# YARI-MARKOV SÜREÇLERİ ÜZERİNE BİR ÇALIŞMA

Zafer KÜÇÜK

YÜKSEK LİSANS TEZİ
İSTATİSTİK ANABİLİM DALI

1997
ANKARA

**ANKARA ÜNİVERSİTESİ**
**FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

# YARI-MARKOV SÜREÇLERİ ÜZERİNE BİR ÇALIŞMA

**Zafer KÜÇÜK**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**İSTATİSTİK ANABİLİM DALI**

Bu tez 7/7/97 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından 90 (Doksan) not takdir edilerek oybirliği/~~oyçokluğu~~ ile kabul edilmiştir.

| | | |
|---|---|---|
| Prof. Dr. Ömer L. Gebizlioğlu | Doç. Dr. İhsan Ünver | Doç. Dr. Fikri Öztürk (Danışman) |

# ÖZET

**Yüksek Lisans Tezi**

**YARI-MARKOV SÜREÇLERİ ÜZERİNE BİR ÇALIŞMA**

Zafer KÜÇÜK

Ankara Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
İstatistik Anabilim Dalı

Danışman : Doç. Dr. Fikri Öztürk
1997, Sayfa: 70
Juri : Prof. Dr. Ömer L. Gebizlioğlu
: Doç. Dr. İhsan Ünver
: Doç. Dr. Fikri Öztürk

Bu çalışmada, ekransız ve bir ekranlı yarı-Markov süreçleri olarak adlandırılan özel stokastik süreçler ele alınmıştır. Bu süreçler üzerine literatürde yapılan çalışmalardan kısaca bahsedilmiş ve sıfır seviyesinde yansıtan ekranlı yarı Markov rastgele yürüyüş süreci incelenmiştir.

Ele alınan sürecin ve ilk kez sıfır seviyesinden yansıma anının dağılım fonksiyonları ve beklenen değerleri bulunmuştur. Ayrıca bir örnek verilmiştir.

**ANAHTAR KELİMELER:** Stok, yansıtan ekran (engel), saklayan ekran (engel), rastgele yürüyüş, Laplace dönüşümü, stokastik süreç, yarı-Markov rastgele yürüyüş.

## ABSTRACT

Master Thesis

# A STUDY ON THE SEMI-MARKOVIAN PROCESSES

Zafer KÜÇÜK

Ankara University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Statistics

Supervisor :Assoc. Prof. Dr. Fikri Öztürk
1997, Page: 70

Jury : Prof. Dr. Ömer L. Gebizlioğlu
: Assoc. Prof. Dr. İhsan Ünver
: Assoc. Prof. Dr. Fikri Öztürk

This study considers special stochastic processes that are called semi-Markov processes with one screen and without screen. The semi-Markov random walk process with reflecting screen on zero-level is investigated including a brief literature review. For this process, distribution functions and expected values of the process and the first reflecting moment of it from the zero-level are calculated. Also, one example is given.

**Key Words**: Stochastic process, Laplace transform, random walk, reflecting screen, delaying screen, semi-Markov random walk.

## TEŞEKKÜR

Çalışma süresince yardımlarını esirgemeyen Hocam Sayın Doç. Dr. Fikri ÖZTÜRK'e (A.Ü.F.F.), ve Bakü Devlet Üniversitesi Öğretim Üyelerinden Sayın Prof. Dr. Tamilla NASIROVA'ya en içten şükranlarımı sunarım.

Ayrıca değerli tavsiye ve yardımlarını gördüğüm Sayın Prof. Dr. Cemil YAPAR'a (K.T.Ü.F.E.F.), Sayın Doç.Dr. İhsan ÜNVER'e (K.T.Ü.F.E.F.) ve Sayın Doç. Dr. Tahir A. KHANİEV'e (K.T.Ü.F.E.F.) teşekkür ederim.

# İÇİNDEKİLER

# ŞEKİLLER DİZİNİ

## SİMGELER (ve KISALTMALAR) DİZİNİ

| | |
|---|---|
| $a<b$ | a küçüktür b |
| $a>b$ | a büyüktür b |
| $a \leq b$ | a küçüktür veya eşittir b |
| $a \geq b$ | a büyüktür veya eşittir b |
| $a \in A$ | a A nın elemanıdır |
| $a \notin A$ | a A nın elemanı değildir |
| $a=b$ | a eşitttir b |
| $a \neq b$ | a farklıdır b |
| $a:=b$ | a tanım olarak eşittir b |
| $\forall$ | her |
| $\exists$ | en az bir |
| $\infty$ | sonsuz |
| $a<\infty$ | a sonludur |
| $(a,b)$ | açık aralık |
| $[a,b)$ | sağdan açık soldan kapalı aralık |
| $(a,b]$ | soldan açık sağdan kapalı aralık |
| $[a,b]$ | kapalı aralık |
| $[\|x\|]$ | x sayısının tam kısmı |
| $\|x\|$ | x sayısının mutlak değeri |
| $A \subseteq B$ | B kümesi A kümesini içerir veya A ve B kümeleri eşittir |
| $A \supseteq B$ | A kümesi B kümesini içerir veya A ve B kümeleri eşittir |
| minA | A kümesinin minimumu |
| maxA | A kümesinin maksimumu |
| infA | A kümesinin infumumu |
| supA | A kümesinin supremumu |
| $\sum_{i=1}^{n} a_i$ | $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sayılarının toplamı |

| | |
|---|---|
| $\prod_{i=1}^{n} a_i$ | $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sayılarının çarpımı |
| $\prod_{k=1}^{m} *(a_n^{(k)})$ | $a_n^{(1)}, a_n^{(2)}, \ldots, a_n^{(m)}$ dizilerinin konvolüsyon çarpımı |
| $\prod_{i=1}^{n} *f_i$ | $f_1, f_2, \ldots, f_n$ fonksiyonlarının konvolüsyon çarpımı |
| $P\{\cdot\}$ | $\{\cdot\}$ olayının olasılığı |
| $P_z\{\cdot\}$ | $\{\cdot\}$ olayının koşullu olasılığı |
| $E[\xi]$ | $\xi$ rastgele değişkeninin beklenen değeri |
| $E_z[\xi]$ | $\xi$ rastgele değişkeninin koşullu beklenen değeri |
| $E[\xi^n]$ | $\xi$ rastgele değişkeninin n-yinci başlangıç momenti |
| $Var[\xi]$ | $\xi$ rastgele değişkeninin varyansı |
| $Var_z[\xi]$ | $\xi$ rastgele değişkeninin koşullu varyansı |
| $f(x)\vert_{x=0}$ | $f(x)$ fonksiyonunun $x = 0$ noktasındaki değeri |
| $d_z F$ | $F$ fonksiyonunun z değişkenine göre diferansiyeli |
| $\frac{\partial^n}{\partial x^n}[F(x,y)]$ | $F[x,y]$ nin x değişkenine göre n-yinci kısmi türevi |
| $\lim_{x \to \infty} f(x)$ | $x$ $\infty$ a giderken $f(x)$ fonksiyonunun limiti |

## GİRİŞ

Stok kontrol, güvenilirlik, kuyruk ve olasılık teorilerindeki bir çok problemin çözümünde ekransız veya ekranlı yarı-Markov süreçlerinden yararlanılmaktadır.

Stok kontrol teorisinde, $\xi_1^+, \xi_1^+ + \xi_2^+, \ldots$ rastgele anlarında depoya $\eta_1^+, \eta_2^+, \ldots$ rastgele miktarlarında mal geldiğini ve $\xi_1^-, \xi_1^- + \xi_2^-, \ldots$rastgele anlarında depodan $\eta_1^-, \eta_2^-, \ldots$ rasgele miktarlarda mal talep olunduğunu varsayalım. Eğer talepler karşılanamaz ve borç olarak kaydedilirse buna uygun süreç bariyersiz yarı-Markov süreçdir. Eğer karşılanamayan talep borç olarak kaydedilmezse bu duruma uyan süreç ise bariyerli (tutan) yarı-Markov süreçtir.

Eğer stoğun miktarı sabit hızla azalır ve rastgele anlarda rastgele miktarlarda ani olarak artarsa bu takdirde depodaki stoğun seviyesini meyilli yarı-Markov süreçleriyle karakterize etmek mümkündür. Herhangi bir depodaki stoğun seviyesinin dağılımı, stoğun maksimum seviyesinin dağılımı, deponun ilk defa boşalma anının dağılımı, stoğun miktarının belirli bir seviyeyi ilk defa geçme anı ve bu seviyeyi geçme miktarının ortak dağılımı gibi önemli olasılık karakteristiklerini incelemek oldukça önemlidir.

Güvenilirlik teorisi, bir sistemin aralıksız çalışmasının dağılımı, hazırlık katsayısı ve çalışmama katsayısının hesaplanmasını konu edinmiştir. Örneğin m tane çalışan eleman ve n tane stok elemanı bulunan bir sistemde bozulan elemanların bir alet ile tamir edildiğini varsayalım.Bu durumda $\xi_1^+, \xi_1^+ + \xi_2^+, \ldots$ elemanların yenilenme anlarını, $\eta_1^+, \eta_2^+, \ldots$ ile de yenilenen elemanların sayılarını, $\xi_1^-, \xi_1^- + \xi_2^-, \ldots$ elemanların bozulma anlarını ve $\eta_1^-, \eta_2^-, \ldots$ ise aynı anlarda bozulan elemanların sayılarını gösterir.

Kuyruk teorisinde ise kuyruğun uzunluğunun dağılımı, bekleme müddetinin dağılımı, sistemin çalışma periyodunun dağılımı v.s. nin bilinmesi önemlidir. Bir cihaza $\xi_1^+, \xi_1^+ + \xi_2^+, \ldots$ anlarında denk talepler gelir, bu taleplerin miktarları $\eta_1^+, \eta_2^+, \ldots$ dır. Hizmet süreleri $\xi_1^-, \xi_1^- + \xi_2^-, \ldots$ ve hizmet edilen grupların ölçüsü $\eta_1^-, \eta_2^-, \ldots$ dır.

Geniş bir şekilde ele alacağımız yarı-Markov rastgele yürüyüş süreçleri, sıçramalı Markov süreçlerinin genelleştirilmesi olup yarı-Markov süreçlerinin özel durumlarıdır.

Bu çalışmada ise ekransız ve bir ekranlı yarı-Markov süreçlerinin matematiksel kuruluşları verilmiş, bu süreçlerle ilgili literatürde yapılan çalışmalardan kısaca bahsedilmiştir. Ayrıca sıfır seviyesinde yansıtan ekranlı yarı-Markov rastgele yürüyüş süreci ele alınmış ve bu süreçle ilgili olarak sürecin dağılımı verilmiş ve bu sürecin önemli bir sınır fonksiyonali olan yansıtan ekrandan ilk kez yansıma anı $\gamma_1$'in dağılımı ifade edilmiştir. Daha sonra sürecin ve $\gamma_1$ rastgele değişkeninin beklenen değerleri için aşikar formüller verilmiştir. Son olarak bir örnek ele alınarak incelenen sürecin uygulaması yapılmaya çalışılmıştır.

# 1. GENEL BİLGİLER

Bu bölümde stokastik süreçler ile ilgili temel kavramlar kısaca hatırlatıldıktan sonra Markov süreçlerine geçilecektir.

$(\Omega, \Im, P)$ bir olasılık uzayı olmak üzere rastgele değişkenlerin $\{\varsigma_t(w): t \in T\}$ ailesine stokastik süreç denir. Belli bir $t_0$ değeri için $\varsigma_{t_0}(w): \Omega \to R$ fonksiyonu bir rastgele değişken, belirli bir $w_0 \in \Omega$ için

$$\varsigma_t(w_0) = X(t), \quad t \in T$$

fonksiyonuna sürecin bir gerçekleşmesi ve $\{X(t), t \in T\}$ kümesine yörünge denir. t nin fonksiyonu olan $X(t) = \varsigma(t, w)$ fonksiyonu esasında bir ratgele fonksiyon olmak üzere $X(t)$ ye stokastik sürecin grafiği de denir.

Nasırova'nın (1984) bahsettiği gibi stokastik süreçler teorisinde ilk çalışmaları A. N. Kolmogorov ve A. Y. Hinçin yapmıştır. A. N. Kolmogorov günümüzde Markov süreçleri olarak adlandırılan stokastik süreçlerin tanımını vermiş, A. Y.Hinçin ise durağan süreçlerin tanımını vermiştir.

Stokastik süreçlerin temel kavramlar ile ilgili başvurulabilecek önemli kaynaklara arasında W. Feller (1964), J. Dobb (1953), Gihman, I. I. ve Skorohod, A. V. (1975), Borovkov, A.A. (1976), Çınlar E. (1975),Karlin, S. ve Taylor, H. M. (1975)'ın kitapları sayılabilir.

Süreçler genel olarak üç sınıfa ayrılabilir:

1) Gauss süreçleri, Gauss süreçleri olmayan süreçler
2) Duragan süreçler, duragan olmayan süreçler
3) Markov süreçleri, Markov süreçleri olmayan süreçler

1) Eğer $\varsigma(t, w)$ sürecinin n değişkenli dağılım fonksiyonu aşağıdaki şekilde gösterilebilirse bu takdirde sürece Gauss Süreci denir. $\xi_i = \xi_i(w, t_0)$, $i = 1,2,\ldots,n$ olsun. O zaman

$$F_{\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n}(x_1, x_2, \ldots x_n) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \frac{1}{\sqrt{\det A}} \int_{-\infty}^{x_1} \overset{(n)}{\Lambda} \int_{-\infty}^{x_n} e^{-\frac{1}{2}(A^{-1}(u-a), u-a)} d\bar{u}$$

burada, $a(t) = E\varsigma(t, w) = \int X(t)\mu(dx)$

$$R(t,s) = E\varsigma(t, w)\varsigma(s, w) - a(t)a(s) = \int X(t)X(s)\mu(dx) - a(t).a(s)$$

$$A = (R(t_i, t_j))_{i,j=1,2,\dots,n}$$

dır.

2) Eğer $\forall h > 0, x_1, x_2, \dots, x_n$ için

$$P\{w: \varsigma(t_1 + h, w) < x_1, \dots, \varsigma(t_n + h, w) < x_n\} = P\{w: \varsigma(t_1, w) < x_1, \dots, \varsigma(t_n, w) < x_n\}$$

ise bu takdirde $\varsigma(t, w)$ sürecine duragan süreç denir veya dar anlamda duragan süreç denir.

Eğer $E\varsigma(t_1, w)$=sabit, $\operatorname{var}\varsigma(t_1, w)$=sabit ve

$$R(t_1, t_2) = E\varsigma(t_1, w)\varsigma(t_2, w) = E\varsigma(t_2 - t_1, w) = R(t_2 - t_1)$$

ise sürece geniş anlamda duragan süreç denir.

3) Farzedelimki $(\Omega, \Im, P)$ olasılık uzayı, $\varsigma(t, w)$ süreci verilmiş olsun. $F_{\le t}$ ile t anına kadar $\varsigma(t, w)$ süreci ile ilgili olayların $\sigma$-cebirini, $F_{=t}$ ile t anında $\varsigma(t, w)$ süreci ile ilgili olayların $\sigma$-cebirini, $F_{\ge t}$ ile t anından sonraki anlarda $\varsigma(t, w)$ süreci ile ilgili olayların $\sigma$-cebirini gösterelim.

$\forall A \in F_{\le t}$, $\forall B \in F_{\ge t}$ olayları için $P(AB / F_{=t}) = P(A / F_{=t})P(B / F_{=t})$

ise bu takdirde $\varsigma(t, w)$ sürecine Markov süreci denir.

Eğer süreç Markov süreci ise onun belirli bir durumda kalma müddeti üstel dağılıma sahipdir.

**TANIM 1.1:** $\{\xi_k, \eta_k\}_{k=1}^{\infty}$ rastgele değişkenler, $\varsigma(t) = \eta_1 + \dots + \eta_{\nu(t)}$

ve

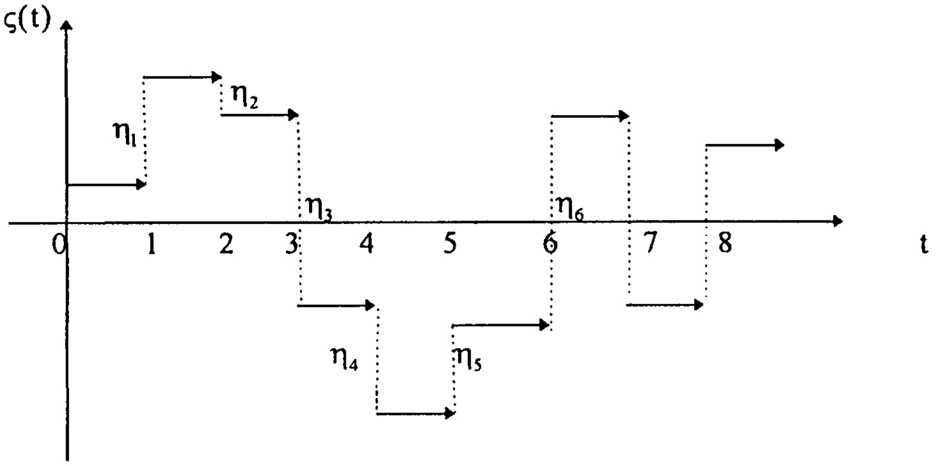
$$\nu(t) = n \text{ eğer } \sum_{i=1}^{k} \xi_i \le t < \sum_{i=1}^{k+1} \xi_i$$

olmak üzere

1) $\xi_i = 1, \quad i = 1, 2, \dots$

$\nu(t) = n$, eğer $n - 1 \le t < n$

ise $\varsigma(t) = \eta_1 + \dots + \eta_n$ ile tanımlanan süreç bir basit rastgele yürüyüş süreci oluşturur (Şekil 1.1).



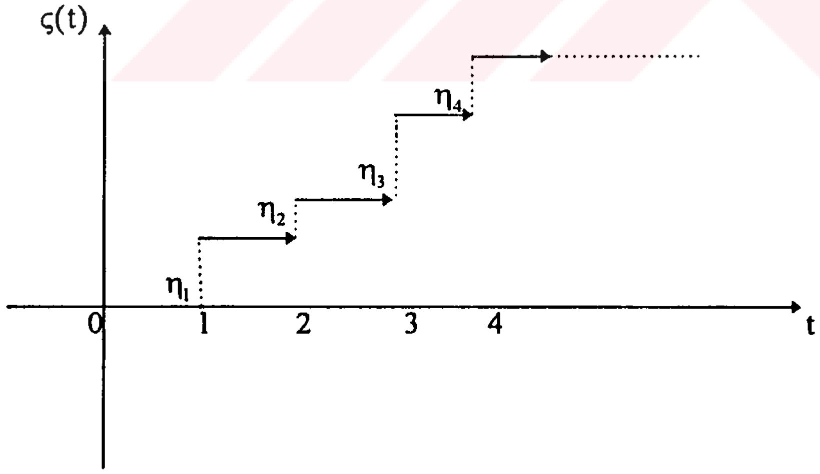

Şekil 1.1. Basit rastgele yürüyüş sürecinin bir görünüşü

2) $\eta_i \geq 0$,

$\xi_i = 1, \quad i = 1,2,\ldots$

$\nu(t) = n$, eğer $n-1 \leq t < n$

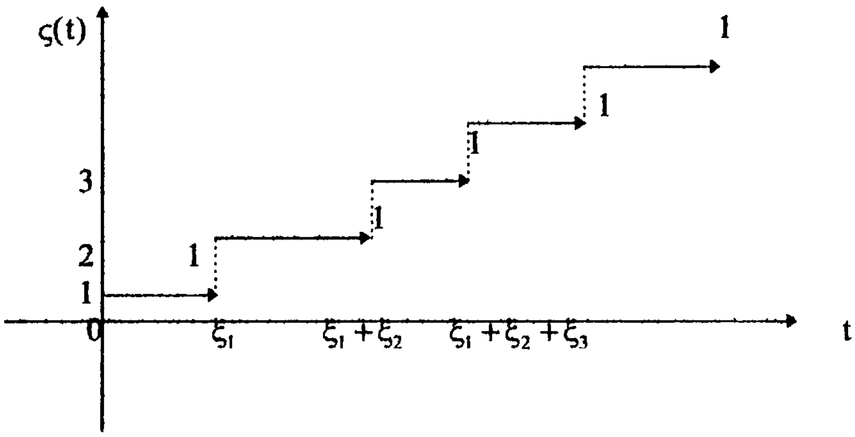
ise $\varsigma(t) = \eta_1 + \ldots + \eta_n$ yenileme süreci oluşturur (Şekil 1.2).




Şekil 1.2. Yenileme sürecinin bir görünüşü

3) $\eta_i = 1$, $i = 1,2,\ldots$ ve

$\xi_i$'ler bağımsız ve üstel dağılıma sahip ise $\varsigma(t) = \eta_1 + \eta_2 + \ldots + \eta_{\nu(t)}$, $\nu(t) = 0,1,\ldots$ Poisson süreci oluşturur (Şekil 1.3).

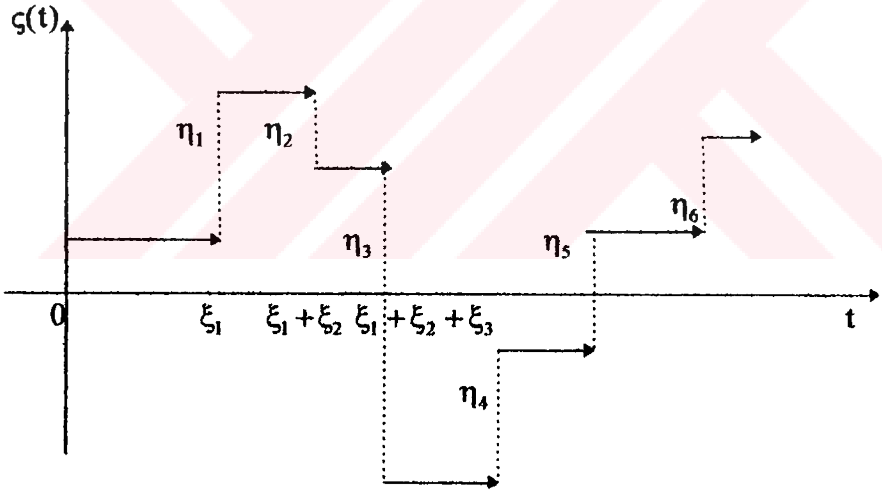



Şekil 1.3. Poisson sürecinin bir görünüşü

**4)** $\xi_i$'ler bağımsız ve üstel dağılıma sahip olduğunda

$$\varsigma(t) = \eta_1 + \ldots + \eta_{\nu(t)}, \quad \nu(t) = 0,1,\ldots$$

değerlerini alan Poisson kanunuyla sıçramalı Markov süreci oluşturur (Şekil 1.4).




Şekil 1.4. Sıçramalı Markov sürecinin bir görünüşü

Yarı-Markov sürecinin tanımı ise ilk kez birbirinden bağımsız olarak ve aynı zamanda P. Levy (1954), W. Smith (1965-1966) ve L. Takacs (1977) tarafından verilmiştir. P. Levy' nin verdiği tanım aşağıdaki gibidir.

$X_t(w)$ sürecinin durumlar uzayı $\{0,1,2,\ldots,s\}$ olsun. Eğer $X_t(w)$ sürecinin geçiş olasılıkları aşağıdaki fonksiyonlar ailesi ile belirlenirse bu sürece yarı-Markov süreci denir.

$$F_t(i,j,u) = P\{\varepsilon_{k-1}(w) = j, \tau_t(\varepsilon_k(w)) < u; \varepsilon_k(w) = i\}; i,j = 0,1,\ldots,s.$$

Burada $\varepsilon_k(w)$, k-ıncı sıçramada sistemin durumu ve $\chi_t(k)$, k-ıncı sıçrama anı olmak üzere

$$\tau_t(\varepsilon_k(w)) = \chi_t(k+1) - \chi_t(k)$$

dır.

Daha sonra I. I. Gihman ve A. V. Skorohod (1975) genel durum uzayına sahip yarı-Markov sürecinin tanımını vermişlerdir. Bu tanım aşağıdaki gibidir.

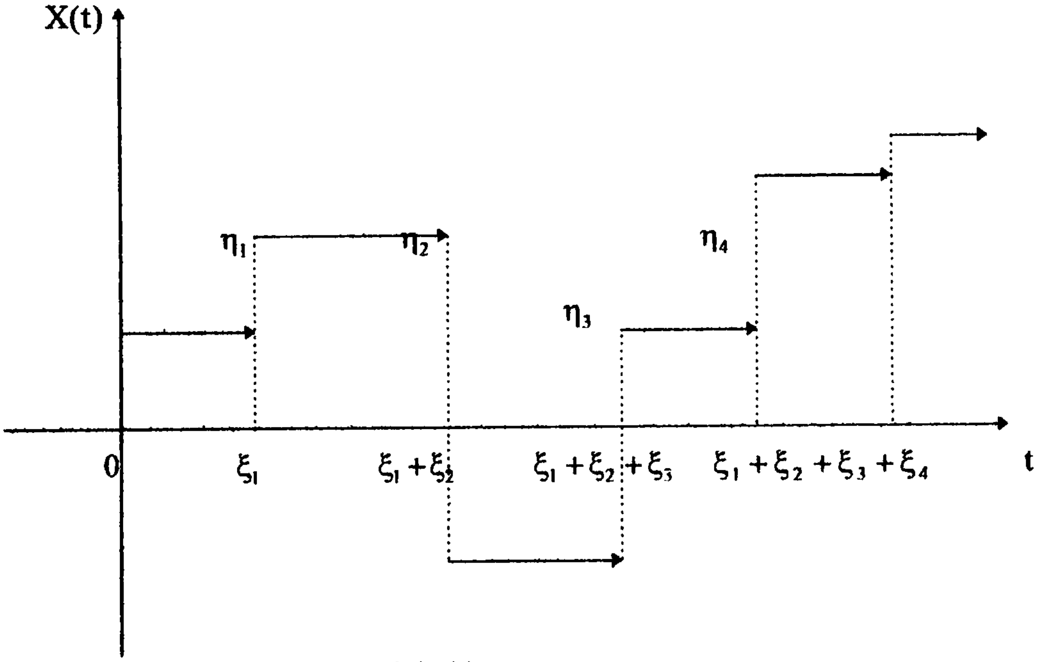
$(\Omega, \Im, P_x)$, $x \in X$, olasılık uzayları ailesi verilmiş olsun ve bir $(\Omega, \sigma, P_x)$ olasılık uzayında bir tür $\{X_0(w), X_1(w), \ldots, X_n(w), \ldots\}$ Markov zincirinin verilmiş olduğunu kabul edelim. Bu zincirin,

$$P_x\{X_0(w) = x\} = 1$$

olmak üzere durum uzayı $(x,B)$, geçiş olasılığı ise $\pi(x,B)$dır. Kabul edelim ki $\eta_1(w), \eta_2(w), \ldots$ birbirlerinden bağımsız, aynı dağılıma sahip ve $\{X_n(w): n = 0,1,2,\ldots\}$ ailesinden (herhangi bir $P_x$ için) $[0,1]$'de düzgün dağılıma sahip rastgele değişkenler dizisi verilmiştir. Her $x, y \in X$ için, $F_{x,y}(t)$ nin herhangi bir negatif olmayan rastgele değişkenin dağılım fonksiyonu olduğunu farzedelim. $[0,1]$'de öyle bir negatif olmayan $\Psi_{x,y}(t)$ fonksiyonu belirleyelimki $\Psi_{x,y}(\xi)$nin (burada $\xi$, $[0,1]$'de düzgün dağılıma sahip bir rastgele değişkendir) $[0,1]$'de dağılım fonksiyonu $F_{x,y}(t)$ olsun. Bu takdirde aşağıdaki gibi tanımlanan sürece yarı-Markov süreci denir (Şekil 1.5).

$$\tau_k = \Psi_{x_{k-1}, x_k}(\eta_k)$$

$$X(t) = X_{k-1}(w), \text{ eğer } \sum_{i=1}^{k-1} \tau_i \le t < \sum_{i=1}^{k} \tau_i \text{ ise, } \left(\sum_{1}^{0} = 0\right)$$




Şekil 1.5. Yarı-Markov sürecinin bir görünüşü

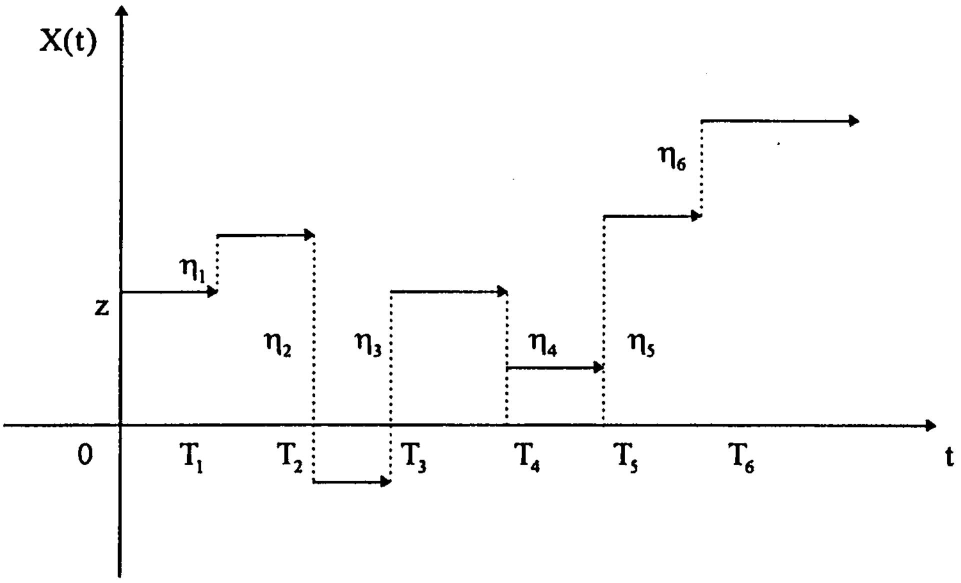
Yarı-Markov süreçlerini A.A. Borovkov (1976), V. S. Korolyuk ve A. V. Turbin (1976), V. V. Anisimov (1973), D. S. Silvestrov (1989), B. V. Gnedenko ve I. N. Kovalenko (1968), B. P. Harlamov (1975), E. Çınlar (1975), L. Takacs (1977), W. L. Smith (1965), F. Spitzer (1964), W. Feller (1964), I. I. Ezhov ve V. S. Korolyuk (1967), v.s. çalışmışlardır.

Nasırova ise 1970 yılında Gihman ve Skorokhod' un vermiş olduğu yarı-Markov süreç tanımının özel bir durumu olan yarı-Markov rastgele yürüyüş süreci tanımını aşağıdaki gibi vermiştir.

$\{(\xi_i, \eta_i): i = 1,2,...\}$ aynı olasılık uzayı üzerinde tanımlı bağımsız ve aynı tür dağılıma sahip rastgele değişkenler çiftleri dizisi olup $\xi_i$'ler pozitif değerli olsun. Bu takdirde,

$$X(t) = \sum_{i=1}^{n} \eta_i \text{, eğer } T_n = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \leq t < \sum_{i=1}^{n+1} \xi_i \text{ ise,}$$

ile tanımlanan $X(t)$ stokastik sürecine yarı-Markov rastgele yürüyüş süreci denir (Şekil 1.6).




Şekil 1.6. Yarı-Markov rastgele yürüyüş sürecinin bir görünüşü

## 2. YARI-MARKOV SÜREÇLERİ

Yarı-Markov süreçlerini ekransız, bir ekranlı ve iki ekranlı Yarı-Markov süreçleri olmak üzere üç guruba ayırabiliriz. Biz bu bölümde ekransız ve bir ekranlı yarı-Markov süreçleri hakkında genel bilgiler vereceğiz.

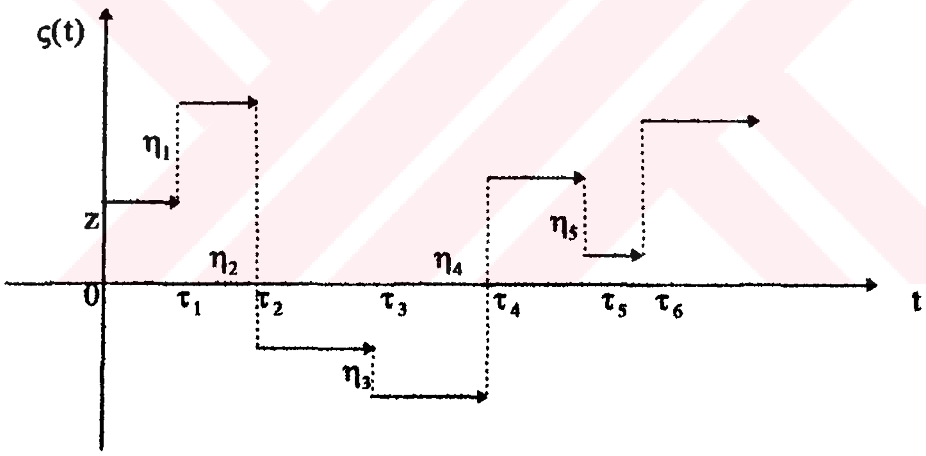
$(\Omega,\Im,P)$ olasılık uzayında tanımlı $\{(\xi_k,\eta_k)\}_{k=1}^{\infty}$ iki ölçülü rastgele değişkenler dizisi verilmiş olsun.

1) $\xi_k$ pozitif değerli ve $z \geq 0$ olmak üzere,

$$\varsigma(t) = \sum_{i=1}^{k}\eta_i, \quad \text{eğer } \sum_{i=1}^{k}\xi_i \leq t < \sum_{i=1}^{k+1}\xi_i \text{ ise}$$

şeklinde tanımlanan $\varsigma(t)$ sürecine ekransız yarı-Markov rastgele yürüyüş süreci denir (Şekil 2.1).

**NOT:** Bundan sonraki şekillerimizde $\tau_k = \sum_{i=1}^{k}\xi_i$ olarak alacağız.

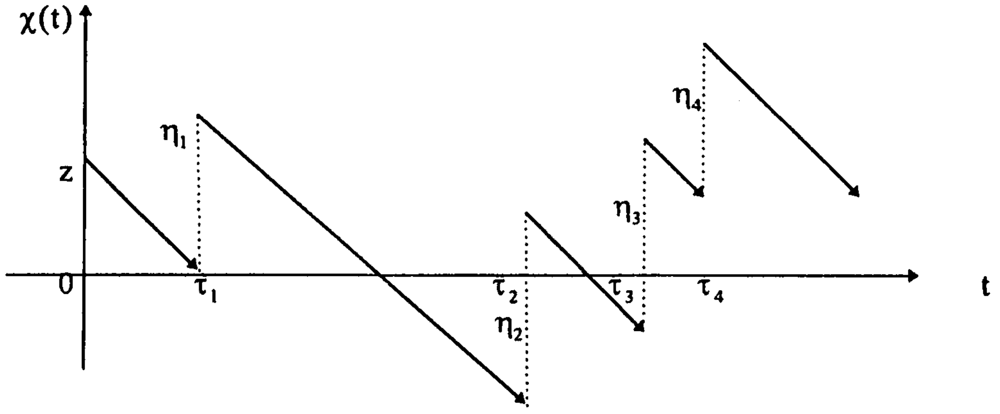



Şekil 2.1. Ekransız yarı-Markov rastgele yürüyüş sürecinin bir görünüşü

2) $\eta_k; k \geq 1$, pozitif değerli ve $z \geq 0$ olmak üzere,

$$\chi(t) = \varsigma(t) + z - t$$

şeklinde tanımlanan $\chi(t)$ sürecine negatif akımlı pozitif sıçramalı yarı-Markov süreci denir (Şekil 2.2).

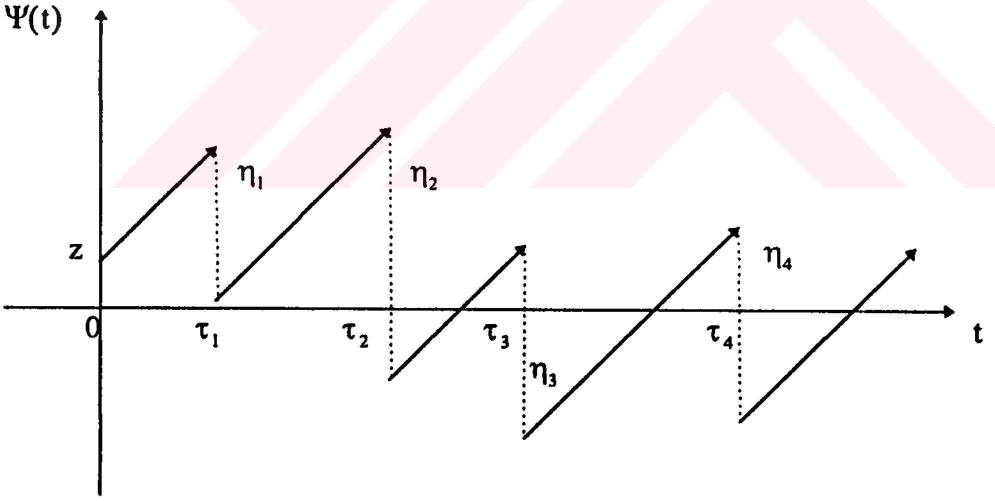



Şekil 2.2. Negatif akımlı, pozitif sıçramalı yarı-Markov sürecinin bir görünüşü

3) $\eta_k ; k \geq 1$, pozitif değerli ve $z \geq 0$ olmak üzere,

$$\psi(t) = z + t - \varsigma(t)$$

şeklinde tanımlanan $\psi(t)$ sürecine pozitif akımlı negatif sıçramalı yarı-Markov süreci denir (Şekil 2.3).




Şekil 2.3. Pozitif akkımlı, negatif sıçramalı yarı-Markov sürecinin bir görünüşü

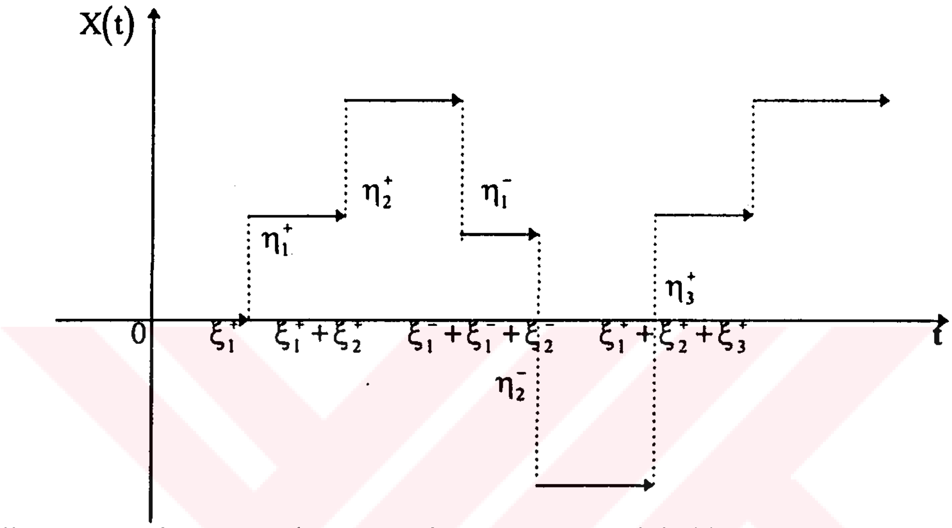
4) $(\Omega, \Im, P)$ olasılık uzayında tanımlı $\{(\xi_k^+, \eta_k^+, \xi_k^-, \eta_k^-)\}_{k=1}^{\infty}$ dört ölçülü rastgele değişkenleri verilmiş olsun. $\xi_k^{\pm}, \eta_k^{\pm}$ pozitif değerli rastgele değişkenleri için

$$X^+(t) = \sum_{i=1}^{k} \eta_k^+, \text{ eğer } \sum_{i=1}^{k} \xi_k^+ \leq t < \sum_{i=1}^{k+1} \xi_k^+ \text{ ise}$$

$$X^-(t)=\sum_{i=1}^{k}\eta_k^-,\ \text{eğer}\ \sum_{i=1}^{k}\xi_k^- \le t < \sum_{i=1}^{k+1}\xi_k^-\ \text{ise,}$$

$$X(t)=X^+(t)-X^-(t)$$

şeklinde tanımlanan $X(t)$ sürecine karışık yarı-Markov rastgele yürüyüş süreci denir (Şekil 2.4).




Şekil 2.4. Karışık yarı-Markov rastgele yürüyüş sürecinin bir görünüşü

Şimdi de bir ekranlı Yarı-Markov süreçlerinin tanımlarını verelim. Bu süreçleri yansıtan ekran (reflecting screen), tutan ekran (delaying screen) ve yutan ekran (absorbing screen) olarak üç gruba ayırabiliriz. Tanımlardan yansıtan ve tutan (saklayan) ekranı vereceğiz. Ekranları -a, 0 ve a'da alarak bazı süreçler için iki türlü tanım verelim.

## 2.1 Tutan (Saklayan) Ekranlı Yarı-Markov Süreçleri

### 2.1.1 $\varsigma(t)$ Sürecinin saklanılması

$\varsigma(t)$ yukarıda verilen yarı-Markov rastgele yürüyüş süreci olmak üzere,

a) $\varsigma_0^*(t)=\varsigma(t)-\inf\limits_{0\le s<t}(0,\varsigma(s))$

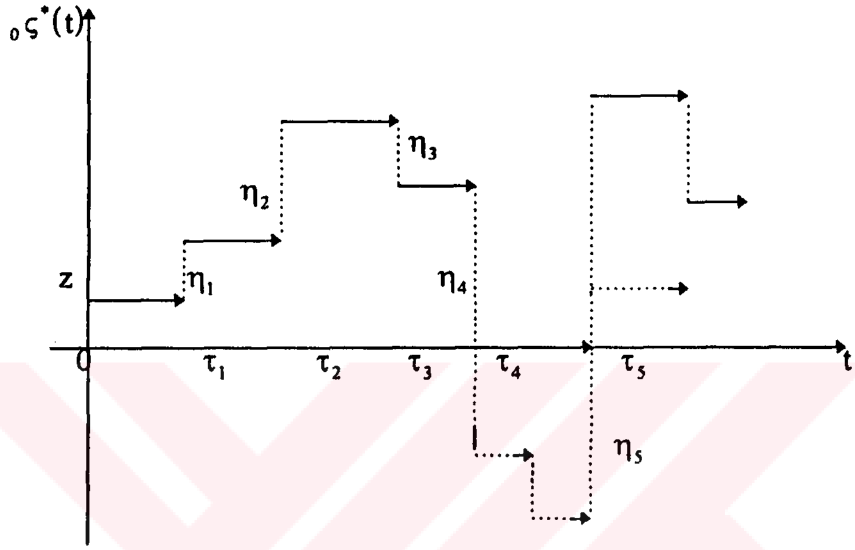
veya

$$\varsigma_0^*(t)=\varsigma_k;\ \text{eğer}\ \sum_{i=1}^{k-1}\xi_i \le t\sum_{i=1}^{k}\xi_i, k \ge 0, (\sum_{i=0}^{k}=0)\ \text{ise,}$$

burada

$$\varsigma_k = \max(0, \varsigma_{k-1} + \eta_k), k \geq 1, \varsigma_0 = z \geq 0$$

şeklinde tanımlanan $\varsigma_0^*(t)$ süreci sıfır seviyesinde tutan ekranlı bir yarı-Markov rastgele yürüyüş süreci oluşturur (Şekil 2.5).




Şekil 2.5. Sıfır seviyesinde tutan ekranlı yarı-Markov rastgele yürüyüş sürecinin bir görünüşü

b) $\varsigma_a^*(t) = a + \varsigma(t) - \sup_{0 \leq s < t}(a, \varsigma(s))$

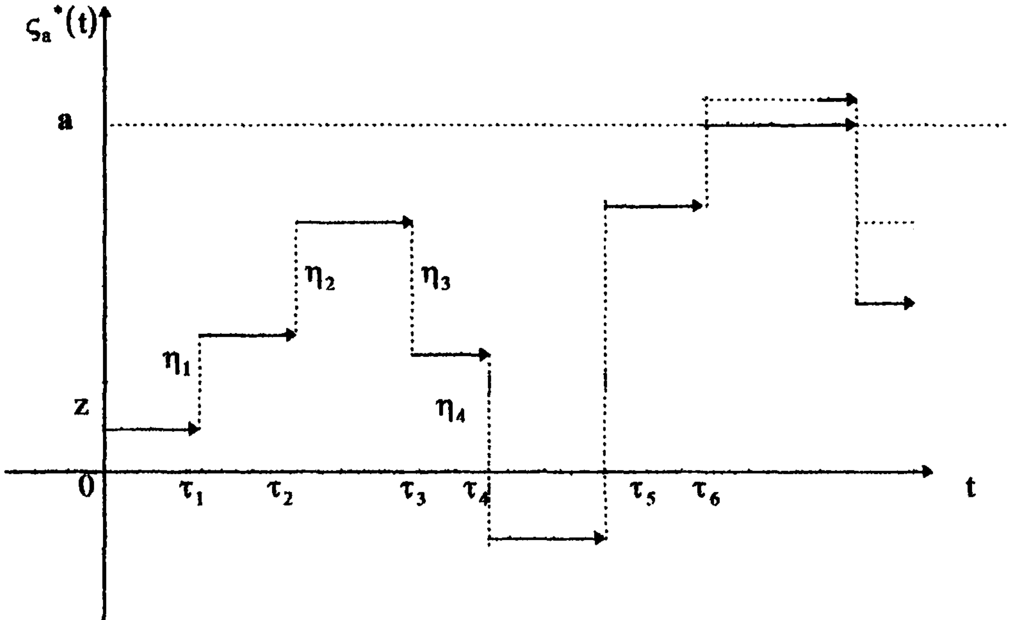
veya

$$\varsigma_a^*(t) = \varsigma_k, \text{ eğer } \sum_{i=1}^{k-1} \xi_i \leq t \sum_{i=1}^{k} \xi_i \text{ ise,}$$

burada

$$\varsigma_k = \min(a, \varsigma_{k-1} + \eta_k), k \geq 1, \varsigma_0 = z \geq 0,$$

şeklinde tanımlanan $\varsigma_a^*(t)$ süreci $a > 0$ seviyesinde tutan ekranlı bir yarı-Markov rastgele yürüyüş süreci oluşturur (Şekil 2.6).




Şekil 2.6. $a > 0$ seviyesinde tutan ekranlı yarı-Markov rastgele yürüyüş sürecinin bir görünüşü

c) $\varsigma^*_{-a}(t) = -a + \varsigma(t) - \inf\limits_{0 \le s < t}(-a, \varsigma(s))$

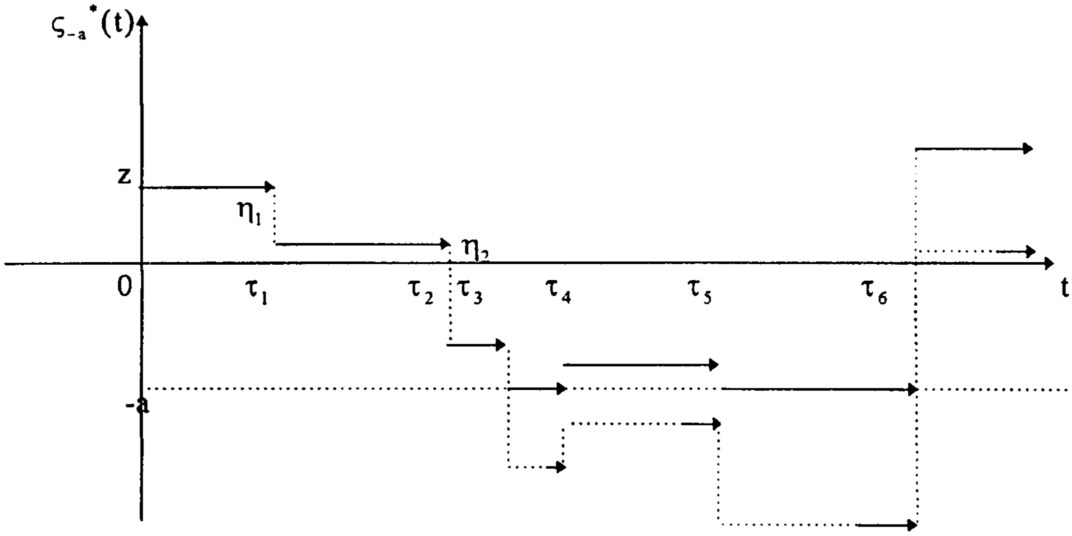
veya

$$\varsigma_{-a}^*(t) = \varsigma_k, \text{ eğer } \sum_{i=1}^{k-1} \xi_i \le t \sum_{i=1}^{k} \xi_i \text{ ise,}$$

burada

$$\varsigma_k = \max(-a, \varsigma_{k-1} + \eta_k); k \ge 1,$$

şeklinde tanımlanan $\varsigma^*_{-a}(t)$ süreci -a $(a > 0)$ seviyesinde tutan ekranlı bir yarı-Markov rastgele yürüyüş süreci oluşturur (Şekil 2.7).




Şekil 2.7. -a seviyesinde tutan ekranlı yarı-Markov rastgele yürüyüş sürecinin bir görünüşü

### 2.1.2 $\chi(t)$ Sürecinin saklanılması

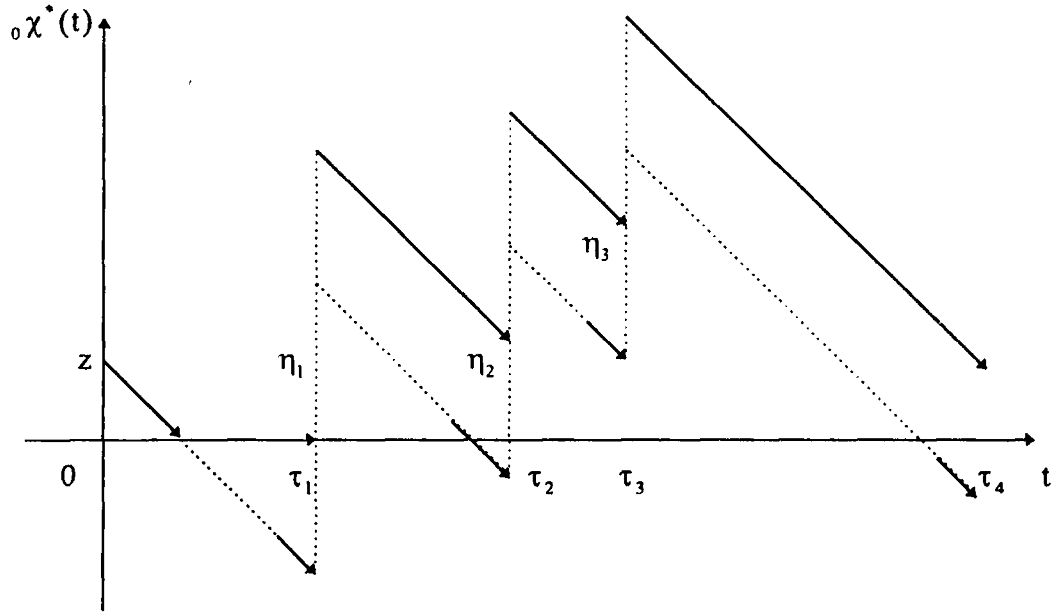
a) $\eta_k; k \geq 1$, pozitif değerler almak üzere,

$${}_0\chi^*(t) = \max(0, \varsigma_{k-1} - t), \text{ eğer } \sum_{i=1}^{k} \xi_i \leq t < \sum_{i=1}^{k+1} \xi_i; k = 1,2,\ldots \text{ise,}$$

burada

$$\varsigma_{k-1} = \max(0, \varsigma_{k-1} - t); \quad \sum_{i=1}^{k-1} \xi_i \leq t \sum_{i=1}^{k} \xi_i, k = 1,2,\ldots$$

ve $\varsigma_0 = z, \xi_0 = 0, \eta_0 = 0$ şeklinde tanımlanan ${}_0\chi^*(t)$ süreci sıfır seviyesinde tutan ekranlı negatif akımlı pozitif sıçramalı bir yarı-Markov süreç oluşturur (Şekil 2.8).




Şekil 2.8. Sıfır seviyesinde tutan ekranlı, negatif akımlı pozitif sıçramalı yarı-Markov sürecinin bir görünüşü

b) $_{-a}\chi^*(t) = \max(-a, \varsigma_{k-1} - t)$, eğer $\sum_{i=1}^{k-1} \xi_i \le t \sum_{i=1}^{k} \xi_i, k = 1,2,\ldots$ ise,

burada

$$\varsigma_{k-1} = \max(-a, \varsigma_{k-2} - \xi_{k-2}) + \eta_{k-1}; k = 1,2,\ldots$$

şeklinde tanımlanan $_{-a}\chi^*(t)$ süreci -a $(a > 0)$ seviyesinde tutan ekranlı negatif akımlı pozitif sıçramalı bir yarı-Markov süreç oluşturur.

c) $_a\chi^*(t) = \varsigma_k - (t - \sum_{i=1}^{k-1} \xi_i)$

burada

$$\varsigma_k = \min(a, \varsigma_{k-1} - \xi_k + \eta_k)$$

şeklinde tanımlanan $_a\chi^*(t)$ süreci $a > 0$ seviyesinde tutan ekranlı negatif akımlı pozitif sıçramalı bir yarı-Markov süreç oluşturur .

**2.1.3 $\Psi(t)$ Sürecinin saklanılması**

$\Psi(t)$ yarı-Markov süreci verilmiş olsun,

a) $_0\Psi^*(t) = \Psi(t) - \inf_{0 \le s < t}(0, \Psi(s))$

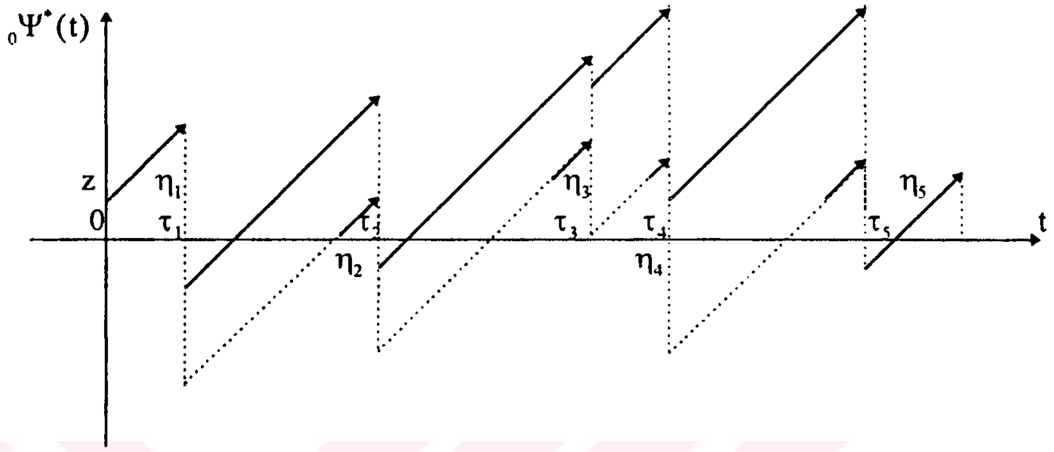
veya

$$_0\Psi^*(t) = \max(0, t - \sum_{i=1}^{k-1} \xi_i + \varsigma_{k-1}), \quad \Psi(0) = z > 0$$

burada

$$\varsigma_k = \max(0, \varsigma_{k-1} - \eta_k + \xi_k)$$

şeklinde tanımlanan ${}_0\Psi^*(t)$ süreci sıfır seviyesinde tutan ekranlı pozitif akımlı negatif sıçramalı bir yarı-Markov süreç oluşturur (Şekil 2.9).




Şekil 2.9. Sıfır seviyesinde tutan ekranlı pozitif akımlı negatif sıçramalı yarı-Markov sürecinin bir görünüşü

b) $${}_{-a}\Psi^*(t) = -a + \Psi(t) - \inf_{0\le s<t}(-a, \Psi(s))$$

veya

$${}_{-a}\Psi^*(t) = -a + \max(-a, t - \sum_{i=1}^{k-1}\xi_i + \varsigma_{k-1}), \quad \Psi(0) = z > 0,$$

burada

$$\varsigma_k = \max(-a, \varsigma_{k-1} - \eta_k + \xi_k),$$

ile tanımlanan ${}_{-a}\Psi^*(t)$ süreci -a ($a > 0$) seviyesinde tutan ekranlı pozitif akımlı negatif sıçramalı bir yarı-Markov süreç oluşturur.

c) $${}_a\Psi^*(t) = a + \Psi(t) - \sup_{0\le s<t}(a, \Psi(s))$$

veya

$${}_a\Psi^*(t) = a + \min(a, t - \sum_{i=1}^{k-1}\xi_i + \varsigma_{k-1}), \quad \Psi(0) = z > 0,$$

burada

$$\varsigma_k = \min(a, \varsigma_{k-1} - \xi_{k-1}) - \eta_k,$$

ile tanımlanan ${}_a\Psi^*(t)$ süreci $a > 0$ seviyesinde tutan ekranlı pozitif akımlı negatif sıçramalı bir yarı-Markov süreç oluşturur.

### 2.1.4 X(t) Sürecinin saklanılması

$\tau_k^{\pm} = \sum_{i=1}^{k} \xi_i^{\pm}$ olmak üzere $\tau_k^{+}, \tau_k^{-}$ rastgele değişkenlerini artan sırada dizelim. Alınan diziyi $\{\tau_k\}$ ile gösterelim ve aşağıdaki gibi kurulmuş rastgele değişkenleri tanımlayalım,

$$\eta_k = \begin{cases} \eta_i^{+}, & \text{eğer } \tau_i^{+} = \tau_k \\ \eta_j^{-}, & \text{eğer } \tau_j^{-} = \tau_k \end{cases}.$$

a) ${}_0X^{*}(t) = X(t) - \inf_{0 \le s < t}(0, X(s))$

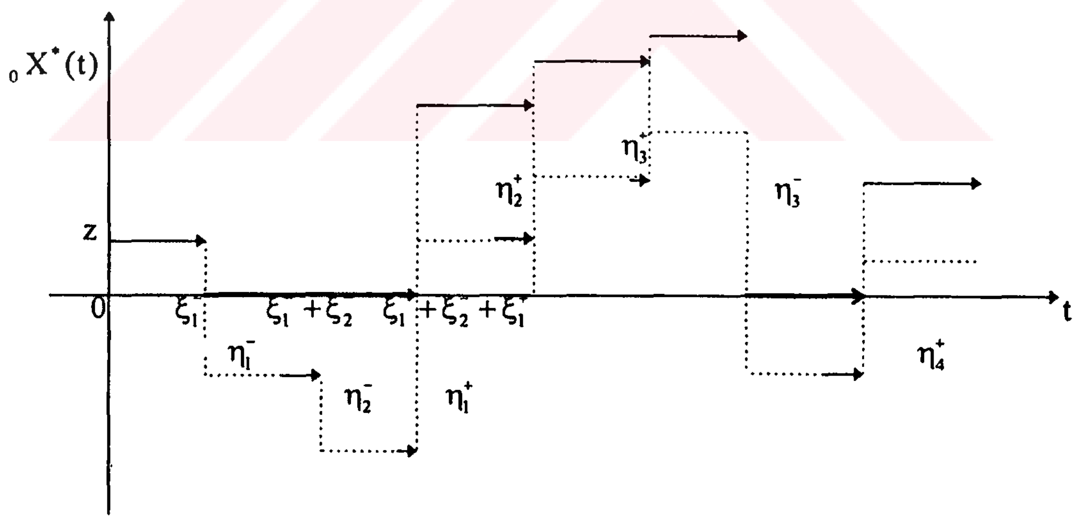
veya

$${}_0X^{*}(t) = \varsigma_k, \quad \text{eğer } \tau_k \le t < \tau_{k+1} \text{ ise,}$$

burada

$$\varsigma_k = \max(0, \varsigma_{k-1} + \eta_k)$$

ile tanımlanan ${}_0X^{*}(t)$ süreci sıfır seviyesinde tutan ekranlı bir karmaşık yarı-Markov rastgele yürüyüş süreci oluşturur (Şekil 2.10).




Şekil 2.10. Sıfır seviyesinde tutan ekranlı karmaşık yarı-Markov rastgele yürüyüş sürecinin bir görünüşü

b) ${}_{-a}X^{*}(t) = -a + X(t) - \inf_{0 \le s < t}(-a, X(s))$

veya

$${}_{-a}X^{*}(t) = \varsigma_k, \quad \text{eğer } \tau_k \le t < \tau_{k+1} \text{ ise,}$$

burada

$$\varsigma_k = \max(-a, \varsigma_{k-1} + \eta_k),$$

ile tanımlanan ${}_aX^*(t)$ süreci $-a\ (a > 0)$ seviyesinde tutan ekranlı bir karmaşık yarı-Markov rastgele yürüyüş süreci oluşturur.

c) $${}_aX^*(t) = a + X(t) - \sup_{0 \le s < t}(a, X(s))$$

veya

$${}_aX^*(t) = \varsigma_k, \text{ eğer } \tau_k \le t < \tau_{k+1} \text{ ise,}$$

burada

$$\varsigma_k = \min(a, \varsigma_{k-1} + \eta_k),$$

ile tanımlanan ${}_aX^*(t)$ süreci a seviyesinde tutan ekranlı bir karmaşık yarı-Markov rastgele yürüyüş süreci oluşturur.

## 2.2 Yansıtan Ekranlı Yarı-Markov Süreçler

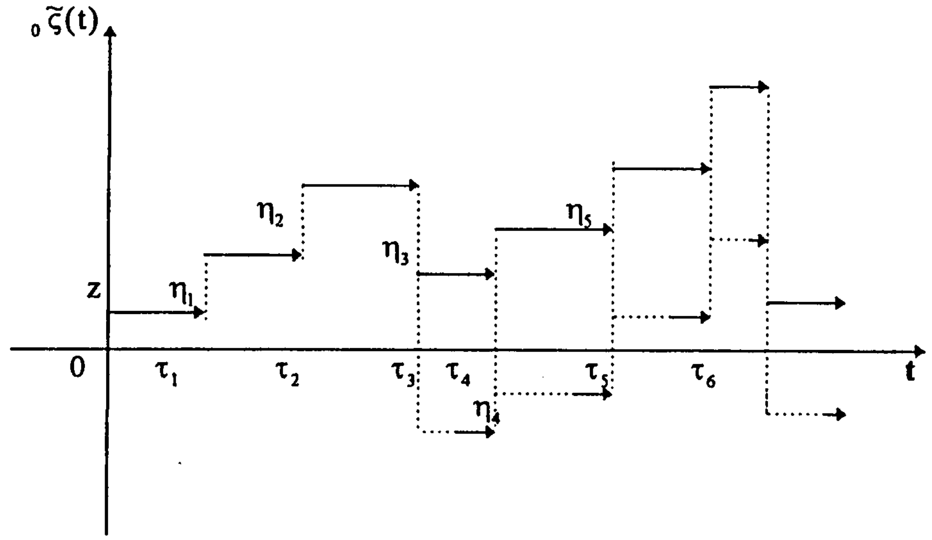
### 2.2.1 $\varsigma(t)$ Sürecinin yansıtılması

a) $\varsigma_k = |\varsigma_{k-1} + \eta_k|, \varsigma_0 = z \ge 0,, \eta_0 = 0$

olmak üzere

$${}_0\tilde{\varsigma}(t) = \varsigma_k, \text{ eğer } \sum_{i=1}^{k}\xi_i \le t < \sum_{i=1}^{k+1}\xi_i \text{ ise,}$$

ile tanımlanan ${}_0\tilde{\varsigma}(t)$ süreci sıfır seviyesinde yansıtan ekranlı bir yarı-Markov rastgele yürüyüş süreci oluşturur (Şekil 2.11).




Şekil 2.11. Sıfır seviyesinde yansıtan ekranlı yarı-Markov rastgele yürüyüş sürecinin bir görünüşü

b) $\varsigma_k = \left|\varsigma_{k-1} + \eta_k + a\right| - a$

olmak üzere

$$_{-a}\tilde{\varsigma}(t) = \varsigma_k, \text{ eğer } \sum_{i=1}^{k} \xi_i \le t < \sum_{i=1}^{k+1} \xi_i \text{ ise,}$$

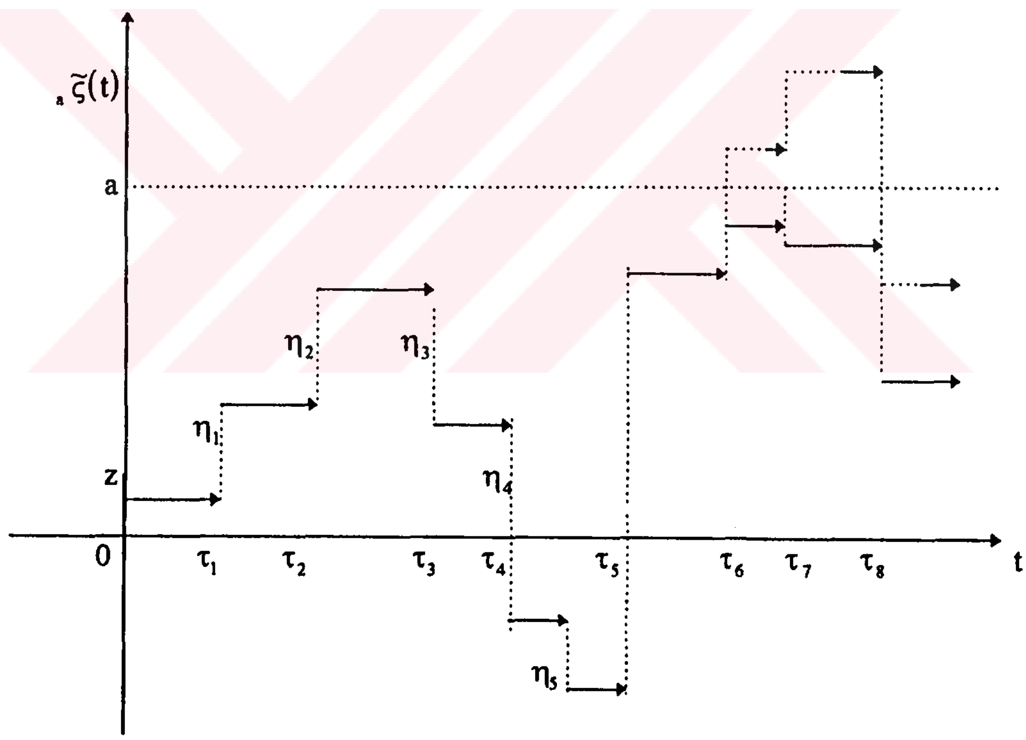
ile tanımlanan $_{-a}\tilde{\varsigma}(t)$ süreci $-a$ $(a > 0)$ seviyesinde yansıtan ekranlı bir yarı-Markov rastgele yürüyüş süreci oluşturur.

c) $\varsigma_k = a - \left|\varsigma_{k-1} + \eta_k - a\right|$

olmak üzere

$$_{a}\tilde{\varsigma}(t) = \varsigma_k, \text{ eğer } \sum_{i=1}^{k} \xi_i \le t < \sum_{i=1}^{k+1} \xi_i \text{ I ise}$$

ile tanımlanan $_{a}\tilde{\varsigma}(t)$ süreci $a > 0$ seviyesinde yansıtan ekranlı bir yarı-Markov rastgele yürüyüş süreci oluşturur (Şekil 2.12).




Şekil 2.12. $a > 0$ seviyesinde yansıtan ekranlı yarı-Markov rastgele yürüyüş sürecinin bir görünüşü

### 2.2.2 $\chi(t)$ Sürecinin yansıtılması

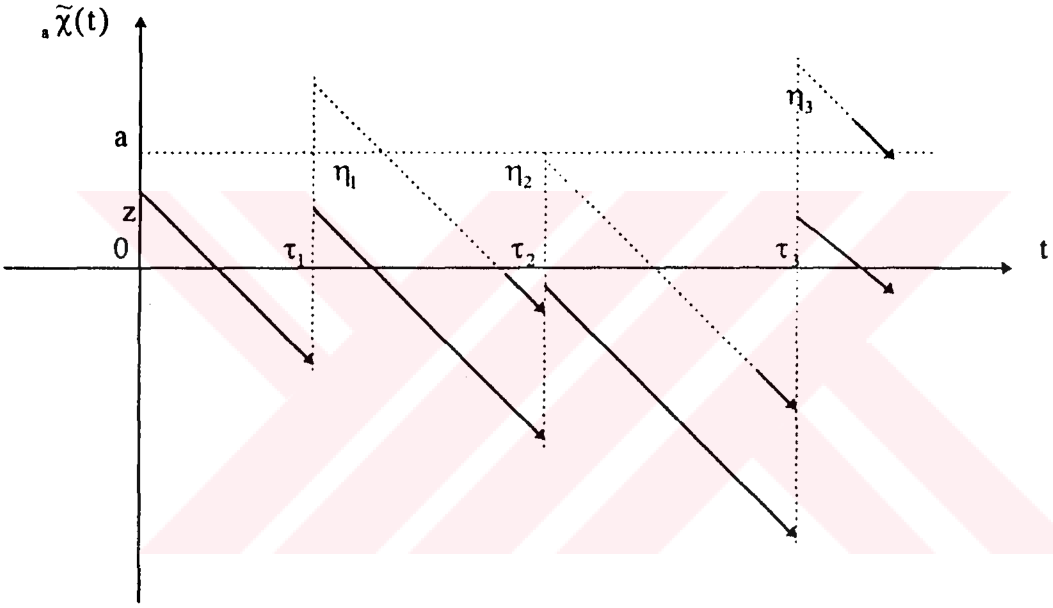
Bu süreci 0 ve -a da yansıtamıyoruz. Çünkü süreç t=0 okunu ve t= -a okunu sürekli olarak kesmektedir.

$$\varsigma_k = \begin{cases} z-\sum_{i=1}^{k}\xi_i+\sum_{i=1}^{k}\eta_i & ; z-\sum_{i=1}^{k}\xi_i+\sum_{i=1}^{k}\eta_i < a \\ 2a-[z-\sum_{i=1}^{k}\xi_i+\sum_{i=1}^{k}\eta_i] & ; z-\sum_{i=1}^{k}\xi_i+\sum_{i=1}^{k}\eta_i < a \end{cases}$$

olmak üzere

$${}_a\widetilde{\chi}(t)=\varsigma_k-(t-\sum_{i=1}^{k-1}\xi_i),\ \text{eğer}\ \sum_{i=1}^{k}\xi_i \le t < \sum_{i=1}^{k+1}\xi_i\ \text{ise,}$$

ile tanımlanan ${}_a\widetilde{\chi}(t)$ süreci $a>0$ seviyesinde yansıtan ekranlı negatif akımlı pozitif sıçramalı bir yarı-Markov süreç oluşturur (Şekil 2.13).




Şekil 2.13. $a>0$ seviyesinde yansıtan ekranlı negatif akımlı pozitif sıçramalı yarı-Markov sürecinin bir görünüşü

### 2.2.3 $\Psi(t)$ Sürecinin yansıtılması

a) $\varsigma_k = |\varsigma_{k-1}+\xi_k-\eta_k|, \eta_0 = z$

olmak üzere

$${}_0\widetilde{\Psi}(t)=\varsigma_k+(t-\sum_{i=1}^{k-1}\xi_i)\,\text{eğer}\ \sum_{i=1}^{k}\xi_i \le t < \sum_{i=1}^{k+1}\xi_i\ \text{ise,}$$

ile tanımlanan ${}_0\widetilde{\Psi}(t)$ süreci sıfır seviyesinde yansıtan ekranlı pozitif akımlı negatif sıçramalı bir yarı-Markov süreç oluşturur.

$$\text{b) } \varsigma_k = \begin{cases} |\varsigma_{k-1} + \xi_k - \eta_k + a| - a \;; \varsigma_{k-1} + \xi_k - \eta_k < -a \\ \varsigma_{k-1} + \xi_k - \eta_k \qquad ; \varsigma_{k-1} + \xi_k - \eta_k > -a \end{cases}$$

olmak üzere

$$_{-a}\widetilde{\Psi}(t) = \varsigma_k + (t - \sum_{i=1}^{k-1} \xi_i) \text{ eğer } \sum_{i=1}^{k} \xi_i \le t < \sum_{i=1}^{k+1} \xi_i \text{ ise,}$$

ile tanımlanan $_{-a}\widetilde{\Psi}(t)$ süreci $-a(a > 0)$ seviyesinde yansıtan ekranlı pozitif akımlı negatif sıçramalı bir yarı-Markov süreç oluşturur.

**2.2.4 X(t) Sürecinin Yansıtılması**

Farzedelimki $\xi_k^{\pm} \ge 0, \eta_k^{\pm} > 0$ olmak üzere $\{(\xi_k^+, \eta_k^+; \xi_k^-, \eta_k^-)\}_{k=1}^{\infty}$ rastgele değişkenler dizisi verilmiş olsun. Aşağıdaki işaretlemeleri yapalım.

$$\upsilon^{\pm}(t) = \min\left\{k : \sum_{i=1}^{k+1} \xi_k^{\pm} > t\right\} \text{ ( t zamanına kadar olan sıçramaların sayısı)}$$

$$\tau_k^{\pm} = \sum_{i=1}^{k} \xi_k^{\pm}$$

Aşağıdaki rastgele değişkenler dizisini kuralım.

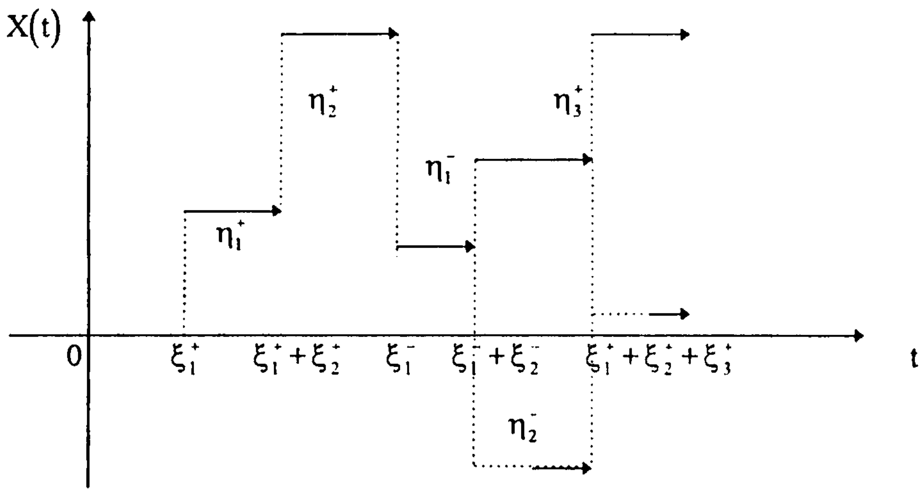
$$\varsigma_k = \left|\varsigma_{k-1} + \eta^+_{\upsilon^+(\tau_{k-1}^-)+1} + \ldots + \eta^+_{\upsilon^+(\tau_k^-)} - \eta_k^-\right|, \varsigma_0 = z$$

$$\text{a) } {}_0\widetilde{X}(t) = \varsigma_{k-1} + \eta^+_{\upsilon^+(\tau_{k-1}^-)+1} + \ldots + \eta^+_{\upsilon^+(t)}, \text{ eğer } \tau_{k-1}^- \le t < \tau_k^- \text{ ise,}$$

veya

$$_0\widetilde{X}(t) = \varsigma_{\upsilon^-(t)} + X^+(t) - X^+(\tau^-_{\upsilon^-(t)})$$

ile tanımlanan $_0\widetilde{X}(t)$ süreci sıfır seviyesinde yansıtan ekranlı bir karmaşık yarı-Markov rastgele yürüyüş süreci oluşturur (Şekil 2.14).




Şekil 2.14. Sıfır seviyesinde yansıtan ekranlı karmaşık yarı-Markov rastgele yürüyüş sürecinin bir görünüşü

$$\text{b)}\ \varsigma_k = \begin{cases} \varsigma_{k-1} + \eta^+_{\upsilon^+(\tau^-_{k-1})+1} + \ldots + \eta^+_{\upsilon^+(\tau^-_k)} - \eta^-_k & ;\text{pozitif} \\ -a + \left| \varsigma_{k-1} + \eta^+_{\upsilon^+(\tau^-_{k-1})+1} + \ldots + \eta^+_{\upsilon^+(\tau^-_k)} - \eta^-_k \right| & ;\text{negatif} \end{cases}$$

olmak üzere

$${}_{-a}\widetilde{X}(t) = \varsigma_k, \quad \text{eğer } \tau^-_{k-1} \le t < \tau^-_k \text{ ise}$$

ile tanımlanan ${}_{-a}\widetilde{X}(t)$ süreci $-a(a > 0)$ seviyesinde yansıtan ekranlı bir karmaşık yarı-Markov rastgele yürüyüş süreci oluşturur

$$\text{c)}\ \varsigma_k = \begin{cases} \varsigma_{k-1} + \eta^+_{\upsilon^+(\tau^-_{k-1})+1} + \ldots + \eta^+_{\upsilon^+(\tau^-_k)} - \eta^-_k & ;\text{pozitif} \\ 2a - \varsigma_{k-1} + \eta^+_{\upsilon^+(\tau^-_{k-1})+1} + \ldots + \eta^+_{\upsilon^+(\tau^-_k)} - \eta^-_k & ;\text{negatif} \end{cases}$$

olmak üzere

$${}_{a}\widetilde{X}(t) = \varsigma_k, \quad \text{eğer } \tau^+_{k-1} \le t < \tau^+_k \text{ ise}$$

ile tanımlanan ${}_{a}\widetilde{X}(t)$ süreci $a > 0$ seviyesinde yansıtan ekranlı bir karmaşık yarı-Markov rastgele yürüyüş süreci oluşturur

# 3. YARI-MARKOV SÜREÇLERİ ÜZERİNE YAPILAN ÇALIŞMALAR

## 3.1.Ekransız Süreçler

Nasırova (1984) $\varsigma(t)$ sürecinin dağılımını ve onun esas sınır fonksiyonlarının dağılımlarını incelemiştir.

Sürecin dağılım fonksiyonu

$$R(t,x) = P\{\varsigma(t) < x\}, \qquad x \in (-\infty,+\infty), \qquad t \in [0,+\infty)$$

olup aşağıdaki şekilde verilmiştir.

$$R(t,x) = P\{\varsigma(t) < x\} = P\{\eta_1 + .....+\eta_{v(t)} < x\} = P\{\sum_{i=1}^{v(t)} \eta_i < x\}$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} P\{\sum_{i=1}^{k} \eta_i < x; v(t) = k\} = \sum_{k=1}^{\infty} P\{\sum_{i=1}^{k} \eta_i < x\} P\{v(t) = k\}$$

$$= F^{*K}(t)[\Phi^{*K}(t) - \Phi^{*K-1}(t)]$$

$\varsigma(t)$ sürecinin supremumunun dağılımını $Q(t,x)$ ile gösterelim, yani

$$Q(t,x) = P\{\sup_{0\le s\le t} \varsigma(s) < x\}, \qquad t \in [0,+\infty).$$

olsun. Kolayca görmek mümkündür ki

$$\{\sup_{0\le s\le t} \varsigma(s) < x\} = \{\xi_1 > t\} \cup \{\xi_1 < t, \eta_1 < x\} \cap \{\theta_{\xi_1} \sup_{0\le S\le t-\xi_1} \varsigma(s) < x - \eta_1\}$$

dır. Burada

$$\theta_\tau \xi(s) = \xi(s+\tau) - \xi(s)$$

dır. Bu durumda toplam olasılık formülünden yararlanarak aşağıdaki integral denklemini elde etmek mümkündür.

$$Q(t,x) = P\{\xi_1 > t\} + \int_0^t \int_{-\infty}^{x} P\{\xi_1 \in ds, \eta_1 \in dy\} Q(t-s, x-y)$$

Şimdi de bu denklemin her iki tarafına Laplace dönüşümü uygulanırsa ikinci argümente göre yarım eksende Konvolusyon tipli integral denklemi elde edilir:

$$\tilde{Q}(\lambda,x) = \frac{1-\varphi(\lambda)}{\lambda} + \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\lambda,, dy) \tilde{Q}(\lambda,, x-y), \tag{3.1.1}$$

burada $\varphi(\lambda, dy) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} P\{\xi_1 \in ds, \eta_1 \in dy\}$ dır. (3.1.1) denklemi ise Nasırova

(1984)' nın verdiği yöntemle çözülebilir.

$\varsigma(t)$ sürecinin x eksenini ilk kez geçme anı ve miktarının ortak dağılımını ifade etmek için aşağıdaki notasyonları gözönüne alalım.

$\tau_x(\varsigma) = \inf\ [t: \varsigma(t) > x],\ \ \gamma_x(\varsigma) = \varsigma(\tau_x(\varsigma) + 0) - \varsigma(\tau_x(\varsigma))$

Eğer $\sup\limits_{0 \le s \le \infty} \varsigma(s) < x$ ise $\tau_x(\varsigma) = +\infty$ olduğu aşikardır.

$N(t, y, x) = P\{\tau_x(\varsigma) < t, \gamma_x(\varsigma) > y\}$

olmak üzere toplam olasılık förmülüne göre aşağıdaki ifadeyi yazabiliriz

$$N(t, y, x) = P\{\xi_1 < t, \eta_1 > x + y\} + \int_0^t \int_{-\infty}^x P\{\xi_1 \in ds, \eta_1 \in d\beta\} N(t - s, y, x - \beta).$$

Bu denkleme Laplace dönüşümü uygulanırsa

$$\tilde{N}(\lambda, y, x) = \alpha(\lambda, x + y) + \int_{-\infty}^x \tilde{N}(\lambda, y, x - \beta)\varphi(\lambda, d\beta), x \ge 0,$$

elde edilir. Burada

$$\alpha(\lambda, x + y) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} P\{\xi_1 < t; \eta_1 > x + y\}$$

dır. Buradan gerekli hesaplamalar yapılarak çözümün

$$\tilde{N}(\lambda, y, x) = \frac{\lambda\varphi(\lambda)}{1 - \varphi(\lambda)} \int_0^x \left[ \int_{-\infty}^0 [1 - F(y + \beta - u)] dq - (\lambda, \beta) d\varphi(\lambda, u) \right]$$

olduğu görülür.

Çoğu kez sürecin bir parametreye bağlı olduğunda onun sonlu dağılımlarının (parametre sonsuzluğa gittiğinde) hangi sürece yakınsayacağını bilmek isteyebiliriz. Örneğin,

$E\xi_1 = a_1,\ E\eta_1 = a_2,\ Var\xi_1 = b_1,\ Var\eta_1 = b_2 < \infty$

olsun. Şimdi $\varsigma(t)$ sürecinden istifade ederek aşağıdaki süreci kuralım.

$$\varsigma_T(t) = \frac{1}{\sqrt{\dfrac{b_1 a_2^2 + a_2^2 a_1^2}{a_1^3}}} \left[ \varsigma(Tt) - \frac{a_2}{a_1} Tt \right]$$

Nasırova (1984)

$$\lim_{T\to\infty} P\{\varsigma_T(t) < x\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{u^2}{2t}} du$$

olduğunu ispatlamıştır.

Şimdi ise sistemler serisinde rastgele değişkenler dizisini ele alalım.

$\{\xi_k^{(n)}, \eta_k^{(n)}\}, k = 1,2,\ldots \quad n = 1,2,\ldots$ olduğunda aşağıdaki süreçleri kuralım.

$$\varsigma_n(t) = \sum_{k=1}^{\nu_n(t)} \eta_k^{(n)}, \nu_n(t) = m, \text{ eğer } \sum_{k=1}^{m} \xi_k^{(n)} \le t < \sum_{k=1}^{m+1} \xi_k^{(n)} \text{ ise}$$

olmak üzere $\xi_k^{(n)}, \eta_k^{(n)}$ rastgele değişkenlerinin üzerine aşağıdaki şartları koyalım.

$$\forall \varepsilon > 0 \text{ , iç in} \lim_{n\to\infty}\left( P\{\xi_k^{(n)} > \varepsilon\} + P\{|\eta_k^{(n)}| > \varepsilon\}\right) = 0,$$

bu ise $\xi_k^{(n)}, \eta_k^{(n)}$ rastgele değişkenlerinin $n \to \infty$ için sonsuz küçülmeyen rastgele değişkenler olduğunu ifade eder.

**TEOREM 3.1:** $\varsigma_n(t)$ rastgele süreçlerinin sonlu ölçülü dağılım fonksiyonları belli bir $\varsigma(t)$ rastgele sürecinin sonlu ölçülü dağılım fonksiyonuna yakınsıyor ve her t için $\{\varsigma_n(s), s \le t\}$ rastgele değişkenlerinin tümü olasılık üzere sınırlı ise

$$\lim_{c\to\infty} \sup_n P\{\varsigma_n(s) > c; s \le t\} = 0$$

dır. O zaman artımları bağımsız olmayan öyle iki ölçülü, kırılan $\{\xi(t); \eta(t), t < \tau\}$ süreci vardır ki, $\varsigma(t) = \eta\{\xi^{-1}(t)\}$ dır, burada $\varsigma(t)$ pozitif artan süreçtir.

**TEOREM 3.2:** $\xi_k^{(n)}, \eta_k^{(n)}$ bağımsız rastgele değişkenler olsun $\varsigma_n(t)$'nin sonlu dağılım fonksiyonları herhangi bir $\varsigma(t)$ sürecinin sonlu dağılım fonksiyonlarına yakınsasın. O zaman artımları bağımsız öyle bir $\eta(t)$ rasgele süreci ve kırılan, artımları bağımsız, pozitif artan öyle bir $\xi(t)$ süreci vardır ki;

$$\varsigma(t) = \eta(\xi^{-1}(t))$$

dır. Burada $\xi(t), \eta(t)$ bağımsız süreçlerdir.

**TANIM 3.1:** $(\Omega, \Im, P)$ olasılık uzayında herhangi bir $\xi(t)$ rasgele süreci verilmiş olsun.

$$t > 0, \qquad t_0 < t_1 < \ldots < t_n < \ldots$$

olmak üzere aşağıdaki rastgele değişkenleri ele alalım

$$\xi(t_0), \xi(t_1) - \xi(t_0), \ldots, \xi(t_n) - \xi(t_{n-1}), \ldots$$

Eğer bu rastgele değişkenler bağımsız iseler $\xi(t)$ sürecine artımları bağımsız süreç denir. Şimdi artımları bağımsız olan sürecin genel halini verelim.

**TANIM 3.2:** $\overline{R}^m$ ile $R^m$ uzayına $<<\infty>>$ noktasının ilave edilmiş şeklini ifade edelim. Yani

$$\overline{R}^m = R^m \cup <<\infty>>$$

olsun.

Eğer $\overline{R}^m$ de tayin olunmuş bir cins homojen Markov süreci aşağıdaki üç şartı sağlıyorsa ona artımları bağımsız, kırılan süreç denir.

1) $\infty$ yutma noktasıdır.

2) Her A-Borel çokluğu ve her $x \in R^m$ için bu sürecin geciş olasılığı aşağıdaki şartı sağlamalıdır.

$$P(t,x,A) = P(t,0,A_{-x}), \quad A_{-x} = \{y : x+y \in A\}$$

3) $P(t,x,\{\infty\})$ $x \in R^m$ den bağımsızdır.

$\chi(t)$ sürecini Caferov (1978) çalışmıştır. Bu sürecin dağılım fonksiyonu,

$$R_z(t,x) = P\{\chi(t) < x / \chi(0) = z\} = P\{z + \varsigma(t) - t < x\}$$

$$= P\{\varsigma(t) < x + t - z\} = P\left\{\sum_{i=1}^{\upsilon(t)} \eta_i < x - z + t\right\} = \sum_{k=1}^{\infty}\left\{\sum_{i=1}^{k} \eta_i < x - z + t; \upsilon(t) = k\right\}$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} P\left\{\sum_{i=1}^{k} \eta_i < x - z + t\right\} P\{\nu(t) = k\} = \sum_{k=1}^{\infty} F^{*k}(x - z - t)[\varnothing^{*k}(t) - \varnothing^{*k-1}(t)]$$

şeklinde verilmiştir.

$\chi(t)$ sürecinin supremumunun dağılımının bulunması için yarım eksende Konvolusyon tipli integral denklemi alınmış ve bu denkleme Laplace dönüşümü uygulanarak Fredholum'un 2. tür denklemi elde edilmiştir. Bu denklem Teorem 1 ve Teorem 2 de anlatılan şekilde çözülmüştür.

$$Q_z(t,x) = P\left\{\sup_{0 \le s \le t} \chi(s) < x / \chi(0) = z\right\},$$

ifadesi $x < z$ olduğunda $Q_z(t,x) = 0$ olur, $x > z$ olduğunda ise toplam olasılık formülünden

$$Q_z(t,x) = P\{\xi_1 > t\} + \int_0^t \int_0^{x-z+s} P\{\xi_1 \in ds, \eta_1 \in dy\} Q_{z-s+y}(t-s,x)$$

elde edilir. Şimdi

$$Q_z(t,x) = M(t, x-z)$$

yazalım, burada

$$\begin{cases} M(t,x) = P\{\xi_1 > t\} + \int_0^t \int_0^\infty P\{\xi_1 \in ds, \eta_1 - \xi_1 \in dy\} M(t-s, x-y), & x > 0 \\ M(t,x) = 0 & , \; x \le 0 \end{cases}$$

dır. Buradan Laplace dönüşümüne geçilirse

$$\begin{cases} \tilde{M}(\lambda,x) = \dfrac{1-\varphi(\lambda)}{\lambda} + \int_{-\infty}^{\infty} M(\lambda, x-y) P_\lambda(dy), & x \ge 0 \\ \tilde{M}(\lambda,x) = 0 & , \; x < 0 \end{cases}$$

elde edilir. Burada

$$P_\lambda(A) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} P\{\xi_1 \in dt, \eta_1 - \xi_1 \in A\}$$

dır. Bu takdirde

$$\tilde{\tilde{M}}(\lambda,\alpha) = \frac{1}{\lambda} \exp\left( \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \int_0^\infty \left(e^{i\alpha x} - 1\right) P_\lambda^{(k)}(dx) \right)$$

dır.

$\chi(t)$ Sürecinin supremumunun dağılımını aşağıdaki şekilde de verilebilir.

$$Q_z(t,x) = P\left\{ \sup_{0 \le s < t} \chi(s) < x / \chi(0) = z \right\} = P\{z < x; \xi_1 > t\} +$$

$$\int_0^t \int_{-\infty}^x P\{\xi_1 \in ds, \chi(s) \in dy / \chi(0) = z\} P\left\{ \sup_{0 \le s \le t-s} \chi(s) < x; \xi_1 < t / \chi(0) = z \right\}$$

$$= P\{\xi_1 > t\} + \int_0^t \int_{-\infty}^x P\{\xi_1 \in ds\} P\{z - s - \eta_1 \in dy\} \; Q_y(t-s; x)$$

$$= P\{\xi_1 > t\} + \int_0^t \int_{-\infty}^{z-s} p\{\xi_1 \in ds\} d_y F\eta_1(z-s-y) Q_y(t-s; x)$$

$\chi(t)$ sürecinin herhangi bir $x > 0$ seviyesini ilk kez geçme anı $(\tau_x(\chi) - \chi(t)$ sürecinin ilk defa x'e ulaşma anı) ve sürecin $x > 0$ seviyesini geçme miktarının $(\gamma_x(\chi))$ ortak dağılımını

$$N_z(t,y,z) = P\{\tau_x(\chi) < t, \gamma_x(\chi) > y / \chi(0) = z\}$$

ile gösterelim. Buradan toplam olasılık formülünü kullanarak aşağıdaki ifadeyi yazabiliriz.

$$N_z(t,y,x) = P\{\xi_1 < t, z - \xi_1 + \eta_1 > x\} + \int_0^t \int_0^{x+s-z} P\{\xi_1 \in ds, \eta_1 \in dv\} N_{z-s+v}(t-s,y,x)$$

Bu denklem ise Laplace ve Fourier dönüşümleri yapılarak yukarıdaki yöntem ile çözülebilir. Farzedelimki $\left\{\xi_k^{(n)}, \eta_k^{(n)}\right\}_{k=1,2,...;n=1,2,...}$ aynı dağılıma sahip, birbirinden bağımsız rasgele değişkenleri verilmiş olsun. Bu rastgele değişkenler dizisinden istifade ederek,

$$\varsigma_n(t) = \sum_{k=1}^{\upsilon_n(t)} \eta_k^{(n)}, \upsilon_n(t) = m, \text{ eğer } \sum_{k=1}^{m} \xi_k^{(n)} \le t < \sum_{k=1}^{m+1} \xi_k^{(n)}$$

yazalım. Şimdi

$$\chi_n(t) = \varsigma_n(t) - t$$

sürecine bakalım. Böyle bir sürecin limit dağılımı $\varsigma_n(t)$ süreci için limit dağılımı olsun. $\varsigma_n(t)$ süreçler dizisinin limit dağılımının olmasının şartları Teorem 3.1 de verilmiştir.

Fakat $\chi_n(t)$ sürecinde akımın n ye bağlı olduğunu farzetmek doğru olmaz. Eğer bu sürece bakarsak onun akımını bizim belirlediğimizi görürüz. Türlü akımlı süreçler dizileri için böyle bir dönüşümü yapmak mümkün değildir. Bu nedenle

$$\chi_n(t) = \varsigma_n(t) - ta_n$$

süreçler dizisine bakacağız. Burada $a_n$ pozitif değerler alan bir dizidir. Böyle süreçler dizisi için aşağıdaki teorem ispat edilmiştir.

**TEOREM 3.3:** Farzedelimki yukarıdaki formül ile verilmiş $\chi_n(t)$ sürecinin sonlu ölçülü dağılımları herhangi bir $\chi(t)$ sürecinin sonlu ölçülü dağılımlarına yakınsar ve keyfi t>0 *ve* $\{|\chi_n(s)|, s \le t\}, n = 1,2,...$ için rastgele değişkenler ailesi olasılık anlamında sınırlıdır. Bu takdirde artımları bağımsız olan öyle $\eta(t)$ süreci ve bağımsız değerli öyle durağan $\Delta(t)$ süreci vardır ki

$$\chi(t) = \eta(t) - \Delta(t)$$

olur.

$\Psi(t)$ süreci Ahmetova (1979) tarafindan incelemiştir.Bu sürecin supremumunun dağılımının

$$Q_z(t,x) = P\left\{\sup_{0\le s<t} \Psi(s) < x/\Psi(0) = z\right\}$$

$$= P\left\{\sup_{0\le s<t} \Psi(s) < x; \xi_1 > t/\Psi(0) = z\right\} + P\left\{\sup_{0\le s<t} \Psi(s) < x; \xi_1 < t/\Psi(0) = z\right\}$$

$$= P\{z+t<x\}P\{\xi_1 > t\} + \int_0^t \int_{-\infty}^x P\{\xi_1 \in ds; \Psi(s) \in dy / \Psi(0) = z\}.$$

$$.P\left\{\sup_{0\le u<t-s} \Psi(u) < x/\Psi(0) = y\right\}$$

veya

$$Q_z(t,x) = a(t,z,x) + \int_0^t \int_{-\infty}^x B[ds,dy,]Q_y(t-s,x)$$

olduğu gösterilmiştir, burada

$$B(ds,dy) = P\{\xi_1 \in ds; \Psi(s) \in dy / \Psi(0) = z\}$$

dır.

$X(t)$ sürecini ise Nasırova ele almış ve bu sürecin bazı olasılık karakteristiklerini incelemiştir. Sürecin supremumunun dağılımını şu şekilde bulmuştur.

$$\tau_k^{\pm} = \sum_{i=1}^{k} \xi_i^{\pm}$$

olsun. Belirtelimki $\tau_k^{+}, \tau_k^{-}$ rastgele değişkenleri $X(t)$ süreci için Markov noktaları değildirler. Sürecin gelecekteki değerlerini bilmek için sürecin t anındaki değerini bilmek yeterli değildir. Ayrıca $\tau_k^{-}$ anından sonra birinci defa pozitif sıçrayışın ne zaman olduğunda bilinmesi gerekmektedir. Böylece de $\tau_k^{+}$ anında sürecin değerini bildikten sonra $\tau_k^{+}$ dan sonra birinci negatif sıçrayışın ne zaman olduğunu bilmek gerekir. Bununla ilgili olarak $X(t)$ sürecini incelemek için aşağıdaki iki süreci inşa edelim.

$$\delta^{\pm}(t) = \min_{\tau_k^{\pm} > t}\left[\tau_k^{\pm} - t\right] = \sum_{i=1}^{\upsilon^{\pm}(t)-1} \xi_i^{\pm} - t$$

Bu takdirde

$$P\left\{\sup_{0\le s<t} X(s) < x / X(0) = z; \delta^{\pm}(0) = \xi_1^{\pm} = h\right\} = P\left\{\sup_{0\le s<t} X(s) < x / X(0) = z; \xi_1^{+} = h\right\}$$

yazabiliriz. Toplam olasılık formülünden istifade ederek

$$P\left\{\sup_{0\le s<t} X(s) < x / X(0) = z, \xi_1^+ = h\right\} =$$

$$= P\left\{\sup_{0\le s<t} X(s) < x, \xi_1^- > t / X(0) = z, \xi_1^+ = h\right\} + \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty}\int_0^{\infty} P\left\{\xi_1 \in (s-ds, s), \sup_{0\le\beta\le t-s} x(\beta) < x,\right.$$

$$\left. X(s) \in dy, \delta_s^+ \in du / X(0) = z, \xi_1^+ = h\right\} P\left\{\sup_{0\le\beta<t-s} X(\beta) < x / X(0) = y, \xi_1^+ = u\right\}$$

$$P\left\{\xi_1^- \in (s-ds, s), \sup_{0\le s\le t-dt} X(s) < x, X(s) \in dy, \delta_s^+ \in du / X(0) = z, \xi_1^+ = h\right\}$$

$$= B(s, x, dy, du / z, h)ds \qquad (*)$$

elde edilir. Şimdi aşağıdaki gösterimleri yapalım.

$$Q(t, x / z, h) = P\left\{\sup_{0\le s\le t} X(s) < x / X(0) = z, \xi_1^+ = h\right\},$$

$$B_0(t, x / z, h) = P\left\{\sup_{0\le s\le t} X(s) < \chi, \xi_1^- > t / X(0) = z, \xi_1^+ = h\right\}$$

olsun.Buradan Laplace dönüşümüne geçilirse

$$\tilde{Q}(\lambda, x / z, h) = \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} Q(t, x / z, h)dt$$

$$\tilde{B}_0(\lambda, x / z, h) = \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} B_0(t, x / z, h)dt$$

$$\tilde{B}(\lambda, x, dy, du / z, h) = \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} B(t, x, dy, du / z, h)dt$$

bulunur. Bu takdirde (*) denklemi

$$Q(\lambda, x / z, h) = \tilde{B}_0(\lambda, x / z, h) + \int_{-\infty}^{x}\int_0^{\infty} \tilde{Q}(\lambda, x / y, u)\tilde{B}(\lambda, x, dy, du / z, h) \qquad (3.1.2)$$

olarak yazılabilir.

Ayrıca Nasırova (1984) X(t) sürecinin infimumu, supremumu ve sürecin kendisinin ortak dağılımını aşağıdaki gibi ifade etmiştir.

Toplam olasılık formülüne göre

$$P\left\{\inf_{0\le s\le t} X(s) > a, \sup_{0\le s\le t} X(s) < x, X(t) < y / X(0) = z, \xi_1^+ = h\right\} =$$

$$+\int_0^t \int_{-\infty}^{x}\int_0^{\infty} P\left\{\xi_1^- \in (s-ds, s), \inf_{0\le t\le s-ds} X(t) > a, \sup_{0\le t\le s-ds} X(t) < x,\right.$$

$$\left. X(s) \in d\beta, \delta^+(s) \in du / X(0) = z, \xi_1^+ = h\right\}$$

$$P\left\{\sup_{0\le\delta\le t-s} X(t) < x, X(t-s) < y / X(0) = z, \xi_1^+ = u\right\}$$

dır, burada $a < 0 < x$ dır. Aşağıdaki gösterimleri yapalım.

$$H(t,a,x,y/z,h) = P\left\{ \inf_{0\le s\le t} X(s) > a, \sup_{0\le s\le t} X(s) < x, X(t) < y / X(0) = z, \xi_1^+ = h \right\}$$

$$D_0(t,a,x,y/z,h) = P\left\{ \inf_{0\le s\le t} X(s) > a, \sup_{0\le s\le t} X(s) < x, X(t) < y, \xi_1^- > t / X(0) = z, \xi_1^+ = h \right\}$$

$$D(t,a,x,y,u/z,h)dt =$$

$$= P\left\{ \xi_1^- \in (t-dt,t), \inf_{0\le s\le t} X(s) > a, \sup_{0\le s\le t} X(s) < x, X(t) < y, \delta_t^+ \in du / X(0) = z, \xi_1^+ = h \right\}$$

$$\widetilde{H}(\lambda,a,x,y/z,h) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} H(t,a,x,y/z,h)dt,$$

$$\widetilde{D}_0(\lambda,a,x,y/z,h) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} D_0(t,a,x,y/z,h)dt,$$

$$\widetilde{D}(\lambda,a,x,y,u/z,h) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} D(t,a,x,y,u/z,h)dt.$$

Buradan

$$\widetilde{H}(\lambda,a,x,y/z,h) = \widetilde{D}_0(\lambda,a,x,y/z,h) +$$
$$+ \int_{-\infty}^{x}\int_0^\infty \widetilde{H}(\lambda,a,x,y/\beta,u)\widetilde{D}(\lambda,a,x,d_\beta,du/z,h) \tag{3.1.4}$$

elde edilir.

X(t) sürecinin *x* eksenini ilk defa geçme anı ve miktarının ortak dağılımı ise aşağıdaki gibi ifade edilmiştir.

$\tau_x(x)$ ile sürecin *x* ekseni ilk defa geçmesi anını, $\gamma_x(x)$ ile de geçme miktarını gösterelim. Bu takdirde

$$P\{\tau_x(x) < t, \gamma_x(x) > y / X(0) = z, \xi_1^+ = h\} =$$

$$= P\{\tau_x(x) < t, \gamma_x(x) > y, \xi_1^- > t / X(0) = z, \xi_1^+ = h\}$$

$$+ \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty}\int_0^\infty P\left\{ \xi_1^- \in (s-ds,s), \sup_{0\le\beta\le s-ds} X(\beta) < x, X(s) \in d\beta, \delta_s^+ \in du / X(0) = z, \xi_1^+ = h \right\}$$

$$P\{\tau_x(x) < t-s, \gamma_x(x) > y / X(0) = \beta, \xi_1^+ = u\}$$

dır. Aşağıdaki gösterimleri yapalım;

$$N(t,x,y/z,h) = P\{\tau_x(x) < t, \gamma_x(x) > y / X(0) = z, \xi_1^+ = h\},$$

$$C_0(t,x,y/z,h)=p\{\tau_x(x)<t,\gamma_x(x)>y,\xi_1^- >t/X(0)=z,\xi_1^+=h\}$$

Her iki tarafın Laplace dönüşümünü alırsak

$$\tilde{N}(\lambda,x,y/z,h)=\tilde{C}_0(\lambda,x,y/z,h)+\int_{\infty}^{\infty}\int_{0}^{\infty}\tilde{N}(\lambda,x,y/\beta,u)\tilde{B}(\lambda,x,d_\beta,du/z,h) \quad (3.1.5)$$

bulunur. Elde edilen (3.1.1), (3.1.2) ve (3.1.3) denklemlerini genel halde aşağıdaki gibi yazabiliriz.

$$\hat{Q}(z,h)=\hat{B}_0(z,h)+\int_{\infty}^{\infty}\int_{0}^{\infty}\hat{Q}(y,u)\hat{B}_\lambda(dy,du/z,h)$$

Eğer $\sup\limits_{z,h}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{\infty}\hat{B}_\lambda(x,dy,du/z,h)<1$ ise bu denklemin ardıcıl yakınlaşma metoduyla da çözülebildiği ispat edilmiştir.

$$\sup_{z,h}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{\infty}\hat{B}_\lambda(x,dy,du/z,h)=$$

$$=\int_0^\infty e^{-\lambda s}P\left\{\xi_1^-\in ds,\ \sup_{0\le u\le s-du}X(s)<x;x(s)\in dy;\delta^+(s)\in du/z,h\right\}=$$

$$=\sup_{z,h}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{\infty}\int_{0}^{\infty}e^{-\lambda s}P\left\{\xi_1^-\in ds,\ \sup_{0\le u\le s-du}X(s)<x;X(s)\in dy;\delta^+(s)\in du/z,h\right\}=$$

$$=\sup_{z,h}\int_{0}^{\infty}\int_{0}^{\infty}e^{-\lambda s}P\left\{\xi_1^-\in ds,\ \sup_{0\le u\le s-du}X(s)<x;\Omega;\delta^+(s)\in du/z,h\right\}=$$

$$=\sup_{z,h}\int_{0}^{\infty}e^{-\lambda s}P\left\{\xi_1^-\in ds,\ \sup_{0\le u\le s-du}X(s)<x;\Omega;\Omega/z,h\right\}\le$$

$$=\sup_{z,h}\int_{0}^{\infty}e^{-\lambda s}P\{\xi_1^-\in ds/z,h\}=\sup_{z,h}\int_{0}^{\infty}e^{-\lambda s}P\{\xi_1^-\in ds\}=$$

$$=\int_{0}^{\infty}e^{-\lambda s}P\{\xi_1^-\in ds\}<\int_{0}^{\infty}P\{\xi_1^-\in ds\}=1$$

dır. O zaman Fredholum'un bu tür denkliği ardıcıl yakınlaşma yöntemiyle çözülür.

**NOT:** Ardıcıl yakınlaşma yöntemi ile çözüm;

$$f(x)=\varphi(x)+\int_a^b K(x,y)f(y)dy$$

$f_0(x)$'e sıfırıncı yakınlaşma denir, biz sıfırıncı yakınlaşmayı $f_0(x)=\varphi(x)$ olarak alalım. Bu takdirde;

$$f_1(x)=\varphi(x)+\int_a^b K(x,y_1)f_0(y_1)dy_1=\varphi(x)+\int_a^b K(x,y_1)\varphi(y_1)dy_1,$$

$$f_2(x)=\varphi(x)+\int_a^b K(x,y)f_1(y)dy=\varphi(x)+\int_a^b K(x,y)\left(\varphi(y)+\int_a^b K(y,y)\varphi(y)dy\right)$$

$$=\varphi(x)+\int_a^b K(x,y_1)\varphi(y_1)dy_1+\int_a^b\int_a^b K(x,y_1)K(y_1,y_2)\varphi(y_2)dy_1dy_2$$

$$\vdots$$

$$f_n(x)=\varphi(x)+\sum_{k=1}^{n}\int_a^b\overset{(k)}{\cdots}\int_a^b K(x,y_1)K(y_1,y_2)\ldots K(y_{k-1},y_k)\varphi(y_k)dy_1dy_2\ldots dy_k$$

dır. O zaman (3.1.3), (3.1.4) ve (3.1.5) denklemlerinin çözümleri aşağıdaki gibi olur.

$$\widetilde{Q}(\lambda,x/z,h)=\widetilde{B}_0(\lambda,x/z,h)+$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\int_{-\infty}^{x}\overset{(n)}{\cdots}\int_{-\infty}^{x}\widetilde{B}(\lambda,x,dy_1,du_1/z,h)\widetilde{B}(\lambda,x,dy_2,du_2/y_1,u_1)$$

$$\ldots\widetilde{B}(\lambda,x,dy_n,du_n/y_{n-1},u_{n-1}).\widetilde{B}_0(\lambda,x/y_n,u_n).$$

$$\widetilde{H}(\lambda,a,x,y/z,h)=\widetilde{D}_0(\lambda,a,x,y/z,h)+\sum_{n=1}^{\infty}\int_{-\infty}^{x}\overset{(n)}{\cdots}\int_{-\infty}^{x}\int_0^{\infty}\widetilde{D}(\lambda,a,x,d\beta,du_1/z,h)$$

$$.\widetilde{D}(\lambda,a,x,d\beta_2,du_2/\beta_1,u_1)\ldots\widetilde{D}(\lambda,a,x,d\beta_n,du_n/\beta_{n-1},u_{n-1}).\widetilde{D}_0(\lambda,a,x,y/\beta_n,u_n)$$

$$\widetilde{N}(\lambda,x,y/z,h)=\widetilde{C}_0(\lambda,x,y/z,h)+\sum_{n=1}^{\infty}\int_{-\infty}^{x}\ldots\int_{-\infty}^{x}\int_0^{\infty}\ldots\int_0^{\infty}\widetilde{B}(\lambda,x,d\beta_1,du_1/z,h).$$

$$\widetilde{B}(\lambda,x,d\beta_2,du_2/\beta_1,u_1)\ldots\widetilde{B}(\lambda,x,d\beta_n,du_n/\beta_{n-1},u_{n-1})\widetilde{C}_0(\lambda,x,y/\beta_n,u_n).$$

X(t) süreci sonsuzluğa giden bir t parametresinden bağımsız olduğundan onun dağılımını bulabiliriz.

**TEOREM 3.4:** Farzedelim ki;

$$E\xi_1^{\pm}=a_1^{\pm},E\eta_1^{\pm}=a_2^{\pm},Var\xi_1^{\pm}=b_1^{\pm},Var\eta_1^{\pm}=b_2^{\pm}$$

$$X_T(t)=\left(X(tT)-\left(\frac{a_2^+}{a_1^+}-\frac{a_2^-}{a_1^-}\right)tT\right).\left(\sqrt{\left[\frac{(a_1^+)^2b_2^++(a_2^+)^2b_1^+}{(a_1^+)^3}+\frac{(a_1^-)^2b_2^-+(a_2^-)^2b_1^-}{(a_3^-)^3}\right]T}\right)^{-1}$$

olsun. O zaman bu süreç $T\to\infty$ için $[0,1]$ de Wiener sürecine yani $W(t),t\in[0,1]$ sürecine zayıf manada yakınsar, yani

$$P\{X_T(t) < x\} \xrightarrow[T\to\infty]{} P\{W(t) < x\}$$

dır.

**NOT:** İstenilen fonksiyon için $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dF_n(x) - \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dF(x)$ ise

$F_n \Rightarrow F$ ($F_n$ fonksiyonu F'e zayıf anlamda yığılır) denir.

Farzedelimki $\left\{\xi_k^{(n)+};\eta_k^{(n)+};\xi_k^{(n)-};\eta_k^{(n)-}\right\}_{k=1}^{\infty}$, $\xi_k^{\pm(n)} > 0; \eta_k^{\pm n} > 0$ sonsuz küçülen dizisi verilmiş olsun. Yani;

$$\lim_{n\to\infty}\left(P\left\{\xi_k^{(n)+} > \varepsilon\right\} + P\left\{\eta_k^{(n)+} > \varepsilon\right\} + P\left\{\xi_k^{(n)-} > \varepsilon\right\} + P\left\{\eta_k^{(n)-} > \varepsilon\right\}\right) = 0$$

olsun. Yukarıdaki diziden istifade ederek aşağıdaki yarı-Markov süreçleri teşkil edelim.

$$X_n^{\pm}(t) = \sum_{k=1}^{\upsilon n^{\pm}(t)} \eta_k^{(n)\pm}, \text{ eğer } \sum_{k=1}^{\upsilon n^{\pm}(t)} \xi_k^{(n)\pm} \le t < \sum_{k=1}^{\upsilon n^{\pm}(t)+1} \xi_k^{(n)\pm}$$

Bu süreçlerden istifade ederek de aşağıdaki karmaşık yarı-Markov sürecini kuralım.

$$X_n(t) = X_n^+(+) - X_n^-(t)$$

Farzedelimki $X_n^{\pm}(t)$ süreçlerinin her ikisi olasılık üzere sınırlıdırlar. $X_n(t)$ süreçler dizisi için iki teorem ispat edilmiştir.

**TEOREM 3.5:** Eğer $X_n(t)$ süreçler dizisinin sonlu ölçülü dağılımı bilinen bir $X(t)$ sürecinin sonlu ölçülü dağılımlarına yakınsarsa;

$$X(t) = \eta^+\left(\xi^{+-1}(t)\right) - \eta^-\left(\xi^{--1}(t)\right)$$

olur. Burada $\xi^{\pm}(t)$ artımları bağımsız , kırılan artan süreç olup $\xi^+(t), \eta^+(t)$, $\xi^-(t), \eta^-(t)$ kendi aralarında bağımsızdırlar.

$$\xi^{\pm-1}(t) = s, \quad \text{eğer } \xi^{\pm}(s-0) \le t < \xi^{\pm}(s)$$

**TEOREM 3.6:** Eğer $X_n^{\pm}(t)$ süreçlerinin her ikisi olasılık üzere sınırlı değiller ve $X_n(t)$ süreçler dizisinin sonlu ölçülü dağılımı bilinen bir $X(t)$ sürecinin sonlu ölçülü dağılımına yakınsak ise bu takdirde $X(t)$ süreci artımları bağımsız bir homogen süreçtir.

### 3.2. Tek Ekranlı Süreçler

Sıfır seviyesinde tutan ekranlı ${}_0\varsigma^*(t)$ süreci için Nasırova (1984) aşağıdaki durumları incelemiştir.

1) ${}_0\varsigma^*(t)$ nın dağılım fonksiyonunun bulunması

2) ${}_0\varsigma^*(t)$ nın sup. dağılım fonksiyonunun dağılımının bulunması

3) ${}_0\varsigma^*(t)$ nın birinci defa belirli x seviyesini geçme anı $\left(\tau_{\varsigma}.\right)$ ve bu seviyeyi aşma miktarının ortak dağılımını

4) Sürecin sup. ve kendisinin ortak dağılım fonksiyonunun bukunması

5) ${}_0\varsigma^*(t)$ için Ergodik Teoremin ispatı

6) ${}_0\varsigma^*(t)$ nın Ergodik dağılımının bilinen şekli

7) $\varsigma_n^*(t)$ süreçler dizisi için limit teoremi ispatlanmıştır.

Başlangıç durumu ${}_0\varsigma^*(0)=z$ olmak üzere $\tau_0(\varsigma)$ ile ${}_0\varsigma^*(t)$ sürecinin birinci defa sıfır seviyesine düşmesi anını gösterelim. Bu takdirde toplam olasılık formülüne göre

$$P\{{}_0\varsigma^*(t)<x/\varsigma(0)=z\}=P\{{}_0\varsigma^*(t)<x;(\tau_0(\varsigma)>t)\cup(\tau_0(\varsigma)<t)/{}_0\varsigma^*(0)=z\}$$

$$=P\{{}_0\varsigma^*(t)<x;\tau_0(\varsigma)>t/{}_0\varsigma^*(0)=z\}+P\{{}_0\varsigma^*(t)<x;\tau_0(t)<t/{}_0\varsigma^*(0)=z\}$$

$$=P\{\varsigma(t)<t;\tau_0(\varsigma)>t/{}_0\varsigma^*(0)=t\}+P\{{}_0\varsigma^*(t)<x;\tau_0(t)<t/{}_0\varsigma^*(0)=z\} \qquad (3.2.1)$$

yazılabilir. Öte yandan

$$P\{\varsigma(t)<x;\tau_0(\varsigma)>t/{}_0\varsigma^*(t)=z\}=P\left\{\varsigma(t)<x;\inf_{0\le s\le t}\varsigma(s)>0/\varsigma(0)=z\right\}$$

$$=P\left\{z+\varsigma(t)<x;\inf_{0\le s\le t}(z+\varsigma(s))>0\right\}$$

ve

$$P\{{}_0\varsigma^*(t)<x;\tau_0<t/{}_0\varsigma^*(0)=z\}=$$

$$P\{\varsigma^*(t)<x,\tau_0(\varsigma)<t/\varsigma(0)=z\}=\int_0^t P\{\tau_0(\varsigma)\in ds/\varsigma(0)=z\}$$

$$\left[P\{\xi_1>t-s\}+\int_0^{t-s}P\{\xi_1\in du\}\int_0^{\infty}dF(v)p\{\varsigma^*(t-u-s)<x/\right.$$

$$\varsigma(0)=z\}+P\{\eta_1\le 0\}P\{\xi_1+\xi_2>t-s\}+\int_0^{t-s}P\{\xi_1+\xi_2\in du\}\int_0^{\infty}dF(v)$$

$$P\{\varsigma^*(t-u-s)<x/\varsigma(0)=v\}+\ldots+\left(P\{\eta_1\le 0\}\right)^{k-1}\left(P\{\xi_1+\ldots+\xi_k>t-s\}+\right.$$

$$\left.+\int_0^{t-s}P\{\xi_1+\ldots+\xi_k\in du\}\int_0^{\infty}dF(v)P\{\varsigma^*(t-u-s)<0/\varsigma(0)=v\})+\ldots\right]$$

dır ve böylece

$$P\{\varsigma^*(t)<x,\tau_0<t/\varsigma(0)=z\}=\int_0^{t}P\{\tau_0(\varsigma)\in ds/\varsigma(0)=z\}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left[P\{\eta_1\le 0\}\right]^k\left[P\{\xi_1+\ldots+\xi_k>t-s\}+\int_0^{t-s}P\{\xi_1+\ldots+\xi_{k+1}\in du\}\int_0^{\infty}dF(v).\right.$$

$$\left.P\{\varsigma^*(t-u-s)<x/\varsigma(0)=v\}\right]$$

elde edilir.

Elde edilen bu denklemin her iki tarafina t' ye göre Laplace dönüşümünü uygulayarak

$$\int_0^{\infty}e^{-\lambda t}P\{\varsigma^*(t)<x,\tau_0(\varsigma)<t/\varsigma(0)=z\}dt=$$

$$E_z e^{-\lambda\tau_0(\varsigma)}\sum_{k=0}^{\infty}\left[\left(P\{\eta_1\le 0\}\right)^k\frac{1}{\lambda}\left(1-\varphi^{k+1}(\lambda)\right)+\right.$$

$$+\frac{1}{\lambda}\varphi^{k+1}(\lambda)\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}e^{-\lambda t}P\{\varsigma^*(t)<x/\varsigma(0)=z\}.dtdF(v)=$$

$$=\frac{1}{\lambda}\frac{\varphi(\lambda)E_z e^{-\lambda\tau_0(\varsigma)}}{1-P\{\eta_1\le 0\}\varphi(\lambda)}\left[\frac{1-\varphi(\lambda)}{\varphi(\lambda)\left(1-p\{\eta_1\le 0\}\right)}+\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}e^{-\lambda t}P\{\varsigma^*(t)<x/\varsigma(0)=v\}dtdF(v)\right]$$

olduğu görülür. Aşağıdaki gösterimleri yapalım.

$$R(t,x/z)=P\{\varsigma^*(t)<x/\varsigma(0)=z\}$$

$$\tilde{R}(\lambda,x/z)=\int_0^{\infty}e^{-\lambda t}R(t,x/z)dt$$

bu denklemin her iki tarafina Laplace dönüşümünü uygulayalım. O zaman

$$\tilde{R}(\lambda,x/z)=\bar{f}(\lambda,z-x)-\int_0^{\infty}\bar{f}(\lambda,-x-u)\overline{\Gamma}_{\lambda}(z,du)+$$

$$+\frac{1}{\lambda}\frac{\varphi(\lambda)E_z e^{-\lambda\tau_0(\varsigma)}}{1-P\{\eta_1\le 0\}\varphi(\lambda)}\left[\frac{1-\varphi(\lambda)}{\varphi(\lambda)\left(1-P\{\eta_1\le 0\}\right)}+\int_0^\infty \tilde{R}(\lambda,x/v)dF(v)\right] \tag{3.2.2}$$

dır. Burada;

$$\bar{f}(\lambda,x) =)\int_0^\infty e^{-\lambda t}P\{\bar{\varsigma}(t)<x\}dt$$

$$\bar{\Gamma}_\lambda(z,A)=\int_0^\infty e^{-\lambda t}P\{\tau_z^-\in dt,\delta_z\in A\}.$$

dır. Elde ettiğimiz bu denklemin her iki tarafını dF(z) ile çarpalım ve sıfırdan sonsuza kadar integralleyelim;

$$\int_0^\infty \tilde{R}(\lambda,x/\upsilon)dF(\upsilon)=$$

$$=\frac{\int_0^\infty \bar{f}(\lambda,v-x)dF(v)-\int_0^\infty\int_0^\infty \bar{f}(\lambda,-x-u)\bar{\Gamma}_\lambda(v,du)dF(v)+\frac{[1-\varphi(\lambda)]E_z e^{-\lambda\tau_0(\varsigma)}}{\lambda P\{\eta_1\le 0\}[1-P\{\eta_1\le 0\}\varphi(\lambda)]}}{1-\frac{\varphi(\lambda)E_z e^{-\lambda\tau_0(\lambda)}}{\lambda[1-P\{\eta_1\le 0\}\varphi(\lambda)]}}$$

elde edilir. Bu ifadeyi (3.2.1.2)'de yerine yazarak

$$P\{\varsigma^*(t)<x/\varsigma(0)=z\}=$$

$$\tilde{R}(\lambda,x/z)=\bar{f}(\lambda,z-x)-\int_0^\infty \bar{f}(\lambda,-x-u)\bar{\Gamma}_\lambda(z,du)+\frac{1}{\lambda}\frac{\varphi(\lambda)E_z e^{-\lambda\tau_0(\varsigma)}}{1-P\{\eta_1\le 0\}\varphi(\lambda)}\cdot$$

$$\left[\frac{1-\varphi\lambda}{P\{\eta_1>0\}\varphi(\lambda)}+\right.$$

$$\left.+\frac{\int_0^\infty \bar{f}(\bar{\lambda},v-x)dF(v)-\int_0^\infty\int_0^\infty \bar{f}(\lambda,-x-u)\bar{\Gamma}_\lambda(v,du)\varphi F(v)+\frac{[1-\varphi(\lambda)]Ee^{-\lambda\tau_0(\varsigma)}}{\lambda P\{\eta_1\ge 0\}[1-P\{\eta_1\le 0\}\varphi(\lambda)]}}{1-\frac{\varphi(\lambda)E_z e^{-\lambda\tau_0(\varsigma)}}{\lambda[1-P\{\eta_1\le 0\}\varphi(\lambda)]}}\right]$$

bulunur.

Toplam olasılık formülüne göre sürecin supremumunun dağılımını bulmak için sürecin kendisinin dağılımına benzer olarak aşağıdaki ifade yazılabilir.

$$Q(t,x/z)=P\left\{\sup_{0\le s\le t}\varsigma^*(s)<x/\varsigma(0)=z\right\},x\ge z\ge 0$$

$$Q(t,x/z)=P\left\{\sup_{0\le s\le t}\varsigma(s)<x-z,\tau_{-z}(\varsigma)>t\right\}+\int_0^t P\left\{\sup_{0\le u\le s}\varsigma(u)<x-z,\tau_{-z}(\varsigma)+ds\right\}$$

$$\left[\sum_{k=0}^{\infty}P\{\xi_1+\ldots+\xi_{k+1}>t-s\}+\int_0^{t-s}P\{\xi_1+\ldots+\xi_{k+1}\in dv\}\int_0^{x}dF(y)Q(t-s-v,x/y)\left(P\{\eta_1\le 0\}\right)^K\right].$$

bu denkleme t'ye göre Laplace dönüşümünü uygularsak sürecin supremumunun dağılımının Laplace dönüşümünü elde etmiş oluruz.

**NOT:** $\{\tau_{-z}(\varsigma)>t\}\equiv\left\{\inf_{0\le s\le t}\varsigma(s)>-z\right\}$ dır

$$\tilde{Q}(\lambda,x/z)=\Gamma(\lambda;-z,x-z;-z,x-z)+\frac{g(\lambda,x,z)}{1-\varphi(\lambda)P\{\eta_1\le 0\}}\left[\frac{1}{\lambda}.\frac{1-\varphi(\lambda)}{1-P\{\eta_1\le 0\}}+\right.$$

$$\left.\frac{\int_0^{\infty}\{\varphi(\lambda)[1-\varphi(\lambda)P\{\eta_1\le 0\}].\Gamma(\lambda;-z,x-y;-z,x-y)+[1-\varphi(\lambda)]g(\lambda,\chi,y)\}dF(y)}{\lambda\left[1-\varphi(\lambda)P\{\xi_1\le 0\}-\varphi(\lambda).\int_0^{x}g(\lambda,\chi,y)dF(y)\right]}\right]$$

$\varsigma^*(t)$ sürecinin ve sürecin supremumunun ortak dağılımının

$$H(t,x,y/z)=P\left\{\sup_{0\le s\le t}\varsigma^*(s)<x,\varsigma^*(t)<y/\varsigma(0)=z\right\}=$$

$$=P\left\{\sup_{0\le s\le t}\varsigma^*(s)<x,\varsigma^*(t)<y,\tau_0(\varsigma)\ge t/\varsigma(0)=z\right\}+P\left\{\sup_{0\le s\le t}\varsigma^*(s)<x,\varsigma^*(t)<y\right.$$

$$\left.\tau_0(\varsigma)<t/\varsigma(0)=z\right\}$$

$$=P\left\{\inf_{0\le s\le t}\varsigma(s)>-z,\sup_{0\le s\le t}\varsigma(s)<x-z,\varsigma(t)\in(-z,y-z)\right\}+P\left\{\sup_{0\le s\le t}\varsigma^*(s)<x,\varsigma^*(t)<y\right.$$

$$\left.\tau_0(\varsigma)<t/\varsigma(0)=z\right\}\tag{3.2.3}$$

şeklinde olduğu gösterilmiştir. Bu formülün birnci kısmını

$$P\left\{\sup_{0\le s\le t}\varsigma^*(s)<x,\varsigma^*(t)<y,\tau_0<t/\varsigma(0)=z\right\}=$$

$$=\int_0^t P\left\{\sup_{0\le s\le t}\varsigma^*(s)<x,\tau_0(\varsigma)\in du/\varsigma(0)=z\right\}P\left\{\sup_{0\le s\le t}\varsigma^*(s)<x,\varsigma^*(t)<y/\tau_0(\varsigma)=0\right\}.$$

olarak yazabiliriz. (3.2.1.3) denkleminin her iki tarafına Laplace dönüşümünü uygularsak aşağıdaki ifadeyi elde ederiz.

$$\tilde{H}(\lambda,x,y/z)=r(\lambda;-z,x-z;-z,x-z)+\frac{\varphi(\lambda)}{1-\varphi(\lambda)P\{\eta_1\le 0\}}$$

$$\left[\frac{1}{\lambda}+\frac{\int_0^{x}\left[r(\lambda;-y,x-y,-y,x-y)+\frac{a(\lambda,x,y)\varphi(\lambda)}{\lambda-\lambda\varphi(\lambda)P\{\eta_1\leq 0\}}\right]dF(y)}{1-\frac{\varphi(\lambda)}{1-\varphi(\lambda)P\{\eta_1\leq 0\}}\int_0^{x}a(\lambda,x,z)dF(z)}\right]$$

$\varsigma^*(t)$ sürecinin birinci defa $x$ seviyesini geçme anı ve bu seviyeyi geçme miktarının ortak dağılımı bulunmuş ve $\varsigma^*(t)$ süreci için ergodik teorem ispat edilmiştir.

$\chi^*(t)$ sürecinin dağılımının bulunması ile ilgili olarak $\tau^-$ ile sürecin sıfıra düştükten sonraki ilk anını gösterelim ve

$$\chi'(t)=\chi(t)+t-z$$

olsun.

$$\{\chi^*(t)<x\}=\{\chi'(t)-t<x\}$$

olduğundan toplam olasılık formülüne göre

$$P\{\chi^*(t)<x,\tau^->t/\chi(0)=z\}=P\{\chi'(t)-t<x,\tau^->t/\chi(0)=z\}=$$

$$=P\{\chi'(t)-t<x/\chi(0)=z\}-P\{\chi'(t)-t<x,\tau^-\leq t/\chi(0)=z\}=$$

$$=P\{\chi'(t)-t<x/\chi(0)=z\}-\int_0^t\int_{-\infty}^0 P\left\{\chi'(t)-t<x/\tau^-=s,\chi'\left(\tau^-\right)-\tau^-=u\right\}$$

$$P\{\tau^-\in ds,\chi'(\tau^-)-\tau^-\in du\}=$$

$$=P\{\chi'(t)-t<x/\chi(0)=z\}-\int_0^t\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^0 P\{\chi'(t-s)-(t-s)<x/\chi(0)=y+z\}.$$

$$P\{\tau^-\in ds,\chi'(\tau^-)-\tau^-\in du\}P\{\eta_1\in dz-y\}$$

yazabiliriz. Buradan bazı dönüşümler yapıldıktan sonra ${}_0\chi^*(t)$ nın dağılımı için aşağıdaki aşağıdaki ifade elde edilir.

$$P\left\{\chi^*(t)<x/\chi(0)=z\right\}=P\left\{\chi^*(t)<x,\tau^->t/\chi(0)=z\right\}+\int_0^t\Psi(t-s,x).$$

$$P\{\tau^-\in ds/\chi(0)=z\}$$

${}_0\chi^*(t)$ sürecinin supremumunun dağılımı, belirli bir seviyeye ulaşma anı ve bu seviyeyi aşma miktarının ortak dağılımı verilmiştir.

$\chi^*(t)$ sürecinin ergodikliği ile ilgili olarak aşağıdaki teorem ispatlanmıştır.

**TEOREM 3.7:** Farz edelimki $E\xi_1, E\eta_1$ sonludur ve $E\xi_1 < E\eta_1$ dır. O zaman $\chi^*(t)$ süreci ergodik süreç olacaktır ve onun Ergodik dağılımı istenilen $f$ fonksiyonu için

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T f\left(\chi^*(t)\right)dt = \frac{\int_0^\infty e\left(\int_0^{z\lambda_1} f\left(\chi^*(t)\right)\right)dP\{\eta_1 < z\}}{\int_0^\infty E_z h_1 dP\{\eta_1 < z\}}$$

gibidir.

${}_0\Psi^*(t)$ sürecinin supremumunun dağılımı, $\eta_i^\mu$ sıçrayışlı ve $\xi_\mu(t)$ genel Poisson süreci olduğunda bulunmuştur.

$\tau_k^-, \tau_k^+$, ${}_0X^*(t)$ süreci için Markov noktaları değillerdir. Markov süreci elde etmek için iki süreç ilave edelim;

$$\delta^\pm(t) = \min_{\tau_k^\pm > t}\left[\tau_k^\pm - t\right] = \sum_{i=1}^{\upsilon^\pm(t)+1} \xi_i$$

olsun. Toplam olasılık formulüne göre

$$P\{X^*(t) < x / X(0) = z, \xi_1^+ = h\} = P\{X^*(t) < x, \xi_1^* > t / X(0) = z, \xi_1^+ = h\} +$$
$$\int_0^t\int_0^\infty\int_0^\infty P\{\xi_1^- \in (s-ds, s), X^*(s) \in dy, \delta^+(s) \in du / X(0) = z, \xi_1^+ = h\} P\{X^*(t-s) < x /$$
$$X(0) = y, \xi_1^+ = u\}$$

yazılır. Şimdi aşağıdaki işaretlemeleri yapalım

$$P\{\xi_1^- \in (s-ds, s), X^*(s) \in dy, \delta^+(s) \in du / X(0) = z, \xi_1^+ = h\} =$$
$$= A(x, dy, du / z, h)ds + 0(ds)$$
$$R(t, x / z, h) = P\{X^*(t) < x / X(0) = z, \xi_1^+ = h\}$$
$$A_0(t, x / z, h) = P\{X^*(t) < x, \xi_1^- > t / X(0) = z, \xi_1^+ = h\}$$
$$A(t, dy, du / z, h)dt = P\{\xi_1^- \in (t-dt, t)\ X^*(t) \in dy, \delta^+(t) \in du / X(0) = z, \xi_1^+ = h\}$$
$$\tilde{R}(\lambda, x / z, h) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} R(t, x / z, h)dt$$
$$\tilde{A}_0(\lambda, x / z, h) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} A_0(t, x / z, h)dt$$
$$\tilde{A}(\lambda, dy, du / z, h) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} A(t, dy, du / z, h)dt.$$

Bu işaretlemelerden sonra aşağıdaki denklem alınır.

$$\widetilde{R}(\lambda, x/z, h) = \widetilde{A}_0(\lambda, x/z, h) + \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} \widetilde{R}(\lambda, x/y, u)\widetilde{A}(\lambda, dy, du/z, h) \tag{3.2.4}$$

Toplam olasılık formülüne esasen

$$P\left\{\sup_{0\le s\le t} X^*(s) < x / X(0) = z, \xi_1^+ = h\right\} = P\left\{\sup_{0\le s\le t} X^*(s) < x, \xi_1^- > t / X(0) = z, \xi_1^+ = h\right\} +$$

$$+\int_0^t\int_0^x\int_0^{\infty} P\left\{\xi_1^- \in (s-ds, s), \sup_{0\le\tau\le s-ds} X^*(\tau) < x, X^*(s) \in dy, \delta^+(s) \in du / X(0) = z, \xi_1^+ = h\right\}$$

$$P\left\{\sup_{0\le\tau\le t-s} X^*(\tau) < x / X(0) = y, \xi_1^+ = u\right\}\cdot$$

elde edilir.

$$Q(t, x/z, h) = P\left\{\sup_{0\le s\le t} X^*(s) < x / X(0) = z, \xi_1^+ = h\right\},$$

$$B_0(t, x/z, h) = P\left(\sup_{0\le s\le t} X^*(s) < x, \xi_1^- > t / X(0) = z, \xi_1^+\right),$$

$$B(t, x, dy, du/z, h) =$$

$$= P\left\{\xi_1^- \in (t-dt, t), \sup_{0\le s\le t-dt} X^*(s) < x, X^*(t) \in dy, \delta^+(t) \in du / X(0) = z, \xi_1^+ = h\right\}$$

olsun. Yukarıdaki işaretlemeleri yaptıktan sonra Laplace dönüşümünü uygularız.

$$\widetilde{Q}(\lambda, x/z, h) = \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} Q(t, x/z, h)dt,$$

$$\widetilde{B}_0(\lambda, x/z, h) = \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} B_0(t, x/z, h)dt,$$

$$\widetilde{B}(\lambda, x, dy, du/z, h) = \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} B(t, x, dy, du/z, h)dt.$$

Böylece

$$\widetilde{Q}(\lambda, x/z, h) = \widetilde{B}_0(\lambda, x/z, h) + \int_0^x\int_0^{\infty} \widetilde{Q}(\lambda, x/y, u)\widetilde{B}(\lambda, x, dy, du/z, h) \tag{3.2.5}$$

elde edilir.

${}_0X^*(t)$ sürecinin ilk defa belli bir x seviyesine ulaşma anı $\tau_x(x^*)$ ile miktarının $\gamma_x(x^*)$ ortak dağılımının bulunması için toplam olasılık formülüne göre

$$P\{\tau_x(x^*) < t, \gamma_x(x^*) > y / X(0) = z, \xi_1^+ = h\} =$$

$$= P\left\{\tau_x\left(x^*\right) < t, \gamma_x\left(x^*\right) > y, \xi_1^- > t / X(0) = z, \xi_1^+ = h\right\} + \int_0^t\int_0^\infty P\int_0^\infty P\left\{\xi_1^- \in (s-ds, s),\right.$$

$$\sup_{0\le\tau\le s-ds} X^*(z) < x, X^*(s) \in d\beta, \delta^+(s) \in du / X(0) = z, \xi_1^+ = h\} P\{\tau_x\left(X^*\right) < t-s,$$

$$\gamma_x\left(X^*\right) > / X(0) = \beta, \xi_1^+ = u\}$$

yazılabilir.

$$N(t, x, y / z, h) = P\{\tau_x(X^*) < t, \gamma_x(X^*) > y / X(0) = z, \xi_1^+ = h\},$$

$$C_0(t, x, y / z, h) = P\{\tau_x(X^*) < t, \gamma_x(X^*) > y, \xi_1^- > t / X(0) = z, \xi_1^+ = h\}$$

$$\tilde{N}(\lambda, x, y / z, h) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} N(t, x, y / z, h) dt$$

$$\tilde{C}_0(\lambda, x, y / z, h) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} C_0(t, x, y / z, h) dt$$

olarak alınırsa

$$\tilde{N}(\lambda, x, y / z, h) = \tilde{C}_0(\lambda, x, y / z, h) + \int_0^x\int_0^\infty \tilde{N}(\lambda, x, y / \beta, u) \tilde{B}(\lambda, x, d\beta, du / z, h) \qquad (3.2.6)$$

elde edilir.

${}_0X^*(t)$ sürecinin kendisinin ve supremumunun ortak dağılımını bulmak için toplam olasılık formülüne göre

$$P\left\{\sup_{0\le s\le t} X^*(s) < x, X^*(t) < y / X(0) = z, \xi_1^+ = h\right\} =$$

$$= P\left\{\sup_{0\le s\le t} X^*(s) < x, X^*(t) < y, \xi_1^- > t / X(0) = z, \xi_1^+ = h\right\} +$$

$$+ \int_0^t\int_0^x\int_0^\infty P\left\{\xi_1^- \in (s-ds, s), \sup_{0\le\tau\le s-ds} < x, X^*(s) \in d\beta, \delta^+(s) \in du / X(0) = z, \xi_1^+ = h\right\} \cdot$$

$$P\left\{\sup_{0\le\tau\le t-s} X^*(\tau) < x, X^*(t-s) < y / X(0) = \beta, \xi_1^+ = u\right\}$$

dır.

$$H(t, x, y / z, h) = P\left\{\sup_{0\le s\le t} X^*(s) < x, X^*(t) < y / X(0) = z, \xi_1^+ = h\right\}$$

$$D_0(t,x,y/z,h) = P\left\{\sup_{0\le s\le t} X^*(s) < x, X^*(t) < y, \xi_1^- > t / X(0) = z, \xi_1^- = h\right\}$$

olarak tanımlanırsa

$$\tilde{H}(\lambda,x,y/z,h) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} H(t,x,y/z,h)dt$$

$$\tilde{D}_0(\lambda,x,y/z,h) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} D_0(t,x,y/z,h)dt$$

elde edilir. Böylece

$$\tilde{H}(\lambda,x,y/z,h) = \tilde{D}_0(\lambda,x,y/z,h) + \int_0^\infty\int_0^\infty \tilde{H}(\lambda,x,y/\beta,u)\tilde{B}(\lambda,x,d\beta,du/z,h) \quad (3.2.7)$$

bulunur. (3.2.4), (3.2.5), (3.2.6), (3.2.6) denklemleri de ardıcıl yakınlaşma metoduyla çözülürler.

Eğer $X^*(t)$ süreci için

1) $\xi_1^+, \xi_1^-$ sonlu beklenen değerlere sahipdirler.

2) $\dfrac{E\eta_1^+}{E\xi_1^+} < \dfrac{E\eta_1^-}{E\xi_1^-}$

ise $X^*(t)$ sürecinin ergodik olduğu ispatlanmıştır.

$\tilde{X}(t)$ süreci için, sürecin dağılımı $\sup \tilde{X}(t)$ nin dağılımı, ilk defa belirli bir x eksenine ulaşma anı $\tau_x(\tilde{X})$ ve miktarı $\delta_x(\tilde{X})$ nın ortak dağılımları elde edilmiştir:

$$\upsilon^+(t) = \min\left\{k: \sum_{i=1}^{k+1}\xi_i^+ > t\right\}, \quad \tau_k^+ = \sum_{i=1}^{k}\xi_i^+$$

$$P\{\tilde{X}(t) < x / X(0) = z, \xi_1^+ = h\} =$$

$$= P\{\tilde{X}(t) < x, \xi_1^- > t / X(0) = z, \xi_1^+ = h\} + \int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty P\{\xi_1^- \in (s-ds,s), \tilde{X}(s) \in dy$$

$$\delta^+(s) \in du / X(0) = z, \xi_1^+ = h\} \cdot P\{\tilde{X}(t-s) < x / X(0) = y, \xi_1^+ = 0\}$$

Aşağıdaki işaretlemeleri yapalım;

$$P\{\xi_1^- \in (s-ds,s), \tilde{X}(s) \in dy, \delta^+(s) \in du / X(0) = z, \xi_1^+ = h\} =$$

$$= A(s,dy,du/z,h)ds + O(ds)$$

$$R(t,x/z,h) = P\{\tilde{X}(t) < x / X(0) = z, \xi_1^+ = h\}$$

$$A_0(t,x/z,h) = P\{\tilde{X}(t) < x, \xi_1^- > t / X(0) = z, \xi_1^+ = h\}$$

$$A(t,dy,du/z,h) = P\{\widetilde{X}(t) \in dy, \delta^{+}(t) \in du, \xi_{1}^{-} \in (t-dt,t) / X(0)=z, \xi_{1}^{+}=h\}$$

$$\widetilde{R}(\lambda,x/z,h) = \int_{0}^{\infty} e^{-\lambda t} R(t,x/z,h)dt$$

$$\widetilde{A}_{0}(\lambda,x/z,h) = \int_{0}^{\infty} e^{-\lambda t} A_{0}(t,x/z,h)dt$$

$$\widetilde{A}(\lambda,dy,du/z,h) = \int_{0}^{\infty} e^{-\lambda t} A(t,dy,du/z,h)dt$$

olsun. Laplace dönüşümü uygulanırsa;

$$\widetilde{A}(\lambda,dy,du/z,h) = \int_{0}^{\infty} e^{-\lambda t} A(t,dy,du/z,h)dt$$

$$\widetilde{R}(\lambda,x/z,h) = \widetilde{A}_{0}(\lambda,x/z,h) + \int_{0}^{\infty}\int_{0}^{\infty} \widetilde{R}(\lambda,dy,du/y,u)\widetilde{A}(\lambda,dy,du/z,h)$$

elde edilir.

$$P\left\{\sup_{0\le s\le t} \widetilde{X}(s) < x / X(0)=z, \xi_{1}^{+}=h\right\} =$$

$$= P\left\{\sup_{0\le s\le t} \widetilde{X}(s) < x, \xi_{1}^{-} > t / X(0)=z, \xi_{1}^{+}=h\right\} + \int_{0}^{\infty}\int_{0}^{\infty}\int_{0} P\left\{\xi_{1}^{-} \in (s-ds,s), \sup_{0\le\tau\le s-ds} \widetilde{X}(s) < x,\right.$$

$$\left.\widetilde{X}(s) \in dy, \delta^{+}(s) \in du / X(0)=z, \xi_{1}^{+}=h\right\}. P\left\{\sup_{0\le\tau<t-s} \widetilde{X}(\tau) < x / X(0)=y, \xi_{1}^{+}=u\right\}$$

$$Q(t,x/z,h) = P\left\{\sup_{0\le s\le t} \widetilde{X}(s) < x / X(0)=z, \xi_{1}^{+}=h\right\}$$

$$B_{0}(t,x/z,h) = P\left\{\xi_{1}^{-} > t, \sup_{0\le s\le t} \widetilde{X}(s) < x / X(0)=z, \xi_{1}^{+}=h\right\}$$

$$B(t,x,dy,du/z,h) = P\left\{\xi_{1}^{-} \in (t-dt,t), \sup_{0\le s\le t-dt} \widetilde{X}(s) < x, \widetilde{X}(t) \in dy,\right.$$

$$\left.\delta^{+}(t) \in du / X(0)=z, \xi_{1}^{+}=h\right\}$$

Buradan Laplace dönüşümünü eşitliğin her iki tarafına uygularsak;

$$\widetilde{B}_{0}(\lambda,x/z,h) = \int_{0}^{\infty} e^{-\lambda t} B_{0}(t,x/z,h)dt,$$

$$B(\lambda,x,dy,du/z,h) = \int_{0}^{\infty} e^{-\lambda t} B(t,x,dy,du/z,h)dt$$

$$\widetilde{Q}(\lambda,x/z,h) = \int_{0}^{\infty} e^{-\lambda t} Q(t,x/z,h)dt$$

$$\widetilde{Q}(\lambda,x/y,u)\widetilde{B}(\lambda,x,dy,du/z,h) \qquad (3.2.8)$$

$$\tilde{Q}(\lambda, x/z, h) = \tilde{B}_0(\lambda, x/z, h) + \int_0^\infty\int_0^\infty \tilde{Q}(\lambda, x/y, u)\tilde{B}(\lambda, x, dy, du/z, h)$$

alınmış olur.

$\tilde{X}(t)$ sürecinin sıfır seviyesini ilk kez geçme anı $\tau_x(\tilde{X})$ ve miktarı $\delta_x(\tilde{X})$ nin ortak dağılımının bulunması için toplam olasılık formülüne göre

$$P\{\tau_x(\tilde{X}) < t, \delta_x(\tilde{X}) > y / X(a) = z, \xi_1^+ = h\} =$$

$$= P\{\tau_x(\tilde{X}) < t, \delta_x(\tilde{X}) > y, \xi_1^- > t / X(a) = z, \xi_1^+ = h\} + \int_0^t\int_0^x\int_0^\infty P\{\xi_1^- \in (s-ds, s),$$

$$\sup_{0\le\tau\le s-ds} \tilde{X}(\tau) < x, \tilde{X}(s) \in d\beta, \delta_+(s) \in du / X(0) = z, \xi_1^+ = h\}$$

$$P\{\tau_x(\tilde{X}) < t-s, \delta_x(\tilde{X}) > y / X(0) = \beta, \xi_1^+ = u\}$$

elde edilir.

$$N(t, x, y/z, h) = P\{\tau_x(\tilde{X}) < t, \delta_x(\tilde{X}) > y / X(0) = z, \xi_1^+ = h\}$$

$$C_0(t, x, y/z, h) = P\{\tau_x(\tilde{X}) < t, \delta_x(\tilde{X}) > y, \xi_1^- > t / X(0) = z, \xi_1^+ = h\}$$

olarak alınırsa

$$\tilde{N}(\lambda, x, y/z, h) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} N(t, x, y/z, h)dt$$

$$\tilde{C}_0(\lambda, x, y/z, h) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} C_0(t, x, y/z, h)dt$$

ve böylece de

$$\tilde{N}(\lambda, x, y/z, h) = \tilde{C}_0(\lambda, x, y/z, h) + \int_0^x\int_0^\infty \tilde{N}(\lambda, x, y/\beta, u)\tilde{B}(\lambda, x, d\beta, du/z, h) \qquad (3.2.9)$$

elde edilir.

$$P\left\{\sup_{0\le s\le t} \tilde{X}(s) < x, \tilde{X}(t) < y / X(0) = z, \xi_1^+ = h\right\} =$$

$$= P\left\{\sup_{0\le s\le t} \tilde{X}(s) < x, \tilde{X}(t) < y, \xi_1^- > t / X(0) = z, \xi_1^+ = h\right\} + \int_0^t\int_0^x\int_0^\infty P\{\xi_1^- \in (s-ds, s),$$

$$\sup_{0\le\tau\le t-s} \tilde{X}(\tau) < x, \tilde{X}(s) \in d\beta, \delta^+(s) \in du / X(0) = z, \xi_1^+ = h\}.$$

$$.P\left\{\sup_{0\le\tau\le t-s} \tilde{X}(\tau) < x, \tilde{X}(s) < y / X(0) = \beta, \xi_1^+ = u\right\}$$

yazılır.

$$H(t,x,y/z,h) = P\left\{\sup_{0\le s\le t}\tilde{X}(s) < x, \tilde{X}(t) < y / X(0) = z, \xi_1^+ = h\right\}$$

$$D_0(t,x,y/z,h) = P\left\{\sup_{0\le s\le t}\tilde{X}(s) < x, \tilde{X}(t) < y, \xi_1^- > t / X(0) = z, \xi_1^+ = h\right\}.$$

olarak alınırsa

$$\tilde{H}(\lambda,x,y/z,h) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} H(t,x,y/z,h)dt,$$

$$D_0(\lambda,x,y/z,h) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} D_0(t,x,y/z,h)dt,$$

buradan da

$$\tilde{H}(\lambda,x,y/z,h) = \tilde{D}_0(\lambda,x,y/z,h) + \int_0^t\int_0^x\int_0^\infty \tilde{H}(\lambda,x,y/\beta,u)\tilde{B}(\lambda,x,d\beta,du/z,h) \quad (3.2.10)$$

elde edilir.

## 4. ${}_0\tilde{\varsigma}(t)$ SÜRECİ'NİN İNCELENMESİ

$\varsigma(t)$ yarı-Markov rastgele yürüyüş sürecinin verilmiş olduğunu varsayalım. Bu süreci sıfırda bulunan bariyerden yansıtalım. Yansıtılan bu süreci daha önce ${}_0\tilde{\varsigma}(t)$ ile göstermiştik. Bu sürecin dağılım fonksiyonu, ilk defa sıfırı geçme anının dağılım fonksiyonunu ve beklenen değerlerini bularak bir örnek verelim. Önce sürecin dağılım fonksiyonunu iki farklı yöntemle verelim.

**TEOREM 4.1:** Farzedelimki $\{(\xi_i,\eta_i)\}_{i=1}^{\infty}$ bağımsız ve aynı dağılımlı rastgele değişkenler ciftleri olup kendi aralarında bağımsız olsunlar. $\xi_i, i=1,2,\ldots$ pozitif değerli yani $P\{\xi_i>0\}=1, i=1,2,\ldots$ ve $\xi_1,\eta_1$'nin dağılım fonksiyonları biliniyor olsunlar.

$$T_n=\sum_{i=1}^{n}\xi_i\ ,\ n\geq 1; T_0=0$$

$$S_n=\sum_{i=1}^{n}\eta_i\ ,\ n\geq 1; S_0=0$$

ve

$$\varsigma_n=|\varsigma_{n-1}+\eta_n|, n\geq 1, \varsigma_0=z\geq 0$$

olarak tanımlanırsa $\{T_n\}, n\geq 0$ bir yenileme süreci, $\{S_n\}, n\geq 0$ bir rastgele yürüyüş süreci ve $\{\varsigma_n\}, n\geq 0$ Markov Zinciri ise sıfır seviyesinde yansıtan ekranlı bir rastgele yürüyüş süreci oluşturacaktır. Şimdi ${}_0\tilde{\varsigma}(t)$ stokastik sürecini

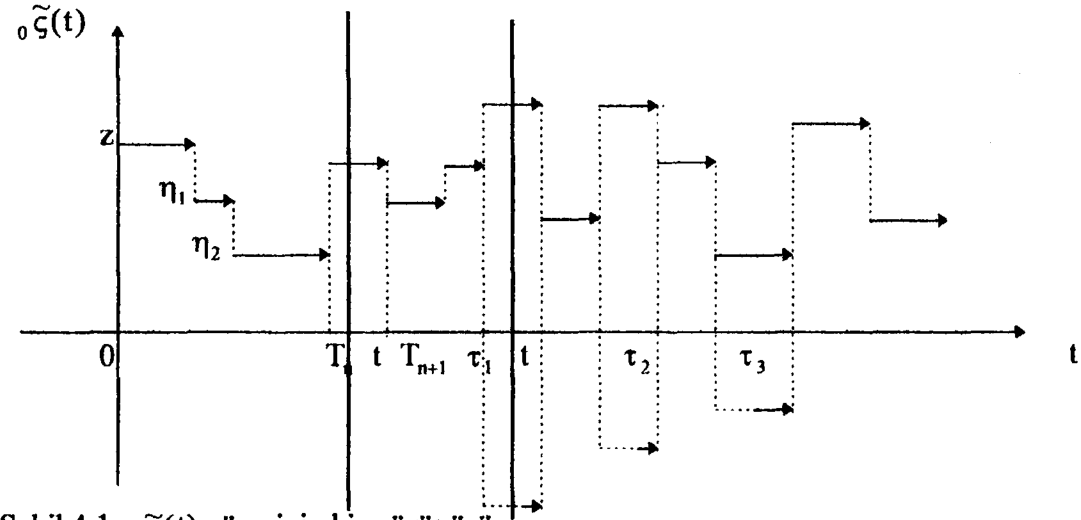
$${}_0\tilde{\varsigma}(t)=\varsigma_n,\ \text{eğer}\ T_n\leq t<T_{n+1}, n\geq 0\ \text{ise}$$

olarak tanımlayalım. Bu takdirde ${}_0\tilde{\varsigma}(t)$ sürecinin dağılım fonksiyonu $\{S_n\}$ ve $\{T_n\}$ rastgele süreçlerinin olasılık karakteristikleri yardımıyla aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$$Q(t,x/z)=P\{{}_0\tilde{\varsigma}(t)\leq x/{}_0\tilde{\varsigma}(0)=z\}=P_z\{{}_0\tilde{\varsigma}(t)\leq x\}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z,x)\Delta\Phi_n(t)+\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=k}^{\infty}\int_{-\infty}^{0}\overset{(k)}{\cdots}\int_{-\infty}^{0}\prod_{i=1}^{k}.\,b_n(|v_{i-1}|;dv_i)*a_n(|v_k|;x)\Delta\Phi_n(t)$$

**İSPAT:**




Şekil 4.1. $_0\tilde{\varsigma}(t)$ sürecinin bir görünüşü

Aşağıdaki gösterimleri yapalım:

$$\nu_0 = 0$$

$$\nu_1 = \min\{k \geq 1 : X_{k-1} + \eta_k < 0\}, X_0 > 0$$

$$\nu_n = \min\{k \geq \nu_{n-1} + 1 : X_{k-1} + \eta_k < 0\}, n \geq 1, \nu_0 = 0$$

Şimdi $\tau_n, n \geq 1$ dizisini aşağıdaki gibi tanımlayalım.

$$\tau_1 = \sum_{i=1}^{\nu_1} \xi_i = T_{\nu_1}$$

$$\tau_n = \sum_{i=1}^{\nu_n} \xi_i = T_{\nu_n}, n \geq 1$$

Bu takdirde $\tau_n, n \geq 1$ sürecin yansıtan bariyerden n. yansıma anı olarak yorumlanabilir. Toplam olasılık formülünü kullanarak aşağıdaki eşitliği yazabiliriz.

$$Q(t, x / z) = P_z\{{}_0\tilde{\varsigma}(t) \leq x\} = P_z\{\tau_1 > t; {}_0\tilde{\varsigma}(t) \leq x\} + P_z\{\tau_1 \leq t; {}_0\tilde{\varsigma}(t) \leq x\} \qquad (4.1)$$

Bu toplamdaki birinci terimi

$$G(t, x / z) = P_z\{\tau_1 > t; {}_0\tilde{\varsigma}(t) \leq x\} \qquad (4.2)$$

ile gösterelim. Bu takdirde toplam olasılık formülüne göre

$$G(t, x / z) = P_z\{\tau_1 > t; {}_0\tilde{\varsigma}(t) \leq x_0 \tilde{\varsigma}(0) = z\} = \sum_{n=0}^{\infty} P_z\{T_n \leq t < T_{n+1}; \tau_1 > t; {}_0\tilde{\varsigma}(t) \leq x\}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} P\{z + S_1 \geq 0, z + S_2 \geq 0, \ldots, z + S_n \geq 0; z + S_n < x\} P\{T_n \leq t < T_{n+1}\}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x;z)\Delta\Phi_n(t) \tag{4.3}$$

yazılabilir, burada

$$a_n(x;z)=P\{z+S_1\geq 0, z+S_2\geq 0,\ldots,z+S_n\geq 0; z+S_n<x\}, n\geq 0$$

ve

$$P\{T_n\leq t<T_{n+1}\}=\Delta\Phi_n(t)=\Phi_n(t)-\Phi_{n+1}(t)\quad,$$

$$\Phi_n(t)=P\{T_n<t\}; n\geq 0,\ \Phi_0(t)=\varepsilon(t)$$

dır.

Şimdi (4.1) denklemindeki ikinci toplamı ele alalım. Bu takdirde

$$P_z\{\tau_1\leq t;_0\tilde{\varsigma}(t)\leq x\}=\sum_{k=1}^{\infty}P_z\{\tau_k\leq t<\tau_{k+1};_0\tilde{\varsigma}(t)\leq x\} \tag{4.4}$$

yazılabilir. Bu toplamdaki herbir terimi ayrı ayrı hesaplayalım:

$$P_z\{\tau_1\leq t<\tau_2;_0\tilde{\varsigma}(t)\leq x\}=\sum_{n=1}^{\infty}P_z\{T_n\leq t<T_{n+1};\tau_1\leq t<\tau_2;_0\tilde{\varsigma}(t)\leq x\}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}k\sum_{k=1}^{\infty}\int_{-\infty}^{0}P\{z+S_1\geq 0, z+S_2\geq 0,\ldots,z+S_{k-1}\geq 0; z+S_k<0; z+S_k\in dv\}.$$

$$P\{|v|+S_1\geq 0,|v|+S_2\geq 0,\ldots,|v|+S_{k-1}\geq 0;|v|+S_{n-k}\geq 0;|v|+S_{n-k}<x\}\Delta\Phi_n(t)$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\int_{-\infty}^{0}b_k(z,dv)a_{n-k}(|v|,x)\Delta\Phi_n(t)=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{-\infty}^{0}b_n(z,dv)*a_n(|v|,x)\Delta\Phi_n(t) \tag{4.5}$$

elde edilir. Şimdi ise $P_z\{\tau_2\leq t<\tau_3;_0\tilde{\varsigma}(t)\leq x\}$ olasılığını hesaplayalım. Bu durumda

$$P_z\{\tau_2\leq t<\tau_3;_0\tilde{\varsigma}(t)\leq x\}=\sum_{n=2}^{\infty}P_z\{T_n\leq t<T_{n+1};\tau_2\leq t<\tau_3;_0\tilde{\varsigma}(t)\leq x\}$$

$$=\sum_{n=2}^{\infty}\sum_{\substack{2\leq k_1+k_2\leq n\\ k_1\geq 1,k_2\geq 1}}\int_{-\infty}^{0}\int_{-\infty}^{0}P\{z+S_1\geq 0; z+S_2\geq 0;\ldots;z+S_{k_1-1}\geq 0; z+S_{k_1}<0; z+S_{k_1}\in dv_1\}$$

$$P\{|v_1|+S_1\geq 0;|v_1|+S_2\geq 0;\ldots|v_1|+S_{k_2-1}\geq 0;|v_1|+S_{k_2}<0;|v_1|+S_{k_2}\in dv_2\}$$

$$P\{|v_2|+S_1\geq 0;|v_2|+S_2\geq 0;\ldots;|v_2|+S_{n-k_1-k_2}\geq 0;|v_2|+S_{n-k_1-k_2}<x\}.P\{T_n\leq t<T_{n+1}\}$$

$$=\sum_{n=2}^{\infty}\sum_{\substack{2\le k_1+k_2\le n\\ k_1\ge 1,k_2\ge 1}}\int_{-\infty}^{0}\int_{-\infty}^{0} b_{k_1}(z;dv_1).b_{k_2}(|v_1|;dv_2)a_{n-k_1-k_2}(|v_2|;x)\Delta\Phi_n(t)$$

$$=\sum_{n=2}^{\infty}\int_{-\infty}^{0}\int_{-\infty}^{0} b_n(z;dv_1)*b_n(|v_1|;dv_2)*a_n(|v_2|;x)\Delta\Phi_n(t) \tag{4.6}$$

olduğu görülür. Benzer şekilde matematiksel çıkarsama metodunu kullanarak k=1,2,... için

$$P_z\{\tau_k \le t < \tau_{k+1};_0\tilde{\varsigma}(t)\le x\}=$$

$$=\sum_{n=k}^{\infty}\int_{-\infty}^{0}\overset{(k)}{\cdots}\int_{-\infty}^{0} b_n(z;dv_1)*b_n(|v_1|;dv_2)*...*b_n(|v_{k-1}|;dv_k)*a_n(|v_k|;x)\Delta\Phi_n(t)$$

$$=\sum_{n=k}^{\infty}\int_{-\infty}^{0}\overset{(k)}{\Lambda}\int_{-\infty}^{0}\prod_{i=1}^{k}{}_{*}b_n(|v_{i-1}|;dv_i)*a_n(|v_k|;x)\Delta\Phi_n(t) \tag{4.7}$$

olduğunu göstermek mümkündür, burada $|v_0| = z \ge 0$.

(4.3), (4.4), (4.5), (4.6) ve (4.7) ifadelerini (4.1) förmülünde yerine yazarak

$$Q(t,x,z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z,x)\Delta\Phi_n(t)+\sum_{n=1}^{\infty}\int_{-\infty}^{0} b_n(z,dv_1)*a_n(|v_1|,x)\Delta\Phi_n(t)+$$

$$+\sum_{k=2}^{\infty}\sum_{n=k}^{\infty}\int_{-\infty}^{0}\overset{(k)}{\Lambda}\int_{-\infty}^{0}\prod_{i=1}^{k}{}_{*}b_n(|v_{i-1}|;dv_i)*a_n(|v_k|;x)\Delta\Phi_n(t)$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z,x)\Delta\Phi_n(t)+\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=k}^{\infty}\int_{-\infty}^{0}\overset{(k)}{\Lambda}\int_{-\infty}^{0}\prod_{i=1}^{k}{}_{*}b_n(|v_{i-1}|;dv_i)*a_n(|v_k|;x)\Delta\Phi_n(t)$$

elde edilir ve böylece ispat tamamlanmış olur.

Şimdi sürecin dağılım fonksiyonunu bulmak için başka bir yöntem verelim. Toplam olasılık formülüne göre

$$P\{_0\tilde{\varsigma}(t)\le x/_0\tilde{\varsigma}(0)=z\}=P\{_0\tilde{\varsigma}(t)\le x;\xi_1>t/_0\tilde{\varsigma}(0)=z\}+P\{_0\tilde{\varsigma}(t)\le x;\xi_1\le t/_0\tilde{\varsigma}(0)=z\}$$

$$=P\{_0\tilde{\varsigma}(t)\le x;\xi_1>t/_0\tilde{\varsigma}(0)=z\}+$$

$$+\int_0^{\infty}\int_{s=0}^{t}P\{\xi_1\in ds;_0\tilde{\varsigma}(s)\in dy/_0\tilde{\varsigma}(0)=z\}P\{_0\tilde{\varsigma}(t-s)<x/_0\tilde{\varsigma}(0)=y\}$$

yazılabilir. Burada

$$R(t,x/z)=P\{_0\tilde{\varsigma}(t)\le x/_0\tilde{\varsigma}(0)=z\}$$

$$A(t,x/z)=P\{_0\tilde{\varsigma}(s)\le x;\xi_1>t/_0\tilde{\varsigma}(0)=z\}$$

$$B(ds,dy/z)=P\{\xi_1\in ds,{}_0\tilde{\varsigma}(s)\in dy/{}_0\tilde{\varsigma}(0)=z\}$$

$$R(t-s,x/y)=P\{{}_0\tilde{\varsigma}(t-s)\leq x/{}_0\tilde{\varsigma}(0)=y\}$$

notasyonları dikkate alınırsa

$$R(t,x/z)=A(t,x/z)+\int_0^{\infty}\int_0^{t}B(ds,dy/z)R(t-s,x/y)$$

yazılır. Bu eşitliğin her iki tarafına Laplace dönüşümünü uygulayarak

$$\int_0^{\infty}e^{-\alpha t}R(t,x/z)dt=\int_0^{\infty}e^{-\alpha t}A(t,x/z)dt+\int_0^{\infty}e^{-\alpha t}\left[\int_{y=0}^{\infty}\int_0^{\infty}B(ds,dy/z)R(t-s,x/y)\right]dt$$

$$\tilde{R}(\alpha,x/z)=\tilde{A}(\alpha,x/z)+\int_{y=0}^{\infty}\left[\int_0^{\infty}e^{-\alpha t}\int_0^{\infty}B(ds,dy/z)R(t-s,x/y)\right]dt$$

$$\tilde{R}(\alpha,x/z)=\tilde{A}(\alpha,x/z)+\int_{y=0}^{\infty}\left[\int_0^{\infty}e^{-\alpha t}B(ds,dy/z)dt\int_0^{\infty}e^{-\alpha t}R(t-s,x/y)dt\right]$$

$$\tilde{R}(\alpha,x/z)=\tilde{A}(\alpha,x/z)+\int_{y=0}^{\infty}\tilde{B}(\alpha,dy/z)\tilde{R}(\alpha,x/y) \tag{4.8}$$

elde edilir. Bu ise Fredholum'un 2. tür bir denklemidir. Bu denklemi ardıcıl yakınlaşma yöntemi ile çözebiliriz. Bunun için önce $\sup\limits_z\int_{y=0}^{\infty}\tilde{B}(\alpha,dy/z)<1$ olduğunu gösterelim.

$$\sup_z\int_{y=0}^{\infty}\tilde{B}(\alpha,dy/z)=\sup_z\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}e^{-\alpha t}B(dt,dy/z)$$

$$=\sup_z\int_{y=0}^{\infty}\int_{t=0}^{\infty}e^{-\alpha t}P\{\xi_1\in dt,{}_0\tilde{\varsigma}(s)\in dy/{}_0\tilde{\varsigma}(0)=z\}$$

$$=\sup_z\int_{t=0}^{\infty}e^{-\alpha t}\int_{y=0}^{\infty}P\{\xi_1\in dt,{}_0\tilde{\varsigma}(s)\in dy/{}_0\tilde{\varsigma}(0)=z\}$$

$$=\sup_z\int_{t=0}^{\infty}e^{-\alpha t}P\{\xi_1\in dt;{}_0\tilde{\varsigma}(s)<y/{}_0\tilde{\varsigma}(0)=z\}\Big|_0^{\infty}$$

$$=\sup_z\int_0^{\infty}e^{-\alpha t}\left[P\{\xi_1\in dt;{}_0\tilde{\varsigma}(s)<\infty/{}_0\tilde{\varsigma}(0)=z\}-P\{\xi_1\in dt;{}_0\tilde{\varsigma}(s)<0/{}_0\tilde{\varsigma}(0)=z\}\right]$$

$$=\sup_z\int_0^{\infty}e^{-\alpha t}\left[P\{\xi_1\in dt\cap\Omega/{}_0\tilde{\varsigma}(0)=z\}-P\{\xi_1\in dt\cap\varnothing/{}_0\tilde{\varsigma}(0)=z\}\right]$$

$$= \sup_z \int_0^\infty e^{-\alpha t}\left[P\{\xi_1 \in dt/_0\tilde{\varsigma}(0)=z\} - P\{\varnothing/_0\tilde{\varsigma}(0)=z\}\right]$$

$$= \int_0^\infty e^{-\alpha t}P\{\xi_1 \in dt\} = \int_0^\infty e^{-\alpha t}d_t F_{\xi_1}(t) <$$

$$< \int_0^\infty 1.P\{\xi_1 \in ds\} = \int_0^\infty d_t F_{\xi_1}(t) = F(\infty) - F(0)$$

$$= 1 - 0 = 1$$

elde edilir. Öte yandan

$$A(t,x/z) = P\{_0\tilde{\varsigma}(t) \le x;\xi_1 > t\} = P\{z < x;\xi_1 > t\} = P\{z < x\}P\{\xi_1 > t\}$$
$$= P\{0 < x - z\}[1 - \Phi(t)]$$
$$= \varepsilon(x - z)[1 - \Phi(t)]$$

dır. Böylece

$$A(t,x/z) = \varepsilon(x - z)[1 - \Phi(t)]$$

olduğu görülür.

$$B(ds,dy/z) = P\{\xi_1 \in ds,_0\tilde{\varsigma}(s) \in dy/_0\tilde{\varsigma}(0) = z\}$$
$$= P\{\xi_1 \in ds, |z+\eta_1| \in dy\} = P\{\xi_1 \in ds\}d_y P\{|z+\eta_1| < y\}$$
$$= d\Phi_{\xi_1}(s)d_y\left[P\{-y - z < \eta_1 < y - z\}\right]$$
$$= d\Phi_{\xi_1}(s)d_y\left[F_{\eta_1}(y - z) - F_{\eta_1}(-y - z)\right]$$

olduğundan

$$B(ds,dy/z) = P\{\xi_1 \in ds\}d_y[F(y - z) - F(-y - z)]$$

olarak yazılabilir.

$A(t,x/z)$ ve $B(ds,dy/z)$ fonksiyonlarının Laplace dönüşümleri alınırsa

$$\tilde{A}(\alpha,x/z) = \int_0^\infty e^{-\alpha t}A(t,x/z)dt = \int_0^\infty e^{-\alpha t}\varepsilon(x - z)[1 - \Phi(t)]dt$$

$$= \varepsilon(x - z)\int_0^\infty e^{-\alpha t}[1 - \Phi(t)]dt = \varepsilon(x - z)a(\alpha),\; a(\alpha) = \int_0^\infty e^{-\alpha t}[1 - \Phi(t)]dt$$

ve

$$\tilde{B}(\alpha,dy/z) = \int_0^\infty e^{-\alpha t}P\{\xi_1 \in dt\}\left[d_y F(y - z) + d_y F(-y - z)\right]$$

$$= d_y F(y-z) + d_y F(-y-z)\int_0^\infty e^{-\alpha t} P\{\xi_1 \in dt\}$$

$$= \left[d_y F(y-z) + d_y F(-y-z)\right]\tilde{\varphi}_{\xi_1}(\alpha)$$

elde edilir, burada

$$\tilde{\varphi}_{\xi_1}(\alpha) = \int_0^\infty e^{-\alpha t} P\{\xi_1 \in dt\}$$

dır. Böylece

$$\tilde{R}(\alpha, x/z) = a(\alpha)\varepsilon(x-z) + a(\alpha)\sum_{n=1}^{\infty}\left[\tilde{\Phi}(\alpha)\right]^n \int_0^\infty \overset{(n)}{\wedge} \int_0^\infty d_{y_1} P\{|z+\eta_1| < y_1\}.$$

$$d_{y_2} P\{|y_1+\eta_1| < y_2\} \ldots d_{y_{n-1}} P\{|y_{n-2}+\eta_1| < y_{n-1}\} d_{y_n} P\{|y_{n-1}+\eta_1| < y_n\}\varepsilon(x-y_n) \qquad (4.9)$$

elde etmiş oluruz. Bu formülden $\xi_k$ rastgele değişkenlerinin yenileme fonksiyonunun Laplace dönüşümünü bulalım. $U(t) = \sum_{k=1}^{\infty}\Phi^{*k}(t)$ olsun. (4.9) formulünde $x \to \infty$ için limite geçilirse

$$\frac{1}{\alpha} = a(\alpha) + a(\alpha)\tilde{U}(\alpha)$$

elde etmiş oluruz. Buradan

$$\tilde{U}(\alpha) = \frac{1-\alpha a(\alpha)}{\alpha a(\alpha)}$$

dır.

Bu elde ettiğimiz denklem sürecin dağılım fonksiyonunun Laplace dönüşümüdür. Dağılım fonksiyonunu (R(t,x/z)) elde etmek için her iki tarafın ters Laplace dönüşümünü alalım. Bunun için (4.9) ifadesinden $L^{-1}(a(\alpha))$ ve $L^{-1}(a(\alpha)\Phi_*^n(x))$'ı bulmalıyız.

$$L^{-1}(a(\alpha)) = [1-\Phi(t)]$$

$$\Phi_*^n(\alpha) = \int_0^\infty e^{-\alpha t} d\Phi^{*n}(t) = \int_0^\infty e^{-\alpha t}\left[\Phi^{*n}(t)\right]' dt$$

ve $\Phi_*^n(\alpha)$'nin ters Laplace dönüşümü

$$L^{-1}\left[\Phi_*^n(\alpha)\right] = \left[\Phi_*^n(\alpha)\right]'$$

dır. Böylece

$$L^{-1}\left[a(\alpha)\Phi_*^n(t)\right] = \int_0^t [1-\Phi(t-u)]\left[\Phi^{*n}(u)\right]' du$$

$$=\int_0^t [1-\Phi(t-u)]d\Phi^{*n}(u)$$

elde edilir. Bu takdirde

$$R(t,x/z)=[1-\Phi(t)]\varepsilon(x-z)+\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^t [1-\Phi(t-u)]d\Phi^{*n}(u)$$

$$\int_0^{\infty}\overset{(n)}{\wedge}\int_0^{\infty} P\{|z+\eta_1|<y_1\}P\{|\eta_1+y_1|<y_2\}...P\{|\eta_1+y_{n-2}|<y_{n-1}\}$$

$$P\{|\eta_1+y_{n-1}|<y_n\}\varepsilon(x-y_n)dy_1...dy_n \qquad (4.10)$$

bulunur.

(4.10)'de $x\to\infty$ için limite geçilirse

$$1=[1-\Phi(t)]+\int_0^t [1-\Phi(t-u)]dU(u)$$

$$U(t)=\Phi(t)+\int_0^t \Phi(t-u)dU(u)$$

elde edilir.

Bu şekilde elde edilen dağılım fonksiyonunu kullanarak ${}_0\tilde{\varsigma}(t)$ sürecinin beklenen değerini aşağıdaki gibi ifade edebiliriz.

$$E({}_0\tilde{\varsigma}(t))=\int_0^{\infty} xdP\{{}_0\tilde{\varsigma}(t)<x\}=\int_0^{\infty} xdR\{t,x/z\}$$

$$=\int_0^{\infty} xd_x[1-\Phi(t)]\varepsilon(x-z)+\int_0^{\infty} xd_x\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^t [1-\Phi(t-u)]d\Phi^{*n}(u)$$

$$\int_0^{\infty}\overset{(n)}{\wedge}\int_0^{\infty} P\{|z+\eta_1|<y_1\}P\{|\eta_1+y_1|<y_2\}...P\{|\eta_1+y_{n-2}|<y_{n-1}\}.$$

$$.P\{|\eta_1+y_{n-1}|<y_n\}\varepsilon(x-y_n)dy_1...dy_n$$

$$=[1-\Phi(t)]z+\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^t [1-\Phi(t-u)]d\Phi^{*n}(u)$$

$$\int_0^{\infty}\overset{(n-1)}{\wedge}\int_0^{\infty} dy_1P\{|z+\eta_1|<y_1\}dy_2P\{|\eta_1+y_1|<y_2\}...P\{|\eta_1+y_{n-2}|<y_{n-1}\}.$$

$$.\int_0^{\infty} y_n dy_n P\{|\eta_1+y_{n-1}|<y_n\}$$

elde edilir.

Şimdi de sürecin ilk kez sıfıra düşme anının dağılım fonksiyonunu bulalım.

$$P_z\{\gamma_1 < t\} = P_z\{\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_{\nu_1} < t\}$$

dır, burada $\nu_1$-sürecin ilk kez sıfır seviyesine ulaşana kadar geçen sıçrayışlarının (adımların) sayısıdır. Bu takdirde toplam olasılık formülüne göre

$$P_z\{\gamma_1 < t\} = \sum_{n=1}^{\infty} P\{\xi_1 + \ldots + \xi_n < t; \nu_1 = n\}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} P\{\xi_1 + \ldots + \xi_n < t; z + \eta_1 > 0, z + \eta_1 + \eta_2 > 0, \ldots, z + \eta_1 + \ldots + \eta_{n-1} > 0, z + \eta_1 + \ldots + \eta_n < 0\}$$

$$= P\{\xi_1 + \ldots + \xi_n < t\} P\{\nu_1 = n\}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_{\xi_1}^{*n}(t) P\{\nu_1 = n\}$$

elde edilir, burada

$$\Phi_{\xi_1}^{*n} = P\{\xi_1 + \ldots + \xi_n < t\}$$

dır. Şimdi $\gamma_1$ rastgele değişkeninin beklenen değerini bulalım.

$$E(\gamma_1) = E(\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_{\nu_1}) = \sum_{k=1}^{\infty} P(\nu_1 \geq k) E\xi_k$$

$$= P\{\nu_1 \geq 1\} E\xi_1 + P\{\nu_1 \geq 2\} E\xi_2 + \ldots$$

$$= E\xi_1 (\sum_{k=1}^{\infty} P\{\nu_1 \geq k\}) = E\xi_1 (P\{\nu_1 \geq 1\} + P\{\nu_1 \geq 2\} + \ldots)$$

$$= E\xi_1 (P\{\nu_1 = 1\} + P\{\nu_1 = 2\} + \ldots + P\{\nu_1 = k\} + \ldots P\{\nu_1 = 2\} + \ldots + P\{\nu_1 = k\} + \ldots)$$

$$= E\xi_1 \sum_{k=1}^{\infty} k P\{\nu_1 = k\} = E\xi_1 E\nu_1$$

dir. Şimdi $P\{\nu_1 = n\}, n \geq 1$, olasılıklarını hesaplayalım.

$$P\{\nu_1 = 1\} = P\{z + \eta_1 < 0\} = P\{\eta_1 < -z\} = F(-z),$$

$$P\{\nu_1 = 2\} = P\{z + \eta_1 > 0; z + \eta_1 + \eta_2 < 0\}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} P\{z + y_1 > 0; \eta_1 \in dy_1; z + y_1 + \eta_2 < 0\} = \int_{-z}^{\infty} F(-z - y_1) dF(y_1)$$

ve benzer yolla

$$P\{\nu_1 = n\} = P\{z + \eta_1 > 0; z + \eta_1 + \eta_2 > 0; z + \eta_1 + \ldots + \eta_{n-1} > 0; z + \eta_1 + \ldots + \eta_n < 0\}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \bigwedge^{n-1} \int_{-\infty}^{\infty} P\{z+y_1>0; z+y_1+y_2>0; z+y_1+\ldots+y_{n-1}>0; z+y_1+\ldots+y_{n-1}+\eta_n<0\}.$$

$$P\{\eta_1 \in dy_1; \eta_2 \in dy_2; \ldots; \eta_{n-1} \in dy_{n-1}\}$$

$$= \int_{-z}^{\infty} \int_{-z-y_1}^{\infty} \cdots \int_{-z-y_1-\ldots-y_{n-2}}^{\infty} P\{z+\eta_1+\eta_2+\ldots+\eta_{n-1}+\eta_n<0\} dF(y_1)dF(y_2)\ldots dF(y_{n-1})$$

$$= \int_{-z}^{\infty} \ldots \int_{-z-y_1-\ldots-y_{n-2}}^{\infty} F(-z-y_1-\ldots-y_{n-1}) dF(y_1)\ldots dF(y_{n-1})$$

olduğu görülür.

Şimdi $P\{\nu(t)=k\}$ olasılığını hesaplayalım.

$$P\{\nu(t)=k\} = P\{S_k \le t < S_{k+1}\} = P\{S_k \le t < S_k + \xi_{k+1}\}$$

$$= \int_{u=0}^{\infty} P\{u \le t < \xi_{k+1}; S_k \in du\} = \int_{u=0}^{t} P\{t-u \le \xi_{k+1}; S_k \in du\}$$

$$= \int_{u=0}^{t} P\{\xi_{k+1} > t-u\} P\{S_k \in du\} = \int_0^t P\{\xi_{k+1} > t-u\} dF^{*k}(u)$$

$$= \int_0^t [1-F(t-u)] dF^{*k}(u) = \int_0^t dF^{*k}(u) - \int_0^t F(t-u) dF^{*k}(u)$$

$$= [F^{*k}(t) - F^{*k}(0)] - \int_0^t F(t-u) dF^{*k}(u) = F^{*k}(t) - \int_0^t F(t-u) dF^{*k}(u)$$

elde edilir.

$$P\{S_{k+1} < t\} = P\{S_k + \xi_{k+1} < t\} = \int_0^t F^{*k}(t-u) dF(u) = F^{*k+1}(t)$$

olduğundan

$$P\{\nu(t)=k\} = F^{*k}(t) - F^{*k+1}(t)$$

yazılabilir.

**ÖRNEK:** z=1 ve $\eta_k = \begin{cases} -1, & q \\ +1, & p \end{cases}$ olsun. Bu takdirde $X(t)$ süreci 1,2,3,... değerlerini alacaktır ve dağılımı

$$R(t,x/1) = P\{X(t) \le x / X(0)=1\} = \varepsilon(x-1)[1-\Phi(t)] +$$
$$+\sum_{n=1}^{\infty}[\Phi^{*n}(t)-\Phi^{*n+1}(t)]\int_0^{\infty}(n)\int_0^{\infty} d_{y_1}P\{|1+\eta_1| \le y_1\}d_{y_2}P\{|y_1+\eta_1| \le y_2\}\ldots$$
$$\ldots d_{y_n}P\{|y_{n-1}+\eta_1| \le y_n\}\varepsilon(1-y_n)$$

olacaktır.

$$\alpha_n(t) = \Phi^{*n}(t) - \Phi^{*n+1}(t)$$

$$\beta_n = \int_0^{\infty}(n)\int_0^{\infty} d_{y_1}P\{|1+\eta_1| \le y_1\}d_{y_2}P\{|y_1+\eta_1| \le y_2\}\ldots$$
$$..d_{y_n}P\{|y_{n-1}+\eta_1| \le y_n\}\varepsilon(1-y_n) \tag{4.11}$$

olsun. Bu takdirde

$$R(t,x/1) = \varepsilon(x-1)[1-\phi(t)] + \sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n(t)\beta_n$$

elde edilir.

$$P_{\le m}(t) = R(t,m/1) = P\{X(t) \le m / X(0,w)=1\}; \qquad P_m(t) = P_{\le m+1}(t) - P_{\le m}(t)$$

olsun.

**TEOREM 4.2:** Eğer $\xi_k$ herhangi bir dağılıma sahipse ve $\eta_1 = \begin{cases} -1, q \\ +1, p \end{cases}$ ise

$$P_{\le m}(t) = \sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n(t)q^n \sum_{k=1}^{1+\left[\frac{n}{2}\right]} a^{(1)}_{n;k-m+1}\left(\frac{p}{q}\right)^{k-1} + \varepsilon(x-1)[1-\phi(t)]$$

ve

$$P_m(t) = \sum_{n=m-1}^{\infty}\alpha_n(t)q^n \sum_{k=m}^{m+\left\{\frac{n-(m-1)}{2}\right\}} a^{(1)}_{n;k-m+1}\left(\frac{p}{q}\right)^{k-1} + \varepsilon(x-1)[1-\phi(t)]$$

dır. Burada,

$$a^{(1)}_{n;k-m+1} = a^{(1)}_{n-1;k-m} + a^{(1)}_{n-1;k-m+1}; \; m = 1,2,\ldots, \; a^{(1)}_{n1} = 1$$

dır.

**İSPAT**: Önce $\beta_n$ leri hesaplamalıyız. (4.11)'den

$\beta_1 = q$

$\beta_2 = q^2 + qp$

$\beta_3 = q^3 + 2q^2p$

$\beta_4 = q^4 + 3q^3p + 2q^2p^2$

$\beta_5 = q^5 + 4q^4p + 5q^3p^2$

$\beta_6 = q^6 + 5^5p + 9q^4p^2 + 5q^3p^3$

$\beta_7 = q^7 + 6q^6p + 14q^5p^2 + 14q^4p^3$

$\beta_8 = q^8 + 7q^7p + 20q^6p^2 + 28q^5p^3 + 14q^4p^4$

..............

elde edilir.

n ve k'nın alabileceği değerlere göre $q^{n-k}p^k$ nin katsayıları için aşağıdaki tabloyu oluşturabiliriz.

**Tablo 1**

| n \ k | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | | | | | | | |
| 2 | 1 | 1 | | | | | | |
| 3 | 1 | 2 | | | | | | |
| 4 | 1 | 3 | 2 | | | | | |
| 5 | 1 | 4 | 5 | | | | | |
| 6 | 1 | 5 | 9 | 5 | | | | |
| 7 | 1 | 6 | 14 | 14 | | | | |
| 8 | 1 | 7 | 20 | 28 | 14 | | | |
| 9 | 1 | 8 | 27 | 48 | 42 | | | |
| 10 | 1 | 9 | 35 | 75 | 90 | 42 | | |
| 11 | 1 | 10 | 44 | 110 | 165 | 132 | | |
| 12 | 1 | 11 | 54 | 154 | 275 | 297 | 132 | |
| 13 | 1 | 12 | 65 | 208 | 429 | 572 | 429 | |
| 14 | 1 | 13 | 77 | 273 | 637 | 1001 | 1001 | 429 |
| 15 | 1 | 14 | 90 | 350 | 910 | 1638 | 2002 | 1430 |
| ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... |

Şimdi $P\{X(t) \leq 1 / X(0) = 1\}$ olasılığını hesaplamak için Tablo 1'ı kullanalım

**Tablo 2**

| | | $q^n$ | $q^{n-1}p$ | $q^{n-2}p^2$ | $q^{n-3}p^3$ | $q^{n-4}p^4$ | $q^{n-5}p^5$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $\alpha_1(t)$ | 1 | | | | | |
| 2 | $\alpha_2(t)$ | 1 | 1 | | | | |
| 3 | $\alpha_3(t)$ | 1 | 2 | | | | |
| 4 | $\alpha_4(t)$ | 1 | 3 | 2 | | | |
| 5 | $\alpha_5(t)$ | 1 | 4 | 5 | | | |
| 6 | $\alpha_6(t)$ | 1 | 5 | 9 | 5 | | |
| 7 | $\alpha_7(t)$ | 1 | 6 | 14 | 14 | | |
| 8 | $\alpha_8(t)$ | 1 | 7 | 20 | 28 | 14 | |
| 9 | $\alpha_9(t)$ | 1 | 8 | 27 | 48 | 42 | |
| 10 | $\alpha_{10}(t)$ | 1 | 9 | 35 | 75 | 90 | 42 |
| 11 | $\alpha_{11}(t)$ | 1 | 10 | 44 | 110 | 165 | 132 |
| 12 | $\alpha_{12}(t)$ | 1 | 11 | 54 | 154 | 275 | 297 |
| 13 | $\alpha_{13}(t)$ | 1 | 12 | 65 | 208 | 429 | 572 |
| 14 | $\alpha_{14}(t)$ | 1 | 13 | 77 | 273 | 637 | 1001 |
| 15 | $\alpha_{15}(t)$ | 1 | 14 | 90 | 350 | 910 | 1638 |
| ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... |

Analitik olarak

$$P_{\le 1}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n(t) \sum_{k=1}^{1+\left[\frac{n}{2}\right]} a_{nk}^{(1)} q^{n-k+1} p^{k-1} + \varepsilon(x-1)\left[1-\phi(t)\right]$$

yazabiliriz. Burada; $a_{nk}^{(1)} = a_{n-1;k-1}^{(1)} + a_{n-1;k}^{(1)}$, $a_{n1}^{(1)} = 1$ dır. Benzer şekilde $P_{\le 2}(t), P_{\le 3}(t), P_{\le 4}(t)$ olasılıkları için de tablo 3, 4, 5 kullanılır.

**Tablo 3**

| | | $q^n$ | $q^{n-1}p$ | $q^{n-2}p^2$ | $q^{n-3}p^3$ | $q^{n-4}p^4$ | $q^{n-5}p^5$ | $q^{n-6}p^6$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $\alpha_1(t)$ | 1 | | | | | | |
| 2 | $\alpha_2(t)$ | 1 | 1 | | | | | |
| 3 | $\alpha_3(t)$ | 1 | 2 | | | | | |
| 4 | $\alpha_4(t)$ | 1 | 3 | 2 | | | | |
| 5 | $\alpha_5(t)$ | 1 | 4 | 5 | | | | |
| 6 | $\alpha_6(t)$ | 1 | 5 | 9 | 5 | | | |
| 7 | $\alpha_7(t)$ | 1 | 6 | 14 | 14 | | | |
| 8 | $\alpha_8(t)$ | 1 | 7 | 20 | 28 | 14 | | |
| 9 | $\alpha_9(t)$ | 1 | 8 | 27 | 48 | 42 | | |
| 10 | $\alpha_{10}(t)$ | 1 | 9 | 35 | 75 | 90 | 42 | |
| 11 | $\alpha_{11}(t)$ | 1 | 10 | 44 | 110 | 165 | 132 | |
| 12 | $\alpha_{12}(t)$ | 1 | 11 | 54 | 154 | 275 | 297 | 132 |
| 13 | $\alpha_{13}(t)$ | 1 | 12 | 65 | 208 | 429 | 572 | 429 |
| 14 | $\alpha_{14}(t)$ | 1 | 13 | 77 | 273 | 637 | 1001 | 1001 |
| 15 | $\alpha_{15}(t)$ | 1 | 14 | 90 | 350 | 910 | 1638 | 2002 |
| ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... |

$a_{nk}^{(2)} = a_{n-1;k-1}^{(2)} + a_{n-1;k}^{(2)}$, $a_{n1}^{(2)} = 1$ olmak üzere

$$P_{\leq 2}(t)=\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n(t)\sum_{k=1}^{1+\left[\frac{n+1}{2}\right]}a_{nk}^{(2)}q^{n-k+1}p^{k-1}+\varepsilon(x-1)\left[1-\phi(t)\right]$$

dır.

**Tablo 4**

| n \ k | | $q^n$ | $q^{n-1}p$ | $q^{n-2}p^2$ | $q^{n-3}p^3$ | $q^{n-4}p^4$ | $q^{n-5}p^5$ | $q^{n-6}p^6$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $\alpha_1(t)$ | 1 | 1 | | | | | |
| 2 | $\alpha_2(t)$ | 1 | 2 | 1 | | | | |
| 3 | $\alpha_3(t)$ | 1 | 3 | 3 | | | | |
| 4 | $\alpha_4(t)$ | 1 | 4 | 6 | 3 | | | |
| 5 | $\alpha_5(t)$ | 1 | 5 | 10 | 9 | | | |
| 6 | $\alpha_6(t)$ | 1 | 6 | 15 | 19 | 9 | | |
| 7 | $\alpha_7(t)$ | 1 | 7 | 21 | 34 | 28 | | |
| 8 | $\alpha_8(t)$ | 1 | 8 | 28 | 55 | 62 | 28 | |
| 9 | $\alpha_9(t)$ | 1 | 9 | 36 | 83 | 117 | 90 | |
| 10 | $\alpha_{10}(t)$ | 1 | 10 | 45 | 119 | 200 | 207 | 90 |
| 11 | $\alpha_{11}(t)$ | 1 | 11 | 55 | 164 | 319 | 407 | 297 |
| 12 | $\alpha_{12}(t)$ | 1 | 12 | 66 | 219 | 483 | 726 | 704 |
| 13 | $\alpha_{13}(t)$ | 1 | 13 | 78 | 285 | 702 | 1209 | 1430 |
| 14 | $\alpha_{14}(t)$ | 1 | 14 | 91 | 363 | 989 | 1911 | 2639 |
| 15 | $\alpha_{15}(t)$ | 1 | 15 | 105 | 454 | 1350 | 1900 | 4550 |
| ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... |

Benzer şekilde

$$a_{nk}^{(3)}=a_{n-1;k-1}^{(3)}+a_{n-1;k}^{(3)},a_{n1}^{(3)}=1$$

olmak üzere

$$P_{\leq 3}(t)=\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n(t)\sum_{k=1}^{1+\left[\frac{n+1}{2}\right]}a_{nk}^{(3)}q^{n-k+1}p^{k-1}+\varepsilon(x-1)\left[1-\phi(t)\right]$$

elde edilir.

**Tablo 5**

| $n \backslash k$ | | $q^n$ | $q^{n-1}p$ | $q^{n-2}p^2$ | $q^{n-3}p^3$ | $q^{n-4}p^4$ | $q^{n-5}p^5$ | $q^{n-6}p^6$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $\alpha_1(t)$ | 1 | 1 | | | | | |
| 2 | $\alpha_2(t)$ | 1 | 2 | 1 | | | | |
| 3 | $\alpha_3(t)$ | 1 | 3 | 3 | 1 | | | |
| 4 | $\alpha_4(t)$ | 1 | 4 | 6 | 4 | | | |
| 5 | $\alpha_5(t)$ | 1 | 5 | 10 | 10 | 4 | | |
| 6 | $\alpha_6(t)$ | 1 | 6 | 15 | 20 | 14 | | |
| 7 | $\alpha_7(t)$ | 1 | 7 | 21 | 35 | 34 | 14 | |
| 8 | $\alpha_8(t)$ | 1 | 8 | 28 | 56 | 69 | 48 | |
| 9 | $\alpha_9(t)$ | 1 | 9 | 36 | 84 | 125 | 117 | 48 |
| 10 | $\alpha_{10}(t)$ | 1 | 10 | 45 | 120 | 209 | 242 | 265 |
| 11 | $\alpha_{11}(t)$ | 1 | 11 | 55 | 165 | 329 | 451 | 507 |
| 12 | $\alpha_{12}(t)$ | 1 | 12 | 66 | 220 | 494 | 780 | 958 |
| 13 | $\alpha_{13}(t)$ | 1 | 13 | 78 | 286 | 714 | 1274 | 1738 |
| 14 | $\alpha_{14}(t)$ | 1 | 14 | 91 | 364 | 1000 | 1988 | 3012 |
| 15 | $\alpha_{15}(t)$ | 1 | 15 | 105 | 455 | 1364 | 2988 | 5000 |
| ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... |

Benzer şekilde

$$a_{nk}^{(4)} = a_{n-1;k-1}^{(4)} + a_{n-1;k}^{(4)} ; a_{n1}^{(4)} = 1$$

olmak üzere

$$P_{\leq 4}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n(t) \sum_{k=1}^{1+\left[\frac{n+1}{2}\right]} a_{nk}^{(4)} q^{n-k+1} p^{k-1} + \varepsilon(x-1)\left[1-\phi(t)\right]$$

yazılır.Sonuç olarak

$$a_{nk}^{(m)} = a_{n-1;k-1}^{(m)} + a_{n-1;k}^{(m)} ; \; a_{nm}^{(m)} = 1$$

olmak üzere

$$P_{\leq m}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n(t) \sum_{k=1}^{1+\left[\frac{n}{2}\right]} a_{nk}^{(m)} q^{n-k+1} p^{k-1} + \varepsilon(x-1)\left[1-\phi(t)\right]$$

yazabiliriz. Dolayısıyla aşağıdaki eşitliği kolaylıkla görebiliriz.

$$P_1(t) = P_{\leq 1}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n(t) q^n \sum_{k=1}^{1+\left[\frac{n}{2}\right]} a_{nk}^{(1)} \left(\frac{p}{q}\right)^{k-1} + \varepsilon(x-1)\left[1-\phi(t)\right]$$

**Tablo 6**

| $n \backslash k$ | | $q^n$ | $q^{n-1}p$ | $q^{n-2}p^2$ | $q^{n-3}p^3$ | $q^{n-4}p^4$ | $q^{n-5}p^5$ | $q^{n-6}p^6$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $\alpha_1(t)$ | 1 | | | | | | |
| 2 | $\alpha_2(t)$ | 1 | 1 | | | | | |
| 3 | $\alpha_3(t)$ | 1 | 2 | | | | | |
| 4 | $\alpha_4(t)$ | 1 | 3 | 2 | | | | |
| 5 | $\alpha_5(t)$ | 1 | 4 | 5 | | | | |
| 6 | $\alpha_6(t)$ | 1 | 5 | 9 | 5 | | | |
| 7 | $\alpha_7(t)$ | 1 | 6 | 14 | 14 | | | |
| 8 | $\alpha_8(t)$ | 1 | 7 | 20 | 28 | 14 | | |
| 9 | $\alpha_9(t)$ | 1 | 8 | 27 | 48 | 42 | | |
| 10 | $\alpha_{10}(t)$ | 1 | 9 | 35 | 75 | 90 | 42 | |
| 11 | $\alpha_{11}(t)$ | 1 | 10 | 44 | 110 | 165 | 132 | |
| 12 | $\alpha_{12}(t)$ | 1 | 11 | 54 | 154 | 275 | 297 | 132 |
| 13 | $\alpha_{13}(t)$ | 1 | 12 | 65 | 208 | 429 | 572 | 429 |
| 14 | $\alpha_{14}(t)$ | 1 | 13 | 77 | 273 | 637 | 1001 | 1001 |
| 15 | $\alpha_{15}(t)$ | 1 | 14 | 90 | 350 | 910 | 1638 | 2002 |
| ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... |

Ayrıca

$$P_2(t)=\sum_{n=2}^{\infty}\alpha_n(t)\sum_{k=2}^{2+\left[\frac{n-1}{2}\right]}a_{nk}^{(2)}\left(\frac{p}{q}\right)^{k-1}+\varepsilon(x-1)\left[1-\phi(t)\right]$$

**Tablo 7**

| $n \backslash k$ | | $q^n$ | $q^{n-1}p$ | $q^{n-2}p^2$ | $q^{n-3}p^3$ | $q^{n-4}p^4$ | $q^{n-5}p^5$ | $q^{n-6}p^6$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $\alpha_1(t)$ | 0 | 1 | | | | | |
| 2 | $\alpha_2(t)$ | 0 | 1 | | | | | |
| 3 | $\alpha_3(t)$ | 0 | 1 | 2 | | | | |
| 4 | $\alpha_4(t)$ | 0 | 1 | 3 | | | | |
| 5 | $\alpha_5(t)$ | 0 | 1 | 4 | 5 | | | |
| 6 | $\alpha_6(t)$ | 0 | 1 | 5 | 9 | | | |
| 7 | $\alpha_7(t)$ | 0 | 1 | 6 | 14 | 14 | | |
| 8 | $\alpha_8(t)$ | 0 | 1 | 7 | 20 | 28 | | |
| 9 | $\alpha_9(t)$ | 0 | 1 | 8 | 27 | 48 | 42 | |
| 10 | $\alpha_{10}(t)$ | 0 | 1 | 9 | 35 | 75 | 90 | |
| 11 | $\alpha_{11}(t)$ | 0 | 1 | 10 | 44 | 110 | 165 | 132 |
| 12 | $\alpha_{12}(t)$ | 0 | 1 | 11 | 54 | 154 | 275 | 297 |
| 13 | $\alpha_{13}(t)$ | 0 | 1 | 12 | 65 | 208 | 429 | 572 |
| 14 | $\alpha_{14}(t)$ | 0 | 1 | 13 | 77 | 273 | 637 | 1001 |
| 15 | $\alpha_{15}(t)$ | 0 | 1 | 14 | 90 | 350 | 910 | 1638 |

ve

$$P_3(t)=\sum_{n=2}^{\infty}\alpha_n(t)q^n\sum_{k=3}^{3+\left[\frac{n-2}{2}\right]}a^{(3)}_{n;k-2}(\frac{p}{q})^{k-1}+\varepsilon(x-1)[1-\phi(t)]$$

**Tablo 8**

| N \ K | | $q^n$ | $q^{n-1}p$ | $q^{n-2}p^2$ | $q^{n-3}p^3$ | $q^{n-4}p^4$ | $q^{n-5}p^5$ | $q^{n-6}p^6$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $\alpha_1(t)$ | 0 | 0 | | | | | |
| 2 | $\alpha_2(t)$ | 0 | 0 | 1 | | | | |
| 3 | $\alpha_3(t)$ | 0 | 0 | 1 | | | | |
| 4 | $\alpha_4(t)$ | 0 | 0 | 1 | 3 | | | |
| 5 | $\alpha_5(t)$ | 0 | 0 | 1 | 4 | 0 | | |
| 6 | $\alpha_6(t)$ | 0 | 0 | 1 | 5 | 9 | | |
| 7 | $\alpha_7(t)$ | 0 | 0 | 1 | 6 | 14 | | |
| 8 | $\alpha_8(t)$ | 0 | 0 | 1 | 7 | 20 | 28 | |
| 9 | $\alpha_9(t)$ | 0 | 0 | 1 | 8 | 27 | 48 | |
| 10 | $\alpha_{10}(t)$ | 0 | 0 | 1 | 9 | 35 | 75 | 90 |
| 11 | $\alpha_{11}(t)$ | 0 | 0 | 1 | 10 | 44 | 110 | 165 |
| 12 | $\alpha_{12}(t)$ | 0 | 0 | 1 | 11 | 54 | 154 | 275 |
| 13 | $\alpha_{13}(t)$ | 0 | 0 | 1 | 12 | 65 | 208 | 429 |
| 14 | $\alpha_{14}(t)$ | 0 | 0 | 1 | 13 | 77 | 273 | 637 |
| 15 | $\alpha_{15}(t)$ | 0 | 0 | 1 | 14 | 90 | 350 | 910 |

benzer düşünceyle

$$P_4(t)=\sum_{n=3}^{\infty}\alpha_n(t)q^n\sum_{k=4}^{4+\left[\frac{n-3}{2}\right]}a^{(4)}_{n;k}(\frac{p}{q})^{k-1}+\varepsilon(x-1)[1-\phi(t)]$$

elde edilir. Sonuç olarak

$$P_m(t)=\sum_{n=m-1}^{\infty}\alpha_n(t)q^n\sum_{k=m}^{m+\left[\frac{n-(m-1)}{2}\right]}a^{(m)}_{nk}(\frac{p}{q})^{n-k-1}+\varepsilon(x-1)[1-\phi(t)],\quad m=1,2,\ldots$$

yazabiliriz.

Yukarıdaki tablo ve matematiksel çıkarsama yöntemi kullanılarak $a^{(m)}_{nk}$ katsayıları $a^{(1)}_{nk}$ yardımıyla aşağıdaki şekilde yazılabilir.

$$a^{(m)}_{nk}=a^{(1)}_{n;k-m+1}$$

Son olarak

$$p_{\le m}(t)=\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n(t)q^n\sum_{k=1}^{m+\left[\frac{n}{2}\right]}a^{(1)}_{n;k-m+1}(\frac{q}{p})^{k-1}+\varepsilon(x-1)[1-\phi(t)]$$

ve

$$P_m(t)=\sum_{n=m-1}^{\infty}\left[\Phi^{*n}(t)-\Phi^{*n+1}(t)\right]\sum_{k=m}^{m+\left[\frac{n-(m-1)}{2}\right]}a^{(1)}_{n;k-m+1}q^{n-k+1}p^{k-1}+\varepsilon(x-1)\left[1-\phi(t)\right] \qquad (4.12)$$

olduğu görülür, burada

$$a^{(1)}_{n;k-m+1}=a^{(1)}_{n-1;k-m}+a^{(1)}_{n-1;k-m+1},\quad k=m,\dots,m+\left[\frac{n-(m-1)}{2}\right]$$

$$n=m-1,\dots;m=1,2,\dots;a^{(1)}_{n0}=0,a^{(1)}_{n1}=1$$

dır. Bu ise teoremin ispatını tamamlar.

**TEOREM 4.3:** Eğer $\xi_k$ istenilen dağılıma sahip, $E\xi_k<+\infty$ ve $p<q$ ise, bu takdirde $X(t,1)$ süreci ergodiktir ve

$$P_m=(\frac{p}{q})^{m-1}P_1;\quad P_1=1-\frac{p}{q},m=1,2,3,\dots$$

dır.

**İSPAT:** Khaniev (1986) ispatlamıştır ki $X(t,w)$ bir yarı-Markov süreç olduğunda, eğer $\xi_k$ ve $\eta_k$ bağımsız, $E\xi_1<\infty,E\eta_1<0$ ise bu takdirde $X(t,w)$ süreci ergodiktir ve onun ergodik dağılımı $\xi_1$'in dağılımından bağımsızdır. Bu nedenle $X(t,w)$ sürecinin dağılımının aşikar şeklini $\xi_k$, $\lambda$ parametreli üstel dağılıma sahip olduğu hal için çıkaracağız.

$\xi_k$, $\lambda$ parametreli üstel dağılıma sahip olduğunda $X(t,1)$ süreci homogen Markov süreci olacaktır. Bu nedenle $P_m(t),m=1,2,\dots,$ için aşağıdaki Chapmen- Kolmogorov denklemlerini yazabiliriz.

$$P_1(t+h)=P_1(t)(1-\lambda h+q\lambda h)+P_2(t)q\lambda h+o(h)$$
$$P_2(t+h)=P_2(t)(1-\lambda h)+P_1(t)p\lambda h+P_3(t)q\lambda h+o(h)$$
$$\dots$$
$$P_m(t+h)=P_m(t)(1-\lambda h)+P_{m-1}(t)p\lambda h+P_{m+1}(t)q\lambda h+o(h)$$
$$\dots$$

Kolayca gösterilebilir ki

$$P_1'(t)=P_1(t)+q\lambda P_2(t)$$
$$P_2'(t)=\lambda qP_2(t)+p\lambda P_1(t)+q\lambda P_3(t) \qquad (4.13)$$
$$\dots$$
$$P_m'(t)=\lambda qP_m(t)+p\lambda P_{m-1}(t)+q\lambda P_{m+1}(t)$$

dır.

$$\eta_1 = \begin{cases} -1, q \\ +1, p \end{cases}$$

dır. Buradan $E\eta_1 = -q + p$ alınır. $E\eta_1 < 0$ olması için, $p < q$ olmalıdır. Dolayısıyla $X(t,1)$ süreci ergodiktir. Bu nedenle (4.13)'den

$$P_1 = qP_1 + qP_2$$

$$P_2 = qP_3 + pP_1$$

$$P_3 = qP_4 + pP_2$$

$$\dots$$

$$P_m = qP_{m+1} + pP_{m-1}$$

$$\dots$$

elde edilir. Bu sistemden

$$P_m = \left(\frac{p}{q}\right)^{m-1} P_1, m = 1,2,\dots$$

bulunur.

$\sum_{m=1}^{\infty} P_m = 1$ şartı gözönüne alınırsa,

$$P_1 = \frac{q-p}{q} = 1 - \frac{p}{q}$$

olduğu görülür. Dolayısıyla

$$P_m = \left(\frac{p}{q}\right)^{m-1}\left(1 - \frac{p}{q}\right), m = 1,2,\dots \tag{4.14}$$

dır. $X(t)$ sürecinin ergodik dağılımının bir geometrik dağılıma sahip olduğunu söyleyebiliriz. Böylece teorem ispatlanmış olur.

## 5. SONUÇ ve ÖNERİLER

Bu çalışmada öncelikle yarı-Markov süreçlerinin tanımları verilerek literatürde yapılan çalışmalara değinilmiştir. Daha sonra stok kontrol, kuyruk ve güvenilirlik teorilerindeki bir çok problemin çözümlenmesinde kullanılan sıfır seviyesinde yansıtan ekranlı yarı-Markov rastgele yürüyüş süreci $X(t)$ ele alınmıştır. Bu sürecin matematiksel kuruluşu çıkartılmış ve aşağıdaki sonuçlar elde edilmiştir.

$X(t)$ sürecinin sonlu boyutlu dağılım fonksiyonu ve sürecin önemli bir sınır fonksiyonali olan , yansıtan bariyerden ilk kez yansıma anı $\gamma_1$'in dağılım fonksiyonu bulunarak beklenen değerleri elde edilmiştir.

Son olarak özel bir duruma bakılmış, ele alınan sürecin dağılım fonksiyonu bulunmuştur. Bu özel durum için sürecin ergodik dağılımı bulunmuştur.

Bu çalışmanın aşağıdaki yönlerinin geliştirilmesi mümkündür.

1- Ekranların her ikiside aynı veya farklı özelliklere sahip yarı-Markov süreçleri içinde benzer çalışmalar yapılabilir.

2- Ele alınan süreç için $\xi_i$ ve $\eta_i$ rastgele değişkenlerinin bağımsızlık şartı kaldırılarak süreç yeniden ele alınabilir.

3- Bu çalışmada elde edilen sonuçların ortaya konulması ve uygulama alanlarına aktarılması sağlanabilir.

4- Çalışmada sözü edilen rastgele değişkenler için bilinen dağılımlar kullanılabilir.

## KAYNAKLAR


**AHMETOVA, H. M. 1979,** Pozitif akımlı negatif sıçramalı yarı-Markov süreçleri hakkında, Doktora Tezi, Bakü.

**ANİSİMOV, V. V. 1973,** The limiting Behaviour of a semi-Markov process with a decomposable state space, Soviet Math., 13, 1276-1279.

**BOROVKOV, A. A. 1976,** Stochastic Processes in Queueing Theory. Springer-Verlag, X1, New York.

**CAFEROV, K. M. 1978,** Negatif akımlı pozitif sıçramalı yarı-Markov süreçleri hakkında, Doktora Tezi, Bakü.

**ÇINLAR, E. 1968,** Some joint distributions for Markov renewal processes, Austral. J. Stat., 10.

**ÇINLAR, E. 1975,** Introduction to stochastic processes . Englewood Cliffs, New Jersey.

**DOOB, J. L. 1953,** Stochastic Processes, Wiley, New York.

**EZHOV, I. I. VE KOROLYUK, V.S. 1967,** Semi-Markovian processes and their applications, Cybernetica, 5, Kiev, 58-65.

**FELLER, W. 1971,** An Introduction to Probability Theory and Its Applications II., 2nd Ed., Wiley, New York.

**FELLER, W. 1964,** On semi-Markov processes, Proc. Nat. Acad. Sci. USA , 51, 4.

**GİHMAN, I. I. ve SKOROHOD, A. V. 1975,** Theory of Stochastic Processes 2, Springer- Verlag,New York.

**GNEDENKO, I. I. ve KOVALENKO, I. N. 1968,** Introduction to queing theory, !X, Translation edited by D. Louvish, Jerussalem : Israel Program for Scientific Translation.

**HARLAMOV, B. P. 1975,** Random time subsitution and continuous semi-Markov processes, J. Soviet Math., 3, 736-742.

**KARLİN, S. ve TAYLOR, H. M. 1975,** A first course in stochastic processes, Academic Press, New York.

**KHANİEV, T. A. 1984,** Distribution of a semi-Markov walk with two delay screens (Russian), Some questions of the theory of stochastic processes, Kiev, Collect sci. Works, 106-113.

**KOROLYUK, V. S. ve TURBİN, A. F. 1976,** Semi-Markov processes and their applications, Kiev

**NASIROVA, T. H. ve SKOROHOD, A. V. 1978,** On a class of jump processes with delaying barrier, Theor. Probab. Math. Statist., 16, 81-94.

**NASIROVA, T. H. 1979,** Distribution of a semi-Markov walk process with delaying barrier,Theor. Probab. Math. Statist., 20, 90-97.

**NASIROVA, T. H., YAPAR, C. ve KHANİEV. 1996,** T. A., On some probability characteristics of the complex semi-Markovian random walk with reflecting and delaying screens, Cybernetica and System Analysis,

**NASIROVA, T. H.1984,** Processes of semi-Markov Walk (Russian), Baku : EHLM.

**PRABHU, N. U. 1978,** Stochastic storage processes , New York, Berlin, Heidelberg : Springer-Verlag, 140 shf.

**SİLVESTROV, D. S. 1975,** Limits theorems for semi-Markov processes and their applications II., Theor. Pro. Math. Stat. 3, 177-198.

**SKOROHOD, A. V. 1967,** Random processes with independent increments, Moscow : Nauka.

**SMİTH, W. L. 1958,** Renewal theory and its ramifications, Journ. Roy. Statist. Soc., 20, 243-302.

**SMİTH, W. L. 1965-1966,** Some peculier semi-Markov processes, Proc. 5-Th Berkelly Symp. Math. Statist. And Probab., 2, 2, 255-263.

**SPİTZER, F. 1964,** Principles of random walk, Princeton, N. J. : D. Van Nostrand.

**TAKACS, L. 1977,** Combinatorial methods in the theory of stochastic processes, 2nd ed, Huntington, New York : Robert E. Krieger Publishing Co. X1.

# ÖZGEÇMİŞ

Zafer Küçük, 23.07.1971 tarihinde Trabzon ilinin Sürmene ilçesinde doğdu. İlk ve orta öğretimini Sürmene'de yaptı. 1990 yılında Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi İstatistik Bölümü'ne girip 1994 yılında mezun oldu. Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Entitüsü İstatistik Anabilim Dalı'nda Yüksek Lisans'a başladı. 1996 yılında Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi İstatistik ve Bilgisayar Bilimleri Bölümü'ne araştırma görevlisi olarak girdi. Halen bu görevine devam etmektedir.