

**ANKARA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

**POTANSİYELİ BİR POLİNOM OLAN SCHRÖDINGER DENKLEMLERİNİN
JOST ÇÖZÜMLERİ**

Fahriye Zehra BABACAN

MATEMATİK ANABİLİM DALI

**ANKARA
2010**

Her Hakkı Saklıdır

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

POTANSİYELİ BİR POLİNOM OLAN SCHRÖDINGER DENKLEMLERİNİN JOST ÇÖZÜMLERİ

Fahriye Zehra BABACAN

Ankara Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Yrd. Doç. Dr. Cafer COŞKUN

Bu tez dört bölümden oluşmaktadır.

İlk bölüm giriş kısmına ayrılmıştır.

İkinci bölümde, spektral analizin bazı temel tanım ve teoremleri verilmiştir.

Üçüncü bölümde, ele alınan Schrödinger tipi denklemin Jost çözümü elde edilmiştir.

Daha sonra elde edilen bu çözüm incelenmiştir.

Dördüncü bölümde, Jost çözümünün integral gösterimi elde edilmiştir. Ayrıca elde edilen bu gösterimin bazı özellikleri incelenmiştir.

Ağustos 2010, 56 sayfa

Anahtar Kelimeler: Schrödinger denklemi, Jost çözümü, integral gösterimi.

ABSTRACT

Master Thesis

JOST SOLUTIONS OF SCHRÖDINGER EQUATIONS WITH A POLYNOMIAL DEPENDENT POTENTIAL

Fahriye Zehra BABACAN

Ankara University

Graduate School of Natural And Applied Sciences

Department of Mathematics

Supervisor: Yrd. Doç. Dr. Cafer COŞKUN

This thesis consists of four chapters.

The first chapter is devoted to the introduction.

The second chapter, some main definitions and theorems of spectral analysis are given.

In the third chapter, the solution of Schrödinger equation is obtained. And than this solution is investigated.

In the fourth chapter, integral representation of Jost solution is determined. Also this representation is investigated.

August 2010, 56 pages

Key Words : Schrödinger equation, Jost solution, integral representation.

TEŞEKKÜR

Bu çalışma konusunu bana veren ve araştırmalarımın her aşamasında en yakın ilgi ve önerileriyle beni yönlendiren danışman hocam, Sayın Yrd. Doç Dr. Cafer COŞKUN (Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi)'a, çalışmalarım esnasında yardımcılarını gördüğüm Sayın Prof. Dr. Elgiz BAYRAM (Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi)'a, yüksek lisans yaptığım süre boyunca verdiği burs ile beni destekleyen TÜBİTAK'a ve çalışmalarım sırasında destek ve anlayışını esirgemeyen sevgili aileme en içten saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

Fahriye Zehra BABACAN

Ankara, Ağustos 2010

İÇİNDEKİLER

ÖZET	i
ABSTRACT	ii
TEŞEKKÜR	iii
SİMGELER DİZİNİ	v
1. GİRİŞ	1
2. TEMEL TANIM VE TEOREMLER	2
3. JOST ÇÖZÜMÜNÜN VARLIĞI	3
3.1 Jost Çözümünün Varlığı	3
3.2 Jost Çözümünün Özellikleri	18
4. JOST ÇÖZÜMÜNÜN İNTEGRAL GÖSTERİMİ	25
KAYNAKLAR	55
ÖZGEÇMİŞ	56

SİMGELER DİZİNİ

\mathbb{R}	Reel sayılar kümesi
\mathbb{N}	Doğal sayılar kümesi
\mathbb{N}_2	$\{n : n \in \mathbb{N}, n \geq 2\}$
$L_1(0, \infty)$	$\left\{ f : \int_0^{\infty} f(x) dx < \infty \right\}$
$\ f\ $	f fonksiyonun L_1 uzayındaki normu
D_x	$\frac{d}{dx}$
Γ	Gama fonksiyonu

1. GİRİŞ

Matematik ve Fizik alanında pek çok uygulamaya sahip olan spektral teori; fonksiyonel analizin ana dallarından biri olup, belirli ters operatörlerle bunların genel özelliklerine ilişkindir. Bir lineer diferensiyel operatörün bazı spektral özelliklerine göre bu operatörün şeklärinin belirlenmesine ters problem denir. İlkinci mertebeden diferensiyel operatörlerin ters problemlerde önemli role sahip olanlardan biri kuantum teorisinin ters saçılma problemidir. Kuantum mekaniği alanında, Schrödinger operatörü yardımıyla elde edilen ikinci mertebeden diferensiyel denklemlerin Jost çözümünün ve bu çözümün integral gösteriminin bulunması önemlidir.

E enerji, V enerjiye bağlı potansiyel olmak üzere

$$y'' + (E - V(E, x))y = 0$$

denklemi Schrödinger diferensiyel denklemidir. 1976 yılında Jaulent ve Jean çalışmalarda, $\forall x \in \mathbb{R}$ için p ve q kompleks değerli ve \mathbb{R} üzerinde sürekli türevlenebilir fonksiyonlar olmak üzere,

$$-y'' + (q(x) + \lambda p(x) - \lambda^2)y = 0$$

diferensiyel denkleminin Jost çözümü ve bu çözümün integral gösterimi elde etmiş ayrıca ters saçılma problemi incelemiştir.

Bu tezde ise; $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}_2$ ve $E = \lambda^{2n}$ olmak üzere, λ spektral parametre-sine bağlı ve potansiyeli, reel değişkenli kompleks değerli q_k ($k=0,1,\dots,n$) fonksiyonlarından oluşan $V(\lambda, x) = \sum_{k=0}^n \lambda^k q_k(x)$ polinom olması durumunda elde edilen Schrödinger tipi diferensiyel denkleminin Jost çözümlerinin incelenmesi amaçlanmaktadır. Ayrıca ters saçılma problemlerinin incelenmesine yardımcı olacak olan integral gösterimi elde edilecektir.

2. TEMEL TANIM ve TEOREMLER

Bu bölümde daha sonra kullanılacak temel tanımlar ve teoremler verilmiştir.

Tanım 2.1.

$$D(L) = \left\{ y : y \in L_2(0, \infty) : \begin{array}{l} 1) \quad y' \text{ mevcut ve mutlak sürekli} \\ 2) \quad \ell y \in L_2(0, \infty) \\ 3) \quad y'(0) = 0 \end{array} \right\}$$

olmak üzere;

L ile tanım kümesi $D(L)$ olan ve $\forall y \in L_2(0, \infty)$ için $Ly := \ell y$ olan operatör tanımlayalım. Bu durumda

$$\begin{aligned} L : D(L) &\rightarrow L_2(0, \infty) \\ y &\rightarrow Ly := \ell y : -y'' + q(x)y \end{aligned}$$

operatörüne $L_2(0, \infty)$ da Sturm-Liouville (S-L) operatörü denir (Bairamov vd. 1999).

Teorem 2.1. (Weierstrass M-Testi) $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$, A üzerinde tanımlı fonksiyonların bir serisi olsun. $\forall x \in A$ için $|f_k(x)| \leq a_k$ ve $\sum_{k=1}^{\infty} a_k < \infty$ ise $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ serisi A üzerinde düzgün yakınsaktır (Balci 1997).

3. JOST ÇÖZÜMÜNÜN VARLIĞI

Bu bölümde öncelikle ele alınan Schrödinger tipi denkleminin Jost çözümünün varlığı incelenerek daha sonra bu çözümün özellikleri incelenecektir (Aktosun vd. 1998).

3.1 Jost Çözümünün Varlığı

Bu tezde $x \in \mathbb{R}$, $m = 0, 1, \dots, n - 1$ için $S_m = \left\{ \lambda : \frac{m\pi}{n} < \arg \lambda < \frac{(m+1)\pi}{n} \right\}$ olmak üzere $\lambda \in S_m$ ve $k = 0, 1, \dots, n$ için q_k fonksiyonlarının aşağıdaki koşuları gerçeklediği kabul edilecektir.

(a) q_0 reel değişkenli kompleks değerli, sürekli bir fonksiyon; $k = 1, 2, \dots, n$ için q_k fonksiyonları ise reel değişkenli kompleks değerli sürekli türevlenebilir fonksiyonlardır.

(b)

$$\int_{-\infty}^{\infty} (1 + |t|) \left(|q_0(t)| + \frac{1}{2} |q_n(t)| + \frac{1}{4} |q_n^2(t)| \right) dt$$

ve

$$\int_{-\infty}^{\infty} (1 + |t|)^{1 - \frac{k}{n}} (|q_k(t)| + |q'_k(t)|) dt, \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

integralleri mevcuttur.

$$-y'' + \sum_{k=0}^n \lambda^k q_k(x) y = \lambda^{2n} y, \quad (n \in \mathbb{N}_2) \quad (3.1.1)$$

denkleminin, sırasıyla

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_m^+(x, \lambda) e^{(-1)^{m+1} i \lambda^n x} = 1 \quad , \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f_m^-(x, \lambda) e^{(-1)^m i \lambda^n x} = 1 \quad (3.1.2)$$

koşullarını gerçekleyen Jost çözümleri $f_m^+(x, \lambda)$, $f_m^-(x, \lambda)$ ile gösterilsin. $\lambda \in S_m$ için bu çözümler

$$f_m^\pm(x, \lambda) = u_m^\pm(x, \lambda) \exp(\pm(-1)^m i \lambda^n x \pm \frac{(-1)^{m+1}}{2i} \int_x^{\pm\infty} q_n(t) dt) \quad (3.1.3)$$

şeklinde olacaktır. $f_m^\pm(x, \lambda)$ (3.1.1) denkleminin çözümü olarak kabul edildiği için bu denklemi sağlayacaktır. O halde (3.1.3) eşitliğinin x e göre iki kez türevi alınıp (3.1.1) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$\varphi_m^\mp(x) = q_0(x) + \frac{1}{4} q_n^2(x) \pm \frac{(-1)^{m+1}}{2i} q'_n(x)$$

ile gösterilmek üzere

$$u_m^{\pm''}(x, \lambda) \pm (-1)^m (2i \lambda^n - iq_n(x)) u_m^{\pm'}(x, \lambda) = [\varphi_m^\mp(x) + \sum_{k=1}^{n-1} \lambda^k q_k(x)] u_m^\pm(x, \lambda) \quad (3.1.4)$$

diferensiyel denklemi elde edilir. Ayrıca (3.1.3) eşitliğinin her iki tarafı

$$\exp((-1)^{m+1} i \lambda^n x)$$

ile çarpılıp $x \rightarrow +\infty$ için limit alınıp $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f_m^\pm(x, \lambda) e^{(-1)^{m+1} i \lambda^n x} = 1$ olduğu göz önünde bulundurulursa

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f_m^\pm(x, \lambda) e^{(-1)^{m+1} i \lambda^n x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} u_m^\pm(x, \lambda) \exp(\pm(-1)^m i \lambda^n x \pm \frac{(-1)^{m+1}}{2i} \int_x^{\pm\infty} q_n(t) dt)$$

eşitliğinden

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} u_m^\pm(x, \lambda) \exp(\pm(-1)^m i \lambda^n x \pm \frac{(-1)^{m+1}}{2i} \int_x^{\pm\infty} q_n(t) dt) = 1$$

elde edilir. $\int_{-\infty}^{\infty} |q_n(t)dt| < \infty$ olduğundan kalan kısmın limiti sıfır olacağından

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \exp\left(\frac{(-1)^{m+1}}{2i} \int_x^{\pm\infty} q_n(t)dt\right) &= \exp \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{(-1)^{m+1}}{2i} \int_x^{\pm\infty} q_n(t)dt\right) \\ &= 1\end{aligned}$$

olduğu görülür. Diğer yandan $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \exp(\pm(-1)^m i\lambda^n x) = 1$ olduğundan

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \exp(\pm(-1)^m i\lambda^n x \pm \frac{(-1)^{m+1}}{2i} \int_x^{\pm\infty} q_n(t)dt) = 1$$

olur. Bu durumda

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} u_m^{\pm}(x, \lambda) = 1 \quad (3.1.5)$$

elde edilir. O halde (3.1.5) koşulu altında (3.1.4) diferensiyel denklemini incelemek yeterli olacaktır.

Bu tezde incelemeler $f_m^+(x, \lambda)$ çözümü için yapılacaktır. Çünkü benzer işlemler $f_m^-(x, \lambda)$ çözümü için de yapılır.

Theorem 3.1.1. (3.1.4) diferensiyel denkleminin (3.1.5) koşulunu sağlayan her çözümü

$$\begin{aligned}u_m^{\pm}(x, \lambda) &= 1 \pm (-1)^m \int_x^{\pm\infty} \left(\frac{e^{(-1)^m 2i\lambda^n |t-x|} - 1}{2i\lambda^n} \right) \\ &\quad \times \left(\varphi_m^{\pm}(t) + \sum_{k=1}^{n-1} \lambda^k q_k(t) \right) u_m^{\pm}(t, \lambda) dt \\ &\quad \pm (-1)^m \int_x^{\pm\infty} e^{(-1)^m 2i\lambda^n |t-x|} q_n(t) u_m^{\pm}(t, \lambda) dt\end{aligned} \quad (3.1.6)$$

Volterra integral denkleminin bir çözümüdür.

İspat : İspat için

$$u_m^{+''}(x, \lambda) + (-1)^m(2i\lambda^n - iq_n(x))u_m^{+'}(x, \lambda) = [\varphi_m^-(x) + \sum_{k=1}^{n-1} \lambda^k q_k(x)]u_m^+(x, \lambda) \quad (3.1.7)$$

ile verilen denklemin her iki tarafı x den sonsuza integre edilsin.

$$\begin{aligned} \int_x^{+\infty} u_m^{+''}(t, \lambda) dt &= (-1)^{m+1} 2i\lambda^n \int_x^{+\infty} u_m^{+'}(t, \lambda) dt \\ &\quad + (-1)^m i \int_x^{+\infty} q_n(t) u_m^{+'}(t, \lambda) dt \\ &\quad + \int_x^{+\infty} [\varphi_m^-(t) + \sum_{k=1}^{n-1} \lambda^k q_k(t)] u_m^+(t, \lambda) dt \end{aligned} \quad (3.1.8)$$

(3.1.5) koşulu ve bu koşulun gerektirdiği

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} u_m^{+'}(x, \lambda) = 0$$

eşitliği göz önünde bulundurulup integraller hesaplanırsa sol taraftaki integral

$$\begin{aligned} \int_x^{+\infty} u_m^{+''}(t, \lambda) dt &= \lim_{\nu \rightarrow +\infty} u_m^{+'}(\nu, \lambda) - u_m^{+'}(x, \lambda) \\ &= -u_m^{+'}(x, \lambda) \end{aligned}$$

ve sağ taraftaki ilk integral ise

$$\begin{aligned} \int_x^{+\infty} u_m^{+'}(t, \lambda) dt &= \lim_{\nu \rightarrow +\infty} u_m^+(\nu, \lambda) - u_m^+(x, \lambda) \\ &= 1 - u_m^+(x, \lambda) \end{aligned}$$

bulunur. Bu eşitlikler göz önünde bulundurularsa ikinci basamaktan (3.1.4) dife-

rensiyel denklemi

$$\begin{aligned}
 -u_m^{+'}(x, \lambda) + (-1)^{m+1} 2i\lambda^n u_m^+(x, \lambda) &= (-1)^{m+1} 2i\lambda^n \\
 &\quad + (-1)^m i \int_x^{+\infty} q_n(t) u_m^{+'}(t, \lambda) dt \\
 &\quad + \int_x^{+\infty} [\varphi_m^-(t) + \sum_{k=1}^{n-1} \lambda^k q_k(t)] u_m^+(t, \lambda) dt
 \end{aligned} \tag{3.1.9}$$

birinci basamaktan (3.1.9) diferensiyel denklemine dönüşür. Elde edilen bu denklem ise

$$I(x) = e^{(-1)^m 2i\lambda^n (x-t)}$$

ile çarpılırsa (3.1.9) eşitliği

$$\begin{aligned}
 -\frac{d}{dx}(u_m^+(x, \lambda) I(x)) &= (-1)^{m+1} 2i\lambda^n I(x) \\
 &\quad + (-1)^m i \int_x^{+\infty} I(x) q_n(t) u_m^{+'}(t, \lambda) dt \\
 &\quad + \int_x^{+\infty} I(x) [\varphi_m^-(t) + \sum_{k=1}^{n-1} \lambda^k q_k(t)] u_m^+(t, \lambda) dt
 \end{aligned}$$

şeklini alır. Yine bu eşitliğin her iki tarafı $[x, +\infty)$ üzerinde integre edilirse

$$\begin{aligned}
 -\int_x^{+\infty} \frac{d}{ds}(u_m^+(s, \lambda) I(s)) ds &= (-1)^{m+1} 2i\lambda^n \int_x^{+\infty} e^{(-1)^m 2i\lambda^n (s-t)} ds \\
 &\quad + (-1)^m i \int_x^{+\infty} \int_s^{+\infty} e^{(-1)^m 2i\lambda^n (s-t)} q_n(t) u_m^{+'}(t, \lambda) dt ds \\
 &\quad + \int_x^{+\infty} \int_s^{+\infty} e^{(-1)^m 2i\lambda^n (s-t)} \\
 &\quad \times \left[\varphi_m^-(t) + \sum_{k=1}^{n-1} \lambda^k q_k(t) \right] u_m^+(t, \lambda) dt ds
 \end{aligned} \tag{3.1.10}$$

olur. Bu eşitlikteki integraller sırasıyla hesaplanırsa

$$\begin{aligned}
I_1 &= - \int_x^{+\infty} \frac{d}{ds} (u_m^+(s, \lambda) I(s)) ds \\
&= \lim_{v \rightarrow +\infty} [-u_m^+(\nu, \lambda) + u_m^+(x, \lambda)] e^{(-1)^m 2i\lambda^n(v-t)} \\
&= u_m^+(x, \lambda) e^{(-1)^m 2i\lambda^n(x-t)},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_2 &= (-1)^{m+1} 2i\lambda^n \int_x^{+\infty} e^{(-1)^m 2i\lambda^n(s-t)} ds \\
&= (-1)^{m+1} 2i\lambda^n \lim_{v \rightarrow +\infty} \frac{(e^{(-1)^m 2i\lambda^n(v-t)} - e^{(-1)^m 2i\lambda^n(x-t)})}{(-1)^m 2i\lambda^n} \\
&= e^{(-1)^m 2i\lambda^n(x-t)},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_3 &= \int_x^{+\infty} \int_s^{+\infty} e^{(-1)^m 2i\lambda^n(s-t)} q_n(t) u_m^{+'}(t, \lambda) dt ds \\
&= \int_x^{+\infty} \int_x^t e^{(-1)^m 2i\lambda^n(s-t)} q_n(t) u_m^{+'}(t, \lambda) ds dt \\
&= \int_x^{+\infty} \left[\frac{e^{(-1)^m 2i\lambda^n(s-t)}}{(-1)^m 2i\lambda^n} \Big|_x^t \right] q_n(t) u_m^{+'}(t, \lambda) dt \\
&= \int_x^{+\infty} \frac{1 - e^{(-1)^m 2i\lambda^n(x-t)}}{(-1)^m 2i\lambda^n} q_n(t) u_m^{+'}(t, \lambda) dt
\end{aligned}$$

bulunur. Benzer işlemler yapılınrsa (3.1.10) eşitliğindeki son integral

$$I_4 = \int_x^{+\infty} \frac{1 - e^{(-1)^m 2i\lambda^n(x-t)}}{(-1)^m 2i\lambda^n} [\varphi_m^-(t) + \sum_{k=1}^{n-1} \lambda^k q_k(t)] u_m^+(t, \lambda) dt$$

şeklinde bulunur. O halde I_1, I_2, I_3, I_4 integralleri yardımıyla (3.1.10) eşitliği

$$\begin{aligned} u_m^+(x, \lambda) e^{(-1)^m 2i\lambda^n(x-t)} &= e^{(-1)^m 2i\lambda^n(x-t)} \\ &+ (-1)^m i \int_x^{+\infty} \frac{1 - e^{(-1)^m 2i\lambda^n(x-t)}}{(-1)^m 2i\lambda^n} q_n(t) u_m^{+'}(t, \lambda) dt \\ &\quad \int_x^{+\infty} \frac{1 - e^{(-1)^m 2i\lambda^n(x-t)}}{(-1)^m 2i\lambda^n} [\varphi_m^-(t) + \sum_{k=1}^{n-1} \lambda^k q_k(t)] u_m^+(t, \lambda) dt \end{aligned}$$

halini alır. Bu eşitliğin her iki tarafı $e^{(-1)^{m+1} 2i\lambda^n(x-t)}$ ile çarpılırsa

$$\begin{aligned} u_m^+(x, \lambda) &= 1 + \int_x^{+\infty} \frac{e^{(-1)^{m+1} 2i\lambda^n(x-t)} - 1}{2\lambda^n} q_n(t) u_m^{+'}(t, \lambda) dt \\ &\quad + (-1)^m \int_x^{+\infty} \frac{e^{(-1)^{m+1} 2i\lambda^n(x-t)} - 1}{2i\lambda^n} [\varphi_m^-(t) + \sum_{k=1}^{n-1} \lambda^k q_k(t)] u_m^+(t, \lambda) dt \end{aligned}$$

bulunur. Son olarak eşitliğin sağ tarafındaki ilk integralde kısmi integrasyon uygulanırsa

$$\begin{aligned} \int_x^{+\infty} \frac{e^{(-1)^{m+1} 2i\lambda^n(x-t)} - 1}{2\lambda^n} q_n(t) u_m^{+'}(t, \lambda) dt &= (-1)^{m+1} i \int_x^{+\infty} e^{(-1)^m 2i\lambda^n(t-x)} q_n(t) u_m^+(t, \lambda) dt \\ &\quad - i \int_x^{+\infty} \frac{e^{(-1)^m 2i\lambda^n(t-x)} - 1}{2i\lambda^n} q'_n(t) u_m^+(t, \lambda) dt \end{aligned}$$

olur. Böylece

$$\begin{aligned} u_m^+(x, \lambda) &= 1 + (-1)^{m+1} i \int_x^{+\infty} e^{(-1)^m 2i\lambda^n(t-x)} q_n(t) u_m^+(t, \lambda) dt \\ &\quad - i \int_x^{+\infty} \frac{e^{(-1)^m 2i\lambda^n(t-x)} - 1}{2i\lambda^n} q'_n(t) u_m^+(t, \lambda) dt \\ &\quad + (-1)^m \int_x^{+\infty} \frac{e^{(-1)^{m+1} 2i\lambda^n(x-t)} - 1}{2i\lambda^n} [\varphi_m^-(t) + \sum_{k=1}^{n-1} \lambda^k q_k(t)] u_m^+(t, \lambda) dt \end{aligned}$$

elde edilir. $\varphi_m^-(t) = q_0(t) + \frac{1}{4}q_n^2(t) + \frac{(-1)^{m+1}}{2i}q'_n(t)$ eşitliği göz önünde bulundurulursa

$$\begin{aligned} u_m^+(x, \lambda) &= 1 + (-1)^{m+1}i \int_x^{+\infty} e^{(-1)^m 2i\lambda^n(t-x)} q_n(t) u_m^+(t, \lambda) dt \\ &\quad + (-1)^m \int_x^{+\infty} \left[\frac{e^{(-1)^{m+1} 2i\lambda^n(x-t)} - 1}{2i\lambda^n} \right] \\ &\quad \times [q_0(t) + \frac{1}{4}q_n^2(t) - \frac{(-1)^{m+1}}{2i}q'_n(t) + \sum_{k=1}^{n-1} \lambda^k q_k(t)] u_m^+(t, \lambda) dt \end{aligned}$$

elde edilir. Son integralde $q_0(t) + \frac{1}{4}q_n^2(t) - \frac{(-1)^{m+1}}{2i}q'_n(t) = \varphi_m^+(t)$ eşitliği yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} u_m^+(x, \lambda) &= 1 + (-1)^m \int_x^{+\infty} \frac{e^{(-1)^m 2i\lambda^n(t-x)} - 1}{2i\lambda^n} [\varphi_m^+(t) + \sum_{k=1}^{n-1} \lambda^k q_k(t)] u_m^+(t, \lambda) dt \\ &\quad + (-1)^{m+1}i \int_x^{+\infty} e^{(-1)^m 2i\lambda^n(t-x)} q_n(t) u_m^+(t, \lambda) dt \end{aligned}$$

olarak bulunur. Böylece (3.1.4) diferensiyel denkleminin (3.1.5) koşulu altında bir çözümünün olduğu görülür.

Şimdiyse bu denklemin çözümünü Ardisık Yaklaşımalar Yöntemi ile arayalım.

$$u_{m,0}^+(x, \lambda) = 1$$

ve

$$\begin{aligned} u_{m,j}^+(x, \lambda) &= (-1)^m \int_x^{\infty} \frac{e^{(-1)^m 2i\lambda^n(t-x)} - 1}{2i\lambda^n} \left(\varphi_m^+(t) + \sum_{k=1}^{n-1} \lambda^k q_k(t) \right) u_{m,j-1}^+(t, \lambda) dt \\ &\quad + (-1)^{m+1}i \int_x^{\infty} e^{(-1)^m 2i\lambda^n(t-x)} q_n(t) u_{m,j-1}^+(t, \lambda) dt, \quad j = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

olmak üzere

$$u_m^+(x, \lambda) = \sum_{j=0}^{\infty} u_{m,j}^+(x, \lambda) \tag{3.1.11}$$

serisi oluşturulsun.

Yapılacak çalışmalarında (3.1.11) serisinin düzgün yakınsaklığına ihtiyaç vardır. Önce-likle bu serinin düzgün yakınsaklığının gösterilmesinde kullanılacak olan bir lemma ve birtakım eşitsizlikler verilecektir.

Lemma 3.1.1. $\lambda \in S_m$ ve $x \geq 0$ olmak üzere $k=0,1,\dots,n-1$ için

$$\left| \frac{e^{(-1)^{m2i\lambda^n}x} - 1}{2i\lambda^{n-k}} \right| \leq \frac{2^{1-\frac{k}{n}}}{\Gamma(2 - \frac{k}{n})} x^{1-\frac{k}{n}} \quad (3.1.12)$$

eşitsizliği gerçekleşir (Guseinov vd. 2000).

İspat : $k = 0$ için

$$\begin{aligned} \left| \frac{e^{(-1)^{m2i\lambda^n}x} - 1}{2i\lambda^n} \right| &= \left| \int_0^x e^{(-1)^{m2i\lambda^n}t} dt \right| \\ &\leq \int_0^x \left| e^{(-1)^{m2i\lambda^n}t} \right| dt \\ &\leq \int_0^x dt \\ &\leq 2x \end{aligned}$$

olduğu görülür.

$1 \leq k \leq n-1$ içinse

$$\frac{1}{2i\lambda^{n-k}} = \frac{(-1)^{m+1} 2^{\frac{-k}{n}} e^{i\pi k(2m+1)}}{\Gamma(1 - \frac{k}{n})} \int_0^\infty s^{\frac{-k}{n}} e^{(-1)^{m2i\lambda^n}s} ds$$

eşitliğinden yararlanılırsa

$$\frac{e^{(-1)^{m2i\lambda^n}x} - 1}{2i\lambda^{n-k}} = \frac{(-1)^{m+1} 2^{-\frac{k}{n}} e^{i\pi k(2m+1)}}{\Gamma(1 - \frac{k}{n})} \left\{ \int_0^\infty s^{\frac{-k}{n}} e^{(-1)^{m2i\lambda^n}(s+x)} ds - \int_0^\infty s^{\frac{-k}{n}} e^{(-1)^{m2i\lambda^n}s} ds \right\}$$

olup

$$\int_0^\infty s^{\frac{-k}{n}} e^{(-1)^m 2i\lambda^n s} ds = \int_x^\infty (s-x)^{\frac{-k}{n}} e^{(-1)^m 2i\lambda^n s} ds$$

eşitliği kullanılırsa

$$\begin{aligned} \frac{e^{(-1)^m 2i\lambda^n x} - 1}{2i\lambda^{n-k}} &= \frac{(-1)^{m+1} 2^{-\frac{k}{n}} e^{i\pi k(2m+1)}}{\Gamma(1 - \frac{k}{n})} \left\{ \int_x^\infty \left[s^{\frac{-k}{n}} - (s-x)^{\frac{-k}{n}} \right] e^{(-1)^m 2i\lambda^n s} ds \right. \\ &\quad \left. + \int_0^x s^{\frac{-k}{n}} e^{(-1)^m 2i\lambda^n s} ds \right\} \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned} \left| \frac{e^{(-1)^m 2i\lambda^n x} - 1}{2i\lambda^n} \right| &\leq \frac{2^{-\frac{k}{n}}}{\Gamma(1 - \frac{k}{n})} \left\{ \int_0^x s^{\frac{-k}{n}} |e^{(-1)^m 2i\lambda^n s}| ds \right. \\ &\quad \left. + \int_x^\infty \left| s^{\frac{-k}{n}} - (s-x)^{\frac{-k}{n}} \right| |e^{(-1)^m 2i\lambda^n s}| ds \right\} \\ &\leq \frac{2^{-\frac{k}{n}}}{\Gamma(1 - \frac{k}{n})} \left\{ \int_0^x s^{\frac{-k}{n}} ds + \int_x^\infty \left[s^{\frac{-k}{n}} - (s-x)^{\frac{-k}{n}} \right] e^{(-1)^{m+1} 2 \operatorname{Im} \lambda^n s} ds \right\} \\ &= \frac{2^{-\frac{k}{n}}}{\Gamma(1 - \frac{k}{n})} \left\{ \int_0^x s^{\frac{-k}{n}} ds + \int_x^\infty (s-x)^{\frac{-k}{n}} e^{(-1)^{m+1} 2 \operatorname{Im} \lambda^n s} ds \right. \\ &\quad \left. - \int_x^\infty s^{\frac{-k}{n}} e^{(-1)^{m+1} 2 \operatorname{Im} \lambda^n s} ds \right\} \\ &= \frac{2^{-\frac{k}{n}}}{\Gamma(1 - \frac{k}{n})} \left\{ \int_0^x s^{\frac{-k}{n}} ds + e^{(-1)^{m+1} 2 \operatorname{Im} \lambda^n x} \int_x^\infty t^{\frac{-k}{n}} e^{(-1)^{m+1} 2 \operatorname{Im} \lambda^n t} dt \right. \\ &\quad \left. - \int_x^\infty s^{\frac{-k}{n}} e^{(-1)^{m+1} 2 \operatorname{Im} \lambda^n s} ds \right\} \\ &\leq \frac{2^{-\frac{k}{n}}}{\Gamma(1 - \frac{k}{n})} \left\{ \int_0^x s^{\frac{-k}{n}} ds + \int_0^x s^{\frac{-k}{n}} ds + \int_x^\infty s^{\frac{-k}{n}} ds - \int_x^\infty s^{\frac{-k}{n}} ds \right\} \\ &= \frac{2^{1-\frac{k}{n}}}{\Gamma(2 - \frac{k}{n})} x^{1-\frac{k}{n}} \end{aligned}$$

bulunur ve böylece ispat tamamlanır (Guseinov vd. 2000).

Şimdi bu eşitsizlikten yararlaraarak, serinin düzgün yakınsaklığını ispatlamak için kullanılacak olan

$$\begin{aligned} |u_{m,j}^+(x, \lambda)| &\leq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{2^{1-\frac{k}{n}}}{\Gamma(2-\frac{k}{n})} \int_x^\infty (t-x)^{1-\frac{k}{n}} |q_k(t)| |u_{m,j-1}^+(t, \lambda)| dt \\ &\quad + \int_x^\infty (t-x) |\varphi_m^+(t)| |u_{m,j-1}^+(t, \lambda)| dt + \int_x^\infty |q_n(t)| |u_{m,j-1}^+(t, \lambda)| dt \end{aligned} \quad (3.1.13)$$

eşitsizliğinin gerçekleştiği gösterilecektir (Nabiev ve Guseinov 2006).

$$\begin{aligned} u_{m,j}^+(x, \lambda) = & (-1)^m \int_x^\infty \frac{e^{(-1)^{m2i\lambda^n(t-x)}-1}}{2i\lambda^n} \left(\varphi_m^+(t) + \sum_{k=1}^{n-1} \lambda^k q_k(t) \right) u_{m,j-1}^+(t, \lambda) dt \\ & + (-1)^{m+1} i \int_x^\infty e^{(-1)^{m2i\lambda^n(t-x)}} q_n(t) u_{m,j-1}^+(t, \lambda) dt, \quad j = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

olmak üzere (3.1.12) eşitsizliğinden ve bu eşitsizlikte x yerine t-x alınınca elde edilen

$$\left| \frac{e^{(-1)^{m2i\lambda^n(t-x)}} - 1}{2i\lambda^n} \right| \leq 2(t-x)$$

eşitsizliğinden yararlaraarak

$$\begin{aligned} |u_{m,j}^+(x, \lambda)| &\leq \int_x^\infty \left| \frac{e^{(-1)^{m2i\lambda^n(t-x)}} - 1}{2i\lambda^n} \right| |\varphi_m^+(t)| |u_{m,j-1}^+(t, \lambda)| dt \\ &\quad + \int_x^\infty \left(\sum_{k=1}^{n-1} \left| \frac{e^{(-1)^{m2i\lambda^n(t-x)}} - 1}{2i\lambda^{n-k}} \right| |q_k(t)| \right) |u_{m,j-1}^+(t, \lambda)| dt \\ &\quad + \int_x^\infty |q_n(t)| |u_{m,j-1}^+(t, \lambda)| dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{2^{1-\frac{k}{n}}}{\Gamma(2-\frac{k}{n})} \int_x^\infty (t-x)^{1-\frac{k}{n}} |q_k(t)| |u_{m,j-1}^+(t, \lambda)| dt \\
&\quad + 2 \int_x^\infty (t-x) |\varphi_m^+(t)| |u_{m,j-1}^+(t, \lambda)| dt \\
&\quad + \int_x^\infty |q_n(t)| |u_{m,j-1}^+(t, \lambda)| dt
\end{aligned}$$

elde edilir.

Şimdi

$$\begin{aligned}
\sigma^+(x) &= 2 \int_x^\infty (t-x) \left[|q_0(t)| + \frac{1}{4} |q_n^2(t)| + \frac{1}{2} |q_n'(t)| \right] dt \\
&\quad + \sum_{k=1}^n \frac{2^{1-\frac{k}{n}}}{\Gamma(2-\frac{k}{n})} \int_x^\infty (t-x)^{1-\frac{k}{n}} |q_k(t)| dt
\end{aligned}$$

olmak üzere (3.1.13) eşitsizliğinden

$$|u_{m,0}^+(x, \lambda)| = 1,$$

$$\begin{aligned}
|u_{m,1}^+(x, \lambda)| &\leq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{2^{1-\frac{k}{n}}}{\Gamma(2-\frac{k}{n})} \int_x^\infty (t-x)^{1-\frac{k}{n}} |q_k(t)| |u_{m,0}^+(t, \lambda)| dt \\
&\quad + 2 \int_x^\infty (t-x) \left[|q_0(t)| + \frac{1}{4} |q_n^2(t)| + \frac{1}{2} |q_n'(t)| \right] |u_{m,0}^+(t, \lambda)| dt \\
&\quad + \int_x^\infty |q_n(t)| |u_{m,0}^+(t, \lambda)| dt
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=1}^n \frac{2^{1-\frac{k}{n}}}{\Gamma(2-\frac{k}{n})} \int_x^\infty (t-x)^{1-\frac{k}{n}} |q_k(t)| dt \\
&\quad + 2 \int_x^\infty (t-x) \left[|q_0(t)| + \frac{1}{4} |q_n^2(t)| + \frac{1}{2} |q_n'(t)| \right] dt \\
&= \sigma^+(x),
\end{aligned}$$

ve $j-1$ için

$$|u_{m,j-1}^+(x, \lambda)| \leq \frac{\{\sigma^+(x)\}^{j-1}}{(j-1)!}$$

olduğu kabul edilirse Lemma 3.1.1 de verilen eşitsizlik yardımıyla

$$\begin{aligned}
|u_{m,j}^+(x, \lambda)| &\leq 2 \int_x^\infty (t-x) |\varphi_m^+(t)| |u_{m,j-1}^+(t, \lambda)| dt \\
&\quad + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{2^{1-\frac{k}{n}}}{\Gamma(2-\frac{k}{n})} \int_x^\infty (t-x)^{1-\frac{k}{n}} |q_k(t)| |u_{m,j-1}^+(t, \lambda)| dt \\
&\quad + \int_x^\infty |q_n(t)| |u_{m,j-1}^+(t, \lambda)| dt \\
&\leq 2 \int_x^\infty (t-x) |\varphi_m^+(t)| \frac{\{\sigma^+(t)\}^{j-1}}{(j-1)!} dt \\
&\quad + \sum_{k=1}^n \frac{2^{1-\frac{k}{n}}}{\Gamma(2-\frac{k}{n})} \int_x^\infty (t-x)^{1-\frac{k}{n}} |q_k(t)| \frac{\{\sigma^+(t)\}^{j-1}}{(j-1)!} dt \\
&= \int_x^\infty \int_x^t \left\{ 2 \left[|q_0(t)| + \frac{1}{4} |q_n^2(t)| + \frac{1}{2} |q_n'(t)| \right] \right. \\
&\quad \left. + \sum_{k=1}^n \frac{2^{1-\frac{k}{n}}}{\Gamma(2-\frac{k}{n})} (t-\mu)^{-\frac{k}{n}} (1-\frac{k}{n}) |q_k(t)| d\mu \right\} dt \\
&= \frac{1}{(j-1)!} \int_x^\infty \int_\mu^\infty \left\{ \{\sigma^+(t)\}^{j-1} \left\{ 2 \left[|q_0(t)| + \frac{1}{4} |q_n^2(t)| + \frac{1}{2} |q_n'(t)| \right] \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \sum_{k=1}^n \frac{2^{1-\frac{k}{n}}}{\Gamma(2-\frac{k}{n})} (t-\mu)^{-\frac{k}{n}} (1-\frac{k}{n}) |q_k(t)| dt d\mu \right\} \right\}
\end{aligned}$$

$$\leq \frac{1}{(j-1)!} \int_x^\infty \{\sigma^+(\mu)\} \int_\mu^\infty \left\{ 2 \left[|q_0(t)| + \frac{1}{4} |q_n^2(t)| + \frac{1}{2} |q_n'(t)| \right] \right. \\ \left. + \sum_{k=1}^n \frac{2^{1-\frac{k}{n}}}{\Gamma(2-\frac{k}{n})} (t-\mu)^{-\frac{k}{n}} (1-\frac{k}{n}) |q_k(t)| dt \right\} d\mu$$

bulunur.

$$\frac{d\sigma^+(\mu)}{d\mu} = - \int_\mu^\infty \left\{ 2 \left[|q_0(t)| + \frac{1}{4} |q_n^2(t)| + \frac{1}{2} |q_n'(t)| \right] \right. \\ \left. + \sum_{k=1}^n \frac{2^{1-\frac{k}{n}}}{\Gamma(2-\frac{k}{n})} (t-\mu)^{-\frac{k}{n}} (1-\frac{k}{n}) |q_k(t)| \right\} dt$$

ve $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sigma^+(x) = 0$ olduğundan

$$|u_{m,j}^+(x, \lambda)| \leq \frac{-1}{(j-1)!} \int_x^\infty \{\sigma^+(\mu)\}^{j-1} d\sigma(\mu) \\ = \frac{\{\sigma^+(x)\}^j}{j!}$$

elde edilir. O halde tümevarım yöntemi gereğince $j = 0, 1, \dots$ için

$$|u_{m,j}^+(x, \lambda)| \leq \frac{\{\sigma^+(x)\}^j}{j!}$$

elde edilir.

σ^+ artmayan fonksiyon olduğundan her $x \in \mathbb{R}$ için en azından bir $a \in \mathbb{R}$ vardır öyleki $a < x$ için $\sigma^+(a) \geq \sigma^+(x)$ dir. O halde her $x \in \mathbb{R}$ ve $\lambda \in S_m$ için

$$|u_{m,j}^+(x, \lambda)| \leq \frac{\{\sigma^+(x)\}^j}{j!} \\ \leq \frac{\{\sigma^+(a)\}^j}{j!}$$

olup

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\{\sigma^+(a)\}^j}{j!} &= e^{\sigma^+(a)} - 1 \\ &< \infty \end{aligned}$$

olduğundan Weierstrass M-Testi gereğince $\sum_{j=0}^{\infty} u_{m,j}^+(x, \lambda)$ serisi $\mathbb{R} \times S_m$ kümesi üzerinde düzgün yakınsaktır.

O halde (3.1.11) serisi (3.1.6) integral denkleminin çözümüdür ve tektir. Gerçekten

$$\begin{aligned} u_m^+(x, \lambda) &= u_0^+(x, \lambda) \\ &\quad + \sum_{j=0}^{\infty} \left[(-1)^m \int_x^{\infty} \frac{e^{(-1)^{m2i\lambda^n} x} - 1}{2i\lambda^n} \left(\varphi_m^+(t) + \sum_{k=1}^{n-1} \lambda^k q_k(t) \right) u_{m,j-1}^+(t, \lambda) dt \right. \\ &\quad \left. + (-1)^{m+1} i \int_x^{\infty} e^{(-1)^{m2i\lambda^n} (t-x)} q_n(t) u_{m,j-1}^+(t, \lambda) dt \right] \\ &= u_0^+(x, \lambda) \\ &\quad + (-1)^m \int_x^{\infty} \frac{e^{(-1)^{m2i\lambda^n} x} - 1}{2i\lambda^n} \left(\varphi_m^+(t) + \sum_{k=1}^{n-1} \lambda^k q_k(t) \right) \left(\sum_{j=1}^{\infty} u_{m,j-1}^+(t, \lambda) \right) dt \\ &\quad + (-1)^{m+1} i \int_x^{\infty} e^{(-1)^{m2i\lambda^n} (t-x)} q_n(t) \left(\sum_{j=0}^{\infty} u_{m,j-1}^+(t, \lambda) \right) dt \\ &= 1 + (-1)^m \int_x^{\infty} \frac{e^{(-1)^{m2i\lambda^n} x} - 1}{2i\lambda^n} \left(\varphi_m^+(t) + \sum_{k=1}^{n-1} \lambda^k q_k(t) \right) u_m^+(t, \lambda) dt \\ &\quad + (-1)^{m+1} i \int_x^{\infty} e^{(-1)^{m2i\lambda^n} (t-x)} q_n(t) u_m^+(t, \lambda) dt \end{aligned}$$

gerçeklenir.

3.2 Jost Çözümünün Özellikleri

Bu kısımda elde edilen Jost çözümünün analitikliği incelenip gerçeklediği birtakım eşitsizlik verilecektir (Nabiev ve Guseinov 2006).

Teorem 3.2.1. $u_m^\pm(x, \lambda)$ $\lambda \in \bar{S}_m$ için analitik ve $\lambda \in S_m$ için sürekli olup aşağıdaki eşitsizlikleri gerçekler.

$$\begin{aligned} |u_m^\pm(x, \lambda)| &\leq e^{\sigma^+(x)} \\ |u_m^\pm(x, \lambda) - 1| &\leq \sigma^+(x)e^{\sigma^+(x)} \end{aligned} \quad (3.2.1)$$

İspat : $j = 0, 1, \dots$ için $u_m^+(x, \lambda)$ S_m üzerinde analitik için ve \bar{S}_m üzerinde sürekli olup (3.1.11) serisi $\mathbb{R} \times S_m$ üzerinde düzgün yakınsak olduğundan bu seri her bir $x \in \mathbb{R}$ için $u_m^+(x, \lambda)$ S_m üzerinde analitik ve \bar{S}_m üzerinde sürekli olur.

$$u_m^+(x, \lambda) = \sum_{j=0}^{\infty} u_{m,j}^+(x, \lambda)$$

eşitliğin her iki tarafının mutlak değeri alınıp $j = 0, 1, \dots$ için gerçekleştirilen

$$|u_{m,j}^+(x, \lambda)| \leq \frac{\{\sigma^+(x)\}^j}{j!}$$

eşitsizliği göz önünde bulundurulursa

$$\begin{aligned} |u_m^+(x, \lambda)| &\leq \sum_{j=0}^{\infty} |u_{m,j}^+(x, \lambda)| \\ &\leq \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\{\sigma^+(x)\}^j}{j!} \\ &= e^{\sigma^+(x)} \end{aligned}$$

eşitsizliği gerçekleşir ve bu eşitsizlikten yararlanılarak

$$\begin{aligned} u_m^+(x, \lambda) - 1 &= (-1)^m \int_x^{+\infty} \frac{e^{(-1)^{m+1} 2i\lambda^n(x-t)} - 1}{2i\lambda^n} [\varphi_m^+(t) + \sum_{k=1}^{n-1} \lambda^k q_k(t)] u_m^+(t, \lambda) dt \\ &\quad + (-1)^{m+1} i \int_x^{+\infty} e^{(-1)^m 2i\lambda^n(t-x)} q_n(t) u_m^+(t, \lambda) dt \end{aligned}$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} |u_m^+(x, \lambda) - 1| &\leq \int_x^{+\infty} \left| \frac{e^{(-1)^{m+1} 2i\lambda^n(x-t)} - 1}{2i\lambda^n} \right| \left| \varphi_m^+(t) + \sum_{k=1}^{n-1} \lambda^k q_k(t) \right| |u_m^+(t, \lambda)| dt \\ &\quad + \int_x^{+\infty} |e^{(-1)^m 2i\lambda^n(t-x)}| |q_n(t)| |u_m^+(t, \lambda)| dt \end{aligned}$$

elde edilir ve (3.1.12) eşitsizliği yardımıyla

$$\begin{aligned} |u_m^+(x, \lambda) - 1| &\leq \int_x^{+\infty} [(t-x) |\varphi_m^+(t)| + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{2^{1-\frac{k}{n}}}{\Gamma(1-\frac{k}{n})} (t-x)^{1-\frac{k}{n}} |q_k(t)|] |u_m^+(t, \lambda)| dt \\ &\quad + \int_x^{+\infty} |q_n(t)| |u_m^+(t, \lambda)| dt \\ &\leq e^{\sigma^+(x)} \left(\int_x^{+\infty} [(t-x) |\varphi_m^+(t)| + \sum_{k=1}^n \frac{2^{1-\frac{k}{n}}}{\Gamma(1-\frac{k}{n})} (t-x)^{1-\frac{k}{n}} |q_k(t)|] dt \right) \\ &= e^{\sigma^+(x)} \sigma^+(x) \end{aligned}$$

olduğu görülür (Nabiev ve Guseinov 2006).

Lemma 3.2.1.

$$\int_{-\infty}^{\infty} (1+|t|)(|q_0(t)| + \frac{1}{4} |q_n^2(t)| + \frac{1}{2} |q_n'(t)|) dt < \infty$$

ve

$$\sum_{k=1}^n \int_{-\infty}^{\infty} (1+|t|)^{1-\frac{k}{n}} |q_k(t)| dt < \infty$$

koşulları altında $x \in \mathbb{R}$, $\lambda \in S_m$ ve C_1 ile C_2 sabitler olmak üzere

$$|u_m^\pm(x, \lambda)| \leq C_1(1 + \text{maks}(\mp x, 0))$$

eşitsizliği gerçekleşir (Nabiev ve Guseinov 2006).

İspat : Teorem 3.2.1 gereğince $x > 0$ olmak üzere $m = 0, 1, \dots, n$ için u_m^+ fonksiyonu sınırlıdır. $x \leq 0$ için (3.2.1) eşitsizliğini göz önünde bulundurarak eşitsizliği elde etmeye çalışalım.

(3.1.4) integral denkleminin her iki tarafının mutlak değeri alınır ve (3.1.12) eşitsizliğinden yararlanırsa

$$\begin{aligned} |u_m^+(x, \lambda)| &\leq 1 + 2 \int_x^\infty \left\{ (t-x) \left(|q_0(t)| + \frac{1}{4} |q_n^2(t)| + \frac{1}{2} |q'_n(t)| \right) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{k=1}^n \frac{2^{1-\frac{k}{n}}}{\Gamma(2-\frac{k}{n})} \int_x^\infty (t-x)^{1-\frac{k}{n}} |q_k(t)| \right\} |u_m^+(t, \lambda)| dt \\ &\quad + \int_x^\infty |q_n(t)| |u_m^+(t, \lambda)| dt \end{aligned} \quad (3.2.2)$$

elde edilir. Daha kapalı bir gösterim için

$$|p_0(t)| = |q_0(t)| + \frac{1}{4} |q_n^2(t)| + \frac{1}{2} |q'_n(t)| \quad \text{ve} \quad |p_k(t)| = |q_k(t)| \quad (k=1,2,\dots,n)$$

almış (3.2.2) eşitsizliğinin sağ tarafı düzenlenirse

$$|u_m^+(x, \lambda)| \leq 1 + \sum_{k=0}^n \frac{2^{1-\frac{k}{n}}}{\Gamma(2-\frac{k}{n})} \int_x^\infty (t-x)^{1-\frac{k}{n}} |p_k(t)| |u_m^+(t, \lambda)| dt$$

olur. Eşitsizliğin sağ tarafındaki integral

$$\begin{aligned} \int_x^\infty (t-x)^{1-\frac{k}{n}} |p_k(t)| |u_m^+(t, \lambda)| dt &= \int_x^0 (t-x)^{1-\frac{k}{n}} |p_k(t)| |u_m^+(t, \lambda)| dt \\ &\quad + \int_0^\infty (t-x)^{1-\frac{k}{n}} |p_k(t)| |u_m^+(t, \lambda)| dt \end{aligned}$$

şeklinde ifade edilmek üzere ilk integralde

$$(t-x)^{1-\frac{k}{n}} \leq (-x)^{1-\frac{k}{n}}$$

ve ikinci integralde

$$(t-x)^{1-\frac{k}{n}} \leq t^{1-\frac{k}{n}} + (-x)^{1-\frac{k}{n}}$$

eşitsizliklerinden yararlanılarak küçültmeler yapılrsa

$$\begin{aligned} |u_m^+(x, \lambda)| &\leq 1 + \sum_{k=0}^n \frac{2^{1-\frac{k}{n}}}{\Gamma(2-\frac{k}{n})} \left\{ \int_x^0 (-x)^{1-\frac{k}{n}} |p_k(t)| |u_m^+(t, \lambda)| dt \right. \\ &\quad \left. + \int_0^\infty \left(t^{1-\frac{k}{n}} + (-x)^{1-\frac{k}{n}} \right) |p_k(t)| |u_m^+(t, \lambda)| dt \right\} \\ &= 1 + \sum_{k=0}^n \frac{2^{1-\frac{k}{n}}}{\Gamma(2-\frac{k}{n})} \left\{ \int_x^\infty (-x)^{1-\frac{k}{n}} |p_k(t)| |u_m^+(t, \lambda)| dt \right. \\ &\quad \left. + \int_0^\infty t^{1-\frac{k}{n}} |p_k(t)| |u_m^+(t, \lambda)| dt \right\} \end{aligned}$$

elde edilir. $x > 0$ için sağlanan

$$|u_m^+(x, \lambda)| \leq e^{\sigma^+(x)}$$

eşitsizliğinden yararlanılarak

$$\begin{aligned} \int_0^\infty t^{1-\frac{k}{n}} |p_k(t)| |u_m^+(t, \lambda)| dt &\leq \int_0^\infty t^{1-\frac{k}{n}} |p_k(t)| e^{\sigma^+(t)} dt \\ &\leq \int_0^\infty t^{1-\frac{k}{n}} |p_k(t)| e^{\sigma^+(0)} dt \end{aligned}$$

yazılışın

$$K = 1 + \sum_{k=0}^n \frac{2^{1-\frac{k}{n}}}{\Gamma(2 - \frac{k}{n})} \int_0^\infty t^{1-\frac{k}{n}} |p_k(t)| e^{\sigma^+(0)} dt$$

olmak üzere

$$|u_m^+(x, \lambda)| \leq K + \sum_{k=0}^n \frac{2^{1-\frac{k}{n}}}{\Gamma(2 - \frac{k}{n})} \int_x^\infty (-x)^{1-\frac{k}{n}} |p_k(t)| |u_m^+(t, \lambda)| dt$$

elde edilir. Bu eşitsizlik göz önünde bulundurularak $U_m^+(x, \lambda) = \frac{u_m^+(x, \lambda)}{K(1+|x|)}$ ile gösterilmek üzere

$$\begin{aligned} |U_m^+(x, \lambda)| &= \frac{|u_m^+(x, \lambda)|}{K(1+|x|)} \leq \frac{K + \sum_{k=0}^n \frac{2^{1-\frac{k}{n}}}{\Gamma(2 - \frac{k}{n})} \int_x^\infty (-x)^{1-\frac{k}{n}} |p_k(t)| |u_m^+(t, \lambda)| dt}{|K|(1+|x|)} \\ &= \frac{1}{1+|x|} + \sum_{k=0}^n \frac{2^{1-\frac{k}{n}}}{\Gamma(2 - \frac{k}{n})} \int_x^\infty (-x)^{1-\frac{k}{n}} \frac{1+|t|}{1+|x|} |p_k(t)| \frac{|u_m^+(t, \lambda)|}{K(1+|t|)} dt \\ &= \frac{1}{1+|x|} + \sum_{k=0}^n \frac{2^{1-\frac{k}{n}}}{\Gamma(2 - \frac{k}{n})} \int_x^\infty (-x)^{1-\frac{k}{n}} \frac{1+|t|}{1+|x|} |p_k(t)| |U_m^+(t, \lambda)| dt \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Sağ taraftaki integralde

$$|x|^{1-\frac{k}{n}} \leq (1+|x|)^{1-\frac{k}{n}}$$

eşitsizliğinden yararlanılarak küçültmeler yapılrsa

$$|U_m^+(x, \lambda)| \leq 1 + \sum_{k=0}^n \frac{2^{1-\frac{k}{n}}}{\Gamma(2 - \frac{k}{n})} \int_x^\infty (1+|t|)^{1-\frac{k}{n}} |p_k(t)| |U_m^+(t, \lambda)| dt \quad (3.2.3)$$

olur.

$$f(x) = 1 + \sum_{k=0}^n \frac{2^{1-\frac{k}{n}}}{\Gamma(2-\frac{k}{n})} \int_x^\infty (1+|t|)^{1-\frac{k}{n}} |p_k(t)| |U_m^+(t, \lambda)| dt$$

ile gösterilmek üzere $f(x) > 0$ olduğundan (3.2.3) eşitsizliğinden

$$\frac{|U_m^+(x, \lambda)|}{f(x)} \leq 1 \quad (3.2.4)$$

yazılır ve eşitsizliğin her iki tarafı $\sum_{k=0}^n \frac{2^{1-\frac{k}{n}}}{\Gamma(2-\frac{k}{n})} (1+|x|)^{1-\frac{k}{n}} |p_k(x)|$ ile çarpılırsa

$$\frac{|U_m^+(x, \lambda)| \sum_{k=0}^n \frac{2^{1-\frac{k}{n}}}{\Gamma(2-\frac{k}{n})} (1+|x|)^{1-\frac{k}{n}} |p_k(x)|}{f(x)} \leq \sum_{k=0}^n \frac{2^{1-\frac{k}{n}}}{\Gamma(2-\frac{k}{n})} (1+|x|)^{1-\frac{k}{n}} |p_k(x)|$$

elde edilir. Eşitsizliğin her iki tarafı $[x, +\infty)$ üzerinde integrallenir ve

$$|U_m^+(t, \lambda)| \sum_{k=0}^n \frac{2^{1-\frac{k}{n}}}{\Gamma(2-\frac{k}{n})} (1+|t|)^{1-\frac{k}{n}} |p_k(t)| = -\frac{df(t)}{dt}$$

eşitliğinden yararlanılırsa

$$-\int_x^\infty \frac{df(t)}{dt} \leq \sum_{k=0}^n \frac{2^{1-\frac{k}{n}}}{\Gamma(2-\frac{k}{n})} \int_x^\infty (1+|t|)^{1-\frac{k}{n}} |p_k(t)| dt$$

olur ve buradan

$$\begin{aligned} f(x) &\leq \exp \left(\sum_{k=0}^n \frac{2^{1-\frac{k}{n}}}{\Gamma(2-\frac{k}{n})} \int_x^\infty (1+|t|)^{1-\frac{k}{n}} |p_k(t)| dt \right) \\ &\leq \exp \left(\sum_{k=0}^n \frac{2^{1-\frac{k}{n}}}{\Gamma(2-\frac{k}{n})} \int_{-\infty}^\infty (1+|t|)^{1-\frac{k}{n}} |p_k(t)| dt \right) \\ &= K_1 \end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla (3.2.4) eşitsizliğinden

$$|U_m^+(x, \lambda)| \leq K_1$$

elde edilir. $|U_m^+(x, \lambda)|$ yerine $\frac{|u_m(x, \lambda)|}{K(1+|x|)}$ yazılırsa

$$\frac{|u_m(x, \lambda)|}{K(1+|x|)} \leq K_1$$

olur burada $KK_1 = K_2$ alınırsa

$$|u_m^+(x, \lambda)| \leq K_2(1 + |x|)$$

elde edilir. $x > 0$ için

$$\begin{aligned} |u_m^+(x, \lambda)| &\leq e^{\sigma^+(x)} \\ &\leq e^{\sigma^+(\alpha)} \\ &= K_3 \end{aligned}$$

almıp, $maks(K_2, K_3) = C_1$ ile gösterilirse $\forall x \in \mathbb{R}$ için

$$|u_m^+(x, \lambda)| \leq C_1(1 + maks(-x, 0))$$

eşitsizliği elde edilir. Bu durumda denklemin çözümünün her x için sınırlı olduğu görülür.

4. JOST ÇÖZÜMÜNÜN İNTEGRAL GÖSTERİMİ

Bu bölümde Fourier Dönüşümü yardımıyla (3.1.6) integral denkleminin bir başka formdaki çözümü ya da başka bir deyişle (3.1.6) denkleminin integral gösterimi elde edilecektir (Nabiev ve Guseinov 2006).

(3.1.1) diferensiyel denkleminin (3.1.2) koşulunu gerçekleyen her bir çözümünün (3.1.6) integral denkleminin çözümü olduğu gösterilmiştir. Şimdi ise (3.1.6) integral denkleminin

$$u_m^\pm(x, \lambda) = 1 + \int_0^\infty K_m^\pm(x, t) e^{(-1)^m 2i\lambda^n t} dt \quad (4.1)$$

şeklinde bir integral gösterime sahip olduğu gösterilecektir. Yine bu gösterim $u_m^+(x, \lambda)$ için elde edilsin, $u_m^-(x, \lambda)$ için de benzer işlemler yapılarak elde edilebileceği görülür.

(4.1) ile gösterilen eşitlik (3.1.6) denkleminde yerine yazılırsa

$$I = \int_0^\infty K_m^+(x, t) e^{(-1)^m 2i\lambda^n t} dt$$

ile gösterilmek üzere

$$\begin{aligned} I &= (-1)^m \int_x^\infty \frac{e^{(-1)^m 2i\lambda^n(t-x)} - 1}{2i\lambda^n} \left(\varphi_m^+(t) + \sum_{k=1}^{n-1} \lambda^k q_k(t) \right) \\ &\quad \times \left(1 + \int_0^\infty K_m^+(t, \xi) e^{(-1)^m 2i\lambda^n \xi} d\xi \right) dt \\ &\quad + (-1)^{m+1} i \int_x^\infty e^{(-1)^m 2i\lambda^n(t-x)} q_n(t) \left(1 + \int_0^\infty K_m^+(x, \xi) e^{(-1)^m 2i\lambda^n \xi} d\xi \right) dt \end{aligned} \quad (4.2)$$

elde edilir. Daha kapalı bir ifade için $p_{0(x)} = \varphi_m^+(x)$ ve

$$p_k(x) = q_k(x), \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

gösterimleri kullanılırsa (4.2) eşitliği

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty K_m(x, t) e^{(-1)2i\lambda^n t} dt &= (-1)^m \int_x^\infty \frac{e^{(-1)^m 2i\lambda^n(t-x)} - 1}{2i\lambda^n} \sum_{k=0}^{n-1} \lambda^k p_k(t) dt \\
&\quad + (-1)^m \int_x^\infty \frac{e^{(-1)^m 2i\lambda^n(t-x)} - 1}{2i\lambda^n} \left\{ \sum_{k=0}^{n-1} \lambda^k p_k(t) \right. \\
&\quad \left. \int_0^\infty K_m(t, \xi) e^{(-1)2i\lambda^n \xi} d\xi \right\} dt \\
&\quad + (-1)^{m+1} i \int_x^\infty e^{(-1)^m 2i\lambda^n(t-x)} p_n(t) dt \\
&\quad + (-1)^{m+1} i \int_x^\infty e^{(-1)^m 2i\lambda^n(t-x)} p_n(t) \int_0^\infty K_m(t, \xi) e^{(-1)2i\lambda^n \xi} d\xi dt
\end{aligned} \tag{4.3}$$

şeklini alır. (4.3) eşitliğinin bu son hali düzenlenmeden önce ilk iki integralin dönüşümünde yararlanılacak olan bir eşitlik verilsin.

$t \geq x$, $\xi \geq 0$ ve $\lambda \in S_m$ için

$$\begin{aligned}
\frac{e^{(-1)^m 2i\lambda^n x} - 1}{2i\lambda^{n-k}} &= \frac{(-1)^{m+1} 2^{-\frac{k}{n}} e^{i\pi k(2m+1)}}{\Gamma(1 - \frac{k}{n})} \left\{ \int_x^\infty \left[s^{-\frac{k}{n}} - (s-x)^{-\frac{k}{n}} \right] e^{(-1)^m 2i\lambda^n s} ds \right. \\
&\quad \left. + \int_0^x s^{-\frac{k}{n}} e^{(-1)^m 2i\lambda^n s} ds \right\}
\end{aligned}$$

eşitliğinden yararlanılırsa

$$\begin{aligned}
\frac{e^{(-1)^m 2i\lambda^n(t-x+\xi)} - e^{(-1)^m 2i\lambda^n \xi}}{2i\lambda^{n-k}} &= \frac{(-1)^{m+1} \gamma_k^{(m)}}{\Gamma(1 - \frac{k}{n})} \\
&\quad \times \left\{ + \int_{\xi+t-x}^\infty (s-\xi-t+x)^{-\frac{k}{n}} e^{(-1)^m 2i\lambda^n s} ds \right. \\
&\quad \left. - \int_\xi^\infty (s-\xi)^{-\frac{k}{n}} e^{(-1)^m 2i\lambda^n s} ds \right\}
\end{aligned} \tag{4.4}$$

elde edilir. (4.3) eşitliğinde

$$J_1 = (-1)^m \int_x^\infty \frac{e^{(-1)^{m+1} 2i\lambda^n(t-x)}}{2i\lambda^n} - 1 \sum_{k=0}^{n-1} \lambda^k p_k(t) dt$$

almış, bu integralin içi $e^{(-1)^{m+1} 2i\lambda^n \xi}$ ile çarpılıp bölünsün. Bu durumda elde edilen

$$J_1 = (-1)^m \int_x^\infty \sum_{k=0}^{n-1} \frac{e^{(-1)^{m+1} 2i\lambda^n(t+\xi-x)} - e^{(-1)^{m+1} 2i\lambda^n \xi}}{2i\lambda^{n-k}} p_k(t) dt$$

eşitliğinde (4.4) eşitliği kullanılsrsa

$$\begin{aligned} J_1 &= \int_x^\infty \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\gamma_k^{(m)}}{\Gamma(1 - \frac{k}{n})} \left\{ \int_\xi^\infty (s - \xi)^{-\frac{k}{n}} e^{(-1)^{m+1} 2i\lambda^n(s-\xi)} ds \right. \\ &\quad \left. - \int_{\xi+t-x}^\infty (s - \xi - t + x)^{-\frac{k}{n}} e^{(-1)^{m+1} 2i\lambda^n(s-\xi)} ds \right\} p_k(t) dt \end{aligned}$$

elde edilir. Parantezin içindeki iki integralde de $s - \xi = u$ değişken değiştirilmesi uygulanıp, integrasyon sırasında değişim yapılrsa J_1 integrali

$$J_1 = \int_0^\infty \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\gamma_k^{(m)}}{\Gamma(1 - \frac{k}{n})} e^{(-1)^{m+1} 2i\lambda^n u} \left(u^{-\frac{k}{n}} \int_x^\infty p_k(t) dt - \int_x^{u+x} (u - t + x)^{-\frac{k}{n}} p_k(t) dt \right) du$$

halini alır. Yine (4.3) eşitliğinde

$$J_2 = (-1)^m \int_x^\infty \frac{e^{(-1)^{m+1} 2i\lambda^n(t-x)}}{2i\lambda^n} - 1 \sum_{k=0}^{n-1} \lambda^k p_k(t) \int_0^\infty K_m^+(t, \xi) e^{(-1)^{m+1} 2i\lambda^n \xi} d\xi dt$$

almak üzere (4.4) eşitliğinden J_2 için

$$\begin{aligned} J_2 &= \int_x^\infty \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\gamma_k^{(m)}}{\Gamma(1 - \frac{k}{n})} \int_0^\infty \left\{ \int_\xi^\infty (s - \xi)^{-\frac{k}{n}} e^{(-1)^{m+1} 2i\lambda^n(s-\xi)} ds \right. \\ &\quad \left. - \int_{\xi+t-x}^\infty (s - \xi - t + x)^{-\frac{k}{n}} e^{(-1)^{m+1} 2i\lambda^n(s-\xi)} ds \right\} p_k(t) K_m^+(t, \xi) d\xi dt \end{aligned}$$

yazılır. İki kez integrasyon sırasında değişim yapılarak aşağıdaki eşitlik yazılır.

$$J_2 = \int_0^\infty \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\gamma_k^{(m)}}{\Gamma(1 - \frac{k}{n})} e^{(-1)^m 2i\lambda^n s} \left\{ \int_x^\infty p_k(t) \int_0^s (s - \xi)^{-\frac{k}{n}} K_m^+(t, \xi) d\xi dt \right. \\ \left. - \int_x^{s+x} p_k(t) \int_0^{s+x-t} (s - \xi - t + x)^{-\frac{k}{n}} K_m^+(t, \xi) d\xi dt \right\} ds$$

Benzer şekilde

$$J_3 = (-1)^{m+1} i \int_x^\infty e^{(-1)^m 2i\lambda^n (t-x)} p_n(t) \int_0^\infty K_m(t, \xi) e^{(-1)^{2i\lambda^n} \xi} d\xi dt$$

alınır ve $u = t - x + \xi$ değişken değiştirilmesi yapılip integrasyon sırası değiştirilirse

$$J_3 = (-1)^{m+1} i \int_0^\infty e^{(-1)^m 2i\lambda^n u} \int_x^{u+x} p_n(t) K_m^+(t, u - t + x) dt du$$

eşitliği elde edilir. Son olarak

$$J_4 = (-1)^{m+1} i \int_x^\infty e^{(-1)^{m2i\lambda^n} (t-x)} p_n(t) dt$$

alınıp $t - x = u$ değişken değiştirilmesi yapılırsa

$$J_4 = (-1)^{m+1} i \int_0^\infty e^{(-1)^{m2i\lambda^n} u} p_n(u + x) du$$

elde edilir. J_1, J_3, J_4 integrallerinde u yerine t ve t yerine s , J_2 integralinde ise s yerine t ve t yerine s yazılırsa

$$\begin{aligned}
I = & \int_0^\infty e^{(-1)^m 2i\lambda^n t} \left\{ \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\gamma_k^{(m)}}{\Gamma(1 - \frac{k}{n})} \left(t^{-\frac{k}{n}} \int_x^\infty p_k(s) ds - \int_x^{t+x} (t-s+x)^{-\frac{k}{n}} p_k(s) ds \right. \right. \\
& - \int_x^{t+x} p_k(s) \int_0^{t+x-s} (t-\xi-s+x)^{-\frac{k}{n}} K_m^+(s, \xi) d\xi ds \\
& \left. \left. + \int_x^\infty p_k(s) \int_0^t (t-\xi)^{-\frac{k}{n}} K_m(s, \xi) d\xi ds \right) \right. \\
& \left. + i(-1)^{m+1} \int_x^{t+x} p_n(s) K_m^+(s, t-s+x) ds + i(-1)^{m+1} p_n(t+x) \right\} dt
\end{aligned}$$

olur.

$$\begin{aligned}
A(x, t) = & \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\gamma_k^{(m)}}{\Gamma(1 - \frac{k}{n})} \left\{ t^{-\frac{k}{n}} \int_x^\infty p_k(s) ds - \int_x^{t+x} (t-s+x)^{-\frac{k}{n}} p_k(s) ds \right. \\
& - \int_x^{t+x} p_k(s) \int_0^{t+x-s} (t-\xi-s+x)^{-\frac{k}{n}} K_m^+(s, \xi) d\xi ds \\
& \left. + \int_x^\infty p_k(s) \int_0^t (t-\xi)^{-\frac{k}{n}} K_m^+(s, \xi) d\xi ds \right\} \\
& + i(-1)^{m+1} \int_x^{t+x} p_n(s) K_m^+(s, t-s+x) ds + i(-1)^{m+1} p_n(t+x)
\end{aligned} \tag{4.5}$$

ile gösterilmek üzere (4.5) eşitliği

$$I = \int_0^\infty K_m^+(x, t) e^{(-1)^m 2i\lambda^n t} dt = \int_0^\infty A(x, t) e^{(-1)^m 2i\lambda^n t} dt$$

şeklinde yazılabilir. Bu durumda

$$\int_0^\infty [K_m^+(x, t) - A(x, t)] e^{(-1)^m 2i\lambda^n t} dt = 0$$

olur. Burada $K_m^+(x, t) - A(x, t) = C(x, t)$ ile gösterilmek üzere

$$\int_0^\infty C(x, t) e^{(-1)^m 2i\lambda^n t} dt = 0$$

elde edilir. $\tilde{C}(x, t)$

$$\tilde{C}(x, t) = \begin{cases} C(x, t) & , 0 < t < \infty \\ 0 & , -\infty < t \leq 0 \end{cases}$$

ile tanımlanmak üzere

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^\infty \tilde{C}(x, t) e^{(-1)^m 2i\lambda^n t} dt &= \int_{-\infty}^0 0 dt + \int_0^\infty C(x, t) e^{(-1)^m 2i\lambda^n t} dt \\ &= 0 \end{aligned}$$

olduğu görülür. $\int_{-\infty}^\infty \tilde{C}(x, t) e^{(-1)^m 2i\lambda^n t} dt$ ifadesi \tilde{C} fonksiyonunun Fourier dönüşümüdür. Fourier dönüşümü lineer ve birebir bir dönüşüm olduğundan ancak birim fonksiyonu birim fonksiyona dönüştürür. Bundan dolayıdır ki

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^\infty \tilde{C}(x, t) e^{(-1)^m 2i\lambda^n t} dt = 0 &\Leftrightarrow \tilde{C}(x, t) = 0 \\ &\Leftrightarrow C(x, t) = 0 \end{aligned}$$

Yani $K_m^+(x, t) - A(x, t) = 0$ olup $K_m^+(x, t) = A(x, t)$ olduğu görülür. O halde

$K_m^+(x, t)$ için

$$\begin{aligned}
 K_m^+(x, t) &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\gamma_k^{(m)}}{\Gamma(1 - \frac{k}{n})} \left\{ t^{\frac{-k}{n}} \int_x^\infty p_k(s) ds - \int_x^{t+x} (t-s+x)^{\frac{-k}{n}} p_k(s) ds \right. \\
 &\quad - \int_x^{t+x} p_k(s) \int_0^{t+x-s} (t-\xi-s+x)^{\frac{-k}{n}} K_m^+(s, \xi) d\xi ds \\
 &\quad \left. + \int_x^\infty p_k(s) \int_0^t (t-\xi)^{\frac{-k}{n}} K_m^+(s, \xi) d\xi ds \right\} \\
 &\quad + i(-1)^{m+1} \int_x^{t+x} p_n(s) K_m^+(s, t-s+x) ds + i(-1)^{m+1} p_n(t+x)
 \end{aligned} \tag{4.6}$$

eşitliği elde edilir.

Şimdi bize (4.6) integral denklemi hakkında bilgi verecek incelemeler yapalım. Aşağıdaki teoremede (4.6) integral denkleminin bir çözümünün olduğu ve bu çözümün tek olduğu gösterilecek ayrıca bu çözümün gerçeklediği bir eşitsizlik verilecektir.

Teorem 4.1. $\forall x \in [a, +\infty)$; ($a \in \mathbb{R}$) için (4.6) integral denkleminin çözümü vardır, tektir ve $K_m^+(x, .) \in L_1(0, \infty)$ olmak üzere

$$\|K_m^+\|_{(x)} \leq e^{\sigma^+(x)} - 1 \tag{4.7}$$

eşitsizliği gerçekleşir (Nabiev ve Guseinov 2006).

İspat : Bu teoremin ispatı için Ardisık Yaklaşımalar Yöntemi kullanılın. Bunun için $t > 0$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
 K_{m,0}^+(x, t) &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\gamma_k^{(m)}}{\Gamma(1 - \frac{k}{n})} \left(t^{\frac{-k}{n}} \int_x^\infty p_k(s) ds - \int_x^{t+x} (t-s+x)^{\frac{-k}{n}} p_k(s) ds \right) \\
 &\quad + i(-1)^{m+1} p_n(t+x)
 \end{aligned}$$

ve $j = 1, 2, \dots$ için

$$\begin{aligned} K_{m,j}^+(x, t) &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\gamma_k^{(m)}}{\Gamma(1 - \frac{k}{n})} \left\{ \int_x^\infty p_k(s) \int_0^t (t - \xi)^{\frac{-k}{n}} K_{m,j-1}^+(s, \xi) d\xi ds \right. \\ &\quad \left. - \int_x^{t+x} p_k(s) \int_0^{t+x-s} (t - \xi - s + x)^{\frac{-k}{n}} K_{m,j-1}^+(s, \xi) d\xi ds \right\} \\ &\quad + i(-1)^{m+1} \int_x^{t+x} p_n(s) K_{m,j-1}^+(s, t - s + x) ds \end{aligned} \quad (4.8)$$

alınsın. (4.8) eşitliğinin ilk integralinde integrasyon sırasında değiştirilme yapılsın ve $K_{m,j}^+(x, t)$ için aşağıdaki eşitlik kullanılarak işlemlere devam edilsin.

$$\begin{aligned} K_{m,j}^+(x, t) &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\gamma_k^{(m)}}{\Gamma(1 - \frac{k}{n})} \left\{ \int_0^t (t - \xi)^{\frac{-k}{n}} \int_{x+t-\xi}^\infty p_k(s) K_{m,j-1}^+(s, \xi) ds d\xi \right. \\ &\quad \left. + \int_0^t \int_x^{x+t-\xi} \left[(t - \xi)^{\frac{-k}{n}} - (t - \xi - s + x)^{\frac{-k}{n}} \right] p_k(s) K_{m,j-1}^+(s, \xi) ds d\xi \right\} \\ &\quad + i(-1)^{m+1} \int_x^{t+x} p_n(s) K_{m,j-1}^+(s, t - s + x) ds \end{aligned}$$

Amaç (4.6) integral denkleminin bir çözümü olduğunu göstermekti. Ele alınan bu yaklaşımlarla

$$K_m^+(x, .) = \sum_{j=0}^{\infty} K_{m,j}^+(x, t) \quad (4.9)$$

serisi oluşturulsun. Eğer bu serinin x ve t ye göre düzgün yakınsak olduğu gösterilirse bu seri (4.6) integral denkleminin bir çözümü olacaktır. Ve yine bu seriden yararlanılarak $K_m^+(x, .) \in L_1(0, \infty)$ olduğu ve (4.7) eşitsizliğinin gerçekleştiği gösterilecektir.

(4.9) serisinin x ve t ye göre düzgün yakınsak olduğunu göstermek için Weierstrass M-Testinden yararlanılacaktır. Bunun için $j = 0, 1, 2, \dots$ olmak üzere

$$\|K_{m,j}^+\|_{(x)} \leq \frac{\{\sigma^+(x)\}^{j+1}}{(j+1)!} \quad (4.10)$$

eşitsizliği kullanılacaktır. Bu nedenle işe (4.10) eşitsizliğinin gerçeklendiğini göstermekle başlayalım.

$$\begin{aligned} K_{m,0}^+(x,t) &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\gamma_k^{(m)}}{\Gamma(1 - \frac{k}{n})} \left(t^{\frac{-k}{n}} \int_x^\infty p_k(s) ds - \int_x^{t+x} (t-s+x)^{\frac{-k}{n}} p_k(s) ds \right) \\ &\quad + i(-1)^{m+1} p_n(t+x) \end{aligned}$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} \int_0^\infty |K_{m,0}^+(x,t)| dt &\leq \int_0^\infty \left| \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\gamma_k^{(m)}}{\Gamma(1 - \frac{k}{n})} \left(t^{\frac{-k}{n}} \int_x^\infty p_k(s) ds - \int_x^{t+x} (t-s+x)^{\frac{-k}{n}} p_k(s) ds \right) \right| dt \\ &\quad + \int_0^\infty |p_n(t+x)| dt \\ &\leq \int_0^\infty \sum_{k=0}^{n-1} \frac{2^{-\frac{k}{n}}}{\Gamma(1 - \frac{k}{n})} \left\{ \int_{x+t}^\infty t^{\frac{-k}{n}} |p_k(s)| ds \right. \\ &\quad \left. + \int_x^{t+x} \left| t^{\frac{-k}{n}} - (t-s+x)^{\frac{-k}{n}} \right| |p_k(s)| ds \right\} dt \\ &\quad + \int_0^\infty |p_n(t+x)| dt \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Burada

$$I_1 = \frac{1}{2} \int_0^\infty \left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{2^{1-\frac{k}{n}}}{\Gamma(2 - \frac{k}{n})} t^{\frac{-k}{n}} \int_{x+t}^\infty |p_k(s)| ds + |p_n(t+x)| \right) dt$$

almak üzere

$$I_1 \leq \frac{1}{2} \int_0^\infty \left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{2^{1-\frac{k}{n}}}{\Gamma(2 - \frac{k}{n})} \int_{x+t}^\infty |s-x-t|^{-\frac{k}{n}} |p_k(s)| ds + |p_n(t+x)| \right) dt$$

olup

$$\begin{aligned}\frac{d\sigma^+(x+t)}{dt} &= - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{2^{1-\frac{k}{n}}}{\Gamma(1-\frac{k}{n})} \left(1-\frac{k}{n}\right) \int_{x+t}^{\infty} |s-x-t|^{-\frac{k}{n}} |p_k(s)| ds \\ &\quad - |p_n(t+x)|\end{aligned}$$

eşitliğinden yararlanılırsa

$$\begin{aligned}I_1 &\leq -\frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{d\sigma^+(x+t)}{dt} dt \\ &= -\frac{1}{2} \int_0^{\infty} d\sigma^+(x+t) \\ &= -\lim_{v \rightarrow +\infty} \left(\frac{\sigma^+(x+v) - \sigma^+(x)}{2} \right) \\ &= \frac{\sigma^+(x)}{2}\end{aligned}$$

elde edilir. Benzer şekilde

$$\begin{aligned}I_2 &= \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{2^{-\frac{k}{n}}}{\Gamma(1-\frac{k}{n})} \int_x^{t+x} \left| t^{\frac{-k}{n}} - (t-s+x)^{\frac{-k}{n}} \right| |p_k(s)| ds dt \\ &= \frac{1}{2} \int_x^{\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{2^{-\frac{k}{n}}}{\Gamma(1-\frac{k}{n})} \int_{s-x}^{\infty} \left((t-s+x)^{\frac{-k}{n}} - t^{\frac{-k}{n}} \right) |p_k(s)| dt ds \\ &= \frac{1}{2} \int_x^{\infty} |p_k(s)| \lim_{v \rightarrow +\infty} \left(\frac{(x-s+v)^{1-\frac{k}{n}} - v^{1-\frac{k}{n}} + (s-x)^{1-\frac{k}{n}}}{1-\frac{k}{n}} \right) ds \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} \int_x^{\infty} (s-x)^{1-\frac{k}{n}} |p_k(s)| ds + \int_x^{\infty} |p_n(s)| ds \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^n \int_x^{\infty} (s-x)^{1-\frac{k}{n}} |p_k(s)| ds \\ &= \frac{\sigma^+(x)}{2}\end{aligned}$$

olup

$$\begin{aligned} \int_0^\infty |K_{m,0}^+(x,t)| dt &\leq I_1 + I_2 \\ &= \sigma^+(x) \end{aligned}$$

elde edilir. $\sigma^+(x) < \infty$ olduğundan $\int_0^\infty |K_{m,0}^+(x,t)| dt < \infty$ olur. O halde

$$K_{m,0}^+(x,t) \in L_1(0, \infty)$$

olduğu görülür. Bu durumda $K_{m,0}^+$ fonksiyonunun t ye göre normundan bahsedilebilir ki buradan $\|K_{m,0}^+\|_{(x)} \leq \sigma^+(x)$ eşitsizliğinin gerçekleştiği görülür.

Şimdi $j - 1$ için

$$\|K_{m,j-1}^+\|_{(x)} \leq \frac{\{\sigma^+(x)\}^j}{j!}$$

olduğu kabul edilsin.

$$\begin{aligned} K_{m,j}^+(x,t) &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\gamma_k^{(m)}}{\Gamma(1 - \frac{k}{n})} \left\{ \int_0^t (t - \xi)^{\frac{-k}{n}} \int_{x+t-\xi}^\infty p_k(s) K_m^+(s, \xi) ds d\xi \right. \\ &\quad \left. + \int_0^t \int_x^{x+t-\xi} \left[(t - \xi)^{\frac{-k}{n}} - (t - \xi - s + x)^{\frac{-k}{n}} \right] p_k(s) K_m^+(s, \xi) ds d\xi \right\} \\ &\quad + i(-1)^{m+1} \int_x^{t+x} p_n(s) K_m^+(s, t - s + x) ds \end{aligned}$$

olmak üzere

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty |K_{m,j}^+(x,t)| dt &\leq \int_0^\infty \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\gamma_k^{(m)}}{\Gamma(1-\frac{k}{n})} \left\{ \int_0^t (t-\xi)^{\frac{-k}{n}} \int_{x+t-\xi}^\infty |p_k(s)| \right. \\
&\quad \times |K_{m,j-1}^+(s,\xi)| ds d\xi \Big\} dt \\
&\quad \int_0^\infty \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\gamma_k^{(m)}}{\Gamma(1-\frac{k}{n})} \int_0^t \int_x^{x+t-\xi} \left[(t-\xi-s+x)^{\frac{-k}{n}} - (t-\xi)^{\frac{-k}{n}} \right] \\
&\quad \times (|p_k(s)| |K_{m,j-1}^+(s,\xi)|) ds d\xi dt \\
&\quad \int_0^\infty \int_x^{t+x} |p_n(s)| |K_{m,j-1}^+(s,t-s+x)| ds dt
\end{aligned} \tag{4.11}$$

olur. Burada

$$I_1 = \int_0^\infty \sum_{k=0}^{n-1} \frac{2^{-\frac{k}{n}}}{\Gamma(1-\frac{k}{n})} \int_0^t (t-\xi)^{\frac{-k}{n}} \int_{x+t-\xi}^\infty |p_k(s)| |K_{m,j-1}^+(s,\xi)| ds d\xi dt$$

almak üzere integrasyon sırasında değişim yapılrsa

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_0^\infty \sum_{k=0}^{n-1} \frac{2^{-\frac{k}{n}}}{\Gamma(1-\frac{k}{n})} \int_\xi^\infty (t-\xi)^{\frac{-k}{n}} \int_{x+t-\xi}^\infty |p_k(s)| |K_{m,j-1}^+(s,\xi)| ds dt d\xi \\
&= \int_0^\infty \sum_{k=0}^{n-1} \frac{2^{-\frac{k}{n}}}{\Gamma(1-\frac{k}{n})} \int_x^\infty |p_k(s)| |K_{m,j-1}^+(s,\xi)| \int_\xi^{s-x+\xi} (t-\xi)^{\frac{-k}{n}} dt ds d\xi
\end{aligned}$$

elde edilir. En içteki integral hesaplanırsa

$$I_1 = \int_0^\infty \sum_{k=0}^{n-1} \frac{2^{-\frac{k}{n}}}{\Gamma(1-\frac{k}{n})} \int_x^\infty \frac{(s-x)^{1-\frac{k}{n}} |p_k(s)| |K_m^+(s,\xi)|}{1-\frac{k}{n}} ds d\xi$$

olur. İntegrasyon sırasında tekrar değiştirilme yapılır ve $\Gamma(1-\frac{k}{n})(1-\frac{k}{n}) = \Gamma(2-\frac{k}{n})$

olduğu göz önünde bulundurulursa

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_x^{\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{2^{-\frac{k}{n}}}{\Gamma(2 - \frac{k}{n})} (s-x)^{1-\frac{k}{n}} |p_k(s)| \int_0^{\infty} |K_{m,j-1}^+(s, \xi)| d\xi ds \\ &= \int_x^{\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{2^{-\frac{k}{n}}}{\Gamma(2 - \frac{k}{n})} (s-x)^{1-\frac{k}{n}} |p_k(s)| \|K_{m,j-1}^+\|_{(s)} ds \end{aligned}$$

elde edilir. Yine (4.1.11) eşitsizliğinde

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_0^{\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{2^{-\frac{k}{n}}}{\Gamma(1 - \frac{k}{n})} \int_0^t \int_x^{x+t-\xi} \left[(t-\xi-s+x)^{-\frac{k}{n}} - (t-\xi)^{-\frac{k}{n}} \right] \\ &\quad \times |p_k(s)| |K_{m,j-1}^+(s, \xi)| ds d\xi dt \end{aligned}$$

almış integrasyon sırasında iki kez değişim yapılrsa

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_0^{\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{2^{-\frac{k}{n}}}{\Gamma(1 - \frac{k}{n})} \int_{\xi}^{\infty} \int_x^{x+t-\xi} \left[(t-\xi-s+x)^{-\frac{k}{n}} - (t-\xi)^{-\frac{k}{n}} \right] \\ &\quad \times |p_k(s)| |K_{m,j-1}^+(s, \xi)| ds dt d\xi \\ &= \int_0^{\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{2^{-\frac{k}{n}}}{\Gamma(1 - \frac{k}{n})} \int_x^{\infty} |p_k(s)| |K_{m,j-1}^+(s, \xi)| \\ &\quad \times \int_{s-x+\xi}^{\infty} \left[(t-\xi-s+x)^{-\frac{k}{n}} - (t-\xi)^{-\frac{k}{n}} \right] dt ds d\xi \end{aligned}$$

elde edilir. En içteki integral hesaplanırsa

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_0^{\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{2^{-\frac{k}{n}}}{\Gamma(1 - \frac{k}{n})} \int_x^{\infty} \frac{(s-x)^{1-\frac{k}{n}}}{1-\frac{k}{n}} |p_k(s)| |K_{m,j-1}^+(s, \xi)| ds d\xi \\ &= \int_x^{\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{2^{-\frac{k}{n}}}{\Gamma(2 - \frac{k}{n})} (s-x)^{1-\frac{k}{n}|p_k(s)|} \int_0^{\infty} |K_{m,j-1}^+(s, \xi)| d\xi ds \\ &= \int_x^{\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{2^{-\frac{k}{n}}}{\Gamma(2 - \frac{k}{n})} (s-x)^{1-\frac{k}{n}} |p_k(s)| \|K_{m,j-1}^+\|_{(s)} ds \end{aligned}$$

olur. Son olarak

$$I_3 = \int_0^\infty \int_x^{t+x} |p_n(s)| |K_{m,j-1}^+(s, t-s+x)| ds dt$$

almış integrasyon sırasında değişim yapılsırsa

$$I_3 = \int_x^\infty \int_{s-x}^\infty |p_n(s)| |K_{m,j-1}^+(s, t-s+x)| dt ds$$

olup, $t = \omega + s - x$ değişken değiştirmesi yapılsırsa

$$\begin{aligned} I_3 &= \int_x^\infty |p_n(s)| \int_0^\infty |K_{m,j-1}^+(s, \omega)| d\omega ds \\ &= \int_x^\infty |p_n(s)| \|K_{m,j-1}\|_{(s)} ds \end{aligned}$$

elde edilir. Tüm bu işlemlerden sonra $\|K_{m,j-1}^+\|_{(x)} \leq \frac{\{\sigma^+(x)\}^j}{j!}$ kabulünden

$$\begin{aligned} \int_0^\infty |K_{m,j}^+(x, t)| dt &\leq \int_x^\infty \sum_{k=0}^{n-1} \frac{2^{-\frac{k}{n}}}{\Gamma(2 - \frac{k}{n})} (s-x)^{1-\frac{k}{n}} |p_k(s)| \|K_{m,j-1}^+\|_{(s)} ds \quad (4.12) \\ &\quad + \int_x^\infty \sum_{k=0}^{n-1} \frac{2^{-\frac{k}{n}}}{\Gamma(2 - \frac{k}{n})} (s-x)^{1-\frac{k}{n}} |p_k(s)| \|K_{m,j-1}^+\|_{(s)} ds \\ &\quad + \int_x^\infty |p_n(s)| \|K_{m,j-1}^+\|_{(s)} ds \\ &= \int_x^\infty \sum_{k=0}^{n-1} \frac{2^{1-\frac{k}{n}}}{\Gamma(2 - \frac{k}{n})} (s-x)^{1-\frac{k}{n}} |p_k(s)| \|K_{m,j-1}^+\|_{(s)} ds \\ &\quad + \int_x^\infty |p_n(s)| \|K_{m,j-1}^+\|_{(s)} ds \\ &= \int_x^\infty \sum_{k=0}^n \frac{2^{1-\frac{k}{n}}}{\Gamma(2 - \frac{k}{n})} (s-x)^{1-\frac{k}{n}} |p_k(s)| \|K_{m,j-1}^+\|_{(s)} ds \end{aligned}$$

$$= \int_x^\infty \sum_{k=0}^n \frac{2^{1-\frac{k}{n}}}{\Gamma(2-\frac{k}{n})} (s-x)^{1-\frac{k}{n}} |p_k(s)| \frac{\{\sigma(s)\}^j}{j!} ds$$

elde edilir. Burada

$$\int_x^\infty \sum_{k=0}^n \frac{2^{1-\frac{k}{n}}}{\Gamma(2-\frac{k}{n})} (s-x)^{1-\frac{k}{n}} |p_k(s)| \frac{\{\sigma^+(s)\}^j}{j!} ds = S$$

ile gösterilmek üzere

$$(s-x)^{1-\frac{k}{n}} = \int_x^s (1 - \frac{k}{n})(s-\eta)^{-\frac{k}{n}} d\eta$$

eşitliğinden yararlanılırsa

$$S = \int_x^\infty \sum_{k=0}^n \frac{2^{1-\frac{k}{n}}}{\Gamma(2-\frac{k}{n})} \int_x^s (1 - \frac{k}{n})(s-\eta)^{-\frac{k}{n}} |p_k(s)| \frac{\{\sigma^+(s)\}^j}{j!} d\eta ds$$

olur, integrasyon sırası değiştirilirse

$$S = \int_x^\infty \sum_{k=0}^n \frac{2^{1-\frac{k}{n}}}{\Gamma(2-\frac{k}{n})} \int_\eta^\infty (1 - \frac{k}{n})(s-\eta)^{-\frac{k}{n}} |p_k(s)| \frac{\{\sigma^+(s)\}^j}{j!} ds d\eta$$

olur. σ^+ fonksiyonu artmayan fonksiyon olduğundan alt sınırla en büyük değerini alacaktır, bu durumda

$$\begin{aligned} S &\leq \int_x^\infty \frac{\{\sigma^+(\eta)\}^j}{j!} \sum_{k=0}^n \frac{2^{1-\frac{k}{n}}}{\Gamma(2-\frac{k}{n})} \int_\eta^\infty (1 - \frac{k}{n})(s-\eta)^{-\frac{k}{n}} |p_k(s)| ds d\eta \\ &= - \int_x^\infty \frac{\{\sigma^+(\eta)\}^j}{j!} \frac{d\sigma^+(\eta)}{d\eta} d\eta \\ &= - \int_x^\infty \frac{\{\sigma^+(\eta)\}^j}{j!} d\sigma^+(\eta) \\ &= \frac{\{\sigma^+(x)\}^{j+1}}{(j+1)!} \end{aligned}$$

elde edilir. O halde (4.12) eşitsizliği

$$\int_0^\infty |K_{m,j}^+(x,t)| dt \leq \frac{\{\sigma^+(x)\}^{j+1}}{(j+1)!} \quad (4.13)$$

şeklini alır. $\sigma^+(x) < \infty$ olduğundan $\int_0^\infty |K_{m,j}^+(x,t)| dt < \infty$ olacaktır. Dolayısıyla $j = 0, 1, 2, \dots$ için $K_{m,j}^+(x,.) \in L_1(0, \infty)$ olur ki bu durumda $K_{m,j}^+$ fonksiyonlarının t ye göre normu mevcuttur. O halde (4.13) eşitsizliğinden $t > 0$ ve $\forall x \in a, +\infty$; ($a \in \mathbb{R}$) için

$$\|K_{m,j}^+\|_{(x)} \leq \frac{\{\sigma^+(x)\}^{j+1}}{(j+1)!} \quad ; \quad j = 0, 1, 2, \dots$$

elde edilir. σ^+ artmayan fonksiyon olduğundan $a < x$ iken $\sigma^+(a) \geq \sigma^+(x)$ olacağını dan

$$\begin{aligned} \|K_{m,j}^+\|_{(x)} &\leq \frac{\{\sigma^+(x)\}^{j+1}}{(j+1)!} \\ &\leq \frac{\{\sigma^+(a)\}^{j+1}}{(j+1)!} \end{aligned}$$

olur ve

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{\{\sigma^+(a)\}^{j+1}}{(j+1)!} = e^{\sigma^+(a)} - 1$$

olup $e^{\sigma^+(a)} - 1 < \infty$ olduğundan Weierstrass M Testi gereğince $\sum_{j=0}^{\infty} K_{m,j}^+(x, t)$ serisi t ye ve x e göre düzgün yakınsaktır. O halde (4.6) denklemının bir çözümü vardır ve bu çözüm tektir.

Şimdi gerçekten (4.9) serisinin (4.6) denkleminin bir çözüm olduğu gösterilsin.

$$\begin{aligned}
K_m^+(x, t) &= K_{m,0}^+(x, t) + \sum_{j=1}^{\infty} K_{m,j}^+(x, t) \\
&= K_{m,0}^+(x, t) \\
&\quad + \sum_{j=1}^{\infty} \left\{ \sum_{k=0}^{n-1} \frac{2^{-\frac{k}{n}}}{\Gamma(2 - \frac{k}{n})} \left[\int_x^{\infty} \int_0^t (t - \xi)^{-\frac{k}{n}} p_k(s) K_{m,j-1}^+(s, \xi) d\xi ds \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \int_x^{t+xt+x-s} \int_0^{t+xt+x-s} (t - \xi - s + x)^{-\frac{k}{n}} p_k(s) K_{m,j-1}^+(s, \xi) d\xi ds \right] \right. \\
&\quad \left. + i(-1)^{m+1} \int_x^{t+x} p_n(s) K_{m,j-1}^+(s, t - s + x) ds \right\}
\end{aligned}$$

olup (4.9) serisi x e ve t ye göre düzgün yakınsak olduğundan seri ile integrallerin yerleri değiştirilebileceğinden

$$\begin{aligned}
K_m^+(x, t) &= K_{m,0}^+(x, t) \\
&\quad + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{2^{-\frac{k}{n}}}{\Gamma(2 - \frac{k}{n})} \left\{ \int_x^{\infty} \int_0^t (t - \xi)^{-\frac{k}{n}} p_k(s) \sum_{j=1}^{\infty} K_{m,j-1}^+(s, \xi) d\xi ds \right. \\
&\quad \left. - \int_x^{t+xt+x-s} \int_0^{t+xt+x-s} (t - \xi - s + x)^{-\frac{k}{n}} p_k(s) \sum_{j=1}^{\infty} K_{m,j-1}^+(s, \xi) d\xi ds \right\} \\
&\quad + i(-1)^{m+1} \int_x^{t+x} p_n(s) \sum_{j=1}^{\infty} K_{m,j-1}^+(s, t - s + x) ds \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \left\{ \frac{\gamma_k^{(m)}}{\Gamma(1 - \frac{k}{n})} t^{-\frac{k}{n}} \int_x^{\infty} p_k(s) ds - \int_x^{t+x} (t - s + x)^{-\frac{k}{n}} p_k(s) ds \right. \\
&\quad \left. + \int_x^{\infty} \int_0^t (t - \xi)^{-\frac{k}{n}} p_k(s) K_m^+(s, \xi) d\xi ds \right. \\
&\quad \left. - \int_x^{t+xt+x-s} \int_0^{t+xt+x-s} (t - \xi - s + x)^{-\frac{k}{n}} p_k(s) K_m^+(s, \xi) d\xi ds \right\} \\
&\quad + i(-1)^{m+1} \int_x^{t+x} p_n(s) \sum_{j=1}^{\infty} K_{m,j-1}^+(s, t - s + x) ds + i(-1)^{m+1} p_n(t + x)
\end{aligned}$$

elde edilir ki bu da (4.9) serisinin (4.6) denkleminin çözümü olduğunu gösterir. Son olarak yine (4.9) serisinden yararlanarak (4.7) eşitsizliğinin gerçeklendiği gösterilsin.

$$K_m^+(x, t) = \sum_{j=1}^{\infty} K_{m,j}^+(x, t)$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} \|K_m^+\|_{(x)} &= \int_0^{\infty} |K_m^+(x, t)| dt \\ &= \int_0^{\infty} \left| \sum_{j=0}^{\infty} K_{m,j}^+(x, t) \right| dt, \end{aligned}$$

olup üçgen eşitsizliğinden yararlanılırsa

$$\|K_m^+\|_{(x)} \leq \int_0^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} |K_{m,j}^+(x, t)| dt$$

elde edilir. $\sum_{j=0}^{\infty} K_{m,j}^+(x, t)$ serisinin düzgün yakınsaklığından ve $\|K_{m,j}^+\|_{(x)} \leq \frac{\sigma^{j+1}(x)}{(j+1)!}$ eşitsizliğinden faydalansırsa

$$\begin{aligned} \|K_m^+\|_{(x)} &\leq \sum_{j=0}^{\infty} \int_0^{\infty} |K_{m,j}^+(x, t)| dt \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \|K_{m,j}^+\|_{(x)} \\ &\leq \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\{\sigma^+(x)\}^{j+1}}{(j+1)!} \\ &= e^{\sigma^+(x)} - 1 \end{aligned}$$

elde edilir.

Şimdi çekirdek fonksiyonunun x e göre türevlenebilir olduğunu gösteren teorem verilsin.

Theorem 4.2. $\forall x \in \mathbb{R}, D_x K_m^+(x, \cdot) \in L_1(0, \infty)$ olup

$$\begin{aligned}\sigma_1^+(x) &= \int_x^\infty \left[|q_0(t)| + \frac{1}{4} |q_n^2(t)| + \frac{1}{2} |q'_n(t)| \right] dt \\ &+ \sum_{k=0}^n \frac{2^{1-\frac{k}{n}}}{\Gamma(2 - \frac{k}{n})} \int_x^\infty |t-x|^{1-\frac{k}{n}} |q'_k(t)| dt\end{aligned}$$

ile gösterilmek üzere

$$\|D_x K_m^+\|_{(x)} \leq \sigma_1^+(x)(1 + \sigma^+(x))e^{\sigma^+(x)}$$

eşitsizliği gerçekleşir (Nabiev ve Guseinov 2006).

İspat : Çekirdek fonksiyonunun $K_m^+(x, t) = \sum_{j=0}^\infty K_{m,j}^+(x, t)$ şeklinde yazılabildiği gösterildi. Şimdi bu eşitlik kullanılarak; eğer $\forall j$ için $D_x K_{m,j}^+(x, t)$ türevinin mevcut olduğu gösterilir ve bu türevlerden oluşan $\sum_{j=0}^\infty D_x K_{m,j}^+(x, t)$ serisinin yakınsak olduğu gösterilirse $D_x K_m^+(x, t)$ türevinin mevcut olduğu ispatlanır. O halde öncelikle $\forall j$ için $D_x K_{m,j}^+(x, t)$ türevlerinin mevcut olduğu gösterilsin. Öncelikle $j = 0$ için

$$\begin{aligned}K_{m,0}^+(x, t) &= \int_x^\infty p_0(s) ds - \int_x^{x+t} p_0(s) ds \\ &+ \sum_{k=0}^n \frac{2^{1-\frac{k}{n}}}{\Gamma(2 - \frac{k}{n})} \left\{ t^{-\frac{k}{n}} \int_x^\infty p_k(s) ds - \int_x^{x+t} (x+t-s)^{-\frac{k}{n}} p_k(s) ds \right\} \\ &+ i(-1)^{m+1} p_n(x+t)\end{aligned}$$

olmak üzere toplamın içindeki integralde $x+t-s=u$ değişken değişimi yapılırsa

$$\begin{aligned}K_{m,0}^+(x, t) &= \int_x^\infty p_0(s) ds - \int_x^{x+t} p_0(s) ds \\ &+ \sum_{k=0}^n \frac{\gamma_k^{(m)}}{\Gamma(1 - \frac{k}{n})} \left\{ -t^{-\frac{k}{n}} \int_t^{-\infty} p_k(x+t-u) du + \int_t^0 u^{-\frac{k}{n}} p_k(x+t-u) du \right\} \\ &+ i(-1)^{m+1} p_n(x+t)\end{aligned}$$

olur. Bu haliyle x e göre türev alınırsa ve tekrar $x + t - s = u$ değişken değişimi yapılırsa

$$\begin{aligned}
D_x K_{m,0}^+(x, t) &= -p_0(x) - p_0(x + t) + p_0(x) \\
&\quad + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\gamma_k^{(m)}}{\Gamma(1 - \frac{k}{n})} \left\{ -t^{-\frac{k}{n}} \int_t^{-\infty} p'_k(x + t - u) du + \int_t^0 u^{-\frac{k}{n}} p'_k(x + t - u) du \right\} \\
&\quad + i(-1)^{m+1} p'_n(x + t) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\gamma_k^{(m)}}{\Gamma(1 - \frac{k}{n})} \left\{ t^{-\frac{k}{n}} \int_{x+t}^{\infty} p'_k(s) ds + \int_x^{x+t} \left[t^{-\frac{k}{n}} - (x + t - s)^{-\frac{k}{n}} \right] p'_k(s) ds \right\} \\
&\quad - p_0(x + t) + i(-1)^{m+1} p'_n(x + t)
\end{aligned}$$

elde edilir.

$$\begin{aligned}
K_{m,j}^+(x, t) &= \int_0^t \int_{x+t-\xi}^{\infty} p_0(s) K_{m,j-1}^+(s, \xi) ds d\xi \\
&\quad + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\gamma_k^{(m)}}{\Gamma(1 - \frac{k}{n})} \left\{ \int_0^t (t - \xi)^{-\frac{k}{n}} \int_{x+t-\xi}^{\infty} p_k(s) K_{m,j-1}^+(s, \xi) ds d\xi \right. \\
&\quad \left. + \int_0^t \int_x^{x+t-\xi} \left[(t - \xi)^{-\frac{k}{n}} - (t - \xi - s + x)^{-\frac{k}{n}} \right] p_k(s) K_{m,j-1}^+(s, \xi) ds d\xi \right\} \\
&\quad + i(-1)^{m+1} \int_x^{t+x} p_n(s) K_{m,j-1}^+(s, t - s + x) ds
\end{aligned}$$

olmak üzere ilk integral hariç diğer tüm integrallerde $x + t - s = u$ değişken değişimi

yapılırsa

$$\begin{aligned}
K_{m,j}^+(x,t) &= \int_0^t \int_{x+t-\xi}^\infty p_0(s) K_{m,j-1}^+(s,\xi) ds d\xi \\
&\quad + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\gamma_k^{(m)}}{\Gamma(1 - \frac{k}{n})} \left\{ - \int_0^t \int_\xi^{-\infty} (t-\xi)^{\frac{-k}{n}} p_k(x+t-u) K_{m,j-1}^+(x+t-u,\xi) du d\xi \right. \\
&\quad \left. - \int_0^t \int_t^\xi [(t-\xi)^{\frac{-k}{n}} - (u-\xi)^{\frac{-k}{n}}] p_k(x+t-u) K_{m,j-1}^+(x+t-u,\xi) du d\xi \right\} \\
&\quad + i(-1)^{m+1} \int_t^0 p_n(x+t-u) K_{m,j-1}^+(x+t-u,u) du
\end{aligned}$$

olur. Bu haliyle x e göre türev alınırsa

$$\begin{aligned}
D_x K_{m,j}^+(x,t) &= - \int_0^t p_0(x+t-\xi) K_{m,j-1}^+(x+t-\xi,\xi) d\xi \\
&\quad + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\gamma_k^{(m)}}{\Gamma(1 - \frac{k}{n})} \left\{ - \int_0^t \int_\xi^{-\infty} (t-\xi)^{\frac{-k}{n}} [p'_k(x+t-u) K_{m,j-1}^+(x+t-u,\xi) \right. \\
&\quad \left. + p_k(x+t-u) D_x K_{m,j-1}^+(x+t-u,\xi)] du d\xi \right. \\
&\quad \left. - \int_0^t \int_t^\xi [(t-\xi)^{\frac{-k}{n}} - (u-\xi)^{\frac{-k}{n}}] \right. \\
&\quad \times [p'_k(x+t-u) K_{m,j-1}^+(x+t-u,\xi) \\
&\quad \left. + p_k(x+t-u) D_x K_{m,j-1}^+(x+t-u,\xi)] du d\xi \right\} \\
&\quad + i(-1)^m \int_t^0 [p'_n(x+t-u) K_{m,j-1}^+(x+t-u,u) \\
&\quad + p_n(x+t-u) D_x K_{m,j-1}^+(x+t-u,u)] du
\end{aligned}$$

olur. İlk integralde $x+t-\xi = s$ ve diğer integrallerde $x+t-u=s$ değişken değişimi

yapılırsa

$$\begin{aligned}
D_x K_{m,j}^+(x, t) &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\gamma_k^{(m)}}{\Gamma(1 - \frac{k}{n})} \left\{ \int_0^t \int_{x+t-\xi}^\infty (t-\xi)^{\frac{-k}{n}} \right. \\
&\quad \times [p'_k(s) K_{m,j-1}(s, \xi) + p_k(s) D_x K_{m,j-1}^+(s, \xi)] ds d\xi \\
&\quad + \int_0^t \int_x^{x+t-\xi} [(t-\xi)^{\frac{-k}{n}} - (x+t-s-\xi)^{\frac{-k}{n}}] \\
&\quad \times [p'_k(s) K_{m,j-1}(s, \xi) + p_k(s) D_x K_{m,j-1}^+(s, \xi)] ds d\xi \Big\} \\
&\quad + i(-1)^{m+1} \int_x^{x+t} [p'_n(s) K_{m,j-1}^+(s, x+t-s) \\
&\quad + p_n(s) D_x K_{m,j-1}^+(s, x+t-s)] ds \\
&\quad - \int_x^{x+t} p_0(s) K_{m,j-1}^+(s, x+t-\xi) ds
\end{aligned}$$

elde edilir.

Şimdi $\sum_{j=0}^{\infty} D_x K_{m,j}^+(x, t)$ serisinin yakınsak olduğunu göstermek için kullanılacak olan

$$\|D_x K_{m,j}^+\|_{(x)} \leq (j+1) \frac{\{\sigma^+(x)\}^j}{j!} \sigma_1^+(x)$$

eşitsizliğinin gerçeklendiğini gösterelim.

$$\begin{aligned}
D_x K_{m,0}^+(x, t) &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\gamma_k^{(m)}}{\Gamma(1 - \frac{k}{n})} \left\{ t^{-\frac{k}{n}} \int_{x+t}^\infty p'_k(s) ds \right. \\
&\quad + \int_x^{x+t} \left[t^{-\frac{k}{n}} - (x+t-s)^{-\frac{k}{n}} \right] p'_k(s) ds \Big\} \\
&\quad - p_0(x+t) + i(-1)^{m+1} p'_n(x+t)
\end{aligned} \tag{4.14}$$

olmak üzere bu eşitliğin her iki tarafının mutlak değeri alıp $[0, \infty)$ aralığı üzerinde

integralleňirse

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty |D_x K_{m,0}^+(x,t)| dt &\leq \int_0^\infty \sum_{k=0}^{n-1} \frac{2^{-\frac{k}{n}}}{\Gamma(1-\frac{k}{n})} \left\{ t^{-\frac{k}{n}} \int_{x+t}^\infty |p'_k(s)| ds \right. \\
&\quad \left. + \int_x^{x+t} \left| t^{-\frac{k}{n}} - (x+t-s)^{-\frac{k}{n}} \right| |p'_k(s)| ds \right\} dt \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{2^{-\frac{k}{n}}}{\Gamma(1-\frac{k}{n})} \left\{ \int_0^\infty \int_{x+t}^\infty t^{-\frac{k}{n}} |p'_k(s)| ds \right. \\
&\quad \left. + \int_x^{x+t} \left(t^{-\frac{k}{n}} - (x+t-s)^{-\frac{k}{n}} \right) |p'_k(s)| ds \right\} dt \\
&\quad - \int_x^\infty |p'_0(s)| ds + i(-1)^m \int_x^\infty |p'_n(x+t)| dt
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Bu eşitsizlikte toplamın içindeki integrallerde integrasyon sırasında değişim yapılrsa

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty |D_x K_{m,0}^+(x,t)| dt &= \int_0^\infty |p_0(s)| ds + \sum_{k=0}^n \frac{2^{1-\frac{k}{n}}}{\Gamma(2-\frac{k}{n})} (s-x)^{1-\frac{k}{n}} |p'_k(s)| ds \\
&= \sigma_1^+(x)
\end{aligned}$$

bulunur. $\sigma_1^+(x) < \infty$ olduğundan $K_{m,0}^+(x,t) \in L_1(0,\infty)$ olur. O halde $K_{m,0}^+$ fonksiyonunun $L_1(0,\infty)$ uzayında t ye göre normu mevcut olup

$$\|D_x K_{m,0}^+\|_{(x)} \leq \sigma_1^+(x)$$

elde edilir.

$$\begin{aligned}
D_x K_{m,j}^+(x,t) &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\gamma_k^{(m)}}{\Gamma(1 - \frac{k}{n})} \left\{ \int_0^t \int_{x+t-\xi}^\infty (t-\xi)^{\frac{-k}{n}} \right. \\
&\quad \times [p'_k(s) K_{m,j-1}(s, \xi) + p_k(s) D_x K_{m,j-1}^+(s, \xi)] ds d\xi \\
&\quad + \int_0^t \int_x^{x+t-\xi} [(t-\xi)^{\frac{-k}{n}} - (x+t-s-\xi)^{\frac{-k}{n}}] \\
&\quad \times [p'_k(s) K_{m,j-1}(s, \xi) + p_k(s) D_x K_{m,j-1}^+(s, \xi)] ds d\xi \Big\} \\
&\quad + i(-1)^{m+1} \int_x^{x+t} [p'_n(s) K_{m,j-1}^+(s, x+t-s) \\
&\quad + p_n(s) D_x K_{m,j-1}^+(s, x+t-s)] ds \\
&\quad - \int_x^{x+t} p_0(s) K_{m,j-1}^+(s, x+t-\xi) ds
\end{aligned}$$

olmak üzere eşitliğinin her iki tarafının mutlak değeri alınıp, $[0, \infty)$ üzerinde integrallenir ve gerekli küçültmeler yapılırsa

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty |D_x K_{m,j}^+(x, t)| dt &\leq \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\gamma_k^{(m)}}{\Gamma(1 - \frac{k}{n})} \left\{ \int_0^\infty \int_0^t \int_{x+t-\xi}^\infty (t-\xi)^{\frac{-k}{n}} \right. \\
&\quad \times [|p'_k(s)| |K_{m,j-1}^+(s, \xi)| + |p_k(s)| |D_x K_{m,j-1}^+(s, \xi)|] ds d\xi \\
&\quad + \int_0^\infty \int_0^t \int_x^{x+t-\xi} \left| (t-\xi)^{\frac{-k}{n}} - (x+t-s-\xi)^{\frac{-k}{n}} \right| \\
&\quad \times [|p'_k(s)| |K_{m,j-1}^+(s, \xi)| + |p_k(s)| |D_x K_{m,j-1}^+(s, \xi)|] ds d\xi \Big\} \\
&\quad + \int_0^\infty \int_x^{x+t} [|p'_n(s)| |K_{m,j-1}^+(s, x+t-s)| \\
&\quad + |p_n(s)| |D_x K_{m,j-1}^+(s, x+t-s)|] ds \\
&\quad + \int_0^\infty \int_x^{x+t} |p_0(s)| |K_{m,j-1}^+(s, x+t-\xi)| ds
\end{aligned}$$

elde edilir. İntegrasyon sırasında değişiklik yapılrsa

$$\begin{aligned} \int_0^\infty |D_x K_{m,j}^+(x,t)| dt &\leq \sum_{k=0}^{n-1} \frac{2^{1-\frac{k}{n}}}{\Gamma(2-\frac{k}{n})} \int_x^\infty (s-x)^{1-\frac{k}{n}} \\ &\quad \times (|p'_k(s)| \|K_{m,j-1}\|_{(s)} + |p_k(s)| \|D_x K_{m,j-1}\|_{(s)}) ds \\ &\quad + \int_x^\infty |p_0(s)| \|K_{m,j-1}\|_{(s)} ds \end{aligned} \quad (4.15)$$

eşitsizliği elde edilir. Bu eşitsizlikten ve daha önce elde edilen

$$\|K_{m,j}^+\|_{(x)} \leq \frac{\{\sigma^+(x)\}^{j+1}}{(j+1)!}$$

ve

$$\|D_x K_{m,0}^+\|_{(x)} \leq \sigma_1^+(x)$$

eşitsizliklerinden yararlanılsa $j = 1$ için

$$\begin{aligned} \int_0^\infty |D_x K_{m,1}^+(x,t)| dt &\leq \sum_{k=0}^{n-1} \frac{2^{1-\frac{k}{n}}}{\Gamma(2-\frac{k}{n})} \int_x^\infty (s-x)^{1-\frac{k}{n}} \\ &\quad \times (|p'_k(s)| \|K_{m,0}^+\|_{(s)} + |p_k(s)| \|D_x K_{m,0}^+\|_{(s)}) ds \\ &\quad + \int_x^\infty |p_0(s)| \|K_{m,0}^+\|_{(s)} ds \\ &\leq \sum_{k=0}^{n-1} \frac{2^{1-\frac{k}{n}}}{\Gamma(2-\frac{k}{n})} \int_x^\infty (s-x)^{1-\frac{k}{n}} \\ &\quad \times [|p'_k(s)| \sigma^+(s) + |p_k(s)| \sigma_1^+(s)] ds \\ &\quad + \int_x^\infty |p_0(s)| \sigma^+(s) ds \end{aligned}$$

yazılabilir. σ^+ ve σ_1^+ fonksiyonları artmayan fonksiyon oldukları için alt sınırla en

büyük değerini alır ve yukarıdaki eşitsizlik

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty |D_x K_{m,1}^+(x,t)| dt &\leq \sigma^+(x) \left[\int_x^\infty |p_0(s)| ds + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{2^{1-\frac{k}{n}}}{\Gamma(2-\frac{k}{n})} \int_x^\infty (s-x)^{1-\frac{k}{n}} |p'_k(s)| ds \right] \\
&\quad + \sigma_1^+(x) \sum_{k=0}^{n-1} \frac{2^{1-\frac{k}{n}}}{\Gamma(2-\frac{k}{n})} (s-x)^{1-\frac{k}{n}} |p_k(s)| ds \\
&\leq \sigma^+(x) \sigma_1^+(x) + \sigma_1^+(x) \sum_{k=0}^{n-1} \frac{2^{1-\frac{k}{n}}}{\Gamma(2-\frac{k}{n})} (s-x)^{1-\frac{k}{n}} |p_k(s)| ds \\
&= \sigma_1^+(x) [\sigma^+(x) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{2^{1-\frac{k}{n}}}{\Gamma(2-\frac{k}{n})} (s-x)^{1-\frac{k}{n}} |p_k(s)| ds] \\
&\leq 2\sigma_1^+(x)\sigma^+(x)
\end{aligned}$$

halini alır. $\sigma_1^+(x) < \infty$ ve $\sigma^+(x) < \infty$ olduğundan $\int_0^\infty |D_x K_{m,1}^+(x,t)| dt < \infty$ olur ki bu da $D_x K_{m,1}^+ \in L_1(0, \infty)$ olduğunu gösterir. Bu durumda $D_x K_{m,1}^+$ fonksiyonunun $L_1(0, \infty)$ da t ye göre normu mevcuttur ve $\|D_x K_{m,1}^+\|_{(x)} \leq 2\sigma_1^+(x)\sigma^+(x)$ eşitsizliğini gerçekler. j=2 için

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty |D_x K_{m,2}^+(x,t)| dt &\leq \sum_{k=0}^{n-1} \frac{2^{1-\frac{k}{n}}}{\Gamma(2-\frac{k}{n})} \int_x^\infty (s-x)^{1-\frac{k}{n}} \\
&\quad \times (|p'_k(s)| \|K_{m,1}^+\|_{(s)} + |p_k(s)| \|D_x K_{m,1}^+\|_{(s)}) ds \\
&\quad + \int_x^\infty |p_0(s)| \|K_{m,1}^+\|_{(s)} ds \\
&\leq \sum_{k=0}^{n-1} \frac{2^{1-\frac{k}{n}}}{\Gamma(2-\frac{k}{n})} \int_x^\infty (s-x)^{1-\frac{k}{n}} \\
&\quad \times (|p'_k(s)| \frac{\{\sigma^+(s)\}^2}{2!} + |p_k(s)| 2\sigma_1^+(s)\sigma^+(s)) ds \\
&\quad + \int_x^\infty |p_0(s)| \frac{\{\sigma^+(s)\}^2}{2!} ds \\
&\leq \frac{\{\sigma^+(x)\}^2}{2!} \left[\int_x^\infty |p_0(s)| ds + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{2^{1-\frac{k}{n}}}{\Gamma(2-\frac{k}{n})} \int_x^\infty (s-x)^{1-\frac{k}{n}} |p'_k(s)| ds \right] \\
&\quad + 2\sigma_1^+(x) \sum_{k=0}^{n-1} \frac{2^{1-\frac{k}{n}}}{\Gamma(2-\frac{k}{n})} \int_x^\infty (s-x)^{1-\frac{k}{n}} |p_k(s)| \sigma^+(s) ds
\end{aligned} \tag{4.16}$$

yazılır.

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=0}^{n-1} \frac{2^{1-\frac{k}{n}}}{\Gamma(2-\frac{k}{n})} \int_x^\infty (s-x)^{1-\frac{k}{n}} |p_k(s)| \sigma^+(s) ds \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{2^{1-\frac{k}{n}}}{\Gamma(2-\frac{k}{n})} \int_x^\infty \int_x^s (1-\frac{k}{n})(s-\eta)^{-\frac{k}{n}} |p_k(s)| \sigma^+(s) d\eta ds \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{2^{1-\frac{k}{n}}}{\Gamma(2-\frac{k}{n})} \int_x^\infty \int_\eta^\infty (1-\frac{k}{n})(s-\eta)^{-\frac{k}{n}} |p_k(s)| \sigma^+(s) ds d\eta \\
&\leq \int_x^\infty \sigma(\eta) \sum_{k=0}^{n-1} \frac{2^{1-\frac{k}{n}}}{\Gamma(2-\frac{k}{n})} \int_\eta^\infty (1-\frac{k}{n})(s-\eta)^{-\frac{k}{n}} |p_k(s)| \sigma^+(s) ds d\eta \\
&= - \int_x^\infty \sigma^+(\eta) \frac{d\sigma^+(\eta)}{d\eta} d\eta \\
&= \frac{\{\sigma^+(x)\}^2}{2!}
\end{aligned}$$

eşitliğinden ve $\int_x^\infty |p_0(s)| ds + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{2^{1-\frac{k}{n}}}{\Gamma(2-\frac{k}{n})} \int_x^\infty (s-x)^{1-\frac{k}{n}} |p'_k(s)| ds \leq \sigma_1^+(s)$ eşitsizliğinden yararlanırsa (4.16) eşitsizliği

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty |D_x K_{m,2}^+(x,t)| dt &\leq \frac{\{\sigma^+(x)\}^2}{2!} \sigma_1^+(x) + 2\sigma_1^+(x) \frac{\{\sigma^+(x)\}^2}{2!} \\
&= 3\sigma_1(x) \frac{\sigma^2(x)}{2!}
\end{aligned}$$

şeklini alır. Bu durumda $K_{m,2}^+(x,t) \in L_1(0,\infty)$ olup $K_{m,2}^+$ fonksiyonunun $L_1(0,\infty)$ da t ye göre normu mevcuttur ve bu norm

$$\|D_x K_{m,2}^+\|_{(x)} \leq 3\sigma_1^+(x) \frac{\{\sigma^+(x)\}^2}{2!}$$

eşitsizliğini gerçekler. O halde $j-1$ için

$$\|D_x K_{m,j-1}^+\|_{(x)} \leq j\sigma_1^+(x) \frac{\{\sigma^+(x)\}^{j-1}}{(j-1)!}$$

eşitsizliğinin gerçeklendiğini kabul edelim. (4.15) eşitsizliğinden ve kabulümüzden

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty |D_x K_{m,j}^+(x,t)| dt &\leq \sum_{k=0}^{n-1} \frac{2^{1-\frac{k}{n}}}{\Gamma(2-\frac{k}{n})} \int_x^\infty (s-x)^{1-\frac{k}{n}} \\
&\quad \times (|p'_k(s)| \|K_{m,j-1}^+\|_{(s)} + |p_k(s)| \|D_x K_{m,j-1}^+\|_{(s)}) ds \\
&\quad + \int_x^\infty |p_0(s)| \|K_{m,j-1}^+\|_{(s)} ds \\
&\leq \sum_{k=0}^{n-1} \frac{2^{1-\frac{k}{n}}}{\Gamma(2-\frac{k}{n})} \int_x^\infty (s-x)^{1-\frac{k}{n}} \\
&\quad \times (|p'_k(s)| \frac{\{\sigma^+(s)\}^{j-1}}{j!} + |p_k(s)| \sigma_1^+(s) \frac{\{\sigma^+(s)\}^{j-1}}{(j-1)!} \cdot j) ds \\
&\quad + \int_x^\infty |p_0(s)| \frac{\{\sigma^+(s)\}^j}{j!} ds
\end{aligned}$$

yazılır. Bir önceki adımda yapılan küçültmelerin benzeri yapılırsa

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty |D_x K_{m,j}^+(x,t)| dt &\leq \frac{\{\sigma^+(x)\}^j}{j!} \sigma_1^+(x) \\
&\quad + j \cdot \sigma_1^+(x) \sum_{k=0}^{n-1} \frac{2^{1-\frac{k}{n}}}{\Gamma(2-\frac{k}{n})} \int_x^\infty (s-x)^{1-\frac{k}{n}} |p_k(s)| \frac{\{\sigma^+(s)\}^{j-1}}{(j-1)!} ds \\
&= \frac{\{\sigma^+(x)\}^{j-1}}{j!} \sigma_1^+(x) + \frac{j}{(j-1)!} \sigma_1^+(x) \sum_{k=0}^{n-1} \frac{2^{1-\frac{k}{n}}}{\Gamma(2-\frac{k}{n})} \int_x^\infty \int_x^s [\{\sigma^+(s)\}^{j-1} \\
&\quad \times (1 - \frac{k}{n})(s-\eta)^{-\frac{k}{n}} |p_k(s)|] ds d\eta \\
&= \frac{\{\sigma^+(x)\}^j}{j!} \sigma_1^+(x) \\
&\quad + \frac{j}{(j-1)!} \sigma_1^+(x) \sum_{k=0}^{n-1} \frac{2^{1-\frac{k}{n}}}{\Gamma(2-\frac{k}{n})} \int_x^\infty \int_\eta^\infty [\{\sigma^+(s)\}^{j-1} (1 - \frac{k}{n}) \\
&\quad \times (s-\eta)^{-\frac{k}{n}} |p_k(s)|] ds d\eta \\
&\leq \frac{\{\sigma^+(x)\}^j}{j!} \sigma_1^+(x) \\
&\quad + \frac{j}{(j-1)!} \sigma_1^+(x) \int_x^\infty \{\sigma^+(\eta)\}^{j-1} \int_\eta^\infty (1 - \frac{k}{n})(s-\eta)^{-\frac{k}{n}} |p_k(s)| ds d\eta
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\{\sigma^+(x)\}^j}{j!} \sigma_1^+(x) - \frac{j}{(j-1)!} \sigma_1^+(x) \int_x^\infty \{\sigma^+(\eta)\}^{j-1} \frac{d\sigma^+(\eta)}{d\eta} d\eta \\
&= \frac{\{\sigma^+(x)\}^j}{j!} \sigma_1^+(x) + j \sigma_1^+(x) \frac{\{\sigma^+(x)\}^j}{j!} \\
&= (j+1) \sigma_1^+(x) \frac{\{\sigma^+(x)\}^j}{j!}
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece $\forall j$ için $K_{m,j}^+(x, t) \in L_1(0, \infty)$ olup

$$\|D_x K_{m,j}^+\|_{(x)} \leq (j+1) \sigma_1^+(x) \frac{\{\sigma^+(x)\}^j}{j!} \quad (4.17)$$

gerçeklenir. Şimdi bu eşitsizlik yardımıyla $\sum_{j=0}^\infty D_x K_{m,j}^+(x, t)$ serisinin yakınsak olduğu gösterilsin. (4.17) eşitsizliğinden

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^\infty \|D_x K_{m,j}^+\|_{(x)} &\leq \sum_{j=0}^\infty (j+1) \sigma_1^+(x) \frac{\{\sigma^+(x)\}^j}{j!} \\
&= \sigma_1^+(x) \sum_{j=0}^\infty (j+1) \frac{\{\sigma^+(x)\}^j}{j!} \\
&= \sigma_1^+(x) \left\{ 1 + 2\sigma^+(x) + 3 \frac{\{\sigma^+(x)\}^2}{2!} + 4 \frac{\{\sigma^+(x)\}^3}{3!} + \dots \right\} \\
&= \sigma_1^+(x) \left\{ 1 + \sigma^+(x) + \frac{\{\sigma^+(x)\}^2}{2!} + \frac{\{\sigma^+(x)\}^3}{3!} + \dots \right\} \\
&\quad + \sigma_1^+(x) \left\{ \sigma^+(x) + 2 \frac{\{\sigma^+(x)\}^2}{2!} + 3 \frac{\{\sigma^+(x)\}^3}{3!} + \dots \right\} \\
&= \sigma_1^+(x) \left\{ 1 + \sigma^+(x) + \frac{\{\sigma^+(x)\}^2}{2!} + \frac{\{\sigma^+(x)\}^3}{3!} + \dots \right\} \\
&\quad + \sigma_1^+(x) \sigma^+(x) \left\{ 1 + \sigma^+(x) + \frac{\{\sigma^+(x)\}^2}{2!} + \frac{\{\sigma^+(x)\}^3}{3!} + \dots \right\} \\
&= \sigma_1^+(x)(1 + \sigma^+(x)) \left\{ 1 + \sigma^+(x) + \frac{\{\sigma^+(x)\}^2}{2!} + \frac{\{\sigma^+(x)\}^3}{3!} + \dots \right\} \\
&= \sigma_1^+(x)(1 + \sigma^+(x)) e^{\sigma^+(x)}
\end{aligned}$$

elde edilir. σ^+ ve σ_1^+ artmayan fonksiyon olduğundan her $x \in R$ için en azından bir $a \in R$ vardır öyleki $a < x$ için $\sigma^+(a) \geq \sigma^+(x)$ ve $\sigma_1^+(a) \geq \sigma_1^+(x)$ olur. O halde her

$x \in \mathbb{R}$ ve $\lambda \in S_m$ için,

$$\begin{aligned}\|D_x K_{m,j}^+\|_{(x)} &\leq (j+1)\sigma_1^+(x) \frac{\{\sigma^+(x)\}^j}{j!} \\ &\leq (j+1)\sigma_1^+(a) \frac{\{\sigma^+(a)\}^j}{j!}\end{aligned}$$

olup $\sum_{j=0}^{\infty} (j+1)\sigma_1^+(a) \frac{\{\sigma^+(a)\}^j}{j!}$ serisi yakınsak olduğundan Weierstrass M-Testi gereğince $\sum_{j=0}^{\infty} D_x K_{m,j}^+(x, t)$ serisi x e ve t ye göre düzgün yakınsaktır. Dolayısıyla $D_x K_m^+(x, t)$ mevcut olup $L_1(0, \infty)$ uzayındadır. Böylece ispat tamamlanır (Nabiev ve Guseinov 2006).

KAYNAKLAR

- Aktosun, T., Klaus, M. and van der Mee, C. 1998. Wave scattering in one dimension with absorption, *J. Math. Phys.*, 39, 1957-1992.
- Bairamov, E., Çakar, Ö. and Krall, A.M. 1999. Spectrum and spectral singularities quadratic pencil of a Schrödinger operators with a general boundary condition, *J. Differential Equations*, 151, 252-267.
- Guseinov, I.M., Nabiev, A.A. and Pashayev, R.T. 2000. Transformation operators and asymptotic formulas for the eigenvalues of a polynomial pencil of Sturm-Liouville operators, *Siberian Math. J.*, 41, 452-464.
- Jaulent, M. and Jean, C. 1976. The inverse problem for the one dimensional Schrödinger equation with energy dependent potential I, II, *Ann. Inst. H. Poincare Sect. A (N.S.)*, 25, 105-118, 119-137.
- Nabiev, A.A. and Guseinov, I.M. 2006. On the Jost solutions of Schrödinger-type equations with polynomial energy-dependent potential, *Inverse Problems*, 22, 55-67.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Fahriye Zehra BABACAN

Doğum Yeri : Artvin

Doğum Tarihi : 01.12.1985

Medeni Hali : Bekar

Yabancı Dili : İngilizce

Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl)

Lise : Ayrancı Yabancı Dil Ağıraklı Lisesi (2003)

Lisans : Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü (2007)

Yüksek Lisans : Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı (Eylül 2007 – Ağustos 2010)