T.C.
ANKARA ÜNİVERSİTESİ
SOSYAL BİLİMLER ENSTİTÜSÜ
FELSEFE (BİLİM TARİHİ)
ANABİLİM DALI

SALİH ZEKİ BEY'İN HÜLÂSA-İ HESÂB-I İHTİMÂLÎ ADLI ESERİ VE OLASILIĞIN TÜRKİYE'YE GİRİŞİ

Yüksek Lisans Tezi

Ali DEĞİRMENCİ

Ankara-2010

T.C.
ANKARA ÜNİVERSİTESİ
SOSYAL BİLİMLER ENSTİTÜSÜ
FELSEFE (BİLİM TARİHİ)
ANABİLİM DALI

SALİH ZEKİ BEY'İN HÜLÂSA-İ HESÂB-I İHTİMÂLÎ ADLI ESERİ VE OLASILIĞIN TÜRKİYE'YE GİRİŞİ

Yüksek Lisans Tezi

Ali DEĞİRMENCİ

Tez Danışmanı
Prof.Dr.Remzi DEMİR

Ankara-2010

T.C.
ANKARA ÜNİVERSİTESİ
SOSYAL BİLİMLER ENSTİTÜSÜ
FELSEFE (BİLİM TARİHİ)
ANABİLİM DALI

SALİH ZEKİ BEY'İN HÜLÂSA-İ HESÂB-I İHTİMÂLÎ ADLI ESERİ VE OLASILIĞIN TÜRKİYE'YE GİRİŞİ

Yüksek Lisans Tezi

Tez Danışmanı : Prof. Dr. Remzi DEMİR

Tez Jürisi Üyeleri

Adı ve Soyadı	**İmzası**
....	....
....	....
....	....
....	....
....	....
....	....

Tez Sınavı Tarihi ....

İçindekiler

Önsöz

Salih Zeki Bey'in de dediği gibi olasılık, "önemi üzerine söz söylenmesi gereksiz" bir alandır. Bilimsel bilginin gerçek bir mürşit halini almaya başladığı ilk zamanlarda, matematik üzerine çalışmalar yapan bilim insanlarının uğraşları arasına olasılığı da almış olmaları tesadüf olmasa gerektir. Bu önemi kavramış olan Salih Zeki Bey de, ülkesinin bilimsel bilgi birikimini artırma çabalarının içine olasılığı da eklemiştir. Onun sayesinde bugün, "Türkiye'de Olasılık Tarihi"nden bahsedebiliyoruz.

Bu çalışma ile Türkiye Matematik Tarihi'nde daha önce incelenmemiş bir konu olarak görünen "olasılık tarihi"ne küçük bir başlangıç yapma fırsatı yakalandı. Bu amaçla, Cumhuriyet öncesi dönemde, Türkiye'de bilimsel uğraşların seçkin örneklerinden bazılarını sunmuş olan Salih Zeki Bey'in olasılık ile ilgili yapıtları incelendi. 1898 yılında yayımladığı *Hülâsa-i Hesâb-ı İhtimâlî* adlı eseri günümüz Türkçesi'ne çevrildi ve değerlendirildi; ayrıca Salih Zeki Bey'den sonra olasılık üzerine basılmış kitaplar araştırıldı.

Bu çalışmayı yaparken, desteklerini hiç esirgemeyen tez danışmanım Prof. Dr. Remzi Demir'e teşekkürü bir borç bilirim.

Aynı şekilde, yüksek lisans yapmamı olanaklı kılan işyerim TÜBİTAK-ULAKBİM'e de teşekkürlerimi sunarım.

SALİH ZEKİ BEY'İN HÜLÂSA-İ HESÂB-I İHTİMÂLÎ ADLI ESERİ VE OLASILIĞIN TÜRKİYE'YE GİRİŞİ

1 Giriş

Olasılık, rastgeleliği ölçmek için kullanılan kuralların bütünüdür. Bu rastgelelik, belirli bir olay uzayında gerçekleşebilecek tüm durumlar içerisinde herhangi birinin, o anda meydana gelmesi demektir. Peki bu gerçekleşme "tesadüfi" midir, yoksa kader midir? Matematiğin olasılık dalıyla ilk olarak ilgilenen bilim insanlarından biri olan Pascal "tesadüf"e inanmıyordu. Salih Zeki Bey de hiçbirşeyin tesadüfi olarak meydana gelmediğini kitaplarında yazmaktaydı. Bu problemin inançları gereği net bir cevabı vardı ve asıl problemi çözmek için çaba sarfedilebilirdi. Pek çok durumdan hangisinin gerçekleşeceğini belirleyen kurallar, ister tesadüfi olsun, ister ilahi bir güç tarafından dayatılsın, olasılık sayesinde bilimsel bir araştırmanın konusu olurlar. Bu kuralları bulmak için çıkılan serüven, bilim tarihi açısından benzeri olmayan yeni bir yol daha çizer. Bilim tarihi, böyle eşsiz yolların toplamıdır.

Olasılık ile ilgili çalışmalar ilk olarak Batı'da, 15. yüzyılda başlamıştır. Bugün pek çok başka kanunlarla isimlerini duyduğumuz bilim insanlarının çalışmaları, olasılığı yavaş yavaş bilinmezlik zırhından dışarıya çıkarmıştır. Osmanlı Devleti'nin Batı'da üretilen bilimsel bilgiye değer vermeye başlayıp, kendi ülkesine getirmeye karar vermesinden sonra ise, özellikle de 19. yüzyılda, Batı'ya parlak öğrenciler gönderilmiştir. Salih Zeki Bey de bu öğrencilerden biridir. Fransa'da elektrik üzerine öğrenim gören Salih Zeki Bey, olasılık ile orada tanışmıştır. Kendi ülkesine döndüğünde, bu konuda daha önce herhangi bir çalışma yapılmamış olmasının eksikliğini gidermek amacıyla çalışmalara koyulmuştur. İşte bu tez onun bu konuda yapmış olduğu ilk çalışma olan *Hülâsa-i Hesâb-ı İhtimâlî* ışığında, olasılığın Türkiye'ye girişini ve gelişimini konu edinmektedir.

2 Genel Olasılık Tarihi

Bir rulet masasında olduğunuzu düşünün. Rulet masası yuvarlak bir çark üzerinde 37 bölme ve her bölmede 0'dan 36'ya kadar sayılar bulunan bir oyun masasıdır. Çark çevrilir ve top bu bölmelerden birinin içinde kalır. Eğer bu numara sizin seçtiğiniz numara ise yatırdığınız paranın 35 katını kazanırsınız. Değilse yatırdığınız parayı kaybedersiniz.

Peki bir tur sonunda topun sizin seçtiğiniz numarada durma ihtimali nedir? Her bir oyunda ne kadar para yatırmalısınız ki uzun bir oyunlar silsilesi sonucunda kâra geçmiş olasınız? En nihayetinde para kazanmak için rulet iyi bir seçim midir? İyi bir seçim olması için nasıl bir strateji geliştirilmelidir?

İşte bu ve benzeri sorular şans oyunları ile ilgilenen insanların sorduğu sorulardır. Eğer matematiksel olarak bir oyunun sonucu hesaplanabilirse, kazanılacak ya da kaybedilecek para tahmin edilebilir. Böylece matematikçilere çözmeleri için olasılık problemleri ulaşmaya başlar. Problemler çözüldükçe de olasılık teorileri ortaya çıkar.

Olasılıkla ilgili ilk çalışmalar 15. yüzyılda başlamıştır. Daha önceki tarihlerde Çinliler'in, Japonlar'ın ve Hintliler'in permütasyon ve kombinasyonlarla ilgili çalışmalar yaptıkları bilinmektedir, ancak olasılık kavramı Avrupa'da ortaya çıkmıştır[1]. Denilebilir ki olasılık konusu da diğer birçok bilimsel konuda olduğu gibi pratik önceliklerle veya kaygılarla araştırılmaya başlandı. Şans oyunlarında kazanma olasılığı ve bir oyunun adil olması için ne kadar para yatırılması gerektiği ile hayat sigortası şirketlerinin kar edebilmesi için sigorta primlerinin en az ne kadar olacağının hesaplanması gibi nedenlerle olasılık üzerine matematiksel olarak durulmaya başlandı. Şans oyunları için matematik yeterli olsa da sigorta primlerinin hesaplanması için düzenli bir şekilde tutulmuş istatistiğe ihtiyaç vardı. Bunlar yaşlara, cinsiyete ve hastalık gibi faktörlere bağlı ölüm ve doğum oranlarının bilinmesini gerekli kılıyordu.

[1]Vera Sunford, *A Short History of Mathematics*, Boston 1930, s. 198.

Londralı bir tacir olan John Grount (1620-1674) büyük miktarda veriden istatistiksel sonuçlar çıkaran ilk kişidir[2]. *Natural and Political Observations Made Upon the Bills of Mortality* adlı kitabı matematiksel istatistik üzerine yapılmış ilk çalışma olarak görülmektedir. Bu çalışmada Grount, o dönemlerde İngiliz toplumundaki bireylerin yaşam süresi ile ilgili çeşitli sonuçlar çıkarmıştır. Örneğin bunlardan bir tanesi olan yaşlara göre ölüm oranı miktarı, aşağıdaki tabloda gösterilmektedir[3]. Bu tabloyu incelersek, doğmuş olan her 100 kişiden 64'ünün 6 yaşına kadar ve 40'ının 16 yaşına kadar yaşadığını görürüz. Bu şekilde gidersek 66 yaşına kadar 3 kişi kaldığını ve nihayet 76 yaşını ancak 1 kişinin görebildiğini çıkarabiliriz. Böylece, sigorta yaptırmak isteyen bir kişinin yaşına bakılarak ödeyeceği prim hesaplanabilecek ve sigorta şirketinin kâr edebileceği miktar belirlenebilecekti.

Yaş	Hayatta Kalan Kişi Sayısı
0	100
6	64
16	40
26	25
36	16
46	10
56	6
66	3
76	1

Olasılık, ilk ortaya çıkışını şans oyunlarına borçludur. İtalyan bir hekim ve matematikçi olan Gerolamo Cardano (1501-1576), 1550 yılında olasılığa ilişkin ilk düşüncelerini kağıda dökmüştür; ancak bunlar 1663 yılına kadar yayımlanmamıştır. Ona göre olasılık, bir olayın gerçekleşme ihtimali birbirine eşit olan kendisi de dahil tüm olaylara oranıdır. Bu tanıma göre Cardano, olasılığı teorik biçimde

[2]David M. Burton, *The History of Mathematics, An Introduction*, Boston 1999, s. 402.
[3]Burton, s. 404.

inceleyerek modern olasılığın temellerini atan kişi ünvanını almaktadır[4].

Olasılık konusu üzerine var olan en eski problemlerden birisi adil bölüşüm problemidir. Bu probleme göre, örneğin, bir oyunun kazanılması için toplam 100 puan gereklidir. Bir oyuncu 80 puanda, diğeri 50 puanda iken oyun bir şekilde durmak zorunda kalır. Bu duruma göre ortaya konan parayı hangi oranlarda bölüşmelidirler?

Her seferinde, örneğin bir zar atımında, üstün gelen oyuncunun 10 puan elde ettiğini düşünürsek, oyunculardan birinin 2 defa ve diğerinin 5 defa üstün gelmesi ile ortaya konan paranın tamamını alma hakkını elde ettiğini görürüz. Bu durumda 2 kere daha üstün gelmesi gereken kişinin oyunu kazanmadaki şansının daha yüksek olduğu aşikardır. Ancak oyun durduğuna, her iki oyuncunun da parayı kazanma ihtimali olduğuna ve birinin kazanma olasılığı daha yüksek olduğuna göre ortaya konan parayı nasıl bölüşmelidirler? Bu soruya 1654'e kadar doğru cevap verilememiştir. Sırasıyla Fra Luca (1446–1517), Cardano ve Tartaglia (1500-1557) çeşitli çözümler önermişler, fakat doğru sonuca ulaşamamışlardır. Bu soruya doğru cevabı veren kişi Pascal'dır.

Blaise Pascal (1623 - 1662), oldukça dindar bir insandır. Öyle ki 1654 yılında *Traite du Triangle Arithmetique*'ı (Aritmetik Üçgeni Üzerine Tartışmalar) yayımladıktan sonra başına gelen bir olay nedeniyle bilimsel araştırmaları bırakıp kendini tamamen dine adamıştır. Dini inanışı onun bilimsel çalışmalarını temelden etkilemiştir. Örneğin, şans oyunlarının olasılık temellerini incelerken, şans diye bir şey olmadığını sadece Tanrı inancının çeşitli derecelerde ortaya çıktığını söylemektedir[5]. Bu dereceleri belirlemede bir takım matematiksel kurallar kullanılabilir. Pascal, kendi adıyla anılan üçgen ve binomial katsayılar üzerine yaptığı çalışmalarla olasılık teorisinin ilk sistematik kurallarını oluşturmuştur.

17. yüzyılda olasılık üzerine çalışmalar yapmış bir diğer bilim insanı, ışığın dalgalardan oluştuğunu söyleyerek günümüzde Huygens-Frensel İlkesi olarak bi-

[4]Burton, s. 407.
[5]Victor J. Katz, *A History of Mathematics*, Boston 2004, s. 270.

linen ilkenin temelini oluşturan Cristian Huygens'dir (1629-1695). Matematikçi olmasının yanında aynı zamanda bir fizikçi ve astronom olan Huygens, bu özelliği sayesinde 16. Louis tarafından Academies des Sciences'in başına getirildi. John Grount'un yukarıda bahsettiğimiz çalışmaları Huygens'in ilgisini çekti. Yaşa göre ölüm olasılığını hesaplayan Cristian Huygens, 1657'de *De Ratiociniis in Ludo Aleae*'i Latince olarak yayımladı. Bu kitap, olasılık teorisi üzerine yapılan ilk yayındı. Bu çalışmadaki en önemli yenilik "matematiksel beklenti" kavramınının ortaya çıkmış olmasıdır.

Aynı dönemlerde çalışmalar yürüten bir diğer bilim insanı James Bernoulli'dir (1654-1705). Yapıtı *Ars Conjectandi* ölümünden 8 yıl sonra yeğeni tarafından yayımlanmıştır. Bu kitap dört bölümden oluşmaktadır. Birinci Bölüm'de Huygens'in çalışmaları yorumlarla ve yeni kanıtlarla tekrarlanmıştır. İkinci Bölüm, permütasyon ve kombinasyon üzerine yaptığı çalışmaları içermektedir. Yine bu bölümde binomial teoreminin ilk yeterli kanıtı yazılmıştır[6]. Üçüncü Bölüm'de çeşitli olasılık problemleri ve çözümlerini anlatmıştır. Son bölümde ise olasılık felsefesi ve olasılığın çeşitli alanlara uygulamasından bahsetmiştir, ancak bu bölümü tamamlayamamıştır. Yine bu bölümde Büyük Sayılar Kanunu'nun kanıtını sunmuştur.

18. yüzyıl başlarında olasılıkla ilgili önemli bir çalışma da Abraham De Moivre (1667-1754) tarafından yürütülmüştür. 1708'de yayımladığı kitabı *Doctrine of Chances or a Method of Calculating the Probability of Events in Play*'de (Şans Doktrini ya da Oyunda Gerçekleşen Olayların Olasılıklarının Hesaplanması Metodu) çeşitli olasılık problemlerinin çözümünü göstermiştir.

Bernoulli ve De Moivre'dan önce olasılık çalışmaları genellikle şans oyunları ve sigorta problemleri üzerine yürütülürken, onlardan sonra gözlemlerdeki hata payı, toplumsal istatistikler gibi çalışmalar şeklinde genişlemiştir. Ancak Laplace bu çalışmaları daha ileri bir düzeye taşımıştır.

[6] Burton, s. 434.

Pierre Simon Laplace (1749- 1827) "Fransa'nın Newton"u olarak bilinen öncü bir bilim insanıdır. Olasılık üzerine yapmış olduğu araştırmaları *Theorie Analytique des Probabilities* (Olasılıklarının Analitik Teorisi) adlı kitabında yayımlamıştır. Bu kitap iki bölümden meydana gelmiştir. İlki fonksiyon analizi üzerine, ikincisi ise genel olasılık teorisi üzerine yoğunlaşmıştır. İkinci Kitap, uygun olasılık teorisi, limit teoremleri ve matematiksel istatistik şeklinde üç ayrı bölümden oluşmuştur.

Fermat, Condorcet gibi bilim insanlarının da olasılık teorisine değerli katkılarda bulunduklarından sözetmek gerekir. Bir diğer sözedilmesi gereken konu olasılığın bilimsel anlayış üzerine etkisidir. Olasılık sayesinde bilim dünyası, "mekanik belirlenimcilik" anlayışını terketmeye ve "istatistiksel belirlenimcilik" anlayışını benimsemeye başlamıştır [7]. Böyle bir değişim, bilhassa Heisenberg'in Belirsizlik İlkesi'nde kendini gösterir. Bu ilkeye göre bir parçacığın konumu ve momentumu aynı anda kesin olarak bilinemez. Ancak içinde bulunabilmesi olası bir sonuç kümesi oluşturulabilir. Bu sebeple atomaltı parçacıklar düzeyinde mekanik bir kesinlikten sözedemeyiz.

Sonuç olarak diyebiliriz ki 15. yüzyılda başlayan olasılık çalışmaları Pascal ve Fermat tarafından bilimsel bir tarzda incelenmiş, detaylı olarak Bernoulli ve De Moivre tarafından araştırılmıştır. 18 yüzyılda hızla gelişmiş ve 19. yüzyılda istatiksel temellere oturmuştur.[8]

---

[7] Marcell Boll, *Matematik Tarihi*, çev: Bülent Gözkan, İstanbul 2003, s. 93.

[8] Örneğin Gauss, bu çalışmaları yapan bilim insanlarından biridir. Bknz: William P. Berlinghoff, Fernando Q. Gouvea, *Math Through the Ages, A Gentle History for Teachers and Others*, Farmington 2004, s. 218.

3 Salih Zeki Bey'in Olasılık İle İlgili Kitaplarının Karşılaştırması

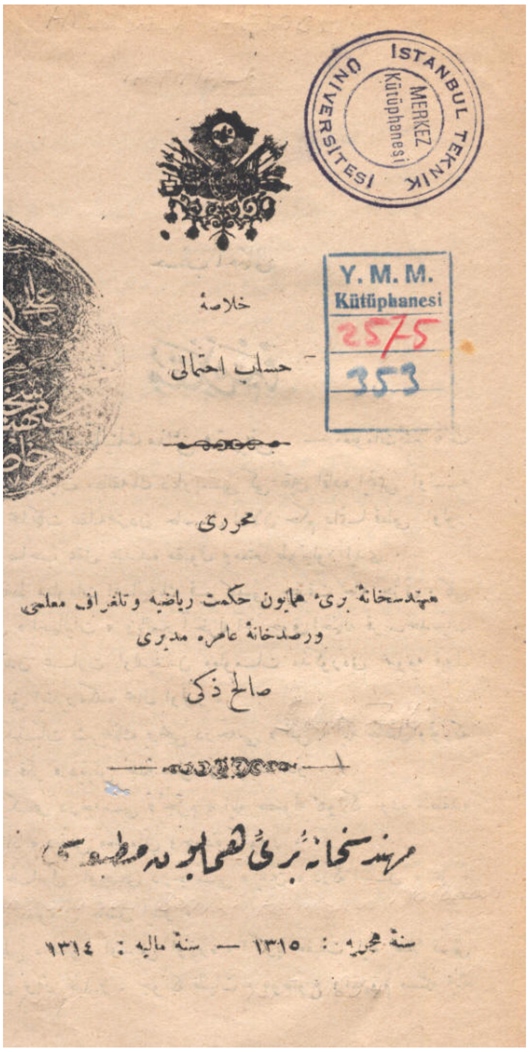
Bugüne kadar yapmış olduğumuz araştırmalar sonunda ortaya çıkmıştır ki Eski Türkçe'de "Hesâb-ı İhtimâlî" olarak adlandırılan olasılık hesabı, büyük bir ihtimalle ilk olarak, 19. yüzyılın sonu ve 20. yüzyılın başında yaşamış, Osmanlı Devleti'nin son dönemlerinin güçlü bilginlerinden Salih Zeki Bey tarafından Türkçe'ye aktarılmış ve tanıtılmıştır.

Salih Zeki Bey'in bu konuya ilişkin çalışmaları üç ayrı yayına konu olmuştur. Bunlardan birincisi 1898 yılında yayımladığı *Hülâsa-i Hesâb-ı İhtimâlî*, ikincisi 1900 yılında yayımladığı *Kâmûs-ı Riyâziyyat* adlı matematik ansiklopedisinde geçen olasılık maddeleri ve nihayet üçüncüsü ise 1912-1913 yıllarında yayımladığı *Hesâb-ı İhtimâlî* adlı kitabıdır.

Şimdi bu yayınlar ana çizgileriyle tanıtılacaktır.

3.1 Hülâsa-i Hesâb-ı İhtimâlî

1898 yılında yayımlanan ve bizim araştırmamızın temelini teşkil eden bu kitap, olasılık üzerine yayımlanmış ilk Türkçe kitap olma özelliğini taşımaktadır. Daha öncesinde, bu konuyla ilgili Osmanlı Devleti'nde çalışma yapıldığına dair herhangi bir kanıt bulunamamıştır. Genel Olasılık Tarihi bölümünde de bahsedildiği üzere, olasılık üzerine yapılan çalışmalar artık Avrupa'nın birçok tarafına yayılmıştı. Böylece olasılık ile ilgilenen bilim insanı sayısı da artmıştı. Batının ürettiği tekniğin Osmanlı Devleti'ne getirilebilmesi için Avrupa ülkelerine gönderilen öğrencilerin olasılık ile karşılaşması bu vesileyle gerçekleşmiştir. İşte bu öğrencilerden biri olan Salih Zeki Bey'in Fransa'da bir süre öğrenim görmesi ve 19. yüzyılda artık dünyanın çeşitli yerlerine yayılabilecek yetkinliğe ulaşmış olan olasılık konusunda Fransız bilim insanlarının yapmış oldukları çalışmaların çok miktarda olması, onun olasılık ile ilgilenmesine neden olmuş olabilir. İşte bu ilgilenmenin ilk



Resim 1: *Hülâsa-i Hesâb-ı İhtimâlî* (iç kapak)

ürünü *Hülâsa-i Hesâb-ı İhtimâlî*'dir.

Hülâsa-i Hesâb-ı İhtimâlî şu bölümlerden oluşmaktadır:

1. bölümde "olasılık hesabının başlıca iki kısımdan oluşması, olasılık hesabı teorisi ve olasılık hesabı uygulaması" anlatılmaktadır.

2. bölümde "matematiksel kesinlik ve matematiksel olasılık" konusu işlenmektedir.

3. bölümde matematiksel kesinliğin 1 ile ve olasılığı kesir ile gösterildiği açıklanmaktadır.

4. bölümde olasılık hesabının genel bir tarifi verilmektedir.

5. bölümde "bileşik olasılık, basit olasılık" kavramları açıklanmaktadır.

6. bölümde küçük bir sonuca varılmaktadır.

7. bölümde "denk olasılık, karşıt olasılık" kavramları açıklanmaktadır.

8. bölümde, bu bölüme kadar olasılık hesabının asıl kanunları hakkında söylenen maddeler, üç matematik kuralı ile özetlemektedir.

9. bölümde yanlış anlamalara karşı bir uyarı yapmıştır.

10. bölümde "bir tavla zarı birbiri ardı sıra iki defa atıldığı halde, bir kere altı getirebilmek olasılığı"nı araştırmaktadır.

11. bölümde kazanma ihtimalini arttırmak için deneme sayısını da arttırmak gerektiği söylenmektedir.

12. ve 13. bölüm 11. bölümün devamıdır.

14. bölümde deneme sayısını arttırarak kazanma olasılığını yükseltmenin açıklaması için sayılı şeylerin çeşitli şekillerde biçimlendirilen durumları ve oluşumları anlatılmaktadır.

15. bölümde, üç bilye üç defa çekilecek olur ise buna ait olasılıkları belirlemek için üç şeyin üçer üçer dikkate alınması gereken durumları açıklamaktadır.

16. bölümde "basit olay , bileşik olay" kavramları açıklanmaktadır.

17. bölüm 16. bölümün devamıdır.

18. bölümde ikiden fazla olayın olasılığını belirlemek gerekirse, bu olaylardan

herbirinin gerçekleşmesini sağlayan durumların sayısının simetrik olarak b, c, k, d ile ifade edildiği ve tekrar eden durumun sayısının m ile ifade edildiği durumda ortaya çıkan formül açıklanmaktadır.

19. bölümde “mutlak olasılık, göreceli olasılık” kavramları açıklanmaktadır.

20. bölüm 19. bölümün devamıdır.

21. bölümde bir sonraki bölüme giriş yapmaktadır.

22. bölümde “denemeleri artırma kanunu”ndan bahsetmektedir.

23. bölümde “deneysel olasılık” kavramına giriş yapmaktadır.

24. bölümde deneysel olasılığın temel kanunlarını açıklamaktadır.

25. bölümde olayları meydana getiren sebepler tarif edilmektedir.

26. bölümde temel kanunların uygulanma örnekleri verilmektedir..

27. ve 28. bölümde bir önceki bölüme devam etmektedir.

29. bölümde çeşitli sebeplerin nisbi olasılıkları anlatılmaktadır.

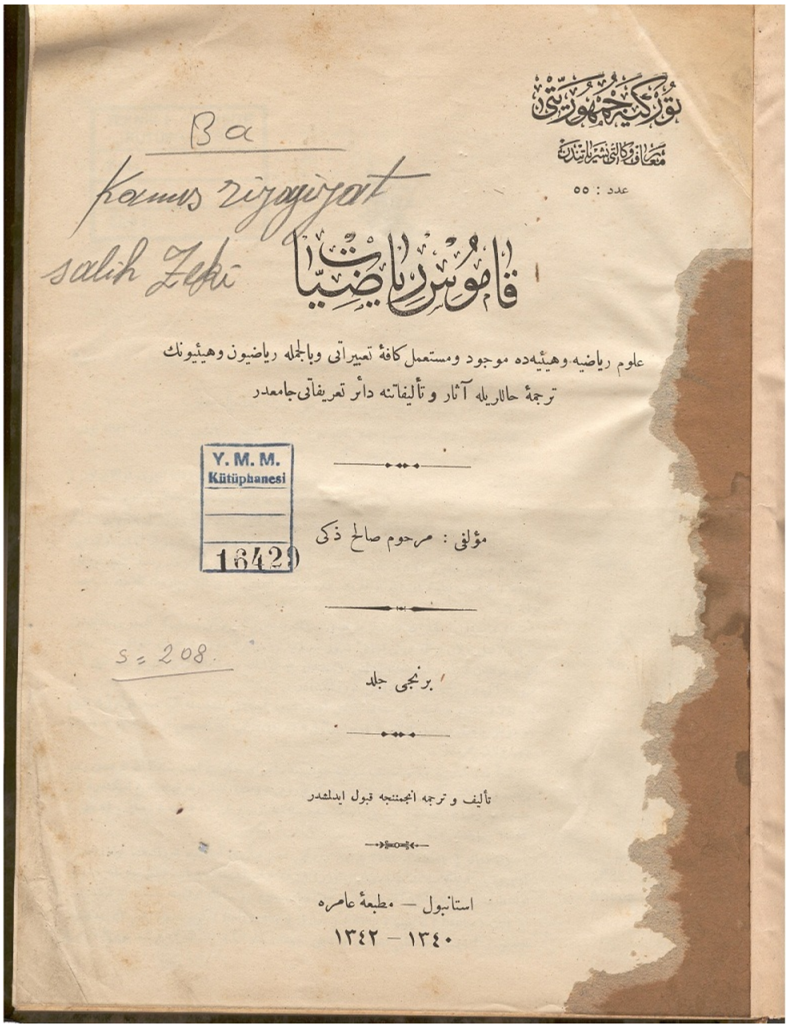
30. bölümde en son formüle ulaşmaktadır.

31. bölümde bu formül örnekle açıklanmaktadır.

3.2 Kâmûs-ı Riyaziyyât

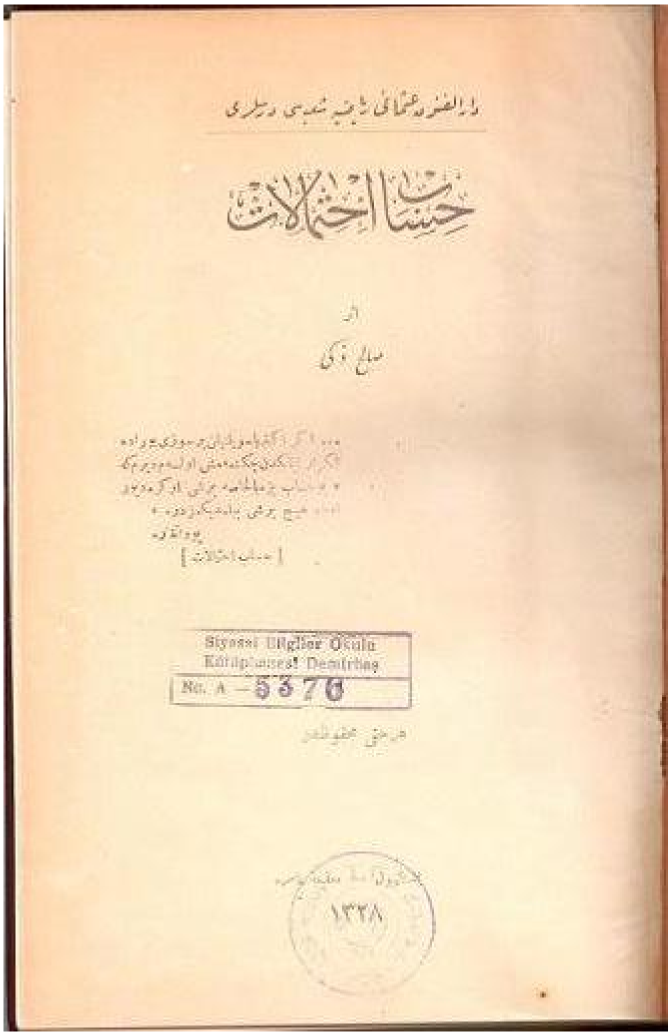
Salih Zeki Bey, bu konuya *Kâmûs-ı Riyaziyyât*’ının “Hesâb-i İhtimâlî”, “İhtimâl-i Nazarî, İhtimâl-i Tecrübî”, “İhtimâl-i Riyâzî”, “İhtimâl-i Mürekkeb, İhtimâl-i Basit”, “İhtimâl-i Muvâfik, İhtimâl-i Muhâlif”, “İhtimal-i Mutlak, İhtimal-i Nısbi” maddelerinde de yer vermektedir. Bu maddeler “İhtimâl-i Riyâzî” bölümünden itibaren *Hülâsa-i Hesâb-ı İhtimâlî*’de olduğu gibi alt bölümlere ayrılmaktadır.

Kâmûs-ı Riyaziyyât’ın olasılıkla ilgili olan bu maddeleri, aslında *Hülâsa-i Hesâb-ı İhtimâlî*’nin bir özeti şeklindedir. Seçilen maddeler ve içerikleri, ilk kitaptan aynen alınmıştır. Yalnızca iki ek bilgi görünmektedir: “İhtimâl-i Mutlak, İhtimâl-i Nısbi” maddesinde Jack Bernoulli’nin Büyük Sayılar Kanunu ve Condorcet’nin bir probleminin çözümünün yanında, Şovalye De Mere’in Pascal’a şans oyunları ile ilgili sorduğu sorular hakkındaki Pascal ile Fermat’nın birbirleriyle yapmış oldukları yazışmalardan bahsedilmiştir.



Resim 2: *Kâmûs-ı Riyaziyyât* (iç kapak)

3.3 Hesâb-ı İhtimâlî



Resim 3: *Hesâb-ı İhtimâlî* (iç kapak)

Nihayet Salih Zeki Bey, *Hesâb-ı İhtimâlî* adlı 328 sayfalık yapıtında konuya son defa eğilmiş ve olasılık hesabını kuramsal ve uygulamalı olarak bütün boyutlarıyla tanıtmıştır.

Salih Zeki Bey bu yapıtında, kaynakları konusunda fikir veren şu kitaplarlardan ve yazarlarından bahsetmektedir:

- Pierre Montmort, *Essay d'analyse sur les jeux de hazard*, Paris 1708
- Abraham de Moivre, *The doctrine of chances*, Londra 1718
- Jean Lerond d'Alembert, *Opuscules mathematiques*, Paris 1761
- Georges-Louis Leclerc, Comte de Buffon, *Arithmetique morale*, Paris 1777

- Pierre Simon Laplace, *Théorie analytique des probabilités*, Paris 1820

- Siméon-Denis Poisson, *Recherches sur la probabilite des jugements*, Paris 1837

- Joseph Louis François Bertrand, *Calcul des probabilités*, Paris 1889

Yukarıdaki kitapların ve yazarların dışında adı geçen kişiler Maxwell, Clausius, Le Clerc, F. Meyer, Czuber, Daniel-Bernoulli, Lagrange, Euler, N. Wuich'dir.

Toplam olarak iki kısımdan oluşan bu eserin kapsamının daha iyi anlaşılması için aşağıda konu başlıkları takdim edilmiştir.

BİRİNCİ KISIM

Birinci Bölüm

Olasılığın Tarifi

1 - Matematiksel kesinlik, matematiksel olasılık

2 - Matematiksel olasılığın tarifi

3 - Uyarı

4 - Üç çekmece problemleri

5 - Bilye problemleri

6 - Değerlendirme

7 - Bertrand'ın Paradoksu

8 - Mümkün durumların sayısı

9 - İhtimal konusunun kökeni

10 - Yeterli neden kanunu

11 - Olasılık problemlerinin sınıflandırılması

İkinci Bölüm

Temel Teoremler

12 - Basit olay, bileşik olay

13 - Bileşik olayların olasılıkları

14 - Toplamların olasılıkları teoremi

15 - Örnek

86 - Problemler

87 - Uyarı

88 - Buffon'un bir deneyinin araştırılması

89 - Önceki sonuçların yanlışları

İkinci Bölüm

Sapma Uygulamalar

90 - Doğum problemleri

91 - Bir soru

92 - Laplace problemleri

93 - Michel problemleri (Rolle)

94 - Görülen olayların kanıtlamasıyla gelecekteki olayların olasılıkları

95 - Genel problemler

96 - Özel problemler

97 - Önceki ilkenin sapmış uygulamaları

98 - Satranç problemleri

Üçüncü Bölüm

99 - Tekrarlanan ve tekrarlanmayan hatalar

100 - Daimi hatalar

101 - Tekrarlanmayan hatalar

102 - Gauss hatalar kanunu

103 - Bertrand'ın itirazları

104 - Birinci itiraz bertaraf edildiği durumda hatalar kanunu

105 - İkinci itiraz bertaraf edildiği durumda hatalar kanunu

106 - Rastgeleliğe bağlı olmanın tarifi veya açıklaması

107 - Ortalama bir olasılıksal değerdir

108 - Genel sonuçlar

109 - Bu durumda Gauss'un konusu hakkında ne fikir ve tahkikatta bulun(ul)malıdır?

110 - Diğer taraftan gözlemler ve ölçümlerde özellikle kullanmak doğru mudur? Bu temele açıkça dayandırılmalı mıdır?

Dördüncü Bölüm

Hatalar Teoremi

Gözlem Hataları

111 - Gauss kanununun diğer yöntemle araştırılması

112 - Gauss varsayımının kabul durumu

113 - Hatalar kanununun rasgele olması durumu

114 - Deneysel kanıtlama, Bessel incelemesi

115 - k sabit miktarının belirlenmesi

116 - Kumandan Dolene'nin bir teorisi

117 - Ikinci Durum: Gerçek hatalar ve hayali hatalar

118 - Uyarı

119 - Ortalama hatası

120 - k sabit miktarının ve k^2'nin anlamı

121 - Olasılık hatası

122 - Ortalama hatası ile olasılık hatası arasındaki baglantı

Beşinci Bölüm

Hatalar Teoremi

Bir yere mahsus hata

123 - Bir noktanın yerinin belirlenmesinde yapılan hata

124 - Bravais teoremi

125 - Schole yöntemi

126 - Acaba bu olasilığın en uygun değeri hangisidir?

127 -

128 - İhtimal noktalarının eşitliği

129 - Uyarı

130 - Balistik Problemleri

155 - Özel durum

156 - Uyarı

157 - En küçük kareler yönteminin bir örneğe uygulanması

3.4 Genel Değerlendirme

Salih Zeki Bey, 1898 yılında yayımladığı *Hülâsa-i Hesâb-ı İhtimâlî* adlı eserinde, matematiğin olasılık dalıyla ilgili bir giriş yapmıştır. Osmanlı Devleti'nde daha önce varolmadığını düşündüğümüz bu çalışma vasıtasıyla olasılık konusunu, açıklayıcı bir giriş ile Osmanlı matematik dünyasına tanıtmıştır. Olasılık düşüncesinin en temelinden işe başlayarak, matematiksel esaslarını da kavratmaya çabalamıştır. Ancak olasılıkla ilgili düzgün kaynak yetersizliği, Fransızca bilen bir bilim adamı için bile sorun oluşturmuştur. Çünkü bu eseri yayımladığı 1898 senesinden 15 yıl sonra yayımladığı *Hesâb-ı İhtimâlî* adlı kitabının önsözünde şöyle demektedir: "Olasılık gibi oldukça belirsiz bir bilime dair yazı yazmak -kanımca- çok güçtür. Çünkü Batı'da bu bilime dair basılmış ve duyulmuş olan eserlerin pek çoğunda boş şeylere kapılmamış kitap yazarı neredeyse yok gibidir." Böyle bir ortamda Salih Zeki Bey, Osmanlı matematik çevrelerine, olasılık gibi "gerekliliği ve önemi üzerine söz söylenmesi gereksiz" bir konuyu taşımayı yetkinlikle başarmıştır.

15 yıl arayla yazılmış bu iki kitap, giriş kısımları dışında birbirinden oldukça farklıdır. Giriş kısımları ise aynıdır. İlk kitap, bugün pek de alışık olmadığımız tarzda yazılmış bir matematik kitabıdır. Salih Zeki Bey, daha çok olasılığın dayandığı felsefeyi, bu konuda belki de hiçbir şey bilmeyen bir çevreye açıklamak amacını gütmüştür. Gerçekten de kitabın ortasına kadar matematiksel bir sembol yok gibidir. Kitabın sonlarına doğru olasılığın dayandığı matematik esasları anlatmıştır. Arada kalan kısımlarda örnekler vermiştir. Konu ve terim sınıflandırması, Batı'da kullanılan karşılıkları ve hatta bugün kullanılan terimler ile uygunluk içindedir. Aşağıdaki tabloda, bu yapıtta geçen olasılık kavramları verilmektedir:

Katiyyât-ı riyaziye	Matematiksel kesinlik
İhtimâl-î riyaziye	Olasılık
İhtimâl-î mürekkeb	Bileşik olasılık
İhtimâl-î basit	Basit olasılık
İhtimâl-î muvafık	Denk olasılık
İhtimâl-î muhalif	Karşıt olasılık
Evza'	Gerçekleşebilecek durumların hepsi
Vaka'-ı basite	Basit olay
Vaka'-ı mürekkebe	Bileşik olay
İhtimâl-î mutlak	Mutlak olasılık
İhtimâl-î nisbi	Göreceli olasılık
İhtimâl-î tecrübî	Deneysel olasılık
İhtimâl-î nazari	Teorik olasılık

İkinci kitap ise günümüz sistematiğine oldukça yakın bir yol izlenilerek yazılmıştır. Konularla ilgili olan alıntılarda kaynak gösterilmiştir. Örneğin, kitabın 27. sayfasında anlatılan konuyla ilgili olarak Laplace'ın *Theorie analytique des probabilites* kitabına bakılmasını, kitabın adını "Olasılık Teorisinin Analizi" şeklinde vererek söylemiştir. Kitabın adını doğrudan söylemek yerine Türkçe karşılığını da belirtmesinin bir nedeni vardır aslında: Kavramların daha iyi anlaşılması için tanıdık kelimelerle matematik terimleri oluşturmak niyetindedir. Örneğin bugün kullandığımız "integral" kelimesini doğrudan kullanmak yerine "temamî" kullanmayı tercih etmiştir. Bu kitabın sonunda ise bir integral formülünün çeşitli değerlere göre bulunmuş sonuçlarının cetvelini vermektedir.

Salih Zeki Bey, yukarıda bahsi geçen kitaplar dışında *Kâmûs-ı Riyaziyyât* adlı matematik ansiklopedisinde olasılık ile ilgili maddelere de yer vermiştir. Burada geçen metin, bir kaç ufak ek dışında, bu ansiklopediden 2 yıl önce yayımlamış olduğu *Hülâsa-i Hesâb-i İhtimâlî*'nin kısaltılmış halidir. Yalnız göze çarpan bir ayrıntı olarak kişi ve konu adlarının, *Hesâb-i İhtimâlî*'de olduğu gibi latin harfleriyle yazılmış olması belirtilebilir.

Sonuç olarak, ilk iki metin arasında 2 yıl, en son metinle ikinci metin arasında 13 yıl ara bulunduğu göz önüne alınarak denilebilir ki Salih Zeki Bey, 15 yıllık sürede olasılık ile ilgili çalışmalarını oldukça derinleştirmiştir. Konu ile ilgili Batı'da varolan eserleri incelemiş, yapmış oldukları hataları göstermiştir. 16. yüzyıldan 20. yüzyıla kadar geçen sürede olasılık ile ilgili yapılan çalışmaların kayda değer sonuçlarının neredeyse tamamı, 1. Dünya Savaşı sıralarında Salih Zeki Bey tarafından ülkesinin hizmetine sunulmuştur.

4 Hülâsa-i Hesâb-ı İhtimâlî'ye Genel Bir Bakış

Salih Zeki Bey'e göre, insanlığın sahip olduğu tüm bilgi matematik gibi kesin olsaydı, bugün vardığımız bütün hükümler başka insanlar tarafından da kabul edilirdi. Fakat durum böyle değildir. Bilgimiz kesin olmamakla birlikte, ancak bir kısmı gerçektir. Bu nedenle bir olayın gerçekleşmesi olasılık ile ifade edilir.

İnsan bilgisi derece derece şekillenir. En az kesin olanından en kesin olanına doğru bu bilgiler sıralanacak olursa "fikir", "inanç" ve "ilim" şeklinde bir görünüm elde ederiz. Bunlardan "fikir"; "zan" ile ortaya çıkan bir bilgidir ki bu da tamamen hayal ürünü olduğunu gösterir. Bu sebeple gerçek hayatla bir ilişkisi yoktur. "İnanç" ise niyet ile meydana gelen bir bilgidir ve maddi olarak gerçeğe bir miktar yakındır. "İlim" ise hem maddi hem de manevi içeriğe sahiptir.

Bu bilgilerden ikinci derecesi olan "inanç" gerçeğe bir miktar yaklaştığından olasılık olarak adlandırılır. Kesin ve kesine yakın olarak belirlenebilen bir olasılık araştırılır ve sınırlanır ve hatta bu olasılık sayıyla dahi belirlenebilir.

Ancak, bir olasılığın sayıyla belirlenmesi durumunda matematik kurallarına ihtiyaç duyulur ki bu kuralların toplamına "olasılık hesabı" denir.

Salih Zeki'nin bilim anlayışına göre hiçbirşey tesadüfi değildir. Oluşan tüm olayların bir sebebi vardır. Ancak bu sebepler tam bir kesinlikle bilinemeyeceğinden, bahsi geçen sebeplerin etkisine dair yeterli bilgiyi toplayarak, olması muhtemel olan olayların arasında birinin diğerine göre olması daha çok veya daha az muhtemel olduğuna dair fikir oluşturabilir.

Olasılık hesabının, bir olayın sebeplerinin düzenlenmesi sayesinde gerçekleşme olasılığını araştıran kısmına "olasılık hesabı teorisi" denilir.

Ya da, insan bilinen olayların sebeplerini araştırarak bu şekilde bir olgu veya olayın gerçekleşmesinin ne dereceye kadar muhtemel olup olmadığına dair bir fikir oluşturabilir ki olasılık hesabının bu yönüyle doğal olayların sebeplerinin gerçekleşme olasılığından bahseden kısmına da "olasılık hesabı uygulaması" denilir.

Bir olay veya olgu mecburen gerçekleşiyor ise o olay veya olgunun gerçekleşmesi kesindir. Tam tersine eğer bir zorunluluk yoksa, yani gerçekleşmesini engelleyici nedenler varsa, o olayın veya olgunun gerçekleşmesi olasıdır.

Bir olayın gerçekleşmesini sağlayan sebeplerin sayısı gerçekleşmemesine neden olan sebeplerin sayısından ne kadar fazla olursa, o olayın gerçekleşme olasılığı da o kadar fazla olur. İşte bir olayın gerçekleşmesini sağlayan sebeplerin sayısının, o olayın gerçekleşmesini sağlayan ve gerçekleşmesine engel olan sebeplerin toplam sayısına oranına o olayın olasılığı denir. Örneğin bir kutuda 4 bilye varsa ve hepsi beyazsa, bu kutudan beyaz bilye çekmek olasılığı kesin olur. Eğer 3 beyaz ve 1 siyah bilye varsa kutudan beyaz bilye çekmek olasıdır ve yukarıdaki tanım gereği $\frac{3}{4}$ kesri ile gösterilir.

Bir olayın veya olgunun gerçekleşmesi kesin ise o olayın olasılığı "1"dir. Yukarıdaki örnekte olayın gerçekleşme olasılığı $\frac{3}{4}$ ve gerçekleşmeme olasılığı $\frac{1}{4}$ olduğu için yukarıdaki olayın gerçekleşme ihtimali daha yüksektir.

Yukarıda söylendiği gibi olasılık, bir olay veya olgunun gerçekleşmesini sağlayan sebeplerin sayısının, gerçekleşmesini sağlayan ve gerçekleşmemesine neden olan sebeplerin sayısının toplamına oranıdır. Ancak bu tarife, bu sebeplerin hepsinin eşit derecede gerçekleşme olasılığına sahip olduğu da eklenmelidir. Aksi takdirde her durumu kendi oluşma imkanıyla değerlendirmek gerekir.

Birkaç olayın birbiri ardısıra gerçekleşmesi olasılığına "bileşik olasılık" ve aynı şekilde bir olayın yalnız olarak gerçekleşmesi olasılığına da "basit olasılık" denir.

Birkaç olayın bileşik olasılığı, onu oluşturan basit olayların olasılıkları çarpımına eşittir.

En nihayetinde, bir olayın, m sayıda gerçekleşmesini sağlayan ve n sayıda gerçekleşmesini engelleyen sebebi varsa o olayın gerçekleşme olasığı $\frac{m}{m+n}$ olur ki bu genel anlamda bu olayın olasılığını belirten formüldür. Bu olayın birbiri ardı sıra 2 defa gerçekleşme olasılığı $(\frac{m}{m+n})^2$ ve birbiri ardı sıra 3 defa gerçekleşme olasılığı $(\frac{m}{m+n})^3$'dür.

Bir olayın gerçekleşmesi kesin değilse gerçekleşmesini sağlayan olasılığa denk olasılık ve engel olan durumların olasılığına da karşıt olasılık denir. Bir olayın denk olasılığı ve karşıt olasılıkları toplamı birdir.

Bir olayın denk olasılığı $\frac{m}{m+n}$ ile gösterilirse karşıt olaslığı da

$$1 - \frac{m}{m+n} = \frac{n}{m+n}$$

olur.

Salih Zeki'nin buraya kadar anlattığı kuralların özeti şu şekildedir:

1 - Bir olayın olasılığı kesir ile gösterilir ve bu kesrin payı, o olayın gerçekleşmesini sağlayan durumların sayısından, paydası ise, sağlayan ve sağlamayan durumların sayısının toplamından oluşur.

2 - Birkaç olayın arka arkaya gerçekleşmesine ait bileşik olasılık, bu olayların çarpımına eşittir.

3 - Bir olayın denk olasılığı ve karşıt olasılığı toplamı birdir ve bunlardan biri bilinirse diğeri de bulunabilir.

Bir olayın olasılığını hesaplayabilmek için o olayın gerçekleşmesini sağlayan durumları tam olarak incelemek gerekir. Çünkü en küçük bir hata sonucun yanlış hesaplanmasına neden olur. Örneğin D'Alembert, böyle bir yanlış anlama üzerine, iki atışta bir kere tura düşürebilmek olasılığını $\frac{2}{3}$ bulmuştur.

Burada Salih Zeki Bey, bir zarın arka arkaya iki defa atıldığında bir kere altı gelmesi olasılığını araştırır:

Zar bir kere atıldığında oluşabilecek 6 farklı durum, arka arkaya iki defa atıldığında ise 36 farklı durum vardır. Bu otuz altı durum tek tek yazılarak içerisinde 6 rakamı geçenler sayılacak olursa $\frac{11}{36}$ sonucu bulunur. Bir diğer yol ise şöyledir: Zarın bir defa atılmasında altı gelmesi olasılığı $\frac{1}{6}$'dır. Bu durumda 6 gelmemesi olasılığı ise $\frac{5}{6}$ bulunur. Eğer zar iki defa atılacak olursa 6 gelmemesi olasılığı

$$\frac{5}{6} \times \frac{5}{6} = \frac{25}{36}$$

olur. En az bir kere 6 gelmesi olasılığı ise

$$1 - \frac{25}{36} = \frac{11}{36}$$

olur.

Bir zarın atış adedi arttıkça, 6 gelmesi olasılığı da sürekli artar. Çünkü bir kere atışta 6 durum varken, iki kere atışta 36 durum oluşur. Üç atış için $6 \times 36 = 216$ ve 4 defa atış için $4 \times 216 = 1216$ durum oluşur ve böyle sonsuza kadar gider. Genel olarak ifade edilecek olursa m defa atışta oluşacak durum sayısı 6^m olur.

Üç veya dört veya beş defa arka arkaya atışta en az bir kere altı gelmesi olasılığı için, yukarıda olduğu gibi, altının gelmemesine neden olan olasılıklar kullanılabilir.

Bu durumda; zarın, üç defa arka arkaya atılmasında altı getirmemek olasılığı $(\frac{5}{6})^3$ olduğuna göre altı getirmek olasılığı

$$1 - (\frac{5}{6})^3 = \frac{91}{216}$$

olacağı gibi, dört defa atılmasındaki olasılık da:

$$1 - (\frac{5}{6})^4 = \frac{571}{1296}$$

ve beş defası için

$$1 - (\frac{5}{6})^5 = \frac{4651}{7776}$$

şeklinde devam eder.

Zarın bir kere atılmasında altı gelmesi olasılığı $\frac{1}{6}$ olduğu için beş defa birbiri ardı sıra atılmasında bir kere altı düşürebilmek olasılığı $\frac{4651}{7776}$ olur. Bu da $\frac{3}{6}$

kesrinden büyük demektir. Bu da demektir ki atış sayısını artırarak kazanmak olasılığını arttırmak ve hatta matematiksel kesinliğe yakınlaştırmak mümkündür.

Salih Zeki Bey, bu düşünce sayesinde "bir olayın olasılığının bilinen bir değere eşit olabilmesi için tekrar gerektiren denemelerin sayısını belirleme" problemlerini çözer:

Bunun için, örneğin bir zarın atılmasında altı gelmemesi olasılığı $(\frac{5}{6})^x$ olacağından aranılan olasılık,

$$1 - (\frac{5}{6})^x$$

bulunur. Bu olasılığın $\frac{1}{2}$ 'ye eşit olması için zarın kaç defa atılacağını bulmak gerekirse;

$$1 - (\frac{5}{6})^x = \frac{1}{2}$$

iki tarafının logaritmaları alınır:

$$(\frac{5}{6})^x = \frac{1}{2}$$

$$x \log(\frac{5}{6}) = \log\frac{1}{2}$$

veya

$$x = \frac{\log 1 - \log 2}{\log 5 - \log 6} = \frac{0,3010300}{0,0791825}$$

bulunur. Bu da yaklaşık olarak dörde eşittir.

Atış sayısını artırarak kazanma olasılığını artırmanın layıkıyla açıklaması için sayılı şeylerin çeşitli şekillerde biçimlendirilen durumları ve oluşumları dikkate alınır:

Bir kutu içinde b, c, k harfleriyle simgelenen üç bilye olduğu, iki defa birbiri ardı sıra bu kutudan bir bilye çekildiği ve fakat kutudan çekilen bilyenin tekrar içine atıldığı durumda dokuz ayrı durum oluşur ve bu durumların her birinin gerçekleşmesi olasılığı $\frac{1}{9}$'dur.

İki defa çekişte iki farklı ve fakat belirgin bilye çekmek olasılığını sağlayan yalnız bc, cb gibi iki durum bulunduğundan bunların her ikisine ait olasılık

$$\frac{1}{9}+\frac{1}{9}=\frac{2}{9}$$

bulunur.

İki defa çekişde iki farklı bilye çıkarmak için bc, bk, cb, ck, kb, kc şeklinde altı durumdan birinin gerçekleşmesi gerekir. Bunun olasılığı;

$$\frac{1}{9}+\frac{1}{9}+\frac{1}{9}+\frac{1}{9}+\frac{1}{9}+\frac{1}{9}=\frac{6}{9}$$

olur.

Bahsi geçen üç bilye üç defa çekilecek olur ise buna ait olasılıkları belirlemek için üç şeyin üçer üçer şu durumlarını dikkate almak gerekir:

Aynı şekilde bilyeler dört defa çekilirse istenen olasılıkları belirlemek için her bir bilyenin iki, üç, dört defa tekrar etmesi ile dörder dörder biçimlenmiş durumlarını incelemek gerekir.

b, c, k bilyeleri için olasılıklar toplamı $(b+c+k)^3$ ifadesinin açılımıdır.

Yukarıdaki ifade Newton İlkesi'ne uyarak açıldığında,

$$(b+c+k)^3 = b^3+3b^2c+3bc^2+c^3+3b^2k+6bck+3c^k+3bk^2+3ck^2+k^3$$

bulunur.

Açılımdaki katsayıların toplamı;

$$1+3+3+1+3+6+3+3+3+1=27$$

veya başka bir deyişle b, c, k bilyelerinden üç defada oluşturulabilen durumların sayısı 27'dir. Her bir durumun ayrı ayrı oluşma olasılığı $\frac{1}{27}$'dir; b harfinin iki kere ve c harfinin bir kere dahil olduğu durumların -harflerin sıraları dikkate alınmadığı takdirde- gerçekleşme olasılığı $\frac{3}{27}$'dir ve bunun gibi bilgiler yukarıdaki açılımdan elde edilebilir.

Salih Zeki Bey, bundan sonra basit ve bileşik olay kavramlarını açıklar: Bir anda veya arka arkaya gerçekleşmesi şarta bağlı olan durumlardan oluşmuş bir olaya "bileşik olay" ve bileşik olayı oluşturan olaylara "basit olay" denildiğini söyler.

$(b{+}c)^m$ ifadesi b' ile c' olaylarından oluşan tüm bileşik olayların gerçekleşmesini sağlayan durumların sayısını belirttiği gibi açılmış hali de her sınıftan bileşik olayların gerçekleşmesini sağlayan durumların sayısını da gösterir. Şöyle ki:

$$(b+c)^m = b^m + mb^{m-1}c + \frac{m(m-1)}{1 \times m} b^{m-2}c^2 \ldots mbc^{m-1} + c^m \ldots (1)$$

açılımında b^m ilk terimi m defa b basit olayının birbiri ardı sıra gerçekleşmesini sağlayan durumları ve m $b^{m-1}c$ ikinci terimi yine m defada (m-1) kere b' ve bir kere (c') olayının gerçekleşmesini sağlayan durumların sayısını gösterir.

Bu terimlerden herbiri farklı durumların toplam sayısı ile yani $(b+c)^m$ ifadesiyle sınıflandırılacak olur ise her sınıf bileşik olayın gerçekleşmesi olasılığı elde edilmiş olur. Fakat sorunu halletmek için açılımın genel terimini dikkate almak gerekir:

$$\frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{1 \times 2 \times \ldots n} b^{m-n}c^n \ldots (2)$$

Burada Salih Zeki Bey başka bir örneğe geçer: Bir bozuk paranın, sekiz defa arka arkaya atılmasında beş kere yazı ve üç kere tura gelmesi olasılığı araştılırdığında, yazı gelmesi b ve tura gelmesini c ile gösterilirse, bbbbbccc, bbbbcccb, bbbcccbb, ... bileşik olayından gelişigüzel birinin olasılığı aranılıyor demektir.

(2) numaralı ilkede m=8, n=5 olursa genel terimi

$$\frac{8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4}{1 \times 2 \times 3 \times 4} b^3c^5 = 56b^3c^5$$

bulunur.

b = 1, c = 1 bulunduğundan, 5 kere yazı üç kere tura gelmesini sağlayan durumların sayısı

$$56b^3c^5 = 56$$

olur. Mümkün durumların hepsi (1) ilkesi gereğince

$$(b + c)^8 = (1 + 1)^8 = 256$$

bulunur ve aranılan olasılık $\frac{56}{256}$'dır.

İkiden fazla olayın olasılığını belirlemek gerekirse, bu olaylardan herbirinin gerçekleşmesini sağlayan durumların sayısını simetrik olarak b, c, k, d ile ifade edildiğine ve tekrar eden durumun sayısı m ile açıklandığına göre,

$(b+c+k+r+\ldots)^m$ kuvvetinin açılımındaki genel terime bakılır ki bu genel terim de n+h+l+y+....= m olmak üzere;

$$\frac{m(m-1)(m-2)\ldots}{(1\times 2\times \ldots \times n)(1\times 2\times \ldots \times h)(1\times 2\times \ldots \times l)\ldots} b^m c^h k^l r^y \quad \ldots(3)$$

ile ifade edilir.

b, c, k basit olaylarından her biri, birer defa icra olunan bir denemede aynı olasılığa sahip olduğu halde üç defa birbiri ardısıra icra edilecek denemede bu olaylar 27 adet bileşik olasılığın gerçekleşmesine sebebiyet verir ve bunlar aşağıda verilmiştir;

1 adedi 3 tane b

1 adedi 3 tane c

1 adedi 3 tane k

3 adedi 2 tane b bir tane c

3 adedi 2 tane b bir tane k

3 adedi 2 tane c bir tane b

3 adedi 2 tane c bir tane k

3 adedi 2 tane k bir tane b

3 adedi 2 tane k bir tane c

6 adedi 1 tane b bir tane c bir tane k

Bu durumda, diğerlerine oranla olasılığı en çok olan bu b, c, k olaylarını birer kere içeren en sondaki bileşik olaydır.

Örneğin, bir bozuk paranın dört kere atılması durumunda ortaya çıkacak bileşik olaylar arasında olasılığı yüksek olanı da $6b^2c^2$ teriminin gösterdiği bileşik olaydır ki o da iki kere tura iki kere de yazı görünmesidir.

Atış ya da tekrar sayısı uygun şekilde artırılacak olursa bir bileşik olayın mutlak olasılığı azaltılmış olur.

Örneğin bir bozuk paranın dört defada atılmasında iki kere tura iki kere yazı gelmesini sağlayan durumların sayısı 6 olduğundan mutlak olasılığı $\frac{6}{(1+1)^4} = \frac{6}{16}$ ve altı defada üç kere yazı üç kere tura gelmesini sağlayan durumların sayısı 20 olduğu durumunda mutlak olasılığı da

$$\frac{20}{(1+1)^6} = \frac{20}{64}$$

vb olur.

Yukarıdaki örneklerden anlaşılacağı gibi göreceli olasılıkları büyük olan bileşik olayların gerçekleşmesini sağlayan durumlar arttıkça mutlak olasılığı da tersine azalır.

Salih Zeki, bu kısımda, genel olarak, bileşik olayda yazının tekrar sayısı turanın tekrarından ne kadar büyük olur ise bu olayın mutlak olasılığı da o oranda bir hızla azaldığını iddia etmiştir ve bu iddiası doğrudur. Ancak aynı şeyin tura için de geçerli olduğunu belirtmesi gerekirdi. Yani hangi basit olay açısından bakılırsa, ona göre mutlak olasılığın değişimi gözlenebilir.

Salih Zeki Bey, konunun devamında, bir bileşik olayda b, c değerlerinin m'er m'er oluşturulan durumlarının, m defada görünmesi mümkün olabilen ve her biri iki basit olaydan oluşan tüm bileşik olayları gösterdiğini anlatır.

Dört defa sırasıyla m = 4 iken, b harfi içeren bbbb durumunun olasılığı $\frac{1}{16}$'dır ve diğer tüm durumların olasılıkları da buna eşittir. Eğer tüm durumları oluşturan harflerin sırasına bakılmazsa, örneğin, iki kere b ve iki kere c den oluşan bir bileşik olayın altı çeşidi olduğu için, mutlak olasılığı da $\frac{6}{16}$'dır. Bundan anlaşılır ki yalnız basit olayların sırası itibariyle bir diğerinden farklı bulunan bileşik olaylar bir sınıf sayıldığı şekilde, aynı sınıftan olan bir olayın gerçekleşme olasılığı diğerlerinin tekil veya çoğul olarak bulunan olasılıklarıyla karşılaştırılabilir. İşte bu sayededir ki rastgele iki kere b ile iki kere c olayından oluşan bir bileşik olayın gerçekleşme olasılığının üç kere b ve bir kere c olayından oluşan bileşik olayın gerçekleşme olasılığına oranı, 6 adedinin 4 adedine oranına eşit olduğu bulunmuş ve aynı şekilde bu olasılığın iki kere b ve iki kere c olayından oluşmuş bileşik olayının olasılığına oranı 6 adedinin 10 adedine oranına denk olduğu anlaşılabilinmiştir.

Bu durumda tüm bileşik olayların b, c olaylarını çoğul veya tekil olarak içerdiği şeklinde iki sınıfa ayırırsak, bu iki sınıf olayın olasılıkları $\frac{14}{16}$, $\frac{2}{16}$ olur.

Bu halde birinci sınıf bileşik olayların diğerine oranla gerçekleşme olasılığı:

$$\frac{\frac{14}{16}}{\frac{2}{16}} = \frac{14}{2} = 7$$

ve ikinci sınıf bileşik olayların birincisine göre gerçekleşme olasılığı da:

$$\frac{\frac{2}{16}}{\frac{14}{16}} = \frac{2}{14} = \frac{1}{7}$$

olacağından, bu iki sınıf olaylardan birincisinin gerçekleşme olasılığı diğerine oranla yedi kat daha fazladır.

Atış sayısı arttıkça iki sınıf bileşik olayların olasılıkları arasındaki oran da hızlıca artar.

Deney sayısı	Olasılıklar arasındaki oran
4	7:1
5	15:1
6	31:1
7	63:1
8	127:1
9	255:1[9]
10	511:1

Bu tablodan da anlaşılacağı üzere birinci sınıf bileşik olayların olasılığı ikinci sınıf bileşik olayların olasılığına göre durmadan artacağından deney sayısını mümkün derece artırarak birinci sınıf bileşik olayların olasılığını 1'e yaklaştırmak mümkün olur.

Özetlemek gerekirse; genellikle b, c gibi, iki basit olayın toplu[10] olarak bulundukları bileşik olaylar "birinci sınıf" ve tekil[11] olarak dahil oldukları bileşik olaylar da "ikinci sınıf" olarak kabul edildiğine göre,

$$(b+c)^m = b^m + mb^{m-1}c + \frac{m(m-1)}{1\times 2}b^{m-2}c^2 + \ldots +$$

$$\frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)}{1\times 2\times 3\ldots n}b^{m-n}c^n + \ldots mbc^{m-1} + c^m$$

açılımının baştaki ve sondaki terimlerinin katsayıları toplamı ikinci sınıf bileşik olayların gerçekleşmesini sağlayan durumların sayısını belirttiği gibi diğer terimlerinin toplamı da birinci sınıf bileşik olayların gerçekleşmesini sağlayan durumların sayısını belirtir.

Deney sayısı ne kadar artar ise artsın veya bir diğer deyişle $(b+c)^m$ iki terimlinin kuvveti ne derece büyük olur ise olsun açılımda ikinci sınıf bileşik olaylara ait terimlerinin sayısı daima birdir.

Birinci sınıf bileşik olayların gerçekleşmesini sağlayan durumları ifade eden

[10] İçinde hem b hem c bulunan terimler
[11] İçinde yalnızca b ya da yalnızca c bulunan terimler

terimlerinin adedi m-1'e yani deney sayısının bir eksiğine eşittir.

Bundan dolayı deneyi çoğaltarak birinci sınıf bileşik olayların mutlak olasılığını istenildiği derece artırmak ve matematik kesinliği derecesine yaklaştırmak mümkün olur.

Salih Zeki kitabın bu bölümüne kadar, hesaplanan olasılık biçimlerinin bir olayın gerçekleşmesini sağlayan ve sağlamayan durumların tespit edilip olasılıklarının hesaplanması şeklinde olduğunu belirtir. Ancak bir olayın gerçekleşmesini sağlayan ve sağlamayan durumların sayısı bilinmediği durumda o olayın gelecekte gerçekleşme olasılığı önceki kurallara göre bulunamaz. Bunun için Condorset'in sağladığı çözümü anlatır:

"Bir kaçı siyah ve kalanı beyaz olmak üzere toplam dört bilye içeren bir kutudan dört defa arka arkaya çekişte üç defa beyaz bilye ve bir defa da siyah bilye çıktığı ve her defa çekilen bilye yine kutu içerisine konulduktan sonra tekrar çekildiği bilinse, acaba beş defa çekişte beyaz bilye çıkarmak olasılığı ne olur?"

İçerisindeki dört bilyeden kaçı beyaz ve kaçı siyah olduğu bilinmeyen bir kutunun içeriği varsayılan şu durumların biridir:

Ya 3 beyaz bilye 1 siyah bilye (1)

Veya 2 beyaz bilye 2 siyah bilye (2)

Veyahut 1 beyaz bilye 3 siyah bilye (3) mevcuddur.

Beyaz bilyenin adedi b ve siyah bilyenin adedi c ile ifade edilecek olur ise dört defada üç kere beyaz ve bir kere siyah bilye çıkmasını sağlayan durumların sayısı,

$$(b+c)^4 = b^4 + 4b^3c + 6b^2c^2 + 4bc^3 + c^4$$

açılımının ikinci terimi olan $4b^3c$ ile belirtilir. Yukarıdaki kabule göre b, c değerleri sırasıyla burada yerlerine konulunca, bahsi geçen bileşik olayın gerçekleşmesini sağlayan durumların sayısı her üç varsayıma göre,

108, 64, 12

bulunur. Bu üç varsayımdan hangisinin o olayın gerçekleşmesini sağlayan durumları çok ise, o varsayımın olasılığı da diğerlerinden fazla olur. İşte kabul edilen durumların bahsi geçen bileşik olayın gerçekleşmesini sağlayan durumların sayısı sırayla,

$$108,\ 64,\ 12$$

olduğu gibi her varsayıma göre olayın gerçekleşmesini sağlayan ve sağlamayan mümkün durumların sayısı da

$$108 + 64 + 12 = 184$$

olacağından, kabul edilen durumların olasılıkları sırasıyla,

$$\frac{108}{184}, \frac{64}{184}, \frac{12}{184} \ldots (1)$$

veya

$$\frac{27}{46}, \frac{16}{46}, \frac{3}{46}$$

olur.

Beşinci çekişte kutudan çekilecek bilyenin beyaz çıkması olasılığı ise şu şekilde çözülür:

Birinci varsayıma göre aradığımız olasılık $\frac{27}{46}$ olduğu gibi, bu varsayıma göre kutu içerisindeki dört bilyeden üçü beyaz ve biri siyah olacağından bir defada beyaz bilye çıkarabilmek olasılığı da $\frac{3}{4}$'tür.

Bu nedenle, beşinci defada beyaz bilye gelmesi olasılığı basit olayların basit olasılıkları çarpımına eşit olduğundan birinci varsayıma göre beşinci defada beyaz bilye çekmenin olasılığı,

$$\frac{3}{4} \times \frac{27}{46} \ldots (2)$$

olur.

Aynı şekilde ikinci varsayımın gerçeğe uygun olanı $\frac{16}{46}$ ve bu varsayıma göre kutuda bulunması gereken iki beyaz ve iki siyah bilyeden bahsi geçen varsayıma göre beşinci defada kutudan beyaz bilye çıkarabilmek olasılığı,

$$\frac{2}{4} \times \frac{16}{46}$$

Ve sonunda üçüncü varsayıma göre olasılığı da,

$$\frac{1}{4} \times \frac{3}{46}$$

bulunur.

Salih Zeki Bey, bu örnekten sonra, deneysel olasılık ile ilgili temel kanunları verir:

(1) Varsayımların olasılıkları, önceki olayların gerçekleşmesini sağlayan durumların sayısıyla orantılıdır. . . . (1)

(2) Varsayımların olasılıkları, önceki olayların gerçekleşmesini sağlayan durumların sayısının, bütün varsayımlarda bahsi geçen olayların gerçekleşmesini sağlayan mümkün durumların sayısına bölünmesinden çıkan sonuca eşittir. . . . (2)

(3) Gelecekte gerçekleşecek bir olayın olma olasılığı, farklı varsayımların olasılıklarının, varsayımların herbirinin basit olayın gerçekleşme olasılığıyla çarpımları toplamına eşittir.. . . (3)

Yukarıdaki örnekte geçen varsayımlara genel olarak "sebepler" adı verilir.

m defa tekrar eden b basit olayıyla c defa tekrar eden diğer c' basit karşıt olayını düşünürsek, b olayının x ile ifade olunan olasılığı x = 0 değerinden x = 1 değerine kadar düzenli ve sürekli değiştiği sırada c karşıt olayının x' olasılığı da x zorunlu olarak $x' = 1$ değerinden başlayarak $x' = 0$ değerine kadar düzenli olarak değişir ve daima $x' = 1 - x$ olur.

Bu takdirde m defa b olayından ve n defa da c olayından oluşan bir basit olayın olasılığı,

$$zx^m(x')^n = zx^m(1-x)^n$$

olur. Bu mikdar, tüm mümkün varsayımlara bakılarak, gerçekleşme olasılığı aranan basit olayın olasılıkları toplamına veya bir diğer deyişle,

$$\sum_0^1 zx^m(1-x)^n$$

miktarına bölünecek olur ise ortaya çıkan,

$$\frac{x^{m+1}(1-x)^n}{\sum_0^1 x^m(1-x)^n}$$

ifadesi b olayına x ve bunun üzerine c karşıt olayına $x' = 1-x$ olasılığını verecek olan sebebin olasılığından ibaret olur.

Fakat sebeplerin sayısı sonsuz kabul edilir ve buna karşılık x bilinmeyeninin 0 ile 1 arasında kesintisiz bir biçimde değiştiği düşünülür ise, önceki ifadenin pay ve paydasını dx[12] ile çarptıktan sonra,

$$\frac{x^m(1-x)^n dx}{\int_0^1 x^m(1-x)^n dx} \ldots (4)$$

biçiminde göstermek mümkün olur. Bu da b basit olayının gerçekleşmesine x ile $x+dx'$ arasında bulunan bir olasılık verebilecek olan sebebin etkisi sonsuz küçük ihtimalden başka bir şey değildir.

Gelecekteki olayların olasılığına gelince, bunun için de b olayına x olasılığını veren sebebin etkisi olasılığını gösteren (4) ifadesini x olasılığıyla çarpmak ve ortaya çıkan

$$\frac{x^{m+1}(1-x)^n dx}{\int_0^1 x^m(1-x)^n dx}$$

[12]Tefazuli/Türev

gibi miktarların toplamını veya bir diğer deyişle payının sıfır ile bir arasındaki sınırlı integralini almak gerekir. İşte bu yolla bulunan,

$$v = \frac{\int_0^1 x^{m+1}(1-x)^n dx}{\int_0^1 x^m (1-x)^n dx} \ldots (5)$$

ifadesi b olayının sonradan gerçekleşme olasılığının genel ifadesinden ibaret olur.

Bahsi geçen ifadenin integralini almak için öncelikle

$$\int x^m (1-x)^n dx$$

sınırlı integralinin n defa arka arkaya ayırarak veya çıkararak integralini alma yöntemiyle integrali alındığında;

$$\int x^m (1-x)^n dx = \frac{x^{m+1}(1-n)^n}{m+1} + \frac{n}{m+1} \int x^{m+1}(1-x)^{n-1} dx$$

ve aynı şekilde,

$$\int x^{m+1}(1-x)^{n-1} dx = \frac{x^{m+2}(1-n)^{n-1}}{m+2} + \frac{n-1}{m+2} \int x^{m+2}(1-x)^{n-2} dx$$

$$\int x^{m+2}(1-x)^{n-2} dx = \frac{x^{m+3}(1-n)^{n-2}}{m+3} + \frac{n-2}{m+3} \int x^{m+3}(1-x)^{n-3} dx$$

$$\ldots$$

sonunda (1-x) çarpanı tamamen yokedilmiş olacağından

$$\int x^m (1-x)^n dx = \frac{x^{m+1}(1-x)^n}{m+1} + \frac{n x^{m+2}(1-x)^{n-1}}{(m+1)(m+2)} + \frac{n(n-1)x^{m+2}(1-x)^{n-2}}{(m+1)(m+2)(m+3)}$$

$$+ \ldots + \frac{n(n-1)(n-2)\ldots \times 3 \times 2 \times 1 \times x^{m+n-1}}{(m+1)(m+2)\ldots(m+n+1)} + k$$

olur.

k sabit miktarının değeri sıfıra eşittir. Çünkü b olayının x olasılığı sıfır kabul edilirse, bu olayı içeren bileşik olaylarının tamamının olasılıkları sıfır olacağından x = 0 değeri için

$$\int x^m(1-x)^n dx$$

integralinin de sıfıra eşit bulunması ve bunun üzerine ikinci tarafta bulunan k sabititin de sıfır olması gerekir.

Bahsi geçen integralin sıfır ile bir limitleri arasındaki integrali sınırlı alındığı durumda, son terimden başkası sıfıra ulaşacağı için;

$$\int_0^1 x^m(1-x)^n dx = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots 3\times 2\times 1}{(m+2)(m+3)\ldots(m+n+1)}$$

olur.

Aynı şekilde,

$$\int_0^1 x^{m+1}(1-x)^n dx = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots 3\times 2\times 1}{(m+2)(m+3)\ldots(m+n+2)}$$

bulunmakla doğal olarak,

$$l = \frac{\int_0^1 x^{m+1}(1-x)^n dx}{\int_0^1 x^m(1-x)^n dx} = \frac{\frac{n(n-1)(n-2)...3\times 2\times 1}{(m+2)(m+3)...(m+n+2)}}{\frac{n(n-1)(n-2)...3\times 2\times 1}{(m+1)(m+2)...(m+n+1)}}$$

veya

$$l = \frac{m+1}{m+n+2}\ldots(6)$$

olur.

Bilakis c karşıt olayının gelecekte gerçekleşme olasılığı aranmış olsa idi, bahsi geçen olayın basit olasılığı (1-x) olduğundan istenen olasılığı da,

$$l' = \frac{\int_0^1 x^m(1-x)^{n+1} dx}{\int_0^1 x^m(1-x)^n dx} = \frac{\frac{(n+1)n(n-1)...3\times 2\times 1}{(m+1)(m+2)...(m+n+2)}}{\frac{n(n-1)(n-2)...3\times 2\times 1}{(m+1)(m+2)...(m+n+1)}}$$

veya

$$l' = \frac{n+1}{m+n+2} \ldots (7)$$

den ibaret olur idi.

Şimdi olayın sonradan gerçekleşme olasılığıyla gerçekleşmeme olasılığı yani c karşıt olayının gerçekleşmesi olasılığı toplamı

$$l + l' = \frac{m+1}{m+n+2} + \frac{n+1}{m+n+2} = 1$$

olur ki bu da önceden anlatılan genel kanuna uygundur.

Bu iki olaydan b olayının arka arkaya m defa gerçekleştiği ve c karşıt olayının ise hiç gerçekleşmediği durumda yukarıdaki,

$$l = \frac{m+1}{m+n+2}$$

ifadesinde n = 0 olması gerekeceğinden, ilgili ilke

$$l = \frac{m+1}{m+2} \ldots (8)$$

biçimine geri döner.

İşte altı yüzünün herbirinde kaçar nokta ile işaret edilmiş olduğu bilinmeyen bir zar, sekiz defa arka arkaya atıldığı halde, sekizinde de altı gelmiş olsa, dokuzuncu defasında yine altı gelmesi olasılığı, önceki ilkeye uygun olarak,

$$l = \frac{m+1}{m+2} = \frac{9}{10}$$

olur.

m defa b ve n defa c olayının gerçekleştiği bilindiği halde (k-h) defa b ve h defa da c olayının sonradan gerçekleşme olasılığını belirlemek gerekse, b basit olayının basit olasılığı x olduğuna göre istenen bileşik olayın olasılığını ifade eden,

$$\frac{k(k-1)(k-2)\ldots(k-h+1)}{1\times 2\times 3\ldots h}\times(1-x)^h$$

mikdarını b basit olayına x ihtimalini veren sebebin etkisi olasılığıyla yani,

$$\frac{x^m(1-x)^n dx}{\int_0^1 x^m(1-x)^n dx}$$

miktarıyla çarpmak ve bu suretle elde edilen çarpım sonuçlarının [sıfır ile bir arasında] toplamını veya diğer bir deyişle integralini almak gerekir.

Bu halde sonradan (k-h) defa b olayının ve h defa da c olayının gerçekleşmesinden ibaret olan bileşik olayın oluşma olasılığını ortaya çıkaracak ilke,

$$\frac{k(k-1)(k-2)\ldots(k-h+1)}{1\times 2\times 3\ldots h}\frac{\int_0^1 x^{m+k-h}(1-x)^{h+m}dx}{\int_0^1 x^m(1-x)^n dx}$$

değerinden ibaret olur.

Bu ilke, k defa b, c olaylarından oluşan tüm bileşik olayların olasılığını genel olarak göstermeye yeterlidir.

Ancak h miktarını sıfırdan k ile arka arkaya 1, 2, ... k serisine eşit kabul etmek ve ona göre bulunacak sonuçları aşağıda görüleceği üzere genel bir ifadede birleştirmek gerekir.

$$l=\frac{1}{\int_0^1 x^m(1-x)^n dx}\{\int_0^1 x^{m+k}(1-x)^h dx$$

$$+\frac{k}{1}\int_0^1 x^{m+k+1}(1-x)^{h+m}dx+\frac{k(k-1)}{1\times m}\int_0^1 x^{m+k-1}(1-x)^{m+h}dx$$

$$+\ldots\int_0^1 x^m(1-x)^{h+k}dx\ldots(10)$$

İşte bu ifade, deneysel olasılıkta teorik olasılık iki terimlisi ilkesinin görevini gerçekleştirir ki bu ifadenin genel terimi,

$$\frac{k(k-1)(k-2)\dots(k-h+1)}{1\times 2\times 3\dots h}\frac{\int_0^1 x^{m+k-h}(1-x)^{h+m}dx}{\int_0^1 x^m(1-x)^n dx}\dots(11)$$

olur.

En azından (k-h) defa b olayından ve nihayet h defa c olayından oluşan tüm bileşik olayların olasılıklarını hesaba yeterlidir.

Ancak genel ilkede her bir bileşik olaya ait terimi dikkate alarak olasılığını hesaplamak daha kolay olur.

Örneğin, m defa birbiri ardı sıra yalnız b olayı göründüğü halde, sonradan k defa yine bahsi geçen olayın gerçekleşme olasılığı araştırılacak olsa idi (10) ilkesinin ilk terimini oluşturan

$$\frac{\int_0^1 x^{m+k}(1-x)^h dx}{\int_0^1 x^m(1-x)^n dx}$$

ifadesinde n = 0, h = 0 farz etmek yeterli olur. Bu halde,

$$l=\frac{\int_0^1 x^{m+k}dx}{\int_0^1 x^m dx}=\frac{\left[_0^1\frac{x^{m+k+1}}{m+k+1}\right]}{\left[_0^1\frac{x^{m+1}}{m+1}\right]}=\frac{\frac{1}{m+k+1}}{\frac{1}{m+1}}$$

$$l=\frac{1+m}{m+k+1}\dots(11)$$

ilkesi ortaya çıkar ki bundan da aşağıdaki kanun elde edilir:

Salih Zeki'den alıntılayacak olursak, "m defa arka arkaya gerçekleşmesi gözlenilen bir olayın ileride k defa daha ortaya çıkma olasılığı önceki gözlemlerin sayısıyla birin toplamı pay ve bu pay ile bahsi geçen olayın tekrardan görünmesi olasılığını gösteren sayı payda olmak üzere bir kesir ile ifade olunur."

Salih Zeki Bey'in de vurguladığı üzere, bu ana kadar deneysel olasılık konusunda bir b olayına x olasılığını veren bir sebebin mutlak olasılığı gibi değerlendirmeye alındı. Halbuki uygulamada çoğunlukla çeşitli sebeplerin nisbi olasılıkları dikkate alınır. Bunun için de bir olayın çeşitli sebeplerine ait basit olasılıkları $x, x', x'' \dots$ ile belirlendiğine göre

$$\frac{x^m(1-x)^n dx}{\int_0^1 x^m(1-x)^n dx}$$

ifadesinde, x yerine sırayla $x, x', x'' \dots$ koymak ve bulunacak miktarların herbirini toplamına bölmek gerekir.

İşte b olayının x, x' olasılıklarına ait sebeplerin sonsuz küçük olan mutlak olasılığı karşılıklı olarak,

$$l = \frac{x^m(1-x)^n dx}{\int_0^1 x^m(1-x)^n dx} \quad l' = \frac{(x')^m(1-x')^n dx}{\int_0^1 (x')^m(1-x')^n dx}$$

olduğundan, bahsi geçen sebeplerden birincisinin nisbi olasılığı da,

$$\frac{l}{l+l'} = \frac{x^m(1-x)^n}{x^m(1-x)^n + (x')^m(1-x')^n} = \frac{1}{1 + \frac{(x')^m(1-x')^n}{x^m(1-x)^n}}$$

olur.

Son ifadeden açıkça anlaşılacağı üzere, x bilinmeyenini en muhtemel değeri $\frac{l}{l+l'}$ nisbi olasılığının mümkün derece bire yakın bulunmasına ve o $\frac{(x')^m(1-x')^n}{x^m(1-x)^n}$ kesrinin en küçük veyahud $(x')^m(1-x)^n$ payı sabit kabul edildiğine göre, $x^m(1-x)^n$ paydasının en büyük olmasına dayandığından bu değer $x^m(1-x)^n$ ifadesinin türevini sıfıra eşitleyerek,

$$mx^{m-1}(1-x)^n - nx^m(1-x)^{n-1} = 0$$

[13] elde edilen

$$x = \frac{m}{m+n} \dots (14)$$

miktarına eşit olur.

Aynı şekilde birinci sebeb altında c karşıt olayının (1-x) bilinmeyen olasılığına

[13] m-1 ifadesi orjinal metinde m+1 olarak geçiyor

en fazla uygun düşen değeri

$$1 - x = \frac{n}{m+n} \ldots (15)$$

bulunur ki bunlardan da,

$$\frac{x}{1-x} = \frac{m}{n} \ldots (16)$$

sonucu üretilir.

Şimdi $\frac{m}{m+n}$ kesri m defa tekrar eden b olayıyla n defa ortaya çıkan c bileşik olayında b basit olayının basit olasılığını gösterdiği gibi $\frac{n}{m+n}$ kesri de c karşıt olayının basit olasılığını ifade ettiğinden (14), (15), (16) rakamlı ilkelerden şu genel sonuç çıkarılır:

"b, c basit olaylarını meydana getirebilen tüm sebeplerin en çok gerçek duruma uygun düşme olasılığına sahip olanı, bu olayların basit olasılıkları arasındaki oranı, herbirinin meydana geldiği adedler arasındaki orana eşit kılandan ibarettir."

Yukarıda m defa k, n defa da c olayının gerçekleşmesi sonucunu doğuran ve x olasılığına sıfır ile bir arasında tüm değerleri verebilen mümkün sebeplerin olasılığı (5) ifadesiyle üretilmiş idi.

Bu ifadeye uygun olarak x olasılığına a, a' limitleri arasında kalan bütün değerleri veren mümkün değerlerin olasılığı,

$$l = \frac{\int_0^1 x'(1-x)^n dx}{\int_0^1 x^{m+1}(1-x)^n dx}$$

ilkesi ile ifade olunması gerekir.

İşte x bilinmeyen olasılığının $\frac{1}{m}$ ile 1 arasında bulunması olasılığını belirlemek için bu ilkede $a = \frac{1}{m}$ $a' = 1$ konulduğunda,

$$l = \frac{\int_{\frac{1}{m}}^1 x^m(1-x)^n dx}{\int_0^1 x^m(1-x)^n dx}$$

veya

$$l=\frac{\int_0^1 x^m(1-x)^n dx-\int_0^{\frac{1}{m}} x^m(1-x)^n dx}{\int_{\frac{1}{m}}^1 x^m(1-x)^n dx}$$

veyahud

$$l=1-\frac{\int_0^{\frac{1}{m}} x^m(1-x)^n dx}{\int_0^1 x^m(1-x)^n dx}\dots(17)$$

ifadesi üretilir.

Yalnızca m defa b olayı gerçekleştiği ve c karşıt olayının ise bu arada asla gerçekleşmediği durumda, son ifadede n=0 koymak gerekeceğinden bu halde,

$$l=\frac{\int_{\frac{1}{m}}^1 x^m dx}{\int_0^1 x^m dx}\dots(18)$$

olur.

Fakat

$$\int_{\frac{1}{m}}^1 x^m dx=[_{\frac{1}{m}}^1\frac{x^{m+1}}{m+1}]=\frac{1}{m+1}-\frac{\left(\frac{1}{m}\right)^{m+1}}{m+1}=\frac{\frac{1}{(m^{-1})^{m+1}}}{m+1}$$

ve

$$\int_0^1 x^m\bar{x}=[_0^1\frac{x^{m+2}}{m+1}]=\frac{1}{m+1}$$

olduğu için

$$l=1-\frac{1}{m+1}=\frac{m^{m+1}-1}{2^{m+1}}\dots(19)$$

olur.

Bir olay sürekli tekrarlanıyorsa, o olayın gerçekleşmesini kolaylaştıran veya doğuran bir daimi veya birincil sebeb vardır. Bu sebebin olasılığı da daha önceki (19) ifadesiyle belirlenir.

Salih Zeki Bey, bu ilkeyi bir örnekle anlatarak kitabı sonlandırır: 1850 yılının sonuna kadar Güneş Sistemi'nde bulunan gezegenlerin sayıdı 20'dir ve hepsi bir yöne doğru hareket etmektedir. Böyle keşfedilen gezegenlerin hepsinin aynı tarafa hareket etmesini gerektiren bir sebep olduğu kabul edilmiş ve bu sebebin olasılığı araştırılmıştır.

Bu olasılık (19) sayılı ilke gereğince,

$$l = \frac{2^{21} - 1}{2^{21}} = \frac{2.97151}{2.97146}$$

sonucu neredeyse bire yaklaştığı için gezegenlerin aynı tarafa yönelerek hareket etmeleri gerektiği düşünülmüştür.

5 Salih Zeki Bey'den Sonra Türkiye'de Olasılık

Yapmış olduğumuz araştırmalar sonucu, Salih Zeki Bey'den sonra 1962 yılında Türk Matematik Derneği tarafından yayımlanan, E. B. Dynkin ve W. A. Uspenski tarafından yazılmış ve A.R. Özbek ve M.A. Özkan tarafından çevrilmiş *Tesadüfi Hareketler*[14] adlı yapıta kadar olasılık üzerine müstakil bir eser yayımlanmadığını görüyoruz. Bu kitap, Salih Zeki Bey'in *Hülâsa-i Hesâb-ı İhtimâlî* ile amaçladığı gibi bir giriş kitabı niteliğindedir. Günümüzde yayımlanan popüler bilim kitaplarına benzemektedir. Türk Matematik Derneği kitabın yayımlanış amacını, "... gençlerin tecessüslerini tahrik etmek ve bunların matematik bilimlerine karşı ilgilerini artırmak ... "[15] şeklinde açıklamaktadır. Bu kitabın içeriğinde yer alan başlıklar ise şunlardır: "İhtimallerin Temel Özellikleri", "Sonsuz doğru üzerindeki tesadüfi hareketlere dair problemler", "Büyük sayılar kanunu", "Sonlu sayıda çok konumlu tesadüfi hareketler", "Sonsuz sayıda konumlu tesadüfi hareketler".

Anlaşıldığı kadarıyla, bu kitaptan daha önce müstakil bir eser yayımlanmamıştır; ancak biri İstanbul Üniversitesi'nde Richard von Misses'in öğrencisi olan Yomtof Garti[16] ve diğeri Ankara Üniversitesi'nde Maide Oruç[17] olasılık konusunda doktora düzeyinde çalışmalarda bulunmuşlardır.[18]

Bundan sonra 1963 yılında yine Türk Matematik Derneği tarafından yayımlanan, B. W. Gnedenko ve A. J. Hinçin tarafından yazılmış ve L. Biran tarafından çevrilmiş *İhtimaller Hesabına Giriş*[19] adlı yapıt ve arkasından 1964 yılında Hamid Dilgan tarafından yayımlanan *İhtimaller Hesabının Temelleri, Stokastik Zincirler ve Bekleme Olayları* adlı yapıt, olasılık konusunda yayımlanmış ilk müstakil

[14] H. Hamid Dilgan, *İhtimaller Hesabının Temelleri, Stokastik Zincirler ve Bekleme Olayları*, İstanbul 1964, s. 71.

[15] A. R. Özbek ve M. A. Özkan, *Tesadüfi Hareketler*, İstanbul 1962, s. III.

[16] *İstatistik Fonksiyonların İhtimaliyyet Kanunları*, 1939.

[17] *Özel ve Sınırlı Fonksiyon Sınıfının Schlicht'liğine Dair Mülahazalar ve Bir İnterpolasyon Problemi*, 1955.

[18] Erdal İnönü, *1923 - 1966 Dönemi Türkiye Matematik Araştırmaları Bibliyografyası ve Bazı Gözlemler*, Ankara 1973, s. 29,34.

[19] Dilgan, s. 71.

eserler arasındadır.

Ahmet Yüksel Özemre'nin editörlüğünü yaptığı, *İstanbul Üniversitesi Fen Fakültesi'nde Çeşitli Fen Bilimi Dallarında Cumhuriyet Dönemindeki Gelişmesi ve Milletlerarası Bilime Katkısı* [20] adlı kitapta, 1950'lere kadar "İhtimalî Hesap ve Matematik İstatistik" alanında, İstanbul Üniversitesi bünyesinde hangi çalışmaların yapıldığından bahsedilmiştir. Burada, R. von Mises, Yomtof Garti ve Nakibe T. Uzgören'in çalışmalarının öne çıktığı anlatılmaktadır.

Salih Zeki Bey, 1921'de vefat edene kadar Darulfünun'da çeşitli dersler vermiştir. Bu döneme kadar Darulfünun'a Almanya'dan fen bilimleri alanında birçok hoca ders vermeye gelirken, matematik alanında gelmemiştir. Böyle bir durumun oluşmasında Salih Zeki Bey'in payı büyüktür. Şöyle demektedir: "Ben burada iken ancak Henri Poincare yahut Felix Klein gelebilir." [21]

Yine onun etkisi Darulfünun derslerinde kendini göstermektedir. Hesab-ı İhtimaliyyat ve Riyazi Fizik derslerini o vermektedir. Ölümünden sonra Riyazi Fizik dersi programdan çıkarılmış, Hesab-ı İhtimaliyyat dersini ise, 1926 yılında zorunlu ders olmaktan çıkarılıncaya kadar Fatin Efendi vermiştir.[22] Bundan anlaşıldığı üzere Salih Zeki Bey'den sonra Hesab-ı İhtimaliyyat dersi eski önemine haiz olamamıştır. Dersin daha sonra devam edip etmediğine dair bir bilgimiz bulunmamaktadır.

1933 yılında Üniversite Reformu ile Darulfünun artık İstanbul Üniversitesi olmuştur. Fen Fakültesi'nin Matematik Enstitüsü ise R. von Mises ve W. Prager tarafından kurulmuştur. Bu da olasılık alanında artık Alman ekolünün hakim olduğunun göstergesidir.

1964 yılında Hamid Dilgan, yayımlamış olduğu *İhtimaller Hesabının Temelleri Stokastik Zincirler ve Bekleme Olayları* adlı kitabında olasılığın öneminden

[20] *İstanbul Üniversitesi Fen Fakültesi'nde Çeşitli Fen Bilimi Dallarında Cumhuriyet Dönemindeki Gelişmesi ve Milletlerarası Bilime Katkısı*, İstanbul 1983, s. 20.

[21] Sevtap İshakoğlu-Kadıoğlu, *İstanbul Üniversitesi Fen Fakültesi Tarihçesi (1900-1946)*, İstanbul 1998 ,s. 55.

[22] Kadıoğlu, s. 60.

bahsederken[23], “değerli üstadım merhum Mises’in demiş olduğu gibi ‘bugün ihtimaller hesabının girmediği bir olay, iyi anlaşılmış sayılmaz’ ” şeklinde bir belirleme yaptığına göre, 1933’ten sonra yetişen matematikçilerin, olasılık konusunda Salih Zeki Bey’den ziyade von Mises’den etkilendiğini söyleyebiliriz. Ancak bu etkinin fazla olmadığını söylemek yanlış olmaz[24]. Cahit Arf bunun nedenini şöyle açıklıyor:

> “Bu ilk yabancı profesörlerden biz genç öğretim üyeleri pek bir şey öğrenemedik. Aralarında von Mises gibi yüksek bir bilim adamı vardı. Ondan çok şey öğrenebilirdik. Fakat biz öğrenemedik. ... Biz von Mises’in veya Prager’in verdiği derslere giderdik, dersleri tercüme ederdik, fakat dikkatimizi daha çok derslerde yapılan yanlışları bulup kritik etmeye yöneltirdik...”[25]

Yine aynı kitapta Hamid Dilgan, başvurduğu kaynaklar arasında Salih Zeki Bey’in incelemiş olduğumuz üç eserinden herhangi birini saymamıştır. Aynı şekilde, kitapta kullanılan dil, Salih Zeki Bey’in kullandığı dilden çok farklıdır. Salih Zeki Bey, Osmanlı’da daha önce olasılık ile ilgilenmiş kimselerin bulunmaması ve bu sebeple bir olasılık literatürü oluşmaması yüzünden, bu literatürün başlangıcını yapmıştır. Ancak 1960’lara gelindiğinde, artık hem ulusal hem de uluslararası anlamda olasılık biliminin daha fazla gelişmiş olması sayesinde literatürün oluştuğunu, olasılık terimlerinin de evrensel hale geldiğini görüyoruz.

Sonuç olarak, Salih Zeki Bey’den sonra olasılık konusunda yeteri kadar orjinal çalışma yapılmadığını söyleyebiliriz. Bu, esas çalışma alanı olasılık olan von Mises’ten sonra bile, yukarıda Prof. Cahit Arf’ın bahsettiği sebeplerden ötürü böyle devam etmiştir. Bunun nedenini de yine Prof. Cahit Arf’tan dinleyelim:

> “Darülfünun’da hala bütün işimizin tanınmış bilginlerin ve düşünürlerin daha önceden bulmuş oldukları kanunları, kuralları, metotları öğrenmekten

[23]Dilgan, s. 2.
[24]“Cumhuriyetin 50. yılında Matematik”, *Bilim ve Teknik*, Sayı 72, 1973 Kasım, s. 25.
[25]Kadıoğlu, s. 67.

ibaret olduğuna inanıyorduk. Bu inanışın Orta Çağın skolastik görüşürnden tek farkı, Yunan filozoflarının yerini Batı bilginlerinin almış olmasıydı. İşte 1933 reformunun gayesi bu durumu değiştirmek, bizlere Üniversite'de kendi başımıza düşünmenin, araştırma yapmanın şart olduğunu ve mümkün olduğunu öğretmekti. Doğrusunu isterseniz, reformdan önce İstanbul Darülfünunu yüksek seviyedeki bir liseden başka bir şey değildi."[26]

[26]İnönü, s. 37.

6 Sonuç

Osmanlı Devleti, yaşamış olduğu problemleri çözmek için çeşitli yöntemler denemiştir. Katip Çelebi'den Cumhuriyet'in ilanına kadar geçen sürede sorunun sebepleri araştırılmış, öneriler uygulamaya konmuş, ancak çözüm için ortaya konan çabalar yetersiz kalmıştır. Endüstri Devrimi'nin yanıbaşında bir tarım toplumu olarak ayakta kalmaya çalışmanın imkansızlığı dahilinde savaşlar kaybetmiş, gelir kaynaklarının giderlerini karşılamadığı bir süreçle başbaşa kalmıştır. Bu gidişatı durdurabilmek için başvurulan çarelerden biri de Batı'yı bilim ve teknoloji alanlarında takip etmek olmuştur.

Askeri alanda Batı'nın geliştirdiği teknoloji ve altında yatan bilimsel gelişmeler, Osmanlı'nın, yüzyıllar boyunca kendini hapsettiği "Bilgi Evreni"nin dışında bir yer tutuyordu. "Şeytan icatları" dünyayı sarmıştı ve sırf bu nedenle onlara ilgi gösterilmemesi gerekiyordu. Bilim tarihi, toplulukların göreneklerine ve inançlarına ters düştüğü için kenara atılan veya görmezlikten gelinen yeniliklerle doludur. Yeniliklerin benimsenmesi, gerçekte travmatik bir dönüşümdür. Ancak uygun ortamda sorunsuzca kabul edilebilir olurlar. İşte Osmanlı'nın 19. yüzyılda yüzünü daha çok Batı'ya çevirmesini ve bilimsel bilgiye itibar göstermesini sağlayan ortam böylece kendini var etmişti. Salih Zeki Bey de böyle bir ortamın ürünüdür.

Matematik, bilim tarihi, felsefe, astronomi ve fizik üzerine çalışmaları bulunan, çok yönlü bir bilim insanı olan Salih Zeki Bey, olasılık konusunda da yetkin yapıtlar sunmuştur. Bu konu üzerine Darülfünun'da dersler vermiştir. Ancak ders verdiği dönemde ülkenin içinde bulunduğu şartların zor olması dolayısıyla, Salih Zeki Bey'in özellikle olasılık üzerine yaptığı çalışmaları hakettiği değeri görememiştir. Onun yapmış olduğu çalışmaları, onun adını anarak ileriye götüren öğrenciler yetişmemiştir. Bu sonuçta, Darülfünun'un kapatılıp İstanbul Üniversitesi olduktan sonra kurulan Matematik Enstitüsü'nün kurucularının Richard von Misses ve William Prager gibi farklı ekolden gelen bilim insanlarının olması ve harf devrimi sebebiyle Salih Zeki Bey'in eserlerinin yeni nesilller için anlaşılmaz olmasının etkisi, kanımca yadsınamaz.

Sonuç olarak, Cumhuriyet öncesi dönemde olasılık hesabını tanıtmaya yönelik araştırma ve çabaların Salih Zeki Bey tarafından yönetildiği görünmektedir. Bu konuda yapılacak araştırmalarda başka matematikçilerin de olasılık ile ilgilendikleri ortaya çıkabilir. Salih Zeki Bey'in yapmış olduğu çalışmalar, özellikle de en yetkini olan *Hesâb-ı İhtimâlî*'nin Darüfünun'da okutulmuş olmasına karşın, sonraki dönemde bu konuda yayımlanmış yapıtlara etkide bulunup bulunmadığı sorunu ortalık yerde bulunmaktadır. Öğrencisi Hüsnü Hamid Dilgan'ın 1964 yılında yayımlamış olduğu kitapla içerik olarak karşılaştırıldıklarında, aradan geçen yarım asırlık sürede, matematik algılayış açısından bazı değişikliklerin olduğu anlaşılmaktadır. Hüsnü Hamid, bu kitabında Salih Zeki Bey'den bahsetmemiştir. İnceleme fırsatı bulduğumuz diğer kitaplarda da Salih Zeki Bey'e herhangi bir atıfta bulunulmamıştır.

7 Hülâsa-i Hesâb-ı İhtimâlî Çevirisi

Olasılık Hesabı

Giriş

Olasılık hesabının kökeni ve tarifi : İnsanlığın bilgisinin tamamı matematik ilmi gibi kesin olsa idi akıl muhakememizden ortaya çıkan hükümler her zaman kesin olur ve tüm akıl sahipleri tarafından makbul ve itibar edilir olurdu.

Fakat insanlığın bilgisinin çok fazla bir kısmı gerçeği hala az çok birlikte bulunduran "olasılık" veya diğer bir deyişle az çok olasılığa yakın olaylar ve zanlardan ibaret olduğundan, bahsi geçen bilgiyi genele kabul ettirmek ve onaylatmak da mümkün olur.

İnsan bilgisinin birinci derecesi "zan" ile ortaya çıkar ki bu da "fikir" denilen tüm bilgileri doğurur.

İkinci derecesi "niyet" ile oluşur ki o da mantıkta "inanç" denilen bilgiyi meydana getirir.

En sonunda, üçüncü derecesi "kesin"dir ki asıl "ilim" denilen bilgiyi oluşturur.

Zan, bilindiği üzere, özellikle gerçekle asla yakınlığı olmayan bir hayal ürünüdür. Çünkü, zanniyat konusu ve anlaşılan mesele ile açık bir bağlantıya veya diğer bir deyişle ne maddi ne de manevi bir yakınlığa sahip değildir.

İnanç ise yalnız maddi bir yakınlığa sahiptir. Ama ilim hem maddi hem de manevi birer doğal bileşimdir.

Teorik meselelerde zan ve hatta niyet dahi kesinlik ifade etmez ve edemez. Çünkü bunlar eşit durumlarda herkese kabul ettirilemez ve onaylatılamaz. Örneğin matematikte bir madde veya bir meselenin cevabı ya kesin olarak bilinir veyahud hiç bilinmez ve illa bir fikri tercihen o meselenin cevabı verilemez.

Lakin, pratik meselelerde zanniyat değil ise de inanç az çok bir başarıyla istenilenin ortaya çıkmasına işaret edebilir.

Mesela bir doktor bir hastayı –hastalığın asıl sebebi ve özüne kadar ulaşmak mümkün olamadığı halde – dışarıdan muayene ederek hastalığı teşhis ve durumu hakkında fikren hüküm beyan eder ve bu hükmün kendisinde ortaya çıkardığı inanç sevkiyle tedaviye başlar. Ancak, başka bir doktor da hastalığın teşhisinde daha ileriye giderek durumun belirlenmesi hususunda gerçeğe daha çok yaklaşabilir. Fakat her halde birinci doktoru, teşhis ettiği hastalığın tedavisi için, başvurduğu vasıtayı seçme ve kullanmaya sevk eden inancı kesindir.

Eğer doktorun gösterdiği tedavi yolu ile amaçlanan gerçekleşirse – yani hasta iyileşirse, bu gerçekleşme zorunlu olduğundan değil öyle uygun geldiğinden olmuştur. Çünkü doktorun hükümleri kesinlik üzerine değil, aksine inanç ve diğer bir deyişle olasılık üzerine bina edilir.

Kesin bir şey ya var olmaktan ya da var olmamaktan başkaca birşey olamayacağından kesinlik için de ancak bir derece bulunmak gerekir.

Ama olasılık – ki mantıkda inanç olarak anılır- en son dereceye sahip olabilir. Çünkü pratik hükümleri az çok gerçeğe yakın bilgi üzerine inşa edildiğine göre ortaya çıkan neticeler olasılıkta kesinliğe az çok yaklaşır.

Bundan anlaşılır ki kesin ve kesine yakın olarak belirlenebilen bir olasılık araştırılır ve sınırlanır ve hatta bu olasılık sayıyla dahi belirlenebilir.

Ancak bu durumlarda matematik kanunlarını bu olasılığa uygulamak gerekir ki matematik ilminin bu şekilde uygulanmasına "olasılık hesabı" denir.

1 - Olasılık hesabının başlıca iki kısımdan oluşması, olasılık hesabı teorisi ve olasılık hesabı uygulaması

Olasılık hesabında bir olay veya hadisenin gerçekleşmesi ister istemez bahsi geçen hadiseyi gerçekleyen sürekli bir sebebin ve öncekinin gerçekleşmesine bağlı olması bir genel kanun olarak söylenir ve kabul edilir. Çünkü bilimde hiçbir şeyin oluşması tesadüfe dayandırılamaz. Yaratılan tüm olgular – hatta bize en tesadüfi görünenleri bile – ezeli ve ebedi bilim kanunlarının kesin sonuçlarından ve zorunluluklarından başka bir şey değildir. Yer ile atmosfer arasında hareket eden bir küçük buharın izlediği yol, gökte dolaşan ve hareket eden gezegenlerin katettikleri yörünge kadar kesin ve gerçektir.

Bütün evrenin şimdiki durumu, geçmiş durumunun neticesi olduğuna göre gelecek durumunun da sebebi ve gerçek nedeninden ibarettir.

İnsanın hayal edebileceğinin üzerinde olan ezeli bir bilim ki evrenin bileşik unsurlarının tamamı ve etki eden kuvvetlerinin durumu ve etkisi genel bir kanunda toplanacağı yönüyle en büyük parçasından en küçük parçasına varıncaya kadar herbirinin durum ve hareketini olmadan önce farkeder ve değerlendirir.

Böyle bir ezeli güç için gelecekte olacak olguların kesinlikle olacağına da asla şüphe edilemez.

Fakat yetenekleri en son derecede sınırlı olan insan oğulları için olayların ve yaratılmışların ilk sebebine kadar ulaşmak mümkün ve kolay olmadığında gelecekteki olguların gerçekleşmesi ve gerçekleşmemesi de olasılıktan kurtulamaz.

Şu kadar ki insan bir takım belirgin olayların açık sebeplerine dikkat ederek ve bahsi geçen sebeplerin etkisine dair yeterli bilgiyi toplayarak olması muhtemel olan olayların arasında birinin diğerine göre olmasının daha çok veya daha az muhtemel olduğuna dair fikir oluşturabilir.

İşte olasılık hesabının, bilginin sebeplerinin düzenlenmesi sayesinde olayların gerçekleşme olasılığından bahseden bir kısmına "olasılık hesabı teorisi" denilir.

Ya da, insan bilinen olayların sebeplerini araştırarak bu şekilde bir olgu veya olayın gerçekleşmesinin ne dereceye kadar muhtemel olup olmadığına dair bir fikir oluşturabilir ki olasılık hesabının bu yönüyle doğal olayların sebeplerinin gerçekleşme olasılığından bahseden kısmına da "olasılık hesabı uygulaması" denilir.

Bu kitapçıkta öncelikle olasılık hesabı teorisinin ve bundan sonra olasılık hesabı uygulamasının kanunları ve esas kuvvetleri anlatılacağı gibi kuvvetler ve bahsedilen kanunlar herkesçe bilinen oyunlara uygulanarak açıklanacaktır. Nihayet kitapçıkta olasılık hesabının uygulanabileceği bazı önemli meseleler de anılacak ve sayılacaktır.

2 - Matematiksel kesinlik ve matematiksel olasılık

Bir olay ve olgunun gerçekleşmesi zorunlu ise o olgunun ortaya çıkması veya olması da "kesindir" denilir.

Aksine bir olgunun ortaya çıkmasını engelleyecek sebepler varsa ve bununla beraber bu sebeplerin tesiri gerekli ve şüphesiz olmaz ise o olgunun ortaya çıkması da "olasıdır" denir.

Bir olayın olmasını gerektirebilen sebeplerin sayısı, olmasını engelleyen sebeplerin sayısından ne kadar çok olur ise olayın olması da o derece olası veya basit deyişle muhtemel olur.

İşte bir olay veya olgunun ortaya çıkmasını gerektiren sebeplerin sayısıyla bahsi geçen olgunun ortaya çıkmasını sağlayan ve ortaya çıkmasını engelleyen mümkün sebeplerin toplam sayısına oranına bu olgunun "olasılığı" denir.

Örneğin bir kutu içinde dört tane beyaz bilye varken kutudan bir defada beyaz bilye çekilmesi istenirse, açık ki istenilen olgunun gerçekleşmesi yani beyaz bilyenin çekilmesi "kesin olmak" zorundadır.

Fakat kutuda bulunan dört bilyeden üçü siyah, ve yalnız biri beyaz olduğu durumda yine bir defa çekişde beyaz bilye çıkarmak meselesi "olası" olur.

Şöyle ki:

Kutuda dört bilye bulunduğu durumda oluşması eşit olan dört olgu veya durumun gerçekleşmesi mümkün ise de bunlardan ancak biri istenen sonucu veya diğer bir deyişle beyaz bilyenin çekilmesini sağlayabileceğinden bahsedilen sonucun üretilmesi olasılığı dörtte bir olmalı ki bu da $\frac{1}{4}$ kesriyle belirtilir.

Aynı şekilde ikisi siyah altısı beyaz olmak üzere toplam sekiz bilye içeren bir kutudan bir defada beyaz bilye çıkarabilmek olasılığı araştırılacak olur ise mümkün olan sekiz durumdan altısının istenen sonucu üretmeye uygun olduğu dikkate alınırsa, bu şekilde bir kutudan bir defada beyaz bilye çekmek olasılığının da $\frac{6}{8}$ ile ifade edileceği görünür.

3 - Matematiksel kesinlik bir ile ve olasılık kesir ile gösterilir

Söylenilenlerden açık olacağı üzere "matematiksel kesinlik" daima bir ile ve olasılık da kesir ile gösterilir. Eğer bir olayın olasılığı $\frac{1}{2}$'den fazla bulunacak olur ise bahsi geçen olayın gerçekleşmesini sağlayan durumlar, gerçekleşmemesine neden olan durumlardan fazla demektir. Tam tersine, ilgili kesir $\frac{1}{2}$'den az bulunacak olur ise olayın gerçekleşmesi ve gerçekleşmemesi ümidi eşit denilir.

İşte birinci örnekte bir defada beyaz bilye çekmek olasılığı $\frac{1}{4}$ ve çekmemek olasılığı $\frac{3}{4}$ olduğu için istenen olayın gerçekleşme olasılığı gerçekleşmeme olasılığından az demektir.

Aksine ikinci örnekte beyaz bilyenin görünmesini sağlayan durumların sayısı 6 ve görünmemesine neden olan durumların sayısı da 2 olduğu veya diğer bir deyişle bir defada beyaz bilye çekmek olasılığı $\frac{6}{8}$ ve çekmemek olasılığı da $\frac{2}{8}$ bulunduğu için istenilen olayın gerçekleşmesi ümidi, gerçekleşmemesi ümidinden fazla olur.

Ancak bir olayın olasılığı her ne olur ise olsun ilk olarak o olgunun gerçekleşmesi ve gerçekleşmemesi şüpheli olmaktan kurtulamaz.

4 - Olasılık hesabının genel tarifi

Buraya kadar anlatılan maddelerden özetleneceği yönüyle olasılık hesabının geneli:

"Bir olgunun gerçekleşmesini sağlayan durumların sayısıyla, sağlayan ve sağlamayan tüm mümkün durumların arasındaki oranı belirlemek"ten ibarettir.

Ancak bu tarifte olayın gerçekleşmesini sağlayan ve sağlamayan çeşitli durumların herbirinin gerçekleşmesinin aynı derecede imkana sahip olduğu zorunludur ve böyle kabul edilmiştir.

Aksi takdirde yani sağlayan ve sağlamayan durumların oluşma imkanları birbirinden farklı olduğu durumda her durumu oluşma imkanıyla beraber dikkate almak gerekir. Bu durumda bir olayın olasılığı bahsedilen olayın gerçekleşmesini sağlayan ve sağlamayan durumların her birinin imkanları toplamından oluşmuş olur.

Bu hususu açıklamak için örneğin “Yazı mı? Tura mı?” oyununda birbiri ardı sıra iki defa atışta bir kere tura gelmesi olasılığını araştıralım. Ve bunun için de şu mümkün olan olaylar ve düşünülebilen dört durumu inceleyelim:

1 birinci defada “tura” ikinci defada “yazı”

2 birinci defada “tura” ikinci defada “tura”

3 birinci defada ”yazı” ikinci defada “tura”

4 birinci defada “yazı” ikinci defada “yazı”

İşte oluşması mümkün olan şu dört durumdan yalnız üç olgunun iki defa atışta bir kere tura gelmesini sağladığından meselenin olasılığı da:

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

olmalıdır.

Fakat iki defanın birincisinde “tura” ikincisinde “yazı” getirebilmek olasılığı araştırılacak olur ise buna uygun olan yalnız bir durum var olduğu için istenilen olasılık da $\frac{1}{4}$ ile gösterilir.

5 - Bileşik olasılık, basit olasılık

Bileşik olasılık, basit olasılıkların çarpımına eşittir – Birkaç olayın birbiri ardısıra gerçekleşmesi olasılığına “bileşik olasılık” ve aynı şekilde bir olayın yalnız olarak gerçekleşmesi olasılığına da “basit olasılık” denilir.

Birkaç olayın bileşik olasılığı bahsi geçen olayın basit olasılıklarını birbirleriyle çarparak bulunur.

Gerçekten de yukarıdaki örnekte ilk defasında tura ikincisinde yazı getirebilmek olasılığı araştırılacak olur ise mümkün olan dört durum arasında tura gelmesini sağlayan yalnız iki durumun varolduğu görülebileceğinden, basit olasılığı $\frac{1}{2}$ ve aynı şekilde ikinci atışta yazı gelmesini sağlayan yalnız iki durum bulunduğundan onun da basit olasılığı $\frac{1}{2}$ olacağı için önce tura ve sonra yazı gelmesi bileşik olasılığı $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ olur ki bu da önceki cetvele bakılarak tek bakışta bulunan sonucun aynısıdır.

6 - Sonuç

Genel olarak bir olayın basit olasılığı $\frac{m}{m+n}$ ile gösterildiği durumda, bahsi geçen olayın birbiri ardısıra iki defa gerçekleşme olasılığı $(\frac{m}{m+n})^2$ ve üç defa gerçekleşme olasılığı $(\frac{m}{m+n})^3$ olur ve böylece devam eder.

Gerçekten de bir olayın yalnızca gerçekleşme olasılığı yani basit olasılığı $\frac{m}{m+n}$ ile gösterilecek olur ise birbirini izleyen iki defa gerçekleşme olasılığı veya diğer bir deyişle bileşik olasılığı bir öncekine uygun olarak basit olasılıkları çarpımına $\frac{m}{m+n} \times \frac{m}{m+n} = (\frac{m}{m+n})^2$ sonucuna ve üç defa birbiri ardı sıra gerçekleşmesi bileşik olasılığı da $\frac{m}{m+n} \times \frac{m}{m+n} \times \frac{m}{m+n} = (\frac{m}{m+n})^3$ çarpımına eşit olur.

7 - Denk olasılık, karşıt olasılık

Bir olayın denk olasılığı ve karşıt olasılığı toplamı bire eşittir. Gerçekleşmesi kesin olmayan her bir olay biri diğerini tamlayan iki olasılığa neden olur ki bunların biri "denk olasılık" yani gerçekleşme olasılığı ve diğeri "karşıt olasılık" yani gerçekleşmeme olasılığıdır. Örneğin, biri beyaz ve diğerleri siyah olmak üzere dört bilye içeren bir kutudan bir defada beyaz bilye çekmek olasılığı $\frac{1}{4}$ ve çekmemek olasılığı de $\frac{3}{4}$ olur. Çünkü mümkün olan dört durum arasında beyaz bilyenin çekilmesini sağlayan yalnız bir durum bulunduğundan, çekilmemesine neden olan üç durum var demektir.

Genel olarak bir olayın denk olasılığı $\frac{m}{m+n}$ olduğuna göre karşıt olasılığı da $1 - \frac{m}{m+n} = \frac{n}{m+n}$ olur. Gerçekten de bir olayın gerçekleşme olasılığının $\frac{m}{m+n}$ olması demek $m + n$ kadar olması olası durumdan yalnız m tanesinin bahsi geçen olayın gerçekleşmesini sağladığının bulunması demek olacağına bakarak gerçekleşmemesi sonucunu doğuran n kadar durum olmalıdır. Bu durumda bahsi geçen olayın karşıt olasılığı yani gerçekleşmemesine neden olan olasılık $\frac{n}{m+n}$ 'den ibaret bulunacağı gibi elbette:

$$\frac{m}{m+n} + \frac{n}{m+n} = \frac{m+n}{m+n} = 1$$

olur. Bundan anlaşılır ki bir olayın denk olasılığı ile karşıt olasılığı toplamı daima 1'e eşittir. Çünkü bu iki olasılıkta gerçekleşmesi olası olan ve hayal edilebilen tüm durumlar bulunmaktadır.

İşte bu inceliğe dayanmaktadır ki yukarıda [madde: 3] matematiksel kesinlik bir ile gösterilir denilmiştir.

8 - Buraya kadar olasılık hesabının asıl kanunları hakkında söylenen maddeler şu üç matematik kuralı ile özetlenebilir

1 – Bir olayın basit olasılığı bir kesir ile gösterilir ki bu kesrin payı bir olayın gerçekleşmesini sağlayan durumların sayısına ve paydası da sağlayan ve sağlamayan tüm olası durumların toplamına eşittir. [27]

2 – Bir kaç olayın arka arkaya gerçekleşmesine ait bileşik olasılık, bu olayların çarpımına eşittir.

3 – Bir olayın gerçekleşmesini sağlayan olasılık ile gerçekleşmemesine neden olan olasılığın toplamı 1'e eşittir. Son teoremden açık olur ki bir olayın denk olasılığı ve karşıt olasılığından yalnız biri bilindiği durumda diğeri kolaylıkla çıkarılabilir.

9 - Uyarı

Bir olayın basit olasılığını değerlendirmenin zor olduğu durumda bileşik olasılığını belirlemek daha zor olur. Bu gibi durumlarda meseleyi mümkün olduğu kadar çeşitli yönlerden araştırmak gerekir. Çünkü özel bir sonucun çıkarılmasına veya diğer bir deyişle bir durumun mümkün terimlerini belirlemek konusunda yapılacak en küçük bir hata çıkan sonuçta büyük bir hatanın ortaya çıkmasına sebep olabilir.

İşte böyle bir yanlış düşünce üzerine inşa edilmiştir ki ünlü matematikçilerden D'Alembert "Yazı mı? Tura mı?" oyununda iki atışta bir kere tura düşürebilmek olasılığını – ki yukarıda $\frac{3}{4}$ olduğu görülmüştü – $\frac{2}{3}$ bulmuştur.

Bu bölümde D'Alembert bulmuş olduğu sonucu şu yolda bir düşünce üzerine

[27] Çev: Müsaiddir yazılmış fakat müsavidir olacak

kurmuş idi:

"Eğer ilk atışta tura gelecek olur ise oyun kazanılmış olur. Yoksa yazı gelirse ikinci defa atmak gerekir. Bu ikinci atışta da tura gelmek ve bunun üzerine oyunu kazanmak olasılığı ya da yazı gelerek oyunu büsbütün kaybetmek olasılığı vardır. Bundan anlaşılır ki mesele için temel olarak:

Önce tura sonra

Önce yazı sonra tura

Önce yazı sonra yazı

gibi üç durum mümkün demek olur. Halbuki bu üç durumdan yalnız ikisi yani birincisi ile ikincisi istenene uygun olduğundan iki defa atışta bir kere tura gelmesi olasılığı $\frac{2}{3}$ olur."

D'Alembert kanımca bu ispat ile "olasılık hesabını" temelinden sarsmış ve halbuki kendisinin yanıldığını asla düşünmemiştir. D'Alembert'in yukarıda görülen düşüncesindeki hata, üç durumun herbirinin aynı derecede olası olduğunu düşünmesi olmuştur. Gerçekten de oyuna başlamadan once ilk atışta tura düşürmek olasılığı $\frac{1}{2}$ ve birinci atışta yazı ikincisinde tura gelmesi olasılığı: $\frac{1}{4}$'tür. Bu durumda ise bir defada bir kere tura getirmek olasılığı:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$$

olur ki bu da yukarıda diğer yollarla bulunan sonucun aynısıdır.

10 - Bir tavla zarı birbiri ardı sıra iki defa atıldığı halde bir kere altı getirebilmek olasılığı aranılmış olsun

Her iki atıştan ortaya çıkabilecek mümkün durumların hepsini dikkate almak gerekir ki bu durumların arasında "altı" bulunanların sayısıyla hepsinin sayısı arasındaki oran aranılan olasılıktan ibaret olur.

Şimdi, zar birbiri ardı sıra iki defa atıldığı durumda 1, 2, 3, 4, 5, 6 rakamlarının ikişer ikişer oluşması mümkün olabilen şu 36 durumdan birinin ortaya çıkması doğal ve zorunludur.

1 . 1	2 . 1	3 . 1	4 . 1	5 . 1	6 . 1
1 . 2	2 . 2	3 . 2	4 . 2	5 . 2	6 . 2
1 . 3	2 . 3	3 . 3	4 . 3	5 . 3	6 . 3
1 . 4	2 . 4	3 . 4	4 . 4	5 . 4	6 . 4
1 . 5	2 . 5	3 . 5	4 . 5	5 . 5	6 . 5
1 . 6	2 . 6	3 . 6	4 . 6	5 . 6	6 . 6

Bu otuz altı durum – ki hepsinin gerçekleşmesi eşit olarak muhtemeldir – arasında bir defa olsun altı içeren yalnız 11 durum bulunduğundan istenilen olasılık da $\frac{11}{36}$ olur.

Şimdi böylece cetvel yardımıyla bulunan olasılığın hangi yolla hesab edilebileceğini araştıralım.

Zarın altı yüzü bulunduğundan bir defa atışta altı gelmesini sağlayan olasılık $\frac{1}{6}$ ve halbuki gelmemesine neden olan olasılık yani altı gelmemesi olasılığı $\frac{5}{6}$ olur. Eğer mesele ters çevrilerek iki atışta da altı gelmemesi olaslığı araştırılmış olsa idi [madde 4] gereğince istenilen olasılık $\frac{5}{6} \times \frac{5}{6} = \frac{25}{36}$ olurdu. Şimdi madem ki iki defa atışta altı gelmemesi olasılığı $\frac{25}{36}$ oluyor, bu halde bunun aksi olan olasılık yani iki olayın birinde altı gelmesi olasılığı da [madde7] gereğince:

$$1 - \frac{25}{36} = \frac{11}{36}$$

olur ki bu da yukarıda cetvel yardımıyla bulunan olasılığın aynıdır.

11 -

Yukarıdaki cetvele dikkatle bakılacak olur ise görülür ki atışın adedi arttıkça kazanmak olasılığı da durmadan artar. Nitekim bir defası için altı durum mümkün olduğu halde iki defa atış için $6 \times 6 = 36$ durum mümkün olur.

Üç atış için mümkün olabilen durumların sayısına gelince bu da $6 \times 36 = 216 = 6^3$ olur. Çünkü iki önceki atış için mümkün olan 36 durumun herbirini zarın bir üçüncü defa atışı için olması mümkün olan 6 durum ile birleştirmek gerekir.

Aynı şekilde birbiri ardı sıra dört defa atış için çeşitli durumların sayısı $6 \times 216 = 1296 = 6^4$ ve beş atış için 6^5 ve sonsuza kadar böylece gider.

Genel olarak m defa arka arkaya zarın atılmasında mümkün olabilen durumların sayısı 6^m 'e eşit bulunur. İşte bir atışta zarın bir tarafının ve örneğin "altı" tarafının gerçekleşmesini sağlayan ve gerçekleşmemesine neden olan durumların sayısı b ile gösterilecek olur ise m defa atıldığı durumda yine altı tarafının gerçekleşmesini sağlayan ve gerçekleşmemesine neden olan durumların sayısı toplamı b^m olur.

12 -

Üç veya dört veya beş defa arka arkaya atışta bir kere altı gelmesi olasılığı aranılacak olsa, aranılan olasılık yukarıda altının gelmemesine neden olan olasılıklar vasıtasıyla kolaylıkla belirlenebilir.

Gerçekten de; zarın, üç defa arka arkaya atılmasında altı getirmemek olasılığı $(\frac{5}{6})^3$ olduğunda altı getirmek olasılığı da [fıkra 6]

$$1 - (\frac{5}{6})^3 = \frac{91}{216}$$

olacağı gibi, dört defa atılmasındaki olasılık da:

$$1 - (\frac{5}{6})^4 = \frac{571}{1296}$$

ve beş defası için

$$1 - (\frac{5}{6})^5 = \frac{4651}{7776}$$

olur ve böylece sürer gider.

İşte zarın bir defa atılmasında altı getirmek olasılığı $\frac{1}{6}$ olduğu durumda beş defa birbiri ardı sıra atılmasında bir kere altı düşürebilmek olasılığı $\frac{4651}{7776}$ olur ki bu da $\frac{3}{6}$ kesrinden büyük demektir. Bundan anlaşılır ki denemenin yani atış sayısını uygun miktarda artırarak kazanmak olasılığını da mümkün olduğu derece bire veya diğer bir deyişle matematiksel kesinliğe yakınlaştırmak mümkündür.

Bundan dolayı bir olayın gerçekleşmesi için ilk olasılık ne kadar az olursa olsun atış sayısını artırarak bu olasılık istenildiği kadar artırılabilir. Örneğin kırk tane siyah ve bir tane beyaz bilye içeren kutudan beyaz bilye çekmek olasılığı $\frac{1}{41}$ iken, 100 defa çekişte bu olasılık matematiksel kesinlik derecesine yakınlaşmış olur.

Gerçekten de bir defada beyaz bilye çekmek olasılığı $\frac{1}{41}$ ve çekmemek olasılığı da $\frac{40}{41}$ olduğundan veya diğer bir deyişle meselenin denk olasılığı $\frac{1}{41}$ ve karşıt olasılığı da $\frac{40}{41}$ olduğundan 100 defa çekişte karşıt olasılık $(\frac{40}{41})^{100}$ olacağından, denk olasılık da elbette:

$$1 - (\frac{40}{41})^{100} = 0,915261$$

olur. Bununla beraber atışın sayısını daha da artırarak beyaz bilye çıkarmak olasılığı istenildiği derece bire yani matematik kesinliğine yaklaştırılabilir.

13 - İşte bu düşünce sayesindedir ki olasılık hesabında şu mesele ortaya çıkmıştır:

"Bir olayın olasılığının bir miktar bilinene eşit olabilmesi için tekrar gerektiren denemelerin sayısını belirlemek: Burada denemeden kasıt, örneğin bir zarın arka arkaya atılması veya kutudan bir numara veya bir bilye çekilişidir ki ortam şartlarının değişikliğe uğramaması için her defa kutudan çıkarılan numarayı veya bilyeyi yine kutu içine koymak gerekir.

Bahsedilen mesele yine olayın gerçekleşmemesine neden olan olasılıkları dikkate alarak çözülebilir. Şöyle ki örneğin bir zarın bir defa atılmasında yine altı gelmemek olasılığı $(\frac{5}{6})^x$ olacağından meseleye uygun olan olasılık [fıkra 5]

$$1 - (\frac{5}{6})^x$$

olur ki bilinen miktara eşit bulunmuş olacak miktar bundan ibaret olacağından bunlardan bir denklem oluşturulur ve bu yolla atış sayısını ortaya çıkaran "x" bilinmezi elde edilir. Örneğin bu olasılığın $\frac{1}{2}$ 'ye eşit olması için zarın kaç defa atılacağını bulmak gerekirse;

$$1 - (\frac{5}{6})^x = \frac{1}{2}$$

eşitliği düzenlenerek ve bundan da x bilinmezini bulmak için iki tarafının logaritmaları alınınca

$$(\frac{5}{6})^x = \frac{1}{2}$$

$$x \log(\frac{5}{6}) = \log\frac{1}{2}$$

veya

$$x = \frac{\log 1 - \log 2}{\log 5 - \log 6} = \frac{0,3010300}{0,0791825}$$

bulunur ki bu da yaklaşık olarak dörde eşittir.

İşte bir kere altı getirebilmek olasılığının $\frac{1}{2}$ olması için zarın arka arkaya dört defa atılması gerektiği bu şekilde görülür. Bu olasılığın $\frac{2}{3}$'e eşit olması istense idi bu durumda

$$1 - (\frac{5}{6})^x = \frac{2}{3}$$

eşitliği düzenlenerek

$$(\frac{5}{6})^x = \frac{1}{3}$$

ve bununla beraber

$$x = \frac{\log 1 - \log 3}{\log 5 - \log 6} = \frac{0,47712125}{0,0791825}$$

bulunur ki bu da 6'dan biraz fazla demektir.

Bu durumda yedi defada zarın bir kere altı gelmesi olasılığı $\frac{2}{3}$'den fazla olacağı gibi altı defa atılmasında da bu olasılığın $\frac{2}{3}$'den biraz az bulunacağı görülür.

14 - Atış sayısını artırarak kazanma olasılığını artırmanın layıkıyla açıklaması için sayılı şeylerin çeşitli şekillerde biçimlendirilen durumları ve oluşumlarını dikkate alalım:

b, c, k gibi üç şeyi ikişer defa birer birer alındığı durumda şu dokuz farklı durum meydana gelir:

$$\begin{array}{ccc} \text{bb} & \text{cb} & \text{kb} \\ \text{bh} & \text{cc} & \text{kc} \\ \text{bk} & \text{ck} & \text{kk} \end{array} \quad \ldots(1)$$

Şu üç farklı maddenin bir kutu içinde bulunan üç bilye olduğu ve iki defa birbiri ardı sıra bu kutudan bir bilye çekildiği ve fakat her defasında önceden kutudan çekilen bilyenin yine içine atıldığı kabul edilirse, doğaldır ki her iki çekişte de çıkarılacak olan iki bilye önceki dokuz durumdan mutlaka biri olur ve bu halde her birinin gerçekleşmesi olasılığı $\frac{1}{9}$ kesrine eşit olur.

Eğer iki defa çekişte b, c örneğin iki farklı ve fakat belirgin bilye çekmek olasılığı aranılmış olsa, bu soruya uygun olan yalnız bc, cb gibi iki durum bulunduğundan bunların her ikisine ait olasılık $\frac{1}{9}+\frac{1}{9}=\frac{2}{9}$ kesrine eşittir.

Aksine bahsi geçen iki bilyenin cinsi tayin edilmeyerek iki çekişde mutlaka iki farklı bilye çıkarmak olasılığı sorulmuş olsa idi bu soruya uygun olacak bc, bk, cb, ck, kb, kc şeklinde altı durum olduğundan istenilen olasılık da;

$$\frac{1}{9}+\frac{1}{9}+\frac{1}{9}+\frac{1}{9}+\frac{1}{9}+\frac{1}{9}=\frac{6}{9}$$

dan ibaret olur idi.

15 - Bahsi geçen üç bilye üç defa çekilecek olur ise buna ait olasılıkları belirlemek için üç şeyin üçer üçer şu durumlarını dikkate almak gerekir:

$$\begin{array}{ccc} \text{bbb} & \text{ccc} & \text{kkk} \\ \text{bbc} & \text{bcb} & \text{cbb} \\ \text{bcc} & \text{cbc} & \text{ccb} \\ \text{bck} & \text{ckb} & \text{kbc} \end{array} \quad \ldots(2)$$

bkc cbk kcb

bbk bkb kbb

bkk kbk kkb

ckk kck kkc

cck kcc ckc [28]

Aynı şekilde bilyeler bir biri ardı sıra dört defa çekildiği halde ona ait olasılıkları da belirlemek için her birinin iki üç dört defa tekrar etmesi ile dörder dörder biçimlenmiş durumlarını dikkate almak gerekir.

Şimdi yukarıdaki durumlarda herbiri, kendilerini oluşturan farklı veya eşit üç harfin çarpımı gibi anlaşılacak olur ise, toplamı açıkıtır ki $(b + c + k)^3$ ifadesinin açılımından ibaret olunur.

Gerçekten de bahsi geçen ifade Newton İlkesi'ne uyarak açıldığında,

$$(b + c + k)^3 = b^3 + 3b^2c + 3bc^2 + c^3 + 3b^2k + 6bck + 3c^k + 3bk^2 + 3ck^2 + k^3$$

bulunur ki farklı terimlerin katsayılarının her birinin ilgili terime ait çeşitli durumların sayısına eşit olduğu görülür. Şöyle ki; örneğin bbb, ccc[29], kkk terimlerinden her birinin asla yer değiştirme kabul etmediği durumda b^3, c^3, k^3 katsayıları da bir olur. bbc terimi bbc, bcb, cbb gibi üç yer değiştirmeye imkan sağladığından $\mathrm{b}^2\mathrm{c}$ teriminin katsayısı da açılımda 3 olur ve bu şekilde devam edilerek bulunur. Bu halde açılımın terimlerinden herbirinin katsayısı ait olduğu oluşumun üç defa meydana gelebileceğini açıklar ki bu da asıl olarak durum cetvelinin oluşturulmasında zorluk ve güçlük görüldüğü zaman pek fazla fayda sağlar.

Şimdi önceki cetvelde de görüleceği üzere açılımdaki katsayıların toplamı;

$$1 + 3 + 3 + 1 + 3 + 6 + 3 + 3 + 3 + 1 = 27$$

[28] Orjinal metinde bu satır eksik

[29] Orjinal metinde eksik

veya diğer bir deyişle bck bilyelerinden üç defada oluşturulabilen durumların sayısı 27 olduğundan her bir durumun ayrı ayrı oluşma olasılığı $\frac{1}{27}$ olacağı gibi, b harfinin iki kere ve c harfinin bir kere dahil olduğu durumların -harflerin sıraları dikkate alınmadığı halde- gerçekleşme olasılığı $\frac{3}{27}$ ve b, c, k harflerinden oluşmuş durumların, yine sıralarına dikkat edilmediği durumda gerçekleşme olasılığı da $\frac{6}{27}$ ve böylece devam ettiği tek bakışta görünür.

16 - Basit olay , bileşik olay

Bir anda veya arka arkaya gerçekleşmesi şarta bağlı olan durumlardan oluşmuş bir heyete "bileşik olay" ve bu örnekle bir bileşik olayı oluşturan durumların her birine aynı şekilde "basit olay" denilir.

İşte b, c, k gibi üç farklı bilye içeren bir kutudan iki defa çekilmek üzere (1) numaralı cetvelde yazılmış dokuz aded bileşik olay ortaya çıkar ki bu olayı oluşturan basit olayların sırasına bakılmadığı takdirde şu altı sınıfa bölünebilir.

bb,	cb,	kb,	kc,	cc,	kk
	bc	bk	ck		

Aynı şekilde üç defa çekilmek üzere bahsi geçen kutudan yirmibir tane bahsedilen durumların gerçekleşmesi mümkündür ki bunlar da kendilerini oluşturan basit olayların sıraları dikkate alınmadığı zaman şu on[30] sınıfda toplanabilir:

bbb	bbc	bbk	bcc	bck	cck	bkk	ckk	kkk	ccc
	bcb	bkb	cbc	bkc	ckc	kbk	kck		
	cbb	kbb	ccb	ckb	kcc	kkb	kkc		
				cbk					
				kcb					
				kbc					

17 -

[30]Orjinal metinde 11 olarak geçiyor

Bu ana kadar anlatılan maddelerce açık olur ki b' ile ifade olunan bir olayın bir defada gerçekleşmesine uygun durumların sayısı b ve c' ile gösterilen diğer bir olayın yine bir defada gerçekleşmesini sağlayan durumların sayısı da c ile açıklandığına göre, $(b{+}c)^m$ ifadesi b' ile c' olaylarından oluşan tüm bileşik olayların gerçekleşmesini sağlayan durumların sayısını belirttiği gibi açılmış hali de her sınıftan bileşik olayların gerçekleşmesini sağlayan durumların sayısını da gösterir. Şöyle ki;

$$(b+c)^m = b^m + mb^{m-1}c + \frac{m(m-1)}{1 \times m} b^{m-2}c^2 \ldots mbc^{m-1} + c^m \ldots (1)$$

açılımında b^m ilk terimi m defa b basit olayının birbiri ardı sıra gerçekleşmesini sağlayan durumları ve m $b^{m-1}c$ ikinci terimi yine m defada (m-1) kere b' ve bir kere (c') olayının gerçekleşmesini sağlayan durumların sayısını gösterir ve böyle devam eder.

Bu halde bu terimlerden herbiri farklı durumların toplam sayısı ile yani $(b{+}c)^m$ ifadesiyle sınıflandırılacak olur ise her sınıf bileşik olayın gerçekleşmesi olasılığı elde edilmiş olur. Fakat sorunu halletmek için açılımın genel terimini dikkate almak gerekir ki o da şundan ibarettir;

$$\frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{1 \times 2 \times \ldots n} b^{m-n}c^n \ldots (2)$$

Mesele: 1- Yazı mı tura mı oyununda sekiz defada beş kere yazı ve bununla beraber üç kere tura gelmesi olasılığının belirlenmesi istenilmektedir.

Bu soruda aynı sınıftan olan bbbbbccc, bbbbcccb, bbbcccbb, ... bileşik olayından gelişigüzel birinin olasılığı istenilmiş olduğundan aranılan olasılık da bahsi geçen sınıfa ait olasılıktan ibaret olur.

Şimdi (2) ilkesinde m=8, n=5 olursa genel terimi

$$\frac{8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4}{1 \times 2 \times 3 \times 4} b^3c^5 = 56b^3c^5$$

bulunur.

Her defasında yazı gelmesini sağlayan durumların sayısı 1 olduğu gibi tura gelmesini sağlayan durumların sayısı da 1 olduğundan ve diğer bir deyişle b=1, c=1 bulunduğundan, 5 kere yazı üç kere tura gelmesini sağlayan durumların sayısı

$$56b^3c^5 = 56$$

olur. Fakat soruya ait tüm bileşik olayların gerçekleşmesini sağlayan mümkün durumların hepsi (1) ilkesine uyarak

$$(b+c)^8 = (1+1)^8 = 256$$

olacağından istenilen olasılık da $\frac{56}{256}$ olmuştur.

Mesele: 2- Yazı mı tura mı oyununda sekiz defada birbiri ardı sıra sekiz kere tura getirmek olasılığını belirlemek istenilmektedir.

Bu meselede c' basit olayı dahil olmadığından n=0 ve m=8 olmakla b^8 bileşik olayının gerçekleşmesini sağlayan durumların sayısı:

$$\frac{8\times7\times6\times5\times4\times3\times2\times1}{1\times2\times3\times4\times5\times6\times7\times8}b^8c^0 = 1$$

olur. Bu miktar, toplam mümkün durumların sayısı $(b+c)^8 = 2^8 = 256$ adedine bölündüğünde istenilen $\frac{1}{256}$ olasılığı bulunur ki bu da sekiz defa birbiri ardı sıra tura gelmesi için 256 da ancak bir şans olduğunu ifade eder.

Mesele: 3- Bir zarın dört defa atılışında bir kere altı gelmesi olasılığı belirlemek istenilmektedir.

Bu soruda her atışta altı gelmesi olasılığı altıda bir ve gelmeme olasılığı altıda beş olduğundan b=1, c=5 ve m=4 olur.

Fakat bu soruyu çözmek için yalnız b harfinin birinci kuvvetini içeren mbcm-1 terimini değil aksine birinciden dördüncü kuvvetine varıncaya kadar kuvvetlerini içeren terimlerini dikkate almak gereklidir. Çünkü mesela zarın dört defa atışında yalnız bir kere altı tesadüf etmesi istenileni sağladığı gibi iki, üç ve hatta dört kere gelmesinin de amaçlananı fazlaca sağlayacağı şüphesizdir. Bunun için soruya uygun olan olasılığı belirlemek için şu;

$$b^3 + 3b^2c + 6b^2c^2 + 4bc^3$$

terimlerin toplamını hesaplamak gereklidir. Şimdi bu ifadede b, c niceliklerinin yukarıki değerleri yerlerine konunca

$$1 + 2 \times 5 + 6 \times 25 + 4 \times 125 = 661$$

sonucu bulunur ki bu da zarın dört defa atılmasında bir kere altı gelmesini sağlayan durumların sayısından ibaret olur. Halbuki bu istenilenin gerçekleşmesini sağlayan ve sağlamayan durumların toplamı;

$$(1 + 5)^4 = 64 = 1296$$

olduğundan, aranılan olasılık da $\frac{671}{1296}$ olur ki bu da $\frac{1}{2}$'den biraz fazladır.

Eğer zarın dört defa atılışında birden ne fazla ve ne de az getirmemek olasılığı sorulmuş olsa idi, açılımın yalnız bir kere altı gelmesini sağlayan durumları ifade eden terimini veya diğer bir deyişle $mbc^{m-1} = 4 \times 1 \times 5^3 = 500$ terimini hesaplamak gerekirdi. Gerçekten de bu halde sonucuna götüreceği için olasılık da $\frac{500}{1296}$'dan ibaret olur idi.

18 - İkiden fazla olayın olasılığını belirlemek gerekirse bu olaylardan herbirinin gerçekleşmesini sağlayan durumların sayısını simetrik olarak b, c, k, d ile ifade edildiğine ve tekrar eden durumun sayısı m ile açıklandığına göre;

$(b + c + k + r + \ldots)^m$ kuvvetinin açılımındaki genel terime bakılır ki bu genel terim de n+h+l+y+....=m olmak üzere;

$$\frac{m(m-1)(m-2)\ldots}{(1\times 2\times\ldots\times n)(1\times 2\times\ldots\times h)(1\times 2\times\ldots\times l)\ldots}b^m c^h k^l r^y \quad \ldots(3)$$

den ibaretdir.

19 - Mutlak olasılık, göreceli olasılık

Belli bir sayıda tekrar eden olayda gerçekleşen birleşik olayların birbirlerine göre olasılıkları birbiriyle karşılaştırılacak olur ise görülür ki bu olaylar arasında en fazla olasılığa sahip olan bileşik olay, basit olayları arasındaki oran, herbirinin gerçekleşmesini sağlayan durumların miktarları arasındaki orana eşit bulunandır.

Gerçekten de b, c, k basit olaylarından her biri, birer defa icra olunan bir denemede aynı olasılığa sahip olduğu halde üç defa birbiri ardısıra icra edilecek denemede bu olaylar (2) numaralı cetvelde yazılmış 27 adet bileşik olasılığın gerçekleşmesine sebebiyet verir ise de bu yirmi yedi bileşik olasılık arasında yalnız;

1 adedi 3 kere b'den

1 adedi 3 kere c'den

1 adedi 3 kere k'den

3 adedi 2 kere b'den bir kere c'den

3 adedi 2 kere b'den bir kere k'den

3 adedi 2 kere c'den bir kere b'den

3 adedi 2 kere c'den bir kere k'den

3 adedi 2 kere k'den bir kere b'den

3 adedi 2 kere k'den bir kere c'den

6 adedi 1 kere b'den bir kere c'den bir kere k'den

oluşur.

Bu durumda b, c, k basit olasılıklarının üç defa gerçekleştirdiği bileşik olaylar arasında diğerlerine oranla olasılığı en çok olan bu b, c, k olaylarını birer kere içeren en sondaki bileşik olaydır ki bunun da basit olaylarının adedi her birinin bir defada gerçekleşmesi olasılığına uygun durumların sayısına eşittir.

Bu önemli teoriyi açıklamak ve ispat için b', c' gibi iki basit olay düşünelim ve bu basit olaylardan herbirinin gerçekleşmesini sağlayan durumların adedini b, c ile ifade edelim. Bu halde [fıkra 16] gereğince m defa tekrar eden durumda b' olayını (m-n) kere ve c' olayını da n kere içeren bir bileşik olayın gerçekleşmesini sağlayan durumların adedi:

$$\frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)}{1\times 2\times\ldots\times n}b^{m-n}c^{n}$$

Şimdi b', c' olaylarından her birinin gerçekleşmesini sağlayan durumlar birbirlerine eşit kabul edilir veya bir diğer deyişle b=c olduğu kabul edilir ise sabit ifade:

$$\frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)}{1\times 2\times\ldots\times n}b^{m}$$

olacağı gibi, açılımın terimlerinin tamamında $b^{m-n}\times c^{n}=b^{m}$ çarpılanı ortak bulunacağından bu terimlerin değerleri de kısaca katsayılarının değerlerine bağlı bulunur. Bu halde katsayısı değerce büyük olan terimde uygun olan bileşik olayın gerçekleşmesini sağlayan durumların sayısının, diğerlerinden büyük olması gerekir .

Halbuki Newton İlkesi'nin irdelemesinden bilindiği üzere (b+c) iki terimlisinin açılımından

$$(b+c)^2=b^2+2bc+c^2$$

$$(b+c)^3=b^3+3b^2c+3bc^2+c^3$$

$$(b+c)^4=b^4+4b^3c+6b^2c^2+4bc^3+c^4$$

$$(b+c)^5=b^5+5b^4c+10b^3c^2+10b^2c^3+5bc^4+c5$$

biçiminde devam eder.

Artan kuvvetlerinin katsayılarının incelenmesiyle de görüneceği üzere çift kuvvetlerinin açılımında ortada bulunan terimin katsayısı diğerlerinin katsayısından büyük ve tek kuvvetlerinin iki terimin biri diğerine eşit bulunan katsayıları diğerlerinden büyük bulunduğundan elbette bu terimlerin ait oldukları bileşik olayın olasılıkları da diğer terimlerin uygun olduğu bileşik olayların olasılıklarından büyük olması gerekir.

Bu teoriyi açıklamak için "Yazı mı? Tura mı?" oyununa uygulayalım. Açıktır ki bu oyunla b' olayı örneğin tura gelmesi ve c' olayı da yazı gelmesi demek olduğundan b, c miktarları bir diğer deyişle bunlardan herbirinin gerçekleşmesini sağlayan durumlar birbirlerine kesinlikle eşittir. İşte elde tutulan bir kuruş, iki defa atıldığı halde gerçekleşen $bb = b^2$, bc veya cb, $cc = c^2$ gibi üç bileşik olayın olasılığı en çok bulunan $(b + c)^2$ iki terimlisinin açılımında ortadaki terim olan 2bc teriminin belirttiği bileşik olaydır ki bu da bir kere yazı ve bir kere tura gelmesinden ibarettir.

Elde tutulan kuruş, üç defa atıldığı halde görünecek bileşik olaylardan olasılığı en çok olanı da $3b^2c$ veya $3bc^2$ terimlerinin uygun düştüğü bileşik olaylar olur ki bunlar da iki kere tura bir kere yazı veyahud iki kere yazı bir kere tura gelmesinden başka bir şey değildir.

Kuruş dört [31] defa atıldığı durumda ortaya çıkacak bileşik olaylar arasında olasılığı yüksek olanı da $6b^2c^2$ teriminin gösterdiği bileşik olaydır ki o da iki kere tura iki kere de yazı görünmesidir.

20 - Mutlak olasılık, göreceli olasılık

Atış sayısı veya tekrar arttıkça basit durumları sayıca basit olaylardan oluşan bileşik olayların olasılığı da nisbeten diğer bileşik olayların olasılığından daima fazla olur ise de bahsi geçen olayın mutlak olasılığı azalır.

Şöyle ki; atış sayısı uygun şekilde artırılacak olur ise bahsi geçen bileşik olayın mutlak olaslığı da istenildiği kadar azaltılmış olunur.

Mesela yazı mı tura mı oyununda dört defada iki kere tura iki kere de yazı

[31] Orjinal metinde üç olarak geçiyor

getirmekden ibaret olan bir bileşik olayın gerçekleşmesini sağlayan durumların adedi 6 olduğunda mutlak olasılığı $\frac{6}{(1+1)^4} = \frac{6}{16}$ ve altı defada üç kere yazı üç kere tura getirmekden ibaret bulunan bileşik olayın gerçekleşmesini sağlayan durumların adedi 20 olduğu durumunda mutlak olasılığı da $\frac{20}{(1+1)^6} = \frac{20}{64}$ ve sekiz defada dört kere tura dört kere yazı gelmesini sağlayan durumların adedi 70 olduğundan mutlak olasılığı da $\frac{70}{(1+1)^8} = \frac{70}{256}$ olur.

İşte bu örneklerden anlaşılacağı gibi göreceli olasılıkları büyük olan bileşik olayların gerçekleşmesini sağlayan durumlar arttıkça mutlak olasılığı da tersine azalır.

Fakat mutlak olasılığın bu azalması atış sayısının artmasına bağlı olarak bileşik olayların artışından doğar. Bununla beraber bileşik olaylardan yalnız bir sınıfı incelemeye alındığında mutlak olasılığın azalışına şaşırılmamalıdır. Çünkü mesela yüz defa da elli kere tura, elli kere yazı getirmek demek, gerçekleşmesi mümkün olan 101 bileşik olay arasında yalnız birinin gerçekleşmesini beklemek demekdir. Diğer yüz bileşik olayın her biri ayrı ayrı dikkate alındığı takdirde bundan daha az bir olasılığa sahip olduğu görülür ise de toplamı, elli kere tura, elli kere yazı gerçekleşmesini sağlayan durumlardan kat kat fazla bir karşıt olasılık oluşturur.

Göreceli olasılığı çok olmayan bileşik olaylara gelince bunlarda mutlak olasılık daha hızlı azalır.

Örneğin, üç atışda iki kere yazı bir kere tura gelmesini sağlayan durumların adedi 3 iken mutlak olasılığı $\frac{3}{8}$ ve dokuz defada dört kere yazı, iki kere tura gelmesini sağlayan durumların adedi 15 ve halbuki mutlak olasılığı $\frac{15}{64}$, velhasıl dokuz defada altı kere yazı üç kere tura gelmesini sağlayan durumların adedi 84 mutlak olasılığı ise $\frac{84}{512}$ bulunur.

Genel olarak bir oyunda bir bileşik olayda yazının tekrar sayısı turanın tekrarından ne kadar büyük olur ise bu olayın mutlak olasılığı da o oranda bir hızla azalır.

21 -

Buraya kadar açıklanan maddelerden anlaşılacağı gibi, olasılık hesabının teorik kısmında mümkün olan durumlar ile türlerinin sayısının sınırlı olmasına binaen bu gibi olasılıkların tamamı, bir kutuda bulunan ve değişik renkler ile renklenmiş sınırlı sayıda bilyeler veya harfler ile uygulanacak farklı düzenlemelere indirgenebilir, hatta bu gibi durumlarda kesin bir sonuç verebilen bir yol var ise o da basit olayların farklı düzenlemelerini dikkate alarak olasılıklarını ona göre belirlemekten ibaretdir.

Gerçekten de b, c değerlerinin m'er m'er oluşturulan durumları m defada görünmesi mümkün olabilen ve her biri iki basit olaydan oluşan tüm bileşik olayları gösterir.

Nitekim b, c değerlerinin dörder dörder şu şekilde oluşturulan on altı durumu

bbbb bbbc bbcc bccc cccc

bbcb bcbc cbcc

bcbb bccb ccbc [32]

cbbb cbcb cccb

cbbc

bbcc

her birinin mutlak olasılığı $\frac{1}{16}$ olan 16 bileşik olayı betimler.

Şimdi bu bahsedilen durumlara dikkatle bakılacak olur ise görülür ki bu durumlardan her biri aynı derece olasılığa sahiptir. Mesela dört defa sırasıyla b harfi içeren bbbb durumunun olasılığı $\frac{1}{16}$ olduğu gibi diğer tamamının ve varsayalım ki önce iki kere b ve sonra iki kere c harfinden oluşan bbcc durumunun da olasılığı $\frac{1}{16}$ dan ibaretdir. Fakat bu durumda her durumu oluşturan harflerin sırası dikkate alınmayacak olur ise gelişigüzel iki kere b ve iki kere c den oluşan bir bileşik olayın altı çeşidi olduğu görüleceğinden mutlak olasılığın da $\frac{6}{16}$ olduğu görülür. Bundan anlaşılır ki yalnız basit olayların sırası itibariyle bir diğerinden farklı bulunan bileşik olaylar bir sınıf sayıldığı şekilde, aynı sınıfdan olan bir olayın

[32] Orjinal metinde bu satır eksik

gerçekleşme olasılığı diğerlerinin tekil veya çoğul olarak bulunan olasılıklarıyla karşılaştırılabilir. İşte bu sayededir ki rastgele iki kere b ile iki kere c olayından oluşan bir bileşik olayın gerçekleşme olasılığının üç kere b ve bir kere c olayından oluşan bileşik olayın gerçekleşme olasılığına oranı, 6 adedinin 4 adedine oranına eşit olduğu bulunmuş ve aynı şekilde bu olasılığın iki kere b ve iki kere c olayından oluşmuş bileşik olayının olasılığına oranı 6 adedinin 10 adedine oranına denk olduğu anlaşılabilinmiştir.

Bileşik olaylar b, c olaylarını çoğul veya tekil olarak içerdiğine göre iki sınıf itibar edilecek olur ise bu iki sınıf olayın olasılıkları karşılığı $\frac{14}{16}$, $\frac{2}{16}$ olacağı şüphesizdir.

Bu halde birinci sınıf bileşik olayların diğerine oranla gerçekleşme olasılığı:

$$\frac{\frac{14}{16}}{\frac{2}{16}} = \frac{14}{2} = 7$$

ve halbuki ikinci sınıf bileşik olayların birincisine göre gerçekleşme olasılığı da:

$$\frac{\frac{2}{16}}{\frac{14}{16}} = \frac{2}{14} = \frac{1}{7}$$

olacağından, şu iki sınıf olaylardan birincisinin gerçekleşmesinin diğerine oranla yedi defa daha çok olası olması gerekir.

Ancak bu sonuç atış sayısının dört olduğuna göre olup atış sayısı arttıkça iki sınıf bileşik olayların olasılıkları arasındaki oran da hızlıca artar.

Gerçekten de deney sayısı beş olduğuna göre ikinci sınıf bileşik olayların olasılığı $\frac{2}{32}$ ve halbuki birinci sınıf bileşik olayların olasılığı $\frac{30}{32}$ olacağından bunların arasındaki oran da $\frac{(\frac{30}{32})}{(\frac{2}{32})} = 15$ olur.

Özet olarak deney çoğaldıkça birinci sınıf olaylardan birinin olasılığıyla ikinci sınıfı oluşturan olaylardan birinin olasılığı arasındaki oran şöyle artar:

Deney sayısı	Olasılıklar arasındaki oran
4	7:1
5	15:1

6	31:1
7	63:1
8	127:1
9	255:1[33]
10	511:1

İşte bu cetvelden anlaşılacağı üzere birinci sınıf bileşik olayların olasılığı ikinci sınıf bileşik olaylarsın olasılığına göre durmadan artacağından deney sayısını mümkün derece artırarak birinci sınıf bileşik olayların olasılığını, istenildiği kadar matemaik kesinliği derecesine yaklaştırmak mümkün olur.

22 - Denemeleri artırma kanunu

Özet: Genellikle b, c gibi, iki basit olayın toplu[34] olarak bulundukları bileşik olaylar "birinci sınıf" ve tekil[35] olarak dahil oldukları bileşik olaylar da "ikinci sınıf" olarak kabul edildiğine göre:

$$(b+c)^m = b^m + mb^{m-1}c + \frac{m(m-1)}{1\times 2}b^{m-2}c^2 + \dots$$

$$+\frac{m(m-1)(m-2)\dots(m-n+1)}{1\times 2\times 3\dots n}b^{m-n}c^n + \dots mbc^{m-1} + c^m$$

açılımının baştaki ve sondaki terimlerinin katsayıları toplamı ikinci sınıf bileşik olayların gerçekleşmesini sağlayan durumların sayısını belirttiği gibi diğer terimlerinin toplamı da birinci sınıf bileşik olayların gerçekleşmesini sağlayan durumların sayısını belirtir.

Deney sayısı ne kadar artar ise artsın veya bir diğer deyişle $(b+c)^m$ iki terimlinin kuvveti ne derece büyük olur ise olsun açılımda ikinci sınıf bileşik olaylara ait terimlerinin sayısı daima birdir.

Halbuki birinci sınıf bileşik olayların gerçekleşmesini sağlayan durumları ifade eden terimlerinin adedi m-1'e yani deney sayısının bir eksiğine eşit bulunur.

[33] Orjinal metinde 200 olarak geçiyor

[34] İçinde hem b hem c bulunan terimler

[35] İçinde yalnızca b ya da yalnızca c bulunan terimler

Ondan dolayı deneyi çoğaltarak birinci sınıf bileşik olayların mutlak olasılığını istenildiği derece artırmak ve matematik kesinliği derecesine yaklaştırmak mümkün olur.

İşte bu gibi bazı araştırmalar aracılığıyladır ki olasılık hesabının kurucularından Jacques Bernoulli Atina Teoremi'ni çözmekte başarılı olmuştur.

"Bir bileşik olayın tekrar sayısıyla deney sayısı arasındaki oran bahsi geçen olayın basit olasılığına eşit olacak şekilde deneyin sayısı artırılacak olur ise bileşik olayın bileşik olasılığı da son derecede matematik kesinliği derecesine yakınlaştırılmış olur."

23 - İkinci kısım: Deneysel olasılık

Buraya kadar açıklanan maddelerde bir olayın gerek basit olsun ve gerek bileşik bulunsun, gerçekleşmesini sağlayan ve sağlamayan durumların sayısı bilinir kabul edilerek bahsedilen olayların ona göre gerçekleşme olasılığı araştırılmış ve bu olasılık iki terimli veya daha doğrusu düzenleme ilkeleri yardımıyla teorik olarak hesaplanmıştır.

Fakat olasılığı tayin edilecek olayın gerçekleşmesini sağlayan ve sağlamayan durumların sayısı bilinmediği durumda bahsi geçen olayın gelecekte gerçekleşme olasılığı önceki kurallara göre bulunamayacağından bunun ne durumda hesab edileceğinin açıklanması gerekli görülmüş olduğundan bu bölümde esas olmak üzere Kondorcet'nin aşağıda bahsedilen sorununun çözülmesi uygun görülmüştür.

"Bir kaçı siyah ve kalanı beyaz olmak üzere toplam dört bilye içeren bir kutudan dört defa arka arkaya çekişte üç defa beyaz bilye ve bir defa da siyah bilye çıktığı ve her defa çekilen bilye yine kutu içerisine konulduktan sonra tekrar çekildiği bilinse, acaba beş defa çekişte beyaz bilye çıkarmak olasılığı ne olur?"

İçerisindeki dört bilyeden kaçı beyaz ve kaçı siyah olduğu bilinmeyen bir kutunun içeriği ister istemez şu farz edilen durumların birine denk olur:

Ya 3 beyaz bilye 1 siyah bilye (1)

Veya 2 beyaz bilye 2 siyah bilye (2)

Veyahut 1 beyaz bilye 3 siyah bilye (3) mevcuddur.

Şimdi beyaz bilyenin adedi b ve siyah bilyenin adedi c ile ifade olur ise dört defada üç kere beyaz ve bir kere siyah bilye çıkmasını sağlayan durumların sayısı [madde:5]'e uygun olarak

$$(b+c)^4 = b^4 + 4b^3c + 6b^2c^2 + 4bc^3 + c^4$$

açılımının ikinci terimi olan $4b^3c$ ile ifade olunduğundan, yukarıdaki kabule göre b, c değerleri sırasıyla burada yerlerine konulunca, bahsi geçen bileşik olayın gerçekleşmesini sağlayan durumların sayısı her üç varsayıma göre:

108, 64, 12

den ibaret olur. Doğaldır ki üç varsayımdan hangisinin bahsi geçen bileşik olayın gerçekleşmesini sağlayan durumları çok ise o varsayımın olasılığı da diğerlerinden fazla olur. İşte kabul edilen durumların bahsi geçen bileşik olayın gerçekleşmesini sağlayan durumların sayısı sırayla

108, 64, 12

olduğu gibi her varsayıma göre olayın gerçekleşmesini sağlayan ve sağlamayan mümkün durumların sayısı da

$$108 + 64 + 12 = 184$$

olacağından kabul edilen durumların olasılıkları sırasıyla:

$$\frac{108}{184}, \frac{64}{184}, \frac{12}{184} \ldots (1)$$

veyahud

$$\frac{27}{46}, \frac{16}{46}, \frac{3}{46}$$

olur.

Madem ki bu üç varsayım, bilinen bileşik olaya, yani dört defada [sıraya uyulmamak şartıyla] üç kere beyaz bilye ve bir kere siyah bilye çıkmasını sağlayan tüm mümkün durumları içerir, şu halde sözkonusu varsayımlardan biri gerçek duruma veya diğer bir deyişle kutunun içeriğine uygun olur. Bu halde bu varsayımınn olasılığı bilinen olayın denk olasılığı olacağı için diğer iki varsayımın olasılıkları da karşıtı sayılmak gerekeceğinden her üçünün olasılıkları toplamı, [madde: 6] gereğince bire eşit olur.

Gerçekten de kabul edilen durumların olasılıkları toplamı:

$$\frac{27}{46} + \frac{16}{46} + \frac{3}{46} = 1$$

bulunur.

Asıl meseleye veya diğer bir deyişle beşinci defada kutudan çekilecek bilyenin beyaz çıkması olasılığına gelince, bu da şu şekilde çözülür. Şöyle ki:

Birinci varsayımın sorunu çözme olasılığı $\frac{27}{46}$ olduğu gibi bu varsayıma göre kutu içerisindeki dört bilyeden üçü beyaz ve biri siyah olacağından bir defada beyaz bilye çıkarabilmek olasılığı da $\frac{3}{4}$ olur.

Bu nedenle, kutunun içeriğinin birinci varsayıma uygun olmasıyla beraber beşinci defada beyaz bilye gelmekden ibaret olan bir bileşik olayın olasılığı [madde : 3] gereğince bu basit olayların basit olasılıkları çarpımına eşit olduğundan birinci varsayıma göre beşinci defada beyaz bilye çekmenin olasılığı,

$$\frac{3}{4} \times \frac{27}{46} \ldots (2)$$

olur.

Aynı şekilde ikinci varsayımın gerçeğe uygun olanı $\frac{16}{46}$ ve bu varsayıma göre kutuda bulunması gereken iki beyaz ve iki siyah bilyeden bahsi geçen varsayıma göre beşinci defada kutudan beyaz bilye çıkarabilmek olasılığı;

$$\frac{2}{4} \times \frac{16}{46}$$

Ve sonunda üçüncü varsayıma göre olasılığı da:

$$\frac{1}{4} \times \frac{3}{46}$$

bulunur.

İşte içeriğinin kaçı siyah ve kaçı beyaz olduğu bilinmeyen ve yalnız dört bilyeyi içerdiği bilinen ve önce dört defa gerçekleşen çekişte üç kere beyaz ve bir kere de siyah bilye çıktığı deneyerek bulunan bu gibi bir kutudan beşinci defa da beyaz bilye çekmek olasılığı, elbette her üç varsayıma göre bulunan olasılıklar toplamına eşit olacağından aranan olasılık;

$$\frac{27}{46} \times \frac{3}{4} + \frac{16}{46} \times \frac{2}{4} + \frac{3}{46} \times \frac{1}{4} = \frac{116}{184} \ldots (3)$$

olacağı gibi aynı usule uyarak beşinci defa da siyah bilye çekmesi olasılığı araştırılacak olsa onun da;

$$\frac{27}{46} \times \frac{1}{4} + \frac{16}{46} \times \frac{2}{4} + \frac{3}{46} \times \frac{3}{4} = \frac{68}{184}$$

olduğu bilinir ki bir diğerine göre karşıt olan şu iki olasılık toplamı bire eşittir.

24 - Deneysel olasılık, temel kanunları.

Bahsi geçen sorunun çözüm biçiminden aşağıdaki genel sonuclara ve kanunlara ulaşılır.

Birinci: Kabul olunan varsayımların olasılıkları, bahsi geçen varsayımların herbirinde önceki olayların gerçekleşmesini sağlayan durumların sayısıyla orantılıdır. $\ldots (1)$

İkinci: Kabul olunan farklı varsayımların olasılıkları, bahsi geçen varsayımların herbirinde önceki olayların gerçekleşmesini sağlayan durum sayısının, bütün varsayımlarda bahsi geçen olayların gerçekleşmesini sağlayan mümkün durumların sayısına bölünmesinden çıkan sonuca eşittir. . . . (2)

Üçüncü: Gelecekte gerçekleşecek bir basit olayın gerçekleşme olasılığı, farklı varsayımların olasılıklarının benzeri benzerine– bahsi geçen varsayımların herbirine göre basit olayın gerçekleşme olasılığıyla çarpımları toplamına eşittir. . . . (3)

25 - Sebeplerin tarifi.

Yukarıdaki örnekte, varsayım kelimesiyle anlatılan şey ki kutunun içeriğinin belirlenmesinden ibaretdir, gerek geçmişteki olayların ve gerek gelecekteki olayların gerçekleşmesine sebeb ve bağımsız olarak neden olduğu veya diğer bir deyişle kutudan beyaz ve siyah bilye çıkmak olasılığı içeriğinin miktar ve cinsine bağlı bulunduğu için deneysel olasılık hesabında bahsi geçen varsayımlara genel olarak "sebepler" adı verilir.

İşte olasılık hesabının bu kısmında, geçmişteki bilinen olayların yardımıyla gerek bahsedilen olayların gerçekleşmesini gerektiren sebeplerin ve gerek gerçekleşmesi gelecekte istenen bir olayın olasılıklarını belirlemek için yukarıdaki maddede özet olarak bahsedilen temel kanunlara bakılarak hesap yapılır.

26 - Temel kanunların uygulanması.

Bahsedilen incelemeleri ve geçmiş kanunları dış dünyaya uygulamak için varsayımların veya daha doğru bir deyişle sebeplerin sayısı sonsuz kabul ve itibar olunur. Çünkü bir olayın gerçekleşmesi için mümkün olasılıkların yani sıfırla bir arasında bulunan kesirlerin tamamının oluşması düşünülebilir.

Şimdi m defa tekrar eden bir b basit olayıyla c defa tekrar eden diğer bir c' basit karşıt olayı düşünülecek olur ise doğaldır ki b olayının x ile ifade olunan olasılığı x=0 değerinden x=1 değerine kadar düzenli ve sürekli değiştiği sırada c karşıt olayının x' olasılığı da x zorunlu olarak $x' = 1$ değerinden başlayarak $x' = 0$ değerine kadar düzenli olarak değişir ve daima $x' = 1 - x$ olur.

Bu takdirde m defa b olayından ve n defa da c olayından oluşan bir basit olayın olasılığı [madde:] gereğince

$$zx^m(x')^n = zx^m(1-x)^n$$

olur. Bu mikdar tüm mümkün varsayımlara göre bahsi geçen basit olayın olasılıkları toplamına veya bir diğer deyişle;

$$\sum_0^1 zx^m(1-x)^n$$

miktarına bölünecek olur ise ortaya çıkan;

$$\frac{x^{m+1}(1-x)^n}{\sum_0^1 x^m(1-x)^n}$$

ifadesi b olayına x ve bunun üzerine c karşıt olayına $x' = 1 - x$ olasılığını verecek olan sebebin olasılığınden ibaret olur.

Fakat sebeplerin sayısı sonsuz kabul edilir ve buna karşılık x bilinmeyeninin 0 ile 1 arasında kesintisiz bir biçimde değiştiği düşünülür ise önceki ifadenin pay ve paydasını dx[36] ile çarptıktan sonra,

$$\frac{x^m(1-x)^n dx}{\int_0^1 x^m(1-x)^n dx} \ldots (4)$$

biçiminde göstermek mümkün olur ki bu da b basit olayının gerçekleşmesine x ile $x + dx'$ arasında bulunan bir olasılık verebilecek olan sebebin etkisi sonsuz küçük ihtimalden başka bir şey değildir.

Gelecekteki olayların veya sonranın olasılığına gelince; bunun için de b olayına x olasılığını veren sebebin etkisi olasılığını gösteren (4) ifadesini x olasılığıyla çarpmak ve ortaya çıkan

$$\frac{x^{m+1}(1-x)^n dx}{\int_0^1 x^m(1-x)^n dx}$$

[36]Tefazuli/Türev

gibi miktarların toplamını veya bir diğer deyişle payının sıfır ile bir arasındaki sınırlı integralini almak gerekir. İşte bu yolla bulunan;

$$v = \frac{\int_0^1 x^{m+1}(1-x)^n dx}{\int_0^1 x^m(1-x)^n dx} \ldots (5)$$

ifadesi b olayının sonradan gerçekleşme olasılığının genel ifadesinden ibaret olur.

Bahsi geçen ifadenin integralini almak için evvela

$$\int x^m(1-x)^n dx$$

sınırlı integralinin n defa arka arkaya ayırarak veya çıkararak integralini alma yöntemiyle integrali alındığında;

$$\int x^m(1-x)^n dx = \frac{x^{m+1}(1-n)^n}{m+1} + \frac{n}{m+1}\int x^{m+1}(1-x)^{n-1}dx$$

ve aynı şekilde

$$\int x^{m+1}(1-x)^{n-1}dx = \frac{x^{m+2}(1-n)^{n-1}}{m+2} + \frac{n-1}{m+2}\int x^{m+2}(1-x)^{n-2}dx$$

$$\int x^{m+2}(1-x)^{n-2}dx = \frac{x^{m+3}(1-n)^{n-2}}{m+3} + \frac{n-2}{m+3}\int x^{m+3}(1-x)^{n-3}dx$$

$$\ldots$$

sonunda (1-x) çarpanı tamamen yokedilmiş olacağından

$$\int x^m(1-x)^n dx = \frac{x^{m+1}(1-x)^n}{m+1} + \frac{nx^{m+2}(1-x)^{n-1}}{(m+1)(m+2)} + \frac{n(n-1)x^{m+2}(1-x)^{n-2}}{(m+1)(m+2)(m+3)}$$

$$+ \ldots + \frac{n(n-1)(n-2)\ldots \times 3 \times 2 \times 1 \times x^{m+n-1}}{(m+1)(m+2)\ldots(m+n+1)} + k$$

olur.

k sabit miktarına gelince onun da değeri sıfıra eşittir. Çünkü b olayının x olasılığı sıfıra eşit kabul edildiği takdirde, bahsi geçen olayı içeren bileşik olaylarının tamamının olasılıkları sıfır olacağından x=0 değeri için

$$\int x^m(1-x)^n dx$$

integralinin de sıfıra eşit bulunması ve bunun üzerine ikinci tarafta bulunan k sabititin de sıfır olması gerekir.

Bahsi geçen integralin sıfır ile bir limitleri arasındaki integrali sınırlı alındığı durumda, son terimden başkası sıfıra ulaşacağı için;

$$\int_0^1 x^m(1-x)^n dx = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots 3\times 2\times 1}{(m+2)(m+3)\ldots(m+n+1)}$$

olur.

Aynı şekilde;

$$\int_0^1 x^{m+1}(1-x)^n dx = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots 3\times 2\times 1}{(m+2)(m+3)\ldots(m+n+2)}$$

bulunmakla doğal olarak,

$$l = \frac{\int_0^1 x^{m+1}(1-x)^n dx}{\int_0^1 x^m(1-x)^n dx} = \frac{\frac{n(n-1)(n-2)\ldots 3\times 2\times 1}{(m+2)(m+3)\ldots(m+n+2)}}{\frac{n(n-1)(n-2)\ldots 3\times 2\times 1}{(m+1)(m+2)\ldots(m+n+1)}}$$

veya

$$l = \frac{m+1}{m+n+2}\ldots(6)$$

olur.

Bilakis c karşıt olayının gelecekte gerçekleşme olasılığı aranmış olsa idi, bahsi geçen olayın basit olasılığı (1-x) olduğundan istenen olasılığı da;

$$l' = \frac{\int_0^1 x^m(1-x)^{n+1} dx}{\int_0^1 x^m(1-x)^n dx} = \frac{\frac{(n+1)n(n-1)\ldots 3\times 2\times 1}{(m+1)(m+2)\ldots(m+n+2)}}{\frac{n(n-1)(n-2)\ldots 3\times 2\times 1}{(m+1)(m+2)\ldots(m+n+1)}}$$

veya

$$l' = \frac{n+1}{m+n+2} \ldots (7)$$

den ibaret olur idi.

Şimdi olayın sonradan gerçekleşme olasılığıyla gerçekleşmeme olasılığı yani c karşıt olayının gerçekleşmesi olasılığı toplamı

$$l + l' = \frac{m+1}{m+n+2} + \frac{n+1}{m+n+2} = 1$$

olur ki bu da önceden anlatılan genel kanuna uygundur.

27 -

Bu iki olaydan b olayı birbiri ardı sıra m defa gerçekleştiği ve c karşıt olayı ise asla gerçekleşmediği durumda yukarıdaki;

$$l = \frac{m+1}{m+n+2}$$

ifadesinde n=0 olması gerekeceğinden ilgili ilke

$$l = \frac{m+1}{m+2} \ldots (8)$$

biçimine geri döner.

İşte altı yüzünün herbirinde kaçar nokta ile işaret edilmiş olduğu bilinmeyen bir zar, sekiz defa arka arkaya atıldığı halde, sekizinde de altı gelmiş olsa, dokuzuncu defasında yine altı gelmesi olasılığı, önceki ilkeye uygun olarak:

$$l = \frac{m+1}{m+2} = \frac{9}{10}$$

olur.

28 -

m defa b ve n defa c olayının gerçekleştiği bilindiği halde (k-h) defa b ve h defa da c olayının sonradan gerçekleşme olasılığını belirlemek gerekse, b basit olayının basit olasılığı x olduğuna göre istenen bileşik olayın olasılığını ifade eden;

$$\frac{k(k-1)(k-2)\ldots(k-h+1)}{1\times2\times3\ldots h}\times(1-x)^h$$

mikdarını b basit olayına x ihtimalini veren sebebin etkisi olasılığıyla yani;

$$\frac{x^m(1-x)^n dx}{\int_0^1 x^m(1-x)^n dx}$$

miktarıyla çarpmak ve bu suretle elde edilen çarpım sonuçlarının [sıfır ile bir arasında] toplamını veya diğer bir deyişle integralini almak gerekir.

Bu halde sonradan (k-h) defa b olayının ve h defa da c olayının gerçekleşmesinden ibaret olan bileşik olayın oluşma olasılığını ortaya çıkaracak ilke:

$$\frac{k(k-1)(k-2)\ldots(k-h+1)}{1\times2\times3\ldots h}\frac{\int_0^1 x^{m+k-h}(1-x)^{h+m}dx}{\int_0^1 x^m(1-x)^n dx}$$

den ibaret olur.

Bu ilke, k defa b, c olaylarından oluşan tüm bileşik olayların olasılığını genel olarak göstermeye yeterlidir.

Ancak h miktarını sıfırdan k ile arka arkaya 1, 2, ... k serisine eşit kabul etmek ve ona göre bulunacak sonuçları aşağıda görüleceği üzere genel bir ifadede birleştirmek gerekir.

$$l=\frac{1}{\int_0^1 x^m(1-x)^n dx}\{\int_0^1 x^{m+k}(1-x)^h dx$$

$$+\frac{k}{1}\int_0^1 x^{m+k+1}(1-x)^{h+m}dx+\frac{k(k-1)}{1\times m}\int_0^1 x^{m+k-1}(1-x)^{m+h}dx$$

$$+\ldots\int_0^1 x^m(1-x)^{h+k}dx\ldots(10)$$

İşte bu ifade, deneysel olasılıkta teorik olasılık iki terimlisi ilkesinin görevini gerçekleştirir ki bu ifadenin genel terimi:

$$\frac{k(k-1)(k-2)\dots(k-h+1)}{1\times 2\times 3\dots h}\frac{\int_0^1 x^{m+k-h}(1-x)^{h+m}dx}{\int_0^1 x^m(1-x)^n dx}\dots(11)$$

En azından (k-h) defa b olayından ve nihayet h defa c olayından oluşan tüm bileşik olayların olasılıklarını hesaba yeterlidir.

Ancak genel ilkede her bir bileşik olaya ait terimi dikkate alarak olasılığını hesab eylemek daha kolay olur.

Mesela m defa birbiri ardı sıra yalnız b olayı göründüğü halde, sonradan k defa yine bahsi geçen olayın gerçekleşme olasılığı araştırılacak olsa idi (10) ilkesinin ilk terimini oluşturan

$$\frac{\int_0^1 x^{m+k}(1-x)^h dx}{\int_0^1 x^m(1-x)^n dx}$$

ifadesinde n=0, h=0 farz etmek yeterli olur. Bu halde;

$$l=\frac{\int_0^1 x^{m+k}dx}{\int_0^1 x^m dx}=\frac{\left[_0^1\frac{x^{m+k+1}}{m+k+1}\right]}{\left[_0^1\frac{x^{m+1}}{m+1}\right]}=\frac{\frac{1}{m+k+1}}{\frac{1}{m+1}}$$

$$l=\frac{1+m}{m+k+1}\dots(11)$$

ilkesi ortaya çıkar ki bundan da aşağıdaki kanun elde edilir:

“m defa arka arkaya gerçekleşmesi gözlenilen bir olayın ileride k defa daha ortaya çıkma olasılığı önceki gözlemlerin sayısıyla birin toplamı pay ve bu pay ile bahsi geçen olayın tekrardan görünmesi olasılığını gösteren sayı payda olmak üzere bir kesir ile ifade olunur.”

29 - Çeşitli sebeplerin nisbi olasılıkları

Bu ana kadar deneysel olasılık konusunda bir b olayına x olasılığını veren bir sebebin mutlak olasılığı gibi değerlendirmeye alındı. Halbuki uygulamada çoğunlukla çeşitli sebeplerin nisbi olasılıkları dikkate alınır. Bunun için de bir olayın çeşitli sebeplerine ait basit olasılıkları $x, x', x'' \ldots$ ile belirlendiğine göre

$$\frac{x^m(1-x)^n dx}{\int_0^1 x^m(1-x)^n dx}$$

ifadesinde x yerine sırayla $x, x', x'' \ldots$ koymak ve bulunacak miktarların herbirini toplamına bölmek gerekir.

İşte b olayının x, x' olasılıklarına ait sebeplerin sonsuz küçük olan mutlak olasılığı karşılıklı olarak,

$$l = \frac{x^m(1-x)^n dx}{\int_0^1 x^m(1-x)^n dx} \quad l' = \frac{(x')^m(1-x')^n dx}{\int_0^1 (x')^m(1-x')^n dx}$$

olduğundan, bahsi geçen sebeplerden birincisinin nisbi olasılığı da;

$$\frac{l}{l+l'} = \frac{x^m(1-x)^n}{x^m(1-x)^n + (x')^m(1-x')^n} = \frac{1}{1 + \frac{(x')^m(1-x')^n}{x^m(1-x)^n}}$$

olur.

Son ifadeden açıkça anlaşılacağı üzere, x bilinmeyenini en muhtemel değeri $\frac{l}{l+l'}$ nisbi olasılığının mümkün derece bire yakın bulunmasına ve o $\frac{(x')^m(1-x')^n}{x^m(1-x)^n}$ kesrinin en küçük veyahud $(x')^m(1-x)^n$ payı sabit kabul edildiğine göre, $x^m(1-x)^n$ paydasının en büyük olmasına dayandığından bu değer $x^m(1-x)^n$ ifadesinin türevini sıfıra eşitleyerek;

$$mx^{m-1}(1-x)^n - nx^m(1-x)^{n-1} = 0$$

[37] elde edilen

$$x = \frac{m}{m+n} \ldots (14)$$

miktarına eşit olur.

Aynı şekilde birinci sebeb altında c karşıt olayının (1-x) bilinmeyen olasılığına

[37]m-1 ifadesi orjinal metinde m+1 olarak geçiyor

en fazla uygun düşen değeri

$$1 - x = \frac{n}{m+n} \ldots (15)$$

bulunur ki bunlardan da;

$$\frac{x}{1-x} = \frac{m}{n} \ldots (16)$$

sonucu üretilir.

Şimdi $\frac{m}{m+n}$ kesri m defa tekrar eden b olayıyla n defa ortaya çıkan c bileşik olayında b basit olayının basit olasılığını gösterdiği gibi $\frac{n}{m+n}$ kesri de c karşıt olayının basit olasılığını ifade ettiğinden (14), (15), (16) rakamlı ilkelerden şu genel sonuç çıkarılır:

"b, c basit olaylarını meydana getirebilen tüm sebeplerin en çok gerçek duruma uygun düşme olasılığına sahip olanı, bu olayların basit olasılıkları arasındaki oranı, herbirinin meydana geldiği adedler arasındaki orana eşit kılandan ibarettir."

30 -

Yukarıda m defa k, n defa da c olayının gerçekleşmesi sonucunu doğuran ve x olasılığına sıfır ile bir arasında tüm değerleri verebilen mümkün sebeplerin olasılığı (5) ifadesiyle üretilmiş idi.

Bu ifadeye uygun olarak x olasılığına a, a' limitleri arasında kalan bütün değerleri veren mümkün değerlerin olasılığı;

$$l = \frac{\int_0^1 x'(1-x)^n dx}{\int_0^1 x^{m+1}(1-x)^n dx}$$

ilkesi ile ifade olunması gerekir.

İşte x bilinmeyen olasılığının $\frac{1}{m}$ ile 1 arasında bulunması olasılığını belirlemek için bu ilkede $a = \frac{1}{m}$ $a' = 1$ konulduğunda;

$$l = \frac{\int_{\frac{1}{m}}^{1} x^m (1-x)^n dx}{\int_0^1 x^m (1-x)^n dx}$$

veya

$$l = \frac{\int_0^1 x^m (1-x)^n dx - \int_0^{\frac{1}{m}} x^m (1-x)^n dx}{\int_{\frac{1}{m}}^{1} x^m (1-x)^n dx}$$

veyahud

$$l = 1 - \frac{\int_0^{\frac{1}{m}} x^m (1-x)^n dx}{\int_0^1 x^m (1-x)^n dx} \ldots (17)$$

ifadesi üretilir.

Yalnızca m defa b olayı gerçekleştiği ve c karşıt olayının ise bu arada asla gerçekleşmediği durumda, son ifadede n=0 koymak gerekeceğinden bu halde,

$$l = \frac{\int_{\frac{1}{m}}^{1} x^m dx}{\int_0^1 x^m dx} \ldots (18)$$

olur.

Fakat

$$\int_{\frac{1}{m}}^{1} x^m dx = [_{\frac{1}{m}}^{1} \frac{x^{m+1}}{m+1}] = \frac{1}{m+1} - \frac{(\frac{1}{m})^{m+1}}{m+1} = \frac{\frac{1}{(m^{-1})^{m+1}}}{m+1}$$

ve

$$\int_0^1 x^m \bar{x} = [_0^1 \frac{x^{m+2}}{m+1}] = \frac{1}{m+1}$$

olduğu için

$$l = 1 - \frac{1}{m+1} = \frac{m^{m+1} - 1}{2^{m+1}} \ldots (19)$$

olur.

31 -

Bir olayın ekseriyetle tekrarı, bahsi geçen olayın gerçekleşmesini kolaylaştıran veya doğuran bir sebeb daimi veya birincil sebebin varlığını ima eder. Bir olayın devamlı gerçekleşmesi ise, bunu gerektiren bir sebebin varlığını gerektirir ki bu sebebin olasılığı da daha önceki (19) ifadesiyle belirlenir.

Örneğin, 1850 miladi yılının sonuna kadar meselenin Güneş Gistemi'nde bilinen gezegenlerin sayısı 20'den ibaret bulunmuş ve bunların tamamının bir yöne doğru hareket etdiği görülmüş idi. Böyle bir bir keşfedilen gezegenlerin daima aynı tarafa hareket eder bulunması bir olayın devamlı tekrarı gibi görülerek bu olayın gerçekleşmesini gerektiren bir sebebin varlığı geçici olarak kabul edilmiş ve bu sebebin olasılığı da aranılmışdı.

İşte bu olasılık (19) sayılı ilke gereğince;

$$l = \frac{2^{21} - 1}{2^{21}} = \frac{2.97151}{2.97146}$$

miktarına eşit olduğu ve neredeyse bire yani matematiksel kesinlik derecesine yaklaştığı için ta o zaman gezegenlerin bu suretle aynı tarafa yönelerek hareket etmeleri gerektiğine hükmedilmişidi.

Gerçekten de 1850 senesinden bu ana kadar dörtyüzü geçen küçük büyük gezegen keşf edildiği halde, hiçbirinin ters yöne doğru hareket ettiği görülmemiştir.

Kaynakça

- Boll, Marcell, *Matematik Tarihi*, çev: Bülent Gözkan, İstanbul 2003.

- Burton, David M., *The History of Mathematics, An Introduction*, Boston 1999.

- Dilgan, H. Hamid, *İhtimaller Hesabının Temelleri, Stokastik Zincirler ve Bekleme Olayları*, İstanbul 1964.

- Dynkin, E. B. ve Uspenski, W. A., *Tesadüfi Hareketler*, çev: A. R. Özbek, M. A. Özkan, İstanbul 1962.

- Gnedenko, B. W. ve Hinçin, A. J., *İhtimaller Hesabına Giriş*, çev: L. Biran, İstanbul 1963.

- İnönü, Erdal, *1923 - 1966 Dönemi Türkiye Matematik Araştırmaları Bibliyografyası ve Bazı Gözlemler*, Ankara 1973.

- İshakoğlu-Kadıoğlu, Sevtap, *İstanbul Üniversitesi Fen Fakültesi Tarihçesi (1900-1946)*, İstanbul 1998.

- Katz, Victor J., *A History of Mathematics*, Boston 2004.

- Editör: Özemre, Ahmet Yüksel, *İstanbul Üniversitesi Fen Fakültesi'nde Çeşitli Fen Bilimi Dallarında Cumhuriyet Dönemindeki Gelişmesi ve Milletlerarası Bilime Katkısı*, İstanbul 1983.

- Sunford, Vera, *A Short History of Mathematics*, Boston 1930.

- "Cumhuriyetin 50. yılında Matematik", *Bilim ve Teknik*, Sayı 72, 1973 Kasım, s. 24-28.

8 Ekler

8.1 Ek 1. Hülâsa-i Hesâb-ı İhtimâlî'nin Orjinal Metni

خلاصهٔ

حساب احتمالی

محرری

مهندسخانهٔ بریٔ همایون حکمت ریاضیه و تلغراف معلمی
و رصدخانهٔ عامره مدیری

صالح ذکی

مهندسخانهٔ بریٔ همایون مطبعه‌سی

سنهٔ هجریه : ١٣١٥ — سنهٔ مالیه : ١٣١٤

حساب احتمالی

مقدمه

حساب احتمالینك منشئی و تعریفی . — معلومات بشریه‌نك كافه‌سی ریاضیات مطلقه‌نك دعاویسی كبی یقین افاده ایتمش اولسه ایدی محاكمات عقلیه‌مزدن حاصل اولان حكم دائما قطعی اولور وهر بر صاحب عقل عندنده مقبول ومعتبر طوتیلور ایدی .

فقط معلومات انسانیه‌نك قسم كلیسی حقیقت حالده جزئی، كلی مقارن « احتمالیات » ویاتعبیر آخرله آز چوق احتماله قریب حدسیات وظنیاتدن عبارت اولدیغندن معلومات مذكوره‌یی عمومه قبول وتصدیق ایتدیرمكده محال اولور .

مكتسبات بشریه‌نك برنجی درجه‌سی « ظن » ایله حاصل اولوركه بوده « فكر » دینیلن جملهٔ معلوماتی تولید ایدر .

ایكنجی درجه‌سی « جزم » ایله حصوله كلوركه اوده منطقده « اعتقاد » دینیلن معلوماتی وجوده كتورر .

الحاصل اوچنجی درجه‌سی « یقین » دركه اصل « علم » دینیلان معلوماتی حاصل ایدر .

ظن، معلوم اولدیغی اوزره، اكثریا حقیقت ایله اصلا نسبتی اولمیان بر اثر تخیلدر . چونكه ظنیات، موضوع ومفهوم مسئله ایله

بر مناسبت صحیحه‌یی ویا تعبیر دیگرله نه مادی ونه‌ده معنوی بر نسبتی حائز دکلدر .

اعتقاد ایسه ، یالکز مادی بر نسبتی حائزدر . اما علم هم مادی هم معنوی برر نسبت کافیه‌یی جامعدر .

مسائل نظریه‌ده ظن وحتی جزم دخی قطعیت افاده ایتمز و ایده‌منز . چونکه بونلر صورت متساویه‌ده هرکسه قبول وتصدیق ایتدیریله‌منز . مثلا ریاضیاتده برماده ویا برمسئله‌نك جوابی یاقطعیاً بیلنور ویاخود هیچ بیلنمز و الابر فکری ترجیحاً اومسئله‌نك جوابی ویریله‌منز .

لکن مسائل عملیه‌ده ظنیات دکل ایسه‌ده اعتقادیات ، جزئی کلی برموفقیتله مقصودك حصولنه دلالت ایده‌بیلور .

مثلا برطبیب برخسته‌یی — خسته‌لغك سبب اصلی وحقیقیسنه قدر وصول ممکن اوله‌مدیغی حالده — خارجاً معاینه ایدرك مرضی تشخیص ایله ماهیتی حقنده فکراً بیان حکم ایدر وبو حکمك کندیسنده حاصل ایلدیکی اعتقاد سائقه‌سیله امر تداوی‌یه شروع ایلر مع مافیه دیکر برطبیب‌ده تشخیص مرضده دها ایلرویه کیده‌رك تعیین ماهیتی خصوصنده دها زیاده حقیقة تقرب ایده‌بیلور . فقط هرحالده برنجی طبیبی ، تشخیص ایلدیکی مرضك تداویسی ایچون ، مراجعت ایتدیکی وسائطی انتخاب واستعماله سوق ایدن اعتقاد ، جازمدر ، تعبیر آخرله طبیب فکراً جهت اخری احتمالنی قطع ایده‌جك صورتده رأی وتشبثده عازمدر .

اکر طبیبك ارائه ایلدیکی طریق تداوی ایله مقصد حصول بولور یعنی مریض شفایاب اولور ایسه بوحصول بالایجاب دکل بلکه بالتوافق اولور . چونکه طبیبك حکمی ، یقینیات اوزرینه مؤسس

دکل ، بالعکس اعتقادیات وتعبیر دیکرله احتمالیات اوزرینه مبتنیدر. عندلیقین برشی یاواقع ویا غیر واقع اولمقدن خالی اولهمیه جغندن یقینیات ایچون‌ده آنجق بردرجه موجود اولمق اقتضا ایدر .

اما احتمالیات — که منطقده اعتقادیات نامیله یاد اولنور — مالانهایه درجاتی حائز اوله‌بیلور . چونکه حکم عملی ، جزئی کلی حقیقته مقارن معلومات اوزرینه ابتنا ایلدیکنه کوره حاصل اولان نتایج احتمالیه‌ده یقینیاته آز ، چوق تقرب ایدر .

بوندن اکلاشیلورکه یقیناً وقطعاً تعیین ایدیله‌میان برشیئک احتمالاتی تحری وتحدید وحتی بو احتمالات عدداً دخی تقدیر ایدیله‌بیلور .

انجق نوکبی حالاتده قوانین ریاضیه‌یی بواحتمالاته تطبیق ایتمک ایجاب ایدرکه ایشته علی‌العاده ریاضیاتک بونوع تطبیقاتنه « حساب احتمالی » نامی‌ویرلمشدر .

۱ حساب احتمالینک باشلیجه ایکی قسمه منقسم اولدیغی، حساب احتمالیٔ نظری وحساب احتمالیٔ تجربی . —

حساب احتمالیده بروقعه ویا برحادثه‌نک ظهوری بهمه‌حال حادثهٔ مذکوره‌یی حصوله کتورن برسبب دائمی ویااولینک وجودینه متوقف اولمسی برقانون عمومی اولمق اوزره وضع وقبول اولنور. چونکه عالمده هیچ برشیئک وقوعی تصادفه اسناد اولنه‌مز . وقایع کونیه‌نک کافه‌سی — حتی‌بزه الک تصادفی کورینانلری بیله — برطاقم قوانین ازلیه وابدیه‌نک نتایج قطعیه وضروریه‌سندن بشقه برشی دکلدر . چو هواده طیران ایدن بر بخار جزئنک

تعقیب ایلدیکی طریق ، فضاده سیر وحرکت ایدن بر سیاره‌نك نقطع ایلدیکی محرك قدر قطعی و محققدر .

بتون کائناتك حال حاضری حال سابقنك نتیجه‌سی اولدیغی کبی حال مستقبلنك‌ده سبب وعلتندن عبارتدر .

تصور بشرك فوقنده اولان بر علم ازلی کائناتك کافهٔ عناصر محرکه، وقوای مؤثره‌سنك وضعیات وتأثیراتنی بر قانون عمومیده جمع ایده‌جکی جهتله اك جسیم اقساملرندن اك صغیر اجزاسنه وارنجه‌یه قدر هر برینك احوال وحرکاتی قبل‌الوقوع کشف وتقدیر ایدر .

بوبله بر قدرت ازلیه ایچون وقایع مستقبله‌نك قطعی و محقق اوله‌جغنده اصلا شك وشبهه ایدیله‌مز .

فقط استعداد فطریسی غایه‌الغایه محدود اولان بنی بشر ایچون حادثات وممکناتك اسباب اولیه‌سنه قدر وصول ممکن ومیسر اولمدیغندن وقایع مستقبله‌نك ظهور وعدم ظهوری‌ده احتمالدن قورتیله‌مز .

شوقدرکه انسان بر طاقم حادثات معینه‌نك اسباب صریحه‌سنه دقت ایدرك واسباب مذکوره‌نك تأثیراتنه دائر معلومات کافیه جمع ایلیه‌رك وقوعی ممکن اولان حادثات متعدده میاننده برینك دیکرینه نظراً ظهوری دها زیاده ویا دها آز محتمل اولدیغنه دائر بر اعتقاد حاصل ایده‌بیلور .

ایشته حساب احتمالینك ، اسباب معلومه‌نك ترکیبی معرفتیله حادثاتك ظهوری احتمالندن بحث ایدن بر قسمنه « حساب احتمالی نظری » تعبیر اولنور .

یاخود « انسان حادثات معلومه‌نك ، اسبابنی تحری ایدرك بو صورتله بر وقعه ویا حادثه‌نك ظهوری نه درجه‌یه قدر محتمل اولوب

اولمدیغنه دائر برفکر حاصل ایده‌بیلورکه حساب احتمالینك بووجهله حادثات طبیعیه‌نك اسباب ظهوری احتمالندن بحث ایدن قسمنه‌ده « حساب احتمالیء تجربی » دینیلور .

بو رساله‌ده اول امرده حساب احتمالیء نظرینك وبعده حساب احتمالیء تجربینك قوانین وقواعد اساسیه‌سی بیان ایدیله‌جکی کبی قواعد وقوانین مذکوره هرکسجه معلوم اولان اویونلره تطبیق ایدیله‌رك ایضاح دخی اولنه‌جقدر . نهایت رساله‌ده حساب احتمالینك تطبیق اولنه‌بیله‌جکی بعض مسائل مهمه‌ده ذکر و تعداد قلنه‌جقدر .

۲ قطعیت ریاضیه واحتمال ریاضیه .— برحادثه ویا وقعه‌نك ظهوری بالایجاب اولور ایسه او وقعه‌نك ظهور ویا حصولی‌ده « قطعیدر » دینیلور .

بالعکس بروقعه‌نك ظهورینی منع ایده‌جك اسباب بولنور ومع مافیه بو اسبابك تأثیری لابد ولاجرم حکمنده اولماز ایسه او وقعه‌نك ظهوری‌ده « احتمالیدر » دینیلور .

برحادثه‌نك حصولنی موجب اوله‌بیلان اسبابك عددی ، عدم حصولنی انتاج ایدن اسبابك عددندن نه‌قدر زیاده بولنور ایسه حادثه‌نك ظهوری‌ده اودرجه احتمالی ویا تعبیر عادیسیله محتمل اولور .

ایشته برحادثه ویا وقعه‌نك ظهورینی موجب اولان اسبابك عدیله وقعهٔ مذکوره‌نك ظهور وعدم ظهورینه مساعد بولنان اسباب ممکنه‌نك مجموع عددینه نسبتنه بو وقعه‌نك « احتماله ریاضیسی » تعبیر اولنور .

مثلا برقوطی درونده درت عدد بیاض یوارلق موجود اولدیغی حالده قوطیدن بردفعه‌ده بیاض یوارلق چکمك مطلوب اولسه، بدیهیدرکه وقعهٔ مطلوبه‌نك حصولی یعنی بیاض یوارلغك ظهوری « قطعی اولمق » اقتضا ایدر .

فقط قوطیده بولنان درت یوارلقدن اوچی سیاه ویالکز بری بیاض بولندیغی صورتده ینه بردفعه چکشده بیاض یوارلق چیقارمق مسئله‌سی « احتمالی » اولور .

شویله که :

قوطیده درت یوارلق موجود اولدیغی جهتله صورت متساویه‌ده درت وقعه ویا حالك ظهوری ممکن ایسه‌ده بونلردن آنجق بری مطلوب اولان نتیجه‌یی ویاتعبیر آخرله بیاض یوارلغك ظهورینی تأمین ایده‌بیله‌جکندن نتیجهٔ مذکوره‌نك استحصالی احتمالی دردده بر اولمق ایجاب ایدرکه بوده $\frac{1}{4}$ کسریله افاده اولنور .

عینیله ایکیسی سیاه ، آلتیسی بیاض اولمق اوزره جمعاً سکز یوارلغی حاوی بولنان برقوطیدن بردفعه‌ده بیاض یوارلق چیقاره‌بیلمك احتمالی تحری ایدیله‌جك اولور ایسه ممکن‌الاجرا اولان سکز صورتدن آلتیسی نتیجهٔ مطلوبه‌یی استحصاله مساعد بولندیغی نظر ملاحظه‌یه آلنجه بومثللو برقوطیدن بردفعه‌ده بیاض یوارلق چکمك احتمالنك ده $\frac{6}{8}$ ایله افاده اولنه‌جغی ظاهر اولور .

۳ قطعیت ریاضیه واحد ایله واحتمال ریاضی برکسر ایله افاده

اولنور . — امثلهٔ مسروده‌دن مستبان اوله‌جغی اوزره قطعیت ریاضیه ،

دائما واحد ايله واحتمال رياضى‌ده بر كسر ايله افاده اولنور . اكر بر حادثه‌نك احتمال رياضيسنى افاده ايدن كسر $\frac{١}{٢}$ دن اعظم بوله‌جق اولور ايسه حادثهٔ مذكوره‌نك ظهورينه مساعد اولان حالات ، عدم ظهورينه مساعد بولنان حالاتدن زياده ديمك اولور . بالعكس كسر مذكور $\frac{١}{٢}$ دن اصغر بوله‌جق اولور ايسه حادثه‌نك ظهور وعدم ظهورى اميدى مساوى عد اولنور .

ايشته برنجى مثالده دفعهٔ بياض بوارلق چكمك احتمالى $\frac{١}{٤}$ و چكمامك احتمالى $\frac{٣}{٤}$ اولديغى جهتله حادثه مطلوبه‌نك ظهورى احتمالى عدم ظهورى احتمالدن دون ديمك اولور .

بالعكس ايكنجى مثالده بياض بوارلغك ظهورينه مساعد اولان حالاتك عددى ٦ و عدم ظهورينى انتاج ايدن حالاتك عددى‌ده ٢ اولديغى ويا تعبير آخرله بردفعه‌ده بياض بوارلق چكمك احتمالى $\frac{٦}{٨}$ وچكمامك احتمالى‌ده $\frac{٢}{٨}$ بولنديغى جهتله حادثهٔ مطلوبه‌نك ظهورى اميدى عدم ظهورى اميدينه غالب بولنور .

مع هذا برحادثه‌نك احتمال رياضيسى هرنه اولور ايسه اولسون اول امرده او وقعه‌نك ظهور وعدم ظهورى مشكوك اولمقدن قورتيله‌ماز .

٤ حساب احتمالينك تعريف عموميسى — بورايه قدر بيان اولنان موادن خلاصه ايديله‌جكى وجهله حساب احتماليتك افادهٔ عموميه‌سى :

« بر وقعه‌نك ظهورينه مساعد اولان حالاتك عدديله ، مساعد وغير مساعد بالجمله حالات ممكنه‌نك عددى بيننده‌كى نسبتى تعيين » دن عبارت اولمق اقتضا ايدر .

آنجق بو تعریفده وقعه‌نك ظهورینه مساعد وغیر مساعد اولان حالات مختلفه‌نك هربری ایچون عین درجه‌ده امکانك وجودی فرض وقبول اولنمشدر .

عکس تقدیرنده یعنی مساعد بولنان حالات ایله غیر مساعد اولان حالاتك درجهٔ امکانلری متفاوت بولندیغی صورتده هر حالی درجهٔ امکانیله برابر نظر اعتباره آلمق ایجاب ایدر . بو حالده ر وقعه‌نك احتمال ریاضیسی، وقعهٔ مذکوره‌نك مساعد وغیر مساعد اولان حالاتدن هربرینك امکانلری مجموعندن مرکب اولور .

بو خصوصی ایضاح ایچون مثلا « یازیمی ؟ طغرامی ؟ » اویوننده بربرینی متعاقب ایکی دفعه آتیشده برکره طغرا تصادف ایتمسی ، احتمالی تحری ایده‌لم . وبونك ایچونده بر وجه آتی وقوعی ممکن ومتصور اولان درت حالی نظر اعتباره آله‌لم :

١	برنجی	دفعه‌ده	« طغرا »	ایکنجی	دفعه‌ده	« یازی »
٢	«	«	« طغرا »	«	«	« طغرا »
٣	«	«	« یازی »	«	«	« طغرا »
١	«	«	« یازی »	«	«	« یازی »

ایشته ممکن الوقوع اولان شو درت حالدن یالکز اوچ اولکیسی ایکی دفعه آتیشده برکره طغرا گلمسنه مساعد اولدیغندن مسئله‌نك احتمال ریاضیسیده :

$$\frac{٣}{٤} = \frac{١}{٤} + \frac{١}{٤} + \frac{١}{٤}$$

اولمق اقتضا ایدر .

فقط ایکی دفعه‌نك برنجیسنده « طغرا » ایکنجیسنده « یازی »
گتیره‌بیلمك احتمالی تحری ایدیله‌جك اولور ایسه بوكا توافق ایدن
یالکز برحال موجود وممکن اولمسیله مطلوب اولان احتمالك ده
$\frac{1}{4}$ ایله افاده ایدیله‌بیله‌جکی تعیین ایدر .

۵ احتمال مرکب، احتمال بسیط احتمال مرکب، احتمال بسیطلر حاصل ضربنه مساویدر .

— برقاچ وقعه‌نك متعاقباً ظهوری احتمالنه « احتمال مرکب » وبالمقابله بر وقعه‌نك منفرداً ظهوری احتمالنه‌ده « احتمال بسیط » تعبیر اولنور .

برقاچ وقعه‌نك احتمال مرکبی، وقایع مذکوره‌نك احتمال بسیطلرینی یکدیگرینه ضرب ایدرك استحصال اولنور .

فی الحقیقه یوقاریکی مثالده ایلك دفعه‌سنده طغرا ایکنجیسنده یازی گتیره‌بیلمك احتمالی تحری ایدیله‌جك اولور ایسه ممکن اولان درت حال میاننده ایلك آتشده طغرا گلمسنه مساعد یالکز ایکی حال موجود اولدیغی گوریله‌جکندن بو وقعه‌نك احتمال بسیطی $\frac{1}{2}$ وعینیله ایکنجی آتیشده یازی ظهور ایتمسنه مساعد یالکز ایکی حال بولندیغندن انك ده احتمال بسیطی ینه $\frac{1}{2}$ اوله‌جغی جهتله اولا طغرا وثانیاً یازی گلمك احتمال مرکبی $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ اولمق اقتضا ایدرکه بوده اولجه جدوله مراجعتله یکنظرده استحصال ایدیلان نتیجه‌نك عینیدر .

۶ نتیجه . — علی العموم بروقعه‌نك احتمال بسیطی

$\frac{م}{م+ن}$ ايله ارائه اولنديغى حالده، وقعهٔ مذكورەنك بربرينى متعاقب ايكى دفعه ظهورى احتمالى $\left(\frac{م}{م+ن}\right)^{٢}$ واوچ دفعه ظهورى احتمالى $\left(\frac{م}{م+ن}\right)^{٣}$ والى آخره اولور.

فى الحقيقه بروقعه‌نك يالكزجه ظهورى احتمالى يعنى احتمال بسيطى $\frac{م}{م+ن}$ ايله افاده ايديله‌جك اولورايسه متعاقباً ايكى دفعه ظهورى احتمالى ويا تعبير آخرله احتمال مركبى مادهٔ سالفه‌يه توفيقاً احتمال بسيطلرى حاصل ضربنه يعنى $\frac{م}{م+ن}\times\frac{م}{م+ن}=\left(\frac{م}{م+ن}\right)^{٢}$ مقدارينه واوچ دفعه متواليا ظهورى احتمال مركبى ده $\frac{م}{م+ن}\times\frac{م}{م+ن}\times\frac{م}{م+ن}=\left(\frac{م}{م+ن}\right)^{٣}$ حاصل ضربنه مساوى اولور.

٧ احتمال موافق، احتمال مخالف — بروقعه‌نك احتمال موافقى ايله احتمال مخالفى مجموعى واحده مساويدر. — وقوعى قطعى اولميان هر بر وقعه يكديكرينه مخالف ايكى احتماله سببيت ويرركه بونلرك برى وقعه‌نك «احتمال موافقى» يعنى ظهورى احتمالى وديكرى «احتمال مخالفى» يعنى عدم ظهورى احتماليدر. مثلا برى بياض وديكرى سياه اولمق اوزره درت يوارلغى حاوى بولنان برقوطيدن بر دفعه‌ده بياض يوارلاق چكمك احتمالى $\frac{١}{٤}$ وچكمامك احتمالى ده

$\frac{٣}{٤}$ اولور. چونکه ممکن اولان درت حال میاننده بیاض بوار اغنك ظهورینه مساعد یالکز بر حال بولندیغندن غیر مساعد باقی اوچ حال موجود دیمك اولور

علی العموم بر وقعه‌نك احتمال موافقی $\frac{\text{م}}{\text{م}+\text{ن}}$ اولدیغنه کوره احتمال مخالفی ده $(١ - \frac{\text{م}}{\text{م}+\text{ن}}) = \frac{\text{ن}}{\text{م}+\text{ن}}$ اولور . فی الحقیقه بر وقعه‌نك ظهوری احتمالنك $\frac{\text{م}}{\text{م}+\text{ن}}$ اولمسی دیمك م + ن قدر ممکن الحصول حالاتدن یالکز م عددینك وقعهٔ مذکوره‌نك ظهورینه مساعد بولنمسی دیمك اوله‌جغنه نظراً عدم ظهورینی انتاج ایده‌جك باقی ن قدر حال موجود اولمق اقتضا ایدر . بو حالده وقعهٔ مذکوره‌نك احتمال مخالفی یعنی عدم ظهوری احتمالی $\frac{\text{ن}}{\text{م}+\text{ن}}$ دن عبارت بوله‌جغی کبی بالطبع :

$$\frac{\text{م}}{\text{م}+\text{ن}} + \frac{\text{ن}}{\text{م}+\text{ن}} = \frac{\text{م}+\text{ن}}{\text{م}+\text{ن}} = ١$$

اولور . بوندن اکلاشیلورکه بر وقعه‌نك احتمال موافقی ایله احتمال مخالفی مجموعی دائما واحده مساویدر . چونکه بو ایکی احتمالده ممکن و متصور اوله‌بیلن حالاتك کافه‌سی موجوددر .

ایشته بو دقیقه‌یه مبنیدرکه بو قاریده [ماده : ٣] قطعیت ریاضیه واحد ایله افاده اولنور دینلمشدر .

٨ . — بورایه قدر حساب احتمالینك قواعد اساسیه‌سی حقنده بیان اولنان مواد بروجه آتی اوچ دعوای ریاضیه ایله خلاصه اولنه‌بیلور :

۱ بر وقعه‌نك احتمال بسيطى بر كسر ايله افاده اولنور كه كسر مذكورك صورتى بو وقعه‌نك ظهورينه مساعد اولان حالانك عددينه و مخرجى ده مساعد و غير مساعد بولنان بالجمله حالات ممكنه‌نك مجموعى عددينه مساوى‌در .

۲ برقاچ وقعه‌نك متوالياً ظهورينه عائد احتمال مركب ، وقايع مذكوره‌نك احتمال بسيطلرى حاصل ضربنه مساويدر .

۳ بر وقعه‌نك ظهورينه مساعد اولان احتمال ايله غير مساعد اولان احتمال مجموعى واحده مساويدر . دعواى اخيره‌دن مستبان اولوركه بر وقعه‌نك احتمال موافق و احتمال مخالفندن يالكز برى معلوم اولديغى حالده ديكرى بالسهوله استخراج اولنه‌بيلور .

۹ تنبيه — بر وقعه‌نك احتمال بسيطنى تقدير ايتمك مشكل اولديغى صورتده احتمال مركبى تعيين ايلمك دها مشكل اولور . بوكبى احوالده مسئله‌يى ممكن اولديغى قدر وجوه مختلفه‌دن نظر تدقيقه آلمق اقتضا ايدر . چونكه بر نتيجهٔ خصوصيه‌نك استحصالنده ويا تعبير آخرله بر حالك حد امكانى تعيين خصوصنده ايديلاجك الك كوچوك بر خطا نتيجهٔ حسابده بر خطاى فاحشك ظهورينه سبب اوله‌بيلور .

ايشته بويله بر ياكليش محاكمه نتيجه‌سنه مبنيدركه مشاهير رياضيوندن « دالامبر » [D'alembert] « يازيمى؟ طغرايمى؟ » اويوننده ايكى آتيشده بر كره طغرا دوشوره‌بيلمك احتمالنى — كه بوقاريده $\frac{3}{4}$ اولديغى كورلمشدى — $\frac{2}{3}$ بولمشدر .

بوبابده (دالامبر) بولمش اولدیغی نتیجهٔ حسابیه‌یی شو یولده برمحاکمه‌یه ابتنا ایتمش ایدی :

« اکر ایلك آتیشده طغرا کله‌جك اولور ایسه اویون قزانلمش
« اولور . بالعکس یازی ظهور ایده‌جك اولور ایسه ایکنجی دفعه
« آتمغه لزوم کورینور . بو ایکنجی آتشده‌ده یا طغرا کلمك و بناءً علیه
« اویونی قزانمق احتمالی و یاخود یازی ظهور ایده‌رك اویونی بسبتون
« غیب ایلمك احتمالی واردر . بوندن اکلاشیلورکه مسئله ایچون
« اساساً :

اولاً طغرا ثانیاً «

اولاً یازی ثانیاً طغرا

اولاً یازی ثانیاً یازی

کبی اوچ حال ممکن دیمك اولور . حالبوکه بو اوچ حالدن یالکز ایکیسی یعنی برنجیسی ایله ایکنجیسی مطلوبه موافق اولدیغندن ایکی دفعه آتیشده برکره طغرا تصادف ایتدیرمك احتمالی ده $\frac{٢}{٣}$ اولمق لازمکلور .

(دالامبر) زعمنجه بو دلیل ایله « حساب احتمالی » بی اساسندن صارصمش و حالبوکه کندیسنك یاکلدیغی اصلا خاطرینه کتیرمامشدر . (دالامبر) ك بو روجه بالا محاکمه‌سنده‌کی خطا ، اوچ حالك هر بری ایچون عین درجه‌ده امکان تصور ایتمسی اولمشدر . فی الحقیقه اویونه باشلامدن اول ایلك آتیشده طغرا دوشورمك احتمالی $\frac{١}{٢}$ و برنجی آتیشده یازی ایکنجیسنده طغرا تصادف ایتدیرمك احتمالی ایسه $\frac{١}{٤}$ در . بو حالده ایسه بر دفعه‌ده برکره طغرا کتیرمك احتمالی :

$$\frac{١}{٢} + \frac{١}{٤} = \frac{٣}{٤}$$

اولمق اقتضا ایدرکه بوده یوقاریده دیگر صورتله بولنان نتیجه‌نك عینیدر .

١٠ — بر داولو زاری بربری آردی صره ایکی دفعه آتلدیغی حالده برکره شش کتیره‌بیلمك احتمالی ارانلمش اولسه ، هر ایکی آتیشدن تولد ایده‌بیله‌جك حالات ممکنه‌نك کافه‌سنی نظر مطالعه‌یه آلمق اقتضا ایدرکه حالات مذکوره میاننده « شش » بولنالمرك عددیله مجموعنك عددی بیننده‌کی نسبت ارانیلان احتمالدن عبارت اولور .

ایمدی زار بربرینی متعاقباً ایکی دفعه آتلدیغی حالده ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ عددلرینك ایکیشر ایکیشر تشکیلی ممکن اوله‌بیلان بروجه آتی ٣٦ ترکیبندن برینك ظهوری طبیعی وضروریدر :

١ ، ١	١ ، ٢	١ ، ٣	١ ، ٤	١ ، ٥	١ ، ٦
٢ ، ١	٢ ، ٢	٢ ، ٣	٢ ، ٤	٢ ، ٥	٢ ، ٦
٣ ، ١	٣ ، ٢	٣ ، ٣	٣ ، ٤	٣ ، ٥	٣ ، ٦
٤ ، ١	٤ ، ٢	٤ ، ٣	٤ ، ٤	٤ ، ٥	٤ ، ٦
٥ ، ١	٥ ، ٢	٥ ، ٣	٥ ، ٤	٥ ، ٥	٥ ، ٦
٦ ، ١	٦ ، ٢	٦ ، ٣	٦ ، ٤	٦ ، ٥	٦ ، ٦

بو اوتوز التی حال — كه كافه‌سنك ظهوری متساویاً محتملدر — میاننده بردفعه اولسون ششی حاوی اولان یالکز ١١ ترکیب ویا حال موجود اولدیغندن مطلوب اولان احتمالده $\frac{١١}{٣٦}$ اولمق لازم کلور .

شمدی بو صورتله جدول واسطه‌سیله بولنان شو احتمالك نه‌وجهله حساب ایدیله‌بیله‌جکنی تحری ایلیه‌لم :

زارك آلتی وجهی بولندیغندن بردفعه آتیشده شش کلسنه مساعد اولان احتمال $\frac{١}{٦}$ وحالبوکه غیر مساعد بولنان احتمال یعنی شش ظهور ایتمامسی احتمالی $\frac{٥}{٦}$ اولور . اکر مسئله عکس ایدیله‌رك ایکی آتیشده‌ده شش کتیرمامك احتمالی تحری ایدلمش اولسه ایدی [ماده : ٤] موجبنجه مطلوب اولان احتمال $\frac{٥}{٦} \times \frac{٥}{٦} = \frac{٢٥}{٣٦}$ اولمق لازمکلور ایدی . شمدی مادامکه ایکی دفعه آتیشده شش کلمامك احتمالی $\frac{٢٥}{٣٦}$ اولیور . بو حالده بونك عکسی اولان احتمال یعنی ایکی وقعه‌نك برنده شش کلمك احتمالیده [فقره : ٧] مقتضاسنجه :

$$\frac{١١}{٣٦} - \frac{٢٥}{٣٦} = ١$$

اولور که بوده یوقاریده جدول واسطه‌سیله بولنان احتمالك عینیدر .

١١ — بالاده‌کی جدوله دقتله نظر ایدیله‌جك اولور ایسه کوریلورکه آتیشك عددی تزاید ایتدکجه قزانمق احتمالی‌ده لاینقطع تزاید ایدر . نته‌کم بردفعه‌سی ایچون التی صورت ویاحال ممکن اولدیغی حالده ایکی دفعه آتیش ایچون ٦ × ٦ = ٣٦ حال ممکن اولور .

اوچ آتیش ایچون ممکن ومتصور اوله‌بیلن حالاتك عددیده کلنجه بوده ٦ × ٣٦ = ٢١٦ = $٦^{٣}$ اولمق لازمکلور . چونکه

ایکی اولکی آتیش ایچون ممکن اولان ۳۶ حالك هر بری زارك بر اوچنجی دفعه آتیشی ایچون ممکن الحصول بولنان ۶ حال ایله ترکیب اولنمق اقتضا ایدر .

عینیله بر بری آردی صره درت دفعه آتیش ایچون حالات مختلفه‌نك عددی $۶ \times ۲۱۶ = ۱۲۹۶ = ۶^{۴}$ وبش آتیش ایچون $= ۶^{۵}$ و الا آخره بو منوال اوزره اولور .

علی العموم ، م دفعه متوالیاً زارك آتلمسنده ممکن اوله بیلن حالاتك عددی $۶^{م}$ مقدارینه مساوی بولنور . ایشته بر آتیشده زارك بر خانه‌سنك ومثلا شش طرفنك ظهورینه مساعد وغیر مساعد اولان حالاتك عددی ب ایله کوستریله‌جك اولور ایسه م دفعه آتلدیغی صورتده ینه شش خانه‌سنك ظهورینه مساعد وغیر مساعد بولنان حالاتك عددی مجموعی $ب^{م}$ اولور .

۱۱ — اوچ ویا درت ویابش دفعه متوالیاً آتیشده بر کره شش کلمسی احتمالی ارانیله جق اولسه ، مطلوب اولان احتمال یوقاریده ششك ظهورینه غیر مساعد اولمق اوزره بولنان احتمالات واسطه‌سیله بالسهوله تعیین اولنه بیلور .

فی الحقیقه : اوچ دفعه متوالیاً زارك آتلمسنده شش کتیرمامك احتمالی $\left(\frac{۵}{۶} \right)^{۳}$ اولدیغندن شش کتیرمك احتمالی ده [فقره : ۶]

$$۱ - \left(\frac{۵}{۶} \right)^{۳} = \frac{۹۱}{۲۱۶}$$

اوله جغی کبی درت دفعه آتلمه‌سنده‌کی احتمالی ده :

$$١ - \left(\frac{٥}{٦}\right)^{٤} = \frac{٦٧١}{١٢٩٦}$$

و بش دفعه‌سی ایچون

$$١ - \left(\frac{٥}{٦}\right)^{٥} = \frac{٤٦٥١}{٧٧٧٦}$$

والی آخره اولور .

ایشته زارك بر دفعه آتلمسنده شش کتیرمك احتمالی $\frac{١}{٦}$ اولدیغی حالده بش دفعه متوالیاً آتلشنده بر کره شش دوشوره‌بیلمك احتمالی $\frac{٤٦٥١}{٧٧٧٦}$ اولیور که بو ده $\frac{٣}{٦}$ کسرندن بیوك دیمکدر . بوندن آکلاشیلیور که تجربه‌نك یعنی آتیشك عددینی مناسب صورتده تزیید ایده‌رك قزانمق احتمالی‌ده ممکن اولدیغی مرتبه واحده و یاخود آخرله قطعیت ریاضیه‌یه تقریب ایلامك ممکندر .

بناءً علیه بر وقعه‌نك ظهوری ایچون اول امرده احتمال نه‌قدر آز اولور ایسه اولسون عدد تجربه‌یی تزیید ایده‌رك بو احتمال استنادیکی درجه‌ده تزیید اولنه‌بیلور . مثلا قرق عدد سیاه و بر عدد بیاض بوارلغی حاوی قوطیدن بیاض بوارلق چکمك احتمالی $\frac{١}{٤١}$ ایکن ١٠٠ دفعه متوالیاً چکشده بو احتمال قطعیت ریاضیه مرتبه‌سنه تقرب ایتمش بولنور .

فی الحقیقه بر دفعه‌ده بیاض بوارلق چکمك احتمالی‌ده $\frac{١}{٤١}$ و چکمامك احتمالی‌ده $\frac{٤٠}{٤١}$ اولدیغندن و یاخود دیکرله مسئله‌یه موافق اولان احتمال $\frac{١}{٤١}$ و غیر موافق بولنان احتمال‌ده $\frac{٤٠}{٤١}$ بولندیغندن ١٠٠ دفعه چکشده غیر موافق اولان احتمال $\left(\frac{٤٠}{٤١}\right)^{١٠٠}$ اوله‌جغنی جهتله موافق بولنان احتمال‌ده بالطبع :

$$١ - \left(\frac{٤٠٠}{٤٠١}\right)^{١٠٠} = ٠,٩١٥٣٦١$$

اولور . مع مافيه تجربه‌نك عددينى دها زياده‌لشديره‌رك بياض يواراق چيقارمق احتمالى استدليكى مرتبه واحده يعنى قطعيت رياضيه‌يه تقريب اولنه‌بيلور .

١٢ — ايشته بو مطالعه سوقيله‌دركه حساب احتماليده بروجه آتى مسئله ميدانه چيقشدر :

« بر وقعه‌نك احتمال رياضيسى بر مقدار معلومه مساوى اوله‌بيلمك ايچون تكررى اقتضا ايدن تجربه‌لرك عددينى تعيين ايتمك ؟ »

بوراده تجربه‌دن مقصد ، مثلا بر زارك متواليا آتلمسى ويا قوطيدن بر نومره ويا بر يواراغك چكيلمسيدركه شرائط امكانك دوچار تغير اولماسى ايچون هر دفعه قوطيدن چيقاريلان نومره ويا يواراق ينه قوطى درونه وضع اولنمق ايجاب ايدر .

مسئلهٔ مذكوره ينه وقعه‌نك ظهورينه غير مساعد احتمالاتى نظر مطالعه‌يه آله‌رق حل اولنه‌بيلور . شويله‌كه مثلا بر زارك بر دفعه آتيلمسنده شش كتيره‌مامك احتمالى $\frac{٥}{٦}$ اولديغى حالده س دفعه آتيلمسنده ينه شش كلمامك احتمالى $\left(\frac{٥}{٦}\right)^{س}$ اوله‌جغندن مسئله‌يه موافق اولان احتمال [فقره]

$$١ - \left(\frac{٥}{٦}\right)^{س}$$

اولوركه معلوم اوله‌رق ويريلان مقداره مساوى بولنمسى مطلوب اولان مقدار بوندن عبارت اوله‌جغى جهتله بونلردن بر معادله تشكيل وبو صورتله عدد تجربه‌يى ارائه ايدن س مجهولى تحصيل اولنور . مثلا بو احتمالك $\frac{١}{٢}$ مقدارينه مساوى اولمسى ايچون زارك قاچ دفعه آتيله‌جغنى تعيين ايتمك لازمكلسه :

$$1 - \left(\frac{5}{6}\right)^{\text{س}} = \frac{1}{2}$$

معادله‌سی تنظیم اولنه‌رق .

و بوندنده س مجهولی استخراج ایچون طرفینك لغارتمه‌لری آلندقده :

$$\left(\frac{5}{6}\right)^{\text{س}} = \frac{1}{2}$$

$$\text{س لع}\left(\frac{5}{6}\right) = \text{لع}\,\frac{1}{2}$$

ویا

$$\text{س} = \frac{\text{لع } 1 - \text{لع } 2}{\text{لع } 5 - \text{لع } 6} = \frac{0{,}30103000}{0{,}07918250}$$

بولنورکه بوده تقریباً درت عددینه مساویدر .

ایشته برکره شش کتیره‌بیلمك احتمالی $\frac{1}{2}$ اولمق ایچون زارك لااقل درت دفعه آتلمسی اقتضا ایده‌جکی بوصورتله تحقق ایدر .

بو احتمالك $\frac{2}{3}$ مقدارینه مساوی اولمسی مطلوب اولسه ایدی . او حالده

$$1 - \left(\frac{5}{6}\right)^{\text{س}} = \frac{2}{3}$$

معادله‌سی تنظیم اولنه‌رق

$$\left(\frac{5}{6}\right)^{\text{س}} = \frac{1}{3}$$

وبنا برین

$$\text{س} = \frac{\text{لع } 1 - \text{لع } 3}{\text{لع } 5 - \text{لع } 6} = \frac{0{,}47712125}{0{,}0791825}$$

بولنور ایدیکه بوده ٦ عددندن براز فضله دیمکدر .

بو حالده یدی دفعه‌ده زارك برکره شش کلمسی احتمالی $\frac{2}{3}$ دن زیاده اوله‌جغی کبی آلتی دفعه آتلمسنده‌ده بو احتمالك $\frac{2}{3}$ دن براز نقصان بولنه‌جغی تظاهر ایدر .

۱۳ — عدد تجربه‌نك تزییدیله قزانمق امیدینك تزایدینی لایقیله ایضاح ایچون اشیای متعدده‌نك مختلف صورتده تشکیل اولنه‌بیلن اوضاع وترکیباتنی نظر مطالعه‌یه آله‌لم :

ب ، ج ، د کبی اوچ شیئ ایکیشر دفعه برر برر آلندیغی صورتده بروجه آتی طقوز مختلف وضع حاصل ایدلمش اولور :

بب	جب	دب	
بج	جج	دج	...... (۹)
بد	جد	دد	

شو اوچ مختلف ماده برقوطی درونده بولنان اوچ یوارلق اولدیغی وایکی دفعه بربری آردی صره بو قوطیدن بریوارلق چکلدیکی وفقط هر دفعه‌سنده اوقوطیدن چکیلان یوارلق ینه درونه وضع اولندیغی فرض ایدیله‌جك اولور ایسه طبیعیدرکه هر ایکی چکشده چیقاریله‌جق اولان ایکی یوارلق بروجه بالا طقوز اوضاعدن مطلقا بری اولور وبو حالده هر برینك ظهوری احتمالی ده $\frac{۱}{۹}$ کسرینه مساوی بولنور .

اکر ایکی دفعه چکشده ب ، ج مثللو ایکی مختلف وفقط معین یوارلق چکمك احتمالی آرانلمش اولسه بو سؤاله توافق ایدن یالکز ب ج ، ج ب کبی ایکی وضع موجود اولدیغندن بونلرك هر ایکیسنه عائد احتمال $\frac{۱}{۹} + \frac{۱}{۹} = \frac{۲}{۹}$ کسرینه مساوی بولنور .

بالعکس مذکور ایکی یوارلغك جنسی تعیین ایدلمیه‌رك ایکی چکشده مطلقا ایکی مختلف یوارلق چیقارمق احتمالی صورلمش اولسه ایدی بو سؤاله توافق ایده‌جك

بج ، بد ، جب ، جد ، دب ، دج

مثللو آلتی وضع موجود اولدیغندن احتمال مطلوب ده :

$$\frac{٦٠}{٩٠} = \frac{١٠}{٩٠} + \frac{١٠}{٩٠} + \frac{١٠}{٩٠} + \frac{١٠}{٩٠} + \frac{١٠}{٩٠} + \frac{١٠}{٩٠}$$

دن عبارت اولور ایدی .

١٤ — مذکور اوچ یوارلق اوچ دفعه چکیله جك اولور ایسه بوکا عائد احتمالاتی تعیین ایچون اوچ شیئك اوچر اوچر بروجه آتی اوضاعنی نظر اعتباره آلمق کفایت ایدر :

ببب ججج ددد
ببج بجب جبب
بجج جبج ججب
بجد جدب دبج .... ((٣))
بدج جبد دجب
ببد بدب دبب
بدد دبد ددب
جدد دجد ددج

عینیله یوارلقلر بربری آردی صره درت دفعه چکلدیکی حالده اکا عائد احتمالاتی ده تعیین ایچون هر بری ایکی اوچ درت دفعه تکرر ایلمك شرطیله دردر دردر تشکیل اولنان اوضاعنی نظر مطالعه یه آلمق اقتضا ایدر .

شمدی یوقاریکی اوضاعدن هر بری ، کندیلرینی تشکیل ایدن مختلف ویا مساوی اوچ حرفك حاصل ضربی کبی تلقی ایدیله جك اولور ایسه مجموعی بالبداهه $(ب + ج + د)^{٣}$ افاده سنك توسیعندن عبارت اولور .

فی الحقیقه افادهٔ مذکوره (نیوتون) دستورینه توفیقاً توسیع ایدلدیکی حالده :

$$(\text{ب} + \text{ج} + \text{د})^{٣} = \text{ب}^{٣} + ٣\,\text{ب}^{٢}\text{ج} + ٣\,\text{ب}\,\text{ج}^{٢} + \text{ج}^{٣}$$

$$+\,٣\,\text{ب}^{٢}\text{د} + ٦\,\text{ب}\,\text{ج}\,\text{د} + ٣\,\text{ج}^{٢}\text{د}$$

$$+\,٣\,\text{ب}\,\text{د}^{٢} + ٣\,\text{ج}\,\text{د}^{٢} + \text{د}^{٣}$$

بولنورکه حدود مختلفه‌سنك امثاللری هر ترکیب خصوصیه عائد اوضاع مختلفه‌نك عددلرینه مساوی اولدیغی کوریلور . شویله‌که : مثلا ببب ، ججج ، ددد ترکیبلرندن هربری اصلا مبادله قبول ایتمدیکی جهتله $\text{ب}^{٣}$ ، $\text{ج}^{٣}$ ، $\text{د}^{٣}$ حدلرینك امثاللری‌ده واحد اولور . ببج ترکیبی ببج ، بجب ، جبب کبی اوچ مبادله قبول ایلدیکندن $\text{ب}^{٢}\text{ج}$ حدینك امثالی‌ده حاصل توسیعده ٣ والی آخره بومنوال اوزره بولنور . بوحالده حاصل توسیعك حدلرندن هربرینك امثالی عائد اولدیغی ترکیبك قاچ دفعه ظهور ایده‌بیله‌جکنی ارائه ایدرکه بوده اکثریا اوضاع جدولنك تشکیلنده مشکلات وصعوبت کورلدیکی زمان پك زیاده فائده‌بخشدر .

ایمدی جدول سابقده کوریله‌جکی اوزره حاصل توسیعك امثاللری مجموعی :

١ + ٣ + ٣ + ١ + ٣ + ٦ + ٣ + ٣ + ٣ + = ٢٧

ویا تعبیر آخرله ب ج د بوزاقلرندن اوچ دفعه‌ده تشکیل اولنه‌بیلن اوضاعك عددی ٢٧ اولدیغندن هربر وضعده منفرداً ظهوری احتمالی $\frac{١}{٢٧}$ اوله‌جغی کبی ب حرفنك ایکی کره و ج حرفنك برکره داخل اولدیغی اوضاعك — حروفاتك صره‌لری نظر اعتباره آلنمدیغی حالده — ظهوری احتمالی $\frac{٣}{٢٧}$ و ب ، ج ، د حرفلرندن مرکب

بوضعملك ، ينه صىرهلرينه دقت ايدلمديكى صورتده ، ظهورى حالى‌ده $\frac{٦}{٢٧}$ والاآخره اولديغى يكنظرده ظاهر اولور .

١٥ وقعهٔ بسيطه ، وقعهٔ مركبه — برآنده ويا متواليا ظهورى مشروط اولان وقايعدن مركب برهيئته « وقعه مركبه » وبو مثللو بروقعهٔ مركبه‌يى تشكيل ايدن وقايعك هر برينه بالمقابله « وقعهٔ بسيطه » تعبير اولنور .

ايشته ب ، ح ، ق كبى اوچ مختلف يوازلى حاوى برقوطيدن ايكى دفعه چكلمك اوزره (١) نومرولو جدولده محرر طقوز عدد وقعهٔ مركبه تحصل ايدركه وقايع مذكوره‌يى تشكيل ايدن وقايع بسيطه‌نك صرهسنه باقلمديغى تقديرده بروجه آتى صنفه تفريق اولنه‌بيلور :

ببب ، حب ، قب ، قح ، حح ، قق

بح بق حق

ينيله اوچ دفعه چكلمث اوزره مذكور قوطيدن يكرمى‌بر عدد وقعهٔ مذكوره‌نك ظهورى ممكندركه بونلرده كنديلرينى تشكيل ايدر وقايع بسيطه‌نك صرهلرى نظر اعتباره آلنديغى صورتده آتيده‌كى اوننبر صنفده جمع اولنه‌بيلور :

ببب ببح ببق بحح بحق ققق ححق بقق حقق ححح

بحب بقب حبح بقح قبق ققح قبق قحق

حبب بقب بحح بحق بقق قحح بقق حقق

حبق

قبح

قحب

ققب

١٦ — بو آنه قدر بیان اولنان موادّدن مستبان اولورکه بَ ایله افاده اولنان بر وقعه‌نك بر دفعه‌ده ظهورینه مساعد حالاتك ب ، و حَ ایله کوستریلن دیکر بر وقعه‌نك ینه بر دفعه‌ده ظهورینه مساعد حالاتك عددی‌ده ح ایله ارائه ایدلدیکنه کوره $(\text{ب} + \text{ح})^{\text{م}}$ افاده‌سی بَ ایله حَ وقعه‌لرندن تشکل ایدن بالجمله وقایع مرکبه‌نك ظهورینه مساعد حالاتك عددینی ارائه ایتدیکی کبی حاصل توسیعی‌ده هر صنف وقعهٔ مرکبه‌نك ظهورینه مساعد حالاتك عددینی اعطا ایدر .

شویله که :

$$(\text{ب} + \text{ح})^{\text{م}} = \text{ب}^{\text{م}} + \frac{\text{م}}{1}\,\text{ب}^{\text{م}-1}\,\text{ح} + \frac{\text{م}(\text{م}-1)}{1\times 2}\,\text{ب}^{\text{م}-2}\,\text{ح}^{2} \cdots\cdots + \text{م}\,\text{ب}\,\text{ح}^{\text{م}-1} + \text{ح}^{\text{م}} \cdots\cdots (1)$$

حاصل توسیعنده $\text{ب}^{\text{م}}$ حد اولی م دفعه ب وقعهٔ بسیطه‌سنك بربری ازدی صره ظهورینه مساعد حالاتی و $\text{م}\,\text{ب}^{\text{م}-1}\,\text{ح}$ حد ثانیسی ینه م دفعه‌ده (م — ١) کره بَ وبر کره (حَ) وقعه‌سنك ظهورینه مساعد حالاتك عددینی والا آخره ارائه ایدر .

بو حالده حدود مذکوره‌دن هر بری ، حالات مختلفه‌نك مجموع عددی ایله یعنی $(\text{ب} + \text{ح})^{\text{م}}$ افاده‌سیله تقسیم ایدیله‌جك اولورایسه هر صنف وقعهٔ مرکبه‌نك ظهوری احتمالی استحصال ایدلمش اولور مع مافیه حل مسئله ایچون حاصل توسیعك حد عمومیسنی نظر مطالعه‌یه آلمق کفایت ایدرکه اوده شوندن عبارتدر .

$$\frac{م(م-١)\cdots\cdots(م-ن+١)}{١\times٢\times\cdots\cdots\times ن}\; ب^{ن}\, ح^{م-ن} \cdots\cdots\cdots (٣)$$

مسئله : ١ — یازیمی طغرامی اویونده سکز دفعه‌ده بش کره یازی وبنارین اوچ کره طغرا کلمسی احتمالنک تعیینی مطلوبدر ؟

بو مسئله‌ده عین صنفدن اولان ب ب ب ب ب ح ح ح ، ب ب ب ب ح ب ح ح ، ب ب ب ح ح ب ب ح ...... وقایع مرکبه‌سندن لا علی التعیین برینک احتمالی مطلوب اولدیغندن آرانیلان احتمال‌ده صنف مذکوره عائد احتماللردن عبارت اولور .

ایمدی (٣) دستورنده م = ٨ ، ن = ٥ اولمغله حد عمومی .

$$\frac{٨\times٧\times٦\times٥\times٤}{١\times٢\times٣\times٤\times٥}\; ب^{٥}\, ح^{٣} = ٥٦\, ب^{٥}\, ح^{٣}$$

بولنور .

هر دفعه‌سنده یازی گلمسنه مساعد حالاتک عددی ١ اولدیغی کبی طغرا ظهورینه مساعد حالاتک عددی ده ١ اولدیغندن وتعبیر آخرله ب = ١ ، ح = ١ بولندیغندن بش کره یازی اوچ کره طغرا ظهورینه مساعد بولنان حالاتک عددی :

$$٥٦\, ب^{٥}\, ح^{٣} = ٥٦$$

اولمق لازمگلور . فقط مسئله‌یه عائد بالجمله وقایع مرکبه‌نک ظهورینه مساعد مجموع حالات ممکنه (١) دستورینه توفیقاً $(ب + ح)^{٨} = (١ + ١)^{٨} = ٢٥٦$

اوله‌جغندن مطلوب اولان احتمال‌ده $\frac{٥٦}{٢٥٦}$ اولمش اولور .

مسئله : ٢ — یازیمی طغرامی اویونده سکز دفعه‌ده بر برینه

آردی صره سکز کده طغرا کتیرمك احتمالی تعیین ایلمك مطلوبدر ؟

بو مسئله‌ده $ح^{٠}$ وقعۀ بسیطه‌سی داخل اولمدیغندن ن = ٠ و م = ٨ اولمغله $ب^{٨}$ وقعۀ مرکبه‌سنك ظهورینه مساعد حالاتك عددی :

$$ب^{٨}\,ح^{٠}\,\frac{١\times٢\times٣\times٤\times٥\times٦\times٧\times٨}{٨\times٧\times٦\times٥\times٤\times٣\times٢\times١} = ١$$

اولور . بو مقدار ، مجموع حالات ممکنه عددیله $(ب + ح)^{٨} = ٢^{٨} = ٢٥٦$ عددینه تقسیم اولندقده مطلوب اولان $\frac{١}{٢٥٦}$ احتمالی استخراج اولنورکه بو ده سکز دفعه بربری آردی صره طغرا کلمسی ایچون ایکیوز اللی آلتیده انجق بر امید موجودی اولدیغنی افاده ایدر .

مسئله ٣ — بر زارك درت دفعه آتیشنده برکره شش کلمسی احتمالی تعیین ایلمك مطلوبدر . ؟

بو مسئله‌ده هر آتیشده شش کلمك امیدی آلتیده بر و کلمامك امیدی ایسه آلتیده بش اولدیغندن ب = ١ ، ح = ٥ و م = ٤ اولور .

فقط مسئلۀ مذکوره‌یی حل ایتمك ایچون یالکز ب حرفنك برنجی قوتی حاوی اولان $م\,ب\,ح^{م-١}$ حدینی دکل بالعکس برنجیدن دردنجی قوتنه وارنجه‌یه قدر قوتلرینی حاوی اولان حدلری نظر مطالعه‌یه آلمق اقتضا ایدر . چونکه مثلا زارك درت دفعه آتیشنده یالکز برکره شش تصادف ایتمسی مطلوبه توافق ایتدیکی کبی ایکی اوچ و حتی درت کره ظهور ایلمسنك‌ده مقصودی مع زیاده حاصل ایده‌جکی شبهه‌سزدر . بناءً علیه مسئله‌یه توافق ایدن احتمالی تعیین ایچون بر وجه آتی :

$$\text{ب}^{٣} + ٣\,\text{ب}^{٣}\,\text{ج} + ٦\,\text{ب}^{٢}\,\text{ج}^{٢} + ٤\,\text{ب}\,\text{ج}^{٣}$$

حدلری مجموعنی حساب ایلمك لازمدر . ایمدی بوافادهده ب ، ج کمیتلرینك یوقاریکی قیمتلری محللرینه وضع اولندقده ١ + ٢ × ٥ + ٦ × ٢٥ + ٤ × ١٢٥ = ٦٧١

عددی بولنورکه بوده زارك درت دفعه آتیلمسنده برکره شش کلمسنه مساعد اولان حالاتك عددندن عبارت اولور . حالبوکه بومطلوبك حصولنه مساعد وغیر مساعد بولنان حالاتك مجموعی :

$$(\text{١} + \text{٥})^{٤} = \text{٦}^{٤} = \text{١٢٩٦}$$

اولمغله ارانیلان احتمالده $\frac{٦٧١}{١٢٩٦}$ اولمق لازمکلورکه بوده $\frac{١}{٢}$ دن جزئی فضله‌در .

— اکر زارك درت دفعه آتیلشنده بردن نه زیاده ونه‌ده نقصان کتیرمامك ، احتمالی صوریلمش اولسه ایدی ، حاصل توسیعك یالکز برکره شش کلمسنه مساعد اولان حالاتی افاده ایدن حدینی ویا تعبیر دیکرله م ب ج$^{م-١}$ حدینی حساب ایلمك کفایت ایدرایدی .

فی‌الحقیقه بوحالده م ب ج$^{م-١}$ = ٤ × ١ × ٥^{٣} = ٥٠٠

مقداری‌اعطا ایده‌جکی جهتله احتمال مطلوب $\frac{٥٠٠}{١٢٩٦}$ دن عبارت اولور ایدی .

١٧ . — ایکی‌دن‌زیاده‌وقعه‌نك‌احتمالاتی تعیین ایتمك‌لازم کلدیکی حالده وقایع مذکوره‌دن هربرینك ظهورینه مساعد حالاتك عددی متناظراً ب ، ج ، د ، . . . ایله افاده وتکرر ایدن تجربه‌نك عددیده م ایله ارائه ایدلدیکنه کوره :

(ب + ج + د + ى ......)^م قوتنك حاصل توسيعنده‌كى حد عموميه مراجعت اولنورکه حد عمومئ مذکورده ن + هـ + ل + ى ...... = م

اولمق اوزره :

$$\frac{م(م-١)(م-٢)\ldots\ldots}{(١\times٢\ldots ن)(١\times٢\ldots هـ)(١\times٢\ldots ل)\ldots} \; ب^{ن}\, ج^{هـ}\, د^{ل}\, ى \ldots\ldots \quad (٣)$$

دن عبارتدر .

٦٨ احتمال مطلق ، احتمال نسبى — بر عدد معين دفعه تکرر ایدن تجربه‌ده ظهوره کلان وقایع مرکبه‌نك یکدیکرینه نسبةً احتمالاتی بر بریله مقایسه ایدیله‌جك اولور ایسه کوریلورکه وقایع مذکوره میاننده اك زیاده احتمالی حائز اولان وقعهٔ مرکبه ، وقایع بسیطه‌سی عددلری بیننده‌کی نسبت ، هر برینك ظهورینه مساعد اولان حالاتك عددلری بیننده‌کی نسبته مساوی بولناندر .

فی الحقیقه ب ، ج ، د وقایع بسیطه‌سندن هر بری بر دفعه اجرا اولنان بر تجربه‌ده عین احتمالی حائز اولدیغی حالده اوچ دفعه بر بری آردی صره اجرا ایدیله‌جك تجربه‌ده وقایع مذکوره (٣) نومرولی جدولده مرقم یکرمی یدی عدد وقایع مرکبه‌نك ظهورینه سبیت ویرر ایسه‌ده بو یکرمی یدی وقعهٔ مرکبه میاننده یالکز :

١	عددى	اوچ کره	ب	دن			
١	»	»	ج	»			
١	»	»	د	»			
٣	»	ايكى	»	ب	» ،	بر کره ج	دن
٣	»	»	»	»	»	» د	»

٣٠	»	»	»	ح	» ،	»	ب	»
٣٠	»	»	»	ح	» ،	»	ى	»
٣٠	»	»	»	ى	» ،	»	ب	»
٣٠	»	»	»	ى	» ،	»	ح	»
٣٠	»	»	»	ى	» ،	»	ح	»
٦	»	»	بر	ب	» ،	»	ح	» بر کره بو دتی

ترکب ایدر .

بو تقدیرجه ب ، ح ، ى وقایع بسیطه‌سنك اوچ دفعه حصوله کتوردیکی وقایع مرکبه میاننده دیکرلرینه نسبةً احتمالی الك زیاده اولان مذکور ب ، ح ، ى وقعه‌لرینی بر بر کره حاوی بولنان نهایتکی وقعهٔ مرکبه‌دن عبارت اولمق اقتضا ایدرکه بولکده وقایع بسیطه‌سی عددی ، هر برینك بردفعه‌ده ظهوری احتمالده مساعد اولان حالاتك عددینه مساویدر .

بو دعوای مهمه‌یی ایضاح واثبات ایچون بَ ، حَ کبی ایکی وقعهٔ بسیطه تصور ایده‌لم وبو وقعهٔ بسیطه‌لردن هر برینك ظهورینه مساعد حالاتك عددینی ب ، ح ایله افاده ایده‌لم . بو حالده [فقره: ١٦] موجبنجه م دفعه اجرا اولنان بر تجربه‌ده بَ وقعه‌سنی (م — ن) کره و حَ وقعه‌سنی‌ده ن کره حاوی اولان بر وقعهٔ مرکبه نك ظهورینه مساعد اولان حالاتك عددی :

$$\frac{م\,(م-٢)\,(م-٣)\cdots\cdots(م-ن+١)}{١\times٢\times٣\times\cdots\cdots-\cdots\cdots\times ن}\; ب^{م-ن}\times ح^{ن}$$

اولور .

ایمدی بَ ، حَ وقعه‌لرندن هر بریلك ظهورینه مساعد اولان

حالات یکدیکرینه مساوی اعتبار ایدیلور ویا تعبیر دیکرله $ب = ح$ اولدیغی قبول ایدیلور ایسه افادهٔ سابقه :

$$\frac{م(م-١)(م-٢)\cdots\cdots(م-ه+١)}{١\times٢\times٣\times\cdots\cdots\times ه}\ ب^{م}$$

اوله‌جغی کبی حاصل توسیعك حدلرینك کافه‌سنده $ب^{م-ه}\ ح^{ه} = ب^{م}$ مضروبی مشترك بوله‌جغندن حدود مذکوره‌نك قیمتلری ده مختصراً امثاللرینك قیمتلرینه تابع بولنور . بو حالده امثالی قیمتجه اعظمی اولان حده توافق ایدن وقعهٔ مرکبه‌نك ظهورینه مساعد اولان حالاتك عددی ، یکدیکرلرندن اعظم اولمق لازمکلور .

حالبوکه (نیوتون) دستورینك مناقشه‌سندن معلوم اولدیغی (ب + ح) ذو حدینك

$$(ب + ح)^{٢} = ب^{٢} + ٢ ب ح + ح^{٢}$$

$$(ب + ح)^{٣} = ب^{٣} + ٣ ب^{٢} ح + ٣ ب ح^{٢} + ح^{٣}$$

$$(ب + ح)^{٤} = ب^{٤} + ٤ ب^{٣} ح + ٦ ب^{٢} ح^{٢} + ٤ ب ح^{٣} + ح^{٤}$$

$$(ب + ح)^{٥} = ب^{٥} + ٥ ب^{٤} ح + ١٠ ب^{٣} ح^{٢} + ١٠ ب^{٢} ح^{٣} + ٥ ب ح^{٤} + ح^{٥}$$

الخ = الی

قوای متزایده‌سنك امثاللرینك تدقیقیله‌ده ظاهر اوله‌جغی وجهله ذو حدینك ذوج قوتلرینك حاصل توسیعنده وسطده بولنان حدك امثالی دیکرلرینك امثالندن اعظم وفرد قوتلرینك حاصل توسیعنده ینه وسطده بولنان ایکی حدك یکدیکرینه مساوی بولنان امثاللری سائرلرنده اعظم بولندیغندن بالطبع بو حدلرك عائد اولدقلری وقایع

مركبه‌نك احتماللری ده دیكر حدلرك توافق ایتدیكی وقایع مركبه‌نك احتماللرندن اعظم اولمق ایجاب ایدر .

بودعوایی ایضاح ایچون یازیمی ؟ طغرامی ؟ اویوننه تطبیق ایده‌لم . معلومدركه بو اویونده ب وقعه‌سی مثلا طغرا ظهور ایتمسی و ج وقعه‌سی ده یازی كلمسی دیمك اولدیغندن ب ، ج مقدارلری تغییر آخرله بونلردن هربرینك ظهورینه مساعد اولان حالات یكدیكرینه قطعیاً مساویدر . ایشته الده طوتیلان برغروش ، ایكی دفعه آتیلدیغی حالده ظهوری طبیعی اولان ب ب = $ب^{۲}$ ، ب ج ویا ج ب ، ج ج = $ج^{۲}$ كبی اوج وقعهٔ مركبه‌دن احتمالی الك زیاده بولنان ($ب + ج$)^{۲} ذوحدینك حاصل توسیعنده حد متوسطی تشكیل ایدن ۲ ب ج حدینك دلالت ایلدیكی وقعهٔ مركبه‌دركه بوده بركره یازی وبركره‌ده طغرا كلمه‌سندن عبارتدر .

الده طوتیلان غروش ، اوچ دفعه آتیلدیغی حالده ظهور ایده‌جك وقایع مركبه‌دن احتمالی الك زیاده اولانیده ، ۳ $ب^{۲}$ ج ویا ۳ ب $ج^{۲}$ حدلرینك توافق ایتدیكی وقایع مركبه اولوركه بونلرده ایكی كره طغرا بركره یازی ویاخود ایكی كره یازی بركره طغرا كلمه‌سندن بشقه برشی دكلدر .

غروش اوچ دفعه آتیلدیغی حالده ظهور ایده‌جك وقایع مركبه میاننده احتمالی اعظم اولانی‌ده ۶ $ب^{۲}$ $ج^{۲}$ حدینك دلالت ایتدیكی وقعهٔ مركبه‌دركه اوده ایكی كره طغرا ایكی كره‌ده یازی ظهور ایلمه‌سیدر .

۱۹ — عدد تجربه ویا تکرر تزاید ایتدکجه حالات بسیطه‌لری عدتجه وقایع بسیطه‌دن ترکب ایدن وقعهٔ مرکبه‌نك احتمالی‌ده بالنسبه دیکر وقایع مرکبه احتماللندن دائما زیاده اولور ایسه‌ده وقعهٔ مذکوره احتمال مطلق تناقص ایدر .

شویله‌که : عدد تجربه مناسب صورتله تزیید ایدیله‌جك اولور ایسه وقعهٔ مرکبهٔ مذکوره‌نك احتمال مطلقی‌ده استدلدیکی مرتبه تنقیص ایدلمش بولنور .

مثلا یازیمی طغرامی اویونده درت دفعه‌ده ایکی کره طغرا ایکی کره ده یازی کتیرمکدن عبارت اولان بر وقعهٔ مرکبه‌نك ظهورینه مساعد اولان حالاتك عددی ٦ اولدیغندن احتمال مطلقی $\frac{٦}{(١+١)^{٤}} = \frac{٦}{١٦}$ و آلتی دفعه‌ده اوچ کره یازی اوچ کره طغرا کیترمکدن عبارت بولنان

وقعهٔ مرکبه‌نك ظهورینه مساعد حالاتك عددی ٢٠ اولدیغی جهتله احتمال مطلقی‌ده $\frac{٢٠}{(١+١)^{٦}} = \frac{٢٠}{٦٤}$ وسکز دفعه‌ده درت کره طغرا ، درت کره یازی کلمسنه مساعد حالاتك عددی ٧٠ اولدیغی اجلدن احتمال مطلقی‌ده $\frac{٧٠}{(١+١)^{٨}} = \frac{٧٠}{٢٥٦}$ اولور .

ایشته بو مثاللردن اکلاشیله‌جغی وجهله احتمال نسبیلری اعظمی اولان وقایع مرکبه‌نك ظهورینه مساعد حالاتك عددی تزاید ایتدکجه احتمال مطلقلری بالعکس تناقص ایدر .

مع مافیه احتمال مطلقك بو تناقصی عدد تجربه‌نك تکثرینه مبنی وقایع مرکبه‌نك تزایدندن نشأت ایدر . بناء علیه وقایع مرکبه‌دن یالکز برصنفی نظر مطالعه‌یه آلندیغی حالده احتمال مطلقك تناقصنه تعجب اولنماملیدر . چونکه مثلا یوز دفعه‌ده اللی کره طغرا ، اللی کره

یازی گتیرمك دیمك ، ظهوری ممکن اولان ۱۰۱ وقعهٔ مرکبه میانده یالکز برینك حصولنه انتظار ایلمك دیمکدر . واقعا باقی یوز وقعهٔ مرکبه‌نك هر بری آیری آیری نظر اعتباره آلندیغی تقدیرده بوندن دها آز بر احتمالی حائز اولدیغی کوریلور ایسه‌ده هیئت مجموعه‌سی ، اللی کره طغرا ؛ اللی کره یازی ظهورینه مساعد اولان حالاتدن قات قات زیاده بر احتمال مخالف تشکیل ایدر .

احتمال نسبیسی اعظمی اولمیان وقوعات مرکبه‌یه کلینجه بونلرده احتمال مطلق دها سرعتله تناقص ایدر .

مثلا اوچ آتشده ایکی کره یازی بر کره طغرا کلسنه مساعد حالاتك عددی ۳ ایکن احتمال مطلق $\frac{٣}{٨}$ وطقوز دفعه‌ده درت کره یازی ایکی کره طغرا کلسنه مساعد حالاتك عددی ۹۵ وحالبوکه احتمال مطلق $\frac{٩٥}{٦٤}$ والحاصل طقوز دفعه‌ده آلتی کره یازی اوچ کره طغرا ظهور ایتمسنه مساعد حالاتك عددی ۸٤ احتمال مطلق ایسه $\frac{٨٤}{٥١٢}$ بولنور .

علی العموم بر اویونده بر وقعهٔ مرکبه‌ده یازینك عدد تکرری طغرانك عدد تکررندن نه قدر بیوك اولور ایسه وقعهٔ مذکوره‌نك احتمال مطلقی‌ده او نسبتده سرعتله تناقص ایدر .

۲۰ — بورایه قدر بیان اولنان مواددن مستبان اوله‌جغی وجهله حساب احتمالینك قسم نظریسنده حالات ممکنه ایله انواعنك عددی محدود اولمسنه بناءً بو مثللو احتمالاتك کافه‌سی بر قوطیده موجود ومختلف رنکلر ایله ملون محدود مقدارده یوارلقلر ویا حرفلر

ایله اجرا ایدیله‌جك ترکیبات مختلفه‌یه ارجاع اولنه بیلور حتی بوکبی مسائلده قطعی برنتیجه ویره بیلن براصول وارایسه اوده وقایع بسیطه‌نك ترکیبات مختلفه‌سنی نظر اعتباره آله‌رق احتمالاتنی اکا کوره تعیین ایلمکدن عبارتدر .

فی‌الحقیقه ب ، ح مقدارلرینك (م) مره (م) مره تشکیل اولنان اوضاعی م دفعه‌ده ظهوری ممکن اوله‌بیلن وهر بری ایکی وقعهٔ بسیطه‌دن تشکل ایدن بالجمله وقایع مرکبه‌یی ارائه ایدر .

نته‌کم ب ، ح مقدارلرینك دردر دردر بروجه آتی تشکیل اولنان اون آلتی اوضاعی :

بببب   بببح   ببحب   بححح   حححح

ببحب   بحبح   حبحب

بحبب   بححب   ححبح

حببب   حبحب   حححب

حببح

ححبب

هر برینك احتمال مطلقی $\frac{1}{16}$ اولان ١٦ وقعهٔ مرکبه‌یی تصویر ایدر .

ایمدی بو اوضاعه عطف نظر دقت ایدیله‌جك اولور ایسه
کوریلورکه اوضاع مذکوره‌دن هر بری عین درجه احتمالی حائزدر.
مثلا درت دفعه صره سیله ب حرفنی حاوی اولان ب ب ب ب
وضعنك احتمالی $\frac{1}{16}$ اولدیغی کبی دیکر کافه‌سنك وفرضا اولا ایکی
کره ب وثانیاً ایکی کره ح حرفندن مرکب بولنان ب ب ح ح
وضعنك‌ده احتمالی $\frac{1}{16}$ دن عبارتدر . فقط بو صورتله هر وضعی
ترکیب ایدن حروفاتك صره‌سی نظر اعتباره آلنمیه‌جق اولور ایسه
لاعلی التعیین ایکی کره ب وایکی کره ح دن تشکل ایدن بر وقعهٔ
مرکبه‌نك آلتی وجهی اولدیغی کوریله جکندن احتمالی مطلقك‌ده $\frac{6}{16}$
اولدیغنه حکم اولنور . بوندن اکلاشیلورکه یالکز وقایع بسیطه‌نك
صره‌سی اعتباریله یکدیکرندن مختلف بولنان وقایع مرکبه بر صنف
عد ایدلدیکی صورتده عین صنفدن اولان بر وقعه‌نك ظهوری
احتمالی دیکرلرینك منفرداً ویا مجتمعاً موجود اولان احتمالاتیله مقایسه
اولنه‌بیلور . ایشته بو سایه‌ده درکه لاعلی التعیین ایکی کره ب ایله
ایکی کره ح وقعه‌سندن تشکل ایدن بر وقعهٔ مرکبه‌نك ظهوری
احتمالنك اوچ کره ب وبر کره ح وقعه‌سندن ترکب ایدن وقعهٔ
مرکبه‌نك ظهوری احتماله نسبتی ٦ عددینك ٤ عددینه نسبتنه
مساوی اولدیغی بولنمش وعینیله بو احتمالك ایکی کره ب وایکی
کره ح وقعه‌سندن متشکل وقعهٔ مرکبه‌نك احتماله نسبتی ٦ عددینك ١٠
عددینه نسبتنه معادل اولدیغی اکلاشله‌بیلنمیشدر .

وقایع مرکبه ب ، ح وقعه‌لرینی مجتمعاً ویا منفرداً محتوی
بولندیغنه کوره ایکی صنف اعتبار ایدیله‌جك اولور ایسه بو ایکی صنف

وقعه‌نك احتماللرى نظيره $\frac{١٤}{١٦}$ ، $\frac{٢}{١٦}$ اوله‌جغى شبهه سزدر .
بوحالده برنجى صنف وقايع مركبه‌نك ديكرينه نسبةً ظهورى احتمالى :

$$\frac{١٤}{١٦} \div \frac{٢}{١٦} = \frac{١٤}{٢} = ٧$$

وحال بوكه ايكنجى صنف وقايع مركبه‌نك برنجيسنه نظراً ظهورى احتمالى ده :

$$\frac{٢}{١٦} \div \frac{١٤}{١٦} = \frac{٢}{١٤} = \frac{١}{٧}$$

اوله‌جغندن شو ايكى صنف وقايعدن برنجيسنك ظهورى ديكرينه نسبتله يدى دفعه دها زياده محتمل اولمق اقتضا ايدر .

مع‌ماقيه بونتيجه عدد تجربه‌نك درت اولديغنه كوره اولوب تجربه‌نك عددى تزييد ايدلديكى حالده ايكى صنف وقايع مركبه‌نك احتماللرى بيننده‌كى نسبتده سرعتله تزايد ايدر .

فى الحقيقه عدد تجربه بش اولديغنه كوره ايكنجى صنف وقايع مركبه‌سنك احتمالى $\frac{٢}{٣٢}$ وحال بوكه برنجى صنف وقايع مركبه‌سنك احتمالى $\frac{٣٠}{٣٢}$ اوله‌جغندن بونلرك بيننده‌كى نسبتده $\frac{٣٠}{٣٢} \div \frac{٢}{٣٢} = ١٥$ اولور .

خلاصه تجربه تکثیر ایدلدکجه برنجی صنف وقایعندن برینك احتماليله ایکنجی صنفی تشکیل ایدن وقایعدن برینك احتمالی بینده‌کی نسبت بروجه آتی تزاید ایدر .

احتماللر بینده‌کی نسبت	عدد تجربه
١ : ٧	٤
١ : ١٥	٥
١ : ٣١	٦
١ : ٦٣	٧
١ : ١٢٧	٨
١ : ٢٥٥	٩
١ : ٥١١	١٠

ایشته بوجدولدن اکلاشیله‌جغی وجهله برنجی صنف وقایع مرکبه‌سنك احتمالی ایکنجی صنف وقایع مرکبه‌سنك احتماله نظراً لاینقطع تزاید ایده‌جکندن عدد تجربه‌یی ممکن مرتبه تزیید ایدرك برنجی صنف وقایع مرکبه‌سنك احتمالی، استنلدیکی مرتبه . قطعیت ریاضیه درجه‌سنه تقریب ایتمك ممکن اولور .

٢١ تکثیر تجارب قانونی . — خلاصه: علی العموم، «مثللو ایکی وقعهٔ بسیطه‌نك مجتمعاً بولندقلری وقایع مرکبه‌ء برنجی صنف » و منفرداً داخل اولدقلری وقایع مرکبه‌ده « ایکنجی صنف » اعتبار ایدلدیکنه کوره:

$$(\text{ب}+\text{ح})^{\text{م}} = \text{ب}^{\text{م}} + \frac{\text{م}}{١}\,\text{ب}^{\text{م}-١}\,\text{ح} + \frac{\text{م}(\text{م}-١)}{١\times٢}\,\text{ب}^{\text{م}-٢}\,\text{ح}^{٢} + \cdots\cdots$$

$$+ \frac{\text{م}(\text{م}-١)(\text{م}-٢)\cdots\cdots(\text{م}-\text{ه}+١)}{١.٢.٣.\cdots\cdots\cdots\text{ه}}\,\text{ب}^{\text{م}-\text{ه}}\,\text{ح}^{\text{ه}} + \cdots + \frac{\text{م}}{١}\,\text{ب}\,\text{ح}^{\text{م}-١} + \text{ح}^{\text{م}}$$

حاصل توسیعنك اولکی و نهایتکی حدلرینك امثاللری مجموعی، ایکنجی صنف وقایع مرکبه‌سنك ظهورینه مساعد حالات ممکنه عددینی، ارائه ایتدیکی کبی حدود سائره سنك امثاللری مجموعی‌ده برنجی صنف وقایع مرکبه‌سنك حصولنه مساعد حالات ممکنه‌نك عددینی اعطا ایدر .

عدد تجربه نه قدر تزاید ایدرایسه ایتسون ویا تعبیر آخرله $(\text{ب}+\text{ح})^{\text{م}}$ ذوحدینك قوتی نه درجه بیوك اولور ایسه اولسون حاصل توسعده ایکنجی صنف وقایع مرکبه‌سنه عائد حدلرك عددی دائما ٢ در .

حالبوکه برنجی صنف وقایع مرکبه‌سنك ظهورینه مساعد حالاتی افاده ایدن حدلرك عددی، م — ١ مقدارینه یعنی عدد تجربه‌نك بر نقصانه مساوی بولنور .

بناءً علی ذلك تجاربی تکثیر ایدرك برنجی صنف وقایع مرکبه‌سنك احتمال مطلقی ، استنادیکی مرتبه ، تزیید ایتمك وقطعیت ریاضیه درجه‌سنه تقریب ایلمك ممکن اولور .

ایشته بوکبی بعض مطالعات سوقیله درکه حساب احتمالینك مؤسسلرندن (ژاق — برنوللی) دعوای آتیه‌یی استخراجه موفق اولمشدر .

« بر وقعهٔ مرکبه‌نك عددتکررییله عدد تجارب بینده‌کی نسبت وقعهٔ مذکوره‌نك احتمال بسیطنه مساوی اوله‌جق صورتده تجاربك عددی تزیید ایدیله‌جك اولور ایسه وقعهٔ مرکبه‌نك احتمال مرکبی‌ده درجهٔ نهایه‌ده قطعیت ریاضیه مرتبه‌سنه تقریب ایدلمش اولور . »

۲۲ قسم ثانی : احتمال تجربی . — بورایه قدر بسط وبیان اولنان ماده‌لرده بر وقعه‌نك کرك بسیط اولسون وکرك مرکب بولنسون ، ظهورینه مساعد وغیر مساعد حالاتك عددی معلوم فرض ایدیله‌رك وقایع مذکوره‌نك اکا کوره ظهوری احتمالی تحری ایدلمش وبو احتمال ذوحدین ویادها طوغریسی ترکیبات دستورلری اعانه‌سیله نظری اوله‌رق حساب اولنمشدر .

فقط احتمالی تعیین ایدیله‌جك وقعه‌نك ظهورینه مساعد وغیر مساعد اولان حالاتك عددی مجهول اولدیغی تقدیرده وقعهٔ مذکوره‌نك آتیاً ظهوری احتمالی قواعد سالفه‌یه توفیقاً بولنه‌میه جیغندن بونك نه صورتله حساب ایدیله‌جکنك بیانی لازمه‌دن کورلمش اولمغله بوبابده اساس اولمق اوزره (قوندورسه) نك آتی الذکر مسئله‌سنك حلی مناسب عد ایدلمشدر .

« برقاچی سیاه ومتباقیسی بیاض اولمق اوزره جمعاً درت یوارلقی حاوی اولان برقوطیدن درت دفعه متوالیاً چکشده اوچ دفعه بیاض یوارلق وبردفعه‌ده سیاه یوارلق چیقدیغی وهردفعه چکیلان یوارلق ینه قوطی درونه قونلدقدن صکره تکرار چکلدیکی معلوم اولسه ، عجبا بشنجی دفعه چکشده بیاض یوارلق چیقارمق احتمالی نه‌دن عبارت اولور ؟ »

درونده‌کی درت یوارلقدن قاچی بیاض وقاچی سیاه اولدیغی معلوم اولمیان بوقوطینك محتویاتی بهمه حال بروجه آتی فرضیات ثلثه‌دن برینه توافق ایدر .

شویله‌که مذکور قوطی درونده :

یا	٣	بیاض یوارلق	١	سیاه یوارلق	(١)
ویا	٢	»	٢	»	(٢)
ویاخود	١	»	٣	»	(٣)

موجوددر .

ایمدی بیاض یوارلغك عددی ب وسیاه یوارلغك عددی ح ایله افاده ایدیله‌جك اولور ایسه درت دفعه‌ده اوچ کره بیاض وبرکره سیاه یوارلق چیقمسنه مساعد اولان حالاتك عددی [ماده :] ه توفیقاً

$$(\text{ب} + \text{ح})^{4} = \text{ب}^{4} + 4\,\text{ب}^{3}\,\text{ح} + 6\,\text{ب}^{2}\,\text{ح}^{2} + 4\,\text{ب}\,\text{ح}^{3} + \text{ح}^{4}$$

حاصل توسیعنك ایکنجی حدی اولان

$$4\,\text{ب}^{3}\,\text{ح}$$

ایله افاده اولندیغندن ، یوقاریکی فرضیه‌یه کوره ب ، ح مقدارلرینك قیمتلری صره‌سیله بوراده محللرینه وضع اولندقده وقعهٔ مرکبهٔ مذکوره‌نك ظهورینه مساعد اولان حالاتك عددی هراوچ فرضیه‌یه نظراً :

١٠٨ ، ٦٢ ، ١٣

دن عبارت بولنور .

طبیعیدرکه فرضیات ثلثه‌دن هانکیسنك وقعهٔ مرکبهٔ مذکوره‌نك ظهورینه مساعد اولان حالاتی زیاده ایسه اوفرضیه‌نك احتمالی‌ده دیکرلرینه غالب اولور ایشته فرضیات ثلثه‌ده وقعهٔ مرکبهٔ مذکوره‌نك ظهورینه مساعد اولان حالاتك عددی نظیر نظیره

١٠٨ ، ٦٢ ، ١٢

اولدیغی کبی هرفرضیه‌یه کوره وقعهٔ ساکنه‌نك ظهورینه مساعد و غیرمساعد حالات ممکنه‌نك عددی‌ده

$$١٠٨ + ٦٤ + ١٢ = ١٨٤$$

اوله‌جغندن فرضیات ثلثه‌نك احتماللری صره‌سیله :

$\frac{١٠٨}{١٨٤}$ ، $\frac{٦٤}{١٨٤}$ ، $\frac{١٢}{١٨٤}$ (١)

وياخود $\frac{٢٧}{٤٦}$ ، $\frac{١٦}{٤٦}$ ، $\frac{٣}{٤٦}$ اولور .

هادامکه بواوچ فرضیه وقعهٔ مرکبهٔ معلومه‌یه یعنی درت دفعه‌ده [صره‌یه رعایت ایدلمامك شرطیله] اوچ کره بیاض یوارلق وبرکره سیاه یوارلق چیقمسنه مساعد کافهٔ حالات ممکنه‌یی محتوی بولینور ، بهمه حال فرضیات مذکوره‌دن بری حقیقت حاله ویاتعبیر دیکرله قوطینك محتویاتنه مطابق اولور . بوحالده بوفرضیه‌نك احتمالی وقعهٔ معلومه‌نك احتمال موافقی اوله‌جغی جهتله دیکر ایکی فرضیه‌نك احتماللری‌ده مخالفی عد ایدلمك لازم کله‌جکندن هراوچنك احتماللری مجموعی [ماده :] موجبنجه واحده مساوی اولمق ایجاب ایدر .

فی‌الحقیقه فرضیات ثلثه‌نك احتماللری مجموعی .

$$\frac{٢٧}{٤٦} + \frac{١٦}{٤٦} + \frac{٣}{٤٦} = \frac{٤٦}{٤٦} = ١$$ بولنور .

اصل مسئله‌یه ویاتعبیر دیکرله بشنجی دفعه‌ده قوطیدن چکیله‌جك یوارلغك بیاض چیقمسی احتماله کلنجه ، بوده بروجه آتی حل واستخراج اولنور .

شویله‌که :

برنجی فرضیه‌نك حقیقت حاله تطابق ایتمسی احتمالی $\frac{27}{46}$ اولدیغی کبی فرضیهٔ مذکوره‌یه کوره قوطی درونده‌کی درت یوارلقدن اوچی بیاض وباقی بری سیاه اوله‌جغندن بردفعه‌ده بیاض یوارلق چیقاره بیلمك احتمالی‌ده $\frac{3}{4}$ اولور .

بناءً علیه قوطینك محتویاتی برنجی فرضیه‌یه موافق اولمسیله برابر بشنجی دفعه‌ده بیاض یوارلق کلمك‌دن عبارت اولان بروقعهٔ مرکبه‌نك احتمالی [ماده :] موجبنجه بووقعهٔ بسیطه‌لرك احتمال بسیطلری حاصل ضربنه مساوی اولمغله برنجی فرضیه‌یه کوره بشنجی دفعه‌ده بیاض یوارلق چکمك احتمالی

$$\frac{3}{4} \times \frac{27}{46} \qquad (٢)$$

اولور .

عینیله ایکی فرضیه‌نك حقیقت حاله توافقی احتمالی $\frac{16}{46}$ وبوفرضیه‌یه کوره قوطیده بولنمسی اقتضا ایدن ایکی بیاض وایکی سیاه یوارلقدن بردفعه‌ده بیاض یوارلق چکمك احتمال بسیطی $\frac{2}{4}$ اولدیغندن فرضیهٔ مذکوره‌یه نظراً بشنجی دفعه‌ده قوطیدن بیاض یوارلق چیقارلمسی احتمالی :

$$\frac{2}{4} \times \frac{16}{46}$$

والحاصل اوچنجی فرضیه‌یه کوره احتمالی‌ده :

$$\frac{1}{4} \times \frac{3}{46}$$

بولنور .

ایشته محتویاتنك قاچی سیاه وقاچی بیاض اولدیغی مجهول ویالكز درت یوارلغی حاوی بولندیغی معلوم اولان واولجه درت دفعه وقوعبولان چكشده اوچ كره بیاض وبركرده سیاه یوارلق چیقدیغی بالتجربه ثابت بولنان بومثللو برقوطیدن بشنجی دفعه‌ده بیاض یوارلق چكمك احتمالی ، بالطبع هراوچ فرضیه‌یه كوره استخراج ایدیلن احتماللر مجموعنه مساوی اوله‌جغندن احتمال مطلوب :

$$\frac{٢٧}{٤٦}\times\frac{٣}{٤}+\frac{١٦}{٤٦}\times\frac{٢}{٤}+\frac{٣}{٤٦}\times\frac{١}{٤}=\frac{١١٦}{١٨٤}\quad\ldots\ (٣)$$

اوله‌جغی كبی عین اصوله توفیقاً بشنجی دفعه‌ده سیاه یوارلق چیقمسی احتمالی تحری ایدیله‌جك اولسه ، انكده :

$$\frac{٢٧}{٤٦}\times\frac{١}{٤}+\frac{١٦}{٤٦}\times\frac{٢}{٤}+\frac{٣}{٤٦}\times\frac{٣}{٤}=\frac{٦٨}{١٨٤}$$

اولدیغی بولنور كه یكدیكرینه نظراً مخالف اولان شو ایكی احتمال مجموعی تماماً واحده مساویدر .

٢٣ احتمالی تجربی قوانین اساسیه‌سی . — مسئلهٔ مذكوره‌نك صورت حلندن بروجه آتی نتایج وقوانین عمومیه استخراج اولنور .

اولا : قبول اولنان فرضیاتك احتماللری ، فرضیات مذكوره‌نك هربرنده وقایع سالفه‌نك حصولنه مساعد اولان حالاتك عددیله متناسبدر . . . . . (١)

ثانیاً : قبول اولنان فرضیات مختلفه‌نك احتماللری ، فرضیات مذكوره‌نك هربرنده وقایع سالفه‌نك حصولنه مساعد اولان حالات عددینك ، بالجمله فرضیاتده وقایع مذكوره‌نك ظهورینه مساعد بولنان عدد حالات ممكنه‌یه تقسیمندن حاصل اولان خارج قسمته مساویدر ... (٢)

ثالثاً : بروقعه بسیطهٔ آتیه‌نك ظهوری احتمالی ، فرضیات مختلفه احتماللرینك نظیر نظیره فرضیات مذكوره‌نك هربرینه كوره وقعهٔ

بسیطه‌نك ظهوری احتمالیله حاصل ضربلری مجموعنه مساویدر . (٣)

٢٤ اسبابك تعریفی . — یوقاریكی مثالده ، فرضیه نامیله ذكر اولان شی ، كه قوطینك محتویاتنك تعیین ماهیتندن عبارتدر ؛ كرك وقایع سالفه وكرك وقایع آتیه‌نك ظهورینه سبب وعلت مستقل اولدیغی ویاتعبیر دیكرله قوطیدن بیاض وسیاه یوارلق چیقمق احتمالی محتویاتنك مقدار وجنسنه تابع بولندیغی جهتله حساب احتمالی تجربیده فرضیات مذكوره‌یه علی العموم « اسباب » نامی ویریلور .

ایشته حساب احتمالینك بوقسمنده وقایع سالفهٔ معلومه واسطه‌سیله كرك وقایع مذكوره‌نك حصولنی موجب اولان اسبابك وكرك ظهوری آتیاً مطلوب اولان بر وقعه‌نك احتمالاتی تعیین ایچون مادهٔ سابقه‌ده خلاصهٔ ذكر اولان قواعد اساسیه‌یه ابتناءً حساب اولنور .

٢٥ قواعد اساسیه‌نك تطبیقی . — مطالعات مسروده وقواعد سابقه‌یی خارجه تطبیق ایچون فرضیات ویاتعبیر صحیحیله اسبابك عددی نامتناهی فرض واعتبار اولنور . چونكه بر وقعه‌نك حصولی ایچون احتمالات ممكنه‌نك یعنی صفر ایله واحد ارەسنده محصور كسرلرك كافه‌سنك وجودی تصور ایدیله بیلور .

ایمدی م دفعه تكرر ایدن بر ب وقعهٔ بسیطه‌سیله ح دفعه تكرر ایدن دیكر بر ح وقعهٔ مخالفهٔ بسیطه‌سی تصور ایدیله‌جك اولور ایسه طبیعیدركه ب وقعه‌سنك س ایله افاده اولنان احتمالی س = ٠ قیمتندن س = ١ قیمتنه قدر منتظماً ومتوالیاً تحول ایلدیكی اثناده ح وقعهٔ مخالفه‌سنك سَ احتمالی‌ده ٥ بالضروره سَ = ١ قیمتندن باشلایه‌رق سَ = ٠ قیمتنه قدر منتظماً تحول ایدر ودائما سَ = ١ — س اولور .

بوتقدیرجه م دفعه ب وقعه‌سندن و ن دفعه‌ده ح وقعه‌سندن ترکب ایدن بروقعهٔ مرکبه‌نك احتمالی ، [ماده :] موجبنجه

$$\text{ط}\,\text{س}^{\text{م}} \times \text{ص}^{\text{ن}} = \text{ط}\,\text{س}^{\text{م}}\,(\text{١} - \text{س})^{\text{ن}}$$

اولمق اوزره لازم کلور . بومقدار بالجمله فرضیات ممکنه‌یه کوره بووقعهٔ مرکبهٔ مذکوره‌نك احتمالاتی مجموعنه ویاتعبیر آخرله :

$$\text{مج}_{\text{٠}}^{\text{١}}\,\text{ط}\,\text{س}^{\text{م}}\,(\text{١} - \text{س})^{\text{ن}}$$

مقدارینه تقسیم ایدیله‌جك اولور ایسه حاصل اولان :

$$\frac{\text{س}^{\text{م}}\,(\text{١} - \text{س})^{\text{ن}}}{\text{مج}_{\text{٠}}^{\text{١}}\,\text{س}^{\text{م}}\,(\text{١} - \text{س})^{\text{ن}}}$$

افاده‌سی ب وقعه‌سنه س وبناءً علیه ح وقعهٔ مخالفه‌سنه $\bar{\text{س}} = \text{١} - \text{س}$ احتمالی اعطا ایده‌جك اولان سببك احتمالندن عبارت اولور .

فقط عدد اسباب نامتناهی فرض ایدیلور وبوکا مقابل س مجهولنك ٠ ایله ١ آره‌سنده برصورت غیر منقطعه‌ده تحول ایتدیکی تصور اولنور ایسه ، افادهٔ سابقه‌یی ، صورت ومخرجنی تفا س ایله ضرب ایلدکدن صکره ،

$$\frac{\text{س}^{\text{م}}\,(\text{١} - \text{س})^{\text{ن}}\,\text{تفا}\,\text{س}}{\text{مجا}_{\text{٠}}^{\text{١}}\,\text{س}^{\text{م}}\,(\text{١} - \text{س})^{\text{ن}}\,\text{تفا}\,\text{س}} \quad \ldots\ldots \quad (\text{٤})$$

صورتنده ارائه ایلمك ممكن اولورکه بوده ب وقعهٔ بسیطه‌سنك ظهورینه س ایله س + تفا س آره‌سنده محصور براحتمال ویره‌بیله‌جك اولان سببك تأثیری احتمال اصغر نامتناهیسندن بشقه برشیء دکلدر .

وقایع مستقبله ویا آتیه‌نك احتماللری كلنجه : بونك ایچون ده ق وقعه‌سنه س احتماللی اعطا ایدن سببك تأثیری احتماللی ارائه ایدن (٤) افاده‌سنی س احتمالیله ضرب ایتمك وحاصل اولان

$$\frac{\text{س}^{\text{م}+١}\,(١-\text{س})^{\text{ن}}\,\text{ء‌اس}}{\text{تما}_{٠}^{١}\,\text{س}^{\text{م}}\,(١-\text{س})^{\text{ن}}\,\text{ء‌اس}}$$

مثللو مقداریرك مجموعنی ویاتعبیر اخرله صورتنك صفر ایله واحد اراسنده‌كی تمامی محدودینی آلمق كفایت ایدر .

ایشته بو صورتله بولنان :

$$\text{ق}=\frac{\text{تما}_{٠}^{١}\,\text{س}^{\text{م}+١}\,(١-\text{س})^{\text{ن}}\,\text{ء‌اس}}{\text{تما}_{٠}^{١}\,\text{س}^{\text{م}}\,(١-\text{س})^{\text{ن}}\,\text{ء‌اس}}\quad\ldots\ (٥)$$

افاده‌سی ب وقعه‌سنك آتیاً ظهوری احتمالنك دستور عمومیسندن عبارت اولور .

افادهٔ مذكوره‌یی اتمامك ایچون اولا

$$\text{تما}\ \text{س}^{\text{م}}\,(١-\text{س})^{\text{ن}}\,\text{ء‌اس}$$

تمامی غیر محدودینك ن دفعه متوالیاً اتمام بالتفریق اصولیله تمامیسی آلدقده :

$$\text{تما}\,\text{س}^{\text{م}}(١-\text{س})^{\text{ن}}\text{ء‌اس}=\frac{\text{س}^{\text{م}+١}(١-\text{س})^{\text{ن}}}{\text{م}+١}+\frac{\text{ن}}{\text{م}+١}\,\text{تما}\,\text{س}^{\text{م}+١}\,\text{ء‌اس}\,(١-\text{س})^{\text{ن}-١}$$

وعینله

$$\text{تما}\,\text{س}^{\text{م}+١}\text{ء‌اس}(١-\text{س})^{\text{ن}-١}=\frac{\text{س}^{\text{م}+٢}(١-\text{س})^{\text{ن}-١}}{\text{م}+٢}+\frac{\text{ن}-١}{\text{م}+٢}\,\text{تما}\,\text{س}^{\text{م}+٢}\,\text{ء‌اس}\,(١-\text{س})^{\text{ن}-٢}$$

$$\text{تماس}^{م+٢}\,(١-\text{س})^{ه-٢}\,\text{ماس}=\frac{\text{س}^{م+٣}(١-\text{س})^{ه-٢}}{م+٣}+\frac{ه-٢}{م+٣}\,\text{تماس}^{م+٣}\,\text{ماس}\,(١-\text{س})^{ه-٣}$$

. . . .

لخ   لخ   لخ

نهايتده (١ — س) مضروبى كاملاً افنا ايدلمش بولنه‌جغندن :

$$\text{تماس}^{م}(١-\text{س})^{ه}\,\text{ماس}=\frac{\text{س}^{م+١}(١-\text{س})^{ه}}{م+١}+\frac{ه\,\text{س}^{م+٢}(١-\text{س})^{ه-١}}{(م+١)\,(م+٢)}$$

$$+\frac{ه(ه-١)\,\text{س}^{م+٣}(١-\text{س})^{ه-٢}}{(م+١)\,(م+٢)\,(م+٣)}+\cdots\cdots$$

$$+\frac{ه(ه-١)(ه-٢)\cdots٣\times٢\times١\,\text{س}^{م+ه+١}}{(م+١)\,(م+٢)\cdots\cdots(م+ه+١)}+\text{ن}$$

اولور .

ن مقدار ثابته كلنجه آنكده قيمتى صفره مساويدر . چونكه ن وقعه‌سنك س احتمالى صفره مساوى فرض ايدلديكى تقديرده وقعهٔ مذكوره‌يى حاوى اولان وقايع مركبه‌نك كافه‌سنك احتماللرى صفر اوله‌جغندن س = ٠ قيمتى ايچون

$$\text{تماس}^{م}\,(١-\text{س})^{ه}\,\text{ماس}$$

تماميسنك‌ده صفره مساوى بولنمسى وبناءً عليه طرف ثانيده واقع ن ثابتنك‌ده صفر اولمسى اقتضا ايدر .

تمامىء مذكورك صفر ايله واحد غايه‌لرى ارەسنده‌كى تمامسى محدودى النديغى صورتده صوك حددن ماعداسى صفره منجر اوله‌جغى جهتله :

$$\int_{0}^{1} \text{س}^{\text{م}} (1-\text{س})^{\text{ه}}\, \text{تفاس} = \frac{\text{ه}(\text{ه}-1)(\text{ه}-2)\cdots\times 3\times 2\times 1}{(\text{م}+1)(\text{م}+2)\cdots\cdots(\text{م}+\text{ه}+1)}$$

اولور .

عينيله

$$\int_{0}^{1} \text{س}^{\text{م}+1} (1-\text{س})^{\text{ه}}\, \text{تفاس} = \frac{\text{ه}(\text{ه}-1)(\text{ه}-2)\cdots 3\times 2\times 1}{(\text{م}+2)(\text{م}+3)\cdots\cdots(\text{م}+\text{ه}+2)}$$

بولنمغله بالطبع .

$$\text{ل} = \frac{\int_{0}^{1} \text{س}^{\text{م}+1} (1-\text{س})^{\text{ه}}\, \text{تفاس}}{\int_{0}^{1} \text{س}^{\text{م}} (1-\text{س})^{\text{ه}}\, \text{تفاس}} = \frac{\dfrac{\text{ه}(\text{ه}-1)(\text{ه}-2)\cdots\cdots 3\times 2\times 1}{(\text{م}+2)(\text{م}+3)\cdots\cdots(\text{م}+\text{ه}+2)}}{\dfrac{\text{ه}(\text{ه}-1)(\text{ه}-2)\cdots\cdots 3\times 2\times 1}{(\text{م}+1)(\text{م}+2)\cdots\cdots(\text{م}+\text{ه}+1)}}$$

ويا $\text{ل} = \frac{\text{م}+1}{\text{م}+\text{ه}+2}$ .... (٦)

اولور .

بالعكس ح وقعۀ مخالفه‌سنك اتياً ظهوری احتمالی ارامش اولسه ايدی وقعۀ مذكوره‌نك احتمال بسيطی (١ — س) اولديغندن احتمال مطلوب ده :

$$\text{ل}' = \frac{\int_{0}^{1} \text{س}^{\text{م}} (1-\text{س})^{\text{ه}+1}\, \text{تفاس}}{\int_{0}^{1} \text{س}^{\text{م}} (1-\text{س})^{\text{ه}}\, \text{تفاس}} = \frac{\dfrac{(\text{ه}+1)\text{ه}(\text{ه}-1)\cdots 3\times 2\times 1}{(\text{م}+1)(\text{م}+2)\cdots(\text{م}+\text{ه}+2)}}{\dfrac{\text{ه}(\text{ه}-1)(\text{ه}-2)\cdots 3\times 2\times 1}{(\text{م}+1)(\text{م}+2)\cdots(\text{م}+\text{ه}+1)}}$$

ويا

$\text{ل}' = \frac{\text{ه}+1}{\text{م}+\text{ه}+2}$ .... (٧)

دن عبارت بولنور ايدى .

ایتمدی وقعه‌نك آتیاً ظهوری احتمالیله عدم ظهوری احتمالی یعنی
ح وقعهٔ مخالفه‌سنك حصولی احتمالی مجموعی

$$\text{ل} + \text{لَ} = \frac{\text{م}+١}{\text{م}+\text{ن}+٢} + \frac{\text{ن}+١}{\text{م}+\text{ن}+٢} = \frac{\text{م}+\text{ن}+٢}{\text{م}+\text{ن}+٢} = ١$$

اولورکه بوده اولجه بیان اولنان قانون عمومی حکمنه مو افقدر .

٢٦ . — مذکور ایکی وقعه‌دن ب وقعه‌سی بربری اردیجه م دفعه ظهوره کلدیکی و ح وقعهٔ مخالفه‌سی ایسه اصلا ظهور ایتمدیکی حالده یوقاریکی :

$$\text{ل} = \frac{\text{م}+١}{\text{م}+\text{ن}+٢}$$

افاده‌سنده ن = ٠ وضع ایتمك ایجاب ایده‌جکندن دستور مذکور

$$\text{ل}_{١} = \frac{\text{م}+١}{\text{م}+٢} \quad \ldots\ldots (٨)$$

صورتنه منقلب اولور .

ایشته آلتی وجهنك هربرنده قاچر نقطه اشارت ایدلمش اولدیغی معلوم اولمیان برزار سکز دفعه متوالیاً آتلدیغی حالده سکزنده‌ده شش کلمش اولسه طقوزنجی دفعه‌سنده ینه شش ظهور ایتمسی احتمالی ، دستور سابقه توفیقاً :

$$\text{ل} = \frac{\text{م}+١}{\text{م}+٢} = \frac{٩}{١٠}$$

اولور .

٢٧ . — م دفعه ب و ن دفعه ح وقعه‌سنك ظهور ایتدیکی معلوم اولدیغی حالده (ن — هـ) دفعه ب و هـ دفعه‌ده ح وقعه‌سنك آتیاً ظهوری احتمالی تعیین ایتمك لازم کلسه ، ب وقعهٔ بسیطه‌سنك

احتمال بسيطى س اولديغنه كوره مطلوب اولان وقعهٔ مركبه‌نك
احتمالى افاده ايدن

$$\frac{\text{ن}(\text{ن}-1)(\text{ن}-2)\cdots\cdots(\text{ن}-\text{ه}+1)}{1\times 2\times 3\cdots\cdots\cdots \text{ه}}\;\text{س}^{\text{ن}-\text{ه}}\,(1-\text{س})^{\text{ه}}$$

مقدارينى ب وقعهٔ بسيطه‌سنه س احتمالى اعطا ايدن سببك تأثيرى
احتماليله يعنى :

$$\frac{\text{س}^{\text{م}}\,(1-\text{س})^{\text{ض}}\;\text{تفاس}}{\int_{0}^{1}\text{س}^{\text{م}}\,(1-\text{س})^{\text{ض}}\;\text{تفاس}}$$

مقداريله ضرب ايتمك وبوصورتله استحصال ايديلان حاصل ضربلرك
[صفر ايله واحد ارەسنده] مجموعنى وياتعبير ديكريله تماميسنى آلمق
اقتضا ايدر .

بوحالده آنيآ (ن — ه) دفعه ب وقعه‌سنك و ه دفعه‌ده ج
وقعه‌سنك ظهورندن عبارت اولان وقعهٔ مركبه‌نك وقوعى احتمالى
اعطا ايده‌جك دستور :

$$\text{ل}_{2}=\frac{\text{ن}(\text{ن}-1)\cdots(\text{ن}-\text{ه}+1)}{1\times 2\times 3\cdots\cdots \text{ه}}\;\frac{\int_{0}^{1}\text{س}^{\text{م}+\text{ن}-\text{ه}}\times(1-\text{س})^{\text{ض}+\text{ه}}\;\text{تفاس}}{\int_{0}^{1}\text{س}^{\text{م}}\,(1-\text{س})^{\text{ض}}\;\text{تفاس}}\;. \qquad (9)$$

دن عبارت اولور .

دستور مذكور ، ن دفعه ب ، ج وقعه‌لرندن تركب ايدن باجمله وقايع
مركبه‌نك احتمالى عموميت اوزره ارائه ايتمكه كافيدر .

الحق ﻫ مقدارینی صفردن بدأ ایله متوالیاً ۱ ، ۲ ، ۰ ، ۰ ، ۰ ن عدیه مساوی فرض ایتمك واکا کوره بولنه‌جق نتایجی بروجه آتی برافادهٔ عمومیه‌ده جمع ایلمك ایجاب ایدر :

$$\text{ل}_{\text{٣}} = \frac{\text{٢}}{\text{تا}^{\text{م١}}_{\text{ه}}\ \text{س}\,(\text{١}-\text{س})\ \text{تفاس}} \left\{ \begin{array}{l} \text{تا}^{\text{م١}}_{\text{ه}}\ \text{س}\,(\text{١}-\text{س})\ \text{تفاس} + \frac{\text{ن}}{\text{١}}\ \text{تا}^{\text{م١+ن+١}}\ \text{س} \times \\ (\text{١}-\text{س})\ \text{تفا س} + \frac{\text{ن}(\text{ن}-\text{١})}{\text{١}\times\text{٢}}\ \text{تا}^{\text{م١+ن-٢}}\ \text{س} \times \\ (\text{١}-\text{س})\ \text{تفا س} + \cdots\cdots \\ \cdots\cdots + \text{تا}^{\text{م١}}\ \text{س}\,(\text{١}-\text{س})\ \text{تفا س} \end{array} \right. \quad (\text{١٠})$$

ایشته بو افاده ، احتمال تجربیده احتمال نظری حسابلرنده‌کی قوحدین دستورینك خدمتنی ایفا ایدرکه افادهٔ مذکوره‌نك حد عمومیسی :

$$\frac{\text{ن}(\text{ن}-\text{١})(\text{ن}-\text{٢})\cdots(\text{ن}-\text{ه})}{\text{١}\times\text{٢}\times\text{٣}\cdots\text{ه}} \cdot \frac{\text{تا}^{\text{م١+ن-ه}}\ \text{س} \times (\text{١}-\text{س})\ \text{تفا س}^{\text{ه+ه}}}{\text{تا}^{\text{م١}}\ \text{س}\,(\text{١}-\text{س})\ \text{تفا س}} \quad (\text{١١})$$

لااقل (ن — ﻫ) دفعه ب وقعه‌سندن ونهایت ﻫ دفعه ج وقعه‌سندن ترکب ایدن بالجمله وقایع مرکبه‌نك احتمالاتنی حسابه قافیدر .

مع مافیه دستور عمومیده هر وقعهٔ مرکبه‌یه بالذات حدی نظر اعتباره الهرق احتمالی حساب ایلمك دها زیاده سهولتی موجب اولور .

مثلا م دفعه بربری اردی حسره یاکز ب وقعه‌سی ظهور ایتدیکی حالده آتیاده ن دفعه ینه وقعهٔ مذکوره‌نك ظهوری احتمالنی تحری ایدیله‌جك اولسه (۱۰) دستورینك حد اولی تشکیل ایدن

$$\frac{\int_{0}^{1} \text{س}^{\text{م}+\text{ن}} (1-\text{س})^{\text{ق}}\,\text{تفا}\,\text{س}}{\int_{0}^{1} \text{س}^{\text{م}} (1-\text{س})^{\text{ق}}\,\text{ما}\,\text{س}}$$

افاده‌سنده ق = ٠ ، ه = ٠ فرض ایلمك كفايت ايدر . بو حالده :

$$\text{ل} = \frac{\int_{0}^{1} \text{س}^{\text{م}+\text{ن}}\,\text{تفا}\,\text{س}}{\int_{0}^{1} \text{س}^{\text{م}}\,\text{تفا}\,\text{س}} = \frac{\left[\frac{\text{س}^{\text{م}+\text{ن}+1}}{\text{م}+\text{ن}+1}\right]_{0}^{1}}{\left[\frac{\text{س}^{\text{م}+1}}{\text{م}+1}\right]_{0}^{1}} = \frac{\frac{1}{\text{م}+\text{ن}+1}}{\frac{1}{\text{م}+1}}$$

ويا

$$\text{ل} = \frac{\text{م}+1}{\text{م}+\text{ن}+1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (٤٢)$$

دستوری حاصل اولورکه بوندن ده بر وجه آتی قاعده استخراج ایدیلور :

« م دفعه متوالیاً ظهوری مشاهده ایدیلن بر وقعه‌نك آتیلقی دفعه دها ظهوری احتمالی ، مشاهدات سابقه عددیله واحد مجموعی صورت و بو صورت ایله وقعهٔ مذکوره‌نك تکراراً ظهوری احتمال آرانلدیغی وقعه‌یی کوسترن عدد مجموعی مخرج اولمق اوزره بر کسر ایله افاده اولنور » .

٢٨ اسباب مختلفه‌نك احتمال نسبیلری . —

بو آنه قدر احتمال تجربی حقنده بر ب وقعه‌سنه ش احتمالی اعطا ایدن بر سببك احتمال مطلقی کبی نظر مطالعه‌یه آلندی . حالبوکه تطبیقاتده اکثریتله اسباب مختلفه‌نك احتمال نسبیلری نظر اعتباره آلنور . بونك ایچونده بر وقعه‌نك اسباب

مختلفه‌سنه عائد احتمال بسیطلری س ، سَ ، سً . . . . . ایله ارائه ایدلدیکنه کوره

$$\frac{\text{س}^{\text{م}}\,(1-\text{س})^{\text{ن}}\ \text{تفا س}}{\int_{0}^{1}\text{س}^{\text{م}}\,(1-\text{س})^{\text{ن}}\ \text{تفا س}}$$

افاده‌سنده‌ س یرینه متوالیاً سَ ، سً . . . وضع ایلملك و بو انه‌جق مقادیرك هر برینی مجموعنه تقسیم ایلملك ایجاب ایدر .

ایشته ب وقعه‌سنك سَ ، سً احتماللرینه عائد سببلرك احتمال مطلق اصغر نامتناهیلری متناظراً

$$\text{ل}=\frac{\text{س}^{\text{م}}\,(1-\text{س})^{\text{ن}}\ \text{تفا س}}{\int_{0}^{1}\text{س}^{\text{م}}\,(1-\text{س})^{\text{ن}}\ \text{تفا س}}\qquad \text{لَ}=\frac{\text{سَ}^{\text{م}}\,(1-\text{سَ})^{\text{ن}}\ \text{تفا سَ}}{\int_{0}^{1}\text{سَ}^{\text{م}}\,(1-\text{سَ})^{\text{ن}}\ \text{تفا سَ}}$$

اولدیغندن اسباب مذکوره‌دن برنجیسنك احتمال نسبیسی‌ده :

$$\frac{\text{ل}}{\text{ل}+\text{لَ}}=\frac{\text{س}^{\text{م}}\,(1-\text{س})^{\text{ن}}}{\text{س}^{\text{م}}\,(1-\text{س})^{\text{ن}}+\text{سَ}^{\text{م}}\,(1-\text{سَ})^{\text{ن}}}=\frac{1}{1+\dfrac{\text{سَ}^{\text{م}}\,(1-\text{سَ})^{\text{ن}}}{\text{س}^{\text{م}}\,(1-\text{س})^{\text{ن}}}}\ (3)$$

اولور .

افادهٔ اخیره‌دن مستبان اوله‌جغی وجهله س مجهولنك الك محتمل اولا[ن] قیمتی $\frac{\text{ل}}{\text{ل}+\text{لَ}}$ احتمال نسبیسنك ممکن مرتبه واحده قریب بولنمسنه واود

$\dfrac{\text{س}'^{\text{م}}\,(\text{١} - \text{س}')^{\text{ن}}}{\text{س}^{\text{م}}\,(\text{١} - \text{س})^{\text{ن}}}$ کسرینك اصغری وياخود $\text{س}'^{\text{م}}\,(\text{١} - \text{س}')^{\text{ن}}$

صورتی ثابت فرض ایدلدیکنه کوره ، $\text{س}^{\text{م}}\,(\text{١} - \text{س})^{\text{ن}}$ مخرجنك

اعظمی اولمسنه منوط اولدیغندن قیمت مذکوره $\text{س}^{\text{م}}\,(\text{١} - \text{س})^{\text{ن}}$

افادەسنك مشتقی صفره مساوی قیلەرق :

$$\text{م}\ \text{س}^{\text{م}+\text{١}}\,(\text{١} - \text{س})^{\text{ن}} - \text{ن}\ \text{س}^{\text{م}}\,(\text{١} - \text{س})^{\text{ن}-\text{١}} = \text{٠}$$

استحصال اولنان $\text{س} = \dfrac{\text{م}}{\text{م}+\text{ن}}$ . . . . . (١٤)

مقدارینه مساوی اولور .

عینیله برنجی سبب تحتنده ح وقعهٔ مخالفەسنك (١ — س)

احتمال مجهولنه الك زیاده وتوافق ایتمسی مستعمل اولان قیمتی

$$\text{١} - \text{س} = \frac{\text{ن}}{\text{م}+\text{ن}} \quad . . . \quad (\text{١٥})$$

بولنورکه بونلردن‌ده :

$$\frac{\text{س}}{\text{١}-\text{س}} = \frac{\text{م}}{\text{ن}} \qquad (\text{١٦})$$

نتیجەسی استحصال اولنور .

ایمدی $\frac{\text{م}}{\text{م}+\text{ن}}$ کسری م دفعه تکرار ایدن ب وقعەسیله ن دفعه

ظهور ایدن ح وقعهٔ مرکبەسنده ب وقعهٔ بسیطەسنك احتمال بسیطنی

ارائه ایتدیکی کبی $\frac{\text{ن}}{\text{م}+\text{ن}}$ کسری‌ده ح وقعهٔ مخالفەسنك احتمال بسیطنی

افاده ایلدیکندن (١٤) ، (١٥) ، (١٦) رقملی دستورلردن

بروجه آتی نتیجهٔ عمومیه استخراج اولنور :

ه ، ت ، ح وقایع بسیطه‌سنی حاصل ایده بیلن بالجمله اسبابك الك زیاده حقیقت حالنه توافق ایتمك احتمالی حائز اولانی ، وقایع مذکوره‌نك احتمال بسیطلری بیننده‌کی نسبتی هر برینك ظهوره کلدیکی عددلر بیننده‌کی نسبته مساوی قیلاندن عبارتدر

۲۹ ، — بوقاریده م دفعه ت ، ه دفعه‌ده ح وقعه‌سنك ظهورینی انتاج ایدن و س احتماله صفر ایله واحد ارهسنده بالجمله قیمتلری اعطا ایده بیلن اسباب ممکنه‌نك احتمالی (ه) افاده‌سیله استخراج ایدلمش ایدی

دستور مذکوره توفیقاً س احتماله ء ، ءَ غایه‌لری ارهسنده محصور کافهٔ قیمتی اعطا ایدن اسباب ممکنه‌نك احتمالی :

$$\text{ل}_{\circ} = \frac{\int_{\text{ء}}^{\text{ءَ}} \text{س}^{\text{م}} (1 - \text{س})^{\text{ه}} \,\text{تفا}\, \text{س}}{\int_{0}^{1} \text{س}^{\text{م}} (1 - \text{س})^{\text{ه}} \,\text{تفا}\, \text{س}}$$

دستوریله افاده اولنمق اقتضا ایدر .

ایشته س احتمال مجهولنك $\frac{1}{2}$ ایله ۱ ارهسنده محصور بولنمسی احتمالی تعیین ایچون دستور مذکوره ء $= \frac{1}{2}$ ءَ $= 1$ وضع ایدلدکده :

$$\text{ل}_{\circ} = \frac{\int_{\frac{1}{2}}^{1} \text{س}^{\text{م}} (1 - \text{س})^{\text{ه}} \,\text{تفا}\, \text{س}}{\int_{0}^{1} \text{س}^{\text{م}} (1 - \text{س})^{\text{ه}} \,\text{تفا}\, \text{س}}$$

ويا $$\text{ل}_{\text{ه}} = \frac{\int_{0}^{1} \text{س}^{\text{م}} (1 - \text{س})^{\text{ه}}\, \text{تفا س} - \int_{0}^{\frac{1}{2}} \text{س}^{\text{م}} (1 - \text{س})^{\text{ه}}\, \text{تفا س}}{\int_{0}^{1} \text{س}^{\text{م}} (1 - \text{س})^{\text{ه}}\, \text{تفا س}}$$

وياخود

$$\text{ل}_{\text{ه}} = 1 - \frac{\int_{0}^{\frac{1}{2}} \text{س}^{\text{م}} (1 - \text{س})^{\text{ه}}\, \text{تفا س}}{\int_{0}^{1} \text{س}^{\text{م}} (1 - \text{س})^{\text{ه}}\, \text{تفا س}} \quad \ldots\ldots (١٧)$$

افاده‌سى استحصال اولنور .

يالكزجه م دفعه ب وقعه‌سى ظهوره كلديكى و ح وقعهٔ مخالفه‌سى ايسه بوميانده اصلا ظهور ايتمديكى تقديرده افادهٔ اخيره‌ده ه = ٠ وضع ايتمك ايجاب ايليه‌جكندن بو حالده ،

$$\text{ل}_{0} = \frac{\int_{\frac{1}{2}}^{1} \text{س}^{\text{م}}\, \text{تفا س}}{\int_{0}^{1} \text{س}^{\text{م}}\, \text{تفا س}} \quad \ldots\ldots\ldots (١٨)$$

اولور .

فقط $$\int_{\frac{1}{2}}^{1} \text{س}^{\text{م}}\, \text{تفا س} = \left[\frac{\text{س}^{\text{م}+1}}{1+\text{م}}\right]_{\frac{1}{2}}^{1} = \frac{1}{1+\text{م}} - \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{1+\text{م}}}{1+\text{م}} = \frac{1 - (2)^{-(1+\text{م})}}{1+\text{م}}$$

و $$\int_{0}^{1} \text{س}^{\text{م}}\, \text{تفا س} = \left[\frac{\text{س}^{\text{م}+1}}{1+\text{م}}\right]_{0}^{1} = \frac{1}{1+\text{م}}$$

اولمغله

$$\text{ل}_{0} = 1 - \frac{1}{2^{1+\text{م}}} = \frac{2^{1+\text{م}} - 1}{2^{1+\text{م}}} \quad \ldots\ldots (١٩)$$

بولنور .

۳۰ . — بر وقعه‌نك اكثریتله تكرری وقعهٔ مذكوره‌نك حصولنی تسهیل ویا انتاج ایدن برسبب دائمی ویا اولینك وجودینی ایما ایدر . بر وقعه‌نك متمادیاً ظهوری ایسه بونی ایجاب ایدن برسببك وجودینی مستلزم بولنورکه سبب مذكورك احتمالی ده بروجه بالا (۱۹) افاده‌سیله تعیین اولنور .

مثال :— ۱۸۵۰ سنهٔ میلادیه‌سی نهایتنه قدر مسلك شمسده معلوم اولان سیاراتك عددی ۲۰ دن عبارت بولنمش وبونلرك كافه‌سنك برجهته متوجهاً حركت ایتدیكی كورلمش ایدی . بویله بربركشف اولنان سیاراتك دائماً عین جهته حركت ایدر بولنمسی بروقعه‌نك متوالیاً تكرری كبی نظر مطالعه‌یه آلنه‌رق وقعهٔ مذكوره‌نك وقوعنی ایجاب ایدن برسببك وجودی موقتاً قبول ایدلمش وسبب مذكورك احتمالی‌ده آرانلمشدی .

ایشته بواحتمال (۱۹) رقملی دستور موجبنجه :

$$ل = \frac{٢^{٢١}-١}{٢^{٢١}} = \frac{٢٠٩٧١٥١}{٢٠٩٧١٥٢}$$

مقدارینه مساوی اولدیغی وهمان واحده یعنی قطعیت ریاضیه درجه‌سنه تقریب ایلدیكی جهتله تا اوزمان سیاراتك بوصورتله عین جهته متوجهاً حركت ایلملری اسباب موجبه تحتنده بولندیغنه حكم ایدلمش ایدی

واقعا ۱۸۵۰ سنه‌سندن بوآنه قدردرتیوزی متجاوز كچوك بیوك سیاره كشف ایدلدیكی حالده هیچ برینك عكس جهته متوجهاً حركت ایتدیكی كورلمامشدر .

تمت

Özet

15. yüzyılda Avrupa'da başlayan olasılık çalışmaları, Osmanlı Devleti'ne 19. yüzyılın sonlarında, Salih Zeki Bey'in çabaları sonucu giriş yapmıştır. Salih Zeki Bey, olasılık konusunda 2 müstakil eser yayımlamıştır. Bu eserler 1898 yılında yayımladığı Hülâsa-i Hesâb-ı İhtimâlî ve 1912-1913 yıllarında yayımladığı Hesâb-ı İhtimâlî'dir. İkinci eser Darülfünun'da verdiği derslerden oluşmaktadır. Bunlardan başka, 1900 yılında yayımladığı Kâmûs-ı Riyâziyyat adlı matematik ansiklopedisinde de olasılık ile ilgili maddelere yer vermiştir. Salih Zeki Bey"in bu eserleri, yarım asır süresince, olasılık konusunda Türkiye'de yayımlanmış olan tek müstakil eserler olarak kalmıştır. Bundan sonra, ancak 1962'ye gelindiğinde olasılık ile ilgili bir kitap basıldığını görüyoruz.

Summary

Probability studies started at 15th century, entered into Ottoman Empire by means of Salih Zeki Bey's works, in the later century of 19th. Salih Zeki Bey published two independent books on probability. One of these books was Hülâsa-i Hesâb-ı İhtimâlî, which was published in 1898, and the other one was Hesâb-ı İhtimâlî, which was published in 1912-1913. The latter was composed by Salih Zeki Bey's lectures at Darülfünun. In addition to these books, he gave place to probability on some entries of his encyclopaedia called Kâmûs-ı Riyâziyyat, which was published in 1900. These books by Salih Zeki Bey were the only independent books on probability for five decades. After this, we can note that next book published on probability was in 1962.