür.

(4)⇔(3): (Kolonlar için) $u_1, u_2, \ldots, u_n$ $\mathbb{R}^n_\nu$ için bir ortonormal baz ise $gu_1, gu_2, \ldots, gu_n$ kolon vektörleri de (4) den dolayı $\mathbb{R}^n_\nu$ için ortonormal bazdır. (2) ye göre $g \in O_\nu(n)$ için $g^t \in O_\nu(n)$ olduğundan bu durum satırlar için de geçerlidir.

Eğer $\nu=0$ veya $\nu=n$ ise $O_\nu(n)$ grubu $\mathbb{R}^n$ Öklid uzayının bütün lineer izometrilerinin ortogonal grubudur. $n \geq 2$ için $O_1(n)=O(1,n-1)$ yarı-ortogonal grubu $\mathbb{R}^n_1$ Minkowsky uzayının lineer izometrilerinin Lorentz grubudur.

Herhangi bir ν değeri için, $O_\nu(n)$ ve $O_{n-\nu}(n)$ Lie grupları izomorftur. Gerçekten,

$$\sigma = \begin{pmatrix} 0 & I_{\nu-n} \\ I_\nu & 0 \end{pmatrix}$$

$O_\nu(n)$ i $O_{n-\nu}(n)$ e taşıyan bir Lie grubu izomorfizmidir.

Teorem 2.8.2: $O_\nu(n)$ Lie grubunun Lie cebirini $o_\nu(n)$ ile gösterirsek, $o_\nu(n)$ $g\ell(n,\mathbb{R})$ nin bir alt cebiridir ve

$$o_\nu(n)=\{S \in g\ell(n,\mathbb{R}): S^t=-\varepsilon S \varepsilon\}$$

dır. Buna göre $a \in o(\nu)$, $b \in o(n-\nu)$ ve x bir $\nu x(n-\nu)$ matris olmak üzere

$$S=\begin{bmatrix} a & x \\ x^t & b \end{bmatrix}$$

formundadır. (O'Neill 1983)

Bunu biraz daha açıklayalım:

a $\nu x \nu$ ve b $(n-\nu)x(n-\nu)$ matrisler olmak üzere

$$S=\begin{bmatrix} a & x \\ y & b \end{bmatrix}$$

formunda yazalım.

$$\varepsilon=\begin{bmatrix} -I_v & 0 \\ 0 & I_{n-v} \end{bmatrix}$$

olduğundan

$$S^t=\begin{bmatrix} a^t & y^t \\ x^t & b^t \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad -\varepsilon S\varepsilon=\begin{bmatrix} -a & x \\ y & -b \end{bmatrix}$$

olarak hesaplanır ve

$$S^t=-\varepsilon S\varepsilon$$

olduğundan, $S\in o_v(n)$ için

$$\begin{bmatrix} a^t & y^t \\ x^t & b^t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a & x \\ y & -b \end{bmatrix}$$

bulunur.

boyo(v)=$v(v-1)/2$ olduğundan,

boy $O_v(n)$ =boy $o_v(n)=n(n-1)/2$ şeklinde v den bağımsız olarak hesaplanır.

Örnek 2.8.3: ($O_1(2)$ Yarı-Ortogonal Grubu)

$\forall\varphi\in\mathbb{R}$ sayısı için

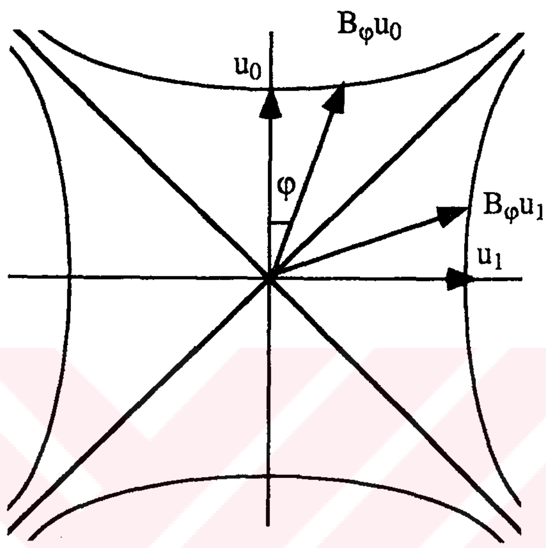
$$B\varphi=\begin{pmatrix} Cosh\varphi & Sinh\varphi \\ Sinh\varphi & Cosh\varphi \end{pmatrix}$$

matrisini gözönüne alalım. Bu matris $\forall\varphi\in\mathbb{R}$ sayısı için R de φ Lorentz açısı kadar Lorentz anlamında dönmeye karşılık gelir. (Şekil 2.8.1)

Bu B_φ matrisi için

$$B_\varphi^{-1}=\varepsilon B_\varphi^t\varepsilon,\quad \varepsilon=(\delta_{ij}\varepsilon_j),$$

olduğundan $\forall\varphi\in\mathbb{R}$ için $B\varphi$ matrisi yarı-ortogonal matristir. Böylece bu matris $O_1(2)$ yarı-ortogonal grubunun bir elemanıdır.



Şekil 2.8.1

2.9. Sol İnvaryant 1-formlar

Sol invaryant Vektör Alanı:

G bir matris Lie grubu olmak üzere G üzerinde bir vektör alanı,

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "X"] \arrow[rr, bend right, "p\circ X"'] & UT_g(G) \arrow[r, "P"] & G \\ & g\in G & \end{tikzcd}$$

$$p\circ X\colon G\longrightarrow G$$

dönüşümü bir özdeşlik dönüşümü olacak şekilde X dönüşümüdür. Ayrıca gördük ki, X vektör alanı $\forall g_o, g \in G$ için

$$X(g_o) \in T_{g_o}(G)$$
$$\ell(g)_* \, X(g_o) = X(gg_o) \in T_{gg_o}(G)$$

oluyorsa X vektör alanına G üzerinde bir sol invaryant vektör alanı denir.

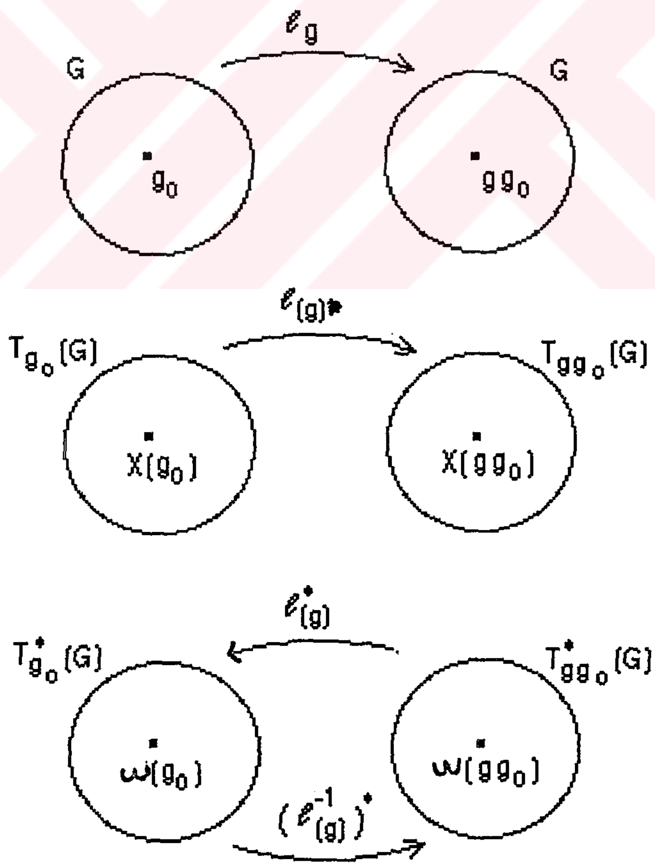
Sol İnvaryant 1- form:

G bir matris Lie grubu olmak üzere G üzerinde 1- form diye,

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "w"] \arrow[rr, bend right, "q \circ w"'] & \bigcup_{g \in G} T^*(G) \arrow[r, "q"] & G \end{tikzcd}$$

$$q \circ w : G \to G$$

dönüşümü bir özdeşlik dönüşümü olacak şekildeki w dönüşümüne denir.



Şekil 2.9.1

Eğer w 1-formu $\forall g_o, g \in G$ için $w(g) \in T^*_{g_o}(G)$ ve $w(gg_o) \in T^*_{gg_o}(G)$ olmak üzere

$$\ell^*_{(g)}[(gg_o)]=w(g_o) \Rightarrow (\ell^*_{(g)})(w)=w \circ \ell_{g^{-1}} \ , \ \forall g \in G$$

veya aynı şey demek olan

$$(\ell^{-1}_{(g)})^* w(g_o)=w(gg_o) \Rightarrow (\ell^{1}_{(g)})^*(w)=w(g) \ , \ \forall g \in G$$

oluyorsa w 1-formuna, G üzerinde bir sol invaryant 1-form denir.

Teorem 2.9.1: G üzerindeki herhangi bir vektör alanı X olsun. X, C^∞ sınıfından ise duali olan 1-form da C^∞ sınıfındandır.

İspat: $T_e(G)$ nin bir ortanormal bazı

$\{w_1(e),...,w_n(e)\}$ olduğuna göre

$$X=\sum_{i=1}^{n} a_i w_i$$

yazılabilir. X C^∞ sınıfından olduğundan a_i fonksiyonları da C^∞ sınıfındandırlar. Diğer taraftan $\{w_1(e),...,w_n(e)\}$ ye dual olan baz $\{w^*_1(e),...,w^*_n(e)\}$ ise

$$w^*_i(w_j)=\delta_{ij}$$

olduğundan,

$$w^*_i(X)=a_i$$

de C^∞ sınıfından olur.

Sonuç 2.9.2: Eğer $X \in \chi_\ell$ ise

$$(\ell_g)_*(X(e))=X(ge)=\sum_{i=1}^{n} a_i(ge)w_i(ge)$$

ve

$$(\ell^{1}_{(g)})^*[w^*_i(X(e))]=(\ell^{1}_{(g)})^*(a_i(e))$$

$$=a_i(ge)$$

olur. O halde

$$w^*_i|_e\ X=a_i(e) \text{ veya } w^*_i|_{ge}\ X=a_i(ge)$$

ve

$$(\ell^1_{(g)})^*[w^*_i|_e](X)=a_i(ge)$$

den

$$\forall X\in\chi_\ell \quad \text{için} \quad (\ell^1_{(g)})^*[w^*_i|_e](X)=w^*_i|_{ge}(X)$$

olacağından w^*_i lar da birer sol invaryant 1-form olurlar. Buna göre dual X de sol invaryant 1-formdur.

Sonuç 2.9.3: Her bir sol invaryant k-form

$$\sum_H a_H \overset{*}{w}_H \,, \qquad H=\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & k \\ i_1 & i_2 & \dots & i_k \end{pmatrix} \qquad i_k=\sigma(k)$$

$$\sigma:\ H \xrightarrow[\text{üzerine}]{1:1} H$$

$$\overset{*}{w}_H=\overset{*}{w}_{i_1} \wedge \overset{*}{w}_{i_2}\wedge\dots\wedge\overset{*}{w}_{i_k}$$

şeklindedir. O halde sol invaryant formların çarpımı da bir sol invaryant formdur.

Tıpkı sol invaryant vektör alanlarında olduğu gibi sol invaryant 1-formlar da dif.bilirdirler. Bu nedenle sol invaryant 1-formların ayrıca dif.bilir olduklarını kabul etmeye gerek yoktur. Zira dif.bilirlik sol invaryantlığın bir sonucudur.

3. MATRİS LİE GRUPLARI ÜZERİNDE SOL İNVARYANT 1-FORMLAR VE YAPI DENKLEMLERİ

Bu bölümde bir matris Lie grubu üzerinde sol invaryant 1-formlar için formüller elde edeceğiz. Daha sonra $GL(n,\mathbb{R})$ genel lineer grubu, $O(n)$ ortogonal grubu ve $O_v(n)$ yarı-ortogonal grubu üzerinde sol invaryant formların dış türevlerini hesaplayacağız.

Matris Lie grupları üzerinde sol invaryant formları hesap etmek için önce $GL(n,\mathbb{R})$ üzerinde hesaplama yapılacak, sonra da bu özel halde elde edilen çözüm, herhangi bir matris Lie grubu için aynı problemin çözümünde kullanılacaktır. Bu neticeler uygulanarak sol invaryant 1-formlar ve sol invaryant vektör alanlarının C^∞ sınıfından oldukları sonucuna varılacaktır.

3.1. GL(n,ℝ) Matris Lie Grubu Üzerinde Hesaplama

$GL(n,\mathbb{R})$ matris Lie grubu E^{n^2} nin bir açık altcümlesidir. $GL(n,\mathbb{R})$ nin elemanları $g=[g_{ij}]$ ve $x\in E^{n^2}$ nin elemanları $x=[x_{ij}]$, $1\le i,j\le n$, ile gösterilecektir.

$\{\frac{\partial}{\partial x_{ij}} : 1\le i,j\le n\}$ ile $T_x(E^{n^2})$ nin bir ortonormal bazını ve $\{dx_{ij}: 1\le i,j\le n\}$ ile de $T^*_x(E^{n^2})$ ın dual bazını göstereceğiz. O zaman $g\in GL(n,\mathbb{R})$ için $T^*_g(E^{n^2})$ ın ortonormal bazı

$$\{dx_{ij}|_g : 1\le i,j\le n\}$$

dir.

Daha önce $w\in T^*(GL(n,\mathbb{R}))$ ve $\forall\ g_1,g_2\in G$ için

$(\ell^{1}_{(g_1)})^* w(g_2)=w(g_1g_2)$ veya $(\ell^{-1}_{(g_1)})^*(w)=w(g_1)$ olarak $GL(n,\mathbb{R})$ üzerindeki sol invaryant 1-formları tanımlamıştık. Ω_ℓ de bu formların vektör uzayı idi. Ω_ℓ uzayı χ_ℓ nin dual uzayıdır.

Teorem 3.1.1: $\forall$ g, x $\in GL(n,\mathbb{R})$ için

$$[(\ell_{(g)}^{-1})^{*}(dx_{ik}|_{x})]=[g_{ij}]^{-1}[dx_{jk}|_{gx}]$$

dır (Hacısalihoğlu 1980).

Teorem 3.1.2: $GL(n,\mathbb{R})$ üzerindeki Ω_{ℓ} sol invaryant 1-formlar uzayı için

$$[w_{ki}|_{g}]=[g_{kj}]^{-1}[dx_{ji}|_{g}], \quad 1\leq i,k\leq n$$

olarak tanımlanan w_{ki} 1-formları bir bazdır (Hacısalihoğlu 1980).

Tanım 3.1.3: $[w_{ij}|_{g}]=[g_{ik}]^{-1}[dx_{kj}|_{g}]$

şeklinde tanımlanan w_{ij} 1-formlarına $GL(n,\mathbb{R})$ üzerinde asli 1-formlar denir.

Sonuç 3.1.4: $GL(n,\mathbb{R})$ üzerindiki asli 1-formlar için

$$[dx_{kj}|_{g}]=[dg_{kj}]=dg$$

olduğundan

$$[w_{ij}|_{g}]=g^{-1}dg$$

dir.

3.2. İnclusion Fonksiyonu

X ve Y verilen iki cümle olsun. $\forall x\in X$ için $i(x)=x\in Y$ olarak tanımlanan

$$i:\ X\rightarrow Y$$

fonksiyonununa X den Y ye bir inclusion fonksiyonu denir ve

$$i:\ X\subset Y$$

olarak yazılır (Hacısalihoğlu 1980).

Buna göre her inclusion fonksiyonu birebirdir.

Örnek 3.2.1: X bir cümle olmak üzere $i: X\subset Y$ inclusion fonksiyonu X üzerinde bir özdeşlik fonksiyonudur. Bu halde $i^{-1}=i$ dir.

İnclusion fonksiyonu sayesinde $GL(n,\mathbb{R})$ nin herhangi bir G alt matris Lie grubu için

$$i: G\subset GL(n,\mathbb{R})$$

i* lineer dönüşümü

$$i^*: T^*(GL(n,\mathbb{R}))\rightarrow T^*(G)$$

ile $GL(n,\mathbb{R})$ üzerindeki $w_{ij}\in T^*(GL(n,\mathbb{R}))$ 1-formların resimleri olarak, G üzerinedki 1-formları tanımlamak mümkündür.

3.3. G Üzerindeki Sol İnvaryant 1-formlar

$\forall g,g_o\in GL(n,\mathbb{R})$ ve $w(g_o)\in T^*(GL(n,\mathbb{R}))$ için

$$\ell_{(g)}^* [w(gg_o)]=w(g_o)$$

oluyorsa (ki buradan $(\ell_g^{-1})^* w(g_o)=w(gg_o)$ dır) w 1-formuna, $GL(n,\mathbb{R})$ üzerinde $\ell_{(g)}$ ye göre sol invaryant 1-form denir.

$i: G\subset GL(n,\mathbb{R})$ inclusion fonksiyonu altında $GL(n,\mathbb{R})$ deki sol invaryant 1-formlardan G deki aynı cins 1-formları elde edebiliriz. Bunun için i nin

(a) $i\ \ell_g=\ell_g\ i$

(b) $i^*\ (\ell_g)^*=(\ell_g)^*\ i^*$

özelliklerinden yararlanabiliriz.

İspat (a): ℓ_g , G ve $GL(n,\mathbb{R})$ üzerinde sol grup paralelizmi ve $i:G\subset GL(n,\mathbb{R})$ inclusion fonksiyonu olsun.

$\forall g_o\in G$ için

$$i\ \ell_g\ (g_o)= i(gg_o)= gg_o\in GL(n,\mathbb{R})$$

ve

$$\ell_g\ i(g_o)= \ell_g(g_o)= gg_o\in GL(n,\mathbb{R})$$

olduğundan $i \circ \ell_g = i\, \ell_g$ yazarsak

$$i\, \ell_g = \ell_g\, i$$

olur.

İspat (b): $\left.\begin{array}{l} (i\, \ell_g)^* = \ell^*_g\, i^* \\ (\ell_g\, i)^* = i^*\, \ell^*_g \end{array}\right\}\ i\, \ell_g = \ell_g\, i \Rightarrow i^* \ell^*_g = \ell^*_g\, i^*$

olur.

$$\ell^*_{(g)}(w(gg_o)) = w(g_o)$$

yani w, GL(n,$\mathbb{R}$) üzerinde bir sol invaryant 1-form olsun. $\forall g_o \in GL(n,\mathbb{R})$ için ve $w(g_o) \in T^*_{(g_o)}(GL(n,\mathbb{R}))$ için

$$i^* \ell^*_g\ (w(gg_o)) = i^*\ (w(g_o)) = \xi(g_o) \in T^*_{(g_o)}(G)$$

$$i^* \ell^*_g\ (w(gg_o)) = \xi(g_o) \qquad (1)$$

dır. Ayrıca

$$\ell^*_g\ i^*\ (w(gg_o)) = \ell^*_g\ (\xi(gg_o)) \qquad (2)$$

$$\xi(gg_o) \in T^*_{(gg_o)}(G)$$

(1) ve (2) nin sol tarafları eşit olduğundan

$$\ell^*_g\ (\xi(gg_o)) = \xi(g_o)$$

ve buradan da

$$(\ell^{1}_{(g)})^*\ \xi(g_o) = \xi(gg_o)$$

elde edilir. O halde GL(n,$\mathbb{R}$) üzerindeki sol invaryant 1-formlar, i: $G \subset GL(n,\mathbb{R})$ ile G deki sol invaryant 1-formlara dönüşürler.

Buna göre $\{w_{ij}\}$, $1 \le i,j \le n$, GL(n,$\mathbb{R}$) üzerindeki Ω_ℓ uzayını geriyorsa $\{i^* w_{ij}\}$ de G üzerindeki sol invaryant 1-formların uzayını gererler.

G nin özelliklerine göre bu ikinci uzayın boyutu, yani $i^*(w_{ij})$ ler genel olarak lineer bağımsız değillerdir. Fakat bunlar arasından G üzerindeki sol invaryant 1-formlar için bir baz seçilebilir.

3.4. G=O(n) Üzerindeki Sol İnvaryant 1-Formlar

$$i:\ O(n)\to GL(n,\mathbb{R})$$

inclusion dönüşümü olsun. $\forall g\in O(n)$ için

$$i^*(w_{ij}|_g)=\xi_{ij}|_g\ \in T^*_{(g)}\,(O(n))$$

diyelim. Teorem 3.1.2 de Ω_ℓ nin bir $\{w_{ij}\}$ bazı

$$[w_{ij}|_g]=[g_{ik}]^{-1}\ [dx_{kj}|_g]$$

olarak seçilmişti. Bu matrisel ifadenin $\forall g\in GL(n,\mathbb{R})$ için

$$[w_{ij}|_g]=g^{-1}dg$$

şeklinde yazılabileceğini sonuç 3.1.4 de görmüştük.

Eğer $g\in GL(n,\mathbb{R})$

$$i(g)=g$$

olarak

$$i:O(n)\to GL(n,\mathbb{R})$$

inclusion dönüşümünden elde edilmiş ise, yani $g\in O(n)$ ise

$$g^{-1}=g^t$$

olduğundan

$$g^tg=e$$

olur. Buradan $GL(n,\mathbb{R})$ deki bu cins g ler için

$$d(g^tg)=de$$

$$dg^tg+g^tdg=0$$

$$(g^tdg)^t+g^tdg=0$$

veya

$$g^t=g^{-1}$$

olduğundan

$$(g^{-1}dg)^t+g^{-1}dg=0$$

elde edilir. Bu da $w_{ij}|_g\in T^*_g(GL(n,\mathbb{R}))$ olmak üzere

$$[w_{ij}|_g]^t+[w_{ij}|_g]=0$$

ve buradan

$$w_{ji}|_g + w_{ij}|_g = 0$$

dır. Burada

$$i^*: T_g^*(GL(n,\mathbb{R})) \to T_g^*(O(n))$$

lineer dönüşümü ise

$$i^*(w_{ji}|_g + w_{ij}|_g) = i^*(0)$$

$$i^*(w_{ji}|_g) + i^*(w_{ij}|_g) = 0$$

$$\xi_{ji}|_g + \xi_{ij}|_g = 0$$

$$\xi_{ij} = -\xi_{ji}$$

olur. O halde

$$\xi_{ii} = 0, \; 1 \le i \le n, \; (\text{n tanesi sıfır})$$

dır. Demek oluyor ki $\{\xi_{ij}\}$ de $\frac{n^2-n}{2}$ tane ξ_{ij} kendi aralarında lineer bağımsız olabilirler. Buna göre

$$\text{boy } T^*(O(n)) = \text{boy } T(O(n)) = \text{boy } O(n) = \frac{n^2-n}{2} = \sum_{i=1}^{n-1} i$$

olarak bulunur.

Tanım 3.4.1: Yukarıdaki bulduğumuz ξ_{ij} 1-formlarına O(n) üstünde asli 1-formlar denir.

O(n) üstündeki sol invaryant 1-formların uzayı $\Omega_\ell(O)$ ile gösterilirse $\Omega_\ell(O)$ nın bir bazı $\{w_{ij}\}$, $i \le i \le n$ dir. Diğer taraftan O(n) in e noktasındaki $T_e(O(n))$ tanjant uzayının bir bazı

$$\left\{\frac{\partial}{\partial x_{ij}|_e} - \frac{\partial}{\partial x_{ji}|_e}, \; 1 \le i,j \le n\right\}$$

olduğundan

$$\xi_{k\ell}|_e\left(\frac{\partial}{\partial x_{kj}|_e} - \frac{\partial}{\partial x_{jl}|_e}\right) = \delta_{ik} \bullet \delta_{jl}, \; , \qquad k<l$$

dir.

3.5. $G=O_v(n)$ Üzerindeki Sol İnvaryant 1-Formlar

$$i:O_v(n)\rightarrow GL(n,\mathbb{R})$$

inclusion dönüşümü ve $\forall g\in O_v(n)$ için

$$i^*(w_{ij}|_g) = \xi_{ij}|_g \in T_g^*(O_v(n))$$

olsun. $GL(n,\mathbb{R})$ üzerindeki sol invaryant 1-formların bir bazı $\{w_{ij}\}$ ise $\forall g\in GL(n,\mathbb{R})$ için

$$[w_{ij}|_g]=g^{-1}dg$$

şeklinde idi. $g\in GL(n,\mathbb{R})$

$$i(g)=g$$

olarak

$$i:O_v(n)\rightarrow GL(n,\mathbb{R})$$

inclusion dönüşümü yardımıyla elde edilmiş olsun.

$g\in O_v(n)$ için $\varepsilon=[\delta_{ij}\varepsilon_j]$, $1\leq i,j\leq n$, olmak üzere

$$g^t=\varepsilon g^{-1}\varepsilon \text{ veya } g^{-1}=\varepsilon g^t\varepsilon$$

şeklindedir. Buna göre

$$g^{-1}g=e$$

ve $g^{-1}=\varepsilon g^t\varepsilon$ olduğundan

$$\varepsilon g^t\varepsilon g=e$$

elde edilir. Buradan $GL(n,\mathbb{R})$ deki bu cins g ler için

$$d(\varepsilon g^t\varepsilon g) = de$$

$$d(\varepsilon g^t)\varepsilon g + \varepsilon g^t d(\varepsilon g) = 0$$

$$\varepsilon dg^t \varepsilon g + \varepsilon g^t \varepsilon dg = 0$$

$$(g^t \varepsilon dg\varepsilon)^t + \varepsilon g^t \varepsilon dg = 0$$

$g^t=\varepsilon g^{-1}\varepsilon$ olduğundan

$$(\varepsilon g^{-1}\varepsilon \varepsilon dg\varepsilon)^t + \varepsilon\varepsilon g^{-1}\varepsilon\varepsilon dg = 0$$

$\varepsilon\varepsilon=e$ olduğundan

$$(\varepsilon g^{-1}dg\varepsilon)^t + g^{-1}dg = 0$$

$\varepsilon^t=\varepsilon$ olduğundan

$$\varepsilon(g^{-1}dg)^t\varepsilon+g^{-1}dg=0$$

elde edilir.

$g^{-1}dg = [w_{ij}|_g]$ olarak yerine yazılırsa

$$\varepsilon[w_{ij}|_g]^t\varepsilon + [w_{ij}|_g] =0$$

veya

$$\varepsilon[w_{ji}|_g]\varepsilon + [w_{ij}|_g] =0$$

bulunur.

Bu eşitliği daha iyi tanımak istersek, $\varepsilon=[\delta_{ij}\varepsilon_j]$ olduğundan,

$$\varepsilon[w_{ji}|_g]\varepsilon + [w_{ij}|_g] =0$$

$$[\delta_{kj}\varepsilon_j]\ [w_{ji}|_g]\ [\delta_{is}\varepsilon_s] + [w_{ij}|_g] =0$$

$$[\sum_{j=1}^{n}\delta_{kj}\varepsilon_j w_{ji}|_g]\ [\delta_{is}\varepsilon_s] + [w_{ij}|_g] =0$$

$$[\varepsilon_j w_{ji}|_g]\ [\delta_{is}\varepsilon_s] + [w_{ij}|_g] =0$$

$$[\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_j w_{ji}|_g\ \delta_{is}\varepsilon_s] + [w_{ij}|_g] =0$$

$$[\varepsilon_j w_{ji}|_g \varepsilon_i] + [w_{ij}|_g] =0$$

$$[\varepsilon_i\varepsilon_j w_{ji}|_g] + [w_{ij}|_g] =0$$

bulunur. Buna göre

$$\varepsilon_i\varepsilon_j w_{ji}|_g + w_{ij}|_g =0$$

yazılır. Buradan da

$$i^*:\ T_g^*(GL(n,\mathbb{R}))\to T_g^*(O_\nu(n))$$

lineer dönüşümü ise

$$i^*(\varepsilon_i\varepsilon_j w_{ji}|_g + w_{ij}|_g)= i^*(0)$$

$$\varepsilon_i\varepsilon_j i^*(w_{ji}|_g) + i^*(w_{ij}|_g)= 0$$

$i^*(w_{ij}|_g) = \xi_{ij}|_g \in T_g^*(O_\nu(n))$ dersek

$$\varepsilon_i\varepsilon_j\ \xi_{ji}|_g + \xi_{ij}|_g = 0 \Rightarrow \varepsilon_i\varepsilon_j\ \xi_{ji} = -\xi_{ij}$$

olarak hesaplanır.

Buna göre $\varepsilon_1=...=\varepsilon_\nu=-1$ ve $\varepsilon_{\nu+1}=...=\varepsilon_n=1$ olduğundan

$1 \leq i,j \leq v$ için $\xi_{ji} + \xi_{ij} = 0$ yani $\xi_{ji} = -\xi_{ij}$

$v+1 \leq i,j \leq n$ için $\xi_{ji} + \xi_{ij} = 0$ yani $\xi_{ji} = -\xi_{ij}$

$1 \leq i \leq v$ ve $v+1 \leq j \leq n$ veya

$v+1 \leq i \leq n$ ve $1 \leq j \leq v$ için $-\xi_{ji} + \xi_{ij} = 0$ yani $\xi_{ji} = \xi_{ij}$

dir.

$i=j$ için $\xi_{ii} = 0$, $1 \leq i \leq n$, (n tanesi sıfır) dır. Geriye kalanların da yarısı, diğer yarısı cinsinden ifade edilebiliyor. Buna göre $\{\xi_{ij}\}$ de $\frac{n^2-n}{2}$ tane ξ_{ij} kendi aralarında lineer bağımsız olabilirler. O halde

$$\text{boy } T^*(O_v(n)) = \text{boy } T(O_v(n)) = \text{boy } O_v(n) = \frac{(n-1)n}{2} = \sum_{i=1}^{n-1} i \text{ dir.}$$

Böylece $GL(n,\mathbb{R})$, $O(n)$ ve $O_v(n)$ üzerinde asli 1-formları görmüş olduk. Şimdi bu Lie grupları üzerindeki yapı denklemlerini hesaplamak için kullanacağımız dış türev ve üst yıldız operatörünün özelliklerini kısaca hatırlayalım.

3.6. Dış Türevler

Bir G matris Lie grubu üzerinde p-formların cümlesi $\Omega^p(G)$ olsun. $w \in \Omega^p(G)$ ise

$$w = \sum_{h_1 < \ldots < h_p} a_H dx_H \quad , \quad H = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & p \\ h_1 & h_2 & \ldots & h_p \end{pmatrix}$$

dır. Burada $a_H : G \to \mathbb{R}$ fonksiyonu

$$a_H(x) = a_H(x_1, \ldots, x_n) \quad , \quad x = (x_1, \ldots, x_n) \in G$$

dir.

$\eta \in \Omega^p(G)$ ise

$$\eta = \sum b_K dx_K \; , \quad K = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & q \\ h_1 & h_2 & \ldots & h_q \end{pmatrix}$$

dır. Buna göre

$$w\Lambda\eta = \sum a_H b_K dx_H \Lambda dx_K \in \Omega^{p+q}(G)$$

dir. Eğer a_H ve b_K fonksiyonları C^∞ sınıfından iseler $w\Lambda\eta$ da C^∞ sınıfındandır.

G üzerindeki bir d operatörü diye

$$d: \Omega^p(G) \to \Omega^q(G)$$

şeklinde bir d dönüşümüne denir. d operatörünün özellikleri şunlardır.

Teorem 3.6.1:

(1) $d(w_1+w_2)=d(w_1)+d(w_2), \ \forall \ w_1,w_2 \in \Omega^p(G)$

(2) $d(w\Lambda\eta)=dw\Lambda\eta+(-1)^{\deg w} w\Lambda d\eta$

(3) $d(dw)=0, \ \forall \ w \in \Omega^p(G)$ (Poincare Teo.)

(4) $df= \sum \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i, \qquad \forall \ f \in \Omega^0(G)$

(Flanders 1963).

3.7. Üst Yıldız Operatörü

M ve N sırası ile m ve n boyutlu iki manifold olsunlar.

$$\Phi: M \to N$$

ise

$$\Phi^*: \Omega^p(N) \to \Omega^p(M)$$

şeklinde bir fonksiyondur.

$x=(x_1,x_2,...,x_m)\in M$ ve $y=(y_1,y_2,...,y_n)\in N$, $\Phi_i=y_i(x_1,x_2,...,x_m)$, $1\leq i\leq n$, olmak üzere Φ_i ler C^∞ sınıfından kabul ediliyor.

$$d\Phi_i= \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial y_i}{\partial x_j} dx_j \in \Omega^1(M)$$

ve

$$w= \sum_{i=1}^{n} a_i(y)dy_i \in \Omega^1(N)$$

dir.

$$\Phi^*(w)=\Sigma a_i(y(x))\frac{\partial y_i}{\partial x_j}\,dx_j \in \Omega^1(M)$$

olur.

Teorem 3.7.1: Üst yıldız operatörü için şu özellikler vardır.

(1) $\Phi^*(w_1+w_2)=\Phi^*(w_1)+\Phi^*(w_2)$

(2) $\Phi^*(w_1\Lambda w_2)=\Phi^*(w_1)\Lambda\Phi^*(w_2)$

(3) $w\in \Omega^p(N)$ ise $d(\Phi^*(w))=\Phi^*(dw)$

(Flanders 1963)

Bu hazırlıklardan sonra artık $GL(n,\mathbb{R})$, $O(n)$ ve $O_v(n)$ matris Lie grupları üzerindeki sol-invaryant formların dış türevlerini hesaplayabiliriz. Bunun için yine ilk olarak hesaplamalarımızı $GL(n,\mathbb{R})$ üzerinde yapacağız.

3.8. GL(n,ℝ) Üzerinde Yapı Denklemleri

$GL(n,\mathbb{R})$ üzerindeki sol invaryant w_{ik} 1-formları

$$[w_{ik}|_g]=[g_{ij}]^{-1}\,[dx_{jk}|_g] \quad , \quad g\in GL(n,\mathbb{R})$$

şeklinde verilmişlerdi. w_{ij} lerin dış türevleri için şu teorem vardır.

Teorem 3.8.2: $GL(n,\mathbb{R})$ Üzerindeki sol invaryant 1-formlar için

$$w=[w_{ik}I_g]=[g_{ij}]^{-1}\,[dx_{jk}I_g] \quad , \quad g\in GL(n,\mathbb{R})$$

olmak üzere

$$dw_{ik}=-\Sigma w_{ij}\Lambda w_{jk}$$

dır.

İspat: $[g_{ij}]^{-1}=[h_{ij}]$

dersek

$$[g_{ij}]\ [h_{jk}] = [h_{ij}]\ [g_{jk}]=e$$

olur. Buna göre

$$w_{ij}|_g = w_{ij}(g)= \sum_{k=1}^{n} h_{ik}dx_{kj}(g)$$

yazılabilir. Buradan,

$$dw_{ij}(g)= \sum_{k=1}^{n} \{(dh_{ik}\Lambda dx_{kj}(g)+h_{ik}\Lambda \underbrace{d(dx_{kj}(g))}_{0}\}$$

$$dw_{ij}(g)= \sum_{k=1}^{n} dh_{ik}\Lambda dx_{kj}(g) \qquad (3)$$

bulunur. Diğer taraftan

$$[w_{ij}(g)]= [g_{ik}]^{-1}[dx_{kj}(g)] \Rightarrow [dx_{kj}(g)]= [g_{kj}]\ [w_{ij}(g)]$$

olduğundan

$$dx_{kj}(g)= \sum_{s=1}^{n} g_{ks}\ w_{sj}(g)$$

bulunur. Bu değer (3) denkleminde yerine yazılırsa

$$dw_{ij}(g)= \sum_{k=1}^{n} dh_{ik}\ \Lambda\ \sum_{S=1}^{n} g_{ks}\ w_{sj}(g)$$

$$dw_{ij}(g)= \sum_{k,s=1}^{n} g_{ks}dh_{ik}\ \Lambda\ w_{sj}(g)$$

$$dw_{ij}(g)= \sum_{s=1}^{n} (\sum_{k=1}^{n} dh_{ik}g_{ks})\ \Lambda\ w_{sj}(g) \qquad (4)$$

olur. Ayrıca

$$[h_{ik}]\ [g_{ks}]=e$$

olduğundan

$$\sum_{k=1}^{n} h_{ik}\ g_{ks}=\delta_{is}$$

veya

$$\sum_{k=1}^{n} dh_{ik}\ g_{ks}+\sum_{k=1}^{n} h_{ik}\ dg_{ks}= 0$$

olur ve buradan da

$$\sum_{k=1}^{n} dh_{ik}\ g_{ks}= - \sum_{k=1}^{n} h_{ik}dg_{ks}$$

elde edilir ve (4) de yerine yazılırsa

$$dw_{ij}(g)= \sum_{s=1}^{n} (-\sum_{k=1}^{n} h_{ik}\ dg_{ks}) \wedge w_{sj}(g)$$

$$dw_{ij}(g)= -\sum_{s=1}^{n} (\sum_{k=1}^{n} h_{ik}\ dg_{ks}) \wedge w_{sj}(g)$$

$$dw_{ij}(g)= -\sum_{s=1}^{n} w_{is}(g) \wedge w_{sj}(g) \quad , 1\leq i,j\leq n \tag{5}$$

olur.

Tanım 3.8.2: (5) denklemlerine $GL(n,\mathbb{R})$ matris Lie grubunun yapı denklemleri denir.

(5) denklemleri matris formunda $w=[w_{ij}]$ konumu ile

$$dw=-w\wedge w^t \text{ veya } dw=w\wedge(-w^t)$$

şeklinde de yazılabilirler.

3.9. O(n) Üzerinde Yapı Denklemleri

Bunun için

$$i:O(n)\to GL(n,\mathbb{R})$$

inclusion dönüşümünden yararlanacağız. (5) ün her iki tarafına i^* lineer dönüşümü uygulanırsa, i^* lineer olduğundan,

$$i^*(dw_{ij}(g))= -\sum_{s=1}^{n} i^*(w_{is}(g) \wedge w_{sj}(g))$$

veya Teorem 3.7.1 in (2) sine göre sağ taraf

$$i^*(dw_{ij}(g))= -\sum_{s=1}^{n} i^*(w_{is}(g)) \wedge i^*(w_{sj}(g))$$

olur ve Teorem 3.7.1 in (3) ünden sol taraf

$$d(i^*(dw_{ij}(g)))=-\sum_{s=1}^{n} i^*(w_{is}(g)) \wedge i^*(w_{sj}(g)) \tag{6}$$

şeklinde yazılabilir.

$$i^*(w_{ij})=\xi_{ij} \quad , \quad 1\leq i,j\leq n,$$

konumu yapmıştık. O halde (6) ifadesinden $\forall g\in O(n)$ için

$$d\xi_{ij}(g)= -\sum_{s=1}^{n} \xi_{is}(g) \wedge \xi_{sj}(g) \qquad (7)$$

elde edilir. Buna göre

$$d\xi_{ij}= -\sum_{s=1}^{n} \xi_{is} \wedge \xi_{sj}$$

$$[d\xi_{ij}]=-[\xi_{is}] \wedge [\xi_{sj}]$$

ve $\xi=[\xi_{ij}]$ dersek

$$d\xi=-\xi \wedge \xi^t$$

ve $-\xi^t=\xi$ olduğundan

$$d\xi= \xi \wedge \xi$$

bulunur.

Tanım 3.9.1: (7) denklemlerine O(n) üzerinde yapı denklemleri denir.

3.10. $O_v(n)$ Üzerinde Yapı Denklemleri

$i:O_v(n)\rightarrow GL(n,\mathbb{R})$ inclusion dönüşümü için

$$i^*: T_g^*(GL(n,\mathbb{R}))\rightarrow T_g^*(O_v(n))$$

şeklindedir.

$GL(n,\mathbb{R})$ matris Lie grubunun yapı denklemleri

$$dw_{ij}(g)=-\sum_{s=1}^{n} w_{is}(g))\wedge w_{sj}(g) \quad , \quad 1\leq i,j\leq n$$

olarak hesaplamıştı. Bunun her iki tarafına i^* lineer dönüşümü uygulanırsa

$$i^*(dw_{ij}(g))= -\sum_{s=1}^{n} i^*(w_{is}(g) \wedge w_{sj}(g))$$

veya Teorem 3.7.1 in (2) sine göre sağ taraf

$$i^*(dw_{ij}(g))= -\sum_{s=1}^{n} \{i^*(w_{is}(g)) \wedge i^*(w_{sj}(g))\}$$

olur ve Teorem 3.7.1 in (3) üne göre sol taraf

$$d(i^*(w_{ij}(g)))= -\sum_{s=1}^{n} i^*(w_{is}(g) \wedge w_{sj}(g))$$

şeklinde yazılır. $i^*(w_{ij})=\xi_{ij}$, $1\leq i,j\leq n$, konumunu yaptığımızda

$$d\xi_{ij}(g) = -\sum_{s=1}^{n} \xi_{is}(g) \wedge \xi_{sj}(g)$$

ve

$$d\xi_{ij} = -\sum_{s=1}^{n} \xi_{is} \wedge \xi_{sj}$$

olur ve $\xi = [\xi_{ij}]$ dersek

$$d\xi = -\xi \wedge \xi^t$$

bulunur. $O_v(n)$ üzerindeki ξ_{ij} sol invaryant 1-formlar için $\xi_{ij} = -\varepsilon_i \varepsilon_j \xi_{ji}$ olarak hesaplamıştık. Bu ifade de $\xi = [\xi_{ij}]$ için $\xi^t = -\varepsilon \xi \varepsilon$ ifadesine karşılık geldiğinden

$$d\xi = \xi \wedge \varepsilon \xi \varepsilon$$

olur.

KAYNAKLAR

FLANDERS, H., 1963. Differential Forms with Applications to The Physical Sciences. Academic Press, New York, London.

HACISALİHOĞLU, H.H., 1980. Yüksek Diferensiyel Geometri'ye Giriş. Fırat Üniversitesi Fen Fakültesi Yayınları.

O'NEILL, B., 1983. Semi-Riemannian Geometry. Academic Press, New York.

ÖZGEÇMİŞ

1967 yılında Amasya'da doğdu. İlk, orta ve lise tahsilini Amasya'da tamamladı. 1985 yılında Atatürk Üniversitesi K. Karabekir Eğitim Fakültesi Matematik Bölümüne girdi ve 1989 yılında bu bölümden mezun oldu. 1990 yılında Atatürk Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünde Araştırma Görevlisi olarak çalışmaya başladı. 1990 yılında Atatürk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsünde Yüksek Lisans öğrenimine başlayıp daha sonra Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsüne yatay geçiş yaptı.

Halen Atatürk Üniversitesi'nde Araştırma Görevlisi olarak çalışmaktadır.