ANKARA ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

AGRATINI OPERATÖRLERİNİN KANTOROVICH TİPLİ İNTEGRAL GENELLEŞMESİ İLE İNTEGRALLENEBİLİR FONKSİYONLARIN L_p-NORMUNDA YAKLAŞIMI

Serpil DALLI

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ANKARA

2008

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

AGRATINI OPERATÖRLERİNİN KANTOROVICH TİPLİ İNTEGRAL GENELLEŞMESİ İLE İNTEGRALLENEBİLİR FONKİYONLARIN L_p-NORMUNDA YAKLAŞIMI

Serpil DALLI

Ankara Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Ogün DOĞRU

Bu tez dört bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde, lineer pozitif operatörlerin tanımı yapılmıştır ve yaklaşım özelliklerine ilişkin bazı teoremler verilmiştir.

İkinci bölümde, Meyer-König ve Zeller operatörleri ve bu opertaörlerin Agratini operatörü olarak bilinen Stancu tipli bir genelleşmesi tanıtılmış ve Korovkin teoremi yardımıyla düzgün yakınsaklığı incelenmiştir.

Üçüncü bölümde, Agratini operatörlerinin Kantorovich tipli integral genelleşmesi tanıtılmış ve Korovkin teoremi yardımıyla düzgün yakınsaklığı incelenmiştir.

Dördüncü bölümde ise f sürekli bir fonksiyon olduğunda Peetre-K fonksiyoneli yardımıyla Agratini operatörlerinin ve Agratini operatörlerinin Kantorovich tipli integral genelleşmesinin f fonksiyonuna yaklaşım hızı elde edilmiştir.

Ekim 2008, 33 sayfa

Anahtar Kelimeler: Lineer pozitif operatörler, Meyer-König ve Zeller operatörleri, Kantorovich tipli genelleşme, Korovkin tipli teoremler, Peetre K-fonksiyoneli.

ABSTRACT

Master Thesis

APPROXIMATION OF INTEGRABLE FUNCTIONS IN THE L_p-NORM BY KANTOROVICH TYPE INTEGRAL GENERALIZATION OF AGRATINI OPERATORS

Serpil DALLI

Ankara University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematics

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Ogün DOĞRU

This thesis consists of four chapters.

In the first chapter, the definition of sequence of linear positive operators is constructed and some theorems are given related to their approximation properties.

In the second chapter, Meyer-König and Zeller operators and their Stancu type a generalization known as Agratini operators are introduced and uniform convergence of them is investigated with the help of Korovkin theorem.

In the third chapter, the definition of Kantorovich type integral generalization of Agratini operators is made and some theorems are given related to their approximation properties.

In the fourth chapter, the rate of approximation of Agratini operators and their Kantorovich type integral generalization to a continuous function f is obtained with the help of K-functional of Peetre when f is a continuous function.

October 2008, 33 pages

Key Words: Linear positive operators, Meyer-König and Zeller operators, Agratini operators, Kantorovich type generalization, Korovkin type theorems, Peetre K-functional.

TEŞEKKÜR

Bu çalışmanın hazırlanması sürecinde bilgi, öneri ve yardımlarını esirgemeyerek beni yönlendiren danışman hocam Sayın Doç. Dr. Ogün DOĞRU' ya, maddi ve manevi her konuda yanımda olan, varlıklarıyla bana daima huzur veren canım ailem ve arkadaşlarıma en içten teşekkürlerimi sunmayı borç bilirim.

Serpil DALLI

Ankara, Ekim 2008

İÇİNDEKİLER

SİMGELER DİZİNİ

$A_n(f;x)$	n$\in$ **N** olmak üzere bir operatör dizisi
$B_n(f;x)$	Bernstein polinom dizisi
$M_n(f;x)$	Meyer-König ve Zeller opertör dizisi
$D_n(f;x)$	Agratini operatör dizisi
$D_n^*(f;x)$	Agratini operatör dizilerinin Kantorovich Tipli İntegral genelleşmesi
$C[a,b]$	$[a,b]$ aralığında tanımlı ve sürekli tüm reel değerli fonksiyonların uzayı
$C^2[a,b]$	$g, g', g'' \in C[a,b]$ olan fonksiyon uzayı
$\{f_n\}$	n$\in N$ olmak üzere bir fonksiyon dizisi
$f_n \rightrightarrows f(x)$	$\{f_n\}$ fonksiyon dizisinin f fonksiyonuna düzgün yakınsaması
$\lVert f\rVert_{C[a,b]}$	$x\in[a,b]$ için $\lVert f\rVert_{C[a,b]} = \underset{a\le x\le b}{maks}\lvert f(x)\rvert$ ile tanımlı norm
$\lVert g\rVert_{C^2[a,b]}$	$\lVert g\rVert_{C^2[a,b]} = \lVert g\rVert_{C[a,b]} + \lVert g'\rVert_{C[a,b]} + \lVert g''\rVert_{C[a,b]}$ ile tanımlı norm
$K(f;\delta_n)$	$K(f;\delta_n) = \underset{g\in C^2[a,b]}{inf}\left\{\lVert f-g\rVert_{C[a,b]} + \delta_n\lVert g\rVert_{C^2[a,b]}\right\}$ ile tanımlı $f\in C[a,b]$ fonksiyonunun Peetre K- fonsiyoneli
$\lVert g\rVert_{L_p^2(D)}$	$\lVert g\rVert_{L_p^2(D)} := \lVert g\rVert_{L_p(D)} + \lVert g'\rVert_{L_p(D)} + \lVert g''\rVert_{L_p(D)}$ ile tanımlı norm

1.GİRİŞ

Bu bölümde, lineer pozitif operatörlerin tanımı yapılacak ve yaklaşım özelliklerine ilişkin bazı teoremler verilecektir.

1.1 Lineer Pozitif Operatörler

Tanım 1.1.1. X ve Y reel değerli fonksiyon uzayı olsun.
L : X →Y şeklinde tanımlanan dönüşümlere operatör adı verilir.

Tanım 1.1.2. L:X →Y bir operatör olsun. L eğer $\forall \alpha, \beta \in R$ ve $\forall f, g \in$ X için
$L(\alpha f + \beta g) = \alpha L(f) + \beta L(g)$
şartını sağlıyorsa L operatörüne lineer operatör denir.

Tanım 1.1.3. L: X →Y bir operatör olsun. $f \geq 0$ iken $L(f) \geq 0$ oluyorsa L operatörüne pozitif operatör denir.

Hem pozitiflik hem de lineerlik özelliğini sağlayan operatöre kısaca lineer pozitif operatör denir.

1.2 Lineer Pozitif Operatörlerin Özellikleri

Özellik 1.2.1. Lineer pozitif operatörler negatif değerli fonksiyonları negatif değerli fonksiyonlara dönüştürürler.

Özellik 1.2.2 Lineer pozitif operatörler monoton artandır.

Özellik 1.2.3 L bir lineer pozitif operatör olmak üzere;

$$|L(f)| \leq L(|f|)$$

koşulu sağlanır.

Tanım 1.2.1. A kümesi üzerinde tanımlı sürekli fonksiyonların kümesi $C(A)$ biçiminde gösterime sahiptir.

Tanım 1.2.2. $f \in C(A)$ olmak üzere $C(A)$ üzerinde tanımlanan norm;

$$A=[a, b] \text{ için } \|f\|_{C[a,b]} = \max_{a \leq x \leq b} |f(x)|$$

biçimindedir.

Tanım 1.2.3. $\{f_n\}$, $C(A)$ üzerinde tanımlı fonksiyonlar dizisi olsun. $\{f_n(x)\}$ fonksiyonlar dizisinin bir f fonksiyonuna düzgün yakınsak olması; tanım kümesindeki $\forall x \in A$ için $\lim_{n \to \infty} \|f_n - f\|_{C(A)} = 0$ olması demektir. Düzgün yakınsama $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ biçiminde gösterilir.

Tanım 1.2.4. L: X $\rightarrow$Y operatörü verilsin. Eğer, $\forall f \in X$ için $\| L(f) \|_Y \leq M \| f \|_X$ olacak biçimde bir $M > 0$ sayısı varsa L operatörüne sınırlı operatör denir.

1.3 Lineer Pozitif Operatör Dizilerinin Yaklaşım Özellikleri

Lineer pozitif operatör dizilerinin yaklaşım özelliklerinden bahsetmeden önce ilerideki teoremlerin ispatlarında kullanacağımız ve operatör teorisinde büyük öneme sahip olan Hölder eşitsizliğini ispatsız olarak verelim.

Teorem 1.3.1.(Hölder Eşitsizliği) : $p > 1$ ve $q > 0$ reel sayıları

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$$

şartını sağlasın. Bu durumda $\forall(a_k)\epsilon\, l_p, \forall(b_k)\epsilon\, l_q$ dizileri için

$$\sum_{k=0}^{\infty}|a_k b_k| \le \left(\sum_{k=0}^{\infty}|a_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{k=0}^{\infty}|b_k|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği sağlanır. Burada $p=q=2$ için bu eşitsizlik Cauchy-Schwarz eşitsizliği olarak bilinmektedir.

Sonlu bir aralıkta sürekli her fonksiyona aynı aralıkta yakınsayan bir polinomun varlığını Alman matematikçi Weierstrass 1885 yılında iddia etmiştir ve ispatlamıştır.

1912 yılında Rus matematikçi S.N. Bernstein bu polinomun, $x\in[0,1]$ için

$$B_n(f;x)=\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k}x^k\,(1-x)^{n-k}$$

biçiminde olduğunu göstermiştir. (Lorentz 1953)

1953 yılında P.P.Korovkin bu teoremi lineer pozitif operatör dizileri için daha da geliştirerek, operatör teorisinde kendi adıyla bilinen ve önemli yere sahip olan teoremi vermiştir. Şimdi Korovkin Teoremini ve ispatını verelim.

Teorem 1.3.2.(P.P.Korovkin Teoremi) :

$f \in C[a,b]$ tüm reel eksende

$$|f| \leq M_f \tag{1.3.1}$$

şartını sağlayan bir fonksiyon olsun. Eğer $L_n(f\,;x)$ lineer pozitif operatör dizisi [a,b] üzerinde;

i) $L_n(1;x) \rightrightarrows 1$

ii) $L_n(t\,;x) \rightrightarrows x$

iii) $L_n(t^2\,;x) \rightrightarrows x^2$

özelliklerini sağlıyorsa bu durumda L_n operatör dizisi $[a,b]$ üzerinde

$$L_n(f;x) \rightrightarrows f(x)$$

dir. Başka bir biçimde ifade edilecek olunursa;

$\|L_n(f)-f\|_{C[a,b]} \to 0 \quad (n\to\infty)$ ya da buna eşdeğer olan

$$\lim_{n\to\infty} \max_{a\leq x\leq b} |L_n(f;x)-f(x)| = 0 \quad \text{dır.}$$

İspat. Kabul edelim ki, $f \in C[a,b]$ olsun. Sürekli fonksiyonların tanımı gereği her pozitif ε sayısına karşılık öyle bir δ bulunabilir ki,

$|t-x| < \delta$

iken

$$|f(t)-f(x)| < \varepsilon$$

sağlanır. $|t-x| \geq \delta$ olduğunda ise (1.3.1) den ve üçgen eşitsizliğinden

$$|f(t)-f(x)| < |f(t)|+|f(x)| \leq 2M_f \tag{1.3.2}$$

yazılabilir. Öte yandan

$$|t-x| \geq \delta \text{ iken } \frac{|t-x|}{\delta} \geq 1$$

olacağından

$$\frac{(t-x)^2}{\delta^2} \geq 1 \qquad (1.3.3)$$

sağlanır. (1.3.1) ve (1.3.2) den

$$|f(t)-f(x)| \leq 2M_f \leq 2M_f \frac{(t-x)^2}{\delta^2}$$

yazılabilir. O halde,

$|t-x| < \delta$ için $|f(t)-f(x)| < \varepsilon$

$|t-x| \geq \delta$ için $|f(t)-f(x)| \leq 2M_f \frac{(t-x)^2}{\delta^2}$

elde edilir. Dolayısıyla $\forall t \in R$ için

$$|f(t)-f(x)| < \varepsilon + 2M_f \frac{(t-x)^2}{\delta^2} \qquad (1.3.4)$$

dir. Şimdi *(i), (ii), (iii)* koşullarını gerçekleyen (L_n) lineer operatör dizisinin

$$\lim_{n\to\infty} \|L_n(f)-f\|_{C[a,b]} = 0$$

eşitliğini sağladığının gösterilmesi gerekmektedir.

Lineerlikten

$$\begin{aligned} |L_n(f(t);x)-f(x)| &= |L_n(f(t);x)-f(x)+L_n(f(x);x)-L_n(f(x);x)| \\ &= |L_n(f(t);x)-L_n(f(x);x)+L_n(f(x);x)-f(x)| \\ &= |L_n(f(t)-f(x);x)+f(x)(L_n(1;x)-1)| \end{aligned}$$

dir. Burada üçgen eşitsizliğinin kullanılmasıyla

$$|L_n(f(t);x)-f(x)|\leq|L_n(f(t)-f(x);x)|+|f(x)||(L_n(1;x)-1)| \tag{1.3.5}$$

elde edilir. Özellik 1.2.3. '

$$|L_n(f(t);x)-f(x)|\leq|L_n(|f(t)-f(x)|;x)|$$

olur. Operatör pozitif ve

$$|f(t)-f(x)|\geq 0$$

olduğundan

$$|L_n(|f(t)-f(x)|;x)|=L_n(|f(t)-f(x)|;x)$$

dir. O halde (1.3.1) yardımıyla (1.3.5) eşitsizliği

$$|L_n(f(t);x)-f(x)|\leq L_n(|f(t)-f(x);x|)+M_f|(L_n(1;x)-1)|$$

şekline dönüşecektir. (L_n) monoton artan olduğundan (1.3.4) den

$$|L_n(f(t);x)-f(x)|\leq L_n\left(\varepsilon+2\frac{M_f}{\delta^2}(t-x)^2;x\right)+M_f|(L_n(1;x)-1)| \tag{1.3.6}$$

elde edilir. Diğer yandan L_n nin lineer pozitif olduğu dikkate alınırsa;

$$L_n\left(\varepsilon+2\frac{M_f}{\delta^2}(t-x)^2;x\right)=L_n(\varepsilon;x)+L_n(2\frac{M_f}{\delta^2}(t-x)^2;x)$$

$$=\varepsilon L_n(1;x)+2\frac{M_f}{\delta^2}L_n(t^2-2xt+x^2;x)$$

$$= \varepsilon L_n(1;x) + 2\frac{M_f}{\delta^2}\{L_n(t^2;x) - x^2 - x^2 + 2x^2$$

$$-2xL_n(t;x) + x^2L_n(1;x)\}$$

$$= \varepsilon L_n(1;x) + 2\frac{M_f}{\delta^2}\{L_n(t^2;x) - x^2 + 2x^2 - 2xL_n(t;x)$$

$$+ x^2L_n(1;x) - x^2\}$$

$$= \varepsilon L_n(1;x) + 2\frac{M_f}{\delta^2}\{(L_n(t^2;x) - x^2) + 2x(x - L_n(t;x)$$

$$+ x^2(L_n(1;x) - 1)\}$$

yazılabilir. Bu son ifadenin (1.3.6) da yerine yazılmasıyla

$$|L_n(f(t);x) - f(x)| \leq \varepsilon L_n(1;x) + 2\frac{M_f}{\delta^2}\{(L_n(t^2;x) - x^2) + 2x(x - L_n(t;x))$$
$$+x^2(L_n(1;x) - 1)\} + M_f|L_n(1;x) - 1| \quad (1.3.7)$$

elde edilir. *(i), (ii), (iii)* koşulları (1.3.7) de kullanılırsa; $\forall \varepsilon' > 0$ için

$$|L_n(f(t);x) - f(x)| \leq \varepsilon'$$

sağlanır. O halde

$$\lim_{n\to\infty} \|L_n(f) - f\|_{C[a,b]} = 0$$

dır. Böylece ispat tamamlanmış olur.

2.MEYER-KÖNİG ZELLER OPERATÖRÜ İLE BİR GENELLEŞMESİNİN DÜZGÜN YAKINSAKLIĞI

Alman matematikçiler Meyer-König ve Zeller 1960 yılında $f(x)=(1-x)^{-n-1}$ fonksiyonun *x=0* daki Taylor seri açılımından yola çıkarak $M_n(f;x)$ operatörünü tanımlamışlardır.

Tanım 2.1 $x \in [0,1)$ ve $f \in C[0,1)$ için

$$M_n(f;x) = (1-x)^{n+1}\sum_{k=0}^{\infty} f\left(\frac{k}{k+n}\right)\binom{k+n}{k}x^k$$

şeklinde tanımlanan $M_n(f;x)$ operatörüne ***Meyer-König ve Zeller Operatörü*** denir.

$M_n(f;x)$ operatörünün lineer pozitif bir operatör olduğu kolayca görülebilir.

$M_n(f;x)$ operatörünün bir genelleşmesi ilk kez 1998 yılında Doğru tarafından verilmiştir. Şimdi $L_n(f;x)$ şeklinde gösterilen bu operatör dizisinin tanımını verelim.

Tanım 2.2 $a \in (0,1)$ ve $x \in [0,a]$ olmak üzere $\forall f \in C[0,a]$ için $\{\varphi_n(x)\}$ fonksiyonlar dizisi aşağıdaki üç koşulu sağlasın.

1) $\varphi_n = \sum_{k=0}^{\infty}\varphi_n^{(k)}(0)\dfrac{x^k}{k!}$

2) $\varphi_n(0) > 0$ ve $\varphi_n^{(k)}(0) = \dfrac{d^k}{dx^k}\varphi_n(x)\Big|_{x=0} \geq 0$,(k=1,2,…)

3) $\varphi_n^{(k)}(0) = \alpha_n(k+n)(1+\ell_{n,k})\varphi_n^{k-1}(0)$,(k=1,2,…)

Burada (α_n) ve $(\ell_{n,k})$

$$1 \leq \alpha_n = 1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right) \text{ ve } 0 \leq \ell_{n,k} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right)$$

şartlarını gerçekleyen reel sayı dizileri olsunlar. Bu şartlar altında tanımlanan

$$L_n(f;x)=\frac{1}{\varphi_n(x)}\sum_{k=0}^{\infty} f\left(\frac{k}{k+n}\right)\varphi_n^{(k)}(0)\frac{x^k}{k!}$$

operatörü $M_n(f;x)$ in bir genelleşmesidir.

Gerçekten ;

$\varphi_n(x)=(1-x)^{-n-1}$ seçimiyle 1,2 ve 3 özelliklerinin sağlandığı ve

$\varphi_n^{(k)}(0)=(k+n)\,.\varphi_n^{k-1}(0)$ olduğu kolayca görülebilir.

Dolayısıyla; $\alpha_n=1$ ve $\ell_{n,k}=0$ alınarak $L_n(f;x)$ in $M_n(f;x)$ ye dönüştüğünü gösterebiliriz. Şimdi Rumen Matematikçi Octavian Agratini tarafından 2001 yılında $D_n(f;x)$ şeklinde isimlendirilen $L_n(f;x)$ in bir genelleşmesini dolayısıyla $M_n(f;x)$ in bir başka genelleşmesini verelim.

2.1 Agratini Operatörleri

Tanım 2.1.1 $k\in\mathbb{N}, n\in\mathbb{N}^+$ için (α_n) ve $(\ell_{n,k})$ reel sayı dizileri sırasıyla,

$1\le\alpha_n=1+\mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right)$ ve $0\le\ell_{n,k}=\mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right)$ şartlarını sağlasınlar. $a\in(0,1)$ ve $x\in[0,1]$

olmak üzere $\forall f\in C[0,a]$ için $\{\varphi_n(x)\}$ fonksiyonlar dizisi aşağıdaki üç koşulu sağlasın.

1) $\varphi_n(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\varphi_n^{(k)}(0)\frac{x^k}{k!}$

2) $\varphi_n(0)>0$ ve $\varphi_n^{(k)}(0)=\frac{d^k}{dx^k}\varphi_n(x)\Big|_{x=0}\ge 0$, (k=1,2,…)

3) $\varphi_n^{(k)}(0)=\alpha_n(k+n+\beta_k)(1+\ell_{n,k})\varphi_n^{(k-1)}(0)$, (k=1,2,…)

Burada (β_k) reel sayı dizisi

$0\le\beta_k\le\beta_{k+1}$ koşulunu sağlamalıdır.

Bu koşullar altında $f\in C[0,a]$ için

$$D_n(f\,;x)=\frac{1}{\varphi_n(x)}\sum_{k=0}^{\infty}f\left(\frac{k}{k+n+\beta_k}\right)\varphi_n^{(k)}(0)\frac{x^k}{k!}$$

biçiminde tanımlanan operatör dizisine ***Agratini Operatörleri*** adı verilir.

Gerçekten β_k=0 seçimiyle $D_n(f\,;x)$ in $L_n(f\,;x)$ e dönüştüğü kolaylıkla görülebilir. Dolayısıyla; $D_n(f\,;x)$ operatörleri $L_n(f\,;x)$ in ve dolayısıyla $M_n(f\,;x)$ in bir genelleşmesidir.

2.2.Agratini Operatörlerinin Düzgün Yakınsaklığı

$D_n(f\,;x)$ operatörlerinin düzgün yakınsaklığını göstermeye çalışalım. Bunun için Korovkin Teoremi'nden faydalanacağız.

Teorem 2.1.1 Tanım (2.1.1) deki şartları sağlayan

$D_n(f\,;x)=\dfrac{1}{\varphi_n(x)}\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}f\left(\frac{k}{k+n+\beta_k}\right)\varphi_n^{(k)}(0)\frac{x^k}{k!}$ operatörü $f(x)$ e düzgün yakınsar.

İspat: Agratini operatörlerinin lineer ve pozitif olduğu kolayca gösterilebilir.
D_n operatörünün Korovkin teoremindeki *(i), (ii), (iii)* şartlarını sağladığını gösterelim.

i) $D_n(1\,;x)=\dfrac{1}{\varphi_n(x)}\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\varphi_n^{(k)}(0)\frac{x^k}{k!}=1$ ($\varphi_n(x)$ analitik olduğundan)

Dolayısıyla;

$$\|D_n(1)-1\|_{C[a,b]} \to 0 \qquad (n\to\infty)$$

sağlanır.

ii) $D_n(t\,;x) = \dfrac{1}{\varphi_n(x)} \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{k+n+\beta_k} \; \varphi_n^{(k)}(0)\frac{x^k}{k!}$ dir. Burada

$$\varphi_n^{(k)}(0) = \alpha_n(k+n+\beta_k)(1+\ell_{n,k})\varphi_n^{(k-1)}(0) \text{ , (k=1,2,...)}$$

indirgeme bağıntısı kullanılıp gerekli sadeleştirmeler yapılırsa;

$$Dn(t;x) = \frac{\alpha_n x}{\varphi_n(x)} \sum_{k=1}^{\infty} (1+\ell_{n,k}) \;\; \varphi_n^{(k-1)}(0)\frac{x^{k-1}}{(k-1)!} \tag{2.2.1}$$

elde edilir. Diğer taraftan

$$1 \le \alpha_n = 1+\mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right) \qquad \text{ve} \qquad 0 \le \ell_{n,k} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right)$$

olduğundan $\alpha_n \le 1+\dfrac{b}{n}$ ve $1+\ell_{n,k} \le 1+\dfrac{d}{n}$ olacak şekilde b > 0 ve d > 0 sabitleri bulanabilecektir. Dolayısıyla;

$$D_n(t\,;x) \le \frac{\alpha_n x}{\varphi_n(x)}\left(1+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{n}}\right)\sum_{k=1}^{\infty}\varphi_n^{(k-1)}(0)\frac{x^{k-1}}{(k-1)!}$$

dir.Toplamda *k* yerine *k+1* yazılıp gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$Dn(t;x) - x \le (\alpha_n - 1)\, x + \frac{\alpha_n\, x\, d}{n} \tag{2.2.2}$$

elde edilir. (2.2.1) deki ifade düzenlenecek olursa;

$$D_n(t\,;x) = \frac{\alpha_n x}{\varphi_n(x)}\sum_{k=1}^{\infty}\varphi_n^{(k-1)}(0)\frac{x^{k-1}}{(k-1)!} + \frac{\alpha_n x}{\varphi_n(x)}\sum_{k=1}^{\infty}\ell_{n,k}\,\varphi_n^{(k-1)}(0)\frac{x^{k-1}}{(k-1)!}$$

$$= \alpha_n x + \frac{\alpha_n x}{\varphi_n(x)}\sum_{k=1}^{\infty}\ell_{n,k}\,\varphi_n^{(k-1)}(0)\frac{x^{k-1}}{(k-1)!}$$

elde edilecektir.

$\ell_{n,k} \ge 0$, $\alpha_n - 1 \ge 0$, $x \in [0,a]$ ve $\varphi_n^{k-1}(0) \ge 0$ olduğundan

$$D_n(t;x) - x \geq 0 \tag{2.2.3}$$

dır. Dolayısıyla (2.2.2) ve (2.2.3) den

$$0 \leq D_n(t;x) - x \leq (\alpha_n - 1)\, x + \frac{\alpha_n x d}{n}$$

elde edilir.

$$\left\{ (\alpha_n - 1)\, x + \frac{\alpha_n x d}{n} \right\} \to 0 \quad (n \to \infty)$$

olduğundan Sandviç Teoremi gereğince

$$\left\| D_n(t;x) - x \right\|_{C[a,b]} \to 0 \qquad (n \to \infty)$$

elde edilecektir.

iii) $D_n(t^2;x) = \dfrac{1}{\varphi_n(x)} \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{k}{k+n+\beta_k} \right)^2 \varphi_n^{(k)}(0) \frac{x^k}{k!}$

k=0 için toplam sıfır olacağından toplamı k=1 den başlatabiliriz. Gerekli sadeleşmeler yapıldıktan sonra k yerine eşiti olan $k-1+1$ yazılırsa;

$$D_n(t^2;x) = \frac{1}{\varphi_n(x)} \sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{k-1}{(k+n+\beta_k)^2} \right) \varphi_n^{(k)}(0) \frac{x^k}{(k-1)!}$$

$$+ \frac{1}{\varphi_n(x)} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{(k+n+\beta_k)^2} \right) \varphi_n^{(k)}(0) \frac{x^k}{(k-1)!}$$

olur.

$$\varphi_n^{(k)}(0) = \alpha_n (k+n+\beta_k)(1+\ell_{n,k}) \varphi_n^{(k-1)}(0)\,, \ (\text{k=1,2,}\ldots)$$

indirgeme bağıntısı yukarıdaki toplamın birinci kısmına iki defa ikinci kısmına bir defa uygulanırsa ve gerekli sadeleştirmeler yapılırsa;

$$D_n(t^2;x) = \frac{\alpha_n^2 x^2}{\varphi_n(x)} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(1+\ell_{n,k})(1+\ell_{n,k-1})}{k+n+\beta_k} (k-1+n+\beta_{k-1})\, \varphi_n^{(k-2)}(0) \frac{x^{k-2}}{(k-2)!} +$$

$$\frac{\alpha_n x}{\varphi_n(x)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(1+\ell_{n,k})}{k+n+\beta_k}\, \varphi_n^{(k-1)}(0) \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} \tag{2.2.4}$$

elde edilir. Tanım 2.1.1 den k $\rightarrow$ (k$-$1) için $\beta_{k-1} \leq 1+\beta_k$ dır. Dolayısıyla;

$$\frac{k-1+n+\beta_{k-1}}{k+n+\beta_k} \leq 1$$

yazılabilir. Ayrıca

$$\frac{1}{k+n+\beta_k} \leq \frac{1}{n}$$

ifadesi (2.2.2) ve (2.2.4) de kullanılarak $\ell_{n,k} \leq \frac{d_1}{n}$ ve $\ell_{n,k-1} \leq \frac{d_2}{n}$ olacak şekilde $d_1 > 0$ ve $d_2 > 0$ sabitlerinin bulunabileceği gözönüne alınarak d = maks{ d_1, d_2 } denilirse

$$D_n(t^2;x) \leq \frac{\alpha_n^2 x^2}{\varphi_n(x)} \left(1+\frac{d}{n}\right)^2 \sum_{k=2}^{\infty} \varphi_n^{(k-2)}(0) \frac{x^{k-2}}{(k-2)!}$$
$$+ \frac{\alpha_n x}{\varphi_n(x)} \left(1+\frac{d}{n}\right) \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_n^{(k-1)}(0) \frac{x^{k-1}}{(k-1)!}$$

elde edilir. Buradan

$$D_n(t^2;x) - x^2 \leq (\alpha_n^2 - 1)x^2 + \frac{2\alpha_n^2 x^2 d + \alpha_n x}{n} + \frac{\alpha_n^2 x^2 d^2 + \alpha_n x d}{n^2} \tag{2.2.5}$$

bulunur. Ayrıca

$t^2 = (t-x)^2 + 2tx - x^2$

$t^2 - x^2 = (t-x)^2 + 2tx - 2x^2$

$t^2 - x^2 = (t-x)^2 + 2x(t-x)$

özdeşliğinin her iki tarafına D_n operatörü uygulanırsa ve D_n nin lineer bir operatör olduğu gözönünde bulundurulursa;

$$D_n(t^2;x) - x^2 D_n(1;x) = D_n((t-x)^2;x) + 2x\,(D_n(t;x) - x\,D_n(1;x))$$

yani

$$D_n(t^2;x) - x^2 = D_n((t-x)^2;x) + 2x\,(D_n(t;x) - x)$$

yazılabilir.

$(t-x)^2 \geq 0$ ve D_n pozitif operatör olduğundan

$D_n((t-x)^2;x) \geq 0$ ve (2.3.4) den $D_n(t;x) - x \geq 0$ olduğundan $x \in [0,a]$ için

$$D_n(t^2;x) - x^2 \geq 0 \tag{2.2.6}$$

elde edilir.

$$A_n(x) = (\alpha_n^2 - 1)x^2 + \frac{2\alpha_n^2 x^2 d + \alpha_n x}{n} + \frac{\alpha_n^2 x^2 d^2 + \alpha_n x d}{n^2} \tag{2.2.7}$$

$$0 \leq D_n(t^2;x) - x^2 \leq A_n(x)$$

yazılabilir. $\lim\limits_{n\to\infty} A_n(x) = 0$ olduğundan Sandviç teoreminden

$$\left\| D_n(t^2;x) - x^2 \right\|_{C[a,b]} \to 0 \qquad (n \to \infty)$$

olduğu kolayca görülebilir. Dolayısıyla; Korovkin teoreminin *(i), (ii), (iii)* şartları sağlandığından

$\forall x \in [0,a]$ ve $\forall f \in C[0,a]$ için

$D_n(f;x) \rightrightarrows f(x)$ olduğu gösterilmiş olur.

3.AGRATINI OPERATÖRLERİNİN KANTOROVICH TİPLİ İNTEGRAL GENELLEŞMESİ

Agratini operatörlerinin Kantorovich tipli integral genelleşmesi ilk kez Doğru *et.all* (2003) tanımlanmıştır.

Tanım 3.*1* $n,\ k \in N$ olmak üzere (α_n), (β_k) ve ($\gamma_{n,k}$) reel sayı dizileri

$1 \leq \alpha_n = 1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right)$, $0 \leq \beta_k \leq \beta_{k+1}$, $0 \leq \gamma_{n,k} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right)$ koşullarını sağlasınlar. $\{\varphi_n\}$

fonksiyonlar dizisi aşağıdaki koşulları sağlasın.

a) φ_n, $B = \{z \in C: |z| \leq a\}$ diskini içeren bir bölgede analitik

b) $\varphi_n(0) > 0$, (k = 1, 2, …)

c) $\varphi_n^{(k)}(0) = \frac{d^k}{dx^k}\varphi_n(x)\big|_{x=0} \geq 0$, (k,n =1, 2, …)

d) $\varphi_n^{(k)}(0) = \alpha_n(k+n+\beta_k)(1+\gamma_{n,k})\varphi_n^{(k-1)}(0)$, (k = 1, 2, …).

f fonksiyonu (0, 1) aralığında integrallenebilir bir fonksiyon ve *($c_{n,k}$)* $\forall n \in N$, $\forall k \in N$ olmak üzere $0 < c_{n,k} \leq 1$ olsun.

$$D_n^*(f;x) = \frac{1}{\varphi_n(x)} \sum_{k=0}^{\infty} \int_{k}^{k+c_{n,k}} f\left(\frac{\xi}{k+n+\beta_k}\right) d\xi \, \frac{\varphi_n^{(k)}(0)x^k}{c_{n,k}\, k!}$$

biçiminde tanımlanan D_n^* operatörüne ***Agratini Operatörlerinin Kantorovich Tipli İntegral Genelleşmesi*** denir.

3.1 Agratini Operatörlerinin Kantorovich Tipli İntegral Genelleşmesinin Düzgün Yakınsaklığı

Agratini operatörlerinin Kantorovich tipli integral genelleşmesinin düzgün yakınsaklığını gösterebilmek kullanacağımız Korovkin Teoremi'nden yararlanabilmek için ilk önce D_n^* operatörünün lineer pozitif operatör olduğunu göstermemiz gerekmektedir.

Pozitiflik: k$\in N$, n$\in N^+$ ve $x \in [0,a]$, $a \in (0,1)$ için

$$\varphi_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_n^{(k)}(0) \frac{x^k}{k!}$$

dir. Tanım 3.1 in şartlarında $\varphi_n(0) > 0$, $\varphi_n^{(k)}(0) \geq 0$ ve $0 < c_{n,k} \leq 1$ olduğundan $f \geq 0$ iken $D_n^*(f;x) \geq 0$ olacaktır. O halde; D_n^* operatörü pozitiftir.

Lineerlik: $\forall \alpha, \beta \in R$ ve f, g$\in C[0,a]$, $a \in (0,1)$için

$$D_n^*((\alpha f + \beta g)(t);x) = \frac{1}{\varphi_n(x)} \sum_{k=0}^{\infty} \int_k^{k+c_{n,k}} (\alpha f + \beta g)(\frac{\xi}{k+n+\beta_k}) d\xi \frac{\varphi_n^{(k)}(0)x^k}{c_{n,k}\, k!}$$

$$= \frac{1}{\varphi_n(x)} \sum_{k=0}^{\infty} \int_k^{k+c_{n,k}} (\alpha f)(\frac{\xi}{k+n+\beta_k}) d\xi \frac{\varphi_n^{(k)}(0)x^k}{c_{n,k}\, k!}$$

$$+ \frac{1}{\varphi_n(x)} \sum_{k=0}^{\infty} \int_k^{k+c_{n,k}} (\beta g)(\frac{\xi}{k+n+\beta_k}) d\xi \frac{\varphi_n^{(k)}(0)x^k}{c_{n,k}\, k!}$$

$$= \alpha \left[\frac{1}{\varphi_n(x)} \sum_{k=0}^{\infty} \int_k^{k+c_{n,k}} f(\frac{\xi}{k+n+\beta_k}) d\xi \frac{\varphi_n^{(k)}(0)x^k}{c_{n,k}\, k!} \right]$$

$$+ \beta \left[\frac{1}{\varphi_n(x)} \sum_{k=0}^{\infty} \int_k^{k+c_{n,k}} g(\frac{\xi}{k+n+\beta_k}) d\xi \frac{\varphi_n^{(k)}(0)x^k}{c_{n,k}\, k!} \right]$$

$$= \alpha\, D_n^*(f;x) + \beta\, D_n^*(g;x)$$

O halde; D_n^* lineerdir. D_n^* hem lineer hem de pozitif operatör olduğundan lineer pozitif bir operatördür.

D_n^* operatörü lineer pozitif olduğundan düzgün yakınsaklığını göstermek için Korovkin Teoremini kullanabiliriz. O halde şimdi D_n^* operatörünün Korovkin teoremindeki *(i), (ii), (iii)* şartlarını sağladığını gösterelim.

i) $$D_n^*(1;x)=\frac{1}{\varphi_n(x)}\sum_{k=0}^{\infty}\int_k^{k+c_{n,k}}d\xi\,\frac{\varphi_n^{(k)}(0)x^k}{c_{n,k}\,k!}$$

$$=\frac{1}{\varphi_n(x)}\sum_{k=0}^{\infty}c_{n,k}\,\frac{\varphi_n^{(k)}(0)x^k}{c_{n,k}\,k!}=1$$

Dolayısıyla; $\left\|D_n^*(1)-1\right\|_{C[0,a]}\to 0\ (n\to\infty)$ olduğu gösterilmiş olur.

ii) $$D_n^*(t;x)=\frac{1}{\varphi_n(x)}\sum_{k=0}^{\infty}\int_k^{k+c_{n,k}}\frac{\xi}{k+n+\beta_k}d\xi\,\frac{\varphi_n^{(k)}(0)x^k}{c_{n,k}\,k!}$$

$$=\frac{1}{\varphi_n(x)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k+n+\beta_k}\,\frac{((k+c_{n,k})^2-k^2)}{2}\,\frac{\varphi_n^{(k)}(0)x^k}{c_{n,k}\,k!}$$

$$=\frac{1}{\varphi_n(x)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k}{k+n+\beta_k}\,\varphi_n^{(k)}(0)\frac{x^k}{k!}+\frac{1}{\varphi_n(x)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k+n+\beta_k}\,\frac{c_{n,k}}{2}\,\frac{\varphi_n^{(k)}(0)x^k}{k!}$$

$$D_n^*(t;x)=D_n(t;x)+\frac{1}{\varphi_n(x)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k+n+\beta_k}\,\frac{c_{n,k}}{2}\,\frac{\varphi_n^{(k)}(0)x^k}{k!}$$

$$D_n^*(t;x)-x=D_n(t;x)-x+\frac{1}{\varphi_n(x)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k+n+\beta_k}\,\frac{c_{n,k}}{2}\,\frac{\varphi_n^{(k)}(0)x^k}{k!}\ \text{dır.}\qquad(3.1.1)$$

$$0 \leq \beta_k \text{ , k} \in N \text{ , n} \in N^+ \text{ , } \varphi_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_n^{(k)}(0) \frac{x^k}{k!}$$

$$\varphi_n^{(k)}(0) \geq 0 \text{ ve } 0 < c_{n,k} \leq 1$$

olduğundan

$$\frac{1}{\varphi_n(x)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+n+\beta_k} \frac{c_{n,k}}{2} \frac{\varphi_n^{(k)}(0) x^k}{k!} \geq 0$$

dır. Agratini operatörünün düzgün yakınsaklığından $D_n(t\,;\,x) - x \geq 0$ dır. Dolayısıyla;

$$D_n^*(t;x) - x \geq 0 \qquad (3.1.2)$$

(3.1.1) eşitliğinde

$0 < c_{n,k} \leq 1$, $\dfrac{1}{k+n+\beta_k} \leq \dfrac{1}{n}$ eşitsizlikleri ve $D_n(t\,;\,x) - x \leq 0$ olduğu gözönüne alınırsa;

$$D_n^*(t;x) - x \leq 0 \qquad (3.1.3)$$

bulunur.

Sandviç Teoremi, (3.1.2) ve (3.1.3) den

$$\left\| D_n^*(t) - x \right\|_{C[0,a]} \rightarrow 0 \; (n \rightarrow \infty)$$

olduğu gösterilmiş olur.

iii) $$D_n^*(t^2;x) = \frac{1}{\varphi_n(x)} \sum_{k=0}^{\infty} \int_k^{k+c_{n,k}} \frac{\xi^2}{(k+n+\beta_k)^2} d\xi \, \frac{\varphi_n^{(k)}(0) x^k}{c_{n,k}\, k!}$$

$$= \frac{1}{\varphi_n(x)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+n+\beta_k)^2} \frac{((k+c_{n,k})^3 - k^3)}{3} \frac{\varphi_n^{(k)}(0) x^k}{c_{n,k}\, k!}$$

$$= \frac{1}{\varphi_n(x)} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{k}{k+n+\beta_k} \right)^2 \varphi_n^{(k)}(0) \frac{x^k}{k!} + \frac{1}{\varphi_n(x)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k\, c_{n,k}}{(k+n+\beta_k)^2} \varphi_n^{(k)}(0) \frac{x^k}{k!}$$

$$+ \frac{1}{3} \frac{1}{\varphi_n(x)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_{n,k}^2}{k+n+\beta_k} \varphi_n^{(k)}(0) \frac{x^k}{k!} \text{ dır.}$$

$$D_n^*(t^2;x) - x^2 = D_n(t^2;x) - x^2 + \frac{1}{\varphi_n(x)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k\, c_{n,k}}{(k+n+\beta_k)^2} \varphi_n^{(k)}(0) \frac{x^k}{k!}$$

$$+ \frac{1}{3} \frac{1}{\varphi_n(x)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_{n,k}^2}{(k+n+\beta_k)^2} \varphi_n^{(k)}(0) \frac{x^k}{k!} \text{ dır.} \tag{3.1.4}$$

$0 < c_{n,k} \le 1$ eşitsizliği (3.1.4) de kullanılıp gerekli sadeleşmeler yapılırsa;

$$D_n^*(t^2;x) - x^2 \le D_n(t^2;x) - x^2 + \frac{x}{\varphi_n(x)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+n+\beta_k)^2} \varphi_n^{(k)}(0) \frac{x^{k-1}}{(k-1)!}$$

$$+ \frac{1}{3} \frac{1}{\varphi_n(x)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+n+\beta_k)^2} \varphi_n^{(k)}(0) \frac{x^k}{k!}$$

ifadesi elde edilir. Burada tanımda verilen indirgeme bağıntısı kullanılırsa;

$$D_n^*(t^2;x) - x^2 \le D_n(t^2;x) - x^2 + \frac{x}{\varphi_n(x)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_n(1+\gamma_{n,k})}{k+n+\beta_k} \varphi_n^{(k-1)}(0) \frac{x^{k-1}}{(k-1)!}$$

$$+ \frac{1}{3} \frac{1}{\varphi_n(x)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+n+\beta_k)^2} \varphi_n^{(k)}(0) \frac{x^k}{k!}$$

olur.

$0 \le \gamma_{n,k} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right)$ dolayısıyla $1+\gamma_{n,k} \le 1+\frac{d}{n}$ olacak biçimde bir d >0 olduğundan

$$D_n^*(t^2;x) - x^2 \le D_n(t^2;x) - x^2 + \frac{x\alpha_n}{\varphi_n(x)} \left(1+\frac{d}{n}\right) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k+n+\beta_k} \varphi_n^{(k-1)}(0) \frac{x^{k-1}}{(k-1)!}$$

$$+ \frac{1}{3} \frac{1}{\varphi_n(x)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+n+\beta_k)^2} \varphi_n^{(k)}(0) \frac{x^k}{k!}$$

elde edilir.

$\frac{1}{k+n+\beta_k} \le \frac{1}{n}$ ve $\varphi_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_n^{(k)}(0) \frac{x^k}{k!}$ olduğundan

$$D_n^*(t^2;x) - x^2 \le D_n(t^2;x) - x^2 + \frac{x\alpha_n}{n}(1+\frac{d}{n}) + \frac{1}{3n^2}$$

$$D_n^*(t^2;x) - x^2 \le 0 \quad (n \to \infty) \qquad (3.1.5)$$

(3.1.4) de $D_n(t^2;x) - x^2 \ge 0$, $k \in N$, $n \in N^+$, $\varphi_n^{(k)}(0) \ge 0$ ve $0 < c_{n,k} \le 1$ olduğundan

$$D_n^*(t^2;x) - x^2 \ge 0 \quad (n \to \infty) \qquad (3.1.6)$$

(3.1.5) ve (3.1.6) dan

$$\left\| D_n^*(t^2) - x^2 \right\|_{C[0,a]} \to 0 \, (n \to \infty)$$

gösterilmiş olur *(i), (ii), (iii)* gerçeklendiğine göre $\left\| D_n^*(f) - f \right\|_{C[0,a]} \to 0 \; (n \to \infty)$ sağlanmış olur.

4.AGRATINI OPERATÖRLERİNİN YAKLAŞIM HIZI

Yaklaşım hızı, *Yaklaşımlar Teorisi*'nin önemli bir problemi olarak karşımıza çıkmaktadır. Bu bölümde Agratini operatörlerinin $f(x)$ fonksiyonuna Peetre-K fonksiyoneli yardımıyla yaklaşım hızı incelenecektir.

4.1 Yaklaşım Hızı

Tanım 4.1.1 $\{f_n(x)\}$ fonksiyonlar dizisi $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ şartını gerçekliyorsa, bu durumda $\{f_n(x)\}$ e ***sonsuz küçülen bir fonksiyonlar dizisi*** denir.

Tanım 4.1.2 $\{\alpha_n\}$ ve $\{\beta_n\}$ $\forall n \in N^+$ için $0 \leq \alpha_n \leq \beta_n$ ve $n \to \infty$ için $\alpha_n \to 0$ $\beta_n \to 0$ şartlarını sağlayan fonksiyon dizileri olsunlar. Bu durumda ***α_n in sıfıra yaklaşım hızı, β_n in sıfıra yaklaşım hızından daha büyüktür*** denir.

Örneğin; $n \to \infty$ için $\left\{\frac{1}{n^2}\right\}$ sıfıra $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ den daha hızlı bir şekilde yaklaşmaktadır.

$A_n(f;x)$ keyfi bir lineer pozitif operatör dizisi olmak üzere

$$\|A_n(f;x) - f(x)\|_{C[a,b]} \to 0 \ (n \to \infty)$$

olması $A_n(f;x)$ in $f(x)$ e düzgün yaklaştığı anlamına gelir. Yaklaşım hızı ise; $n \to \infty$ için $\alpha_n \to 0$ ve C pozitif bir sabit olmak üzere

$$|A_n(f;x) - f(x)| < C\alpha_n$$

olacak biçimde α_n lerin belirlenmesiyle hesaplanır.

4.2 Agratini Operatörlerinin Peetre-K Fonksiyoneli Yardımıyla Yaklaşım Hızı

Tanım 4.2.1 $g \in C^2[a,b]$ için $\|g\|_{C^2[a,b]}$ normu

$$\|g\|_{C^2[a,b]} := \|g\|_{C[a,b]} + \|g'\|_{C[a,b]} + \|g''\|_{C[a,b]}$$

şeklinde tanımlanır. (Bleimann *et all* 1980)

Tanım 4.2.2

$$K(f;\delta_n) = \inf_{g \in C^2[a,b]} \left\{\|f-g\|_{C[a,b]} + \delta_n \|g\|_{C^2[a,b]}\right\}$$

şeklinde tanımlanan $K(f;\delta_n)$ ifadesine $f \in C[a,b]$ fonksiyonun ***Peetre-K fonksiyoneli*** denir.

$D_n(f;x)$ operatörlerinin Peetre-K fonksiyoneli yardımıyla yaklaşım hızını bulmadan önce hesaplamada kullanılacak olan bir integral özdeşliği verilecektir.

Teorem 4.2.1 $g \in C^2[a,b]$ olsun. Bu durumda

$$g(t) - g(x) = g'(x)(t-x) + \int_x^t g''(s)(t-s)\,ds$$

özdeşliği sağlanır.

İspat. $(t-s) = u$ ve $g''(x)\,ds = dv$ denirse $-ds = du$ ve $g'(s) = v$ elde edilir. O halde kısmi integrasyondan

$$\int_x^t g''(s)\,(t-s)\,ds = g'(s)(t-s)\Big|_x^t + \int_x^t g'(s)\,ds$$

$$= (t-s)g'(s)\Big|_x^t + g(s)\Big|_x^t$$

$$= -(t-x)g'(x) + g(t) - g(x)$$

bulunur. Buradan

$$g(t) - g(x) = (t-x)g'(x) + \int_x^t g''(s)\,(t-s)\,ds$$

elde edilir. Bu da ispatı tamamlar.

Teorem 4.2.2 $a \in (0,1)$ olmak üzere $x \in [0,a]$ ve $f \in C[0,a]$ için D_n operatörünün f fonksiyonuna yaklaşım hızı

$$\|D_n(f;x) - f(x)\|_{C[0,a]} \leq 2\,K(f;C_n)$$

$$E_n = \underset{0\leq x\leq a}{maks}|D_n(t;x) - x| \text{ ve } F_n = \underset{0\leq x\leq a}{maks}\frac{D_n((t-x)^2;x)}{2}$$

olmak üzere $C_n = maks\{E_n, F_n\}$ dır.

İspat.

$$g(t)-g(x)=(t-x)g'(x)+\int_x^t g''(s)\,(t-s)\;ds$$

eşitliğinin her iki tarafına D_n pozitif operatörü uygulanırsa

$$D_n(g(t)-g(x);x)=D_n\big((t-x)g'(x);x\big)+D_n\left(\int_x^t g''(s)\,(t-s)\;ds;x\right)$$

bulunur. Burada üçgen eşitsizliği, D_n operatörünün monoton artan olduğu dikkate alınarak kullanılırsa;

$$|D_n(g(t)-g(x);x)|\leq|g'(x)||D_n(t-x);x|+\left|D_n\left(\int_x^t g''(s)\,(t-s)\;ds;x\right)\right|$$

elde edilir. Her iki tarafın da normu alınırsa

$$\|D_n(g;x)-g(x)\|_{C[0,a]}\leq\|g'\|_{C[0,a]}\|D_n(t-x);x\|_{C[0,a]}$$
$$+\|g''\|_{C[0,a]}\left\|D_n\left(\int_x^t(t-s)\;\;ds;x\right)\right\|_{C[0,a]}$$
$$=\|g'\|_{C[0,a]}\|D_n(t-x);x\|_{C[0,a]}$$
$$+\|g''\|_{C[0,a]}\left\|D_n\left(\frac{-(t-s)^2}{2}\Big|_x^t;x\right)\right\|_{C[0,a]}$$
$$\leq\|g'\|_{C[0,a]}\|D_n(t-x);x\|_{C[0,a]}$$
$$+\frac{1}{2}\|g''\|_{C[0,a]}\|D_n((t-x)^2;x)\|_{C[0,a]}$$

bulunur. Burada E_n ve F_n tanımları kullanılırsa;

$$\|D_n(g;x)-g(x)\|_{C[0,a]}\leq\|g'\|_{C[0,a]}E_n+\|g''\|_{C[0,a]}F_n$$

olur $\|g\|_{C^2[0,a]}$ ve C_n tanımından

$$\|D_n(g;x)-g(x)\|_{C[0,a]}\leq C_n\|g\|_{C^2[0,a]}\tag{4.1.1}$$

dir.

Şimdi Peetre-K fonksiyoneli yardımıyla yaklaşım hızını hesaplayalım.

$x \in [0,a]$ için

$$|D_n(f;x) - f(x)| = |D_n(f;x) - D_n(g;x) + D_n(g;x) - g(x) + g(x) - f(x)|.$$

Üçgen eşitsizliği ve D_n operatörünün lineerliği kullanılırsa;

$$|D_n(f;x) - f(x)| \leq |D_n(f;x) - D_n(g;x)| + |D_n(g;x) - g(x)| + |g(x) - f(x)|$$

norm tanımından ve (4.1.1) den

$$|D_n(f;x) - f(x)| \leq \|f - g\|_{C[0,a]} |D_n(1;x)| + C_n \|g\|_{C^2[0,a]} + |g(x) - f(x)|$$

dır. İfadenin C[0,a] da normu alınırsa,

$$\begin{aligned} \|D_n(f;x) - f(x)\|_{C[0,a]} &\leq \|f - g\|_{C[0,a]} + C_n \|g\|_{C^2[0,a]} + \|f - g\|_{C[0,a]} \\ &\leq 2\{\|f - g\|_{C[0,a]} + C_n \|g\|_{C^2[0,a]}\} \end{aligned}$$

eşitsizliğin her iki yanının $g \in C^2[0,a]$ üzerinden infimumu alınırsa,

$$\inf_{g \in C^2[0,a]} \{\|D_n(f;x) - f(x)\|_{C[0,a]}\} \leq 2K(f; C_n) \qquad (4.1.2)$$

elde edilir.

$\lim_{n\to\infty} C_n = 0$ olduğundan (4.1.2) D_n lineer pozitif operatörünün Peetre-K fonksiyoneli yardımıyla yaklaşım hızını verir.

4.3 Agratini Operatörlerinin Kantorovich Tipli İntegral Genelleşmesinin Yaklaşım Hızı

Şimdi D_n^* lineer pozitif operatörünün L_p uzayında Peetre-K fonksiyoneli yardımıyla yakınsamasını göstereceğiz.

$D \subset R$ ve $L_p^2(D)$, $L_p(D)$ uzayının $g, g', g'' \in L_p(D)$ özelliği sağlayan fonksiyonlarını içeren bir uzay olsun.

$$K_p(f;\delta_n) = \inf_{g \in L_p^2(D)} \left\{ \|f-g\|_{L_p(D)} + \delta \|g\|_{L_p^2(D)} \right\} \quad (4.3.1)$$

$$\|g\|_{L_p^2(D)} := \|g\|_{L_p(D)} + \|g'\|_{L_p(D)} + \|g''\|_{L_p(D)} \quad (4.3.2)$$

Bu tip Peetre-K fonksiyoneli $\|.\|_{L_p^2(D)}$ Bleimann, Butzer ve Hand tarafından $C_B(D)$ için tanımlanmıştır. $C_B(D)$; D üzerinde sınırlı ve düzgün sürekli fonksiyonların kümesidir.

Lemma 4.3.1 $D_n^*(f;x)$ operatörleri için

$$d_{n,k} := \int_0^1 \frac{\varphi_n^{(k)}(0)x^k}{\varphi_n(x)k!}dx$$

tanımlanabilir. Eğer, $\forall n \in N$ için

$$\sum_{k=0}^{\infty} d_{n,k} \frac{k+n+\beta_k}{c_{n,k}} < m \quad (4.3.3)$$

olacak biçimde bir *m* pozitif sabiti varsa $\forall n \in N$ için

$$\|D_n^*(f;x) - D_n^*(g;x)\|_{L_p(0,1)} \leq m\|f-g\|_{L_{p(0,1)}}$$

dır.

İspat.

$$D_n^*(f;x) = \frac{1}{\varphi_n(x)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\varphi_n^{(k)}(0)x^k}{k!\,C_{n,k}} \int_k^{k+c_{n,k}} f\left(\frac{\xi}{k+n+\beta_k}\right) d\xi, n \in N$$

$$\frac{1}{\varphi_n(x)} \frac{\varphi_n^{(k)}(0)\,x^k}{k!} = m_{n,k}(x)$$

ve

$$p > 1, q > 0 \; olmak \; üzere \; \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

koşulunu sağlasınlar.

$$|D_n^*(f;x)|^p = \left| \sum_{k=0}^{\infty} m_{n,k}(x)^{\frac{1}{p}} \, m_{n,k}(x)^{\frac{1}{q}} \frac{1}{c_{n,k}} \int_k^{k+c_{n,k}} f\left(\frac{\xi}{k+n+\beta_k}\right) d\xi \right|^p$$

olur. Burada

$$\frac{\xi}{k+n+\beta_k} = u \; denilirse \; \frac{d\xi}{k+n+\beta_k} = du$$

olur. Sınır değerleri de dikkate alınarak eşitlik

$$|D_n^*(f;x)|^p = \left| \sum_{k=0}^{\infty} m_{n,k}(x)^{\frac{1}{p}} \, m_{n,k}(x)^{\frac{1}{q}} \frac{k+n+\beta_k}{c_{n,k}} \int_{\frac{k}{k+n+\beta_k}}^{\frac{k+c_{n,k}}{k+n+\beta_k}} f(u)\, du \right|^p$$

haline gelir. Burada

$$\frac{k+c_{n,k}}{k+n+\beta_k} - \frac{k}{k+n+\beta_k} = \frac{c_{n,k}}{k+n+\beta_k}$$

olduğundan

$$\left| \frac{k+n+\beta_k}{c_{n,k}} \int_{\frac{k}{k+n+\beta_k}}^{\frac{k+c_{n,k}}{k+n+\beta_k}} f(u)\, du \right|^p \leq \frac{k+n+\beta_k}{c_{n,k}} \int_{\frac{k}{k+n+\beta_k}}^{\frac{k+c_{n,k}}{k+n+\beta_k}} |f(u)|^p\, du$$

*Jensen Eşitsizliği'*ni kullanabiliriz.

$$|D_n^*(f;x)|^p = \left|\sum_{k=0}^{\infty} m_{n,k}(x)^{\frac{1}{p}}\, m_{n,k}(x)^{\frac{1}{q}} \frac{k+n+\beta_k}{c_{n,k}} \int_{\frac{k}{k+n+\beta_k}}^{\frac{k+c_{n,k}}{k+n+\beta_k}} f(u)\, du\right|^p$$

olur. $|\Sigma f| \leq \Sigma |f|$ olduğundan

$$|D_n^*(f;x)|^p \leq \left(\sum_{k=0}^{\infty} m_{n,k}(x)^{\frac{1}{p}}\, m_{n,k}(x)^{\frac{1}{q}} \left|\frac{k+n+\beta_k}{c_{n,k}} \int_{\frac{k}{k+n+\beta_k}}^{\frac{k+c_{n,k}}{k+n+\beta_k}} f(u)\, du\right|\right)^p \quad (4.3.4)$$

dır.

Aşağıda gösterilen Hölder eşitsizliğinde her iki tarafın p inci kuvveti alınırsa

$$\sum |a_n b_n| \leq \left(\sum |a_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum |b_n|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\left(\sum |a_n b_n|\right)^p \leq \left(\sum |a_n|^p\right) \ \left(\sum |b_n|^q\right)^{\frac{p}{q}}$$

bulunur. (4.3.4) de

$$a_n = \left|\frac{k+n+\beta_k}{c_{n,k}} \int_{\frac{k}{k+n+\beta_k}}^{\frac{k+c_{n,k}}{k+n+\beta_k}} f(u)\, du\right| m_{n,k}(x)^{\frac{1}{p}} \ ve \ b_n = m_{n,k}(x)^{\frac{1}{q}}$$

olarak seçilirse

$$|D_n^*(f;x)|^p \leq \left(\sum_{k=0}^{\infty} \left|\frac{k+n+\beta_k}{c_{n,k}} \int_{\frac{k}{k+n+\beta_k}}^{\frac{k+c_{n,k}}{k+n+\beta_k}} f(u)\, du\right|^p m_{n,k}(x)\right) \left(\sum_{k=0}^{\infty} m_{n,k}(x)\right)^{\frac{p}{q}}$$

elde edilir.

$$\frac{1}{\varphi_n(x)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\varphi_n^{(k)}(0)\, x^k}{k!} = 1$$

olduğundan

$$|D_n^*(f;x)|^p \leq \sum_{k=0}^{\infty} \left| \frac{k+n+\beta_k}{c_{n,k}} \int_{\frac{k}{k+n+\beta_k}}^{\frac{k+c_{n,k}}{k+n+\beta_k}} f(u)\,du \right|^p m_{n,k}(x)$$

bulunur. Burada her iki tarafın 0 dan 1e kadar integrali alınırsa ve *Jensen Eşitsizliği* kullanılırsa

$$\int_0^1 |D_n^*(f;x)|^p\,dx \leq \int_0^1 \sum_{k=0}^{\infty} \left| \frac{k+n+\beta_k}{c_{n,k}} \int_{\frac{k}{k+n+\beta_k}}^{\frac{k+c_{n,k}}{k+n+\beta_k}} f(u)\,du \right|^p m_{n,k}(x)\;dx$$

$$\leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k+n+\beta_k}{c_{n,k}} \int_{\frac{k}{k+n+\beta_k}}^{\frac{k+c_{n,k}}{k+n+\beta_k}} |f(u)|^p \int_0^1 m_{n,k}(x)\,dx \quad (4.3.5)$$

bulunur.

Eşitsizliğin her iki tarafının normu alnır

$$\|D_n^*\|_p^p \leq \|f\|_p^p \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k+n+\beta_k}{c_{n,k}} \int_0^1 m_{n,k}(x)\,dx$$

ve (4.3.3) den dolayı

$$\|D_n^*\|_p^p \leq \|f\|_p^p\; m$$

bulunur. Her iki tarafın $\frac{1}{p}$ inci kuvveti alınırsa bulunur.

$$\|D_n^*(f;x)\|_p \leq \|f\|_p\; m^{\frac{1}{p}}$$

m pozitif sabit olduğundan

$$\|D_n^*(f;x)\|_p \leq \|f\|_p \, m$$

yazılabilir. f yerine $f-g$ alınmasıyla

$$\|D_n^*(f-g;x)\|_p \leq \|f-g\|_p \, m$$

elde edilir. Böylece D_n^* operatörü lineer bir operatör olduğundan

$$\|D_n^*(f;x) - D_n^*(g;x)\|_{L_p(0,1)} \leq \; m \, \|f-g\|_{L_p(0,1)}$$

olur ki; bu da ispatı tamamlar.

Teorem 4.3.1 $\forall n \in N \; ve \; f \in \; L_p(0,1)$ için *m* pozitif sabiti (4.3.3) eşitsizliğini sağlasın. Bu durumda

$$\|D_n^*(f;x) - f(x)\|_{L_p(0,1)} \leq (m+1)K_p\left(f;\left(h_n^2 + \frac{1}{n} + 1\right)^2 - 1\right)$$

dır.

Burada $K_p(f;\delta_n)$ (4.3.1) de tanımlanan Peetre K- fonksiyoneli, $\propto_n \geq 1$ olmak üzere

$$h_n = \left(\frac{\propto_n \; (n+c)}{n} - 1\right)^2$$

dir.

İspat.

Taylor açılımını kullanırsak

$$g(t) - g(x) = g'(x)(t-x) + \frac{1}{2} g''(x)(t-x)^2$$

$g \in L_p^2(0,1)$ olmak üzere D_n^* lineer operatörü eşitliğin her iki tarafına uygulanır ve *(0,1)* üzerinde integral normu alınırsa

$$\|D_n^*(g;x) - g(x)\|_{L_p(0,1)} \leq \|D_n^*((t-x);x)\|_{C(0,1)}\|g'\|_{L_p(0,1)} + \frac{1}{2}\|D_n^*((t-x)^2;x)\|_{C(0,1)}\|g''\|_{L_p(0,1)} \tag{4.3.6}$$

$$\|D_n^*((t-x);x)\|_{C(0,1)} \leq h_n^2 + \frac{1}{n}$$

$$\|D_n^*((t-x)^2;x)\|_{C(0,1)} \leq \left(h_n^2 + \frac{1}{n} + 1\right)^2 - 1 \tag{4.3.7}$$

$$\|g\|_{L_p(0,1)} + \|g'\|_{L_p(0,1)} + \|g''\|_{L_p(0,1)} = \|g\|_{L_p^2(0,1)}$$

ise

$$\|g'\|_{L_p(0,1)} + \|g''\|_{L_p(0,1)} \leq \|g\|_{L_p^2(0,1)} \tag{4.3.8}$$

olur.

$\forall n \in N$ için

$$h_n^2 + \frac{1}{n} \leq \left(\left(h_n^2 + \frac{1}{n} + 1\right)^2 - 1\right) \tag{4.3.9}$$

olduğu kullanılırsa

$$\begin{aligned}\|D_n^*(g;x) - g(x)\|_{L_p(0,1)} &\leq \left(h_n^2 + \frac{1}{n}\right)\|g'\|_{L_p(0,1)} \\ &\quad + \left(\left(h_n^2 + \frac{1}{n} + 1\right)^2 - 1\right)\|g''\|_{L_p(0,1)} \\ &\leq \left(\left(h_n^2 + \frac{1}{n} + 1\right)^2 - 1\right)(\|g'\|_{L_p(0,1)} + \|g''\|_{L_p(0,1)}) \\ &\leq \left(\left(h_n^2 + \frac{1}{n} + 1\right)^2 - 1\right)\|g\|_{L_p^2(0,1)}\end{aligned} \tag{4.3.10}$$

bulunur.

Diğer yandan,

$$|D_n^*(f;x) - f(x)| = |D_n^*(f;x) - D_n^*(g;x) + D_n^*(g;x) - g(x) + g(x) - f(x)|$$

ifadesinin $L_p(0,1)$ de normu alınır ve üçgen eşitsizliği uygulanırsa

$$\|D_n^*(f;x)-f(x)\|_{L_p(0,1)} \leq \|D_n^*(f;x)-D_n^*(g;x)\|_{L_p(0,1)}$$
$$+\|D_n^*(g;x)-g(x)\|_{L_p(0,1)}+\|f-g\|_{L_p(0,1)} \quad (4.3.11)$$ bulunur.

Lemma 4.3.1 de bulunan sonuç (4.3.11) de kullanılırsa

$$\|D_n^*(f;x)-f(x)\|_{L_p(0,1)} \leq m\|f-g\|_{L_p(0,1)}+\|D_n^*(g;x)-g(x)\|_{L_p(0,1)}$$
$$+\|f-g\|_{L_p(0,1)}$$

bulunur ve (4.3.10) kullanılmasıyla

$$\|D_n^*(f;x)-f(x)\|_{L_p(0,1)} \leq (m+1)\|f-g\|_{L_p(0,1)}+\left(\left(h_n^2+\frac{1}{n}+1\right)^2-1\right)\|g\|_{L_p^2(0,1)}$$
$$\leq (m+1)\left\{\|f-g\|_{L_p(0,1)}+\left(\left(h_n^2+\frac{1}{n}+1\right)^2-1\right)\|g\|_{L_p^2(0,1)}\right\} \quad (4.3.12)$$

elde edilir.

$$K_p(f;\delta_n)=\inf_{g\epsilon L_p^2(D)}\left\{\|f-g\|_{L_p(D)}+\delta\|g\|_{L_p^2(D)}\right\}$$

olduğundan (4.3.12) nin $g\epsilon L_p^2(D)$ üzerinden infimumunu alırsak

$$\|D_n^*(f;x)-f(x)\|_{L_p(0,1)} \leq (m+1)K_p\left(f;\left(h_n^2+\frac{1}{n}+1\right)^2-1\right)$$

elde edilir ki bu da ispatı tamamlar.

KAYNAKLAR

Agratini, O. 2001 Korovkin type error estimates for Meyer-König and Zeller operators,Math. Inequel. Appl.,no.1, 4, 119-126

Doğru, O.1998 Approximation order and asymptotic approximation for Generalized Meyer-König and Zeller opertors, Math. Balkanica,N.S., no.3-4, 12, 359-368

Doğru, O. and Özalp, N. 2001 Approximation by Kantorovich type generalization of Meyer-König and Zeller Operators, Glasnik Math. ,no.56, 36, 311-318

Aral, A.and Doğru, O.2004 Direct Estimates and L_p-Approximation properties for Agratini opertors and their integral form, Int. J. Comp.Numer. Anal.Appl.,no.2, 5, 173-187

Doğru, O. , Duman O. and Orhan C. 2003 Statistical approximation by generalized Meyer-König and Zeller type opertors, Studia Sci. Math. Hungarica, 40, 359-371.

Hacısalihoğlu, H. ve Hacıyev, A.1995 Lineer Pozitif Operatör Dizilerinin Yakınsaklığı, Ankara

Korovkin, P.P.1960 Linear opertors and Approximation Theory , Delhi, Lorentz, G.G.1966 Approximation of Functions, Holt, Rinehart and Winston, New York

Lorentz, G.G. 1953 Bernstein polynomials. University of Toronto Press, Toronto

Bleimann, G., Butzer, P. L.and Hahn, L. 1980 A Bernstein-type operator approximating continuous functions on the semi axis, Proc. Netherl. Acad. Sci.A83, Indag. Math., 42, 255-261.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Serpil DALLI

Doğum Yeri : Ankara

Doğum Tarihi : 14.07.1982

Medeni Hali : Bekar

Yabancı Dili : İngilizce

Eğitim Durumu Kurum ve Yıl:

Lise : Yıldırım Beyazıt Anadolu Lisesi 2000

Lisans : Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü 2005)

Yüksek Lisans : Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı Eylül 2005 – Ekim 2008)

Çalıştığı Kurum/Kurumlar ve Yıl:

Türkiye Vakıflar Bankası

Uzman Yardımcısı 2007- …)