ANKARA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

NON SELFADJOINT DISKRET SCHRÖDINGER OPERATÖRÜNÜN SPEKTRAL ÖZELLİKLERİ

Ceren Ebru TOPBAŞ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ANKARA
2008

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

NON SELFADJOINT DISKRET SCHRÖDINGER OPERATÖRÜNÜN SPEKTRAL ÖZELLİKLERİ

Ceren Ebru TOPBAŞ

Ankara Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Yard. Doç. Dr. Cafer COŞKUN

Bu tez dört bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölüm giriş kısmına ayrılmıştır.

İkinci bölümde, spektral analizin temel tanım ve teoremleri verilmiştir.

Üçüncü bölümde, non selfadjoint Diskret Schrödinger Operatörü tanımlanmış, Jost çözümü ve bu çözümün özellikleri incelenmiştir.

Dördüncü bölümde ise analitik fonksiyonların birebirlik teoremleri kullanılarak self-adjoint olmayan Diskret Schrödinger

Operatörünün resolventi, spektrumu ve spektral tekillikleri elde edilmiştir. Buna ek olarak özdeğerlerin ve spektral tekilliklerin nicel özellikleri incelenmiştir.

Temmuz 2008, 57 sayfa

Anahtar Kelimeler: Spektrum, resolvent, spektral açılım, spektral tekillik, özdeğer, sürekli spektrum, diskre spektrum.

ABSTRACT

Master Thesis

THE SPECTRAL PROPERTIES OF NON SELFADJOINT DISCRETE SCHRÖDINGER OPERATOR

Ceren Ebru TOPBAŞ

Ankara University
Graduate School of Natural And Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Asst. Prof. Dr. Cafer COŞKUN

This thesis consists of four chapters.

The first chapter is devoted to the introduction.

In the second chapter, some basic definations and main theorems of spectral analysis are given.

In the third chapter, non selfadjoint Discrete Schrödinger Operator has been defined and the properties of its solution has been investigated.

In the fourth chapter, the resolvent and the spectrum of non selfadjoint Discrete Schrödinger Operator are obtained by using the uniqueness theorems of analytic functions. Furthermore, the properties of the eigenvalues and the spectral singularities are examined.

July 2008, 57 pages

Key Words: Spectrum, resolvent, spektral expansion, spectral singularities, eigenvalues, continuous spectrum, discrete spectrum.

TEŞEKKÜR

Çalışmamın her aşamasında görüş ve önerileriyle beni yönlendiren ve bana her konuda yardımcı ve destek olan sayın hocam Yard. Doç. Dr. Cafer COŞKUN (Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi)'a, çalışmalarım boyunca yakın ilgi ve katkısını gördüğüm sayın Prof. Dr. Elgiz BAYRAM (Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi) ve değerli hocalarım Prof. Dr. Cihan ORHAN (Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi), Prof. Dr. Öner ÇAKAR (Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi) ve Doç. Dr. Ayhan ŞERBETÇİ (Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi)'ye teşekkürlerimi ve saygılarımı, yüksek lisans yaptığım süre boyunca verdiği burs ile beni destekleyen TÜBİTAK'a ve çalışmalarım sırasında maddi ve manevi desteğini esirgemeyen sevgili aileme en içten teşekkürlerimi sunarım.

Ceren Ebru TOPBAŞ
Ankara, Temmuz 2008

İÇİNDEKİLER

SİMGELER DİZİNİ

$\mathbb{N}$	Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
$\mathbb{C}$	Kompleks sayılar kümesi
$\operatorname{Im} z$	z kompleks sayısının sanal kısmı
$\mathbb{C}_+$	$\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$
$\overline{\mathbb{C}_+}$	$\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z \geq 0\}$
$D(A)$	A operatörünün tanım kümesi
$R(A)$	A operatörünün değer kümesi
$W[F,G]$	F ve G çözümlerinin wronskiyeni
$R_\lambda(L)$	L operatörünün resolvent operatörü
$\rho(L)$	L operatörünün resolvent kümesi
$\sigma(L)$	L operatörünün spektrumu
$\sigma_d(L)$	L operatörünün özdeğerler kümesi
$\sigma_c(L)$	L operatörünün sürekli spektrumu
$\sigma_r(L)$	L operatörünün rezidü spektrumu
$\sigma_{ss}(L)$	L operatörünün spektral tekillikler kümesi
L^*	L operatörünün Hilbert Adjointi
Δ	İleri fark operatörü
μ	Lebesque ölçüsü
$l^2(\mathbb{Z})$	$\left\{a = \{a_n\}_{n\in\mathbb{Z}} : \|a\|^2 = \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} \|a_n\|^2 < \infty\right\}$
$l^2(\mathbb{N})$	$\left\{a = \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} : \|a\|^2 = \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \|a_n\|^2 < \infty\right\}$
$L^2(\mathbb{R})$	$\left\{f : \int\limits_0^\infty \|f(x)\|^2 dx < \infty\right\}$

1.GİRİŞ

1.1 Çalışmanın Kapsamı

Diferensiyel operatörlerin spektral analizi fonksiyonel analizin ve matematiksel fiziğin birçok problemi için önem taşıdığından matematikçilerin dikkatini çekmiş ve bu konuda çok sayıda çalışma yapılmıştır. Bu çalışmalar diferensiyel operatörlerin spektrum yapılarının ve özelliklerinin incelenmesine ilişkindir.

İlk olarak Naimark, 1960 yılında non selfadjoint , sürekli ve diskre spektruma sahip Sturm-Liouville operatörünün spektral analiziyle ilgili çalışmaya başlamış ve Sturm-Liouville operatörünün spektrumunun sürekli spektrum ve diskre spektrum dışında spektral tekilliklere de sahip olduğunu ispatlamıştır. Daha sonra spektral tekilliklerin önemi Lyance tarafından ortaya konmuştur.

Selfadjoint fark denklemlerinin spekral analizi ile ilgili çalışmalar ise Atkinson tarafından "Discrete and Continuous Boundary Problems" ve Berezanski tarafından "Expansion in Eigenfunctions of Selfadjoint Operators" adlı kitaplarda toplanmıştır. Ayrıca bu konuda çeşitli matematikçiler tarafından çok sayıda çalışma yapılmıştır (Coşkun 2000), (Adıvar and Bairamov 2001), (Bairamov and Coşkun 2004).

Bu tezde ise,

$$\langle \varphi, \psi \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\varphi_n \overline{\psi_n} + \psi_n \overline{\varphi_n} \right)$$

iççarpımıyla birlikte bir Hilbert uzayı olan $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ kompleks dizilerin uzayı, $l^2(\mathbb{N})$ üzerinde, $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ve $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ kompleks terimli diziler ve Δ ileri fark operatörü yani

$$\Delta\varphi_n = \varphi_{n-1} - \varphi_n, n \in \mathbb{N}$$

$h_n = a_{n-1} + a_n + b_n$ olmak üzere

$$(ly)_n = \Delta \left(a_{n-1} \Delta y_{n-1} \right) + h_n y_n$$

fark ifadesiyle tanımlanan, selfadjoint olmayan L diskret Schrödinger operatörünün

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\left(|1-a_n|+|b_n|\right)<\infty$$

koşulu altında Jost çözümü, spektrumu ve resolventi incelenecektir. Ayrıca $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ve $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ kompleks terimli dizileri için

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{\varepsilon n^{\beta}}\left(|1-a_n|+|b_n|\right)<\infty, \frac{1}{2}\leq\beta\leq 1, \varepsilon>0$$

koşulunun gerçeklenmesi durumunda da L operatörünün özdeğerleri ve spektral tekillikleriyle ilgili sonuçlar verilecektir. Bu özdeğerlerin ve spektral tekilliklerin nicel özellikleri elde edilecektir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde daha sonra kullanılacak tanımlar ve teoremler verilmiştir.

Teorem 2.1. X ve Y aynı bir K cismi üzerinde iki vektör uzayı olmak üzere

$$L : D(L) \subset X \rightarrow Y$$

operatörü verilsin. L operatörünün $D(L)$ tanım bölgesi ve $R(L)$ değer bölgesi sırasıyla X ve Y uzaylarının alt vektör uzayları olsunlar. Eğer $\forall\ x,\ y \in D(L)$ ve $\forall\ \alpha,\ \beta \in K$ için

$$L(\alpha x + \beta y) = \alpha L(x) + \beta L(y)$$

sağlanıyorsa L operatörü lineerdir denir (Akhiezer 1965).

Teorem 2.2. X ve Y aynı K cismi üzerinde normlu iki uzay $L : D(L) \subset X \rightarrow Y$ lineer bir operatör olsun. Eğer $\forall\ x \in D(L)$ için

$$\|Lx\| \leq C\|x\|$$

olacak biçimde $C > 0$ sayısı varsa L operatörüne sınırlı lineer bir operatördür denir (Lusternik-Sobolev 1968).

Tanım 2.1. X ve Y aynı K cismi üzerinde normlu iki uzay ve

$$L : X \rightarrow Y$$

lineer bir operatör olsun. X uzayının sınırlı her alt kümesinin L operatörü altındaki görüntüsü Y uzayında kompakt ise, L operatörüne kompakt operatör adı verilir (Akhiezer 1965).

Teorem 2.3. ($l^2(N)$ de Kompaktlık Kriteri) $M \subset l^2(N)$ sınırlı bir küme olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ ve her $x = \{\xi_1, \xi_2, \xi_3, ..., \xi_n, ...\} \in M$ için $n > N_0$ oldukça

$$\sum_{i=n+1}^{\infty} |\xi_i|^2 < \varepsilon^2$$

sağlanacak biçimde en az bir N_0 sayısı varsa M kompakttır (Lusternik and Sobolev 1968).

Teorem 2.4. (Borel-Lebesque Teoremi) Reel sayılar kümesinin kapalı ve sınırlı her alt aralığı kompakttır (Lusternik-Sobolev 1968).

Tanım 2.2. X bir Hilbert uzayı

$$L : D(L) \subset X \to Y$$

lineer bir operatör ve $\overline{D(L)} = X$ olsun. $y \in Y$ olmak üzere $\forall x \in D(L)$ için

$$\langle Lx, y \rangle = \langle x, L^* y \rangle$$

eşitliğini gerçekleyen L^* operatörüne L operatörünün Hilbert-Adjointi denir (Akhiezer 1965).

Tanım 2.3. X bir Hilbert uzayı ve L, X üzerinde tanımlı lineer bir operatör olsun. Eğer

$$L^* x = Lx$$

eşitliği gerçekleniyor ise L operatörüne self-adjoint operatördür denir (Naimark 1968)

Tanım 2.4. X bir Hilbert uzayı olmak üzere tanım kümesi X de yoğun olan self-adjoint operatöre simetrik operatör denir (Naimark 1968).

Teorem 2.5. X bir Hilbert uzayı olsun ve $L : X \rightarrow X$ sınırlı lineer operatörü verilsin. L operatörünün self adjoint olması için gerek ve yeter koşul simetrik olmasıdır (Akhiezer 1965).

Tanım 2.5. $X \neq \{\theta\}$ normlu bir uzay ve $L : X \rightarrow X$ lineer bir operatör olsun. Eğer $R_{\lambda}(L) = (L - \lambda I)^{-1}$ resolvent operatörü mevcut, sınırlı ve X de yoğun bir küme üzerinde tanımlı ise $\lambda \in \mathbb{C}$ sayısına L operatörünün bir regüler değeri denir. L operatörünün bütün regüler değerlerinin oluşturduğu kümeye L operatörünün resolventi denir. ve $\rho(L)$ ile gösterilir.

$$\rho(L) = \left\{\lambda \in \mathbb{C} : R_{\lambda}(L) \text{ mevcut ve sınırlı },\ \overline{D(R_{\lambda}(L))} = X\right\}$$

Teorem 2.6. (Resolvent cümle) $L : H \rightarrow H$, kompleks bir H Hilbert uzayı üzerinde, sınırlı self adjoint lineer bir operatör olsun. Bu durumda, bir λ sayısının L nin $\rho(L)$ resolvent cümlesine ait olması için gerek ve yeter koşul, her $x \in H$ için,

$$\| L_{\lambda}x \| \geq C \| x \| \qquad (L_{\lambda} = L - \lambda I)$$

olacak şekilde bir $C > 0$ sayısının var olmasıdır (Berezanski 1968)

Tanım 2.6. $\rho(L)$ nin $\mathbb{C}$ kompleks düzlemindeki tümleyeni olan $\sigma(L) = \mathbb{C} \backslash \rho(L)$ kümesine L nin spektrumu ve her bir $\lambda \in \sigma(L)$ sayısına da L operatörünün bir spektral değeri denir.

Tanım 2.7. $L : X \rightarrow X$ lineer bir operatör olsun. Eğer $Lx = \lambda x$ olacak biçimde X de $x \neq \theta$ elemanı varsa λ kompleks sayısına L nin bir özdeğeri ve $x \in X$ elemanına da bir özvektör denir.

Yukarıdaki tanımlardan aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

I) Eğer λ, L operatörünün bir özdeğeri ise $L - \lambda I$ operatörü bire-bir değildir. Dolayısıyla $R_{\lambda}(L)$ var olmayacağından $\lambda \in \sigma(L)$ olur. Yani her özdeğer bir spektral değerdir. Buna göre L operatörünün özdeğerlerininin kümesi $\sigma_d(L)$ ile gösterilirse

$\sigma_d(L) \subset \sigma(L)$ olur. $\sigma_d(L)$ kümesine L operatörünün diskre veya nokta spektrumu denir.

Buna göre

$$\sigma_d(L) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \ R_\lambda(L) \ \text{mevcut değil.} \ \}$$

gerçeklenir.

II) Eğer $R_\lambda(L)$ var ve X de yoğun bir küme üzerinde tanımlı fakat sınırsız ise $\lambda \in \sigma(L)$ olur. Bu özelliğe sahip bütün λ sayılarının kümesine sürekli spektrum denir ve $\sigma_c(L)$ ile gösterilir. O halde

$$\sigma_c(L) = \left\{\lambda \in \mathbb{C} : R_\lambda(L) \ \text{mevcut}, \ R_\lambda(L) \ \text{sınırsız} \ , \ \overline{D(R_\lambda(L))} = X\right\}$$

gerçeklenir.

III) $R_\lambda(L)$ var,sınırlı fakat X de yoğun bir küme üzerinde tanımlı olmayacak şekildeki λ spektral değerlerinin oluşturduğu kümeye ise L operatörünün rezidü spektrumu denir ve $\sigma_r(L)$ ile gösterilir. Dolayısıyla

$$\sigma_r(L) = \left\{\lambda \in \mathbb{C} : \ R_\lambda(L) \ \text{mevcut}, \ R_\lambda(L) \ \text{sınırlı} \ , \ \overline{D(R_\lambda(L))} \neq X\right\}$$

olur.

Buna göre λ spektral değeri $\sigma_d(L), \sigma_c(L)$ ve $\sigma_r(L)$ kümelerinden en az birine ait olup

$$\sigma(L) = \sigma_d(L) \cup \sigma_c(L) \cup \sigma_r(L)$$

gerçeklenir. Ayrıca $\rho(L)$, $\sigma_r(L)$, $\sigma_d(L)$, ve $\sigma_c(L)$ kümeleri ikişer ikişer ayrık olup birleşimleri tüm kompleks düzlemi verir (Naimark 1968).

Teorem 2.7. Kompleks bir $\mathbb{H}$ Hilbert uzayı üzerinde sınırlı self adjoint lineer $L : H \to H$ operatörün özdeğerleri reeldir (Lusternik-Sobolev 1968).

Teorem 2.8. Kompleks bir $\mathbb{H}$ Hilbert uzayı üzerinde sınırlı self adjoint lineer $L : H \to H$ operatörünün $\sigma_r (L)$ rezidü spektrumu boştur(Lusternik-Sobolev 1968).

Teorem 2.9. Kompleks bir $\mathbb{H}$ Hilbert uzayı üzerinde sınırlı self adjoint lineer $L : H \to H$ operatörünün spektrumu reel eksende bulunur (Lusternik-Sobolev 1968).

Teorem 2.10. Kompleks bir $\mathbb{H}$ Hilbert uzayı üzerinde sınırlı self adjoint lineer $L : H \to H$ operatörünün $\sigma (L)$ spektrumu

$$m = \inf_{\|\varphi\|=1} \langle L\varphi, \varphi \rangle$$

ve

$$M = \sup_{\|\varphi\|=1} \langle L\varphi, \varphi \rangle$$

olmak üzere reel eksen üzerinde $[m, M]$ kapalı aralığı içinde bulunur (Lusternik-Sobolev 1968).

Teorem 2.11. Kompleks bir $\mathbb{H}$ Hilbert uzayı üzerinde herhangi bir sınırlı self adjoint lineer L operatörü için,

$$\|L\| = \max (|m| , |M|) = \sup_{\|\varphi\|=1} \langle L\varphi, \varphi \rangle$$

gerçeklenir.

Şimdi de ileride kullanacak olduğum self-adjoint ve kompakt iki operatörün toplamı şeklinde yazılabilen operatörün sürekli spektrumu ile ilgili bir teorem verelim.

Teorem 2.12. (Weyl Kompakt Heyecanlandırma Teoremi) L_1 self adjoint ve L_2 kompakt bir operatör olmak üzere $L = L_1 + L_2$ ise

$$\sigma_c(L) = \sigma_c(L_1)$$

gerçeklenir (Glazman 1965).

Tanım 2.8. $R_\lambda(L)$ resolvent operatörünün kutup noktası olupta özdeğer olmayan ve sürekli spektrumun elemanı olan noktalara spektral tekillikler adı verilir ve $\sigma_{ss}(L)$ ile gösterilir (Naimark 1968).

Şimdi de sık kullanacağımız analitik fonksiyonların sıfırları ve onların özellikleri ile ilgili birkaç teorem verelim.

Teorem 2.13. Özdeş olarak sıfır olmayan analitik bir fonksiyonun analitiklik bölgesi içindeki sıfır yerleri ayrıktır (Dolzhenko 1979).

Teorem 2.14. Özdeş olarak sıfır olmayan analitik bir fonksiyonun sonsuz katlı sıfırları analitiklik bölgesinin sınırındadır (Dolzhenko 1979).

Teorem 2.15. Sıfırdan farklı analititik bir fonksiyonun analitiklik bölgesinin içindeki sıfırlarının kümesinin limit noktaları analitiklik bölgesinin sınırındadır (Dolzhenko 1979).

Teorem 2.16. (Privalov Teoremi) Eğer g fonksiyonunun reel eksendeki sıfırlarının kümesinin Lebesque ölçüsü pozitif ise her $z \in \mathbb{C}$ için $g(z) \equiv 0$ dır (Dolzhenko 1979).

3. NON SELFADJOİNT DİSKRET SCHRÖDİNGER OPERATÖRÜNÜN JOST ÇÖZÜMLERİ VE ÖZELLİKLERİ

$\{a_n\}$ve $\{b_n\}$ kompleks terimli diziler ve $a_0 = 1$, her $n \in \mathbb{N}$ için $a_n \neq 0$ olmak üzere

$$l^2(\mathbb{N}) = \left\{ y = \{y_n\} : \sum_{n=0}^{\infty} |y_n|^2 < \infty \right\}$$

Hilbert uzayı üzerinde

$$\begin{aligned} (ly)_n &= a_{n-1}y_{n-1} + b_n y_n + a_n y_{n+1}, n \in \mathbb{N} \\ y_0 &= 0 \end{aligned}$$

fark ifadesi tarafından üretilen fark operatörü L ile gösterilsin.

$$h_n = a_{n-1} + a_n + b_n \quad \text{ve} \quad \Delta y_n = y_{n-1} - y_n$$

olmak üzere $(ly)_n$ fark ifadesi,

$$(ly)_n = \Delta\left(a_{n-1}\Delta y_{n-1}\right) + h_n y_n$$

Sturm-Liouville formunda yazılabilir. Ayrıca her $n \in \mathbb{N}$ için

$$(ly)_n = \lambda y_n$$

denklemi

$$a_{n-1}y_{n-1} + b_n y_n + a_n y_{n+1} = \lambda y_n \tag{3.1}$$

şeklinde ifade edilir.

Ayrıca L operatörü,

$$J = \begin{bmatrix} b_1 & a_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ a_1 & b_2 & a_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & a_2 & b_3 & a_3 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & a_3 & b_4 & a_4 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & a_4 & b_5 & a_5 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \ddots & \ddots & \ddots & \dots \end{bmatrix}$$

sonsuz Jacobi matrisini kullanarak da tanımlanabilir.

$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ve $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizilerinin

$$\sum_{n=1}^{\infty} n(|1-a_n| + |b_n|) < \infty \tag{3.2}$$

koşulunu sağladığını kabul edelim.

$$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_{n-1} \\ y_n \\ y_{n+1} \\ \vdots \end{bmatrix}$$

olmak üzere

$$Ly = Jy = \lambda y$$

yani

$$\begin{bmatrix} b_1 & a_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ a_1 & b_2 & a_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & a_2 & b_3 & a_3 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & a_{n-1} & b_n & a_n & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_{n-1} \\ y_n \\ y_{n+1} \\ \vdots \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_{n-1} \\ y_n \\ y_{n+1} \\ \vdots \end{bmatrix}$$

gerçeklenir. Buradan her $n \in \mathbb{N}$ için

$$a_{n-1}y_{n-1} + b_n y_n + a_n y_{n+1} = \lambda y_n$$

denklemi elde edilir.

Teorem 3.1. $\lambda = 2\cos z$ ve $\operatorname{Im} z = 0$ olmak üzere (3.2) koşulu altında (3.1) denklemi;

$$e_n(z) = \alpha_n e^{inz}\left[1 + \sum_{m=1}^{\infty} A_{nm} e^{imz}\right], n \in \mathbb{N} \cup \{0\} \tag{3.3}$$

çözümüne sahiptir. Burada α_n ve A_{nm}, $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ve $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizileri cinsinden tek olarak belirlenirler.

İspat: $\operatorname{Im} z = 0$ olmak üzere $\lambda = 2\cos z = 2\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$ ve (3.3) ifadesi (3.1) denkleminde yerine yazılırsa her $n \in \mathbb{N}$ için,

$$a_{n-1}\alpha_{n-1}e^{i(n-1)z}\left[1 + \sum_{m=1}^{\infty} A_{n-1,m} e^{imz}\right] + b_n\alpha_n e^{inz}\left[1 + \sum_{m=1}^{\infty} A_{nm} e^{imz}\right]$$
$$+a_n\alpha_{n+1}e^{i(n+1)z}\left[1 + \sum_{m=1}^{\infty} A_{n+1,m} e^{imz}\right] = \alpha_n e^{inz}(e^{iz} + e^{-iz})\left[1 + \sum_{m=1}^{\infty} A_{nm} e^{imz}\right]$$

bulunur.

Bu denklem düzenlenirse

$$a_{n-1}\alpha_{n-1}e^{i(n-1)z} + \alpha_{n-1}a_{n-1}e^{i(n-1)z}\sum_{m=1}^{\infty}A_{n-1,m}e^{imz} + b_n\alpha_n e^{inz}$$

$$+b_n\alpha_n e^{inz}\sum_{m=1}^{\infty}A_{nm}e^{imz} + a_n\alpha_{n+1}e^{i(n+1)z} + a_n\alpha_{n+1}e^{i(n+1)z}\sum_{m=1}^{\infty}A_{n+1,m}e^{imz}$$

$$= \alpha_n e^{i(n+1)z} + \alpha_n e^{i(n-1)}z + \alpha_n e^{i(n+1)z}\sum_{m=1}^{\infty}A_{nm}e^{imz} + \alpha_n e^{i(n-1)z}\sum_{m=1}^{\infty}A_{nm}e^{imz} \tag{3.4}$$

elde edilir.

(3.4) denkleminde e^{inz} nin kuvvetleri karşılıklı olarak eşitlenirse

$$a_{n-1}\alpha_{n-1} = \alpha_n \tag{3.5}$$

$$b_n\alpha_n + a_{n-1}\alpha_{n-1}A_{n-1,1} = \alpha_n A_{n1} \tag{3.6}$$

$$a_{n-1}\alpha_{n-1}A_{n-1,2} + b_n\alpha_n A_{n1} + a_n\alpha_{n+1} = \alpha_n + \alpha_n A_{n2} \tag{3.7}$$

$$a_{n-1}\alpha_{n-1}A_{n-1,3} + b_n\alpha_n A_{n2} + a_n\alpha_{n+1}A_{n+1,1} = \alpha_n A_{n1} + \alpha_n A_{n3} \tag{3.8}$$

ve $m \geq 3$ için

$$a_{n-1}\alpha_{n-1}A_{n-1,m} + \alpha_n b_n A_{n,m-1} + a_n\alpha_{n+1}A_{n+1,m-2} - a_{n-1}\alpha_{n-1}A_{n-1,m-1}$$
$$= \alpha_n A_{n,m-2} + \alpha_n A_{nm} \tag{3.9}$$

eşitlikleri elde edilir.

(3.5) denkleminden

$$\begin{aligned}
\frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n} &= \frac{1}{a_{n-1}} \\
\frac{\alpha_n}{\alpha_{n+1}} &= \frac{1}{a_n} \\
\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_{n+2}} &= \frac{1}{a_{n+1}} \\
&\vdots
\end{aligned}$$

eşitlikleri elde edilir.

Buradan (3.2) koşulu yardımıyla

$$\alpha_n = \left\{ \prod_{k=n}^{\infty} a_k \right\}^{-1} \tag{3.10}$$

bulunur.

(3.5) ve (3.6) denklemlerinden her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned}
A_{n1} - A_{n-1,1} &= b_n \\
A_{n+1,1} - A_{n1} &= b_{n+1} \\
A_{n+2,1} - A_{n+1,1} &= b_{n+2} \\
&\vdots
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan da (3.2) koşulu yardımıyla

$$A_{n1} = -\sum_{k=n+1}^{\infty} b_k \tag{3.11}$$

bulunur.

(3.7) denkleminde (3.5) eşitliği yerine yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$A_{n-1,2} - A_{n2} = 1 - a_n^2 - b_n A_{n1}$$

bulunur. Buradan benzer düşünce ile

$$A_{n2} = \sum_{k=n+1}^{\infty} \left\{ \left(1 - a_k^2\right) - b_k A_{k1} \right\} \tag{3.12}$$

elde edilir.

(3.9) denkleminde her iki tarafı α_n ye bölünüp (3.5) eşitliği kullanılırsa

$$A_{n-1,m} - A_{nm} = A_{n,m-2} - b_n A_{n,m-1} - a_n^2 A_{n+1,m+2} \tag{3.13}$$

bulunur. Buradan

$$\begin{aligned} A_{nm} - A_{n+1,m} &= A_{n+1,m-2} - b_{n+1} A_{n+1,m-1} - a_{n+1}^2 A_{n+2,m+2} \\ A_{n+1,m} - A_{n+2,m} &= A_{n+2,m-2} - b_{n+2} A_{n+2,m-1} - a_{n+2}^2 A_{n+3,m+2} \\ &\vdots \end{aligned}$$

eşitlikleri yazılabilir. Bu eşitliklerden ise

$$A_{nm} = \sum_{k=n+1}^{\infty} A_{k,m-2} - \sum_{k=n+1}^{\infty} b_k A_{k,m-1} - \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k^2 A_{k+1,m-2} \tag{3.14}$$

elde edilir.

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} A_{k,m-2} = A_{n+1,m-2} + \sum_{k=n+1}^{\infty} A_{k+1,m-2}$$

eşitliği (3.14) ifadesinde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} A_{nm} &= \sum_{k=n+1}^{\infty} A_{k,m-2} - \sum_{k=n+1}^{\infty} b_k A_{k,m-1} - \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k^2 A_{k+1,m-2} \\ &= A_{n+1,m-2} + \sum_{k=n+1}^{\infty} A_{k+1,m-2} - \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k^2 A_{k+1,m-2} - \sum_{k=n+1}^{\infty} b_k A_{k,m-1} \\ &= A_{n+1,m-2} + \sum_{k=n+1}^{\infty} \left\{ (1 - a_k^2) A_{k+1,m-2} \right\} - \sum_{k=n+1}^{\infty} b_k A_{k,m-1} \\ &= A_{n+1,m-2} + \sum_{k=n+1}^{\infty} \left\{ \left(1 - a_k^2\right) A_{k+1,m-2} - b_k A_{k,m-1} \right\} \end{aligned} \tag{3.15}$$

eşitliği elde edilir.

Lemma 3.1. A_{nm} katsayıları, $\left[\frac{m}{2}\right]$, $\frac{m}{2}$ sayısının tam kısmı ve $C > 0$ bir sabit olmak üzere her $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ve $m \in \mathbb{N}$ için

$$|A_{nm}| \leq C \sum_{i=n+\left[\frac{m}{2}\right]}^{\infty} (|1 - a_i| + |b_i|) \tag{3.16}$$

eşitsizliğini gerçekler.

İspat:

$$|A_{n1}| = \left| -\sum_{k=n+1}^{\infty} b_k \right| = \sum_{k=n+1}^{\infty} |b_k| < \sum_{k=n+\left[\frac{m}{2}\right]}^{\infty} (|1 - a_k| + |b_k|)$$

olduğu açıktır.

$$\begin{aligned} |A_{n2}| &= \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} \left\{ (1 - a_k^2) + b_k \sum_{j=k+1}^{\infty} b_j \right\} \right| \\ &\leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \left| (1 - a_k^2) + b_k \sum_{j=k+1}^{\infty} b_j \right| \\ &\leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |1 - a_k| \, |1 + a_k| + |b_k| \sum_{j=1}^{\infty} b_j \end{aligned}$$

$C = \sup\limits_{k} \left\{ \{|1 + a_k|\} + \sum\limits_{j=1}^{\infty} |b_j| \right\}$ seçilirse

$$|A_{n2}| \leq C \sum_{k=n+1}^{\infty} (|1 - a_k| + |b_k|)$$

elde edilir.

$m \geq 3$ için $C_2 = \sup\limits_{k \geq n+1} \{|1 + a_k|, 1\}$ olmak üzere ve de (3.16) eşitsizliği kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
|A_{nm}| &\leq |A_{n+1,m-2}| + \sum_{k=n+1}^{\infty} \left| \left\{ \left(1 - a_k^2\right) A_{k+1,m-2} - b_k A_{k,m-1} \right\} \right| \\
&\leq C_1 \sum_{k=n+\left[\frac{m}{2}\right]}^{\infty} \left(|1 - a_k| + |b_k|\right) \\
&\quad + \sum_{k=n+1}^{\infty} \left\{ \left|1 - a_k^2\right| \sum_{j=k+\left[\frac{m}{2}\right]}^{\infty} \left(|1 - a_j| + |b_j|\right) + |b_k| \sum_{j=k+\left[\frac{m-1}{2}\right]}^{\infty} \left(|1 - a_j| + |b_j|\right) \right\} \\
&\leq C_1 \sum_{k=n+\left[\frac{m}{2}\right]}^{\infty} \left(|1 - a_k| + |b_k|\right) + \sum_{j=1}^{\infty} \left(|1 - a_j| + |b_j|\right) \left[\sum_{k=n+1}^{\infty} \left|1 - a_k^2\right| + |b_k| \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|A_{nm}| &\leq C_1 \sum_{k=n+\left[\frac{m}{2}\right]}^{\infty} \left(|1 - a_k| + |b_k|\right) + \sum_{j=1}^{\infty} \left(|1 - a_j| + |b_j|\right) \left[C_2 \sum_{k=n+1}^{\infty} |1 - a_k| + |b_k| \right] \\
&\leq \left[C_1 + C_2 \sum_{j=1}^{\infty} \left(|1 - a_j| + |b_j|\right) \right] \sum_{k=n+\left[\frac{m}{2}\right]}^{\infty} \left(|1 - a_k| + |b_k|\right) \qquad (3.17)
\end{aligned}$$

bulunur. Buradan

$$C = \left[C_1 + C_2 \sum_{j=1}^{\infty} \left(|1 - a_j| + |b_j|\right) \right]$$

olmak üzere

$$|A_{nm}| \leq C \sum_{k=n+\left[\frac{m}{2}\right]}^{\infty} \left(|1 - a_k| + |b_k|\right)$$

elde edilir.

Lemma 3.2. Her $m \in \mathbb{N}$ için $\{A_{nm}\}_{n=1}^{\infty} \in l^1(\mathbb{N})$ gerçeklenir.

İspat: Lemma 3.1. yardımıyla

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} |A_{nm}| &\leq C\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=n+\left[\frac{m}{2}\right]}^{\infty} (|1-a_k| + |b_k|) \\
&\leq C\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{k} \left(\left|1-a_{k+\left[\frac{m}{2}\right]}\right| + \left|b_{k+\left[\frac{m}{2}\right]}\right|\right) \\
&= C\sum_{k=1}^{\infty} k\left(\left|1-a_{k+\left[\frac{m}{2}\right]}\right| + \left|b_{k+\left[\frac{m}{2}\right]}\right|\right) \\
&= C\sum_{k=1}^{\infty} k\left(|1-a_k| + |b_k|\right) < \infty
\end{aligned}$$

eşitsizliği gerçeklenir.

Dolayısıyla $\{A_{nm}\}_{n=1}^{\infty} \in l^1(\mathbb{N})$ elde edilir.Benzer şekilde $\{A_{nm}\}_{m=1}^{\infty} \in l^1(\mathbb{N})$ olduğu da gösterilebilir.

Buna göre aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 3.1. Her $n \in \mathbb{N}$ için (3.3) ile verilen $e_n(z)$ çözümü $\overline{\mathbb{C}_+} = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z \geq 0\}$ üzerinde sürekli ve $\mathbb{C}_+ = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$ bölgesinde analitiktir.

İspat: e^{inz} ile verilen fonksiyon $\mathbb{C}$ de analitik olduğundan

$$\sum_{m=1}^{\infty} A_{nm} m e^{imz} \tag{3.18}$$

serisinin düzgün yakınsak olduğu heryerde (3.3) ile verilen $e_n(z)$ fonksiyonları analitik olacaktır.

$\tau > 0$ olmak üzere her $m \in \mathbb{N}$ için

$$\left|A_{nm} m e^{imz}\right| \leq |A_{nm}|\, m e^{imz} \leq C m e^{-m\tau}$$

olduğundan ve

$$\sum_{n=1}^{\infty} m e^{-m\tau} \tag{3.19}$$

serisi yakınsak olduğundan Weierstrass Testi (Hahn and Epstein 1996) gereğince $\mathbb{C}_+$

üzerinde (3.18) serisi düzgün yakınsaktır.

Diğer yandan $\sum\limits_{m=1}^{\infty}\left|A_{nm}e^{imz}\right|$ serisi $\overline{\mathbb{C}_{+}}$üzerinde düzgün yakınsak ve e^{inz} ile tanımlı fonksiyonlar sürekli olduğundan $e_n(z)$ fonksiyonları, $\overline{\mathbb{C}_{+}}$ üzerinde sürekli türeve sahip ve $\mathbb{C}_{+}$ üzerinde analitiktir.

Lemma 3.3. (3.1) denkleminin (3.3) ile tanımlı $e_n(z)$ çözümü aşağıdaki asimptotik eşitlikleri gerçekler.

$$\begin{aligned} e_n(z) &= e^{inz}\left[1+o\left(1\right)\right], z\in\overline{\mathbb{C}_{+}}, n\to\infty && (3.20)\\ e_n(z) &= \alpha_n e^{inz}\left[1+o\left(1\right)\right], n\in\mathbb{N}, \operatorname{Im} z\to\infty && (3.21)\end{aligned}$$

İspat:$\{\ A_{nm}\}_{n=1}^{\infty}\in l^{1}(\mathbb{N})$ olduğundan $\lim\limits_{n\to\infty}A_{nm}=0$ dır. Dolayısıyla (3.3) ile verilen $e_n(z)$ için

$$\lim_{n\to\infty}e_n(z)e^{-inz}=\lim_{n\to\infty}\alpha_n=1$$

bulunur. Dolayısıyla (3.3) eşitliğinden

$$\lim_{n\to\infty}e_n\left(z\right)=e^{inz}\left[1+o\left(1\right)\right]$$

asimptotik eşitliği elde edilir.

$z=\varepsilon+i\tau$,$\tau\geq 0$ ve $m=1,2,...$için

$$\left|A_{nm}e^{imz}\right|\leq\left|A_{nm}\right|\left|e^{im\varepsilon}\right|\left|e^{-m\tau}\right|\leq\left|A_{nm}\right|$$

elde edilir.$\{A_{nm}\}_{m=1}^{\infty}\in l^{1}\left(\mathbb{N}\right)$ olduğundan $\sum\limits_{m=1}^{\infty}A_{nm}e^{imz}$ serisi $\overline{\mathbb{C}_{+}}$ üzerinde düzgün ve mutlak yakınsaktır.

Buna göre

$$\lim_{\tau\to\infty}\sum_{m=1}^{\infty}A_{nm}e^{imz}=\sum_{m=1}^{\infty}A_{nm}\left(\lim_{\tau\to\infty}e^{imz}\right)=0$$

elde edilir. Dolayısıyla (3.3) eşitliğinden

$$\lim_{\tau\to\infty}e_n(z)=\alpha_n e^{inz}\left[1+o(1)\right]$$

asimptotik eşitliği elde edilir.

4. NON SELFADJOINT DİSKRET SCHRÖDİNGER OPERATÖRÜNÜN RESOLVENTİ VE SPEKTRUMU

Bu bölümde L operatörüne ilişkin resolvent operatör, sürekli ve diskret spektrum ile spektral tekilliklerin özellikleri incelenecektir.

Tanım 4.1. (3.1) fark denkleminin $\phi = \{\phi_n(\lambda)\}_{n\in\mathbb{N}}$ ve $\varphi = \{\varphi_n(\lambda)\}_{n\in\mathbb{N}}$ olarak verilen iki çözümünün Wronskiyeni

$$W[\phi,\varphi]_n = \alpha_n \left\{\phi_n(\lambda)\varphi_{n+1}(\lambda) - \phi_{n+1}(\lambda)\varphi_n(\lambda)\right\} \tag{4.1}$$

olarak tanımlanır.

Teorem 4.1. (4.1) ile tanımlanan Wronskiyen n den bağımsızdır.

İspat: $\phi = \{\phi_n(\lambda)\}_{n\in\mathbb{N}}$ ve $\varphi = \{\varphi_n(\lambda)\}_{n\in\mathbb{N}}$ (3.1) fark denkleminin iki çözümü olsunlar. Δ ileri fark operatörü olmak üzere her $n \in \mathbb{N}$ için ,

$$\begin{aligned}
\Delta\left(W[\phi,\varphi]_n\right) &= W[\phi,\varphi]_n - W[\phi,\varphi]_{n-1} \\
&= \alpha_n\left(\phi_n(\lambda)\varphi_{n+1}(\lambda) - \phi_{n+1}(\lambda)\varphi_n(\lambda)\right) \\
&\quad -\alpha_{n-1}\left(\phi_{n-1}(\lambda)\varphi_n(\lambda) - \phi_n(\lambda)\varphi_{n-1}(\lambda)\right) \\
&= \phi_n(\lambda)\left(\alpha_n\varphi_{n+1}(\lambda) + \alpha_{n-1}\varphi_{n-1}(\lambda)\right) \\
&\quad -\varphi_n(\lambda)\left(\alpha_n\phi_{n+1}(\lambda) + \alpha_{n-1}\phi_{n-1}(\lambda)\right)
\end{aligned} \tag{4.2}$$

(3.1) denklemıinden

$$\alpha_n\varphi_{n+1}(\lambda) + \alpha_{n-1}\varphi_{n-1}(\lambda) = (\lambda - b_n)\varphi_n(\lambda)$$

$$\alpha_n\phi_{n+1}(\lambda) + \alpha_{n-1}\phi_{n-1}(\lambda) = (\lambda - b_n)\phi_n(\lambda)$$

eşitlikleri elde edilir.

Bu eşitlikler (4.2) de yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}\Delta\left(W\left[\phi,\varphi\right]_n\right) &= \phi_n\left(\lambda\right)\left(\lambda-b_n\right)\varphi_n\left(\lambda\right)-\varphi_n\left(\lambda\right)\left(\lambda-b_n\right)\phi_n\left(\lambda\right)\\ &= 0\end{aligned}$$

bulunur.

Buna göre $W\left[\phi,\varphi\right]_n = W\left[\phi,\varphi\right]_{n-1}$ olur ki bu Wronskiyenin n den bağımsız olduğunu gösterir.

Sonuç 4.1. $\phi = \left\{\phi_n\left(\lambda\right)\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ ve $\varphi = \left\{\varphi_n\left(\lambda\right)\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ (2.1) fark denkleminin iki çözümü olsunlar. Bu durumda bu iki çözümün lineer bağımsız olması için gerek ve yeter koşul

$$W\left[\phi,\varphi\right]\neq 0 \tag{4.3}$$

olmasıdır.

İspat: $W\left[\phi,\varphi\right]=0$ olsun. O halde (4.1) tanımından her $n\in\mathbb{N}$ için ,

$$\frac{\phi_n\left(\lambda\right)}{\phi_{n+1}\left(\lambda\right)}=\frac{\varphi_n\left(\lambda\right)}{\varphi_{n+1}\left(\lambda\right)}\Longrightarrow\phi_n\left(\lambda\right)=C\varphi_n\left(\lambda\right),\ C\neq 0$$

elde edilir. Bu ise ϕ ve φ çözümünün lineer bağımlı olduğunu gösterir.

Karşıt olarak ϕ ve φ çözümleri lineer bağımlı olsun. Bu durumda her $n\in\mathbb{N}$ için $\phi_n\left(\lambda\right)=C\varphi_n\left(\lambda\right)$ olacak biçimde $C\neq 0$ sayısı vardır. Buna göre

$$\begin{aligned}W\left[\phi,\varphi\right] &= \alpha_n\left\{\phi_n\left(\lambda\right)\varphi_{n+1}\left(\lambda\right)-\phi_{n+1}\left(\lambda\right)\varphi_n\left(\lambda\right)\right\}\\ &= \alpha_n\left\{C\varphi_n\left(\lambda\right)\varphi_{n+1}\left(\lambda\right)-C\varphi_n\left(\lambda\right)\varphi_n\left(\lambda\right)\right\}\\ &= 0\end{aligned}$$

olur.

Bundan sonra L operatörünün resolventini elde edeceğiz.

Teorem 4.2. L operatörüne ait Resolvent operatörü,

$$G_{nm}(z) = \begin{cases} -\frac{\varphi_m(z)e_n(z)}{e_0(z)}, m < n \\ -\frac{\varphi_n(z)e_m(z)}{e_0(z)}, m \geq n \end{cases} \tag{4.4}$$

Green fonksiyonu olmak üzere

$$(R_\lambda(L)\psi)_n := \sum_{m=1}^{\infty} G_{nm}(z)\psi_m, \qquad \psi = \{\psi_m\}_{m\in\mathbb{N}} \in l^2(\mathbb{N}), n \in \mathbb{N}$$

ile verilir.

İspat: $\varphi = \{\varphi_n\}$, (3.1) denkleminin $\varphi_0 = 0$ ve $\varphi_1 = 1$ sınır koşullarını sağlayan çözümü olsun.

$$W[\varphi_n(z), e_n(z)] = \alpha_n \left\{\varphi_n(z)e_{n+1}(z) - \varphi_{n+1}(z)e_n(z)\right\}$$

Lemma 4.1 gereğince n den bağımsız olduğundan

$$\begin{aligned} W[\varphi_n(z), e_n(z)]_{n=0} &= \alpha_0\{\varphi_0(z)e_1(z) - \varphi_1(z)e_0(z)\} \\ &= -e_0(z) \neq 0 \end{aligned}$$

olup bu iki çözüm lineer bağımsızdır. Dolayısıyla $\varphi_n(z)$ ve $e_n(z)$ (3.1) denkleminin temel çözümler sistemini oluşturur. O halde $h(z) := \{h_n(z)\}_{n\in\mathbb{N}}$

$$a_{n-1}h_{n-1} + b_nh_n + a_{n+1}h_{n+1} - \lambda h_n = \psi_n(z) \tag{4.5}$$

homogen olmayan denklemin bir çözümü olmak üzere

$$h_n(z) = c_ne_n(z) + d_n\varphi_n(z)$$

eşitliği gerçeklenecek şekilde $c_n \neq 0$ ve $d_n \neq 0$ katsayıları vardır. Buradan $h_{n-1}(z)$ e $\left(c_n e_{n-1}(z) + d_n \varphi_{n-1}(z)\right)$ ifadesini ekleyip çıkarırsak

$$\begin{aligned} h_{n-1}(z) &= c_{n-1}e_{n-1}(z) + d_{n-1}\varphi_{n-1}(z) + c_n e_{n-1}(z) + d_n \varphi_{n-1}(z) \\ &\quad - c_n e_{n-1}(z) - d_n \varphi_{n-1}(z) \end{aligned}$$

olur.

Bu durumda

$$\begin{aligned} h_{n-1}(z) &= -\left[(c_n - c_{n-1}) e_{n-1}(z) + (d_n - d_{n-1}) \varphi_{n-1}(z)\right] \\ &\quad + c_n e_{n-1}(z) + d_n \varphi_{n-1}(z) \end{aligned}$$

elde edilir. Parametrelerin Değişimi Yönteminden

$$\left[(c_n - c_{n-1}) e_{n-1}(z) + (d_n - d_{n-1}) \varphi_{n-1}(z)\right] = 0$$

denilir, buradan

$$[(c_{n+1} - c_n) e_n(z) + (d_{n+1} - d_n) \varphi_n(z)] = 0 \tag{4.6}$$

ve dolayısıyla

$$h_{n-1}(z) = c_n e_{n-1}(z) + d_n \varphi_{n-1}(z)$$

olur. Benzer düşünceyle

$$\begin{aligned} h_{n+1}(z) &= c_{n+1}e_{n+1}(z) + d_{n+1}\varphi_{n+1}(z) \\ &= \left[(c_{n+1} - c_n) e_{n+1}(z) + (d_{n+1} - d_n) \varphi_{n+1}(z)\right] \\ &\quad + c_n e_{n+1}(z) + d_n \varphi_{n+1}(z) \end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir.

Bu ifadeleri (4.5) denkleminde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
& a_{n-1}\left[c_n e_{n-1}(z)+d_n \varphi_{n-1}(z)\right]+b_n\left[c_n e_n(z)+d_n \varphi_n(z)\right] \\
& +a_n\left[\left[\left(c_{n+1}-c_n\right) e_{n+1}(z)+\left(d_{n+1}-d_n\right) \varphi_{n+1}(z)\right]+c_n e_{n+1}(z)+d_n \varphi_{n+1}(z)\right] \\
& -\lambda\left(c_n e_n(z)+d_n \varphi_n(z)\right) \\
= & \psi_n(z)
\end{aligned}$$

bulunur. Gerekli sadeleştirmeler yapılırsa

$$a_n\left[\left(c_{n+1}-c_n\right) e_{n+1}(z)+\left(d_{n+1}-d_n\right) \varphi_{n+1}(z)\right]=\psi_n(z)$$

bulunur, böylece

$$\begin{aligned}
\left[\left(c_{n+1}-c_n\right) e_n(z)+\left(d_{n+1}-d_n\right) \varphi_n(z)\right] &= 0 \qquad (4.7)\\
a_n\left[\left(c_{n+1}-c_n\right) e_{n+1}(z)+\left(d_{n+1}-d_n\right) \varphi_{n+1}(z)\right] &= \psi_n(z) \qquad (4.8)
\end{aligned}$$

denklem sistemi elde edilir. (4.7) eşitliği $\left(a_n e_{n+1}(z)\right)$ ve (4.8) eşitliği $-e_n(z)$ ile çarpar ve taraf tarafa toplarsak

$$a_n\left(d_{n+1}-d_n\right)\left[\varphi_n(z) e_{n+1}(z)-\varphi_{n+1}(z) e_n(z)\right]=-\psi_n(z) e_n(z)$$

bulunur.

$$W\left[\varphi_n(z) e_n(z)\right]=a_n\left[\varphi_n(z) e_{n+1}(z)-\varphi_{n+1}(z) e_n(z)\right]=-e_0(z)$$

olduğundan

$$d_{n+1}-d_n=\frac{\psi_n(z) e_n(z)}{e_0(z)}$$

elde edilir.

Benzer şekilde birinci denklem $\left(a_n \varphi_{n+1}(z)\right)$ ve ikinci denklem $\left(-\varphi_n(z)\right)$ ile çarpılırsa

$$a_n\left(c_{n+1}-c_n\right)\left[-\varphi_n(z) e_{n+1}(z)+\varphi_{n+1}(z) e_n(z)\right]=-\psi_n(z) \varphi_n(z)$$

bulunur ve Wronskiyenleri kullanılırsa

$$c_{n+1} - c_n = \frac{-\psi_n(z)\,\varphi_n(z)}{e_0(z)}$$

elde edilir.

Buradan

$$\begin{aligned}
c_1 - c_0 &= -\frac{\psi_0(z)\,\varphi_0(z)}{e_0(z)} \\
c_2 - c_1 &= -\frac{\psi_1(z)\,\varphi_1(z)}{e_0(z)} \\
c_3 - c_2 &= -\frac{\psi_2(z)\,\varphi_2(z)}{e_0(z)} \\
&\vdots \\
c_n - c_{n-1} &= -\frac{\psi_{n-1}(z)\,\varphi_{n-1}(z)}{e_0(z)}
\end{aligned}$$

bulunur.

Buradan

$$c_n - c_0 = -\sum_{k=1}^{n-1} \frac{\psi_k(z)\,\varphi_k(z)}{e_0(z)}$$

dolayısıyla

$$c_n = c_0 - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\psi_k(z)\,\varphi_k(z)}{e_0(z)}$$

bulunur. Benzer şekilde

$$\begin{aligned}
d_n - d_{n-1} &= \frac{\psi_{n-1}(z)\,e_{n-1}(z)}{e_0(z)} \\
d_{n+1} - d_n &= \frac{\psi_n(z)\,e_n(z)}{e_0(z)} \\
&\vdots \\
d_m - d_{m-1} &= \frac{\psi_{m-1}(z)\,e_{m-1}(z)}{e_0(z)}
\end{aligned}$$

buradan

$$d_m - d_{n-1} = \sum_{k=n-1}^{m} \frac{\psi_n(z)\, e_n(z)}{e_0(z)}$$

elde edilir.

$$\lim_{m\to\infty} d_m = d$$

için

$$d_n = d - \sum_{k=n}^{\infty} \frac{\psi_k(z)\, e_k(z)}{e_0(z)}$$

sonucu elde edilir.

Bulduğumuz c_n ve d_n ifadelerini

$$h_n(z) = c_n e_n(z) + d_n \varphi_n(z)$$

ifadesinde yerlerine yazarsak

$$h_n(z) = c e_n(z) + d\varphi_n(z) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\psi_k(z)\, \varphi_k(z)}{e_0(z)} e_n(z) - \sum_{k=n}^{\infty} \frac{\psi_k(z)\, e_k(z)}{e_0(z)} \varphi_n(z)$$

bulunur.

$\{h_n(z)\} \in l^2(\mathbb{N})$ olması gerekeceğinden ve $\varphi_n(z) \notin l^2(\mathbb{N})$ olduğundan $d = 0$ olmalıdır.

Ayrıca $h_0(z) = 0$ başlangıç koşulundan

$$h_0(z) = c e_0(z)$$

ve $e_0(z) \neq 0$ olduğundan $c = 0$ elde edilir.

Bu durumda

$$h_n(z) = -\left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\psi_k(z)\, \varphi_k(z)}{e_0(z)} e_n(z) + \sum_{k=n}^{\infty} \frac{\psi_k(z)\, e_k(z)}{e_0(z)} \varphi_n(z) \right)$$

bulunur.

$$h_n(z) = -\left(\sum_{m=0}^{n-1} \frac{e_n(z)\, \varphi_m(z)}{e_0(z)} \psi_m(z) + \sum_{m=n}^{\infty} \frac{\varphi_n(z)\, e_m(z)}{e_0(z)} \psi_m(z) \right)$$

elde edilir.

Dolayısıyla Green fonksiyonu,

$$G_{nm}(z) = \begin{cases} -\frac{e_n(z)\varphi_m(z)}{e_0(z)}, m < n \\ -\frac{\varphi_n(z)e_m(z)}{e_0(z)}, m \geq n \end{cases}$$

şeklinde elde edilir.

Şimdi L operatörünün sürekli spektrumunu bulmak için bazı lemmalar verececeğiz.

$$\begin{aligned} (l_1 y)_1 &= y_2 \\ (l_1 y)_n &= y_{n-1} + y_{n+1}, n \geq 2 \end{aligned} \tag{4.9}$$

ve

$$(l_2 y)_n = (a_{n-1} - 1)y_{n-1} + (a_n - 1)y_{n+1} + b_n y_n, n \in \mathbb{N} \tag{4.10}$$

ifadeleriyle $l^2(\mathbb{N})$ uzayında üretilen operatörler sırasıyla L_1 ve L_2 ile gösterilsin. Bu durumda

$$L = L_1 + L_2$$

gerçeklenir.

Lemma 4.1. L_1 operatörü lineer, sınırlı ve selfadjointtir.

L_1 operatörünün lineer olduğu açıktır.

Her $\varphi = \{\varphi_n(\lambda)\}$ ve $n \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned}
\|L_1\varphi\| &= \left\{\sum_{n=1}^{\infty} |(l_1\varphi)_n|^2\right\}^{\frac{1}{2}} \\
&= \left\{\sum_{n=1}^{\infty} |\varphi_{n-1} + \varphi_{n+1}|^2\right\}^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \left\{\left(\sum_{n=1}^{\infty} |\varphi_{n-1}| + \sum_{n=1}^{\infty} |\varphi_{n+1}|\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\varphi_{n-1}|^2\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\varphi_{n+1}|^2\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq 2\|\varphi\|
\end{aligned}$$

bulunur. O halde L_1 sınırlıdır.

Her $\varphi = \{\varphi_n(\lambda)\}$, $\psi = \{\psi_n(\lambda)\} \in l^2(\mathbb{N})$ için

$$\begin{aligned}
\langle L_1\varphi, \psi\rangle &= \sum_{n=1}^{\infty} (\varphi_{n-1} + \varphi_{n+1})\,\overline{\psi_n} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_{n-1}\overline{\psi_n} + \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_{n+1}\overline{\psi_n} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n\overline{\psi_{n+1}} + \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n\overline{\psi_{n-1}} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n\overline{(\psi_{n-1} + \psi_{n+1})} \\
&= \langle \varphi, L_1\psi\rangle
\end{aligned}$$

elde edilir. O halde L_1 simetriktir. Dolayısıyla Teorem 2.5. gereğince L_1 operatörü self adjointtir.

Lemma 4.2. L_2 operatörü kompakt bir operatördür.

İspat: L_2 operatörünün lineer olduğu açıktır. O halde ispatı tamamlamak için $M \subset l^2(\mathbb{N})$ sınırlı bir küme olmak üzere $M_1 = L_2(M)$ olsun. Bu durumda L_2 operatörünün kompakt olduğunu göstermek için M_1 kümesinin kompakt olduğunu göstermek yetecektir.

Ayrıca M sınırlı olduğundan her $\psi \in M$ için $\|\psi\| \leq K$ olacak biçimde bir $K > 0$

sabiti vardır.

Buna göre her $\varphi \in M_1$ için $\varphi = L_2\psi$ olacak biçimde enaz bir ψ vardır, ve $a^2 + b^2 + 2ab \leq 2a^2 + 2b^2$ eşitsizliği ve (3.2) koşulu yardımıyla

$$\begin{aligned}
\|\varphi\|^2 &= \|L_2\psi\|^2 \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \left|(a_{n-1}-1)\,\psi_{n-1} + (a_n - 1)\,\psi_{n+1} + b_n\psi_n\right|^2 \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \left\{|a_{n-1}-1|\left|\psi_{n-1}\right| + |a_n - 1|\left|\psi_{n+1}\right| + |b_n|\left|\psi_n\right|\right\}^2 \\
&\leq \|\psi\|^2 \sum_{n=1}^{\infty} \{|a_{n-1}-1| + |a_n - 1| + |b_n|\} \\
&\leq 2K^2 \sum_{n=1}^{\infty} \{|a_n - 1| + |b_n|\}
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu ise M_1 kümesinin sınırlı olduğunu gösterir.

Buna göre M kümesinden olan bütün elemanların normlarının kareleri bir sabitten küçüktür. O halde M sınırlı kümesinin L_2 altındaki görüntüsü olan M_1 de düzgün sınırlıdır. Şimdi M_1 den olan tüm φ lerin kalan teriminin düzgün olarak sıfıra gittiğini gösterelim.

$\psi = \{\psi_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in M \subset l^2(\mathbb{N})$ için
$\forall\varphi = \{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}} = l_2\psi \in M_1$ idi.$\forall\varepsilon > 0$ için bir N_0 vardır öyle ki $\forall n > N_0$ için $\sum\limits_{k=n+1}^{\infty} |\varphi_k|^2 < \varepsilon^2$ olacak biçimde bir $N_0(\varepsilon) > 0$ sayısı vardır.
$\|\psi\| \leq B$, B sabit, $\psi = \{\psi_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in M \subset l^2(\mathbb{N})$ olduğundan

$$\begin{aligned}
\sum_{k=n+1}^{\infty} |\varphi_k|^2 &\leq 4\sum_{k=n+1}^{\infty} |(a_{k-1}-1)|^2 \sum_{k=n+1}^{\infty} \left|\psi_{k-1}\right|^2 + 4\sum_{k=n+1}^{\infty} |b_k|^2 \sum_{k=n+1}^{\infty} |\psi_k|^2 \\
&\quad +2\sum_{k=n+1}^{\infty} |(a_k - 1)|^2 \sum_{k=n+1}^{\infty} \left|\psi_{k+1}\right|^2 \\
&\leq 4B\sum_{k=n+1}^{\infty} |(a_{k-1}-1)|^2 + 4B\sum_{k=n+1}^{\infty} |b_k|^2 + 2B\sum_{k=n+1}^{\infty} |(a_k - 1)|^2
\end{aligned}$$

Buradan

$$\leq 6AB\sum_{k=n+1}^{\infty}\left(|a_k-1|+|b_k|\right)$$

(3.2) koşulundan ise $\exists N_0$ bulabiliriz ki $\forall\psi\in M$ için $n>N_0$ oldukça $\sum\limits_{k=n+1}^{\infty}|\varphi_k|^2<\varepsilon^2$ sağlanır. Böylece L_2 operatörünün kompakt olduğu elde edilir.

Lemma 4.3. L_1 operatörünün tüm özdeğerleri reeldir.

İspat: Lemma 4.2 gereğince L_1 operatörü sınırlı ve self adjointtir. O halde Teorem 2.7. gereğince L_1 operatörünün tüm özdeğerleri reeldir.

Teorem 4.3. L_1 operatörü için

$$M=\sup_{\|\varphi\|=1}\langle L_1\varphi,\varphi\rangle=2$$

ve

$$m=\inf_{\|\varphi\|=1}\langle L_1\varphi,\varphi\rangle=-2$$

gerçeklenir.

İspat: $\varphi\in l^2(\mathbb{N})$ olmak üzere $M=\sup\limits_{\|\varphi\|=1}\langle L_1\varphi,\varphi\rangle=2$ olduğunu gösterelim. $\varphi_0=0$ olmak üzere

$$\begin{aligned}\langle L_1\varphi,\varphi\rangle &= \sum_{n=1}^{\infty}\left(\varphi_{n-1}+\varphi_{n+1}\right)\overline{\varphi_n}\\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\varphi_{n-1}\overline{\varphi_n}+\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_{n+1}\overline{\varphi_n}\\ &= \sum_{n=2}^{\infty}\varphi_{n-1}\overline{\varphi_n}+\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_{n+1}\overline{\varphi_n}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n\overline{\varphi_{n+1}}+\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_{n+1}\overline{\varphi_n} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\left(\varphi_n\overline{\varphi_{n+1}}+\varphi_{n+1}\overline{\varphi_n}\right) \\
&= 2\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{Re}(\varphi_{n+1}\overline{\varphi_n}) \\
&\leq \sum_{n=1}^{\infty}\left(\left|\varphi_{n+1}\right|^2+\left|\varphi_n\right|^2\right) \\
&\leq 2\left\|\varphi\right\|^2 \\
&= 2
\end{aligned}
$$

elde edilir.

Ayrıca özel olarak $\varphi=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0,0...0...\right)\in l^2\left(\mathbb{N}\right)$ alınırsa,

$$\langle L_1\varphi,\varphi\rangle=2$$

olacağından

$$\sup_{\|\varphi\|=1}\langle L_1\varphi,\varphi\rangle=2$$

bulunur.

Benzer şekilde,

$$
\begin{aligned}
\langle L_1\varphi,\varphi\rangle &= 2\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{Re}(\varphi_{n+1}\overline{\varphi_n}) \\
&\geq -\sum_{n=1}^{\infty}\left(\left|\varphi_{n+1}\right|^2+\left|\varphi_n\right|^2\right) \\
&\geq -\sum_{n=1}^{\infty}\left|\varphi_{n+1}\right|^2-\sum_{n=1}^{\infty}\left|\varphi_n\right|^2 \\
&\geq -\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left|\varphi_{n+1}\right|^2\right)-\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left|\varphi_n\right|^2\right) \\
&= -2
\end{aligned}
$$

olup

$$\inf_{\|\varphi\|=1} \langle L_1\varphi, \varphi\rangle \geq -\inf_{\|\varphi\|=1} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\left|\varphi_{n+1}\right|^2 + \left|\varphi_n\right|^2 \right)$$

gerçeklenir. Özel olarak $\varphi = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0...0... \right)$ alınırsa

$$\inf_{\|\varphi\|=1} \langle L_1\varphi, \varphi\rangle = -2$$

elde edilir.

Sınırlı selfadjoint lineer L_1 operatörünün spektrumunun $[-2, +2]$ olduğunu söyleyebilmek için bu aralık dışında kalan λ sayılarının spektrumun tümleyeni olan $\rho(L_1)$ resolvent kümesine ait olduğunu göstermek yeterli olacaktır.

Öncelikle $\lambda = M + \zeta = 2 + \zeta$ nın $\rho(L_1)$ resolvent kümesine ait olduğunu gösterelim. $\forall x \neq 0, v = x\,\|x\|^{-1}$ için $x = \|x\|\, v$ ve

$$\begin{aligned} \langle L_1 x, x\rangle &= \langle L_1(\|x\|\, v), (\|x\|\, v)\rangle \\ &= \langle \|x\|\, L_1 v, \|x\|\, v\rangle \\ &= \|x\|^2 \langle L_1 v, v\rangle \\ &\leq \|x\|^2 \sup_{\|u\|=1} \langle L_1 u, u\rangle \\ &= 2\,\|u\|^2 \end{aligned}$$

elde edilir.

$M = 2$ için

$$\langle L_1 x, x\rangle \leq 2\,\langle x, x\rangle$$

eşitliğinde her iki taraf $(-)$ ile çarpılırsa

$$-\langle Lx, x\rangle \geq -2\,\langle x, x\rangle$$

ve Schwarz Eşitsizliği'nden,

$$L_{1_\lambda}x = L_1 x - \lambda x$$

için

$$\begin{aligned} \|L_{1_\lambda}x\| \, . \, \|x\| &\geq -\langle L_{1_\lambda}x, x\rangle \\ &= -\langle L_1 x, x\rangle + \lambda \langle x, x\rangle \\ &\geq -2\langle x, x\rangle + \lambda \langle x, x\rangle \end{aligned}$$

olup

$$\|L_{1_\lambda}x\| \, . \, \|x\| \geq (-2+\lambda)\|x\|^2$$

elde edilir. $\zeta = \lambda - 2$ için eşitsizliğin her iki tarafını $\|x\|$ ile bölersek;

$$\|L_{1_\lambda}x\| \geq (-2+\lambda)\|x\|$$

bulunup istenilen $\|L_{1_\lambda}x\| \geq \zeta \|x\|$ eşitsizliği elde edilir. Bu ise Teorem 2.6. gereğince

$$\lambda = 2 + \zeta \in \rho(L_1)$$

olduğunu gösterir.

Benzer şekilde

$$\lambda = m - \zeta = -2 - \zeta$$

alınıp

$\forall x \neq 0, v = x \|x\|^{-1}$ için $x = \|x\| v$ ve

$$\begin{aligned} \langle L_1 x, x \rangle &= \|x\|^2 \langle L_1 v, v \rangle \\ &\geq \|x\|^2 \inf_{\|u\|=1} \langle L_1 u, u \rangle \\ &= -2 \|x\|^2 \end{aligned}$$

olup Schwarz Eşitsizliği'nden

$$\begin{aligned} \|L_{1_\lambda} x\| . \|x\| &\geq \langle L_\lambda x, x \rangle \\ &= \langle L_1 x, x \rangle - \lambda \langle x, x \rangle \\ &\geq -2 \langle x, x \rangle - \lambda \langle x, x \rangle \\ &= (-2 - \lambda) \|x\|^2 \end{aligned}$$

olup $\zeta = -2 - \lambda$ için eşitsizliğn her iki tarafı $\|x\|$ ile sadeleştirilirse

$$\|L_{1_\lambda} x\| . \|x\| \geq k \|x\|$$

elde edilir. Bu da Teorem 2.6. gereğince $\lambda = -2 - \zeta \in \rho(L_1)$ olduğunu söyler. Dolayısıyla $[-2, +2]$ aralığının dışındaki noktaların spektrumun elemanı olmadığı elde edilir. Şimdi -2, $+2$ noktalarının spektrumun elemanı olduğunu ispatlayacağız. $p(L_1)$ polinom olsun. Spektral dönüşüm teoremi gereğince $L_1 + \zeta I$ nın spektrumu L_1 operatörünün spektrumun ötelenmesiyle elde edilir ve

$$2 \in \sigma(L_1) \implies 2 + k \in \sigma(L_1 + \zeta I)$$

sağlanır.

Teorem 2.11 gereğince L_1 operatörü için

$$\|L_1\| = \sup_{\|x\|=1} |\langle Lx, x\rangle| = 2$$

gerçeklenir.

Supremum tanımı gereğince her $n \in \mathbb{N}$ için $\delta_n \geq 0$ olmak üzere $\lim \delta_n = 0$ olacak biçimde δ_n dizisi için

$$|\langle L_1 x_n, x_n\rangle| = 2 - \delta_n$$

$\|x_n\| = 1$ şartını sağlayan $(x_n) \in l^2(\mathbb{N})$ vardır.

$$\begin{aligned}
\|L_{1_2} x\| &= \|L_1 x - 2x\|^2 \\
&= \langle L_1 x - 2x, L_1 x - 2x\rangle \\
&\leq \|L_1\|^2 - 4\langle L_1 x, x\rangle + 4\|x\|^2 \\
&= 4 - 4(2 - \delta_n) + 4 \\
&= 4\delta_n
\end{aligned}$$

bulunur. Buradan $n \to \infty$ için

$$\|(L_1 x_n)\| \to 0$$

elde edilir ki bu da her $x \in l^2(\mathbb{N})$ için

$$\|L_1 x\| = \|L_1 x - 2x\| \geq C\|x\|$$

olacak şekilde bir $C > 0$ sayısı bulanamayacağını gösterir. Dolayısıyla $2 \notin \rho(L_1)$ olup, resolvent cümlesinin elemanı olmadığı görülür. Benzer şekilde $-2 \notin \rho(L_1)$

olup, -2 ve $+2$ sayılarının spektrumun elemanı oldukları elde edilir. O halde

$$\sigma\left(L_1\right) \subset [-2,+2] \tag{4.11}$$

bulunur.

Lemma 4.4. $[-2,+2] \subset \sigma_c\left(L_1\right)$

İspat: L_1 operatörünün resolvent operatörü,

$$\left(R_\lambda\left(L_1\right)\varphi\right)_n = \sum_{m=1}^{\infty} G_{nm}\varphi_m$$

olup, burada

$$G_{nm}\left(z\right) = \begin{cases} \frac{e^{-imz}e^{inz}}{2i\sin z}, m < n \\ \frac{e^{imz}e^{-inz}}{2i\sin z}, m \geq n \end{cases}$$

şeklinde tanımlıdır.

$$\varphi_m\left(z\right) = \begin{cases} \overline{e^{-imz}e^{inz}}, m < n \\ \overline{e^{imz}e^{-inz}}, m \geq n \end{cases}$$

şeklinde ifade edilen fonksiyon dizisi tanımlansın.

$$\begin{aligned} \left\|\varphi_m\left(z\right)\right\|^2 &= \sum_{m=1}^{n-1}\left|e^{-imz}e^{inz}\right|^2 + \sum_{m=n}^{\infty}\left|e^{imz}e^{-inz}\right|^2 \\ &\leq \sum_{m=1}^{n-1} e^{2(n-m)\operatorname{Im} z} + \sum_{m=n}^{\infty} e^{-2(m-n)\operatorname{Im} z} \\ &< \infty \end{aligned}$$

olduğundan $\varphi \in l^2(\mathbf{N})$ sonucu elde edilir. Her $n \in \mathbf{N}$ için

$$\begin{aligned}
(R_\lambda(L_1)\varphi)_n &= \sum_{m=1}^{\infty} G_{nm}\varphi_m \\
&= \frac{1}{2i\sin z}\left[\sum_{m=1}^{n-1} e^{-imz}e^{inz}.\overline{e^{-imz}e^{inz}} + \sum_{m=n}^{\infty} e^{imz}e^{-inz}.\overline{e^{imz}e^{-inz}}\right] \\
&= \frac{1}{2i\sin z}\left[\sum_{m=1}^{n-1}\left|e^{-imz}e^{inz}\right|^2 + \sum_{m=n}^{\infty}\left|e^{imz}e^{-inz}\right|^2\right] \\
&= \frac{1}{2i\sin z}\|\varphi\|^2
\end{aligned}$$

olur. Buna göre

$$\begin{aligned}
(R_\lambda(L_1)\varphi)_n &= \frac{1}{2i\sin z}\|\varphi\|^2 \\
&\geq \frac{1}{2i\sin z}\sum_{m=n}^{\infty}\left|e^{2i(m-n)z}\right| \\
&= \frac{1}{2i\sin z}\sum_{m=n}^{\infty}\left|e^{2iz}\right|^{(m-n)} \\
&= \frac{1}{2i\sin z}\frac{1}{1-e^{2\operatorname{Im} z}}
\end{aligned}$$

ifadesi bulunur. Bu ifade de $\operatorname{Im} z \to 0$ için $\|R_\lambda(L_1)\| \to \infty$ bulunur. Bu ise $R_\lambda(L_1)$ operatörünün $\operatorname{Im} z = 0$ için sınırsız olduğunu gösterir. $z \in [0, 2\pi]$ için $\lambda \in [-2, +2]$ olup $[-2, +2] \subset \sigma_c(L_1)$ sonucu elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Lemma 4.5. $\sigma_d(L_1) = \emptyset$

İspat:

$$\begin{aligned}
L_1 y &= \lambda y = (2\cos z)\, y \\
y_0 &= 0
\end{aligned}$$

denkleminin aşikar olmayan çözümleri $f(z) = (f_n(z)) = (e^{inz})$ ve $g(z) = (g_n(z)) = (e^{-inz})$ olup $\operatorname{Im} z = 0$ için $f(z)\,,\, g(z) \notin l^2(\mathbb{N})$ olduğundan $\sigma_d(L_1) = \emptyset$ gerçeklenir.

Teorem 4.4. $\sigma_c(L) = [-2, +2]$

İspat: $\sigma_d(L_1) = \emptyset$ ve Teorem 2.8. gereğince $\sigma_r(L_1) = \emptyset$ olduğu biliniyor. Weyl

Kompakt Heyecanlandırma Teoremi gereğince

$$\sigma_c(L) = \sigma_c(L_1) = \sigma(L_1)$$

gerçeklenir. Lemma 4.4. ve Teorem 4.3 gereğince,

$$[-2, +2] \subset \sigma_c(L) = \sigma_c(L_1) = \sigma(L_1) \subset [-2, +2]$$

elde edilir. Buradan

$$\sigma_c(L) = [-2, +2]$$

bulunur.

Aşağıdaki yarı şeritleri tanımlayalım.

$$\begin{aligned} P_0 &= \{z \mid z = \varepsilon + i\tau, \tau > 0, 0 \leq \varepsilon \leq 2\pi\} && (4.12) \\ P &= P_0 \cup [0, 2\pi] && (4.13) \end{aligned}$$

olsun.

Teorem 4.5. L operatörünün özdeğerlerinin kümesi

$$\sigma_d(L) = \{\lambda : \lambda = 2\cos z, z \in P_0, e_0(z) = 0\} \tag{4.14}$$

ve spektral tekilliklerinin kümesi

$$\sigma_{ss}(L) = \{\lambda : \lambda = 2\cos z, z \in [0, 2\pi], e_0(z) = 0\} \tag{4.15}$$

şeklinde tanımlıdır (Bairamov et al 2001).

İspat: Özdeğer ve spektral tekillikler tanımları gereği resolvent operatörün kutupları olmalıdır, dolayısıyla $e_0(z) = 0$ için z kompleks sayılarını inceleriz.

Resolvent operatörün var olması $(L-\lambda I)$ operatörünün tersinin var olması anlamına gelir.

$$(L-\lambda I)^{-1} : R(L) \to l^2(\mathbb{N})$$

ters operatörünün var olması için $Cek(L-\lambda I)=0$ olmalıdır, yani

$$Ly = 0 \implies y = 0$$

olmalıdır.

Kabul edelim ki

$$Cek(L-\lambda I) \neq 0$$

yani

$$(L-\lambda I)e(z) = 0$$

olacak şekilde $e(z) \neq 0$ olsun.

$$Le = \lambda e$$

olacak şekilde ki $e(z)$ için, $e(z) \in l_2(\mathbb{N})$ ise bir özvektördür ancak $(L-\lambda I)^{-1}$ mevcut değil iken $e(z) \notin l_2(\mathbb{N})$ ise bu z kompleks sayılarına karşılık gelen λ sayıları özdeğer olmayan spektral değerdir.

$z \in P_0$ ise $\operatorname{Im} z \neq 0$ olup (3.3) ile verilen $\{e_n(z)\}$ çözümü her $n \in \mathbb{N}$ için

$$|e_n(z)|^2 \leq C\left|e^{inz}\right| = Ce^{-2n \operatorname{Im} z}$$

ve $\sum\limits_{n=1}^{\infty} e^{-2n \operatorname{Im} z}$ serisi yakınsak olduğundan Karşılaştırma Teoremi gereğince $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |e_n(z)|^2$ serisi yakınsak yani $e(z) \in l_2(\mathbb{N})$ gerçeklenir. Dolayısıyla eğer $e_0(z) = 0$ ise $\{e_n(z)\}$ bir öz vektör olacağından $\lambda = 2\cos z \in \sigma_d(L)$ olur.

Eğer $z \in [0, 2\pi]$ ise

$$e_n(z) = 1 + o(1), n \to \infty$$

olduğundan $e_n(z) \notin l_2(\mathbb{N})$ gerçeklenir.

Bu da bize (4.14) ve (4.15) ile tanımlanan $\sigma_d(L)$ ve $\sigma_{ss}(L)$ kümelerini verir.

Teorem 4.6. (3.2) koşulu altında L operatörünün özdeğerleri kümesi sınırlıdır, sayılabilirdir ve eğer varsa bu kümenin limit noktaları $[-2,+2]$ kapalı aralığının elemanıdır.

İspat:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\left(|1-a_n|+|b_n|\right)<\infty$$

koşulu altında

$$e_0(z)=\alpha_0\left[1+o(1)\right], \operatorname{Im} z>0, \operatorname{Im} z\rightarrow\infty$$

asimptotik eşitliği sağlanır. Buna göre P_0 yarı şeridindeki sıfırlarının kümesinin sınırlı olduğu görülür. $e_0(z)$,$\mathbb{C}_+$ da analitik bir fonksiyon olup Teorem 2.13 gereğince P_0 yarı şeridi içindeki sıfır yerleri ayrıktır. $e_0(z)$ çözümünün P_0 yarı şeridi içindeki sıfırları sınırlı ve ayrık olduğundan en fazla sayılabilir sayıdadır. Ayrıca Teorem 2.15 gereğince $e_0(z)$ çözümünün P_0 yarı şeridi içindeki sıfırlarının limit noktaları $[0,2\pi]$ aralığında yani reel eksen üzerinde yer alır. $\lambda=2\cos z$ dönüşümü sonucunda λ sayılarının $[-2,+2]$ kapalı aralığında yer aldığı görülür.

Teorem 4.7. (3.2) koşulu altında $\sigma_{ss}(L)\subset[-2,+2]$, $\sigma_{ss}(L)=\overline{\sigma_{ss}(L)}$ ve $\sigma_{ss}(L)$ kümesinin Lebeque ölçüsü sıfırdır.

İspat:

$$\sigma_{ss}=\{\lambda:\lambda=2\cos z, z\in[0,2\pi]\ \ e_0(z)=0\}\subset[-2,+2]$$

olduğu açıktır.

$e_0(z)$, reel eksende sürekli olduğundan $e_0(z)$ fonksiyonunun $[0,2\pi]$ aralığındaki sıfırlarının kümesi kapalıdır.

i) $\sigma_{ss}(L)\subset\overline{\sigma_{ss}(L)}$ olduğu açıktır.

ii) $\overline{\sigma_{ss}(L)}\subset\sigma_{ss}(L)$ sağlandığını gösterirsek ispat tamamlanır.

$\lambda\in\overline{\sigma_{ss}(L)}$ alalım. $(\lambda_n)\rightarrow\lambda$ olacak şekilde bir dizisi mevcuttur. Bu (λ_n) dizisine karşılık $\lambda_n=2\cos z_n$ olacak biçimde bir (z_n) dizisi vardır, öyle ki $n\rightarrow\infty$ için $z_n\rightarrow z$

gerçeklenir. $e_0(z)$, reel eksende sürekli olduğundan $e_0(z_n) \to e_0(z)$ olup $z \in \mathbb{R}$ olur. Dolayısıyla $\lambda \in \sigma_{ss}(L)$ elde edilir.
(i) ve **(ii)** gereğince $\sigma_{ss}(L) = \overline{\sigma_{ss}(L)}$ gerçeklenir.
$e_0(z)$ fonksiyonunun reel sıfırlarının kümesi $\sigma_{ss}(L)$ kümesine karşılık geldiğinden Privalov Teoremi gereğince $\mu(\sigma_{ss}(L)) = 0$ olur.

Tanım 4.2. $e_0(z)$ fonksiyonunun P yarı şeridi içindeki sıfırının katı, o sıfıra karşılık gelen L operatörünün özdeğerinin veya spektral tekilliğinin katı olarak bilinir.

Teorem 4.8. Eğer

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{\varepsilon n} \left(|1-a_n| + |b_n|\right) < \infty, \varepsilon > 0 \tag{4.16}$$

ise bu durumda L operatörü sonlu sayıda özdeğere ve spektral tekilliğe sahiptir ve bunların herbirinin katı sonludur.
İspat: Öncelikle $(e_n(z))$ çözümünün $\operatorname{Im} z > -\frac{\varepsilon}{2}$ bölgesine analitik olarak devam ettirebildiğimizi göstermek için kullanacağımız bazı eşitsizlikler verelim.
(3.16) eşitsizliği

$$\begin{aligned} |A_{nm}| &\leq c \sum_{i=n+\left[\frac{m}{2}\right]}^{\infty} \left(|1-a_i| + |b_i|\right) \\ &\leq c \sum_{i=n+\left[\frac{m}{2}\right]}^{\infty} e^{-i\varepsilon} e^{i\varepsilon} \left(|1-a_i| + |b_i|\right) \end{aligned}$$

$e^{-i\varepsilon}$ azalan olduğundan en büyük değerini i nin en küçük noktasında alır. Bu durumda

$$|A_{nm}| \leq c e^{-\varepsilon\left(n+\frac{m}{2}\right)} \sum_{i=n+\left[\frac{m}{2}\right]}^{\infty} e^{i\varepsilon} \left(|1-a_i| + |b_i|\right)$$

bulunur. (4.16) koşulundan verilen serinin yakınsak olduğu biliniyor.
Buradan

$$|A_{nm}| \leq C_1 . e^{-\varepsilon\left(n+\frac{m}{2}\right)} \tag{4.17}$$

yazılabilir.

$n=0$ için

$$|A_{0m}| \leq CM.e^{-\varepsilon \frac{m}{2}}$$

olduğu açıktır.

(3.3) eşitliğinden,

$$\frac{\partial}{\partial z} e_n(z) = \alpha_n n e^{inz} \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} A_{nm} i m e^{imz} \right]$$

elde edilir.

Buradan (4.17) eşitsizliği yardımıyla,

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n=1}^{\infty} A_{nm} i m e^{imz} \right| &\leq C_1 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\varepsilon\left(n+\left[\frac{m}{2}\right]\right)} m \left| e^{imz} \right| \\ &= M e^{-\varepsilon n} \sum_{n=1}^{\infty} m e^{-m(\varepsilon + \operatorname{Im} z)} \end{aligned}$$

elde edilir. Sağ taraftaki seri $\frac{\varepsilon}{2} + \operatorname{Im} z > 0$ için yakınsak olduğundan $\operatorname{Im} z > -\frac{\varepsilon}{2}$ bölgesinde de

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_{nm} i m e^{imz}$$

serisi Weierstrass Teoremi gereğince düzgün yakınsak bulunur.

Böylece $e(z)$ fonksiyonunun analitiklik bölgesini $\operatorname{Im} z > -\frac{\varepsilon}{2}$ bölgesine analitik olarak devam ettirmiş olduk.

Bu durumda, Teorem 2.15. gereğince $e(z)$ fonksiyonunun sıfırlarının limit noktaları reel eksen üzerinde olmalıdır ancak reel eksen artık analitiklik bölgesinin içinde kaldığından $e(z)$ fonksiyonunun sıfırlarının yani $\sigma_d(L)$ ve $\sigma_{ss}(L)$ kümelerinin limit noktalarının cümlesi boş olur. Dolayısıyla Bolzano-Weierstrass Teoremi gereğince verilen koşul altında $\sigma_d(L)$ ve $\sigma_{ss}(L)$ sonlu sayıda elemana sahiptir.

Ayrıca $e(z)$, $\left\{z; z \in \mathbb{C}, \operatorname{Im} z > -\frac{\varepsilon}{2}\right\}$ bölgesinde analitik olduğundan P içindeki sıfırlarının katı sonludur.

Benzer şekilde $e(z)$ fonksiyonunun sonsuz katlı sıfırı olsaydı Teorem 2.15. gereğince analitiklik bölgesinin sınırında yani reel eksen üzerinde olacaktı ancak reel eksen artık analitiklik bölgesinin içinde kaldığından sonsuz katlı sıfırı yoktur.

Sonuç 4.2. Böylece $\sigma_{ss}(L)$ ve $\sigma_d(L)$ sonlu sayıda elemana sahiptir. Bütün özdeğerlerin ve spektral değerlerin katı sonludur.

Şimdi $\varepsilon > 0$ ve $\frac{1}{2} \leq \beta \leq 1$ için

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{\varepsilon n^{\beta}} \left(|1-a_n| + |b_n|\right) < \infty \tag{4.18}$$

koşulunu gözönüne alalım. Bu koşul (4.16) koşulundan daha zayıftır.

$$|A_{nm}| \leq c \sum_{i=n+\left[\frac{m}{2}\right]}^{\infty} \left(|1-a_i| + |b_i|\right)$$

ve (4.18) koşulu yardımıyla $e_n(z)$, $\mathbb{C}^+$ bölgesinde sonsuz diferensiyellenebilirdir. Ancak $e_n(z)$, (4.18) koşulu altında alt yarı düzleme analitik olarak devama sahip değildir. Sonuç olarak (2.1) denkleminin özdeğerlerinin ve spektral tekilliklerinin sonluluğu Teorem 4.8. ile ispatlanamaz. Bunun için (4.18) koşulu yardımıyla

$$|A_k| = c_{\varepsilon,\beta} \sum_{n=1}^{\infty} m^k e^{-\varepsilon\left(\frac{m}{2}\right)^{\beta}}, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

olmak üzere

$$\left|e^{k}(z)\right| \leq A_k, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

ve

$$A_k \leq D.d^k.k!.k^{k\frac{1-\beta}{\beta}}$$

eşitsizliklerini elde edeceğiz ve bu eşitliksizler yardımıyla (3.1) denkleminin özdeğerlerinin ve spektral tekilliklerinin sonluluğunu ispatlayacağız.

Teorem 4.9.

$$|A_k| = c_{\varepsilon,\beta}\sum_{n=1}^{\infty} m^k e^{-\varepsilon\left(\frac{m}{2}\right)\beta}, k \in \mathbb{N}\cup\{0\}$$

olmak üzere

$$\left|e^k(z)\right| \leq A_k, k \in \mathbb{N}\cup\{0\}$$

ve

$$A_k \leq c_{\varepsilon,\beta}.b^k.k!.k^{k\frac{1-\beta}{\beta}}$$

eşitsizlikleri gerçeklenir.

İspat:

$$|A_{nm}| \leq c \sum_{i=n+\left[\frac{m}{2}\right]}^{\infty} (|1-a_i| + |b_i|)$$

olduğu biliniyor.

Buradan

$$\begin{aligned} |A_{0m}| &\leq c \sum_{i=n+\left[\frac{m}{2}\right]}^{\infty} (|1-a_i| + |b_i|) \\ &\leq c\sum_{k=\frac{m}{2}}^{\infty} e^{-\varepsilon k^\beta} e^{\varepsilon k^\beta} (|1-a_k| + |b_k|) \end{aligned} \tag{4.19}$$

yazılabilir. $e^{-\varepsilon k^\beta}$ azalan olduğundan en büyük değerini $k = n + \left[\frac{m}{2}\right]$ değerinde alır. Dolayısıyla,

$$|A_{0m}| \leq ce^{-\varepsilon\left(\frac{m}{2}\right)^\beta}\sum_{k=0}^{\infty} e^{\varepsilon k^\beta}(|1-a_i| + |b_i|) \tag{4.20}$$

(4.18) eşitsizliği kullanılırsa,

$$|A_{0m}| \leq c_{\varepsilon,\beta} e^{-\varepsilon\left(\frac{m}{2}\right)^\beta} \tag{4.21}$$

elde edilir.

$$e_0(z) = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} A_{0m} e^{imz}$$

sonsuz türevlenebilir olduğundan

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} e_0^k(z) &= \sum_{m=1}^{\infty} (im)^k A_{0m} e^{imz} \\ \left| e_0^k(z) \right| &\leq \sum_{m=1}^{\infty} m^k \left| A_{0m} \right| e^{-m \operatorname{Im} z} \end{aligned}$$

ifadesinde (4.21) eşitsizliği yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} \left| e_0^k(z) \right| &\leq \sum_{m=1}^{\infty} m^k \left| A_{0m} \right| e^{-m \operatorname{Im} z} \\ &\leq c_{\varepsilon,\beta} \sum_{m=1}^{\infty} m^k e^{-\varepsilon \left(\frac{m}{2}\right)^{\beta}} e^{-m \operatorname{Im} z} \\ &\leq c_{\varepsilon,\beta} \sum_{m=1}^{\infty} m^k e^{-\varepsilon \left(\frac{m}{2}\right)^{\beta}} \end{aligned}$$

bulunur.

Eğer $w = \varepsilon \left(\frac{m}{2}\right)^{\beta}$ değişken değiştirmesi yapılır ve türev alınırsa,

$$\begin{aligned} m &= 2 w^{\frac{1}{\beta}} \varepsilon^{-\left(\frac{1}{\beta}\right)} \\ \frac{dm}{dw} &= \frac{2}{\beta} \varepsilon^{-\frac{1}{\beta}} w^{\frac{1}{\beta}-1} \end{aligned}$$

elde edilir.

Şimdi $A_k := c_{\varepsilon,\beta} \sum\limits_{m=1}^{\infty} m^k e^{-\varepsilon \left(\frac{m}{2}\right)^{\beta}}$ olmak üzere,

$$A_k \leq c_{\varepsilon,\beta} \int_0^{\infty} m^k e^{-\varepsilon \left(\frac{m}{2}\right)^{\beta}} dm$$

yazılabilir.

Burada $m = 2w^{\frac{1}{\beta}}\varepsilon^{-(\frac{1}{\beta})}$ eşitliği yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} A_k &\leq c_{\varepsilon,\beta}\int_0^\infty \left[2\varepsilon^{-\frac{1}{\beta}}w^{\frac{1}{\beta}}\right]^k e^{-\varepsilon\left(\left(\frac{w}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{\beta}}\right)^\beta}\frac{2}{\beta}\varepsilon^{-\frac{1}{\beta}}w^{\frac{1}{\beta}-1}dw \\ &\leq c_{\varepsilon,\beta}\frac{2^{k+1}}{\beta}\varepsilon^{-\frac{(k+1)}{\beta}}\int_0^\infty w^{\frac{k+1}{\beta}-1}e^{-w}dw \end{aligned}$$

$\frac{2}{\beta}\varepsilon^{-\frac{1}{\beta}}$, $c_{\varepsilon,\beta}$ içine dahil edilir ve $a = 2\varepsilon^{-\frac{1}{\beta}}$ denilirse,

$$\left|e_0^k(z)\right| \leq c_{\varepsilon,\beta}a^k\int_0^\infty w^{\frac{k+1}{\beta}-1}e^{-w}dw$$

bulunur.

Gamma fonksiyonun tanımından,

$$\begin{aligned} \int_0^\infty w^{\frac{k+1}{\beta}-1}e^{-w}dw &= \left(\frac{k+1}{\beta}-1\right)\Gamma\left(\frac{k+1}{\beta}-1\right) \\ &= \Gamma\left(\frac{k+1}{\beta}\right) \end{aligned}$$

olduğu biliniyor.

Dolayısıyla

$$A_k \leq c_{\varepsilon,\beta}a^k\Gamma\left(\frac{k+1}{\beta}\right)$$

eşitsizliği bulunur. $\Gamma\left(\frac{k+1}{\beta}\right)$ ifadesine kısmi integrasyon uygulanırsa,

$$\begin{aligned}\Gamma\left(\frac{k+1}{\beta}\right) &= \int\limits_0^\infty w^{\frac{k+1}{\beta}-1}e^{-w}dw \\ &= \int\limits_0^\infty e^{-w}\frac{k+1}{\beta}w^{\frac{k+1}{\beta}-2}dw\end{aligned}$$

bulunur. Son bulunan ifadeye B defa kısmi integrasyon uygulanırsa,

$$\begin{aligned}&= \left(\frac{k+1}{\beta}-1\right)\left(\frac{k+1}{\beta}-2\right)\ldots\left(\frac{k+1}{\beta}-B\right)\int\limits_0^\infty e^{-w}w^{\frac{k+1}{\beta}-B-1}dw \\ &= \left(\frac{k+1}{\beta}-1\right)\left(\frac{k+1}{\beta}-2\right)\ldots\left(\frac{k+1}{\beta}-B\right)\Gamma\left(\frac{k+1}{\beta}-B\right)\end{aligned}$$

elde edilir ve $\left(\frac{k+1}{\beta}-B\right)$ sayısı pozitif olduğu sürece $\Gamma\left(\frac{k+1}{\beta}-B\right)$ yakınsak olacağından $c_{\varepsilon,\beta}$ içine atılabilir.
Buradan

$$\begin{aligned}A_k &\leq c_{\varepsilon,\beta}a^k\left(\frac{k+1}{\beta}\right)^B \\ &\leq c_{\varepsilon,\beta}a^k\left(\frac{k+1}{\beta}-1\right)^{\frac{k+1}{\beta}} \\ &= c_{\varepsilon,\beta}a^k\beta^{-\frac{k+1}{\beta}}(k+1)^{\frac{k+1}{\beta}} \\ &\leq c_{\varepsilon,\beta}b^k(k+1)^{\frac{k+1}{\beta}}\end{aligned}$$

elde edilir.
i) $\left(1+\frac{1}{k}\right)^{\frac{k}{\delta}} \leq e^{\frac{k}{\delta}}$
ii) $e^k.k! \geq k^k$
iii) $(1+k)^{\frac{1}{\delta}-1} \leq e^{\frac{k}{\delta}}$

eşitsizlikleri kullanılarak,

$$\begin{aligned} A_k &\leq c_{\varepsilon,\beta}.b^k.(k+1)^{\frac{k}{\beta}}.(k+1)^{\frac{1}{\beta}} \\ &\leq c_{\varepsilon,\beta}.b^k.k^{\frac{k}{\beta}-k}.k^k \\ &\leq c_{\varepsilon,\beta}.b^k.k!.k^{k(\frac{1}{\beta}-1)} \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir.

Şimdi aşağıdaki kümeleri tanımlayalım.

$$\begin{aligned} M_1 &= \{z : z \in P_0, e_0(z) = 0\}, e_0(z) \text{ fonksiyonunun } \mathbb{C}_+ \text{ daki sıfırları} \\ M_2 &= \{z : z \in [0, 2\pi], e_0(z) = 0\}, e_0(z) \text{ fonksiyonunun reel eksendeki sıfırları} \\ M_3 &= \{z : \exists\{z_n\} \subset P_0, e_0(z_n) = 0, z_n \to z(n \to \infty)\}, e_0(z) \text{ fonksiyonunun } \mathbb{C}_+ \text{ daki} \\ &\quad \text{sıfırlarının limit noktalarının kümesi} \\ M_4 &= \{z : \exists\{z_n\} \subset [0, 2\pi], e_0(z_n) = 0, z_n \to z(n \to \infty)\}, e_0(z) \text{ fonksiyonunun reel} \\ &\quad \text{eksendeki sıfırlarının limit noktalarının kümesi} \\ M_5 &= \left\{z : z \in P, \frac{\partial^k}{\partial z^k} e_0(z_n) = 0, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}\right\}, e_0(z) \text{ fonksiyonunun sonsuz katlı} \\ &\quad \text{sıfırlarının kümesi} \end{aligned}$$

Teorem 4.10.

i) M_1 kümesi sınırlı ve sayılabilirdir.

ii) M_2 kümesi kompakt ve Lebesque ölçüsü sıfırdır.

iii) $M_1 \cap M_5 = \emptyset, M_3 \subset M_2, M_4 \subset M_2, M_5 \subset M_2, \mu(M_3) = \mu(M_4) = \mu(M_5) = 0$

iv) $M_3 \subset M_5, M_4 \subset M_5$

İspat:

i)

$$e_0(z) = \alpha_0 [1 + o(1)], \operatorname{Im} z > 0, \operatorname{Im} z \to \infty$$

yeteri kadar büyük z kompleks sayıları için $e_0(z)$, α_0 a yaklaşır. $\alpha_0 = \left\{\prod_{k=0}^{\infty} a_k\right\}^{-1}$ olup $\alpha_0 \neq 0$ dır. Dolayısıyla sonsuzluktaki z kompleks sayıları için hiçbir zaman $e_0(z) \equiv 0$ olamaz. Bu da sadece yeterince küçük z kompleks sayıları için $e_0(z) \equiv 0$ olabileceği anlamına gelir. Bu z kompleks sayılarını üstten sınırlayacak bir M sayısı bulabiliriz. Dolayısıyla M_1 sınırlıdır.

Teorem 2.13 gereğince $e_0(z)$ fonksiyonunun $\mathbb{C}_+$ daki sıfır yerleri ayrık yani M_1 ayrıktır.

M_1 sınırlı ve ayrık olduğundan en fazla sayılabilir sayıda elemana sahiptir.

ii) $M_2 \subset \overline{M_2}$ olduğu biliniyor.

$\overline{M_2} \subset M_2$ olduğunu gösterelim. $z \in \overline{M_2}$ alalım. Bu durumda $z_n \to z$ olacak şekilde $\exists \{z_n\} \subset M_2$ vardır. $\forall n \in \mathbb{N}$ için $z_n \in M_2$ olduğundan $e_0(z_n) = 0$ olmak zorundadır ve $e_0(z)$ fonksiyonunun sürekli ve $e_0(z_n) \to e_0(z)$ olduğundan $e_0(z) = 0$ olur. Teorem 2.15 gereğince $z \in [0, 2\pi]$ olmalıdır. Buradan $z \in M_2$ elde edilir. Dolayısıyla M_2 kapalıdır.

Borel-Lebesque Teoremi'nden M_2 kompakt ve Privalov Teoremi'nden

$$\mu(M_2) = 0$$

gerçeklenir.

iii) Teorem 2.14 gereğince M_5 kümesinin elemanları reel eksen üzerinde bulunur. M_1 kümesi $\mathbb{C}_+$ da olup $M_1 \cap M_5 = \emptyset$ olduğu açıktır.

$z_0 \in M_3$ alalım. Teorem 2.16 gereğince $M_3 \subset [0, 2\pi]$ olur. $\lim_{n\to\infty} z_n = z$ olacak şekilde $\{z_n\} \subset M_1$ vardır öyle ki $e_0(z_n) = 0$ dır. $e_0(z_n)$ sürekli olduğundan

$$e_0(z_0) = e_0\left(\lim_{n\to\infty} z_n\right) = \lim_{n\to\infty} e_0(z_n) = 0$$

olup $z_0 \in M_2$ bulunur.

$M_4 \subset M_2$ olduğu benzer şekilde $e_0(z_n)$ sürekliliğinden elde edilir.

$M_5 \subset M_2$ olduğunı gösterelim.

$z_0 \in M_5$ olsun. Teorem 2.14 gereğince $z_0 \in [0, 2\pi]$ olmak zorundadır. Ayrıca $n = 0, 1, 2, ...$ için

$$\left\{ \frac{\partial^n}{\partial z^n} e_0(z) \right\} = 0$$

olduğundan $e_0(z_0) = 0$ dır. $z_0 \in [0, 2\pi]$ve $e_0(z_0) = 0$ olduğundan $z_0 \in M_2$ olur.

$M_4 \subset M_2, M_5 \subset M_2, M_3 \subset M_2$ ve $\mu(M_2) = 0$ olduğundan

$$\mu(M_5) = \mu(M_4) = \mu(M_3) = 0$$

dır.

iv) $z_0 \in M_3$ ancak $z_0 \notin M_5$ olsun. Bu durumda z_0 in sonsuz katlı sıfırı olmadığına göre en az bir $m_0 \in \mathbb{N}$ sayısı vardır öyle ki

$$e_0(z) = (z - z_0)^{m_0}.g(z), g(z_0) \neq 0$$

eşitliği gerçeklenir. Buradan

$$\frac{e_0(z)}{(z - z_0)^{m_0}} = g(z)$$

eşitliği elde edilir. $e_0(z)$ $\mathbb{C}_+$ da analitik, $\overline{\mathbb{C}_+}$ da sürekli olduğundan $g(z)$ fonksiyonu da $\mathbb{C}_+$ da analitik ve $\overline{\mathbb{C}_+}$ da süreklidir. Ayrıca $z_0 \in M_3$ olduğundan $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z_0$ olacak şekilde $\{z_n\} \subset M_1$ vardır öyle ki $\forall n \in \mathbb{N}$ için

$$g(z_n) = \frac{e_0(z_n)}{(z_n - z_0)^n} = 0$$

olup $\lim\limits_{n\to\infty} g(z_n) = g(z_0) = 0$ dır. Ancak $g(z_0) \neq 0$. Bu da bir çelişkidir. Dolayısıyla kabulümüz yanlıştır. $z_0 \in M_5$ elde edilir.

$g(z), \mathbb{R}$ de sürekli olduğundan $M_4 \subset M_5$ benzer şekilde ispatlanır.

Teorem 4.11. Kabul edelim ki 2π periyotlu g fonksiyonu açık üst yarı düzlemde analitik, tüm türevleri kapalı üst yarı düzlemde sürekli

$$\sup_{z \in P} \left| g^k(z) \right| \leq A_k, k = 0, 1, 2, ...$$

ve G, g fonksiyonunun P yarışeridindeki sonsuz katlı sıfırlarının kümesi olmak üzere $G \subset [0, 2\pi]$, $\mu(G) = 0$ olsun. Eğer

$$F(s) = \inf_k \frac{A_k s^k}{k!}, k = 0, 1, 2, ...$$

$\mu(G_s), G$ nin s komşuluğunun Lebesque ölçüsü ve $\omega \in (0, 2\pi)$ keyfi bir sabit olmak üzere

$$\int_a^\omega \ln F(s) d\mu(G_s) = -\infty$$

gerçekleniyorsa, bu durumda $\overline{\mathbb{C}_+}$ bölgesinde $g \equiv 0$ dır (Bairamov et al., 2001). Şimdi bu teorem yardımıyla jost fonksiyononun sonsuz katlı sıfırlarının kümesinin boş olduğunu ispatlayacağız.

Teorem 4.12. $M_5 = \emptyset$.

İspat: $e_0(z)$, özdeş olarak sıfır olmadığından Teorem 4.11. gereğince

$$\int_a^\omega \ln F(s) d\mu(G_s) > -\infty$$

olur.

$$\begin{aligned} F(s) &= \inf_k \frac{A_k s^k}{k!} \\ &\leq \inf_k \frac{Dd^k k! k^{k\left(\frac{1-\beta}{\beta}\right)} s^k}{k!} \\ &= \inf_k D.d^k.k^{k\left(\frac{1-\beta}{\beta}\right)}.s^k \\ &= D\inf_k \left(d.k^{\left(\frac{1-\beta}{\beta}\right)}.s\right)^k \end{aligned}$$

bulunur.

$$\gamma(x) := \left(dsx^{\frac{1}{\beta}-1}\right)^x$$

diyelim. Bu durumda

$$\gamma(x) = e^{x\ln\left(dsx^{\frac{1}{\beta}-1}\right)}$$

ve

$$\ln\gamma(x) = x\ln\left(dsx^{\frac{1}{\beta}-1}\right)$$

olur. Her iki tarafın türevi alınırsa

$$\frac{\gamma'(x)}{\gamma(x)} = \ln\left(dsx^{\frac{1}{\beta}-1}\right) + \frac{1}{\beta} - 1$$

olup $\frac{1}{\beta} - 1 = \ln e^{\frac{1}{\beta}-1}$ dersek, buradan

$$\begin{aligned} \gamma'(x) &= \left(dsx^{\frac{1}{\beta}-1}\right)^x \ln\left(ds(xe)^{\frac{1}{\beta}-1}\right) \\ &= e^{x\ln\left(dsx^{\frac{1}{\beta}-1}\right)} \ln\left(ds(xe)^{\frac{1}{\beta}-1}\right) \end{aligned}$$

bulunur. Eğer $\gamma^{'}(x) = 0$ ise

$$ds\,(xe)^{\frac{1}{\beta}-1} = 1$$

olmalıdır ve

$$x = e^{-1}\,(ds)^{-\frac{\beta}{1-\beta}}$$

olur.

Şimdi bu fonksiyonun yerel minimuma sahip olduğunu gösterelim.

$$\gamma^{''}(x) = \gamma^{'}(x)\ln\left(ds\,(xe)^{\frac{1}{\beta}-1}\right) + \left(\frac{1-\beta}{\beta}\right)\frac{\gamma(x)}{x}$$

$$\gamma(x)\ln^{2}\left(ds\,(xe)^{\frac{1}{\beta}-1}\right) = \gamma^{'}(x)\ln\left(ds\,(xe)^{\frac{1}{\beta}-1}\right)$$

olduğundan

$$\gamma^{''}(x) = \gamma(x)\left[\ln\left(ds\,(xe)^{\frac{1}{\beta}-1}\right) + \left(\frac{1-\beta}{\beta}\right)\frac{1}{x}\right]$$

yazılabilir.

$$x_1 = (ds)^{-\frac{\beta}{1-\beta}}\,e^{-1}$$

için

$$\gamma^{''}(x_1) = e^{(ds)^{-\frac{\beta}{1-\beta}}e^{-1}\left(\frac{\beta-1}{\beta}\right)+1}\left(\frac{1}{\beta}-1\right)(ds)^{\frac{\beta}{1-\beta}}$$

olduğundan $\gamma(x)$ fonksiyonu noktasında yerel minimuma sahiptir.

$$\begin{aligned}\gamma\left((ds)^{-\frac{\beta}{1-\beta}}\,e^{-1}\right) &= \exp\left\{(ds)^{-\frac{\beta}{1-\beta}}\,e^{-1}\ln\left((ds)^{-\frac{\beta}{1-\beta}}\,e^{-1}\right)^{\frac{\beta-1}{\beta}}\right\}\\ &= \exp\left\{-\left(\frac{1}{\beta}-1\right)(sd)^{-\frac{\beta}{1-\beta}}\,e^{-1}\right\}\end{aligned}$$

bulunur.

$$F\left(s\right) \leq D\exp\left\{-\left(\frac{1}{\beta}-1\right)(sd)^{-\frac{\beta}{1-\beta}}\,e^{-1}\right\}$$

bulunur.

$$\int\limits_{a}^{\omega}\ln F(s)d\mu(M_{5,s}) > -\infty$$

olduğu biliniyor.

$$\begin{aligned}\int\limits_{0}^{\infty}\ln\left(D\exp\left\{-\left(\frac{1}{\beta}-1\right)(sd)^{-\frac{\beta}{1-\beta}}\,e^{-1}\right\}\right)d\mu(M_{5,s}) &> -\infty\\ \int\limits_{0}^{\infty}\left(\ln D-\left(\frac{1}{\beta}-1\right)(sd)^{-\frac{\beta}{1-\beta}}\,e^{-1}\right)d\mu(M_{5,s}) &> -\infty\end{aligned}$$

olup

$$\int\limits_{0}^{\infty}-\ln D+\left(\frac{1}{\beta}-1\right)(sd)^{-\frac{\beta}{1-\beta}}\,e^{-1}d\mu(M_{5,s}) < \infty \Longrightarrow \int\limits_{0}^{\infty}s^{-\frac{\beta}{1-\beta}}d\mu(M_{5,s}) < \infty$$

$\frac{1}{2} \leq \beta \leq 1$ olduğundan $\frac{\beta}{1-\beta} \geq 1$ olur. Dolayısıyla

$$\int\limits_{0}^{\infty}s^{-\frac{\beta}{1-\beta}}d\mu(M_{5,s})$$

ifadesi ıraksak olur. bu ifadenin yakınsak olabilmesi için

$$\mu(M_{5,s}) = 0$$

olmalıdır, yani $M_5 = \emptyset$ olmalıdır.

Teorem 4.13 (4.16) koşulu altında (3.1) denkleminin özdeğerleri, spektral tekillikleri sonlu sayıdadır ve bunların herbirinin katı sonludur.

İspat: Teorem 4.10. ve Teorem 4.12. gereğince

$$M_3 = M_5 = \emptyset$$

olduğu açıktır. Bu durumda M_1 ve M_2 sınırlı kümelerinin limit noktaları yoktur. Böylece $e_0(z)$ fonksiyonunun P yarışeridi içindeki sıfırları sonlu sayıdadır. $M_5 = \emptyset$ olduğundan bu sıfırların katı sonludur.

Teorem 4.13 yardımıyla aşağıdaki sonucu verebiliriz.

Sonuç 4.3. (3.1) denkleminin özdeğerlerinin ve spektral tekilliklerinin sonluluğunu garanti eden en zayıf koşul $\exists\varepsilon > 0$ için

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \left\{ e^{\varepsilon\sqrt{n}} \left(|1 - a_n| + |b_n| \right) \right\} < \infty$$

olmasıdır.

KAYNAKLAR

Adivar, M. and Bairamov, E. 2001. Spectral Properties of Non Selfadjoint Difference Operators. Jornal of Math. Analysis and Applications. 261, 461-478.

Akhiezer, N. I. 1965. The Classical Moment Problem and Some Related Questions in Anlysis, NewYork.

Atkinson, F. V. 1964. Discrete and Continuous Boundary Problems, NewYork, Academic Press.

Bairamov, E.,Çakar, Ö. and Krall, Allan M. 2001. Non Selfadjoint Discrete Schrödinger Operators and Jacobi Matrices with Spectral Singularities, Math. Nachr. 229, 5-14

Bairamov. E. and Coşkun. C, 2004. Jost Solutions and the Spectrum of the System of Difference Equations. Appl. Math. Lett. 17, 1039-1045.

Berezanski, Yu. M. 1968. Expansion in Eigenfunctions of Selfadjoint Operators, AMS Providence, R. I.

Coşkun, C. 2000. The Spectrum of the Non Selfadjoint System of Difference Operators of First Order. Common. Fac. Sci. Univ. Ank. Series Al V.49,69-75.

Dolzhenko, E.P. 1979. Boundary Value Uniqueness Theorems for Analytic Functions, Math. Notes 25, No 6, 437-442.

Hardy, G. H., Littlewood, J. E. and Polya, G. 1964. Inequalities, Cambridge.

Krall, A. M.1965. A Nonhomogeneous Eigenfunction Expansion, Trans. AMS 117 , 352-361.

Lusternik, L. A. and Sobolev, V. J. 1968. Elements of Functional Analysis, Gordon and Breach. Science Publishers.

Naimark,M. A. 1960. Investigation of the Spectrum and Expansion in Eigenfunctions of a Non-Selfadjoint Operator of Second order on a semi-axis, AMS Transla tions, 2 (16), 103-193.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı **:** Ceren Ebru TOPBAŞ

Doğum Yeri : Afyon

Doğum Tarihi : 1983

Medeni Hali : Bekar

Yabancı Dili : İngilizce

Eğitim Durumu (Kurum ve Yılı)

Lise : Antalya Anadolu Lisesi (2002).

Lisans : Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü (2006).

Yüksek Lisans : AnkaraÜniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı (Eylül 2006-Ağustos 2008).