

**ANKARA ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**GEOMETRİK SÜREÇLERDE PARAMETRE TAHMİNİ**

**Mahmut KARA**

**İSTATİSTİK ANABİLİM DALI**

**ANKARA  
2009**

**Her hakkı saklıdır.**

## ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

### GEOMETRİK SÜREÇLERDE PARAMETRE TAHMİNİ

Mahmut KARA

Ankara Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

İstatistik Anabilim Dalı

Danışman: Yrd. Doç. Dr. Halil AYDOĞDU

Stokastik modellemede oldukça sık kullanılan geometrik süreçlerde parametre tahmin problemi ile karşılaşmaktadır. Bir geometrik süreçte ilk olayın gerçekleşme zamanının dağılım fonksiyonu  $F$  ile gösterilsin. Bu çalışmada  $F$  'nin bilinmemesi durumunda geometrik sürecin  $a$  oranı ve  $F$  dağılımının ortalama ve varyansı için lineer regresyon yöntemi kullanılarak bazı parametrik olmayan ve  $F$  'nin bilinmesi durumunda en çok olabilirlik yöntemi kullanılarak parametrik tahmin ediciler verilir. Ayrıca bu tahmin edicilerin işlevlikleri bir simülasyon çalışması ile değerlendirilir.

**Ocak 2009, 71 sayfa**

**Anahtar Kelimeler:** Geometrik süreç, lineer regresyon yöntemi, en çok olabilirlik yöntemi.

## ABSTRACT

Master Thesis

### PARAMETER ESTIMATION IN GEOMETRIC PROCESSES

Mahmut KARA

Ankara University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Statistics

Supervisor: Asst. Prof. Dr. Halil AYDOĞDU

Geometric processes are commonly used in stochastic modelling and parameter estimation problem is encountered in these processes. Let  $F$  denote the distribution function of the first occurrence time in a geometric process. In this study, when  $F$  is unknown or the functional form of  $F$  is known but the parameters of the distribution are unknown, some estimators for the ratio  $a$  of geometric process and the mean and variance of  $F$  are given. In estimation procedure, the linear regression and maximum likelihood methods are used in nonparametric and parametric cases, respectively. Furthermore, the performance of these estimators is evaluated by a simulation study.

**January 2009, 71 pages**

**Key Words :** Geometric process, linear regression method, maximum likelihood method.

## TEŞEKKÜR

‘ Geometrik süreçler ‘ ile ilgili yaptığım bu çalışmada bana araştırma olanağı sağlayan, çalışmamın her aşamasında önerileriyle beni yönlendiren, her zaman ilgi ve alakasını gördüğüm danışman hocam Sayın Yrd. Doç. Dr. Halil AYDOĞDU ‘ ya teşekkürlerimi sunarım. İstatistik bilimini bana sevdiren ve öğrenmemde büyük katkıları olan Ankara Üniversitesi İstatistik Bölümü’ndeki hocalarıma teşekkür ederim. Çalışmalarım süresince birçok fedakârlıklar göstererek beni destekleyen aileme bana karşı duydukları sarsılmaz inançlarından dolayı teşekkürlerimi sunarım.

Mahmut KARA

Ankara, Ocak 2009

## İÇİNDEKİLER

ÖZET.....	i
ABSTRACT.....	ii
TEŞEKKÜR.....	iii
SİMGELER DİZİNİ.....	vi
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	vii
ÇİZELGELER DİZİNİ.....	x
1. GİRİŞ.....	1
2. KURAMSAL TEMELLER.....	3
2.1 Rasgele Değişkenlerin Dizilerinde Yakınsama.....	3
2.2 Asimptotik Normallik.....	6
2.3 Delta Yöntemi.....	6
2.4 Merkezi Limit Teoremleri.....	7
2.4.1 Lindeberg Levy Teoremi.....	7
2.4.2 Liapunov Teoremi.....	7
2.4.3 Lindeberg Feller Teoremi.....	9
2.5 Newton-Raphson Yöntemi.....	10
3. BAZI SAYMA SÜREÇLERİ.....	13
3.1 Sayma Süreci.....	13
3.2 Poisson Süreci.....	14
3.3 Homojen Olmayan Poisson Süreci.....	14
3.4 Yenileme Süreci.....	15
3.5 Geometrik Süreç.....	15
3.5.1 Geometrik süreçte olaylar arası geçen zamanın ve bekleme zamanının dağılımı.....	16
4. SAYMA SÜRECİNDEN GELEN VERİ SETİNİN GEOMETRİK SÜRECE UYGUNLUĞUNUN İNCELENMESİ.....	17
4.1 Trend Analizi.....	19
4.2 Sayma Sürecinden Gelen Veri Setinin Bağımsız ve Aynı Dağılımlı Olup Olmadığının İncelenmesi.....	20
5. BİR GEOMETRİK SÜREÇLE İLGİLİ PARAMETRELERİN PARAMETRİK OLMAYAN TAHMİNİ.....	22

<b>5.1 Katsayıların Tahmini</b> .....	22
<b>5.2 Regresyon Denkleminin Hatasının(<math>\sigma_c^2</math>) Tahmini</b> .....	23
<b>5.3 Geometrik Sürecin Parametrelerinin Tahmini</b> .....	24
<b>5.4 Yenileme Sürecinin Geometrik Süreçten Ayırt Edilmesine Yönelik Bir Test</b> .....	27
<b>5.5 Tahmin Edicilerin Asimptotik Dağılımları</b> .....	28
<b>6. BİR GEOMETRİK SÜREÇLE İLGİLİ PARAMETRELERİN PARAMETRİK TAHMİNİ</b> .....	36
<b>6.1 Üstel Dağılım</b> .....	36
<b>6.2 Gamma Dağılımı</b> .....	38
<b>6.3 Lognormal Dağılım</b> .....	41
<b>7. SİMÜLASYON ÇALIŞMASI</b> .....	44
<b>8. SONUÇ</b> .....	69
<b>KAYNAKLAR</b> .....	70
<b>ÖZGEÇMİŞ</b> .....	71

## SİMGELER DİZİNİ

BBAD	Bir birinden bağımsız ve aynı dağılımlı.
HKT	Hata kareler toplamı
HKO	Hata kareler ortalaması
HOPS	Homojen olmayan Poisson süreci
HPS	Homojen Poisson süreci
$N(t)$	$(0, t]$ zaman aralığındaki yenilemelerin sayısı
$N^G(t)$	$(0, t]$ zaman aralığındaki geometrik yenilemelerin sayısı
$S_n$	n. yenilemenin gerçekleşme zamanı
$\Gamma(\cdot)$	Gamma fonksiyonu
$\psi(\cdot)$	Digamma fonksiyonu

## ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 4.1 Model Seçimi .....	21
Şekil 7.1 Çizelge 7.1 deki sonuçlara göre $a = 0.90$ için dağılımın ortalaması için önerilen tahmin edicilerin Yan ve HKO grafikleri .....	53
Şekil 7.2 Çizelge 7.1 deki sonuçlara göre $a = 0.95$ için dağılımın ortalaması için önerilen tahmin edicilerin Yan ve HKO grafikleri .....	53
Şekil 7.3 Çizelge 7.1 deki sonuçlara göre $a = 1.05$ için dağılımın ortalaması için önerilen tahmin edicilerin Yan ve HKO grafikleri .....	54
Şekil 7.4 Çizelge 7.1 deki sonuçlara göre $a = 1.10$ için dağılımın ortalaması için önerilen tahmin edicilerin Yan ve HKO grafikleri .....	54
Şekil 7.5 Çizelge 7.1 deki sonuçlara göre $a = 0.90$ için dağılımın varyansı için önerilen tahmin edicilerin Yan ve HKO grafikleri .....	55
Şekil 7.6 Çizelge 7.1 deki sonuçlara göre $a = 0.95$ için dağılımın varyansı için önerilen tahmin edicilerin Yan ve HKO grafikleri .....	55
Şekil 7.7 Çizelge 7.1 deki sonuçlara göre $a = 1.05$ için dağılımın varyansı için önerilen tahmin edicilerin Yan ve HKO grafikleri .....	56
Şekil 7.8 Çizelge 7.1 deki sonuçlara göre $a = 1.10$ için dağılımın varyansı için önerilen tahmin edicilerin Yan ve HKO grafikleri .....	56
Şekil 7.9 Çizelge 7.2 deki sonuçlara göre $a = 0.90$ için dağılımın ortalaması için önerilen tahmin edicilerin Yan ve HKO grafikleri .....	57
Şekil 7.10 Çizelge 7.2 deki sonuçlara göre $a = 0.95$ için dağılımın ortalaması için önerilen tahmin edicilerin Yan ve HKO grafikleri .....	57
Şekil 7.11 Çizelge 7.2 deki sonuçlara göre $a = 1.05$ için dağılımın ortalaması için önerilen tahmin edicilerin Yan ve HKO grafikleri .....	58
Şekil 7.12 Çizelge 7.2 deki sonuçlara göre $a = 1.10$ için dağılımın ortalaması için önerilen tahmin edicilerin Yan ve HKO grafikleri .....	58
Şekil 7.13 Çizelge 7.2 deki sonuçlara göre $a = 0.90$ için dağılımın varyansı için önerilen tahmin edicilerin Yan ve HKO grafikleri .....	59
Şekil 7.14 Çizelge 7.2 deki sonuçlara göre $a = 0.95$ için dağılımın varyansı için önerilen tahmin edicilerin Yan ve HKO grafikleri .....	59



Şekil 7.15 Çizelge 7.2 deki sonuçlara göre $a = 1.05$ için dağılımın varyansı için önerilen tahmin edicilerin Yan ve HKO grafikleri .....	60
Şekil 7.16 Çizelge 7.2 deki sonuçlara göre $a = 1.10$ için dağılımın varyansı için önerilen tahmin edicilerin Yan ve HKO grafikleri .....	60
Şekil 7.17 Çizelge 7.3 deki sonuçlara göre $a = 0.90$ için dağılımın ortalaması için önerilen tahmin edicilerin Yan ve HKO grafikleri .....	61
Şekil 7.18 Çizelge 7.3 deki sonuçlara göre $a = 0.95$ için dağılımın ortalaması için önerilen tahmin edicilerin Yan ve HKO grafikleri .....	61
Şekil 7.19 Çizelge 7.3 deki sonuçlara göre $a = 1.05$ için dağılımın ortalaması için önerilen tahmin edicilerin Yan ve HKO grafikleri .....	62
Şekil 7.20 Çizelge 7.3 deki sonuçlara göre $a = 1.10$ için dağılımın ortalaması için önerilen tahmin edicilerin Yan ve HKO grafikleri .....	62
Şekil 7.21 Çizelge 7.3 deki sonuçlara göre $a = 0.90$ için dağılımın varyansı için önerilen tahmin edicilerin Yan ve HKO grafikleri .....	63
Şekil 7.22 Çizelge 7.3 deki sonuçlara göre $a = 0.95$ için dağılımın varyansı için önerilen tahmin edicilerin Yan ve HKO grafikleri .....	63
Şekil 7.23 Çizelge 7.3 deki sonuçlara göre $a = 1.05$ için dağılımın varyansı için önerilen tahmin edicilerin Yan ve HKO grafikleri .....	64
Şekil 7.24 Çizelge 7.3 deki sonuçlara göre $a = 1.10$ için dağılımın varyansı için önerilen tahmin edicilerin Yan ve HKO grafikleri .....	64
Şekil 7.25 Çizelge 7.4 deki sonuçlara göre $a = 0.90$ için dağılımın ortalaması için önerilen tahmin edicilerin Yan ve HKO grafikleri .....	65
Şekil 7.26 Çizelge 7.4 deki sonuçlara göre $a = 0.95$ için dağılımın ortalaması için önerilen tahmin edicilerin Yan ve HKO grafikleri .....	65
Şekil 7.27 Çizelge 7.4 deki sonuçlara göre $a = 1.05$ için dağılımın ortalaması için önerilen tahmin edicilerin Yan ve HKO grafikleri .....	66
Şekil 7.28 Çizelge 7.4 deki sonuçlara göre $a = 1.10$ için dağılımın ortalaması için önerilen tahmin edicilerin Yan ve HKO grafikleri .....	66
Şekil 7.29 Çizelge 7.4 deki sonuçlara göre $a = 0.90$ için dağılımın varyansı için önerilen tahmin edicilerin Yan ve HKO grafikleri .....	67
Şekil 7.30 Çizelge 7.4 deki sonuçlara göre $a = 0.95$ için dağılımın varyansı için önerilen tahmin edicilerin Yan ve HKO grafikleri .....	67

Şekil 7.31 Çizelge 7.4 deki sonuçlara göre $a = 1.05$ için dağılımın varyansı için önerilen tahmin edicilerin Yan ve HKO grafikleri .....	68
Şekil 7.32 Çizelge 7.4 deki sonuçlara göre $a = 1.10$ için dağılımın varyansı için önerilen tahmin edicilerin Yan ve HKO grafikleri .....	68

## ÇİZELGELER DİZİNİ

Çizelge 7.1 Üstel dağılım ( $\theta = 2, \mu = 0.5, \sigma^2 = 0.25$ ) durumunda geometrik sürecin $a$ oranı, dağılımın ortalama ve varyansı için önerilen tahmin edicilerin Yan ve HKO' ları.....	45
Çizelge 7.2 Gamma dağılım ( $\alpha = 2, \beta = 1, \mu = 2, \sigma^2 = 2$ ) durumunda geometrik sürecin $a$ oranı, dağılımın ortalama ve varyansı için önerilen tahmin edicilerin Yan ve HKO' ları.....	47
Çizelge 7.3 Weibull dağılım ( $\alpha = 2, \beta = 1, \mu = 0.8862, \sigma^2 = 0.2146$ ) durumunda geometrik sürecin $a$ oranı, dağılımın ortalama ve varyansı için önerilen tahmin edicilerin Yan ve HKO 'ları.....	49
Çizelge 7.4 Lognormal dağılım ( $\mu = 0.4, \tau = 0.4, \lambda = 1.6161, \sigma^2 = 0.45316$ ) durumunda geometrik sürecin $a$ oranı, dağılımın ortalama ve varyansı için önerilen tahmin edicilerin Yan ve HKO 'ları.....	51

## 1. GİRİŞ

Zamanın bir fonksiyonu olarak gerçekleşen olayların sayısını sayan bir sürece sayma süreci denilmektedir. Bir sayma sürecinden gelen veri kümesi bağımsız aynı dağılımlı rasgele değişkenlerden oluşuyor ise model olarak bir yenileme süreci kullanılabilir. Fakat sayma sürecinin olaylar arası geçen zaman süreleri monoton eğilimde ise model olarak yenileme süreci kullanılmaz. Uygulamada ortaya çıkan birçok bakım, onarım ve yer değiştirme problemlerinde ve güvenilirlik teorisindeki başka analizlerde sayma sürecinden gelen veri kümesi monoton eğilimli rasgele değişkenlerden oluşur. Bu tür durumlarda model olarak stokastik monoton bir sayma süreci düşünülmelidir. Lam (1988), yenileme sürecinin bir genellemesi olarak geometrik süreç olarak adlandırılan aşağıdaki gibi ifade edilen bir stokastik monoton süreç tanımlamıştır.

$\{a^{n-1}X_n, n=1,2,\dots\}$  bağımsız aynı dağılımlı rasgele değişkenlerin bir dizisi olacak şekilde bir  $a > 0$  reel sayısı varsa  $\{X_n, n=1,2,\dots\}$  dizisi üzerine kurulu sayma sürecine  $a$  oranlı bir geometrik süreç denir. Bu süreç  $a \leq 1$  için stokastik olarak artan iken  $a \geq 1$  için stokastik azalandır. Geometrik süreç sayma süreçleri ile ilgili uygulamalarda olaylar arası geçen zaman sürelerinin monoton eğilimde olması durumunda homojen olmayan Poisson sürecine alternatif olarak kullanılabilir. Bir geometrik süreçte ilk olay gerçekleşinceye kadar geçen zaman süresi olan  $X_1$  rasgele değişkeninin dağılım fonksiyonu  $F$  ile gösterilsin.  $F$  'nin bilinmesi (parametrik olarak) yada bilinmemesi durumunda sürecin oranının,  $F$  'nin ortalamasının ve varyansının nasıl tahmin edileceği önemli bir problemdir.

Çalışma aşağıdaki gibi düzenlenmiştir.

İkinci bölümde çalışmada kullanılacak olan yakınsama türleri, özellikleri ve aralarındaki ilişkiler verilir. Daha sonra merkezi limit teoremleri hatırlatılarak, asimptotik normallik üzerinde durulur. Son olarak çalışmada ele alınan olasılık dağılımları ile ilgili parametrelerin en çok olabilirlik tahmin edicilerinin sayısal olarak hesaplanmasında kullanacağımız Newton-Raphson yönteminden bahsedilir.

Üçüncü bölümde sayma süreçleri ve özelliklerinden bahsedilmiştir.

Dördüncü bölümde sayma sürecinden gelen veri setinin monoton eğilimli olup olmadığı incelenip ve bu veri setinin geometrik süreçten olup olmadığının incelenmesi için iki test istatistiği ve grafik yöntemi üzerinde durulmuştur.

Beşinci bölümde lineer regresyon metoduyla geometrik sürecin parametreleri olan  $a, \mu$  ve  $\sigma^2$ 'nin en küçük kareler tahmin edicileri ve özellikleri elde edilmiştir.

Altıncı bölümde geometrik sürecin parametreleri olan  $a, \mu$  ve  $\sigma^2$ 'nin üstel, gamma ve lognormal dağılımı durumlarında en çok olabilirlik yöntemi kullanılarak tahmin edicileri ve özellikleri elde edilmiştir.

Yedinci bölümde ise geometrik sürecin oranı,  $F$  dağılımının ortalaması ve varyansı için Lam, Chan ve diğerleri tarafından elde edilen bu tahmin edicilerin işlevlikleri yan ve hata kareler ortalaması ölçütüne göre bir simülasyon çalışması ile değerlendirilmiştir.

Son bölümde ise simülasyon sonuçlarının yorumları verilmiştir.

## 2. KURAMSAL TEMELLER

Bu bölümde çalışmada kullanılacak olan yakınsama türleri, özellikleri ve aralarındaki ilişkiler verilir. Daha sonra merkezi limit teoremleri hatırlatılarak, asimptotik normallik üzerinde durulur. Son olarak çalışmada ele alınan olasılık dağılımları ile ilgili parametrelerin en çok olabirlik tahmin edicilerinin sayısal olarak hesaplanmasında kullanacağımız Newton-Raphson yönteminden bahsedilir.

### 2.1 Rasgele Değişkenlerin Dizilerinde Yakınsama

$(\Omega, U, P)$  bir olasılık uzayı,  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  ve  $X_n : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, n = 1, 2, \dots$  birer rasgele değişken olmak üzere ;

$$(i) P\left(\left\{\omega : \lim_{n \rightarrow \infty} X_n(\omega) = X(\omega)\right\}\right) = 1$$

oluyorsa,  $(X_n)$  dizisine hemen hemen her yerde  $X$  rasgele değişkenine yakınsar denir ve  $X_n \xrightarrow{hhhy} X$  biçiminde gösterilir.

(ii)  $\forall \varepsilon > 0$  için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\left\{\omega : |X_n(\omega) - X(\omega)| < \varepsilon\right\}\right) = 1$$

oluyorsa,  $X_n$  dizisine olasılıkta  $X$  rasgele değişkenine yakınsar denir ve  $X_n \xrightarrow{P} X$  biçiminde gösterilir.

(iii)  $X$  rasgele değişkeninin dağılım fonksiyonu  $F$  ve  $n = 1, 2, \dots$  için  $X_n$  rasgele değişkeninin dağılım fonksiyonu  $F_n$  olmak üzere,  $F$ 'nin sürekli olduğu  $x$  noktalarında

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x) = F(x)$$

oluyorsa  $(X_n)$  dizisine dağılımda  $X$  rasgele değişkenine yakınsar denir ve  $X_n \xrightarrow{d} X$  biçiminde gösterilir.

Not edelim ki dağılımda yakınsamada  $X$  rasgele değişkeni  $X_n$  rasgele değişkenleri ile aynı olasılık uzayında tanımlı olmak zorunda değildir. Aşağıdaki teoremlerle bu yakınsama türleri arasındaki ilişkiler ifade edilir.

**Teorem 2.1.1 (Arnold 1990)**

$$(i) X_n \xrightarrow{hhhy} X \Rightarrow X_n \xrightarrow{p} X ,$$

$$(ii) X_n \xrightarrow{p} X \Rightarrow X_n \xrightarrow{d} X ,$$

(iii)  $c$  bir sabit olmak üzere  $P(X = c) = 1$  iken (ii)'nin tersi doğrudur, yani

$$X_n \xrightarrow{d} c \Rightarrow X_n \xrightarrow{p} c .$$

Şimdi dağılımda yakınsama ile ilgili uygulamalarda oldukça sık kullanılan Slutsky teoremi olarak bilinen teoremi verelim.

**Teorem 2.1.2 (Arnold 1990)**

$b$  bir sabit olmak üzere

$X_n \xrightarrow{d} X$  ve  $Y_n \xrightarrow{p} b$  olsun. Bu durumda

$$(i) X_n + Y_n \xrightarrow{d} X + b ,$$

$$(ii) X_n Y_n \xrightarrow{d} bX ,$$

$$(iii) X_n / Y_n \xrightarrow{d} X / b \ (b \neq 0) .$$

Teorem 2.1.1 de ki (ii)'nin tersi genelde doğru değildir. Fakat,  $c$  bir sabit ve  $(a_n) \infty$ 'a ıraksayan reel terimli bir dizi olmak üzere yukarıda verilen Slutsky teoreminden

$$a_n (X_n - c) \xrightarrow{d} X \Rightarrow X_n \xrightarrow{p} c \tag{2.1}$$

olduğu açıktır.

$(a_n)$  ve  $(b_n)$  gibi iki reel terimli dizi için  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$  oluyorsa, bu durumda

$a_n = o(b_n)$  biçiminde gösterilir. Eğer  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$  ise  $a_n \approx b_n$  biçiminde gösterilir. Her  $n$

için  $\left| \frac{a_n}{b_n} \right| < M$  olacak şekilde  $M \in \mathbb{R}^+$  varsa, bu durumda  $a_n = O(b_n)$  biçiminde gösterilir.

$(X_n)$  rasgele değişkenlerin bir dizisi ve  $(F_n)$  karşılık gelen dağılım fonksiyonlarının bir dizisi olmak üzere,  $\forall \varepsilon > 0$  için bir  $x_\varepsilon > 0$  değeri ve  $n_\varepsilon$  sayısı var, öyleki  $n > n_\varepsilon$  olduğunda  $F_n(x_\varepsilon) - F_n(-x_\varepsilon) > 1 - \varepsilon$  oluyorsa  $(X_n)$  dizisine olasılıkta sınırlı denir ve  $X_n = O_p(1)$  biçiminde gösterilir.  $(X_n)$  ve  $(Y_n)$  rasgele değişkenlerin iki dizisi olmak üzere  $X_n = O_p(Y_n)$  demek  $X_n/Y_n = O_p(1)$  demektir (Öztürk ve diğerleri 2006).

$(X_n)$  ve  $(Y_n)$  rasgele değişkenlerin iki dizisi olmak üzere  $X_n = o_p(Y_n)$  gösterimi  $X_n/Y_n \xrightarrow{p} 0$  olması demektir. Eğer  $X_n = o_p(Y_n)$  ise  $X_n = O_p(Y_n)$  dır.

$o_p$  aşağıdaki özelliklere sahiptir.

$a$  sabit bir sayı,  $(a_n)$  reel terimli bir sayı dizisi ve  $(Z_n)$  sıfırdan farklı rasgele değişkenlerin bir dizisi olmak üzere  $X_n = o_p(Y_n)$  iken

(i)  $aX_n = o_p(Y_n)$

(ii)  $a_n X_n = o_p(a_n Y_n)$  ve  $Z_n X_n = o_p(Z_n Y_n)$

dır. Yukarıdaki sonuçlar  $O_p$  için de geçerlidir (Lehmann 1999).

Dağılımda yakınsama ile ilgili sık kullanılan faydalı bir sonuç aşağıdaki teoremle ifade edilir.

**Teorem 2.1.3 (Lehmann 1999)**  $(X_n)$  rasgele değişkenlerin dizisi dağılımda yakınsak ise aynı zamanda olasılıkta sınırlıdır, yani

$$X_n \xrightarrow{d} X \Rightarrow X_n = O_p(1)$$

dır.



Olasılıkta sınırlı bir  $(X_n)$  rasgele değişkenlerinin dizisi ile ilgili bir sonuç aşağıdaki teoremle verilir.

### **Teorem 2.1.4 (Lehmann 1999)**

$$X_n = O_p(1) \text{ ve } Y_n \xrightarrow{p} 0 \Rightarrow X_n Y_n \xrightarrow{p} 0$$

dır.

## **2.2 Asimptotik Normallik**

$(X_n)$  rasgele değişkenlerin bir dizisi olmak üzere,

$$\frac{X_n - a_n}{b_n} \xrightarrow{d} N(0,1)$$

olacak şekilde reel sayıların  $(a_n)$  ve yeterince büyük bütün  $n$ ler için pozitif reel sayıların  $(b_n)$  dizileri varsa  $X_n$  dizisine  $a_n$  ortalaması ve  $b_n^2$  varyansı ile asimptotik normal denir ve

$$X_n \square AN(a_n, b_n^2)$$

biçiminde gösterilir (Serfling 1980). Burada  $a_n$  sayısı  $X_n$ 'in beklenen değeri ve  $b_n^2$  sayısı da  $X_n$ 'in varyansı olmayabilir. Bu sebepten dolayı  $a_n$  değerine asimptotik ortalama ve  $b_n^2$  değerine asimptotik varyans denir.

## **2.3 Delta Yöntemi**

Rasgele değişkenlerin bazı dönüşümlerinin asimptotik dağılımının bulunmasında, Taylor açılımına dayalı olarak oluşturulan yöntemle delta yöntemi denilmektedir.

Bir  $b > 0$  için  $n^b (X_n - a) \xrightarrow{d} X$  olsun.  $g(x)$   $x = a$  noktasında türevlenebilir bir fonksiyon olmak üzere

$$n^b (g(X_n) - g(a)) \xrightarrow{d} g'(a)X$$

dir (Arnold 1990).

## 2.4 Merkezi Limit Teoremleri

Literatürde birçok merkezi limit teoremi vardır. Bunlar, belli şartları sağlayan bir  $(X_n)$  dizisindeki rasgele değişkenlerin kısmi toplamlar dizisinin bir ifadesinin limit dağılımının standart normal olduğunu söylemektedir.

### 2.4.1 Lindeberg Levy Teoremi

Klasik merkezi limit teoremi olarak bilinen bu teoremden  $(X_n)$ , bağımsız ve ikinci momenti mevcut aynı dağılımlı (ortalaması  $\mu$ , varyansı  $\sigma^2$ ) olan rasgele değişkenlerin bir dizisi olmak üzere,

$$\frac{\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu)}{\sigma} \xrightarrow{d} Z \square N(0,1)$$

dır.

### 2.4.2 Liapunov Teoremi

$(X_n)$  bağımsız, 0 ortalamalı,  $\sigma^2$  varyanslı ve  $E|X_i^3| < \infty$  olan aynı dağılımlı rasgele değişkenlerin bir dizisi olmak üzere,

$$\max_{i=1,2,\dots,n} d_{ni}^2 = o\left(\sum_{i=1}^n d_{ni}^2\right)$$

oluyorsa

$$\frac{\sum_{i=1}^n d_{ni} X_i}{\sigma \sqrt{\sum_{i=1}^n d_{ni}^2}} \xrightarrow{d} Z \square N(0,1)$$

dir (Lehmann 1999).

Bu teoremin bir uygulaması olarak  $Y_i$  ler bir birinden bağımsız  $\mu$  ortalamalı ve  $\sigma^2$  varyanslı aynı dağılımlı rasgele değişkenler olmak üzere  $T_n = \sum_{i=1}^n \frac{i-1}{n(n-1)} Y_i$  ile verilen  $T_n$  rasgele değişkeninin asimptotik dağılımını bulmaya çalışalım.

$$Z_i = \frac{Y_i - \mu}{\sigma}, i = 1, 2, \dots, n$$

olmak üzere,  $E(Z_i) = 0$  ve  $Var(Z_i) = 1$  olduğu açıktır.

$$d_{ni} = \frac{i-1}{n(n-1)}$$

diyelim

$$\max_{i=1,2,\dots,n} d_{ni}^2 = \max_{i=1,2,\dots,n} \frac{(i-1)^2}{(n(n-1))^2} = \frac{1}{n^2}$$

ve

$$\sum_{i=1}^n d_{ni}^2 = \sum_{i=1}^n \frac{(i-1)^2}{n^2(n-1)^2} = \frac{n(n-1)(2n-1)}{6n^2(n-1)^2} = \frac{2n-1}{6n(n-1)}$$

olduğundan

$$\frac{\max_{i=1,2,\dots,n} d_{ni}^2}{\sum_{i=1}^n d_{ni}^2} = \frac{6(n-1)}{n(2n-1)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

yani

$$\max_{i=1,2,\dots,n} d_{ni}^2 = o\left(\sum_{i=1}^n d_{ni}^2\right)$$

dir. Böylece Liapunov teoreminden,

$$\frac{\sum_{i=1}^n \frac{(i-1)}{n(n-1)} Z_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^n \frac{(i-1)^2}{n^2(n-1)^2}}} \xrightarrow{d} N(0,1).$$

$Z_i = \frac{Y_i - \mu}{\sigma}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  olduğunun göz önüne alınmasıyla,

$$\frac{\sqrt{n} \left( \sum_{i=1}^n \frac{i-1}{n(n-1)} Y_i - \frac{\mu}{2} \right)}{\sigma \sqrt{\frac{2n-1}{6(n-1)}}} \xrightarrow{d} N(0,1)$$

olur. Ayrıca,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n-1}{6(n-1)} = \frac{1}{3}$$

olduğundan, Slutsky teoreminden

$$\sqrt{n}\left(T_n - \frac{\mu}{2}\right) \xrightarrow{d} N\left(0, \frac{\sigma^2}{3}\right)$$

elde edilir. Böylece  $T_n \square AN\left(\frac{\mu}{2}, \frac{\sigma^2}{3n}\right)$ . Ayrıca, Teorem 2.1.3 den  $\sqrt{n}\left(T_n - \frac{\mu}{2}\right) = O_p(1)$

olup

$$T_n = \frac{\mu}{2} + O_p(n^{-1/2}) \quad (2.2)$$

yazılabilir.

### 2.4.3 Lindeberg Feller Teoremi

$X_1, X_2, \dots$  ler bağımsız rasgele değişkenler ve  $\mu_k = E(X_k), \sigma_k^2 = \text{Var}(X_k) < \infty$  olsun.

$B_n^2 = \sum_{k=1}^n \text{Var}(X_k)$  olmak üzere her  $\varepsilon > 0$  için  $n \rightarrow \infty$  iken,

$$\begin{aligned} L_n &= \frac{1}{B_n^2} \sum_{k=1}^n E\left[(X_k - \mu_k)^2 I_{[|X_k - \mu_k|/B_n > \varepsilon]}\right] \\ &= \frac{1}{B_n^2} \sum_{k=1}^n \int_{|x| > \varepsilon B_n} x^2 dF_k(x) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

ise

$$\frac{\sum_{k=1}^n X_k - E\left(\sum_{k=1}^n X_k\right)}{B_n} \xrightarrow{d} Z \square N(0,1)$$

dir (Lehmann 1999). Burada  $F_k, X_k - \mu_k$  rasgele değişkenlerinin dağılım fonksiyonudur.

Bu teoremin bir uygulaması olarak  $Y_i$  ler bir birinden bağımsız  $\mu$  ortalamalı ve  $\sigma^2$

varyanslı aynı dağılımlı rasgele değişkenler olmak üzere  $T_n = \frac{\sum_{i=1}^n 6(n-2i+1)Y_i}{\sqrt{n(n-1)(n+1)}}$  ile

verilen rasgele değişkenin asimptotik dağılımını bulmaya çalışalım.

$$Z_i = \frac{Y_i - \mu}{\sigma}, i = 1, 2, \dots, n$$

olmak üzere,  $E(Z_i) = 0$  ve  $\text{Var}(Z_i) = 1$  olduğu açıktır.

$$B_{ni} = 6(n - 2i + 1)Z_i \quad i = 1, 2, \dots, n$$

diyelim. Burada  $B_{ni}$  ler birbirinden bağımsız, fakat aynı dağılımlı değildirler ve

$$B_n^2 = \sum_{i=1}^n \text{Var}(B_{ni}) = 36 \sum_{i=1}^n (n - 2i + 1)^2 = 12(n - 1)n(n + 1)$$

olarak elde edilir.  $B_{ni}$  nin dağılım fonksiyonu  $G_{ni}$  ve  $Z_i$  lerin dağılım fonksiyonu  $G$  olmak üzere

$$\begin{aligned} L_n &= \frac{1}{B_n^2} \sum_{i=1}^n \int_{|u| \geq \varepsilon B_n} u^2 dG_{ni}(u) \\ &= \frac{1}{B_n^2} \sum_{i=1}^n \int_{6|(n-2i+1)w| \geq \varepsilon B_n} 36(n - 2i + 1)^2 w^2 dG(w) \\ &\leq \frac{1}{B_n^2} \sum_{i=1}^n \int_{6|(n-1)w| \geq \varepsilon B_n} 36(n - 1)^2 w^2 dG(w) \\ &= \frac{36n(n - 1)^2}{B_n^2} \sum_{i=1}^n \int_{|w| \geq \varepsilon B_n / (6(n-1))} w^2 dG(w) \\ &\rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty \end{aligned}$$

olduğundan Lindeberg Feller teoreminden,

$$\frac{\sum_{i=1}^n 6(n - 2i + 1)Z_i}{\sqrt{12(n - 1)n(n + 1)}} \xrightarrow{d} N(0, 1)$$

dir.  $Z_i = \frac{Y_i - \mu}{\sigma}$  değerinin yukarıda kullanılmasıyla,

$$\frac{\sum_{i=1}^n 6(n - 2i + 1)Y_i}{\sqrt{(n - 1)n(n + 1)}} \xrightarrow{d} N(0, 12\sigma^2) \quad (2.3)$$

olarak elde edilir.

## 2.5 Newton-Raphson Yöntemi

$L(\theta_1, \dots, \theta_n)$  bir olabilirlik fonksiyonu olsun.

$$\frac{\partial L(\theta_1, \dots, \theta_n)}{\partial \theta_i} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, r \quad \text{denklemlerini göz önüne alalım. Analitik çözümü}$$

olmayan bu tür denklemleri çözmek için literatürde birçok yöntem bulunmakla beraber

bunlardan en çok kullanılanı Newton Raphson yöntemidir. Bu yöntem aşağıdaki gibi tarif edilir.

$i = 1, 2, \dots, r$  için  $\theta_i^0$   $\theta_i$  parametresinin gerçek değeri,

$$U_i(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_r) = \frac{\partial \log L(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_r)}{\partial \theta_i} \quad i = 1, 2, \dots, r$$

ve

$$V(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_r) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \log L(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_r)}{\partial \theta_1^2} & \frac{\partial^2 \log L(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_r)}{\partial \theta_1 \partial \theta_2} & \dots & \frac{\partial^2 \log L(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_r)}{\partial \theta_1 \partial \theta_r} \\ \frac{\partial^2 \log L(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_r)}{\partial \theta_2 \partial \theta_1} & \frac{\partial^2 \log L(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_r)}{\partial \theta_2^2} & \dots & \frac{\partial^2 \log L(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_r)}{\partial \theta_2 \partial \theta_r} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial^2 \log L(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_r)}{\partial \theta_r \partial \theta_1} & \frac{\partial^2 \log L(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_r)}{\partial \theta_r \partial \theta_2} & \dots & \frac{\partial^2 \log L(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_r)}{\partial \theta_r^2} \end{bmatrix}_{r \times r}$$

olsun.

$$U(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_r) = \begin{bmatrix} U_1(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_r) \\ \cdot \\ \cdot \\ U_r(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_r) \end{bmatrix} \quad \text{diyelim. } i = 1, 2, \dots, r \text{ için } \theta_i^* \quad \theta_i \text{ ile } \theta_i^0 \text{ arasında}$$

olmak üzere  $U(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_r)$ 'nin  $(\theta_1^0, \theta_2^0, \dots, \theta_r^0)$  etrafında Taylor serisine açılması ile denklem sistemi

$$U(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_r) = U(\theta_1^0, \theta_2^0, \dots, \theta_r^0) + V(\theta_1^0, \theta_2^0, \dots, \theta_r^0) \begin{bmatrix} \theta_1^* - \theta_1^0 \\ \theta_2^* - \theta_2^0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \theta_r^* - \theta_r^0 \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

yazılabilir (Gertsbakh 1989). (2.4)'de  $\theta_i = \hat{\theta}_i$  ( $i=1,2,\dots,r$ ) alınsın, burada  $\hat{\theta}_i$   $\theta_i$ 'nin ençok olabilirlik tahmin edicisidir. Bu durumda  $U(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \dots, \hat{\theta}_r) = 0$  olup (2.1)'den

$$\begin{bmatrix} \theta_1^* \\ \theta_2^* \\ \cdot \\ \cdot \\ \theta_r^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta_1^0 \\ \theta_2^0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \theta_r^0 \end{bmatrix} - V^{-1}(\theta_1^0, \theta_2^0, \dots, \theta_r^0) U(\theta_1^0, \theta_2^0, \dots, \theta_r^0)$$

bulunur. Yukarıdaki ifade yardımıyla  $i=1,2,\dots,r$  için  $\theta_i^{(1)}$   $\hat{\theta}_i$ 'nin başlangıç değeri olmak üzere,

$$\begin{bmatrix} \theta_1^{(m+1)} \\ \theta_2^{(m+1)} \\ \cdot \\ \cdot \\ \theta_r^{(m+1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta_1^{(m)} \\ \theta_2^{(m)} \\ \cdot \\ \cdot \\ \theta_r^{(m)} \end{bmatrix} - V^{-1}(\theta_1^{(m)}, \theta_2^{(m)}, \dots, \theta_r^{(m)}) U(\theta_1^{(m)}, \theta_2^{(m)}, \dots, \theta_r^{(m)}), \quad m=1,2,\dots$$

iterasyon işlemini göz önüne alalım.  $i=1,2,\dots,r$  için  $\theta_i^{(m)}, \theta_i^{(m+1)}$  sayısına yeterince yakınsa iterasyon durdurulur.  $m \rightarrow \infty$  iken  $i=1,2,\dots,r$  için  $\theta_i^{(m)} \rightarrow \hat{\theta}_i, i=1,2,\dots,r$  dir.

### 3. BAZI SAYMA SÜREÇLERİ

Burada ilk olarak sayma süreci tanıtıldıktan sonra homojen Poisson, homojen olmayan Poisson, yenileme ve geometrik sayma süreçleri verilir.

#### 3.1 Sayma Süreci

**Tanım 3.1.1**  $N(t)$ ,  $(0, t]$  aralığında gerçekleşen belli bir türden olayların sayısı olmak üzere  $\{N(t), t \geq 0\}$  stokastik sürecine bir sayma süreci denir.

$\{N(t), t \geq 0\}$  sayma süreci  $T = [0, \infty)$  ve  $E = \{0, 1, 2, \dots\}$  ile sürekli parametre ve kesikli durum uzaylı bir süreçtir.

$\{N(t), t \geq 0\}$  sayma süreci aşağıdaki özelliklere sahiptir.

i)  $N(t) \geq 0, \forall t \geq 0$

ii)  $N(t)$  tamsayı değerli bir rasgele değişkendir.

iii) Eğer  $s < t$  ise  $N(s) \leq N(t)$  dir.

iv)  $s < t$  için  $N(t) - N(s)$   $(s, t]$  aralığında gerçekleşen olay sayısıdır.

$\{N(t), t \geq 0\}$  bir sayma süreci olsun. Bu süreçte  $X_1$  rasgele değişkeni ilk olay gerçekleşinceye kadar geçen zaman süresi olmak üzere  $X_n$  rasgele değişkeni  $(n-1)$ . olay gerçekleştikten sonra  $n$ . olay gerçekleşinceye kadar geçen zaman süresi olsun.  $\{X_n, n = 1, 2, 3, \dots\}$  dizisine  $\{N(t), t \geq 0\}$  sürecinin varışlar arası zamanlar dizisi adı verilir. Bu dizi sayma sürecini tek olarak belirler.  $S_0 = 0$  ve  $S_n = X_1 + \dots + X_n, n = 1, 2, \dots$  yazalım.  $S_n$  sayma sürecinde  $n$ . olayın gerçekleşme zamanını gösterir.

Her sabit  $t \geq 0$  için

$$N(t) = \max \{n : S_n \leq t\}$$

olduğu açıktır. Ayrıca  $(N(t) \geq n)$  olayı  $(S_n \leq t)$  olayına denk olduğundan,

$$P(N(t) \geq n) = P(S_n \leq t)$$

olur.



### 3.2 Poisson Süreci

**Tanım 3.2.1**  $\{N(t), t \geq 0\}$  bir sayma süreci olsun.

i)  $N(0) = 0$

ii)  $\{N(t), t \geq 0\}$  bağımsız artışı

iii)  $t$  uzunluklu bir aralıkta gerçekleşen olayların sayısının dağılımı  $\lambda t$  ortalamalı Poisson, yani  $P(N(t+s) - N(s) = k) = e^{-\lambda t} (\lambda t)^k / k!$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$

özelliklerini sağlayan  $\{N(t), t \geq 0\}$  sayma sürecine  $\lambda$  oranlı bir Poisson süreci denir.

iii) özelliğinden dolayı bir Poisson süreci aynı zamanda durağan artışıdır.

Bu sürece göre olaylar arası geçen zaman süreleri bağımsız ve aynı  $1/\lambda$  beklenen değeri ile üstel dağılımlıdır.

### 3.3 Homojen Olmayan Poisson Süreci

**Tanım 3.3.1**  $\{N(t), t \geq 0\}$  bir sayma süreci olsun.  $t \geq 0$  için  $\lambda(t)$   $t$ 'nin bir fonksiyonu olmak üzere

i)  $N(0) = 0$

ii)  $\{N(t), t \geq 0\}$  bağımsız artışı

iii)  $P(N(t+h) - N(t) \geq 2) = o(h)$

iv)  $P(N(t+h) - N(t) = 1) = \lambda(t)h + o(h)$

ise  $\{N(t), t \geq 0\}$  sayma sürecine  $\lambda(t)$  şiddet fonksiyonlu homojen olmayan Poisson süreci denir.

**Teorem 3.3.1**  $\{N(t), t \geq 0\}$   $\lambda(t)$  şiddet fonksiyonu ile homojen olmayan bir Poisson süreci olsun.

$$M(t) = \int_0^t \lambda(s) ds \text{ olmak üzere}$$

$$N(t+s) - N(s) \square \text{Poisson}(M(t+s) - M(s))$$

yani

$$P(N(t+s) - N(s) = k) = e^{-[M(t+s) - M(s)]} [M(t+s) - M(s)]^k / k! \quad k = 0, 1, \dots$$

dir.

$\{N(t), t \geq 0\}$   $\lambda(t)$  şiddet fonksiyonu ile homojen olmayan bir Poisson süreci olsun.  $X_1, X_2, \dots$  rasgele değişkenleri bu sürece göre gerçekleşen ardışık olaylar arası geçen zaman süreleri olmak üzere  $X_1, X_2, \dots$  bağımsız ve aynı dağılımlı olmak zorunda değiller.

### 3.4 Yenileme Süreci

**Tanım 3.4.1**  $\{N(t), t \geq 0\}$  sayma sürecinde olaylar (yenilemeler) arası geçen zaman süreleri birbirinden bağımsız ve aynı  $F$  dağılımlı rasgele değişkenler ise  $\{N(t), t \geq 0\}$  sayma sürecine bir yenileme süreci denir.

$\{N(t), t \geq 0\}$  bir yenileme süreci olsun.  $X_n$  rasgele değişkeni  $(n-1)$ . ve  $n$ . yenilemeler arasında geçen zaman süresini gösterir.

Her sabit  $t \geq 0$  için

$$N(t) = \max\{n : S_n \leq t\}$$

dir. Yenileme rasgele değişkeni olarak adlandırılan  $N(t)$   $t$  zamanına kadar, yani  $(0, t]$  zaman aralığında gerçekleşen yenilemelerin sayısını ifade eder.

### 3.5 Geometrik Süreç

**Tanım 3.5.1**  $\{X_n, n = 1, 2, \dots\}$  negatif değerler almayan rasgele değişkenlerin herhangi bir dizisi olsun.  $\{a^{n-1} X_n, n = 1, 2, \dots\}$  bağımsız ve aynı dağılımlı rasgele değişkenlerin herhangi bir dizisi olacak şekilde bir  $a > 0$  sayısı var ise  $\{X_n, n = 1, 2, \dots\}$  dizisinin oluşturduğu sayma sürecine  $a$  oranlı bir geometrik süreç denir.

$0 < a \leq 1$  için geometrik süreç stokastik artan iken  $a \geq 1$  için stokastik azalandır.

### 3.5.1 Geometrik Süreçte Olaylar Arası Geçen Zamanın ve Bekleme Zamanının Dağılımı

$\{N^G(t), t \geq 0\}$   $a$  oranlı bir geometrik süreç olsun. Bu sürecin tanımından bu sürece göre gerçekleşen olaylar arası geçen zaman süreleri olan  $X_n$  rasgele değişkenleri bağımsızdır. Fakat aynı dağılımlı değildirler. Yalnızca  $a=1$  durumunda bu rasgele değişkenler aynı dağılımlıdır ve karşımıza çıkan geometrik süreç bir yenileme süreci olur.

$$Y_n = a^{n-1} X_n, n = 1, 2, \dots$$

diyelim. Bu durumda  $Y_n$  dizisi olaylar arası geçen zaman süreleri dağılım fonksiyonu  $F$  ortalaması  $\mu$  ve varyansı  $\sigma^2$  olan

$$N(t) = \text{maks} \{n : S_n \leq t\}$$

ile tanımlı  $\{N(t), t \geq 0\}$  yenileme sürecini oluşturur.

Böylelikle  $X_n$  rasgele değişkeninin dağılım fonksiyonu

$$\begin{aligned} F_{X_n}(x) &= P(X_n \leq x) \\ &= P(a^{-n+1} Y_n \leq x) \\ &= P(Y_n \leq x a^{n-1}) \\ &= F(a^{n-1} x) \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

olarak bulunur. Ayrıca

$$E(X_n) = a^{-n+1} \mu$$

ve

$$V(X_n) = a^{-2n+2} \sigma^2$$

olduğu açıktır.

#### 4. SAYMA SÜRECİNDEN GELEN VERİ SETİNİN GEOMETRİK SÜRECE UYGUNLUĞUNUN İNCELENMESİ

Sayma sürecinden gelen veri setinin geometrik sürece uygunluğunun incelenmesi için aşağıda verilen iki teoremden faydalanılabilir.

**Teorem 4.1**  $\{X_n, n = 1, 2, \dots\}$  geometrik süreç ise,

$$U_n = X_{2n} / X_{2n-1}, \quad n = 1, 2, \dots$$

ile verilen  $U_n$  ler bağımsız ve aynı dağılımlı rasgele değişkenlerdir (Lam 1992b).

**İspat:**  $X_1, X_2, \dots$  rasgele değişkenleri bağımsız olduğundan  $U_1, U_2, \dots$  rasgele değişkenlerinin bağımsız olduğu açıktır.

$$f_{X_n}(x) = a^{n-1} f(xa^{n-1}) \quad \text{ve} \quad F_{X_n}(x) = F(a^{n-1}x)$$

olduğunu biliyoruz.

$X_{2n-1}$  rasgele değişkeni üzerinden koşullandırma ile,

$$\begin{aligned} F_{U_n}(u) &= P(U_n \leq u) = P\left(\frac{X_{2n}}{X_{2n-1}} \leq u\right) \\ &= \int_0^{\infty} P\left(\frac{X_{2n}}{X_{2n-1}} \leq u / X_{2n-1} = x\right) f_{X_{2n-1}}(x) dx \\ &= \int_0^{\infty} P(X_{2n} \leq ux) f_{X_{2n-1}}(x) dx \\ &= \int_0^{\infty} F_{X_{2n}}(ux) f_{X_{2n-1}}(x) dx \\ &= \int_0^{\infty} F(a^{2n-1}ux) a^{2n-2} f(xa^{2n-2}) dx . \end{aligned}$$

$xa^{2n-2} = t$  değişken değiştirmesinin yapılmasıyla  $dx = \frac{dt}{a^{2n-2}}$

olup

$$F_{U_n}(u) = \int_0^{\infty} F(aut)f(t)dt \quad n=1,2,\dots$$

bulunur.  $U_n$ 'in dağılım fonksiyonu  $n$ 'den bağımsız olduğundan  $U_n$ 'ler aynı dağılımlıdır. Böylece ispat tamamlanır.

**Teorem 4.2**  $\{X_n, n=1,2,\dots\}$  geometrik süreç ise, herhangi bir  $m$  doğal sayısı için

$$V_n = X_n X_{2m+1-n}, \quad n=1,2,\dots,m,$$

ile verilen  $V_n$  ler bağımsız ve aynı dağılımlı rasgele değişkendirler (Lam 1992b).

**İspat:**  $X_1, X_2, \dots$  rasgele değişkenleri bağımsız olduğundan  $V_1, V_2, \dots$  rasgele değişkenlerinin bağımsız olduğu açıktır.

$$f_{X_n}(x) = a^{n-1} f(xa^{n-1}) \quad \text{ve} \quad F_{X_n}(x) = F(a^{n-1}x)$$

olduğunu biliyoruz.

$X_{2m-n+1}$  rasgele değişkeni üzerinden koşullandırma ile,

$$\begin{aligned} F_{V_n}(v) &= P(V_n \leq v) = P(X_n X_{2m-n+1} \leq v) \\ &= \int_0^{\infty} P(X_n X_{2m-n+1} \leq v / X_{2m-n+1} = x) f_{X_{2m-n+1}}(x) dx \\ &= \int_0^{\infty} P(X_n \leq \frac{v}{x}) f_{X_{2m-n+1}}(x) dx \\ &= \int_0^{\infty} F_{X_n}(\frac{v}{x}) f_{X_{2m-n+1}}(x) dx \\ &= \int_0^{\infty} F(a^{n-1} \frac{v}{x}) a^{2m-n} f(xa^{2m-n}) dx. \end{aligned}$$

$xa^{2m-n} = t$  değişken değiştirmesinin yapılmasıyla  $dx = \frac{dt}{a^{2m-n}}$

olup

$$F_{V_n}(v) = \int_0^{\infty} F(a^{2m-1} \frac{v}{t}) f(t) dt, \quad n=1,2,\dots$$

bulunur.  $V_n$ 'in dağılım fonksiyonu  $n$ 'den bağımsız olduğundan  $V_n$  ler aynı dağılımlıdır. Böylece ispat tamamlanır.

Uygulamada sayma sürecinden gelen veri setinin geometrik sürece uygun olup olmadığını test etmek için aşağıdaki alt başlıklarda verilen adımlar izlenir.

#### 4.1 Trend Analizi

$\{N(t), t \geq 0\}$  bir sayma süreci olmak üzere  $X_1, X_2, \dots, X_n$  ler bu sayma sürecine göre gerçekleşen ilk  $n$  olay için olaylar arası geçen zaman sürelerini gösterebilir.

$i = 1, 2, \dots, n$  ve  $j > i$  için

$$P(X_i > x) \geq (\leq) P(X_j > x), \forall x > 0,$$

yani  $X_i \geq_{st} (\leq_{st}) X_j$  olması sayma sürecinden gelen  $X_1, X_2, \dots, X_n$  veri setinin monoton eğilimli olduğunu ifade eder. Burada  $X_1, X_2, \dots, X_n$  rasgele değişkenlerinin bağımsız olduğu kabul edilir. Literatürde trend analizi yapmak için bir çok yöntem bulunmakla beraber bunlardan en çok kullanılanı Laplace'ın testidir. Bu test için hipotezler aşağıdaki gibi kurulur.

$$H_0 : \text{HPS}$$

$$H_1 : \text{Monotonik trend.}$$

$n$ . varış zamanı  $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$  olmak üzere  $H_0$  hipotezi altında, ilk  $n-1$  varış zamanları olan  $S_1, S_2, \dots, S_{n-1}$  rasgele değişkenlerine  $(0, S_n]$  aralığından alınmış düzgün dağılıma sahip  $n-1$  tane rasgele değişkenin sıra istatistikleri olarak bakılabilir. Bu durumda merkezi limit teoreminden,

$$U = \frac{\sum_{i=1}^{n-1} S_i - \frac{(n-1)S_n}{2}}{S_n \sqrt{\frac{1}{12(n-1)}}}$$

rasgele değişkeni büyük  $n$  için yaklaşık olarak standart normal dağılıma sahiptir (Cox and Lewis 1966).

#### 4.2 Sayma Sürecinden Gelen Veri Setinin Bağımsız ve Aynı Dağılımlı Olup Olmadığının İncelenmesi

Sayma sürecinden gelen veri setinin trende sahip olduğu belirlendikten sonra, bunların geometrik süreç olup olmadığı test edilir. Bunun için daha önce verilen Teorem 4.1 ve Teorem 4.2'den faydalanılır.

$$N = 2m \text{ için } U_n = X_{2n} / X_{2n-1}, V_n = X_n X_{2m+1-n}, n = 1, 2, \dots, m$$

ve

$$N = 2m + 1 \text{ için } U_n = X_{2n} / X_{2n-1}, V_n = X_{n+1} X_{2m+2-n}, n = 1, 2, \dots, m$$

ile verilen  $U_n$  ve  $V_n$  lerin bağımsız ve aynı dağılımlı olup olmadıkları test edilir. Bunun için literatürde birçok parametrik olmayan yöntem bulunmakla beraber bunlardan en çok kullanılanları “Turning Point “ve “Difference Sign” testleridir.

$\{W_n, n = 1, 2, \dots\}$  sayma sürecinden gelen veri setinin bağımsız ve aynı dağılımlı rasgele değişkenler olup olmadığının test edilmesi için hipotezler,

$$H_0 : W_n \text{ ler bağımsız ve aynı dağılımlıdır.}$$

$$H_1 : W_n \text{ ler bağımsız ve aynı dağılımlı değildir.}$$

şeklinde kurulur.

(1) “Turning Point Test”

$H_0$  hipotezi altında,

$$T_w = \sum_{n=2}^{m-1} I((W_n - W_{n-1})(W_{n+1} - W_n) < 0)$$

olmak üzere

$$T_w^* = \frac{T_w - \frac{2(m-2)}{3}}{\sqrt{\frac{16m-29}{90}}}$$

rasgele değişkeni büyük  $n$  için yaklaşık olarak standart normal dağılıma sahiptir (Ascher and Feingold 1984).

(2) “Difference Sign Test”

$H_0$  hipotezi altında,

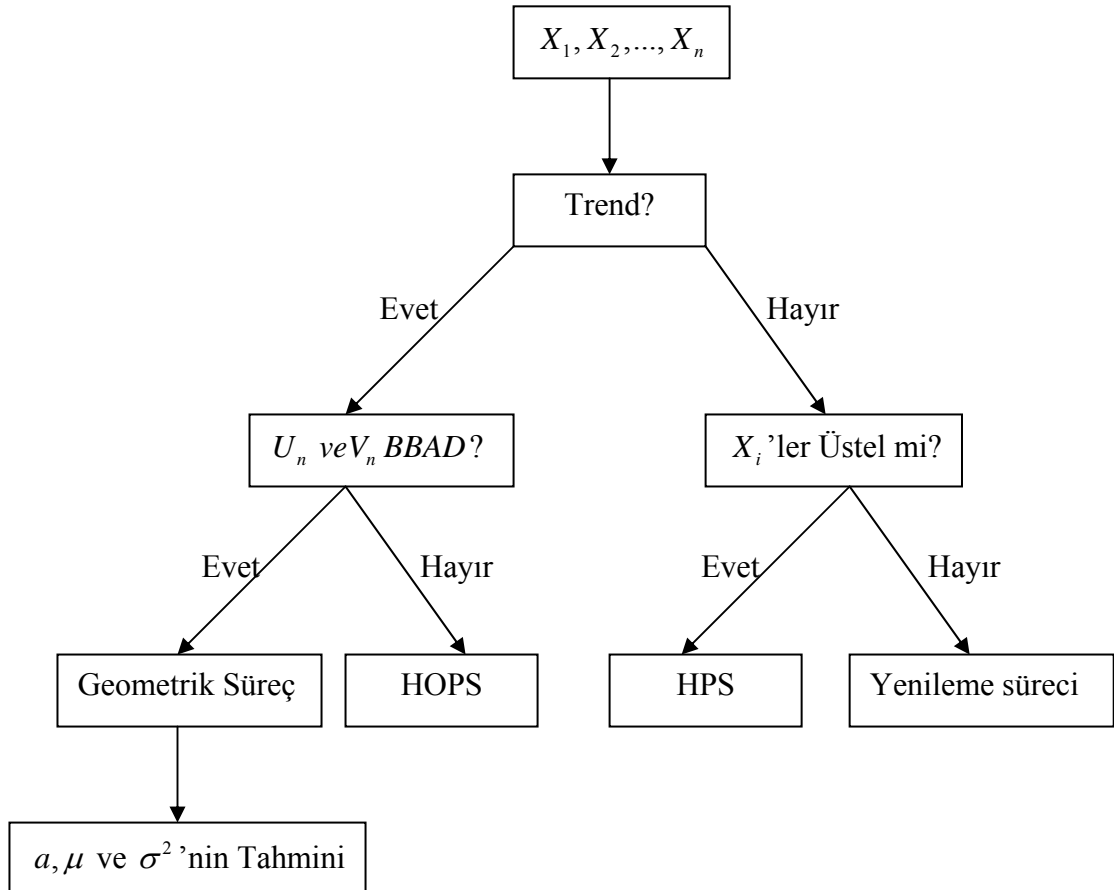
$$D_w = \sum_{n=2}^m I(W_n > W_{n-1})$$

olmak üzere

$$D_w^* = \frac{D_w - \frac{m-1}{2}}{\sqrt{\frac{m+1}{12}}}$$

rasgele değişkeni büyük  $n$  için yaklaşık olarak standart normal dağılıma sahiptir (Ascher and Feingold 1984).

Sayma sürecinden gelen veri setinin geometrik sürece uygunluğunun incelenmesi için diğer bir yaklaşım ise grafik tekniğidir. Bu teknikte  $\ln X_n$ 'in  $n$ 'e karşı grafiği çizilerek aralarında liner bir ilişki olup olmadığı kontrol edilir. Eğer aralarında liner bir ilişki var ise bu durumda sayma sürecinden gelen veri seti için geometrik süreç model olarak önerilebilir.





## Şekil 4.1 Model Seçimi

### 5. BİR GEOMETRİK SÜREÇLE İLGİLİ PARAMETRELERİN PARAMETRİK OLMAYAN TAHMİNİ

Bu bölümde sayma sürecinden gelen veri setinin geometrik süreç olduğunu varsayarak  $a, \mu$  ve  $\sigma^2$ 'nin en küçük kareler yöntemiyle tahmini elde edilecektir. Burada geometrik süreçte ilk olay gerçekleşinceye kadar geçen zaman süresi olan  $X_1$ 'in  $F$  dağılım fonksiyonunun bilinmediği kabul edilmektedir.

$$Y_k = a^{k-1} X_k, \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (5.1)$$

ve

$$\ln Y_k = (k-1) \ln a + \ln X_k, \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (5.2)$$

$Y_k$ 'lar bağımsız ve aynı dağılımlı olduğundan

$$\ln Y_k = \alpha + e_k, \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (5.3)$$

şeklinde yazılabilir.

$E(\ln Y_k) = \alpha$  ve  $e_k$ 'lar 0 ortalamalı,  $\sigma_e^2$  varyanslı bağımsız ve aynı dağılımlı rasgele değişkenlerdir. (5.3)'den

$$\ln X_k = \alpha - (k-1) \ln a + e_k, \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (5.4)$$

basit lineer regresyon denklemi elde edilir.

#### 5.1 Katsayıların Tahmini

(5.4)'den  $\beta = \ln a$  olmak üzere

$$\sum_{k=1}^n e_k^2 = \sum_{k=1}^n (\ln X_k - \alpha + (k-1)\beta)^2$$

bulunur.

$$HKT = \sum_{k=1}^n (\ln X_k - \alpha + (k-1)\beta)^2$$

olmak üzere bu değeri minimum yapacak  $\alpha$  ve  $\beta$  değerlerinin hesaplanması için  $\alpha$  ve  $\beta$ 'ya göre kısmi türevler alınarak sifira eşitlenir.

$$\frac{\partial HKT}{\partial \alpha} = -2 \sum_{k=1}^n (\ln X_k - \alpha + (k-1)\beta) = 0$$

$$\frac{\partial HKT}{\partial \beta} = 2 \sum_{k=1}^n [(\ln X_k - \alpha + (k-1)\beta)(k-1)] = 0$$

buradan

$$\sum_{k=1}^n \ln X_k = n\alpha - \beta \sum_{k=1}^n (k-1)$$

ve

$$\sum_{k=1}^n (k-1) \ln X_k = \alpha \sum_{k=1}^n (k-1) - \beta \sum_{k=1}^n (k-1)^2$$

denklem sistemi elde edilir. Sistemin çözülmesiyle  $\alpha$  ve  $\beta$ 'nin en küçük kareler tahmin edicileri olan  $\hat{\alpha}$  ve  $\hat{\beta}$  sırasıyla

$$\hat{\alpha} = \frac{2}{n(n+1)} \left\{ (2n-1) \sum_{k=1}^n \ln X_k - 3 \sum_{k=1}^n (k-1) \ln X_k \right\} \quad (5.5)$$

ve

$$\hat{\beta} = \frac{2}{(n-1)n(n+1)} \left\{ 3(n-1) \sum_{k=1}^n \ln X_k - 6 \sum_{k=1}^n (k-1) \ln X_k \right\} \quad (5.6)$$

olarak elde edilir.

## 5.2 Regresyon Denklemine Hatasının ( $\sigma_e^2$ ) Tahmini

$$\ln X_k = \alpha - (k-1) \ln a + e_k, \quad k=1, 2, \dots, n$$

regresyon denkleminde  $\ln X_k$  ve  $-(k-1)$  yerine sırasıyla  $Y_k$  ve  $Z_k$  yazılmasıyla

$$Y_k = \alpha + \beta Z_k + e_k, \quad k=1, 2, \dots, n$$

elde edilir.

$$\hat{\alpha} = \bar{Y} - \hat{\beta} \bar{Z} \quad \text{ve} \quad \hat{\beta} = \frac{\sum_{k=1}^n (Z_k - \bar{Z})(Y_k - \bar{Y})}{\sum_{k=1}^n (Z_k - \bar{Z})^2}$$

olur.  $\sigma_e^2$ 'nin en küçük kareler tahmin edicisinin

$$\hat{\sigma}_e^2 = \sum_{k=1}^n (Y_k - \hat{Y}_k)^2 / (n-2)$$

olduğu bilinmektedir. Bu durumda

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_e^2 &= \sum_{k=1}^n (Y_k - \bar{Y} + \hat{\beta}\bar{Z} - \hat{\beta}Z_k)^2 / (n-2) \\ &= \sum_{k=1}^n (Y_k - \bar{Y} + \hat{\beta}(Z_k - \bar{Z}))^2 / (n-2) \\ &= \left[ \sum_{k=1}^n (Y_k - \bar{Y})^2 - 2\hat{\beta} \sum_{k=1}^n (Y_k - \bar{Y})(Z_k - \bar{Z}) + \hat{\beta}^2 \sum_{k=1}^n (Z_k - \bar{Z})^2 \right] / (n-2) \\ &= \left[ \sum_{k=1}^n (Y_k - \bar{Y})^2 - \hat{\beta}^2 \sum_{k=1}^n (Z_k - \bar{Z})^2 \right] / (n-2) \\ &= \left[ \sum_{k=1}^n Y_k^2 - \frac{(\sum_{k=1}^n Y_k)^2}{n} - \hat{\beta}^2 \left\{ \sum_{k=1}^n Z_k^2 - \frac{(\sum_{k=1}^n Z_k)^2}{n} \right\} \right] / (n-2) \end{aligned}$$

olur.

$\ln X_k = Y_k$  ve  $-(k-1) = Z_k$  olduğunun göz önüne alınmasıyla

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_e^2 &= \left[ \sum_{k=1}^n (\ln X_k)^2 - \frac{(\sum_{k=1}^n \ln X_k)^2}{n} - \hat{\beta}^2 \left\{ \sum_{k=1}^n (-(k-1))^2 - \frac{(\sum_{k=1}^n -(k-1))^2}{n} \right\} \right] / (n-2) \\ &= \left[ \sum_{k=1}^n (\ln X_k)^2 - \frac{(\sum_{k=1}^n \ln X_k)^2}{n} - \hat{\beta}^2 \frac{(n-1)n(n+1)}{12} \right] / (n-2) \end{aligned} \quad (5.7)$$

bulunur.

### 5.3 Geometrik Sürecin Parametrelerinin Tahmini

(5.4)'de verilen

$$\ln X_k = \alpha - (k-1) \ln a + e_k, \quad k = 1, 2, \dots, n$$

regresyon denkleminde  $\beta$ 'nin en küçük kareler tahmin edicisinin

$$\hat{\beta} = \frac{2}{(n-1)n(n+1)} \left\{ 3(n-1) \sum_{k=1}^n \ln X_k - 6 \sum_{k=1}^n (k-1) \ln X_k \right\}$$

olduğunu biliyoruz.  $\beta = \ln a$  olduğundan geometrik sürecin  $a$  oranı için bir tahmin edici

$$\begin{aligned} \hat{a} &= e^{\hat{\beta}} \\ &= e^{\frac{2}{(n-1)n(n+1)} \left\{ 3(n-1) \sum_{k=1}^n \ln X_k - 6 \sum_{k=1}^n (k-1) \ln X_k \right\}} \end{aligned}$$

olur.

(5.1) ve (5.3)'ün kullanılmasıyla

$$\sigma^2 = \text{Var}(X_1) = \text{Var}(Y_k) = e^{2\alpha} \text{Var}(e^{e_k})$$

olur. Taylor seri yaklaşımı ile  $e^{e_k} \approx 1 + e_k$  olduğundan

$$\begin{aligned} \sigma^2 &\approx e^{2\alpha} \text{Var}(e_k) \\ &= e^{2\alpha} \sigma_e^2 \end{aligned}$$

elde edilir. Bu durumda  $\alpha$  ve  $\sigma_e^2$  parametrelerinin en küçük kareler tahmin edicilerine bağlı olarak

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_1^2 &= e^{2\hat{\alpha}} \hat{\sigma}_e^2 \\ &= e^{\frac{2}{n(n+1)} \left\{ (2n-1) \sum_{k=1}^n \ln X_k - 3 \sum_{k=1}^n (k-1) \ln X_k \right\}} \left[ \sum_{k=1}^n (\ln X_k)^2 - \frac{(\sum_{k=1}^n \ln X_k)^2}{n} - \hat{\beta}^2 \frac{(n-1)n(n+1)}{12} \right] / (n-2) \end{aligned}$$

ile tanımlanan  $\hat{\sigma}_1^2$   $F$  dağılımının varyansı olan  $\sigma^2$ 'nin bir tahmin edicisi olarak ele

alınabilir. Ayrıca,  $Y_k = a^{k-1} X_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$  olduğu göz önüne alınmasıyla

$\hat{Y}_k = \hat{a}^{k-1} X_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$  yazılabildiğinden  $\sigma^2$  için ikinci bir tahmin edici

$$\hat{\sigma}_2^2 = \left[ \sum_{k=1}^n (\hat{a}^{k-1} X_k)^2 - \frac{(\sum_{k=1}^n (\hat{a}^{k-1} X_k))^2}{n} \right] / (n-1)$$

olarak tanımlanabilir.

$$E(Y_k) = \mu, \quad k = 1, 2, \dots, n \text{ olduğundan}$$

$$Y_k = \mu + \varepsilon_k$$

yazılabilir. Burada  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$  bir birinden bağımsız 0 ortalamalı ve  $\sigma^2$  varyanslı rasgele değişkenlerdir.

$$\varepsilon'_k = \frac{\varepsilon_k}{\mu} \quad k=1,2,\dots,n \text{ denilirse}$$

$$Y_k = \mu(1 + \varepsilon'_k) \quad k=1,2,\dots,n$$

olur. Burada  $E(\varepsilon'_k) = 0$  ve  $V(\varepsilon'_k) = \sigma^2 / \mu^2 \quad k=1,2,\dots,n$

Ayrıca

$$\ln Y_k = \ln \mu + \ln(1 + \varepsilon'_k)$$

olup her iki tarafın beklenen değeri alınırsa

$$\alpha = \ln \mu + E(\ln(1 + \varepsilon'_k))$$

olur. Taylor seri yaklaşımı ile  $\ln(1 + \varepsilon'_k) \approx \varepsilon'_k - \varepsilon'^2_k / 2$  olduğundan

$$\begin{aligned} \alpha &\approx \ln \mu - \text{Var}(\varepsilon'_k) / 2 \\ &= \ln \mu - \sigma^2 / 2\mu^2 \end{aligned}$$

elde edilir.  $\alpha$  ve  $\sigma^2$  parametrelerinin tahminlerinin yukarıda kullanılmasıyla

$$2\mu^2 \ln \mu - 2\hat{\alpha}\mu^2 - \hat{\sigma}_i^2 = 0, \quad i=1,2$$

olarak elde edilen  $\mu$ 'ye göre lineer olmayan bu denklemin çözülmesiyle  $\mu$  için  $i$ 'ye göre sırasıyla  $\hat{\mu}_1$  ve  $\hat{\mu}_2$  ile gösterilen iki tahmin edici elde edilebilir. Bu denklemin analitik bir çözümü yoktur. Bu sebepten  $i=1,2$  için  $\hat{\mu}_1$  ve  $\hat{\mu}_2$  tahminleri yaklaşık olarak hesaplatılabilir.

$\ln Y_k$  için (5.3)'de verilen

$$\ln Y_k = \alpha + e_k, \quad k=1,2,\dots,n$$

ifadesini göz önüne alalım, burada  $e_1, e_2, \dots, e_n$  bağımsız, 0 ortalamalı ve  $\sigma_e^2$  varyanslı aynı dağılımlı rasgele değişkenlerdir.

$$Y_k = e^\alpha e^{e_k}, \quad k=1,2,\dots,n$$

olup, Taylor serisi yaklaşımı ile  $e^{e_k} \approx 1 + e_k + e_k^2 / 2$  olduğundan

$$\begin{aligned}
\mu &= e^\alpha E(e^{e_k}) \\
&\approx e^\alpha E(1 + e_k + e_k^2 / 2) \\
&= e^\alpha (1 + \text{Var}(e_k / 2)) \\
&= e^\alpha (1 + \sigma_e^2 / 2)
\end{aligned}$$

bulunur. Bu durumda yukarıdaki ifadede  $\alpha$  ve  $\sigma_e^2$ 'nin sırasıyla Kısım (5.1) ve Kısım (5.2)'de verilen  $\hat{\alpha}$  ve  $\hat{\sigma}_e^2$  tahmin edicilerinin kullanılmasıyla

$$\hat{\mu}_3 = e^{\hat{\alpha}} (1 + \hat{\sigma}_e^2 / 2)$$

ile verilen  $\mu$  için üçüncü bir tahmin edici tanımlanmış olur.

$$S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n, \quad n = 1, 2, \dots$$

olmak üzere

$$\begin{aligned}
E(S_n) &= \sum_{k=1}^n E(X_k) \\
&= \sum_{k=1}^n a^{-k+1} \mu \\
&= \frac{\mu(1 - a^{-n})}{(1 - a^{-1})}
\end{aligned}$$

dir. Böylece  $S_n$ ,  $\frac{\mu(1 - a^{-n})}{(1 - a^{-1})}$  için yansız bir tahmin edicidir. Bu durumda  $a$  yerine Kısım

(5.3)'de verilen  $a$ 'nın en küçük kareler tahmin edicisi olan  $\hat{a}$ 'nın alınmasıyla  $\mu$  için

$$\hat{\mu}_4 = \frac{S_n(1 - \hat{a}^{-1})}{(1 - \hat{a}^{-n})}$$

ile dördüncü bir tahmin edici tanımlanmış olur.

$$Y_k = a^{k-1} X_k, \quad k = 1, 2, \dots, n$$

olduğundan

$$\hat{Y}_k = \hat{a}^{k-1} X_k, \quad k = 1, 2, \dots, n$$

olup  $\mu$  için beşinci bir tahmin edici

$$\hat{\mu}_5 = \frac{\sum_{k=1}^n \hat{a}^{k-1} X_k}{n}$$

ile verilir.

#### 5.4 Yenileme Sürecinin Geometrik Süreçten Ayırt Edilmesine Yönelik Bir Test

Bir geometrik sürecin yenileme süreci olması demek sürecin  $a$  oranının 1 olması demektir. Bize verilen bir geometrik sürecin yenileme süreci olup olmadığını anlamak için aşağıda verilen hipotezin test edilmesi gerekir.

$$H_0 : a = 1$$

$$H_1 : a \neq 1$$

$a = e^\beta$  olduğundan yukarıdaki hipotez

$$H_0 : \beta = 0$$

$$H_1 : \beta \neq 0$$

hipotezine denktir.

(5.4)'de verilen  $\ln X_k = \alpha - (k-1) \ln a + e_k$ ,  $k=1,2,\dots,n$  denkleminde, eğer  $e_k$ 'lar 0 ortalamalı ve  $\sigma_e^2$  varyanslı normal dağılımlı iseler

$$\hat{\beta} \square N\left(\beta, \frac{12\sigma_e^2}{(n-1)n(n+1)}\right)$$

olduğu bilinen bir sonuçtur. Bu durumda  $e_k$ 'lar üzerindeki normallik varsayımı ile birlikte  $H_0$  hipotezi altında

$$t = \frac{\hat{\beta} \sqrt{(n-1)n(n+1)}}{\sqrt{12\hat{\sigma}_e^2}} \square t(n-2)$$

dir. Bu test istatistiğinin sonucunda  $H_0$  hipotezi red edilmezse, yani  $a=1$  ise  $\mu$  ve  $\sigma^2$  için aşık olarak aşağıdaki tahmin ediciler kullanılır.

$$\hat{\mu}_6 = \bar{X} = \frac{\sum_{k=1}^n X_k}{n}$$

ve

$$\hat{\sigma}_3^2 = \frac{\sum_{k=1}^n (X_k - \bar{X})^2}{n-1}.$$

#### 5.5 Tahmin Edicilerin Asimptotik Dağılımları

**Teorem 5.5.1** Eğer  $E(\ln Y)^2 < \infty$  ise

$$n^{3/2}(\hat{\beta} - \beta) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} N(0, 12\sigma_e^2) \quad (5.8)$$

dır (Lam ve diğerleri 2004).

**İspat :**  $\beta = \ln a$ ,  $\sum_{i=1}^k (n-2k+1) = 0$  ve  $\sum_{i=1}^k (n-2k+1)k = -\frac{(n-1)n(n+1)}{6}$  olduğundan,

$\hat{\beta}$ 'nin (5.6)'da verilen en küçük kareler tahmin edicisinin kullanılmasıyla,

$$\begin{aligned} \hat{\beta} - \beta &= \frac{6}{(n-1)n(n+1)} \sum_{k=1}^n (n-2k+1) \ln X_k - \ln a \\ &= \frac{6}{(n-1)n(n+1)} \left\{ \sum_{k=1}^n (n-2k+1) \ln X_k + \sum_{k=1}^n (n-2k+1)(k-1) \ln a \right\} \\ &= \frac{6}{(n-1)n(n+1)} \left\{ \sum_{k=1}^n (n-2k+1)(\ln X_k + (k-1) \ln a) \right\} \\ &= \frac{6}{(n-1)n(n+1)} \sum_{k=1}^n (n-2k+1) \ln Y_k \\ &= \frac{6}{(n-1)n(n+1)} \sum_{k=1}^n (n-2k+1)(\ln Y_k - \alpha) \end{aligned}$$

elde edilir, burada  $\alpha = E(\ln Y)$  dır.

Daha sonra,

$$\sqrt{(n-1)n(n+1)}(\hat{\beta} - \beta) = \frac{1}{\sqrt{(n-1)n(n+1)}} \sum_{k=1}^n 6(n-2k+1)(\ln Y_k - \alpha) \quad (5.9)$$

olarak düzenlenir.

$$B_{nk} = 6(n-2k+1)(\ln Y_k - \alpha) \quad k = 1, 2, \dots, n$$

diyelim. Burada  $B_{nk}$  lar birbirinden bağımsız fakat aynı dağılımlı değildirler ve

$$B_n^2 = \sum_{k=1}^n \text{Var}(B_{nk}) = 36\sigma_e^2 \sum_{k=1}^n (n-2k+1)^2 = 12\sigma_e^2(n-1)n(n+1)$$

olarak elde edilir.  $B_{nk}$ 'nin dağılım fonksiyonu  $G_{nk}$  ve  $(\ln Y_k - \alpha)$  ların dağılım fonksiyonu  $G$  olmak üzere



$$\begin{aligned}
L_n &= \frac{1}{B_n^2} \sum_{k=1}^n \int_{|z| \geq \varepsilon B_n} z^2 dG_{nk}(z) \\
&= \frac{1}{B_n^2} \sum_{k=1}^n \int_{6|(n-2k+1)w| \geq \varepsilon B_n} 36(n-2k+1)^2 w^2 dG(w) \\
&\leq \frac{1}{B_n^2} \sum_{k=1}^n \int_{6|(n-1)w| \geq \varepsilon B_n} 36(n-1)^2 w^2 dG(w) \\
&= \frac{36n(n-1)^2}{B_n^2} \sum_{k=1}^n \int_{|w| \geq \varepsilon B_n / (6(n-1))} w^2 dG(w) \\
&\rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty
\end{aligned}$$

olur. Ayrıca,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{(n-1)n(n+1)}}{n^{3/2}} = 1$$

olduğundan, Lindeberg Feller ve Slutsky teoreminden

$$n^{3/2}(\hat{\beta} - \beta) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} N(0, 12\sigma_e^2)$$

bulunur. Böylece ispat tamamlanmış olur.

**Teorem 5.5.2** Eğer  $E(\ln Y)^2 < \infty$  ise

$$n^{3/2}(\hat{a} - a) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} N(0, 12a^2\sigma_e^2) \quad (5.10)$$

dır.

**İspat :** Delta yönteminin (5.8) ifadesine uygulanmasıyla ispat tamamlanır.

$$\hat{Y}_k = \hat{a}^{k-1} X_k, \quad \bar{\hat{Y}} = \sum_{k=1}^n \hat{Y}_k / n \quad \text{ve} \quad \bar{X} = \sum_{k=1}^n X_k / n \quad \text{olmak üzere,}$$

$$\hat{\mu} = \begin{cases} \bar{\hat{Y}}, & a \neq 1 \\ \bar{X}, & a = 1 \end{cases} \quad (5.11)$$

ve

$$\hat{\sigma}^2 = \begin{cases} \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^n (\hat{Y}_k - \bar{\hat{Y}})^2, & a \neq 1 \\ \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^n (X_k - \bar{X})^2, & a = 1 \end{cases} \quad (5.12)$$

ile verilen  $\hat{\mu}$  ve  $\hat{\sigma}^2$  tahmin edicileri dağılımın ortalamasının ve varyansının momentler tahmini olarak ele alınabilir. Aşağıda verilecek olan teoremlerle bu tahmin edicilerin asimptotik dağılımları elde edilir.

### Teorem 5.5.3

(i) Eğer  $a=1$  ve  $E(X^2) < \infty$  ise,

$$\sqrt{n}(\hat{\mu} - \mu) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} N(0, \sigma^2) \quad (5.13)$$

(ii) Eğer  $a \neq 1$ ,  $E(Y^2) < \infty$  ve  $E(\ln(Y)^2) < \infty$  ise,

$$\sqrt{n}(\hat{\mu} - \mu) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} N(0, \sigma^2 + 3\mu^2\sigma_e^2) \quad (5.14)$$

dir (Lam ve diğerleri 2004).

**İspat:**  $a=1$  için Merkezi limit teoreminden (5.13) kolayca elde edilebilir.

$a \neq 1$  için (5.11)' den

$$\hat{\mu} - \mu = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (\hat{Y}_k - Y_k) + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (Y_k - \mu) \quad (5.15)$$

olur. Teorem 5.5.1' den

$$\hat{\beta} - \beta = O_p(n^{-3/2})$$

dir. Ayrıca,

$$T_n = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{k=1}^n (k-1)Y_k$$

olmak üzere,

$$E(T_n) = E\left(\frac{1}{n(n-1)} \sum_{k=1}^n (k-1)Y_k\right) = \frac{\mu}{2}$$

ve

$$\text{Var}(T_n) = \text{Var}\left(\frac{1}{n(n-1)} \sum_{k=1}^n (k-1)Y_k\right) = \frac{2n-1}{6n(n-1)} \sigma^2 \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$$

Böylece,

$$T_n \xrightarrow{p} \frac{\mu}{2}$$

olup, (2.2)'den

$$\frac{1}{n(n-1)} \sum_{k=1}^n (k-1)Y_k = \frac{\mu}{2} + O_p(n^{-1/2})$$

olduğunu biliyoruz. Buradan  $Y_k = a^{k-1}X_k$ ,  $\hat{Y}_k = \hat{a}^{k-1}X_k$  ve  $\beta = \ln a$  olmak üzere,

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (\hat{Y}_k - Y_k) &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n [\hat{a}^{k-1}X_k - a^{k-1}X_k] \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n [(\hat{a}/a)^{k-1} - 1]a^{k-1}X_k \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n [(\hat{a}/a)^{k-1} - 1]Y_k \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n [e^{(k-1)(\hat{\beta}-\beta)} - 1]Y_k \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n [1 + (k-1)(\hat{\beta}-\beta) + O_p(n^{-1}) - 1]Y_k \\ &= \frac{(\hat{\beta}-\beta)}{n} \sum_{k=1}^n (k-1)Y_k + O_p(n^{-1}) \\ &= \frac{\mu}{2}(n-1)(\hat{\beta}-\beta) + O_p(n^{-1}) \end{aligned}$$

olarak elde edilir. Daha sonra (5.9) ve (5.15)' in kullanılmasıyla,

$$\begin{aligned} \sqrt{n}(\hat{\mu} - \mu) &= \frac{\mu}{2}n^{1/2}(n-1)(\hat{\beta}-\beta) + n^{-1/2} \sum_{k=1}^n (Y_k - \mu) + O_p(n^{-1/2}) \\ &= n^{-1/2} \sum_{k=1}^n [Y_k - \mu + 3\mu(1 - \frac{2k}{n+1})(\ln Y_k - \alpha)] + O_p(n^{-1/2}) \end{aligned}$$

olur.

$$B_{nk} = Y_k - \mu + 3\mu(1 - \frac{2k}{n+1})(\ln Y_k - \alpha) \quad k = 1, 2, \dots, n$$

diyelim. Burada  $B_{nk}$  lar birbirinden bağımsız fakat aynı dağılımlı değildirler ve

$$B_n^2 = \sum_{k=1}^n Var(B_{nk}) = n\sigma^2 + \frac{3n(n-1)}{n+1} \mu^2 \sigma_e^2$$

olarak elde edilir.  $B_{nk}$  'nin dağılım fonksiyonu  $G_{nk}$  ve  $Y_k$  ların dağılım fonksiyonu  $F$  olmak üzere

$$\begin{aligned}
L_n &= \frac{1}{B_n^2} \sum_{k=1}^n \int_{|z| \geq \varepsilon B_n} z^2 dG_{nk}(z) \\
&= \frac{1}{B_n^2} \sum_{k=1}^n \int_{|y-\mu+3\mu(1-2k/(n+1))(\ln y-\alpha)| \geq \varepsilon B_n} [y-\mu+3\mu(1-2k/(n+1))(\ln y-\alpha)]^2 dF(y) \\
&\leq \frac{n}{B_n^2} \int_{|y-\mu|+3\mu|\ln y-\alpha| \geq \varepsilon B_n} [|y-\mu|+3\mu|\ln y-\alpha|]^2 dF(y) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0
\end{aligned}$$

Olduğundan,  $E(|y-\mu|+3\mu|\ln y-\alpha|)^2 < \infty$  iken, Lindeberg Feller ve Slutsky teoreminden (5.14) elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

#### **Teorem 5.5.4**

(i) Eğer  $a = 1$  ve  $E(X^4) < \infty$  ve  $w^2 = \text{Var}(X - \mu)^2$  olmak üzere

$$\sqrt{n}(\hat{\sigma}^2 - \sigma^2) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} N(0, w^2) \quad (5.16)$$

(ii) Eğer  $a \neq 1$ ,  $E(Y^4) < \infty$  ve  $E(\ln Y)^2 < \infty$  ise,  $w^2 = \text{Var}(Y - \mu)^2$  olmak üzere

$$\sqrt{n}(\hat{\sigma}^2 - \sigma^2) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} N(0, w^2 + 12\sigma^4\sigma_e^2) \quad (5.17)$$

dır (Lam ve diğerleri 2004).

**İspat:**  $a = 1$  için Merkezi limit teoreminden (5.16) kolayca elde edilebilir.

$a \neq 1$  için,  $Y_k = a^{k-1}X_k$ ,  $\hat{Y}_k = \hat{a}^{k-1}X_k$  ve  $\beta = \ln a$  olmak üzere,

$$\begin{aligned}
\hat{Y}_k &= Y_k + [(\hat{a}/a)^{k-1} - 1]Y_k \\
&= Y_k + [e^{(k-1)(\hat{\beta}-\beta)} - 1]Y_k \\
&= Y_k + [1 + (k-1)(\hat{\beta}-\beta) + O_p(n^{-1}) - 1]Y_k \\
&= Y_k + (k-1)(\hat{\beta}-\beta)Y_k + O_p(n^{-1})
\end{aligned}$$

yazılabilir. Böylece,

$$\bar{\hat{Y}} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \hat{Y}_k = \frac{\hat{\beta}-\beta}{n} \sum_{k=1}^n (k-1)Y_k + O_p(n^{-1})$$

olarak elde edilir ve böylece

$$\hat{Y}_k - \bar{Y} = Y_k - \bar{Y} + (\hat{\beta} - \beta) \left[ (k-1)Y_k - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (k-1)Y_k \right] + O_p(n^{-1})$$

olur.

$$\hat{\beta} - \beta = O_p(n^{-3/2})$$

olduğundan

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}^2 &= \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^n (\hat{Y}_k - \bar{Y})^2 \\ &= \frac{1}{n-1} \left\{ \sum_{k=1}^n (\hat{Y}_k - \bar{Y})^2 + 2(\hat{\beta} - \beta) \sum_{k=1}^n \left[ (k-1)Y_k - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (j-1)Y_j \right] (Y_k - \bar{Y}) \right. \\ &\quad \left. + (\hat{\beta} - \beta)^2 \sum_{k=1}^n \left[ (k-1)Y_k - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (j-1)Y_j \right]^2 \right\} + O_p(n^{-1}) \\ &= \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^n (Y_k - \bar{Y})^2 + \frac{2(\hat{\beta} - \beta)}{n-1} \left[ \sum_{k=1}^n (k-1)Y_k^2 - \bar{Y} \sum_{k=1}^n (k-1)Y_k \right] + O_p(n^{-1}) \end{aligned} \quad (5.18)$$

dır. (5.18) ifadesinin yeniden düzenlenmesiyle

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}^2 &= \frac{1}{n-1} \left[ \sum_{k=1}^n (Y_k - \mu) - n(\bar{Y} - \mu) \right] \\ &\quad + n(\hat{\beta} - \beta) \left[ \frac{2}{n(n-1)} \sum_{k=1}^n (k-1) [Y_k^2 - E(Y^2)] + E(Y^2) \right. \\ &\quad \left. - \frac{2\bar{Y}}{n(n-1)} \sum_{k=1}^n (k-1)(Y_k - \mu) - \mu(\bar{Y} - \mu) - \mu^2 \right] + O_p(n^{-1}) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (Y_k - \mu)^2 + n\sigma^2(\hat{\beta} - \beta) + O_p(n^{-1}) \end{aligned} \quad (5.19)$$

elde edilir. (5.9) ifadesinin (5.19)'da kullanılmasıyla

$$\sqrt{n}(\hat{\sigma}^2 - \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n (Y_k - \mu) - \sigma^2 + \frac{6\sigma^2(n-2k+1)}{n} (\ln Y_k - \alpha) + O_p(n^{-1/2}) \quad (5.20)$$

olur.

$$B_{nk} = (Y_k - \mu)^2 - \sigma^2 + \frac{6\sigma^2(n-2k+1)}{n} (\ln Y_k - \alpha), \quad k = 1, 2, \dots, n$$

diyelim. Burada  $B_{nk}$  'lar birbirinden bağımsız ve aynı dağılımlıdırlar ve

$$B_n^2 = \sum_{k=1}^n \text{Var}(B_{nk}) = n\sigma^2 + \frac{12(n-1)n(n+1)}{n} \sigma^4 \sigma_e^2$$

olur.  $B_{nk}$ 'nın dağılım fonksiyonu  $I_{nk}$  ve  $Y_k$  ların dağılım fonksiyonu  $F$  ile gösterilsin.

$$E_{nk} = \left\{ y : \left| (y - \mu)^2 - \sigma^2 + 6\sigma^2 \left( 1 - \frac{2k-1}{n} \right) (\ln y - \alpha) \right| \geq \varepsilon B_n \right\}$$

ve

$$E_n = \left\{ y : (y - \mu)^2 + \sigma^2 + 6\sigma^2 |\ln y - \alpha| \geq \varepsilon B_n \right\}$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} L_n &= \frac{1}{B_n^2} \sum_{k=1}^n \int_{|z| \geq \varepsilon B_n} z^2 dI_{nk}(z) \\ &= \frac{1}{B_n^2} \sum_{k=1}^n \int_{E_{nk}} \left\{ (y - \mu)^2 - \sigma^2 + 6\sigma^2 \left( 1 - \frac{2k-1}{n} \right) (\ln y - \alpha) \right\}^2 dF(y) \\ &\leq \frac{n}{B_n^2} \int_{E_n} \left\{ (y - \mu)^2 + \sigma^2 + 6\sigma^2 |\ln y - \alpha| \right\}^2 dF(y) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

Olduğundan,  $E \left( (y - \mu)^2 + \sigma^2 + 6\sigma^2 |\ln y - \alpha| \right)^2 < \infty$  iken, Lindeberg Feller ve Slutsky teoreminden (5.17) elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

## 6. BİR GEOMETRİK SÜREÇLE İLGİLİ PARAMETRELERİN PARAMETRİK TAHMİNİ

$\{N^G(t), t \geq 0\}$   $a$  oranlı bir geometrik süreç olmak üzere bu süreçte ilk olay gerçekleşinceye kadar geçen zaman süresi olan  $X_1$  rasgele değişkeninin  $F$  dağılım fonksiyonunu şekilsel olarak bilinirken bazı parametrelerinin bilinmediği durumu göz önüne alalım. Bu durumda sürecin  $a$  oranının ve  $F$  dağılımının bilinmeyen parametrelerinin süreçten gelen veri seti yardımıyla parametrik olarak tahmin edilmesi gerekmektedir. Bu bölümde üstel, gamma ve lognormal  $F$  dağılımı için sürecin  $a$  oranının ve  $F$  dağılımının parametrelerinin en çok olabirlik tahmin yöntemi ile tahmin edilmesi üzerinde durulacaktır.

### 6.1 Üstel Dağılım

Bir geometrik süreçten gelen  $X_1, X_2, \dots, X_n$  gözlemlerini göz önüne alalım.  $X_1$  rasgele değişkenin dağılımı  $\theta$  parametrelili üstel olsun. Bu durumda  $X_1$ 'in olasılık yoğunluk fonksiyonu  $f(x) = \frac{1}{\theta} e^{-x/\theta}$ ,  $x > 0; \theta > 0$  dır. Burada  $X_1, X_2, \dots, X_n$  rasgele değişkenleri birbirinden bağımsız, fakat aynı dağılımlı değildirler.  $X_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) rasgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu  $f_i(x) = a^{i-1} f(a^{i-1}x)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  dir. Bu durumda  $L(a, \theta)$  olabirlik fonksiyonu,

$$\begin{aligned} L(a, \theta) &= \prod_{i=1}^n f_i(x_i) \\ &= \frac{a^{n(n-1)/2}}{\theta^n} e^{-\frac{\sum_{i=1}^n a^{i-1} x_i}{\theta}} \end{aligned}$$

olarak bulunur.

$$\ln L(a, \theta) = -n \ln \theta + \frac{n(n-1)}{2} \ln a - \frac{\sum_{i=1}^n a^{i-1} x_i}{\theta}$$

olmak üzere bu fonksiyonu maksimum yapacak  $a$  ve  $\theta$  değerlerinin hesaplanması için  $a$  ve  $\theta$ ' ya göre kısmi türevler alınarak,

$$\frac{\partial \ln L(a, \theta)}{\partial a} = n(n-1)\theta - 2 \sum_{i=1}^n (i-1)a^{i-1}x_i = 0 \quad (6.1)$$

$$\frac{\partial \ln L(a, \theta)}{\partial \theta} = \sum_{i=1}^n a^{i-1}x_i - n\theta = 0 \quad (6.2)$$

denklemlerine ulaşılır. (6.2) denkleminde

$$\theta = \frac{\sum_{i=1}^n a^{i-1}x_i}{n} \quad (6.3)$$

olur. Bu ifadenin (6.1)'de yerine konulmasıyla  $a$ 'ya göre ,

$$\sum_{i=1}^n (n-2i+1)a^{i-1}x_i = 0 \quad (6.4)$$

lineer olmayan denklem elde edilir. Burada kısım (2.5)'de verilen Newton Raphson yönteminin notasyonlarına bağlı kalınmak üzere,

$$U(a) = \sum_{i=1}^n (n-2i+1)a^{i-1}x_i$$

ve

$$V(a) = \sum_{i=1}^n (n-2i+1)(i-1)a^{i-2}x_i$$

olur. Bu durumda Newton Raphson yönteminden  $a(1)$  başlangıç değeri ile,

$$\begin{aligned} a(m+1) &= a(m) - \frac{U(a(m))}{V(a(m))} \\ &= a(m) - \frac{\sum_{i=1}^n (n-2i+1)a(m)^{i-1}x_i}{\sum_{i=1}^n (n-2i+1)(i-1)a(m)^{i-2}x_i}, \quad m=1,2,\dots \end{aligned} \quad (6.5)$$

iterasyon işlemlerine ulaşılır.  $a(m+1)$   $a(m)$  sayısına yeterince yakınsa iterasyon durdurularak  $a$ 'nın en çok olabilirlik tahmin değeri olan  $\hat{a} = a(m+1)$  olarak bulunmuş olur.

$a$ 'nın en çok olabilirlik tahmin değeri olan  $\hat{a}$ 'nın (6.3)'de yerine konulmasıyla,

$$\hat{\theta} = \frac{\sum_{i=1}^n \hat{a}^{i-1}X_i}{n} \quad (6.6)$$



elde edilir. Ayrıca  $\theta$  parametresinin en çok olabilirlik tahmin edicisine bağlı olarak,

$$\hat{\mu} = \hat{\theta} \quad (6.7)$$

ile tanımlanan  $\hat{\mu}$   $F$  dağılımının ortalaması olan  $\mu$ 'nin en çok olabilirlik tahmin edicisi olarak elde edilir.

$$\hat{\sigma}^2 = \hat{\theta}^2 \quad (6.8)$$

ile tanımlanan  $\hat{\sigma}^2$   $F$  dağılımının varyansı olan  $\sigma^2$ 'nin en çok olabilirlik tahmin edicisi olur.

$\hat{a}$  ve  $\hat{\theta}$  tahmin edicilerinin asimptotik dağılımları için

$$\sqrt{n} \begin{pmatrix} \hat{a} - a \\ \hat{\theta} - \theta \end{pmatrix} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} N \left( \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{12a^2}{n^3} & \frac{-a\theta}{6n^2} \\ \frac{-a\theta}{6n^2} & \frac{\theta^2}{n} \end{bmatrix} \right)$$

olduğu kolaylıkla gösterilebilir.

## 6.2 Gamma Dağılımı

Bir geometrik süreçten gelen  $X_1, X_2, \dots, X_n$  gözlemlerini göz önüne alalım.  $X_1$  rasgele değişkeninin dağılımı  $\alpha$  ve  $\beta$  parametrelili gamma olsun. Bu durumda  $X_1$ 'in olasılık

yoğunluk fonksiyonu  $f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} x^{\alpha-1} e^{-x/\beta}$ ,  $x > 0; \alpha > 0, \beta > 0$  dir. Burada

$X_1, X_2, \dots, X_n$  rasgele değişkenleri birbirinden bağımsız, fakat aynı dağılımlı değildirler.

$X_i (i=1, 2, \dots, n)$  rasgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu

$f_i(x) = a^{i-1} f(a^{i-1}x)$ ,  $i=1, 2, \dots, n$  dir. Bu durumda  $L(a, \alpha, \beta)$  olabilirlik fonksiyonu,

$$\begin{aligned} L(a, \alpha, \beta) &= \prod_{i=1}^n f_i(x_i) \\ &= \frac{a^{n(n-1)\alpha/2}}{\Gamma(\alpha)^n \beta^{n\alpha}} \left( \prod_{i=1}^n x_i \right)^{\alpha-1} e^{-\frac{\sum_{i=1}^n a^{i-1} x_i}{\beta}} \end{aligned}$$

olarak bulunur.

$$\ln L(a, \alpha, \beta) = \frac{n(n-1)\alpha}{2} \ln a - n\alpha \ln \beta - n \ln \Gamma(\alpha) + (\alpha-1) \sum_{i=1}^n \ln x_i - \frac{\sum_{i=1}^n a^{i-1} x_i}{\beta}$$

olmak üzere bu fonksiyonu maksimum yapacak  $a, \alpha$  ve  $\beta$  değerlerinin hesaplanması için  $a, \alpha$  ve  $\beta$ ' ya göre kısmi türevler alınarak,

$$\frac{\partial \ln L(a, \alpha, \beta)}{\partial a} = n(n-1)\alpha\beta - 2 \sum_{i=1}^n (i-1)a^{i-1}x_i = 0 \quad (6.9)$$

$$\frac{\partial \ln L(a, \alpha, \beta)}{\partial \alpha} = \frac{n(n-1)\ln a}{2} - n \ln \beta - n\psi(\alpha) + \sum_{i=1}^n \ln x_i = 0 \quad (6.10)$$

$$\frac{\partial \ln L(a, \alpha, \beta)}{\partial \beta} = \sum_{i=1}^n a^{i-1}x_i - n\alpha\beta = 0 \quad (6.11)$$

denklemleri elde edilir, burada  $\psi(\alpha) = \frac{d \ln \Gamma(\alpha)}{d\alpha}$ . (6.11) denkleminde

$$\beta = \frac{\sum_{i=1}^n a^{i-1}x_i}{n\alpha} \quad (6.12)$$

olur. Bu ifadenin (6.9) ve (6.10)' da yerine konulmasıyla  $a$  ve  $\alpha$  göre sırasıyla,

$$\sum_{i=1}^n (n-2i+1)a^{i-1}x_i = 0 \quad (6.13)$$

$$\frac{n-1}{2} \ln a + \ln \alpha - \ln \frac{\sum_{i=1}^n a^{i-1}x_i}{n} + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln x_i - \psi(\alpha) = 0 \quad (6.14)$$

lineer olmayan denklemler elde edilir. Bu denklemler Matlab paket programında Newton Raphson yöntemiyle çözülebilir. Burada kısım (2.5)'de verilen Newton Raphson yönteminin notasyonlarına bağlı kalınmak üzere,

$$U(a) = \sum_{i=1}^n (n-2i+1)a^{i-1}x_i$$

ve

$$V(a) = \sum_{i=1}^n (n-2i+1)(i-1)a^{i-2}x_i$$

olur. Bu durumda Newton Raphson yönteminden  $a(1)$  başlangıç değeri ile,

$$\begin{aligned} a(m+1) &= a(m) - \frac{U(a(m))}{V(a(m))} \\ &= a(m) - \frac{\sum_{i=1}^n (n-2i+1)a(m)^{i-1}x_i}{\sum_{i=1}^n (n-2i+1)(i-1)a(m)^{i-2}x_i}, \quad m=1,2,\dots \end{aligned} \quad (6.15)$$

iterasyon işlemlerine ulaşılır.  $a(m+1)$   $a(m)$  sayısına yeterince yakınsa iterasyon durdurularak  $a$ 'nın en çok olabilirlik tahmin değeri olan  $\hat{a} = a(m+1)$  olarak bulunmuş olur.

(6.14) ile  $\alpha$  için benzer işlemler yapılarak  $\alpha$ 'nın en çok olabilirlik tahmini bulunur. Burada

$$U(\alpha) = \frac{n-1}{2} \ln \hat{a} + \ln \alpha - \ln \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \hat{a}^{i-1} x_i + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln x_i - \psi(\alpha)$$

ve

$$V(\alpha) = \frac{1}{\alpha} - \psi'(\alpha)$$

olur. Bu durumda Newton Raphson yönteminden  $\alpha(1)$  başlangıç değeri ile,

$$\begin{aligned} \alpha(m+1) &= \alpha(m) - \frac{U(\alpha(m))}{V(\alpha(m))} \\ &= \alpha(m) - \frac{\frac{n-1}{2} \ln \hat{a} + \ln \alpha(m) - \ln \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \hat{a}^{i-1} x_i + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln x_i - \psi(\alpha(m))}{V(\alpha) = \frac{1}{\alpha(m)} - \psi'(\alpha(m))} \end{aligned} \quad (6.16)$$

iterasyon işlemine ulaşılır.  $\alpha(m+1)$   $\alpha(m)$  sayısına yeterince yakınsa iterasyon durdurularak  $\alpha$ 'nın en çok olabilirlik tahmin değeri olan  $\hat{\alpha} = \alpha(m+1)$  olarak bulunmuş olur.  $a$  ve  $\alpha$ 'nın en çok olabilirlik tahminleri olan  $\hat{a}$  ve  $\hat{\alpha}$ 'nın (6.12)'de yerine konulmasıyla,

$$\hat{\beta} = \frac{\sum_{i=1}^n \hat{a}^{i-1} X_i}{n\hat{\alpha}} \quad (6.17)$$

ile  $\beta$ 'nin en çok olabilirlik tahmin edicisi olan  $\hat{\beta}$  elde edilir. Ayrıca  $\alpha$  ve  $\beta$  parametrelerinin en çok olabilirlik tahmin edicilerine bağlı olarak,

$$\hat{\mu} = \hat{\alpha}\hat{\beta} \quad (6.18)$$

ile tanımlanan  $\hat{\mu}$   $F$  dağılımının ortalaması olan  $\mu$ 'nün en çok olabilirlik tahmin edicisi olarak elde edilir.

$$\hat{\sigma}^2 = \hat{\alpha}\hat{\beta}^2 \quad (6.19)$$

ile tanımlanan  $\hat{\sigma}^2$   $F$  dağılımının varyansı olan  $\sigma^2$ 'nin en çok olabilirlik tahmin edicisi olur.

$\hat{\alpha}, \hat{\alpha}$  ve  $\hat{\beta}$ 'nin asimptotik dağılımları,

$$n^{1/2} \begin{pmatrix} \hat{a} - a \\ \hat{\alpha} - \alpha \\ \hat{\beta} - \beta \end{pmatrix} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} N \left( \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{12a^2}{n^3\alpha} & 0 & \frac{-\alpha\beta}{6\alpha n^2} \\ 0 & \frac{\alpha}{n(\alpha\psi'(\alpha)-1)} & \frac{\beta}{n(\alpha\psi'(\alpha)-1)} \\ \frac{-\alpha\beta}{6\alpha n^2} & \frac{\beta}{n(\alpha\psi'(\alpha)-1)} & \frac{\beta^2}{n\alpha} \end{bmatrix} \right)$$

ile verilir ( Chan ve diğerleri 2004).

### 6.3 Lognormal Dağılım

Bir geometrik süreçten gelen  $X_1, X_2, \dots, X_n$  gözlemlerini göz önüne alalım.  $X_1$  rasgele değişkeninin dağılımı  $\delta$  ve  $\tau$  parametrelili lognormal olsun. Bu durumda  $X_1$ 'in olasılık

yoğunluk fonksiyonu  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\tau x}} e^{-\frac{(\ln x - \delta)^2}{2\tau^2}}$ ,  $x > 0; \delta \in \mathbb{R}, \tau > 0$  dir. Burada

$X_1, X_2, \dots, X_n$  rasgele değişkenleri birbirinden bağımsız, fakat aynı dağılımlı değildirler.

$X_i (i = 1, 2, \dots, n)$  rasgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu

$f_i(x) = a^{i-1} f(a^{i-1}x)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  dir. Bu durumda  $L(a, \delta, \tau)$  olabilirlik fonksiyonu,

$$\begin{aligned} L(a, \delta, \tau) &= \prod_{i=1}^n f_i(x_i) \\ &= [(2\pi)^{n/2} \tau^n \prod_{i=1}^n x_i]^{-1} e^{-\frac{\sum_{i=1}^n (\ln(a^{i-1}x_i) - \delta)^2}{2\tau^2}} \end{aligned}$$

olarak bulunur.

$$\ln L(a, \delta, \tau) = -\frac{n}{2} \ln 2\pi - n \ln \tau - \sum_{i=1}^n \ln x_i - \frac{\sum_{i=1}^n (\ln(a^{i-1} x_i) - \delta)^2}{2\tau^2}$$

olmak üzere bu fonksiyonu maksimum yapacak  $a, \delta$  ve  $\tau$  değerlerinin hesaplanması için  $a, \delta$  ve  $\tau$  'ya göre kısmi türevler alınarak,

$$\frac{\partial \ln L(a, \delta, \tau)}{\partial a} = \sum_{i=1}^n (n - 2i + 1) \ln(a^{i-1} x_i) = 0 \quad (6.20)$$

$$\frac{\partial \ln L(a, \delta, \tau)}{\partial \delta} = \sum_{i=1}^n (\ln(a^{i-1} x_i) - \delta) = 0 \quad (6.21)$$

$$\frac{\partial \ln L(a, \delta, \tau)}{\partial \tau} = \sum_{i=1}^n (\ln(a^{i-1} x_i) - \delta)^2 - n\tau^2 = 0 \quad (6.22)$$

denklemlerine ulaşılır. Bu denklemlerin çözümünden,

$$\begin{aligned} \ln \hat{a} &= -\left[ \sum_{i=1}^n (n - 2i + 1) \ln X_i \right] / \left[ \sum_{i=1}^n (n - 2i + 1)(i - 1) \right] \\ &= \frac{6}{(n-1)n(n+1)} \sum_{i=1}^n (n - 2i + 1) \ln X_i \end{aligned} \quad (6.23)$$

buradan  $a$  'nın en çok olabilirlik tahmin edicisi olan  $\hat{a}$  aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\hat{a} = e^{\frac{6}{(n-1)n(n+1)} \sum_{i=1}^n (n-2i+1) \ln X_i} \quad (6.24)$$

(6.21) ve (6.22)' den

$$\delta = \sum_{i=1}^n \ln(a^{i-1} x_i) / n \quad (6.25)$$

ve

$$\tau^2 = \sum_{i=1}^n (\ln(a^{i-1} x_i) - \delta)^2 \quad (6.26)$$

olur.  $\hat{a}$  'nın değerinin (6.25)'de yerine konulmasıyla,

$$\begin{aligned} \hat{\delta} &= \sum_{i=1}^n [(i-1) \ln \hat{a} + \ln X_i] / n \\ &= \frac{1}{n} \left[ \frac{n(n-1)}{2} \frac{6}{n(n-1)(n+1)} \sum_{i=1}^n (n-2i+1) \ln X_i + \sum_{i=1}^n \ln X_i \right] \\ &= \frac{2}{n(n+1)} \sum_{i=1}^n (2n-3i+2) \ln X_i \end{aligned} \quad (6.27)$$

elde edilir. Daha sonra (6.24) ve (6.27)'nin kullanılmasıyla,

$$\begin{aligned}
\hat{\tau}^2 &= \sum_{i=1}^n \left\{ (i-1) \ln \hat{a} + \ln X_i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n [(i-1) \ln \hat{a} + \ln X_i] \right\}^2 / n \\
&= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left\{ \ln X_i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln X_i - \frac{n-2i+1}{2} \ln \hat{a} \right\}^2 \\
&= \frac{1}{n} \left\{ \sum_{i=1}^n \left( \ln X_i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln X_i \right)^2 - \ln \hat{a} \sum_{i=1}^n \left( \ln X_i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln X_i \right) (n-2i+1) \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{4} (\ln \hat{a})^2 \sum_{i=1}^n (n-2i+1)^2 \right\} \\
&= \frac{1}{n} \left\{ \sum_{i=1}^n (\ln X_i)^2 - \frac{(\sum_{i=1}^n \ln X_i)^2}{n} - (\ln \hat{a})^2 \frac{(n-1)n(n+1)}{12} \right\}
\end{aligned} \tag{6.28}$$

olur.

$\hat{\delta}$  ve  $\hat{\tau}^2$  en çok olabilirlik tahminlerine bağlı olarak  $F$  dağılımının ortalaması  $\mu$ 'nün ve varyansı  $\sigma^2$ 'nin en çok olabilirlik tahminleri sırasıyla,

$$\hat{\mu} = e^{\frac{\hat{\delta} + \hat{\tau}^2}{2}} \tag{6.29}$$

ve

$$\hat{\sigma}^2 = \hat{\mu}^2 (e^{\hat{\tau}^2} - 1) \tag{6.30}$$

olarak elde edilir.

$\hat{\delta}$  ve  $\hat{\tau}^2$  tahmin edicilerinin asimptotik dağılımları,

$$\sqrt{n} \begin{pmatrix} \hat{\delta} - \delta \\ \hat{\tau}^2 - \tau^2 \end{pmatrix} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} N \left( \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{bmatrix} 4\tau^2 & 0 \\ 0 & 2\tau^2 \end{bmatrix} \right)$$

ve

$$\sqrt{n} (\hat{a} - a) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} N(0, 12a^2 \tau^2)$$

ile verilir (Lam ve Chan 1998). Ayrıca Delta yönteminden,

$$\sqrt{n} (\hat{\mu} - \mu) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} N(0, \mu^2 \tau^2 (4 + \tau^2 / 2))$$

ve

$$\sqrt{n} (\hat{\sigma}^2 - \sigma^2) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} N(0, 16\sigma^4 \tau^2 + 2\tau^4 (\mu^2 + 2\sigma^2)^2)$$

bulunur.

## 7. SİMÜLASYON ÇALIŞMASI

Bu bölümde geometrik sürecin  $a$  oranı için önerilen  $\hat{a}$ ,  $\hat{a}_{MLE}$   $F$  dağılımının ortalaması  $\mu$  için önerilen  $\hat{\mu}_1, \hat{\mu}_2, \hat{\mu}_3, \hat{\mu}_4, \hat{\mu}_5, \hat{\mu}_{MLE}$  ve varyansı için önerilen  $\hat{\sigma}_1^2, \hat{\sigma}_2^2, \hat{\sigma}_{MLE}^2$  tahmin edicilerin performansları bir simülasyon çalışması ile incelendi. Yan ve hata kareler ortalaması (HKO) tahmin edicilerin performanslarını değerlendirmek için kullanıldı.

Tahmin edicilerin birbirlerine göre performanslarını değerlendirmek için yapılan simülasyon çalışmasında aşağıdaki dört dağılım kullanılmıştır.

$$(i) f(x) = \frac{1}{\theta} e^{-x/\theta}, x > 0; \theta > 0$$

olasılık yoğunluk fonksiyonu ile üstel dağılım, burada  $\theta = 2$  alınmıştır.

$$(ii) f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} x^{\alpha-1} e^{-x/\beta}, x > 0; \alpha, \beta > 0$$

olasılık yoğunluk fonksiyonu ile gamma dağılım, burada  $\alpha = 2, \beta = 1$  alınmıştır.

$$(iii) f(x) = \frac{\alpha}{\beta^\alpha} x^{\alpha-1} e^{-(x/\beta)^\alpha}, x > 0; \alpha, \beta > 0$$

olasılık yoğunluk fonksiyonu ile Weibull dağılım, burada  $\alpha = 2, \beta = 1$  alınmıştır.

$$(iv) f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma x} e^{-\frac{(\ln x - \mu)^2}{2\sigma^2}}, x > 0; \mu \in \mathbb{R}, \sigma > 0$$

olasılık yoğunluk fonksiyonu ile lognormal dağılım, burada  $\mu = 0.4, \sigma = 0.4$  alınmıştır.

Pratikte sık sık  $a$ 'nın bire yakın değerleri ile karşılaşmaktadır (Lam 1992b). Bu yüzden bu çalışmada  $a = 0.90, 0.95, 1.05$  ve  $1.10$  değerleri seçilmiştir. Ayrıca tahmin edicilerin küçük ve büyük örneklem özelliklerini incelemek için  $n$  örneklem hacmi sırasıyla 20,30,50 ve 100 alınmıştır. Sonuçlar aşağıdaki tablolarda verilmiştir. Tüm tablolar 1000 simülasyon üzerine kurulmuştur.

Çizelge 7.1 Üstel dağılım ( $\theta = 2, \mu = 0.5, \sigma^2 = 0.25$ ) durumunda geometrik sürecin a oranı, dağılımın ortalama ve varyansı için önerilen tahmin edicilerin Yan ve HKO'ları.

a	n	Yöntem	$\hat{a}$			$\hat{\mu}$			$\hat{\sigma}^2$		
			Tahmin	Yan	HKO	Tahmin	Yan	HKO	Tahmin	Yan	HKO
0.90	20	MLE	0.8987	-0.0013	0.0019	0.5284	0.0284	0.0520	0.3224	0.0724	0.0898
		MM	0.9006	0.0006	0.0041	0.5477	0.0477	0.0635	0.4447	0.1947	1.2332
		NP1				0.4591	-0.0409	0.0607	0.1976	-0.052	0.0807
		NP2				0.5363	0.0363	0.0959			
		NP3				0.5696	0.0696	0.1012			
	30	MLE	0.9007	0.0007	0.0004	0.5204	0.0204	0.0395	0.3179	0.0619	0.0694
		MM	0.9003	0.0003	0.0006	0.5420	0.0420	0.0547	0.3480	0.0980	0.1651
		NP1				0.4548	-0.0452	0.0436	0.1841	-0.0667	0.0558
		NP2				0.5247	0.0247	0.0555			
		NP3				0.5640	0.0640	0.0725			
	50	MLE	0.9008	0.0008	7.62e-5	0.5203	0.0203	0.0209	0.2915	0.0414	0.0207
		MM	0.9008	0.0008	0.0001	0.5316	0.0316	0.0324	0.3232	0.0732	0.0909
NP1					0.4408	-0.0592	0.0253	0.1601	-0.0901	0.0283	
NP2					0.5159	0.0159	0.0317				
NP3					0.5458	0.0458	0.0349				
100	MLE	0.8999	0.0001	9.61e-6	0.5006	0.0006	0.0093	0.2599	0.0099	0.0102	
	MM	0.8998	-0.000	1.58e-5	0.5043	0.0043	0.0141	0.2686	0.0187	0.0236	
	NP1				0.4172	-0.0828	0.0169	0.1395	-0.1105	0.0175	
	NP2				0.4863	-0.0137	0.0137				
	NP3				0.5187	0.0187	0.0163				
0.95	20	MLE	0.9478	-0.0022	0.0055	0.5197	0.0197	0.0380	0.3119	0.0619	0.0718
		MM	0.9505	0.0005	0.0022	0.5417	0.0417	0.0707	0.3827	0.1327	0.3640
		NP1				0.4564	-0.0436	0.0574	0.1941	-0.0559	0.0721
		NP2				0.5252	0.0252	0.0780			
		NP3				0.5668	0.0668	0.0939			
	30	MLE	0.9491	-0.9e-3	0.0007	0.5150	0.0150	0.0379	0.3030	0.0530	0.0540
		MM	0.9496	-0.5e-4	0.0016	0.5287	0.0287	0.0631	0.3667	0.1167	0.7206
		NP1				0.4420	-0.0580	0.0438	0.1745	-0.0755	0.0580
		NP2				0.5142	0.0142	0.0634			
		NP3				0.5470	0.0470	0.0684			
	50	MLE	0.9506	0.60e-3	0.09e-3	0.5140	0.0140	0.0226	0.2923	0.0423	0.0219
		MM	0.9506	0.61e-3	0.15e-3	0.5340	0.0340	0.0386	0.3274	0.0774	0.0947
		NP1				0.4425	-0.0575	0.0292	0.1685	-0.0815	0.0253
		NP2				0.5154	0.0154	0.0360			
		NP3				0.5514	0.0514	0.0449			
	100	MLE	0.9502	0.22e-3	0.11e-4	0.5091	0.0091	0.0108	0.2699	0.0199	0.0130
		MM	0.9502	0.22e-3	0.18e-4	0.5135	0.0135	0.0157	0.2783	0.0283	0.0295
		NP1				0.4258	-0.0742	0.0163	0.1434	-0.1066	0.0169
		NP2				0.4961	-0.0039	0.0152			
		NP3				0.5265	0.0265	0.0175			
				0.5176	0.0176	0.0251					



Çizelge 7.1 Üstel dağılım ( $\theta = 2, \mu = 0.5, \sigma^2 = 0.25$ ) durumunda geometrik sürecin a oranı, dağılımın ortalama ve varyansı için önerilen tahmin edicilerin Yan ve HKO' ları (devamı).

a	n	Yöntem	$\hat{a}$			$\hat{\mu}$			$\hat{\sigma}^2$		
			Tahmin	Yan	HKO	Tahmin	Yan	HKO	Tahmin	Yan	HKO
1.05	20	MLE	1.0518	0.0018	0.0018	0.5256	0.0256	0.0540	0.3296	0.0796	0.1038
		MM	1.0535	0.0035	0.0028	0.5604	0.0604	0.0805	0.4202	0.1702	0.7095
		NP1				0.4724	-0.0276	0.0618	0.2065	-0.0435	0.0917
		NP2				0.5448	0.0448	0.0896			
		NP3				0.5850	0.0850	0.1045			
	30	MLE	1.0508	0.0008	0.54e-3	0.5214	0.0214	0.0395	0.3109	0.0609	0.0754
		MM	1.0511	0.0011	0.90e-3	0.5454	0.0454	0.0700	0.3885	0.1385	0.3954
		NP1				0.4536	-0.0464	0.0573	0.1896	-0.0604	0.0670
		NP2				0.5307	0.0307	0.0670			
		NP3				0.5652	0.0652	0.0806			
	50	MLE	1.0501	0.09e-3	0.11e-3	0.5165	0.0165	0.0215	0.2880	0.0380	0.0292
		MM	1.0504	0.38e-3	0.17e-3	0.5249	0.0249	0.0332	0.3114	0.0614	0.0775
		NP1				0.4362	-0.0638	0.0271	0.1592	-0.0908	0.0325
		NP2				0.5081	0.0081	0.0318			
		NP3				0.5411	0.0411	0.0374			
	100	MLE	1.0496	-0.4e-3	0.13e-4	0.4956	-0.0044	0.0099	0.2555	0.0055	0.0108
MM		1.0496	-0.5e-3	0.24e-4	0.5022	0.0022	0.0146	0.2666	0.0166	0.0224	
NP1					0.4160	-0.0840	0.0173	0.1388	0.1112	0.0170	
NP2					0.4843	-0.0157	0.0145				
NP3					0.5172	0.0172	0.0161				
1.10	20	MLE	1.1027	0.0027	0.0020	0.5296	0.0296	0.0561	0.3357	0.0857	0.1112
		MM	1.1038	0.0038	0.0030	0.5604	0.0604	0.0897	0.4250	0.1750	0.5653
		NP1				0.4736	-0.0264	0.0689	0.2113	-0.0387	0.1211
		NP2				0.5451	0.0451	0.0989			
		NP3				0.5865	0.0865	0.1154			
	30	MLE	1.1018	0.0018	0.58e-3	0.5218	0.0218	0.0356	0.3074	0.0574	0.0576
		MM	1.1014	0.0014	0.92e-3	0.5392	0.0392	0.0644	0.3910	0.1410	0.8929
		NP1				0.4505	-0.0495	0.0432	0.1783	-0.0717	0.0610
		NP2				0.5253	0.0253	0.0674			
		NP3				0.5574	0.0574	0.0669			
	50	MLE	1.1002	0.20e-3	0.11e-3	0.5106	0.0106	0.0198	0.2804	0.0304	0.0261
		MM	1.1005	0.47e-3	0.18e-3	0.5251	0.0251	0.0319	0.3105	0.0605	0.0818
		NP1				0.4371	-0.0629	0.0292	0.1580	-0.0920	0.0273
		NP2				0.5091	0.0091	0.0308			
		NP3				0.5404	0.0404	0.0365			
	100	MLE	1.1001	0.10e-3	0.14e-4	0.5059	0.0059	0.0100	0.2658	0.0158	0.0119
		MM	1.1001	0.14e-3	0.24e-4	0.5106	0.0106	0.0154	0.2761	0.0261	0.0261
		NP1				0.4230	-0.0770	0.0166	0.1434	-0.1066	0.0171
		NP2				0.4928	-0.0072	0.0147			
		NP3				0.5252	0.0252	0.0176			
NP4				0.5040	0.0040	0.0146					

Çizelge 7.2 Gamma dağılım ( $\alpha = 2, \beta = 1, \mu = 2, \sigma^2 = 2$ ) durumunda geometrik sürecin a oranı, dağılımın ortalama ve varyansı için önerilen tahmin edicilerin Yan ve HKO' ları.

a	n	Yöntem	$\hat{a}$			$\hat{\mu}$			$\hat{\sigma}^2$		
			Tahmin	Yan	HKO	Tahmin	Yan	HKO	Tahmin	Yan	HKO
0.90	20	MLE	0.8997	-0.3e-3	0.62e-3	2.0388	0.0388	0.3955	2.0503	0.0503	2.0564
		MM	0.8994	-0.6e-3	0.80e-3	2.0564	0.0564	0.4869	2.2529	0.2529	4.8612
		NP1				1.9732	-0.0368	0.4784	1.7605	-0.2395	2.0933
		NP2				2.0423	0.0423	0.4827			
	30	NP3				2.1127	0.1127	0.5319			
		NP4				2.0534	0.0534	0.5419			
		MLE	0.9006	0.64e-3	0.18e-3	2.0623	0.0623	0.2699	2.0988	0.0988	1.3466
		MM	0.9005	0.47e-3	0.22e-3	2.0747	0.0747	0.3398	2.2263	0.2263	2.3731
	50	NP1				1.9795	-0.0205	0.3074	1.7265	-0.2735	1.3732
		NP2				2.0548	0.0548	0.3376			
		NP3				2.1196	0.1196	0.3626			
		NP4				2.0717	0.0717	0.4030			
100	MLE	0.9002	0.20e-3	0.38e-4	2.0241	0.0241	0.1528	2.0494	0.0494	0.7154	
	MM	0.9003	0.33e-3	0.49e-4	2.0411	0.0411	0.1933	2.1538	0.1538	1.2887	
	NP1				1.9368	-0.0632	0.1877	1.6413	-0.3587	0.7630	
	NP2				2.0193	0.0193	0.1886				
0.95	20	NP3				2.0754	0.0754	0.2079			
		NP4				2.0561	0.0561	0.2779			
		MLE	0.9000	0.46e-4	0.30e-4	2.0175	0.0175	0.0750	2.0416	0.0416	0.3864
		MM	0.9000	0.46e-4	0.39e-4	2.0130	0.0130	0.0926	2.0677	0.0677	0.5420
	30	NP1				1.9020	-0.0980	0.0929	1.5522	-0.4478	0.4504
		NP2				1.9891	-0.0109	0.0916			
		NP3				2.0369	0.0369	0.0964			
		NP4				2.0148	0.0148	0.1822			
	50	MLE	0.9492	-0.8e-3	0.71e-3	2.0179	0.0179	0.3946	2.0176	0.0176	2.2880
		MM	0.9493	-0.7e-3	0.88e-3	2.0403	0.0403	0.4844	2.2392	0.2392	4.6053
		NP1				1.9559	-0.0441	0.4435	1.7331	-0.2669	2.3796
		NP2				2.0276	0.0276	0.4846			
100	NP3				2.0952	0.0952	0.5189				
	NP4				2.0324	0.0324	0.4942				
	MLE	0.9504	0.38e-3	0.21e-3	2.0275	0.0275	0.2736	2.0684	0.0684	1.5215	
	MM	0.9504	0.37e-3	0.25e-3	2.0415	0.0415	0.3263	2.2004	0.2004	2.4869	
0.95	20	NP1				1.9463	-0.0537	0.2983	1.7037	-0.2963	1.6549
		NP2				2.0216	0.0216	0.3226			
		NP3				2.0878	0.0878	0.3518			
		NP4				2.0380	0.0380	0.3478			
	30	MLE	0.9501	0.56e-4	0.43e-4	2.0294	0.0294	0.1570	2.0459	0.0459	0.8052
		MM	0.9501	0.99e-4	0.54e-4	2.0416	0.0416	0.1932	2.1577	0.1577	1.4954
		NP1				1.9371	-0.0629	0.1763	1.6234	-0.3766	0.8347
		NP2				2.0217	0.0217	0.1927			
	50	NP3				2.0729	0.0729	0.2033			
		NP4				2.0424	0.0424	0.2250			
		MLE	0.9498	-0.2e-3	0.54e-5	1.9914	-0.0086	0.0782	1.9697	-0.0303	0.3743
		MM	0.9497	-0.3e-3	0.74e-5	1.9875	-0.0125	0.0949	2.0018	0.0018	0.5222
100	NP1				1.8803	-0.1197	0.1012	1.5055	-0.4945	0.4933	
	NP2				1.9656	-0.0344	0.0947				
	NP3				2.0111	0.0111	0.0984				
	NP4				1.9780	-0.0220	0.1323				

Çizelge 7.2 Gamma dağılım ( $\alpha = 2, \beta = 1, \mu = 2, \sigma^2 = 2$ ) durumunda geometrik sürecin a oranı, dağılımın ortalama ve varyansı için önerilen tahmin edicilerin Yan ve HKO' ları (devamı).

a	n	Yöntem	$\hat{a}$			$\hat{\mu}$			$\hat{\sigma}^2$		
			Tahmin	Yan	HKO	Tahmin	Yan	HKO	Tahmin	Yan	HKO
1.05	20	MLE	1.0480	0.0020	0.0018	2.0019	0.0019	0.4095	1.9892	-0.0108	2.0564
		MM	1.0481	0.0019	0.0028	2.0263	0.0263	0.4894	2.2671	0.2671	4.8612
		NP1				1.9399	-0.0601	0.4492	1.6988	-0.3012	2.0933
		NP2				2.0181	0.0181	0.4974			
		NP3				2.0770	0.0770	0.5176			
	30	MLE	1.0502	0.17e-3	0.27e-3	2.0364	0.0364	0.2720	2.0653	0.0653	1.2104
		MM	1.0499	-1.1e-3	0.34e-3	2.0475	0.0475	0.3437	2.2415	0.2415	2.7358
		NP1				1.9497	-0.0503	0.3142	1.6823	-0.3177	1.2572
		NP2				2.0341	0.0341	0.3435			
		NP3				2.0871	0.0871	0.3647			
	50	MLE	1.0501	0.14e-3	0.52e-4	2.0354	0.0354	0.1505	2.0368	0.0368	0.7524
		MM	1.0502	0.17e-3	0.64e-4	2.0441	0.0441	0.1839	2.1128	0.1128	1.1847
		NP1				1.9436	-0.0564	0.1693	1.6303	-0.3697	0.7936
		NP2				2.0209	0.0209	0.1827			
		NP3				2.0800	0.0800	0.1965			
	100	MLE	1.0500	0.17e-4	0.73e-5	2.0148	0.0148	0.0807	2.0381	0.0381	0.4131
MM		1.0500	0.43e-4	0.94e-5	2.0237	0.0237	0.1032	2.1018	0.1018	0.6847	
NP1					1.9126	-0.0874	0.0995	1.5742	-0.4258	0.4769	
NP2					2.0004	0.0004	0.1029				
NP3					2.0484	0.0484	0.1078				
1.10	20	MLE	1.0999	-0.1e-3	0.0009	2.0303	0.0303	0.3923	2.0349	0.0349	2.1614
		MM	1.1007	-0.7e-3	0.0011	2.0656	0.0656	0.4784	2.2677	0.2677	3.9914
		NP1				1.9823	-0.0177	0.4363	1.7740	-0.2260	2.1926
		NP2				2.0512	0.0512	0.4799			
		NP3				2.1234	0.1234	0.5171			
	30	MLE	1.0998	-0.2e-3	0.26e-3	2.0176	0.0176	0.2588	2.0475	0.0475	1.4662
		MM	1.0999	-0.1e-3	0.32e-3	2.0338	0.0338	0.3089	2.2054	0.2054	2.7020
		NP1				1.9380	-0.0620	0.2826	1.6799	-0.3201	1.5048
		NP2				2.0165	0.0165	0.3115			
		NP3				2.0784	0.0784	0.3300			
	50	MLE	1.1000	-0.4e-4	0.58e-4	2.0243	0.0243	0.1494	2.0568	0.0568	0.7196
		MM	1.1000	-0.4e-4	0.71e-4	2.0333	0.0333	0.1785	2.1277	0.1277	1.2061
		NP1				1.9295	-0.0705	0.1663	1.6295	-0.3705	0.7273
		NP2				2.0100	0.0100	0.1737			
		NP3				2.0679	0.0679	0.1929			
	100	MLE	1.1000	0.37e-4	0.75e-5	2.0152	0.0152	0.0833	2.0278	0.0278	0.4189
		MM	1.1001	0.69e-4	0.95e-5	2.0179	0.0179	0.1019	2.0554	0.0554	0.5545
		NP1				1.9092	-0.0908	0.1000	1.5636	-0.4364	0.4773
		NP2				1.9923	-0.0077	0.0997			
		NP3				2.0439	0.0439	0.1073			
NP4				2.0069	0.0069	0.1169					

Çizelge 7.3 Weibull dağılım ( $\alpha = 2, \beta = 1, \mu = 0.8862, \sigma^2 = 0.2146$ ) durumunda geometrik sürecin a oranı, dağılımın ortalama ve varyansı için önerilen tahmin edicilerin Yan ve HKO' ları.

a	n	Yöntem	$\hat{a}$			$\hat{\mu}$			$\hat{\sigma}^2$		
			Tahmin	Yan	HKO	Tahmin	Yan	HKO	Tahmin	Yan	HKO
0.90	20	MM	0.8995	-0.5e-3	0.82e-3	0.9004	0.0142	0.0547	0.2356	0.0210	0.0319
		NP1				0.8935	0.0073	0.0538	0.2504	0.0358	0.0327
		NP2				0.8873	0.0011	0.0535			
		NP3				0.9279	0.0417	0.0607			
		NP4				0.9010	0.0148	0.0616			
	30	MM	0.9005	0.47e-3	0.23e-3	0.9024	0.0161	0.0392	0.2312	0.0166	0.0165
		NP1				0.8927	0.0065	0.0383	0.2452	0.0306	0.0183
		NP2				0.8869	0.0007	0.0381			
		NP3				0.9255	0.0393	0.0426			
		NP4				0.9014	0.0152	0.0474			
	50	MM	0.9003	0.33e-3	0.48e-4	0.8902	0.0039	0.0232	0.2226	0.0080	0.0077
		NP1				0.8783	-0.0079	0.0230	0.2343	0.0197	0.0090
		NP2				0.8734	-0.0128	0.0227			
		NP3				0.9097	0.0235	0.0249			
		NP4				0.8893	0.0031	0.0317			
	100	MM	0.9000	0.46e-4	0.41e-4	0.8891	0.0029	0.0109	0.2185	0.0039	0.0035
NP1					0.8763	-0.0099	0.0109	0.2351	0.0205	0.0051	
NP2					0.8693	-0.0169	0.0107				
NP3					0.9083	0.0221	0.0122				
NP4					0.8873	0.0010	0.0209				
0.95	20	MM	0.9492	-0.8e-3	0.86e-3	0.9027	0.0165	0.0572	0.2346	0.0200	0.0252
		NP1				0.8962	0.0100	0.0569	0.2494	0.0348	0.0337
		NP2				0.8908	0.0045	0.0553			
		NP3				0.9289	0.0427	0.0641			
		NP4				0.9003	0.0141	0.0595			
	30	MM	0.9504	0.38e-3	0.25e-3	0.9020	0.0158	0.0410	0.2393	0.0247	0.0217
		NP1				0.8916	0.0054	0.0400	0.2503	0.0357	0.0218
		NP2				0.8868	0.0006	0.0402			
		NP3				0.9256	0.0394	0.0450			
		NP4				0.9004	0.0141	0.0448			
	50	MM	0.9501	0.56e-4	0.52e-4	0.8953	0.0090	0.0232	0.2243	0.0097	0.0083
		NP1				0.8837	-0.0026	0.0227	0.2392	0.0246	0.0094
		NP2				0.8772	-0.0090	0.0228			
		NP3				0.9160	0.0298	0.0249			
		NP4				0.8959	0.0097	0.0271			
	100	MM	0.9498	-0.2e-3	0.74e-5	0.8902	0.0039	0.0117	0.2197	0.0051	0.0036
NP1					0.8772	-0.0090	0.0117	0.2344	0.0198	0.0049	
NP2					0.8710	-0.0152	0.0115				
NP3					0.9089	0.0227	0.0129				
NP4					0.8907	0.0045	0.0162				

Çizelge 7.3 Weibull dağılım ( $\alpha = 2, \beta = 1, \mu = 0.8862, \sigma^2 = 0.2146$ ) durumunda geometrik sürecin a oranı, dağılımın ortalama ve varyansı için önerilen tahmin edicilerin Yan ve HKO' ları (devamı).

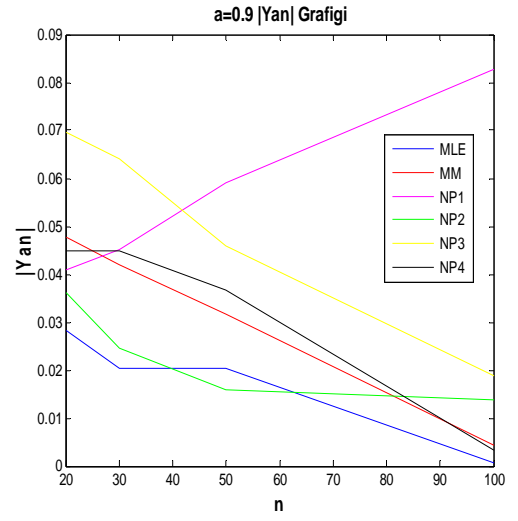
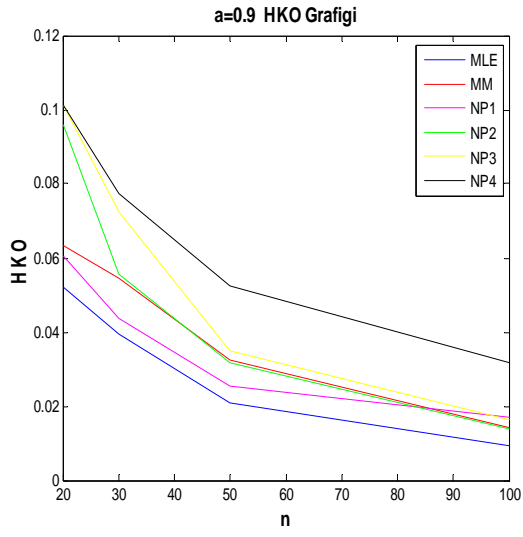
a	n	Yöntem	$\hat{a}$			$\hat{\mu}$			$\hat{\sigma}^2$		
			Tahmin	Yan	HKO	Tahmin	Yan	HKO	Tahmin	Yan	HKO
1.05	20	MM	1.0508	8.7e-4	6.6e-4	0.9077	0.0215	0.0544	0.2363	0.0217	0.0309
		NP1				0.9008	0.0146	0.0536	0.2484	0.0338	0.0284
		NP2				0.8955	0.0093	0.0536			
		NP3				0.9340	0.0477	0.0598			
		NP4				0.9020	0.0157	0.0495			
	30	MM	1.0495	-4.7e-4	2.1e-4	0.8931	0.0069	0.0365	0.2268	0.0122	0.0147
		NP1				0.8836	-0.0026	0.0360	0.2396	0.0250	0.0168
		NP2				0.8783	-0.0079	0.0357			
		NP3				0.9160	0.0297	0.0396			
		NP4				0.8889	0.0027	0.0326			
	50	MM	1.0500	4.2e-5	4.6e-5	0.8974	0.0112	0.0243	0.2277	0.0131	0.0090
		NP1				0.8855	-0.0007	0.0238	0.2413	0.0267	0.0109
		NP2				0.8798	-0.0064	0.0236			
		NP3				0.9181	0.0319	0.0265			
		NP4				0.8933	0.0071	0.0206			
	100	MM	1.0500	2.6e-5	5.6e-6	0.8929	0.0067	0.0116	0.2206	0.0060	0.0035
NP1					0.8799	-0.0063	0.0114	0.2362	0.0216	0.0050	
NP2					0.8733	-0.0130	0.0113				
NP3					0.9117	0.0255	0.0128				
NP4					0.8895	0.0033	0.0096				
1.10	20	MM	1.1005	5.3e-4	7.4e-4	0.9101	0.0238	0.0559	0.2357	0.0211	0.0443
		NP1				0.9035	0.0173	0.0550	0.2490	0.0344	0.0379
		NP2				0.8980	0.0118	0.0546			
		NP3				0.9365	0.0503	0.0629			
		NP4				0.9023	0.0161	0.0475			
	30	MM	1.1012	0.0012	2.4e-4	0.9116	0.0254	0.0417	0.2387	0.0241	0.0167
		NP1				0.9018	0.0156	0.0408	0.2525	0.0379	0.0194
		NP2				0.8962	0.0100	0.0403			
		NP3				0.9354	0.0492	0.0460			
		NP4				0.9043	0.0180	0.0357			
	50	MM	1.1000	-9.2e-6	4.9e-5	0.8978	0.0116	0.0258	0.2248	0.0102	0.0091
		NP1				0.8864	0.0002	0.0252	0.2395	0.0249	0.0106
		NP2				0.8801	-0.0061	0.0251			
		NP3				0.9183	0.0321	0.0278			
		NP4				0.8947	0.0085	0.0218			
	100	MM	1.1000	2.9e-5	6.0e-6	0.8921	0.0059	0.0119	0.2202	0.0056	0.0041
NP1					0.8794	-0.0068	0.0117	0.2364	0.0218	0.0054	
NP2					0.8725	-0.0138	0.0117				
NP3					0.9113	0.0251	0.0131				
NP4					0.8881	0.0019	0.0127				

Çizelge 7.4 Lognormal dağılım ( $\mu = 0.4, \tau = 0.4, \lambda = 1.6161, \sigma^2 = 0.45316$ ) durumunda geometrik sürecin a oranı, dağılımın ortalama ve varyansı için önerilen tahmin edicilerin Yan ve HKO' ları.

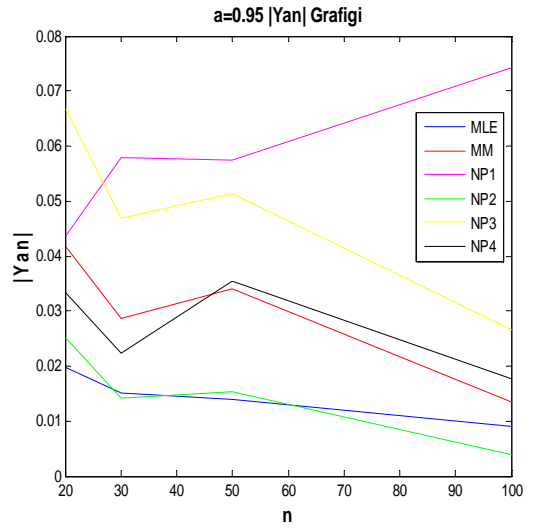
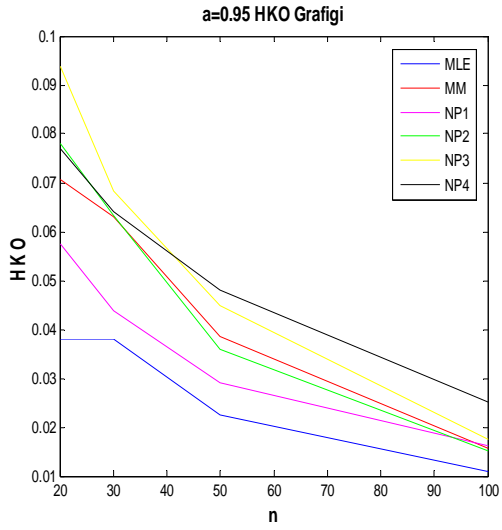
a	n	Yöntem	$\hat{a}$			$\hat{\mu}$			$\hat{\sigma}^2$		
			Tahmin	Yan	HKO	Tahmin	Yan	HKO	Tahmin	Yan	HKO
0.90	20	MLE	0.9009	0.9e-3	0.19e-3	1.6362	0.0201	0.0819	0.4393	-0.0138	0.0638
		MM				1.6359	0.0198	0.0817	0.4502	-0.0030	0.0790
		NP1				1.6309	0.0148	0.0807	0.3825	-0.0706	0.0426
		NP2				1.6471	0.0311	0.0841			
		NP3				1.6439	0.0278	0.0831			
	30	MLE	0.9004	0.37e-3	0.6e-4	1.6331	0.0171	0.0585	0.4408	-0.0124	0.0384
		MM				1.6334	0.0173	0.0585	0.4521	-0.0011	0.0458
		NP1				1.6243	0.0082	0.0573	0.3718	-0.0813	0.0282
		NP2				1.6444	0.0283	0.0603			
		NP3				1.6366	0.0205	0.0588			
	50	MLE	0.8999	-0.2e-3	0.1e-4	1.6124	-0.0037	0.0352	0.4406	-0.0126	0.0241
		MM				1.6123	-0.0038	0.0353	0.4463	-0.0068	0.0306
		NP1				1.6003	-0.0157	0.0346	0.3604	-0.0927	0.0215
		NP2				1.6225	0.0064	0.0364			
		NP3				1.6124	-0.0036	0.0352			
	100	MLE	0.9001	0.72e-4	0.15e-5	1.6276	0.0115	0.0172	0.4528	-0.0003	0.0110
MM					1.6277	0.0116	0.0172	0.4559	-0.0028	0.0143	
NP1					1.6132	-0.0029	0.0167	0.3632	-0.0900	0.0138	
NP2					1.6374	0.0213	0.0180				
NP3					1.6252	0.0091	0.0171				
0.95	20	MLE	0.9503	0.32e-3	0.21e-3	1.6302	0.0141	0.0819	0.4257	-0.0275	0.0595
		MM				1.6298	0.0137	0.0818	0.4346	-0.0186	0.0682
		NP1				1.6254	0.0093	0.0808	0.3728	-0.0804	0.0423
		NP2				1.6403	0.0243	0.0839			
		NP3				1.6378	0.0217	0.0831			
	30	MLE	0.9502	0.25e-3	0.61e-4	1.6283	0.0122	0.0569	0.4422	-0.0110	0.0393
		MM				1.6278	0.0117	0.0569	0.4463	-0.0068	0.0485
		NP1				1.6193	0.0032	0.0558	0.3718	-0.0813	0.0288
		NP2				1.6378	0.0217	0.0586			
		NP3				1.6317	0.0157	0.0572			
	50	MLE	0.9499	-0.1e-3	0.13e-4	1.6115	-0.0046	0.0307	0.4391	-0.0140	0.0230
		MM				1.6114	-0.0047	0.0308	0.4434	0.0098	0.0288
		NP1				1.5995	-0.0166	0.0303	0.3591	-0.0941	0.0207
		NP2				1.6212	0.0051	0.0317			
		NP3				1.6115	-0.0045	0.0307			
	100	MLE	0.9500	0.38e-4	0.18e-5	1.6260	0.0099	0.0173	0.4545	0.0013	0.0125
		MM				1.6258	0.0097	0.0173	0.4551	0.0019	0.0150
		NP1				1.6115	-0.0046	0.0167	0.3641	-0.0891	0.0143
		NP2				1.6353	0.0192	0.0180			
		NP3				1.6236	0.0075	0.0172			
				1.6282	0.0122	0.0202					

Çizelge 7.4 Lognormal dağılım ( $\mu = 0.4, \tau = 0.4, \lambda = 1.6161, \sigma^2 = 0.45316$ ) durumunda geometrik sürecin a oranı, dağılımın ortalama ve varyansı için önerilen tahmin edicilerin Yan ve HKO' ları (devamı).

a	N	Yöntem	$\hat{a}$			$\hat{\mu}$			$\hat{\sigma}^2$		
			Tahmin	Yan	HKO	Tahmin	Yan	HKO	Tahmin	Yan	HKO
1.05	20	MLE	1.0512	0.0012	0.29e-3	1.6443	0.0282	0.0889	0.4481	-0.0051	0.0639
		MM				1.6440	0.0279	0.0891	0.4607	0.0076	0.0853
		NP1				1.6388	0.0227	0.0875	0.3896	-0.0636	0.0425
		NP2				1.6554	0.0393	0.0926			
	30	NP3				1.6520	0.0359	0.0903			
		NP4				1.6436	0.0276	0.0895			
		MLE	1.0502	0.17e-3	0.8e-4	1.6279	0.0119	0.0561	0.4456	-0.0076	0.0444
		MM				1.6275	0.0114	0.0563	0.4506	-0.0025	0.0577
	50	NP1				1.6187	0.0026	0.0549	0.3733	-0.0798	0.0305
		NP2				1.6375	0.0215	0.0587			
		NP3				1.6313	0.0152	0.0564			
		NP4				1.6276	0.0115	0.0568			
	100	MLE	1.0498	-0.2e-3	0.18e-4	1.6144	-0.0017	0.0350	0.4412	-0.0119	0.0243
		MM				1.6145	-0.0016	0.0351	0.4483	-0.0049	0.0332
		NP1				1.6024	-0.0137	0.0344	0.3609	-0.0922	0.0214
		NP2				1.6248	0.0087	0.0363			
1.10	20	NP3				1.6145	-0.0016	0.0349			
		NP4				1.6133	-0.0027	0.0353			
		MLE	1.0501	0.69e-4	0.21e-5	1.6260	0.0099	0.0176	0.4538	0.0006	0.0115
		MM				1.6258	0.0097	0.0176	0.4545	0.0014	0.0153
	30	NP1				1.6115	-0.0046	0.0171	0.3638	-0.0894	0.0140
		NP2				1.6352	0.0191	0.0184			
		NP3				1.6236	0.0075	0.0175			
		NP4				1.6237	0.0076	0.0193			
	50	MLE	1.1000	0.73e-5	0.31e-3	1.6287	0.0127	0.0886	0.4281	-0.0251	0.0590
		MM				1.6283	0.0123	0.0889	0.4389	-0.0142	0.0779
		NP1				1.6237	0.0076	0.0877	0.3739	-0.0793	0.0418
		NP2				1.6391	0.0230	0.0920			
	100	NP3				1.6363	0.0202	0.0897			
		NP4				1.6271	0.0110	0.0884			
		MLE	1.1004	0.35e-3	0.90e-4	1.6263	0.0102	0.0584	0.4472	-0.0059	0.0432
		MM				1.6255	0.0094	0.0582	0.4471	-0.0061	0.0492
20	NP1				1.6169	0.0009	0.0572	0.3747	-0.0785	0.0300	
	NP2				1.6350	0.0189	0.0596				
	NP3				1.6297	0.0136	0.0587				
	NP4				1.6244	0.0083	0.0597				
30	MLE	1.1000	0.49e-4	0.19e-4	1.6249	0.0088	0.0333	0.4486	-0.0046	0.0221	
	MM				1.6248	0.0087	0.0334	0.4538	0.0007	0.0313	
	NP1				1.6127	-0.0034	0.0326	0.3668	-0.0863	0.0193	
	NP2				1.6349	0.0188	0.0348				
50	NP3				1.6249	0.0089	0.0333				
	NP4				1.6214	0.0054	0.0375				
	MLE		-0.5e-6	0.24e-5	1.6200	0.0040	0.0164	0.4514	-0.0017	0.0108	
	MM				1.6198	0.0037	0.0164	0.4527	-0.0004	0.0142	
100	NP1				1.6055	-0.0105	0.0161	0.3617	-0.0915	0.0140	
	NP2				1.6294	0.0134	0.0170				
	NP3				1.6176	0.0015	0.0163				
	NP4				1.6181	0.0020	0.0271				

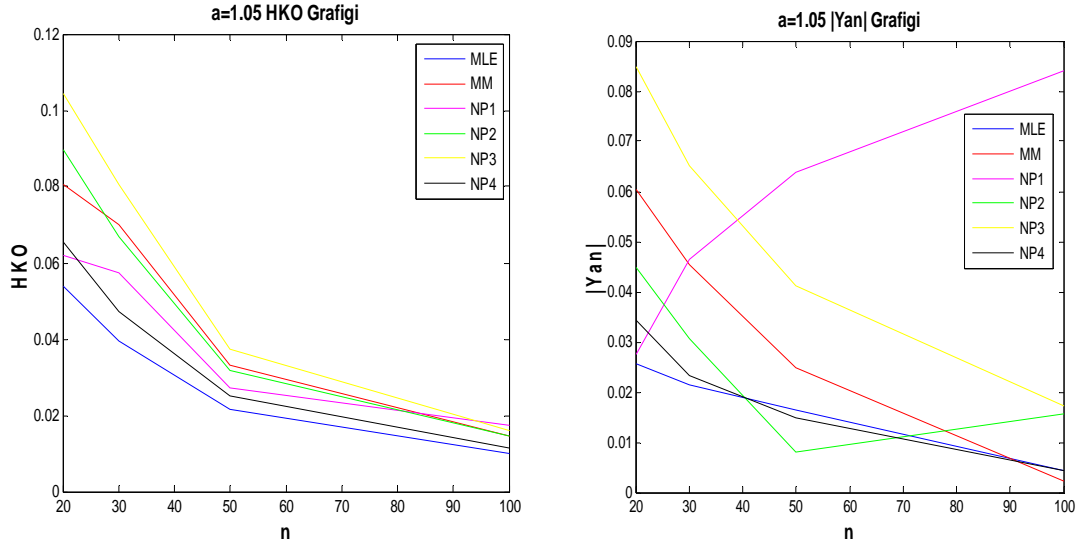


Şekil 7.1 Çizelge 7.1'deki sonuçlara göre  $a = 0.90$  için dağılımın ortalaması için önerilen tahmin edicilerin Yan ve HKO grafikleri

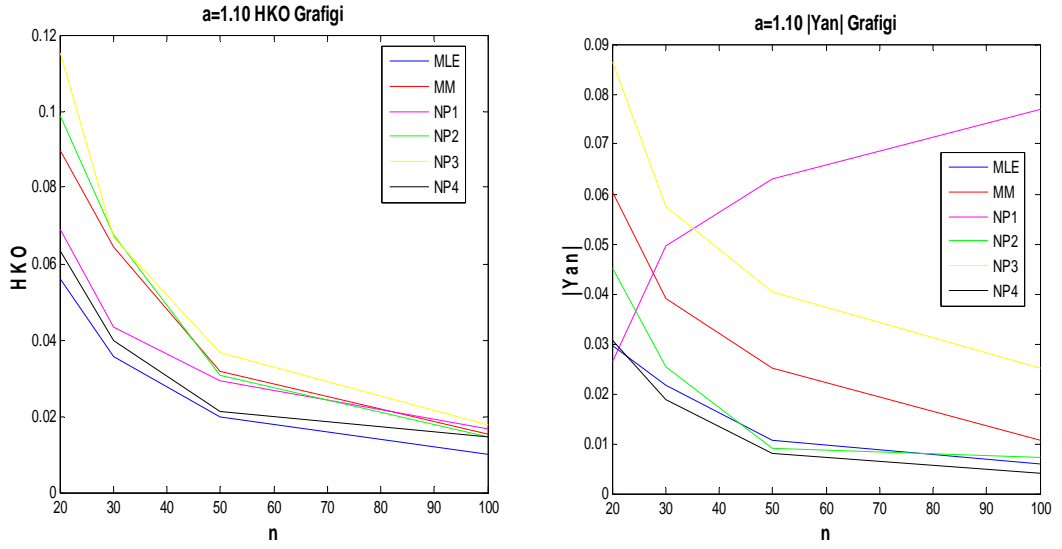


Şekil 7.2 Çizelge 7.1'deki sonuçlara göre  $a = 0.95$  için dağılımın ortalaması için önerilen tahmin edicilerin Yan ve HKO grafikleri

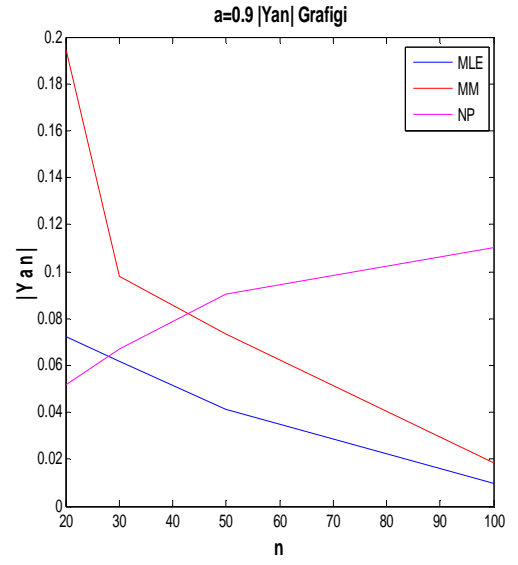
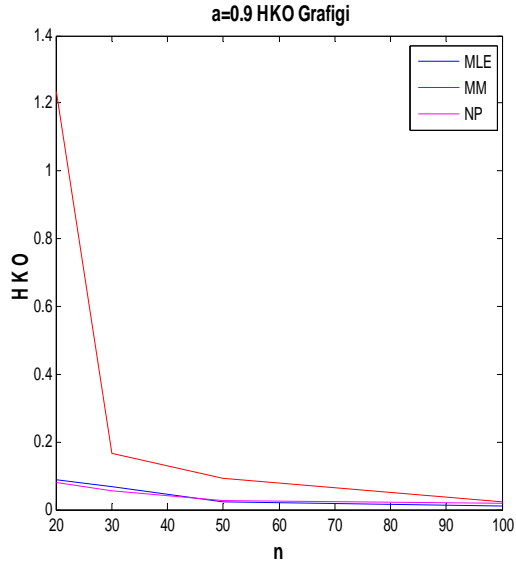




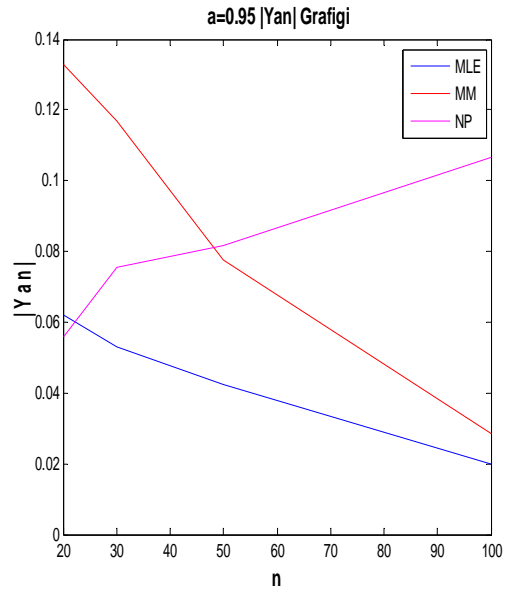
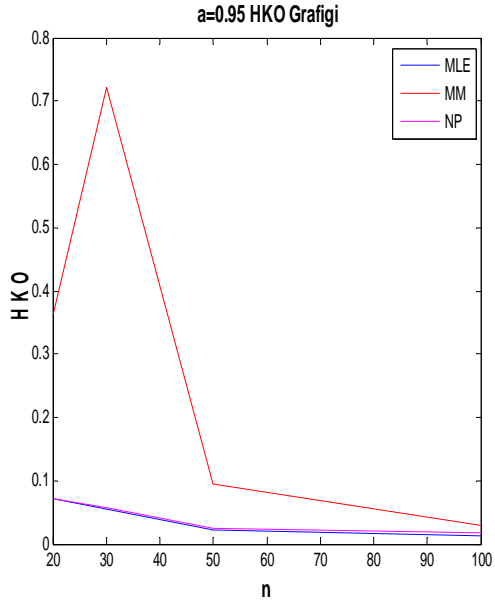
Şekil 7.3 Çizelge 7.1'deki sonuçlara göre  $a = 1.05$  için dağılımın ortalaması için önerilen tahmin edicilerin Yan ve HKO grafikleri



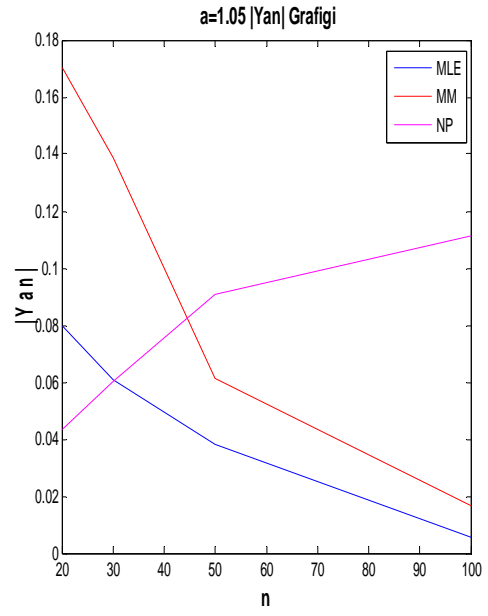
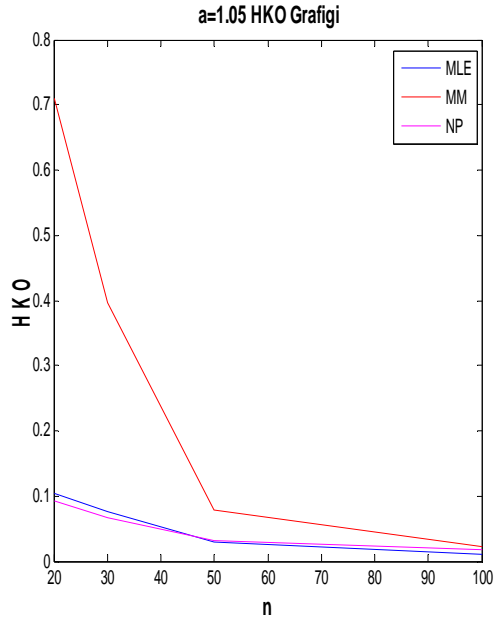
Şekil 7.4 Çizelge 7.1'deki sonuçlara göre  $a = 1.10$  için dağılımın ortalaması için önerilen tahmin edicilerin Yan ve HKO grafikleri



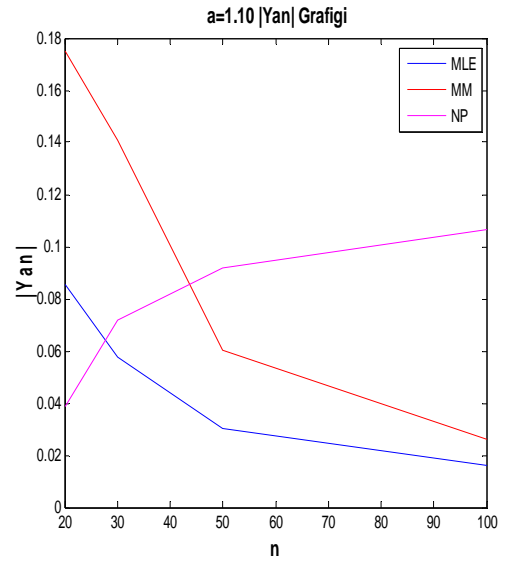
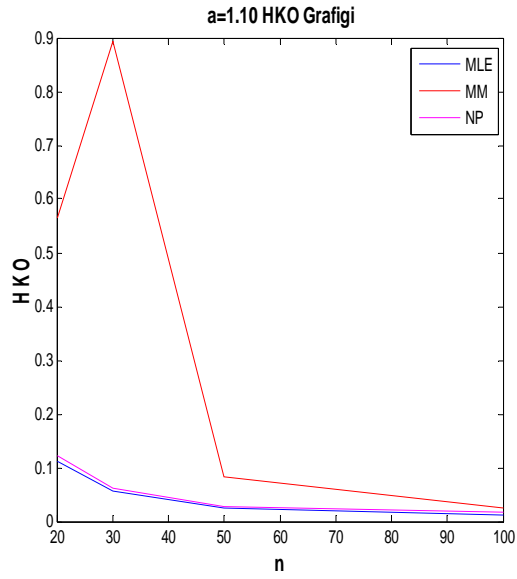
Şekil 7.5 Çizelge 7.1’deki sonuçlara göre  $a = 0.90$  için dağılımın varyansı için önerilen tahmin edicilerin Yan ve HKO grafikleri



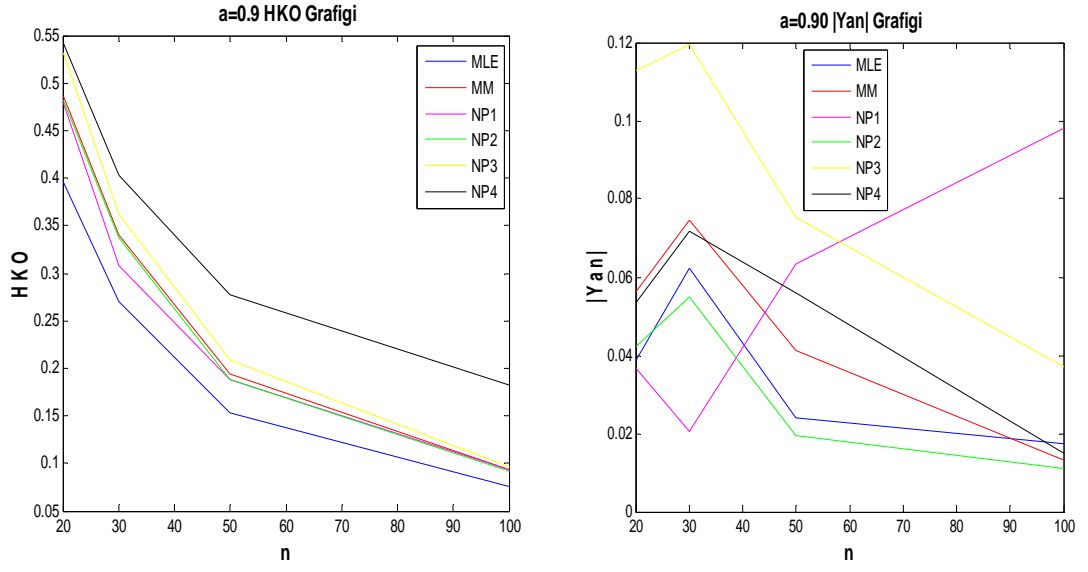
Şekil 7.6 Çizelge 7.1’deki sonuçlara göre  $a = 0.95$  için dağılımın varyansı için önerilen tahmin edicilerin Yan ve HKO grafikleri



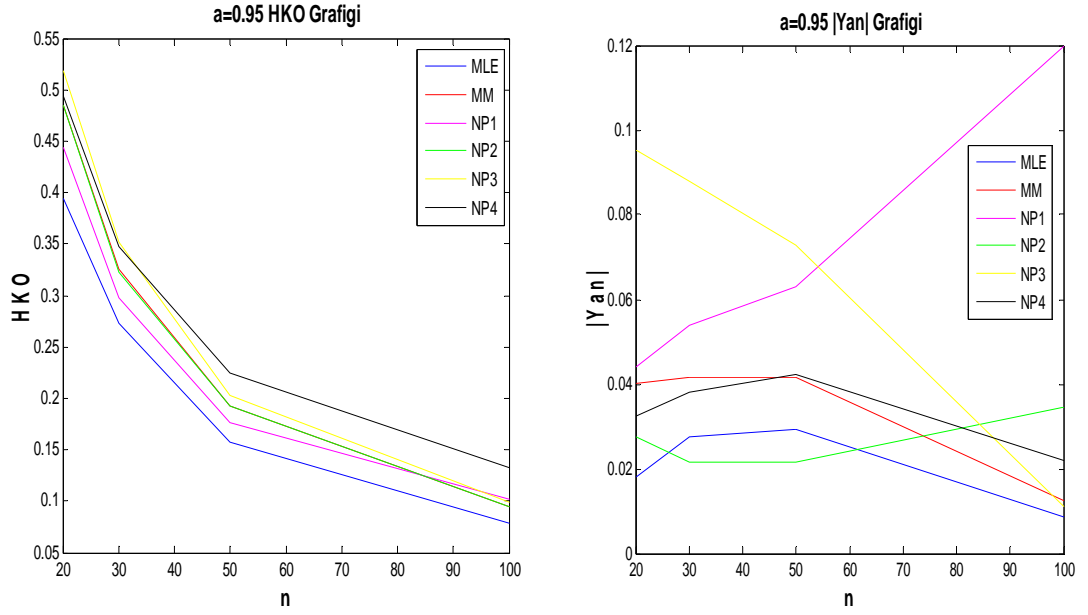
Şekil 7.7 Çizelge 7.1'deki sonuçlara göre  $a = 1.05$  için dağılımın varyansı için önerilen tahmin edicilerin Yan ve HKO grafikleri



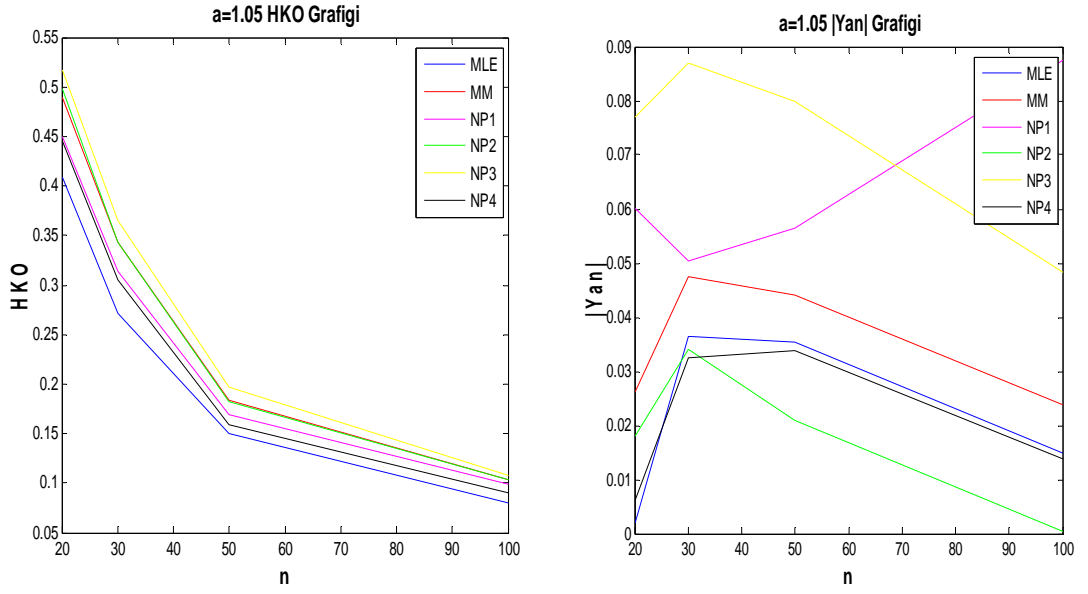
Şekil 7.8 Çizelge 7.1'deki sonuçlara göre  $a = 1.10$  için dağılımın varyansı için önerilen tahmin edicilerin Yan ve HKO grafikleri



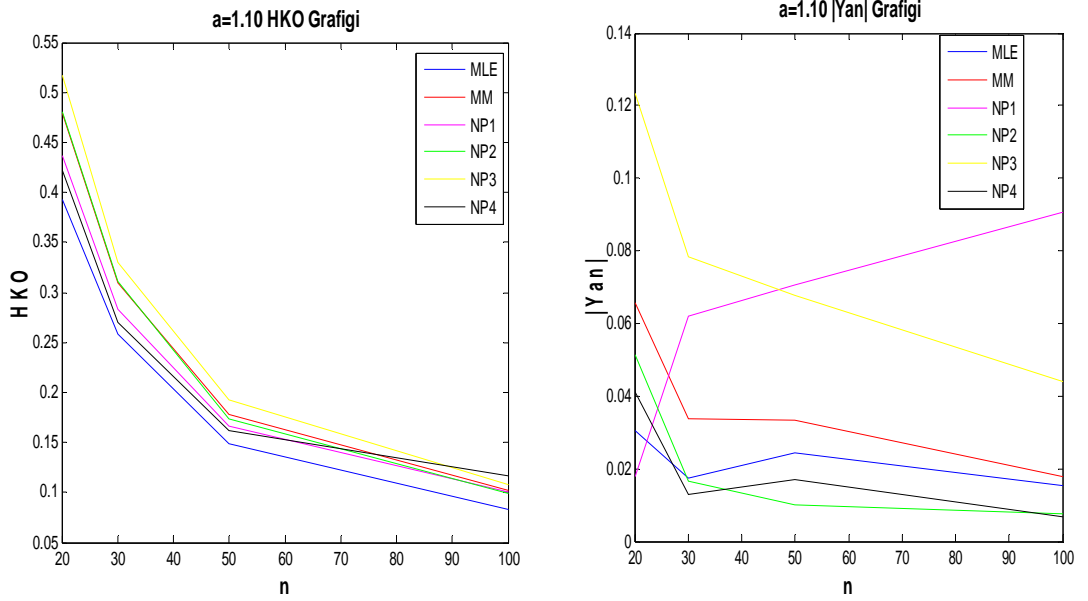
Şekil 7.9 Çizelge 7.2'deki sonuçlara göre  $a = 0.90$  için dağılımın ortalaması için önerilen tahmin edicilerin Yan ve HKO grafikleri



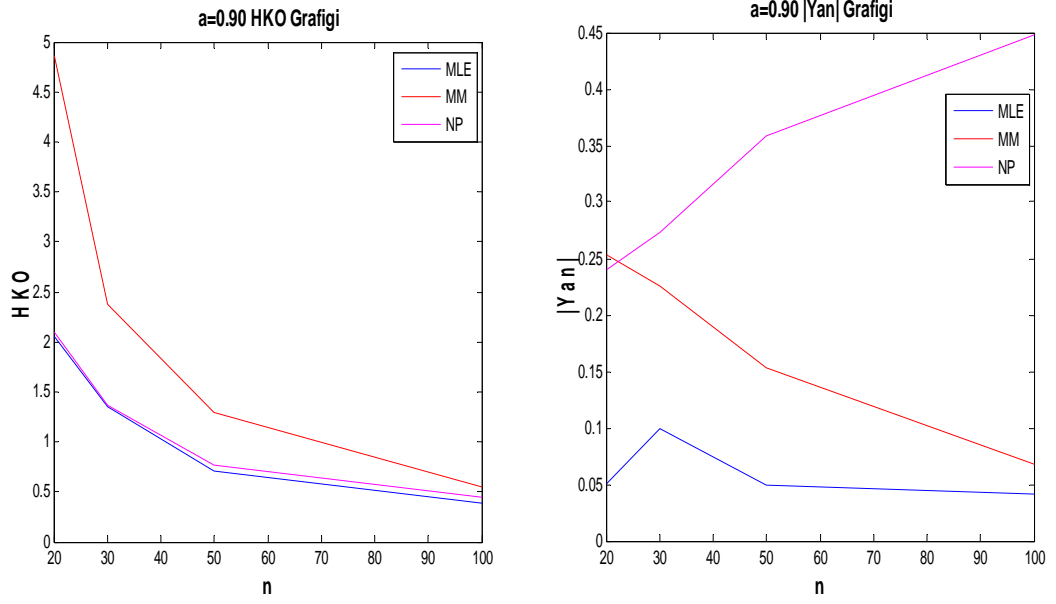
Şekil 7.10 Çizelge 7.2'deki sonuçlara göre  $a = 0.95$  için dağılımın ortalaması için önerilen tahmin edicilerin Yan ve HKO grafikleri



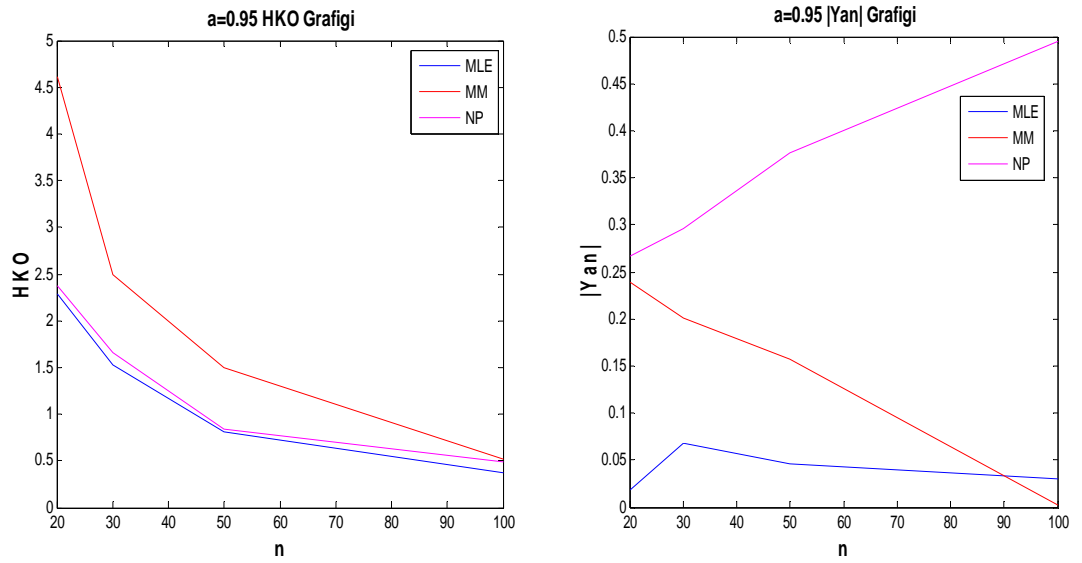
Şekil 7.11 Çizelge 7.2’deki sonuçlara göre  $a = 1.05$  için dağılımın ortalaması için önerilen tahmin edicilerin Yan ve HKO grafikleri



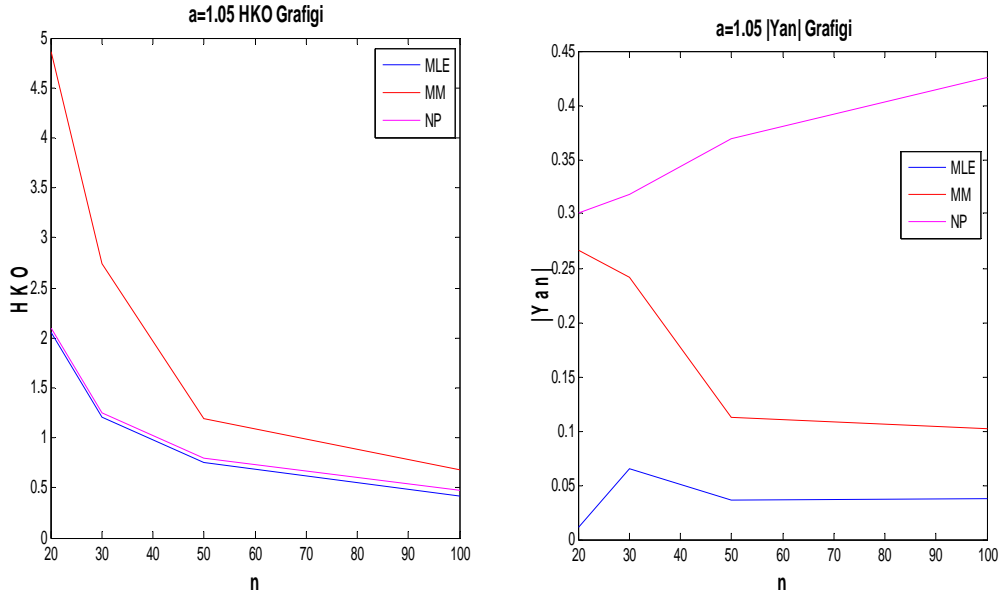
Şekil 7.12 Çizelge 7.2’deki sonuçlara göre  $a = 1.10$  için dağılımın ortalaması için önerilen tahmin edicilerin Yan ve HKO grafikleri



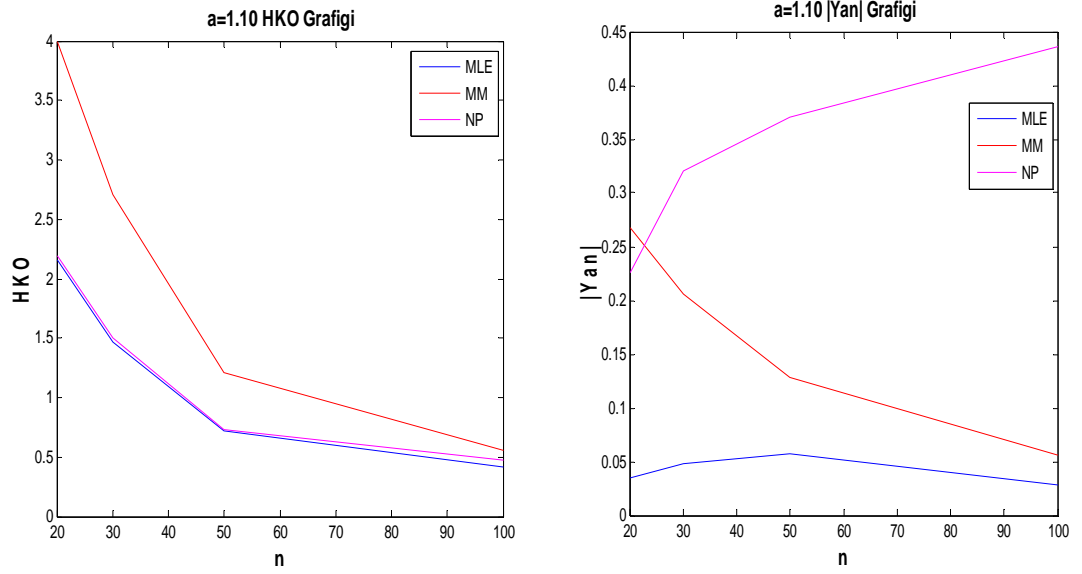
Şekil 7.13 Çizelge 7.2’deki sonuçlara göre  $a = 0.90$  için dağılımın varyansı için önerilen tahmin edicilerin Yan ve HKO grafikleri



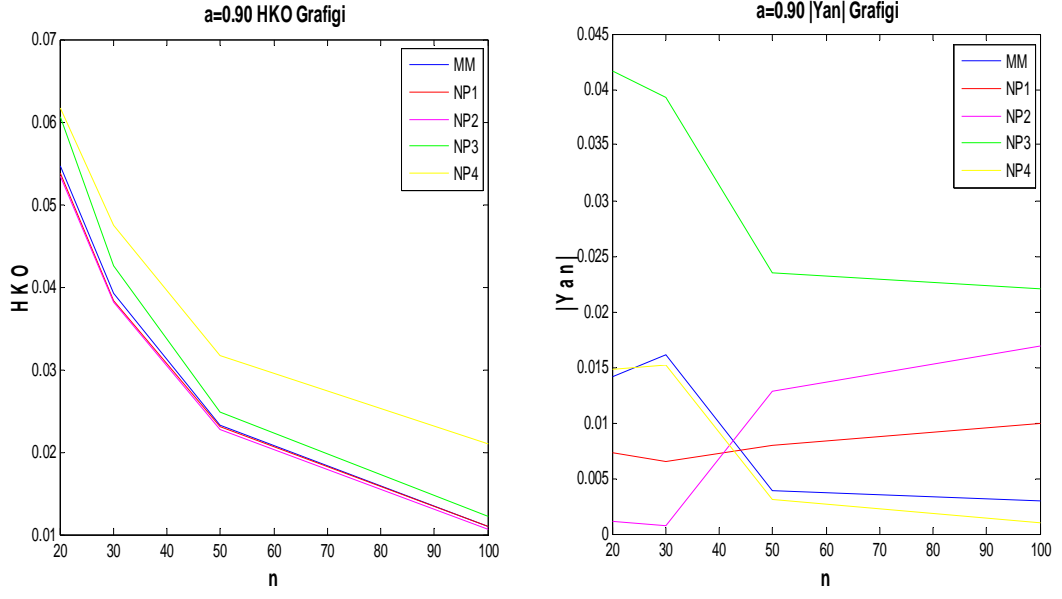
Şekil 7.14 Çizelge 7.2 ‘deki sonuçlara göre  $a = 0.95$  için dağılımın varyansı için önerilen tahmin edicilerin Yan ve HKO grafikleri



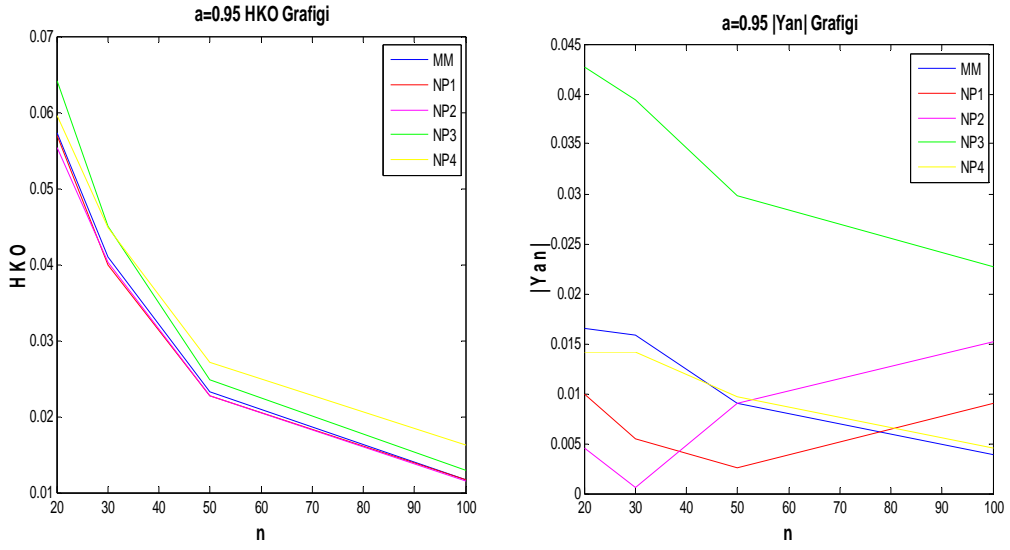
Şekil 7.15 Çizelge 7.2 ‘deki sonuçlara göre  $a = 1.05$  için dağılımın varyansı için önerilen tahmin edicilerin Yan ve HKO grafikleri



Şekil 7.16 Çizelge 7.2 ‘deki sonuçlara göre  $a = 1.10$  için dağılımın varyansı için önerilen tahmin edicilerin Yan ve HKO grafikleri

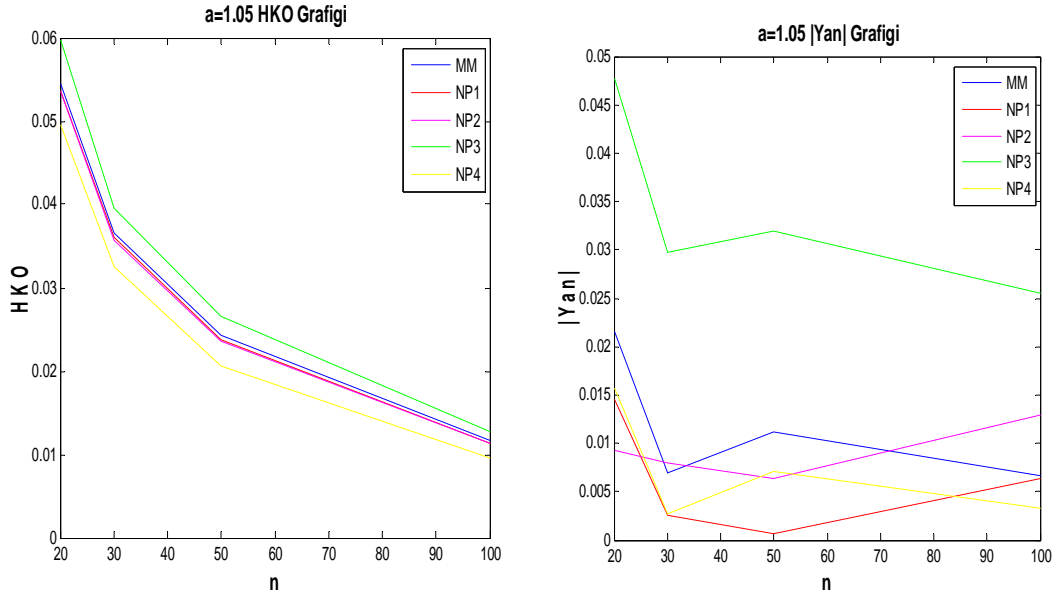


Şekil 7.17 Çizelge 7.3 'deki sonuçlara göre  $a = 0.90$  için dağılımın ortalaması için önerilen tahmin edicilerin Yan ve HKO grafikleri

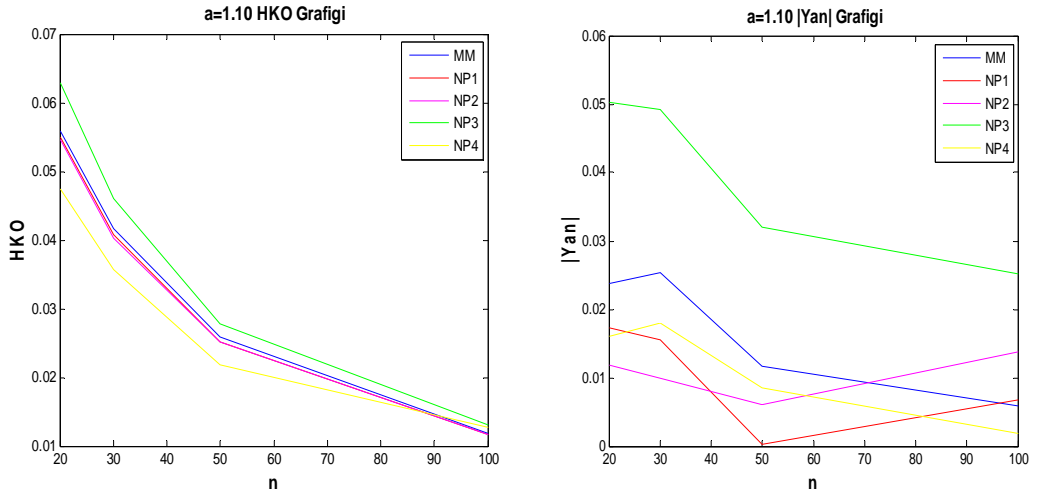


Şekil 7.18 Çizelge 7.3 'deki sonuçlara göre  $a = 0.95$  için dağılımın ortalaması için önerilen tahmin edicilerin Yan ve HKO grafikleri

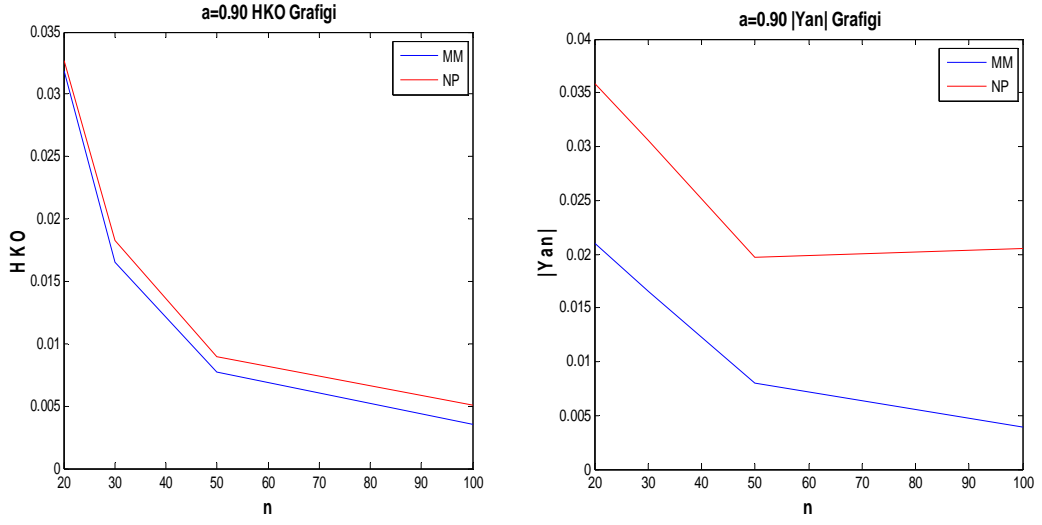




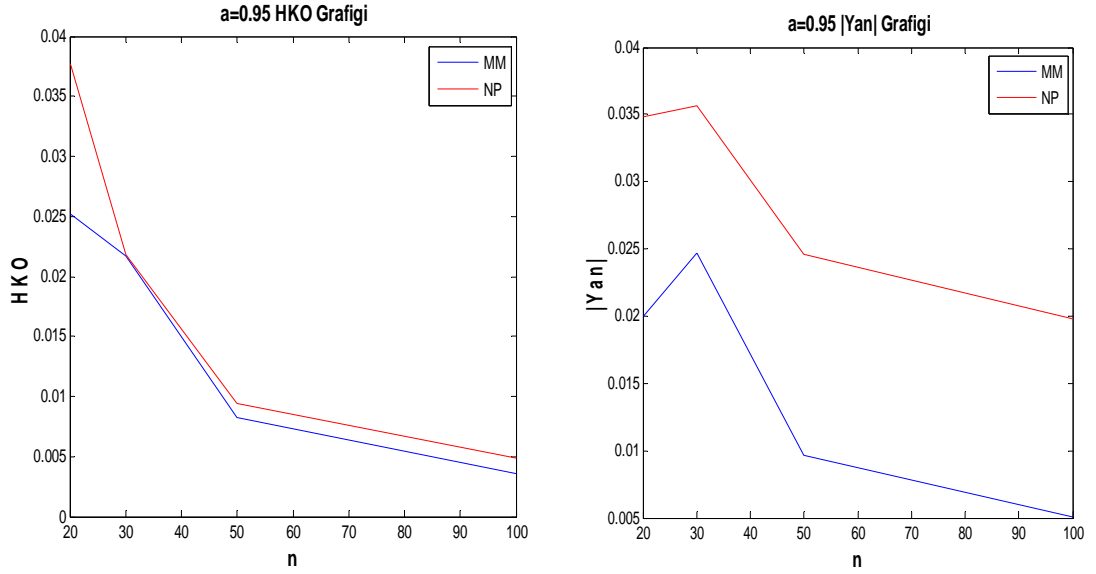
Şekil 7.19 Çizelge 7.3 ‘deki sonuçlara göre  $a = 1.05$  için dağılımın ortalaması için önerilen tahmin edicilerin Yan ve HKO grafikleri



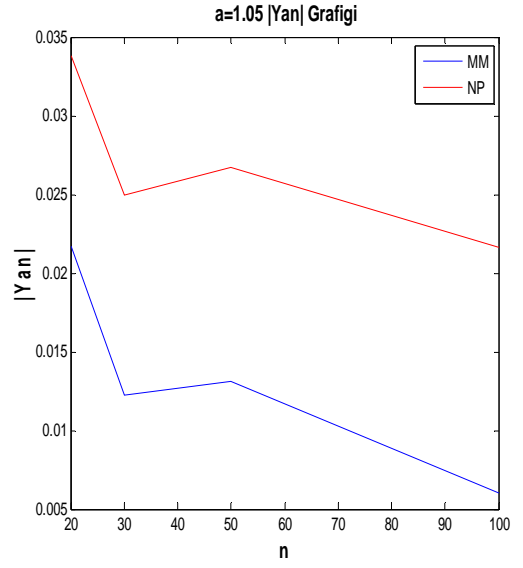
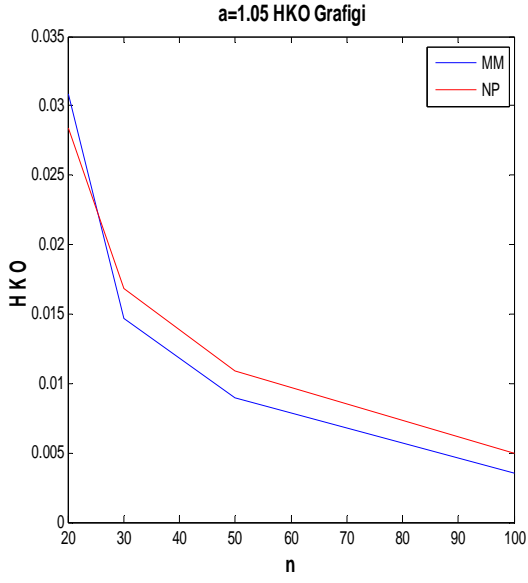
Şekil 7.20 Çizelge 7.3 ‘deki sonuçlara göre  $a = 1.10$  için dağılımın ortalaması için önerilen tahmin edicilerin Yan ve HKO grafikleri



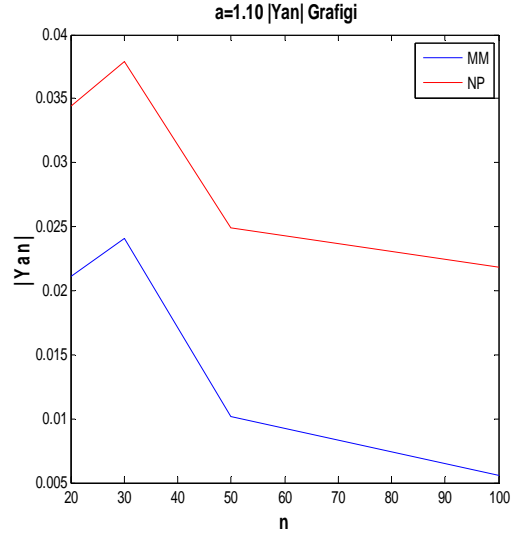
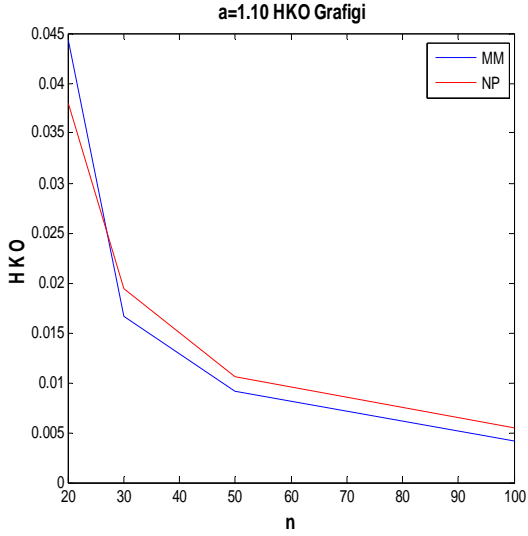
Şekil 7.21 Çizelge 7.3 ‘deki sonuçlara göre  $a = 0.90$  için dağılımın varyansı için önerilen tahmin edicilerin Yan ve HKO grafikleri



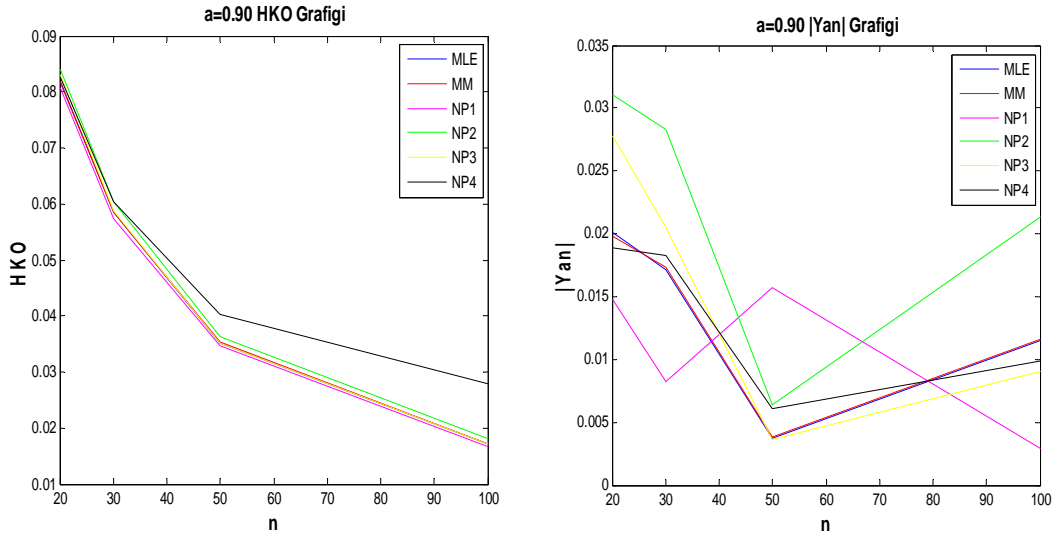
Şekil 7.22 Çizelge 7.3 ‘deki sonuçlara göre  $a = 0.95$  için dağılımın varyansı için önerilen tahmin edicilerin Yan ve HKO grafikleri



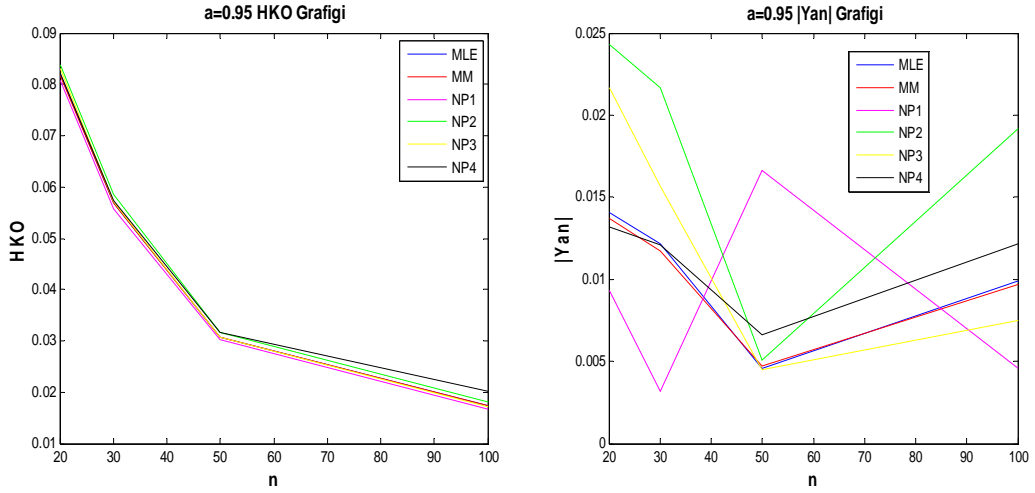
Şekil 7.23 Çizelge 7.3 'deki sonuçlara göre  $a = 1.05$  için dağılımın varyansı için önerilen tahmin edicilerin Yan ve HKO grafikleri



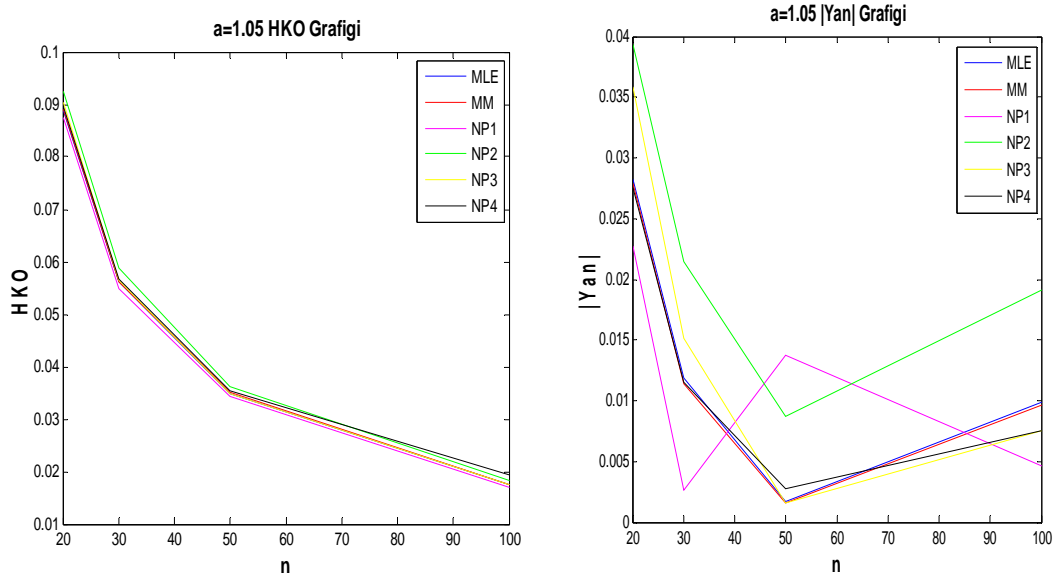
Şekil 7.24 Çizelge 7.3 'deki sonuçlara göre  $a = 1.10$  için dağılımın varyansı için önerilen tahmin edicilerin Yan ve HKO grafikleri



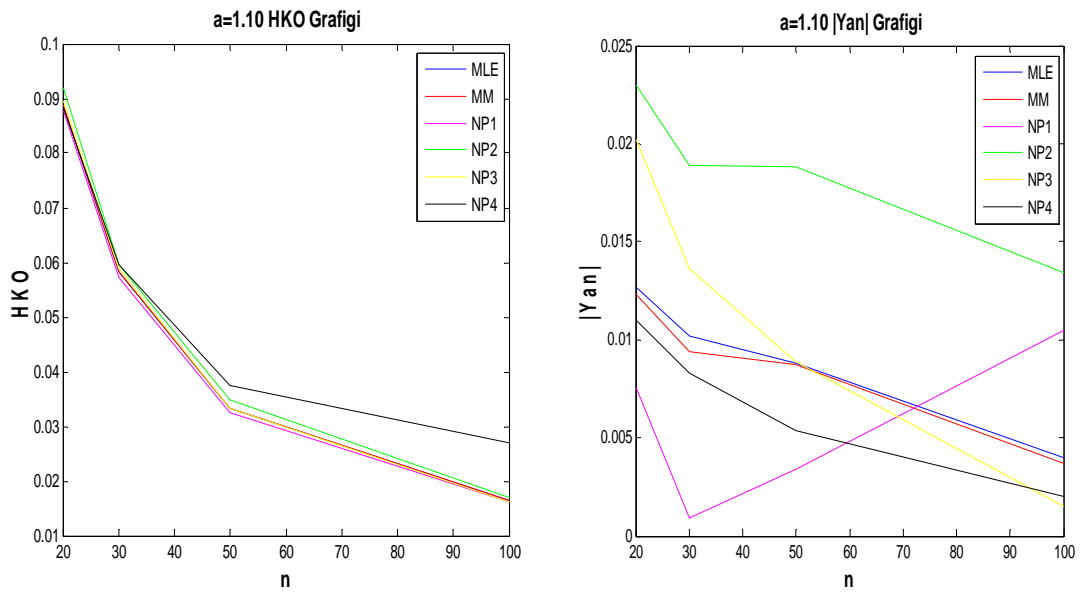
Şekil 7.25 Çizelge 7.4 ‘deki sonuçlara göre  $a = 0.90$  için dağılımın ortalaması için önerilen tahmin edicilerin Yan ve HKO grafikleri



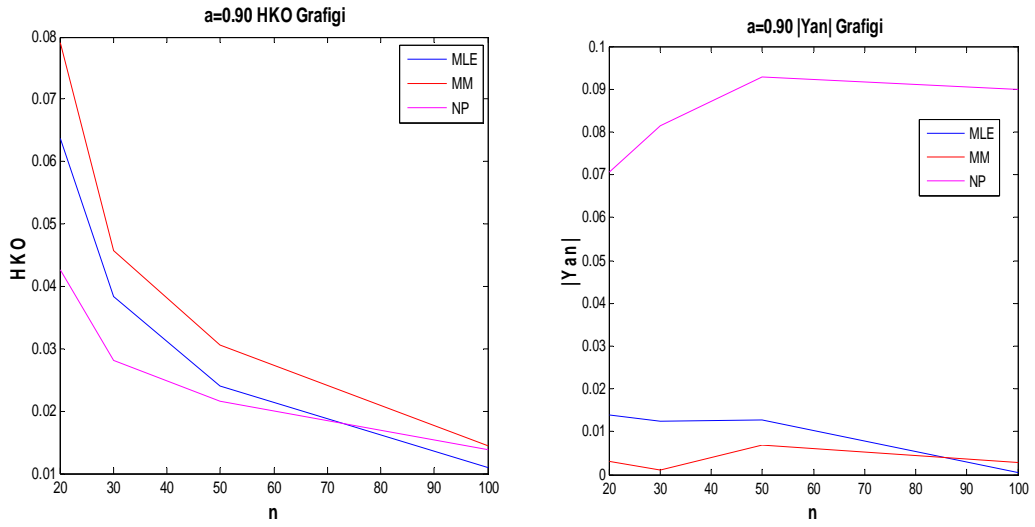
Şekil 7.26 Çizelge 7.4 ‘deki sonuçlara göre  $a = 0.95$  için dağılımın ortalaması için önerilen tahmin edicilerin Yan ve HKO grafikleri



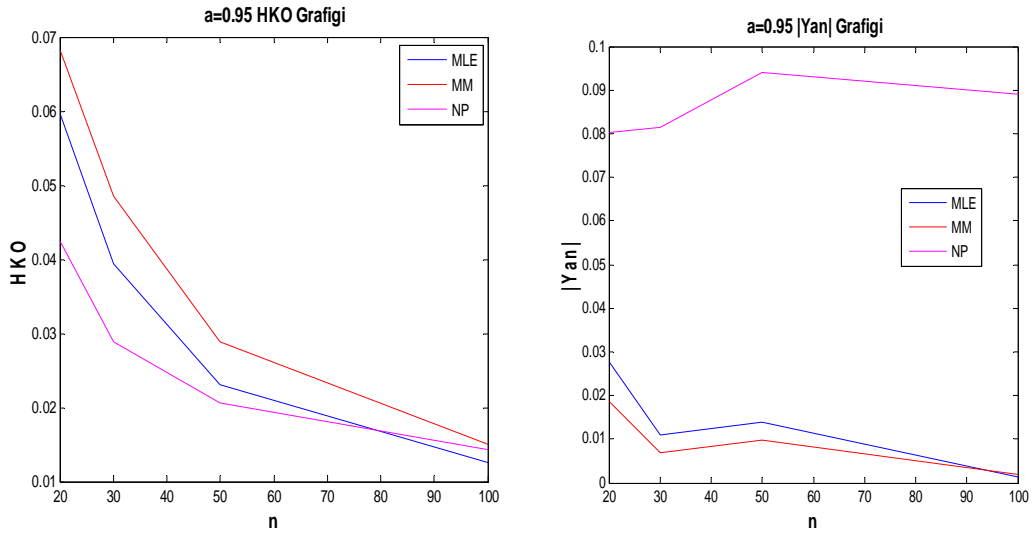
Şekil 7.27 Çizelge 7.4 ‘deki sonuçlara göre  $a = 1.05$  için dağılımın ortalaması için önerilen tahmin edicilerin Yan ve HKO grafikleri



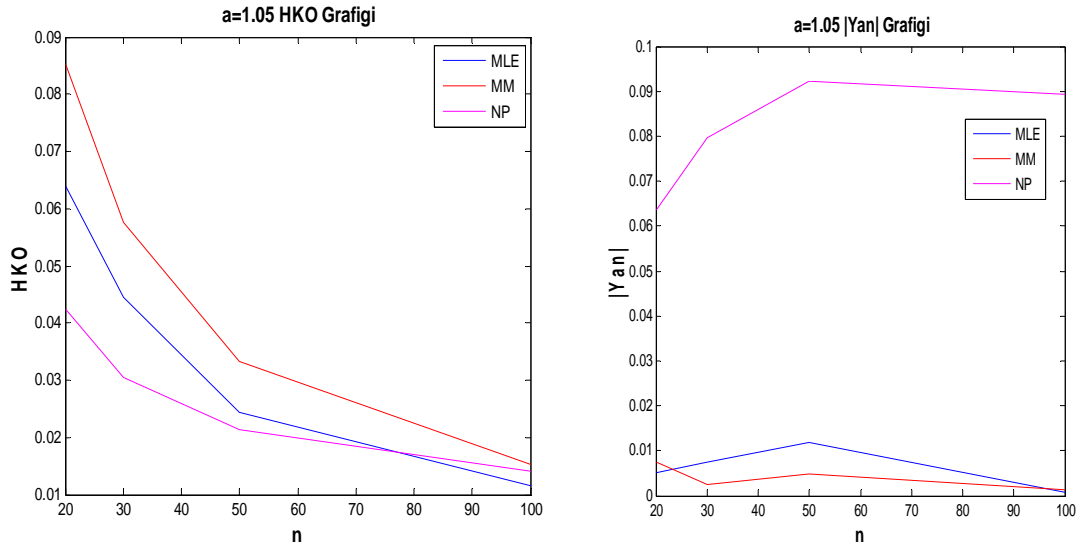
Şekil 7.28 Çizelge 7.4 ‘deki sonuçlara göre  $a = 1.10$  için dağılımın ortalaması için önerilen tahmin edicilerin Yan ve HKO grafikleri



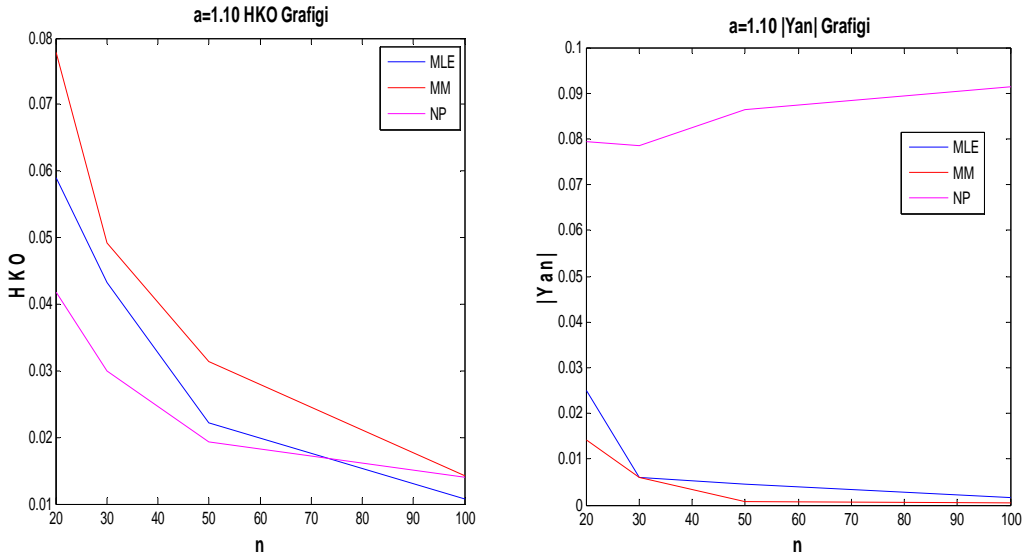
Şekil 7.29 Çizelge 7.4 ‘deki sonuçlara göre  $a = 0.90$  için dağılımın varyansı için önerilen tahmin edicilerin Yan ve HKO grafikleri



Şekil 7.30 Çizelge 7.4 ‘deki sonuçlara göre  $a = 0.95$  için dağılımın varyansı için önerilen tahmin edicilerin Yan ve HKO grafikleri



Şekil 7.31 Çizelge 7.4 ‘deki sonuçlara göre  $a = 1.05$  için dağılımın varyansı için önerilen tahmin edicilerin Yan ve HKO grafikleri



Şekil 7.32 Çizelge 7.4 ‘deki sonuçlara göre  $a = 1.10$  için dağılımın varyansı için önerilen tahmin edicilerin Yan ve HKO grafikleri

## 8. SONUÇ

Genel olarak simülasyon sonuçlarına göre  $F$  dağılım fonksiyonunun bilinmediği durumda hata kareler ortalaması ve yan ölçütüne göre  $\mu$  için  $a < 1$  iken  $\hat{\mu}_2$  ve  $\hat{\mu}_5$  değerlerine göre tercih edilir. Ancak  $\hat{\mu}_2$ 'nin analitik ifadesi olmayıp  $\hat{\mu}_5$ 'yi elde etmek daha kolay olduğundan  $\mu$ 'nün tahmini için  $\hat{\mu}_5$  önerilebilir.  $a > 1$  iken lognormal dağılımda  $\mu$  için  $\hat{\mu}_5$  değerlerine göre tercih edilir. Üstel dağılım durumunda  $\hat{\mu}_4$  değerlerine göre daha iyidir. Weibull ve gamma dağılımı durumunda  $\hat{\mu}_4$  ve  $\hat{\mu}_5$  değerlerine göre daha uygundur. Ancak  $\hat{\mu}_5$  bir asimptotik dağılıma sahip olduğundan tercih edilebilir.  $F$  dağılımın  $\sigma^2$  varyansı için yan ve hata kareler ölçütüne göre Weibull dağılımının dışındaki diğer dağılımlarda örnek hacmi küçük iken  $\hat{\sigma}_1^2$ , örnek hacmi büyük iken  $\hat{\sigma}_2^2$  tercih edilir. Weibull dağılım durumunda her iki durumda da  $\hat{\sigma}_2^2$  önerilebilir. Eğer  $F$  dağılım fonksiyonu biliniyorsa  $\mu$  ve  $\sigma^2$  için en çok olabilirlik tahmin edicileri diğerlerine göre tercih edilir.



## KAYNAKLAR

- Arnold, S.F. 1990. *Mathematical Statistics*. Prentice-Hall, New Jersey.
- Ascher, H. and Feingold, H. 1984. *Repairable Systems Reliability*. Marcel Dekker, New York.
- Chan, S.K., Lam, Y. and Leung, Y.P. 2004. Statistical inference for geometric processes with gamma distributions. *Computational Statistics and Data Analysis*, 47, 565-581.
- Cox, D. R. and Lewis, P. A.W. 1966. *The Statistical Analysis of Series of Events*. Methuens, London.
- Gertsbakh, I.B. 1989. *Statistical Reliability Theory*. Marcel Dekker, 331, New York.
- Lam, Y. 1988a. A note on the optimal replacement problem. *Adv. Appl. Prob.*, 20, 479-482.
- Lam, Y. 1988b. Geometric process and replacement problem. *Acta Mathematicae Applicatae Sinica*, 4, 366-377.
- Lam, Y. 1992a. Optimal geometric process replacement model. *Acta Mathematicae Applicatae Sinica*, 8, 73-81.
- Lam, Y. 1992b. Nonparametric inference for geometric processes. *Commun. Statist.-Theory Meth.*, 21(7), 2083-2105.
- Lam, Y. and Chan, S.K. 1998. Statistical inference for geometric processes with lognormal distribution. *Computational Statistics and Data Analysis*, 27, 99-112.
- Lam, Y., Zhu, L. and Chan, S.K. 2004. Analysis of data from a series of events by a geometric process model. *Acta Mathematicae Applicatae Sinica*, 2, 263-282.
- Lehmann, E.L. 1999. *Elements of Large Sample Theory*. Springer-Verlang, New York.
- Öztürk, F., Akdi, Y., Aydoğdu, H. ve Karabulut, İ. 2006. *Parametre Tahmini ve Hipotez Testi*. Bıçaklar Kitapevi, Ankara.

## ÖZGEÇMİŞ

Adı soyadı : Mahmut KARA

Doğum Yeri : Erzurum

Doğum Tarihi : 30.01.1981

Medeni Hali : Bekar

Yabancı Dili : İngilizce

### Eğitim Durumu (Kurumu ve Yıl)

Lise :Van Atatürk Lisesi (1996-2000).

Lisans :Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi İstatistik  
ve Bilgisayar Bilimleri Bölümü (2001-2005).

Yüksek Lisans : Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü İstatistik Anabilim  
Dalı (2006-2009).

### Çalıştığı Kurum/ Kurumlar ve Yıl

Van Yüzüncü Yıl Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi (2005–2006)

Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü İstatistik Anabilim Dalı (2006-  
2009).