ANKARA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

KUANTUM KANONİK DÖNÜŞÜMLER

Şeyda ERAZ

FİZİK ANABİLİM DALI

ANKARA
2008

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

KUANTUM KANONİK DÖNÜŞÜMLER

Şeyda ERAZ

Ankara Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Fizik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Adnan TEĞMEN

Bu tezde, son yıllardaki çalışmalarla tekrar literatürde yoğun bir araştırma alanı haline gelmiş olan kuantum kanonik dönüşümler ele alınmıştır. Kanonik dönüşümler klasik kökenli olduğundan öncelikle kanonik dönüşümlerin genel yapısı klasik olarak verilmiş ve daha sonrasında kuantum mekaniksel tanımı verilmiştir. Bu tanıma paralel olarak, kuantum kanonik dönüşümlerle neler yapılabileceği örneklenerek, tamamlayıcı bir örnek olarak Darboux dönüşümü (intertwining) metodunun da aslında bir kanonik dönüşüm olduğu gösterilmiştir. Tezin çekirdeğini oluşturan parça ise, kanonik dönüşümlerin, tıpkı bir tamsayının asal çarpanlarına ayrılması gibi, üç temel kanonik dönüşümün çarpımı olarak ayrışabilmesidir. Bu nokta da, verilen örneklerde açıkça gösterilmiştir. Metin içindeki hesaplamalarda faydalı olabilecek ve okuyucuya zaman kazandırabilecek bir takım ifadeler ise tezin sonundaki ek bölümlerde derlenmiştir.

Temmuz 2008 ,40 sayfa

Anahtar Kelimeler: Kanonik dönüşüm, sonsuz küçük kanonik dönüşüm, üretici fonksiyonlar

ABSTRACT

Master Thesis

QUANTUM CANONICAL TRANSFORMATIONS

Şeyda ERAZ

Ankara University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Physics

Supervisor: Doç. Dr. Adnan TEĞMEN

In this thesis, quantum canonical transformation that has become again an active research field by recent works in the literature is considered. Since the canonical transformations is originated from the classical framework, first the general structure of canonical transformations is given and then its quantum canonical definition is given. Parallel to this definition, besides the exemplification of what one can do with the canonical transformations, as a complementary example it is shown that Darboux transformations is in fact a canonical transformation. The kernel of the thesis is that canonical transformations can be decomposed into some product of three fundamental canonical transformations, just as in the case an integer can be decomposed into its principal factors. This point is also shown explicitly by examples. Equations that may be usuful in the calculations through the text and that may prevent the reader from waste of time are collected in the appendices at the end of the thesis.

July 2008, 40 pages

Key Words: Canonical transformation,infinitesimal canonical transformation, generating functions

TEŞEKKÜR

Çalışmalarıma yön veren, araştırmalarımın her adımında bilgi, öneri, ve yardımlarını esirgemeyen danışman hocam Doç. Dr. Adnan TEĞMEN (Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Fizik Bölümü Öğretim üyesi)' e ve öğrenim hayatım boyunca hiçbir desteğini benden esirgemeyen aileme sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Şeyda ERAZ
Ankara, Temmuz 2008

İÇİNDEKİLER

SİMGELER DİZİNİ

p	momentum koordinatı
q	konum koordinatı
H	Hamilton fonksiyonu
K	Kamilton fonksiyonu
F	Klasik kanonik dönüşümde doğurucu fonksiyon
C	Kuantum kanonik dönüşümde doğurucu fonksiyon

1. GİRİŞ

Klasik mekaniğin güçlü araçlarından biri olan kanonik dönüşümlerin, kuantum mekaniğindeki etkisi henüz tam olarak irdelenememiştir. Dirac ve Weyl tarafından vurgulandığı gibi, bütün üniter dönüşümler kanonik dönüşümler olduğundan, kuantum kanonik dönüşümler, en azından kapalı olarak, hâlihazırda büyük ölçüde kullanılmaktadır. Kuantum mekaniğinde, lineer kanonik dönüşümlerin uzun yıllardan beri çok iyi bilinmesine ve konu ile ilgili pek çok çalışma yapılmasına karşın, lineer-olmayan kanonik dönüşümler üzerine olan ilgi nispeten daha az olmuştur. Bunun en önemli nedeni, yanlış bir inanış olan kuantum kanonik dönüşümlerin üniter olması zorunluluğudur.

Bilindiği üzere klasik mekanikte $(q,p) \to (q'(q,p), p'(q,p))$ dönüşümü $\{q,p\} = 1 = \{q',p'\}$ ile Poisson parantezini koruyorsa, dönüşüm kanoniktir denir. (Bu tez boyunca hem klasik hem de kuantum mekaniksel nicelikler için aynı gösterim kullanılacaktır. Operatör olan ve olmayan niceliklerin ayrımı, metin içerisinde açık bir şekilde ortaya çıkacaktır. Ayrıca Planck sabiti de birim olarak ele alınmıştır.) Benzer şekilde, Born, Heisenberg ve Jordan kuantum mekaniğindeki kanonik dönüşümlerin doğal bir tanımını önermişlerdir:

$$q \to q'(q, p)\ ,\ \ p \to p'(q, p), \tag{1.1}$$

ile verilen kuantum faz uzayı değişkenleri üzerine yapılan dönüşüm,

$$[q, p] = i = [q'(q, p), p'(q, p)] \tag{1.2}$$

ile Dirac(1958), parantezini koruyorsa dönüşüme kanoniktir denir. Böyle bir dönüşüm, doğurucu fonksiyon denilen C(q,p) ile aşağıdaki şekilde üretilebilir;

$$q'(q,p) = CqC^{-1}, p'(q,p) = CpC^{-1} \tag{1.3}$$

Dikkat edilirse bu tanım tamamen cebirseldir ve ne Hilbert uzayına ne de herhangi bir iç çarpıma gerek yoktur. Sonuç olarak, kuantum kanonik dönüşümler üniter de olabilir üniter-olmayan da olabilir. Kuantum kanonik dönüşümlerin üniter olmayabileceği, Dirac (1958) ve Weyl (1950) 'in yaklaşımlarının ötesinde olan bir genellemedir.

Kanonik dönüşümler başlıca üç amaca hizmet ederler**:** ilk olarak sistemin herhangi bir parametreye bağlı değişimine karşı gelebilirler, iki sistemin özdeş olduklarını göstermek için kullanılabilirler ve son olarak çözülmesi oldukça güç olan bir problemi çözmek için kullanılabilirler. Klasik mekaniksel olarak bu ayrışım çok net olmasa da kuantum mekaniksel olarak oldukça belirgindir. Şöyleki, sistemlerin parametrik değişimi üniter dönüşümler ile karakterize edilirken, fiziksel eşdeğerlikleri metriği koruyan farklı Hilbert uzayları arasındaki izometrik dönüşümlere karşı gelir ki bu dönüşüm üniter dönüşümlerden daha geneldir. U üniter dönüşümü için geçerli olan $U^\dagger U = 1$ bağıntısı izometrik dönüşümler için geçerli değildir. Problem basitleştirme tekniği ise üniter-olmayan dönüşümleri de içerecek şekilde en genel sınıfa karşı gelir. Böylece kuantum mekaniksel kanonik dönüşümlerin kullanım amaçları, üniter olanlar, olmayanlar ve her ikisini de içerenler şeklinde üç ana sınıfa belirgin bir şekilde ayrılmış olur.

Mello and Moshinsky (1995), (1.1) ile verilen kuantum kanonik dönüşümlerin tanımları hakkında üç mesele ileri sürmektedir. Birincisi, $q'(q, p)$ ve $p'(q, p)$ nicelikleri sıralı olmalıdır, yani böylece iyi-tanımlı olmalıdırlar. İkinci olarak, dönüşümler operatörler tarafından gösterildiğinde, operatörlerin ters ve kesirli kuvvetleri görünebilir dolayısıyla bunlar tanımlı olmalıdır. Üçüncüsü, dönüşümler üniter olmayabilir ve bu nokta $C(q,p)$ verildiğinde vurgulanmalıdır. Bu tez, bahsedilen bu meselelere açıklık getirmektedir.

Kuantum faz uzayı, değişmeli-olmayan **U** cebrinin kanonik elemanları olan q,p çiftlerinden oluşur. q ve p'nin muhtelif sıralı kombinasyonlarını içeren Hamilton fonksiyonu gibi nicelikler **U**'nın elemanıdırlar. **U**'nun her bir elemanı bir kanonik dönüşüm tanımlar, dolayısıyla **U**, kuantum kanonik grup ile özdeşleştirilebilir. **U** kanonik grubu, kendi üzerinde tanımlanan eşlenik gönderim altında geçişme özelliği sağlayan bir topolojik dönüşüm grubu olarak kabul edilir. Bu kabul altında, **U**'nun elemanları olarak, $p^{-\alpha}$ gibi ifadeler (α keyfi bir karmaşık sayı) iyi-tanımlıdırlar. Kanonik sıra-değişme bağıntıları **U**'nun üzerinde tanımlanmış olan bağıntılar olduğundan, cebirdeki her bir fonksiyon iyi-tanımlı bir sıralamaya sahiptir. Dolayısıyla, kuantum faz uzayı herhangi bir iç çarpım veya Hilbert uzayı yapısı belirtilmeksizin tümüyle cebirsel olarak tanımlanabilir. Kanonik dönüşümler ise, kanonik sıra-değişme bağıntılarının kuantum yapılarının korunması ile oluşturulur, fakat bu dönüşümler ne üniter ne de üniter-olmayan olmak zorunda değildir.

(q, p) faz uzayı değişkenleri, yine herhangi bir Hilbert uzayı yapısı belirtmeksizin, şekillenim uzayındaki $\psi(q)$ fonksiyonlarına etki eden $(q, p) \equiv (q, -i\partial q)$ operatörleri ile gösterilir. Ters ve kesirli kuvvetler ise sözde-diferensiyel operatörlerininkine benzer bir şekilde ele alınır. U'nun elemanlarındaki kapalı formdaki sıralama bu elemanlara karşı gelen operatörlerin sıralamasını iyi-tanımlı yapar. Operatörler Hilbert uzayının dışında tanımlandığından, normalize olmayanları da içerecek şekilde, Schrödinger denkleminin bütün çözümleri üzerinde bir dönüşüm tanımlarlar.

Kanonik dönüşümlere Hilbert uzayı çerçevesinden bakıldığında, dönüşüm çekirdeği Hilbert uzayında kalabilir veya kuantum durumlarının normalizasyon sabitleri dönüşüm sonunda değişebilir. Bu gibi durumlarda dönüşüm üniter değildir fakat yine de Schrödinger denkleminin açık çözümlerini bulmada kullanılabilir.

Klasik olarak, zor bir problem, Hamilton fonksiyonu kanonik dönüşümler aracılığı ile hareket denklemleri çözülebilecek başka bir probleme dönüştürülerek çözülebilir. Aynı işlemlerin kuantum mekaniksel olarak yürütülmesi tanımlanan kuantum kanonik dönüşümlerin en önemli uygulamasıdır ve bundan sonraki hedefimiz de bu doğrultuda olacaktır.

Levyraz and Seligman (1989), tarafından öne sürüldüğü gibi, genel bir kuantum kanonik dönüşümün, davranışları bilinen bazı temel kanonik dönüşümlerin çarpımı şeklinde oluşturubileceğini göreceğiz. Bu temel kanonik dönüşümler, diferensiyel denklem çözümünden aşina olduğumuz, değişken değiştirme, bağımlı değişkenden bağımsız değişkenleri çekme ve Fourier dönüşümüdür. Diferensiyel denklem çözme işlemi bu temel dönüşümler kullanılarak sistematik bir hale getirilmiştir. Aynı zamanda, diferensiyel denklem çözmede kullanılan alçaltıcı ve yükseltici operatörler tanımlama, süpersimetri, intertwining yöntemi ve Lie cebirsel metodu gibi daha karmaşık teknikler de kanonik dönüşümler dâhilinde incelenebilir.

Kuantum kanonik dönüşümler, kuantum sistemlerinin integre edilebilirliği için de birleştirilmiş bir yaklaşım sağlar. Bu durumda, genel çözümü, sonlu sayıda temel kanonik dönüşümün uygulanması ile oluşturulabilen sistemler kuantum integre edilebilir sistemler olarak tanımlanabilir**.**

Bu tezde zamandan bağımsız kanonik dönüşümler dikkate alınmıştır.

2. KLASİK MEKANİKTE KANONİK DÖNÜŞÜMLER

Bir genelleştirilmiş koordinat ve momentum takımından bir başka genelleştirilmiş koordinat ve momentum takımına geçmek faz uzayında bir dönüşüme karşılık gelir. Faz uzayında yapılan dönüşümler genellikle Hamilton fonksiyonunu ve sonuçta Hamilton denklemlerinin şeklini değiştirir. Kanonik dönüşümler ise Hamilton denklemlerini şekil olarak değişmez bırakırlar. n-boyutlu faz uzayında

$$
\begin{aligned}
Q_i &= (q_1, q_2, \ldots, q_n, p_1, p_2, \ldots, p_n) = Q_i(q, p) \\
P_i &= (q_1, q_2, \ldots, q_n, p_1, p_2, \ldots, p_n) = P_i(q, p)
\end{aligned} \tag{2.1}
$$

ile tanımlanan dönüşüm özdeş olarak

(*i*) $$dF(q, p) = p_i dq_i - P_i dQ_i \tag{2.2}$$

(*ii*) $$dq_i \wedge dp_i = dQ_i \wedge dP_i \tag{2.3}$$

(*iii*) $$\{Q.P\}_{qp} = 1 \quad \text{(Poisson parantezi şartı)} \tag{2.4}$$

(*iv*) $$\{q, p\}_{QP} = 1 \quad \text{(Lagrange parantezi şartı)} \tag{2.5}$$

şartlarından herhangi birini sağlıyorsa (2.1) dönüşümü kanoniktir denir. (2.2) denklemindeki $F(q, p)$ fonksiyonuna doğurucu fonksiyon denir. (2.2) denkleminden

$$\frac{\partial F}{\partial q_j} = p_i \frac{\partial q_i}{\partial q_j} - P_i \frac{\partial Q_i}{\partial q_j} = p_i \delta_{ij} - P_i \frac{\partial Q_i}{\partial q_j} = p_j - P_i \frac{\partial Q_i}{\partial q_j}$$

$$\frac{\partial F}{\partial p_j} = 0 - P_i \frac{\partial Q_i}{\partial p_j} = -P_i \frac{\partial Q_i}{\partial p_j} \tag{2.6}$$

şeklinde faydalanırsak, verilen bir kanonik dönüşüm için $F(q,p)$ doğurucu fonksiyonunu bulabileceğimiz denklem takımına ulaşmış oluruz.

Kononik bir dönüşüm, $H(q,p)$ Hamilton fonksiyonunu $K(q,p)$ "Kamilton" fonksiyonuna dönüştürür ve yukarıda belirtildiği gibi

$$\dot{Q}_i = \frac{\partial K}{\partial P_i} \quad , \quad \dot{P}_i = -\frac{\partial K}{\partial Q_i} \ ,$$

denklemleri ile de Hamilton hareket denklemlerini şekil değişmez bırakır.

2.1 Kanonik Dönüşümlerin Sınıflandırılması

Her ne kadar $F(q,p)$ fonksiyonu (q,p) bağımsız çifti ile tanımlanmış olsa da (q,p,Q,P) değişkenlerinden bağımsız herhangi bir çift için de tanımlanabilir. Şimdi sırası ile olası bütün durumları inceleyelim.

2.1.1 Bağımsız değişken olarak q ve Q (TİP 1)

Bu durumda doğurucu fonksiyon $F[q, p(q,Q)] = f_1(q,Q)$ haline gelir. (2.2) denklemi yeni değişkenler cinsinden

$$df_1(q,Q) = \frac{\partial f_1}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial f_1}{\partial Q_i} dQ_i \ = p_i dq_i - P_i dQ_i \tag{2.7}$$

şeklinde yazılır ve ilgili katsayılar eşitlenirse

$$\frac{\partial F_1}{\partial q_i} = p_i \quad , \quad \frac{\partial F_1}{\partial Q_i} = -P_i$$

1. tipten olan dönüşüm denklemlerini elde etmiş oluruz, burada $f_1(q,Q) = F_1(q,p)$ tanımı kullanılmıştır.

2.1.2 Bağımsız değişken olarak q ve P (TİP 2)

Bu kez doğurucu fonksiyon $F[q, p(q,P)] = f_2(q,P)$ biçiminde yazılabilir. (2.2) denklemini yeni değişkenler cinsinden tekrar oluşturursak

$$df_2(q,P) = \frac{\partial f_2}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial f_2}{\partial P_i} dP_i = p_i dq_i - P_j \left(\frac{\partial Q_j}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial Q_j}{\partial P_i} dP_i \right) \tag{2.8}$$

eşitliği elde edilir. Tekrar katsayıların eştliği

$$\frac{\partial f_2}{\partial q_i} = p_i - P_j \frac{\partial Q_j}{\partial q_i} \quad , \quad \frac{\partial f_2}{\partial P_i} = -P_j \frac{\partial Q_j}{\partial P_i} \tag{2.9}$$

verir. P_j, q_j cinsinden yazılamadığı için $f_2(q,P) + Q_j(q,P)P_j = F_2(q,P)$ tanımı ile, (2.9) denklemi 2. Tip dönüşüm denklemlerine

$$\frac{\partial F_2}{\partial q_i} = p_i \ ,$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial P_i} = \frac{\partial f_2}{\partial P_i} + \frac{\partial P_j}{\partial P_i} Q_j + P_j \frac{\partial Q_j}{\partial P_i} = -P_j \frac{\partial Q_j}{\partial P_i} + \delta_{ij} Q_j + P_j \frac{\partial Q_j}{\partial P_i} = Q_j \qquad (2.10)$$

ile dönüşür. Doğurucu fonksiyon için alternatif bir tanım $F = F_2(q,P) - Q_i P_i$ ile verilebilir.

2.1.3 Bağımsız değişken olarak p ve Q (TİP 3)

$F[q(p,Q),p] = f_3(p,Q)$ alalım, yani bağımsız değişkenler olarak (p_i, Q_i) koordinatlarını seçmiş olalım ve benzer şekilde (2.2) denklemindeki her şeyi yeni değişkenler cinsinden yazalım:

$$df_3(p,Q) = \frac{\partial f_3}{\partial p_i} dp_i + \frac{\partial f_3}{\partial Q_i} dQ_i = p_j \left(\frac{\partial q_j}{\partial p_i} dp_i + \frac{\partial q_j}{\partial Q_i} dQ_i \right) - P_i dQ_i \qquad (2.11)$$

Katsayıların eşitliğine bakarsak,

$$\frac{\partial f_3}{\partial p_i} = p_j \frac{\partial q_j}{\partial p_i} \quad , \quad \frac{\partial f_3}{\partial Q_i} = p_j \frac{\partial q_j}{\partial Q_i} - P_i \qquad (2.12)$$

denklemini elde ederiz. Bu durumda yeni değişkenlerin bağımsızlığından faydalanılırsa $f_3 - p_j q_j = F_3(p,Q)$ tanımı yapılabilir ve bu tanımla

$$\frac{\partial F_3}{\partial Q_i} = -P_i \ ,$$

$$\frac{\partial F_3}{\partial p_i} = \frac{\partial f_3}{\partial p_i} - \frac{\partial q_j}{\partial p_i} p_j - q_j \frac{\partial p_j}{\partial p_i} = p_j \frac{dq_j}{dp_i} - \frac{dq_j}{dp_i} p_j - q_j \delta_{ij} = -q_j \qquad (2.13)$$

3. Tip kanonik dönüşümler için dönüşüm denklemleri elde edilmiş olur. Doğurucu fonksiyon için daha yalın olan tanım $F(q, p) = F_3(p, Q) + q_i p_i$ 'dir.

2.1.4 Bağımsız değişken olarak p ve P (TİP 4)

Benzer işlemlerle $F[q(p, P), p] = f_4(p, P)$ ve

$$df_4(p, P) = \frac{\partial f_i}{\partial p_i} dp_i + \frac{\partial f_4}{\partial P_i} dP_i = p_j \left(\frac{\partial q_j}{\partial p_i} dp_i + \frac{\partial q_j}{\partial P_i} dP_i\right) - P_j \left(\frac{\partial Q_j}{\partial p_i} dp_i + \frac{\partial Q_j}{\partial P_i} dP_i\right) \quad (2.14)$$

olur. Katsayı eşitliği ise

$$\frac{\partial f_4}{\partial p_i} = p_j \frac{\partial q_j}{\partial p_i} - P_j \frac{\partial Q_j}{\partial p_i} \ ,$$

$$\frac{\partial f_4}{\partial P_i} = p_j \frac{\partial q_j}{\partial P_i} - P_j \frac{\partial Q_j}{\partial P_i} \qquad (2.15)$$

verir. Bu ifadeler için değişkenlerin bağımsızlığı kullanılırsa (2.15) denklemi

$$p_j \frac{\partial q_j}{\partial p_i} = \frac{\partial}{\partial p_i}(q_j p_j) - q_i \quad , \quad P_j \frac{\partial Q_j}{\partial p_i} = \frac{\partial}{\partial P_i}(Q_j P_j) - Q_i$$

haline getirilebilir. Bu kez $F_4(p,P) = f_4(p,Q) - q_i p_i + Q_i P_i$ tanımı ile

$$\frac{\partial F_4}{\partial p_i} = -q_i , \qquad \frac{\partial F_4}{\partial P_i} = -Q_i$$

dönüşüm denklemleri elde edilir. Dönüşümün doğurucu fonksiyonu için diğer tanım ise $F_4 = F_4(p,Q) + q_i p_i - Q_i P_i$ formundadır.

2.2 Sonsuz Küçük Kanonik Dönüşümler

Klasik mekanikte bir kanonik dönüşüm altında dönüşümden önceki koordinatlarla dönüşümden sonraki kanonik koordinatlar arasındaki fark sonsuz küçük kalıyorsa, dönüşüme sonsuz küçük kanonik dönüşüm denir. Matematiksel olarak ifade edersek, sonsuz küçük kanonik dönşümler

$$Q_i = q_i + \delta q_i , \qquad P_i = p_i + \delta p_i \quad , \ i = 1,...,n \tag{2.16}$$

ile verilebilir. Sonsuz küçük kanonik bir dönüşüm $Q_i = q_i$, $P_i = p_i$ ile verilen özdeşlik dönüşümünden sonsuz küçük kadar fark edeceğinden dönüşümün doğurucu fonksiyonu doğal olarak , ε sonsuz küçük bir parametre ve G keyfi bir fonksiyon olmak üzere,

$$F_2(q.P) = q_i P_i + \varepsilon \ G(q,P)$$

ile verilecektir, burada $q_i P_i$, özdeşlik dönüşümünün doğurucu fonksiyonudur. 2. Tip dönüşüm denklemlerinin uygulanması ile

$$\frac{\partial F_2}{\partial q_j} = p_j = \frac{\partial q_i}{\partial q_j} P_i + \varepsilon \frac{\partial G}{\partial q_j} = \delta_{ij} P_i + \varepsilon \frac{\partial G}{\partial q_j} = P_j + \varepsilon \frac{\partial G}{\partial q_j},$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial P_j} = Q_j = q_i \frac{\partial P_i}{\partial P_j} + \varepsilon \frac{\partial G}{\partial P_j} = q_i \delta_{ij} + \varepsilon \frac{\partial G}{\partial P_j} = q_j + \varepsilon \frac{\partial G}{\partial P_j} \tag{2.17}$$

elde edilir. Bunun sonucunda ise faz uzayı koordinatlarının sonsuz küçük kanonik dönüşümler altındaki değişim miktarları

$$\delta p_j = P_j - p_j = -\varepsilon \frac{\partial G}{\partial q_j}, \qquad \delta q_j = Q_j - q_j = \varepsilon \frac{\partial G}{\partial p_j} \tag{2.18}$$

ile verilir, burada son eşitlikte $d(\delta p_i) = 0$ olduğundan $dP_i = dp_i$ olması gerektiği gerçeğini kullandık.

Diğer taraftan, sonsuz küçük kanonik bir dönüşüm altında bir $u(q,p)$ fonksiyonundaki değişim,

$$du = u(Q.P) - u(q,p)$$

$$= u(q + \delta q, p + \delta p) - u(q,p)$$

$$= u(q,p) + \delta q \frac{\partial u}{\partial q} + \delta p \frac{\partial u}{\partial p} + \cdots - u(q,p)$$

$$= \delta p \frac{\partial u}{\partial q} + \delta p \frac{\partial u}{\partial p}$$

$$= \varepsilon \frac{\partial G}{\partial p} \frac{\partial u}{\partial q} - \varepsilon \frac{\partial G}{\partial q} \frac{\partial u}{\partial p}$$

$$= \varepsilon \frac{\partial G}{\partial p} \frac{\partial u}{\partial q} - \frac{\partial G}{\partial q} \frac{\partial u}{\partial p}$$

$$= \varepsilon \{u, G\} \tag{2.19}$$

hesaplaması dikkate alındığında rahatlıkla görülebilir. (Bu hesaplamada ikinci ve daha yüksek mertebeden katkılar, doğal olarak, ihmal edilmiştir). (2.19) denklemi, α parametreli eğri üzerindeki $u(q, p, \alpha)$ gibi bir fonksiyonun sonsuz küçük değişimine

$$\frac{du}{d\alpha} = \{u, G\}$$

bağıntısı ile karşı gelir. Bu ifade temel alındığında diğer bütün türev dereceleri rahatlıkla hesaplanabilir, örneğin ikinci dereceden türev Poisson parantezleri cinsinden

$$\frac{d^2 u}{d\alpha^2} = \frac{d}{d\alpha}(\frac{du}{d\alpha}) = \left\{\frac{du}{d\alpha}, G\right\} = \{\{u, G\}, G\}$$

biçimindedir. Bu durumda $u(q, p, \alpha)$ fonksiyonunun $\alpha = 0$ civarındaki kuvvet açılımı

$$u(\alpha) = u(\alpha = 0) + \alpha(\frac{\partial u}{\partial \alpha})_0 + \frac{\alpha^2}{2!}(\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2})_0 + \cdots$$

Poisson parantezleri cinsinden;

$$u(\alpha) = u_0 + \alpha\{u, G\}_0 + \frac{\alpha^2}{2!}\{\{u, G\}, G\} + \cdots \tag{2.20}$$

halini alır. (2.20) bağıntısı, herhangi bir faz uzayı fonksiyonunun (buna faz uzayı koordinatları da dahildir) sonsuz küçük bir kanonik dönüşüm altında nasıl değiştiğini belirlemek için oldukça kullanışlıdır. Dahası

$$\hat{V} = \frac{\partial G}{\partial p_i}\frac{\partial}{\partial q_i} - \frac{\partial G}{\partial q_i}\frac{\partial}{\partial p_i} \tag{2.21}$$

tanımı altında (2.20) bağıntısı doğrudan, daha basit olan

$$U(\alpha) = e^{\alpha\hat{V}} U_0 \tag{2.22}$$

operatör formuna indirgenir, burada $\hat{V}$ operatörünün sonsuz küçük kanonik dönüşümün üreticisi olduğu açıktır.

3. KUANTUM KANONİK DÖNÜŞÜMLER

(Bu noktadan itibaren, aksi belirtilmedikçe sadece tek boyutlu kanonik dönüşümler dikkate alınacaktır.) Giriş bölümünde de belirtildiği gibi kuantum faz uzayı değişkenleri arasındaki

$$(q\ \ ,p\ \ ) \to (q'(q\ \ ,p\ \ ), p'(q\ \ ,p\ \ ))$$

Gönderimi;

$$[q,p] = i = [q'(q,p), p'(q,p)] \tag{3.1}$$

ile Dirac parantezini değişmez bırakıyor ise, bu gönderime kanonik bir dönüşümdür denir. Bu dönüşümler

$$CqC^{-1} = q'(q,p) \quad , \qquad CpC^{-1} = p'(q,p) \tag{3.2}$$

olmak üzere keyfi bir kompleks $C(q,p)$ fonksiyonu tarafından üretilirler. Verilen bir (q',p') çiftini üreten $C(q,p)$ fonksiyonunun tek olduğunu göstermek için aynı dönüşümü sağlayan iki tane C_1 ve C_2 doğurucu fonksiyonunun varlığını kabul edelim:

$$\begin{aligned} C_1 q C_1^{-1} &= q' = C_2 q C_2^{-1}, \\ C_1 p C_1^{-1} &= p' = C_2 p C_2^{-1}. \end{aligned} \tag{3.3}$$

(3.3) denklemleri soldan C_2^{-1} ve sağdan C_1 ile çarpılırsa $C_2^{-1}C_1$'nin aynı anda hem q hem de p ile sıra değiştirdiği görülür ve dolayısıyla birim opertörün bir sabit çarpanı olmalıdır. Bu durumda C_1 ve C_2 birbirlerinin sabit katıdırlar. Bu tespit ise iddianın ispatını bitirmektedir.

C kanonik dönüşümü bir sistemin Hamilton fonksiyonunu, doğaldır ki

$$H'(q,p) = CH(q,p)C^{-1} = H(CqC^{-1}, CpC^{-1}) \tag{3.4}$$

ifadesi ile dönüştürür. Diğer taraftan H''nün özfonksiyonunun ψ' olduğunu kabul edelim:

$$H'\psi' = E\psi' \tag{3.5}$$

(3.5) Schrödinger denklemini yazarken kanonik dönüşümlerin özdeğerleri değiştirmediği gerçeğini kullandığımızı belirtmekte fayda görüyoruz. (3.5) denkleminde (3.4) eşitliğini kullanırsak ve denklemi soldan C^{-1} ile çarparsak

$$H(C^{-1}\psi') = E(C^{-1}\psi') \tag{3.6}$$

eşitliği bize

$$\psi = (C^{-1}\psi') \tag{3.7}$$

olduğunu ve dolayısıyla kanonik dönüşümler altında özfonksiyonların

$$\psi' = (C\ \psi) \tag{3.8}$$

şeklinde dönüşmesi gerektiğini söyler.

Bu aşamada önemli bir noktayı belirtmekte fayda vardır: Her ne kadar verilen bir C kanonik dönüşümü için (3.8) ile elde edilen ψ' özfonksiyonları her zaman H''nün özfonksiyonları olsa da bunu tersi her zaman doğru değildir. Yani C^{-1} aracılığı ile (3.7)'den elde edilen ψ fonksiyonları her zaman H'nin özfonksiyonları olmayabilir. Bu sorunu daha basit bir yoldan göstermek için $H = p^3, H' = p^3$ düşünelim. H ve H',

$C = p$ doğurucu fonksiyonu aracılığı ile $CHC^{-1} = H'$ şartını yerine getirirler. Diğer tarftan $\psi' = q^2$ fonksiyonu H''nün sıfır özdeğerli bir özfonksiyonudur: $H'\psi' = 0$. $C^{-1} = i\int . dq$ olduğundan (3.7) ile ψ 'ye çok rahat ulaşabiliriz: $\psi = p^{-1}\psi' = iq^3/3$ fakat $H\psi = -2$ olduğundan ψ, H'nin bir özfonksiyonu değildir. Bu sorunun kaynağı tümüyle cebirseldir ve bu tezin kapsamı dışındadır.

3.1 Üç Temel Kanonik Dönüşüm

Kuantum kanonik dönüşümlerin genel özelliklerini inceledikten sonra şimdi de onların klasik kanonik dönüşümlerle olan ilişkisi üzerinde durmak istiyoruz. Öncelikle $CqC^{-1} = q'$, $CpC^{-1} = p'$ dönüşüm bağıntılarında $[q, C] = i\partial_p C$ ve $[p, C] = -i\partial_q C$ eşitliklerini kullanırsak

$$q' = q - i(\partial_p C)C^{-1}, \quad p' = p + i(\partial_q C)C^{-1} \tag{3.9}$$

bağıntılarını elde ederiz ki bunlar bize, her kuantum kanonik dönüşümün bir sonsuz küçük kanonik dönüşüm formunda yazılabileceğini söyler. Aslında kuantum mekaniğinin yapısı hatırlandığında bu sonuç hiç de şaşırtıcı değildir. Bu sonuca paralel olarak, bir (sonsuz küçük) kuantum dönüşüm, klasik mekanikteki gibi üstel formdaki bir doğurucu fonksiyon aracılığı ile

$$\begin{aligned} \exp(i\alpha F) q \exp(-i\alpha F) &= q + i\alpha[F, q] + \frac{(i\alpha)^2}{2!}[F,[F,q]] + \cdots = q' \\ \exp(i\alpha F) p \exp(-i\alpha F) &= p + i\alpha[F, p] + \frac{(i\alpha)^2}{2!}[F,[F,p]] + \cdots = p' \end{aligned} \tag{3.10}$$

şeklinde tanımlıdır.

Diğer taraftan ilginç olarak, klasik mekanikte bütün kanonik dönüşümlerin iki temel kanonik dönüşüm ile elde edilebileceği iddia edilmiştir. Bunlar lineer ve nokta (point) kanonik dönüşümlerdir. Daha sonraları bu temel kanonik dönüşüm sayısı üçe genişletilerek aynı iddia kuantum mekaniği için de öne sürülmüştür. Bunlar ayar (gauge), nokta ve son olarak konum ve momentumların değiş-tokuş kanonik dönüşümleridir. Bu üçlü klasik kanonik dönüşümler için de kullanılabilmektedir. Dolayısıyla bu dönüşüm kümesi tüm kanonik dönüşümleri üreten temel malzemeler olarak kabul edilebilir. Bu iddianın bir sonucu olarak, herhangi bir kanonik dönüşüm, tıpkı bir tamsayının asal çarpanlarına ayrılması gibi, bu üç temel dönüşümün sonlu veya sonsuz sayıdaki çarpımları olarak ayrıştırılabilir. Gösterileceği üzere bu, kuantum mekaniğinde problem çözmek için kullanılacak çok güçlü bir araçtır. İddia edilenin şu olmadığını vurgulamak önemlidir; bir klasik kanonik dönüşüm asal dönüşümlerine ayrıştırılıp daha sonra her biri kuantum karşılıkları ile değitirilirse, dönüşümüm kuantum karşılığını bulmuş oluruz. Bu doğru değildir. Yani bu işlem kanonik dönüşümlerin kuantumlanması anlamına gelmemektedir. Açık olarak bu farklılık kuantum değişkenlerinin sıra değişmemesinden kaynaklanmaktadır, ya da daha teknik bir ifadeyle; bu bir operatör sıralama problemidir. Basit bir örnek ile bu noktaya açıklık getirebiliriz.

$$p \to p - q^2, \qquad q \to q \tag{3.11}$$

gönderimi hem klasik hem de kuantum mekaniksel olarak kanoniktir. Eğer bu gönderim p^2 fonksiyonuna uygulanırsa, fonksiyon klasik olarak

$$p^2 \to p^2 - 2q^2 p + q^4 \tag{3.12}$$

şeklinde dönüşürken, kuantum mekaniksel olarak

$$p^2 \to p^2 - 2q^2 p + q^4 + 2iq \tag{3.13}$$

şeklinde dönüşür. Şüphesiz bunlar aynı değildirler.

Şimdi, temel olarak kabul edilen klasik kanonik dönüşümlere geri dönelim. Yukarıdaki iddiada bahsedilen temel **ayar dönüşümü**

$$G: \quad q \to q\,, \qquad p \to p - \alpha \frac{\partial f(q)}{\partial q} \tag{3.14}$$

ile verilen sonsuz küçük bir dönüşümdür ve $F_G = f(q)$ keyfi doğurucu fonksiyonu tarafından

$$\begin{aligned} q &\to q + \alpha\{q, f(q)\} + \frac{\alpha^2}{2!}\{\{q, f(q)\}, f(q)\} + \cdots \\ p &\to p + \alpha\{p, f(q)\} + \frac{\alpha^2}{2!}\{\{p, f(q)\}, f(q)\} + \cdots \end{aligned} \tag{3.15}$$

denklemleriyle üretilirler.

Nokta dönüşümler ise; $F_P = f(q)p$ doğurucu fonksiyonu tarafından yine (3.15) denklemiyle

$$P: \quad q \to A(q)\,, \qquad p \to \left(\frac{\partial A}{\partial q}\right)^{-1} p \tag{3.16}$$

ile tanımlanırlar, burada

$$A(q) = \exp\left(\alpha f \frac{\partial}{\partial q}\right) q = q + \alpha f + \frac{\alpha^2}{2!} f \frac{\partial f}{\partial q} + \frac{\alpha^3}{3!} f \frac{\partial}{\partial q}\left(f \frac{\partial f}{\partial q}\right) + \cdots \tag{3.17}$$

şeklinde $f(q)$ ile belirlenen bir fonksiyondur. **Değiş-tokuş dönüşümü** ise;

$$I: \quad q \to p\,, \qquad p \to -q \tag{3.18}$$

ile verilen lineer kanonik dönüşümlerin özel bir hali olan, sonlu bir dönüşümdür ve $F_I = qp$ doğurucu fonksiyonu tarafından üretilirler. Doğurucu fonksiyon ve tipleri 2. Bölüm'de verilen bağıntılarla rahatlıkla türetilebilir. Burada dikkat edilmesi gereken bir nokta şudur. Değiş- tokuş dönüşümü:

$$I: \qquad f(q,p) \to f(p,-q) \tag{3.19}$$

özelliğine sahip olduğundan, değiş-tokuş dönüşümünü kullanarak ayar ne nokta dönüşüm tanımlarını q değişkeni yerine p değişkeni üzerine yükleyebiliriz. Bu durumda ayar ve nokta dönüşüm üreticileri sırası ile $F_G = f(p)$ ve $F_P = f(p)q$ olur. Fakat bu üretici fonksiyonlar I aracılığı ile elde edildiğinden bağımsız dönüşümler olarak kabul edilemezler. Bu bir tercih meselesi olup, bizim tercihimiz q değişkeni olacaktır.

3.2 Temel Klasik Dönüşümlerin Kuantum Karşılıkları

Bu kesimde, daha önce klasik olarak tanımlanan üç temel kanonik dönüşümün kuantum karşılıkları verilecektir. 3.1. kesiminde verilen açılım yardımıyla $F_G = f(q)$ ve $F_P = f(q)p$ doğurucu fonksiyonları sırası ile klasik mekanikteki aynı **ayar** ve **nokta** dönüşümlerini verirler:

$$G: \; q \to q\,, \qquad p \to p - \alpha\frac{\partial f(q)}{\partial q} \tag{3.20}$$

$$P: \; q \to A(q)\,, \qquad p \to (\frac{\partial A}{\partial q})^{-1} p \tag{3.21}$$

(3.21) ile verilen nokta dönüşümde, doğurucu fonksiyonda yapılacak olan sıra değişimi momentum dönüşümünde de bir sıra değişimine neden olur. Ayar dönüşümlerinin özfonksiyonlara olan etkisi ise, daha önce verilen bağıntı ile

$$\psi^{(1)}(q) = e^{i\alpha f(q)}\psi^{(0)}(q) \tag{3.22}$$

olarak verilir. Nokta dönüşümler için özfonksiyonların değişimi

$$\psi^{(1)}(q) = e^{i\alpha f(q)p}\psi^{(0)}(q) = \psi^{(0)}\left[A(q)\right] \tag{3.23}$$

Şeklideki basit bir formla verilebilir.

Kuantum doğurucu fonksiyonların tanımındaki asıl farklılık **değiş-tokuş** dönüşümünde ortaya çıkmaktadır:

$$q \to IqI^{-1} = p\,, \qquad p \to IpI^{-1} = -q \tag{3.24}$$

ile verilen koordinat ve momentumun değişimi

$$I = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{-\infty}^{\infty} dq'\, e^{iqq'}\,, \quad I^{-1} = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{-\infty}^{\infty} dq'\, e^{-iqq'} \tag{3.25}$$

Fourier dönüşüm operatorleri ile gerçekleştirilir ve bu operatörler

$$Iq' = -i\frac{\partial}{\partial q} I, \qquad Ip' = -qI \tag{3.26}$$

eşitliklerini sağlarlar. Değiş-tokuş dönüşümleri, lineer dönüşümlerin özel bir hali olarak da aşağıdaki gibi ayar dönüşümlerinin çarpımı olarak da yazılabilirler;

$$F_I = \exp\left(\frac{iq^2}{2}\right)\exp\left(\frac{ip^2}{2}\right)\exp\left(\frac{iq^2}{2}\right) \tag{3.27}$$

fakat ortanca terim, değiş-tokuş operatörü

$$Iu(q,p)I^{-1} = u(p,-q) \tag{3.28}$$

özelliği taşıdığından diğer terimlerden türetilebilir, bu nedenle (3.27) ifadesi bağımsız bir tanım olarak kullanılamaz. Özfonksiyonlar ise aşikâr olarak:

$$\psi^{(1)}(q) = I\psi^{(0)}(q) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{-\infty}^{\infty} dq' e^{iqq'} \psi^{(0)}(q') \tag{3.29}$$

şeklinde dönüşür.

4. UYGULAMALAR

Bu bölümde, şu ana kadar söylenenlerin iyi bir uygulaması olarak bir takım örnekler vereceğiz. İlk iki örneğimiz bütünlüğü koruması açısından klasik mekanikten olacaktır.

4.1 Eylem-açı Dönüşümü

Klasik mekanikte çok iyi bilinen eylem-açı değişkenlerine karşı gelen kanonik koordinat dönüşümü

$$q \to \frac{1}{2}(q^2 + p^2), \quad p \to \tan^{-1}(p/q) \tag{4.1}$$

gönderimi ile verilir. Bilindiği gibi böyle bir dönüşüm $H = p^2 + q^2$ harmonik salınıcı Hamilton fonksiyonunu, $H = p$ basit formuna indirger. Tüm dönüşümü aşağıdaki gibi dört adıma ayrıştırabiliriz:

1. değiş-tokuş: $q \to -p$, $p \to q$

2. nokta: $q \to \tan^{-1} q$, $p \to (1+q^2)p$,

3. değiş-tokuş: $q \to p$, $p \to -q$,

4. nokta: $q \to q^2/2$, $p \to p/q$,

burada 1. adım, ard arda üç değiş-doğuş işleminin uygulanmasına karşı gelir ve tek başına, değiş-tokuş operatörünün alternatif bir tanımı olarak kabul edilebilir.

4.2 Lineer Potansiyel – Serbest Parçacık Dönüşümü

$H = p^2 + q$ lineer potansiyelli sistemi $H = p^2$ serbest parçacık basit formuna indirgeyen dönüşüm

$$q \to p^2 - \frac{q^2}{4p^2}, \quad p \to -\frac{q}{2p} \tag{4.2}$$

gönderimi ile verilir. Bu kez toplam dönüşümü beş adımda gerçekleştirebiliriz:

1. değiş-tokuş: $q \to p$, $p \to -q$,

2. ayar: $q \to q$, $p \to p - q^2$,

3. değiş-tokuş: $q \to -p$, $p \to q$,

4. nokta: $q \to q^2$, $p \to p/2q$,

5. değiş-tokuş: $q \to -p$, $p \to q$.

4.3 Lineer Potansiyel – Serbest Parçacık Dönüşümü (Kuantum Mekaniksel İnceleme)

Serbest parçacık ve momentum operatörü ortak özfonksiyona sahip olduklarından $H = p^2$ Hamilton fonksiyonu ile $H = p$ özdeştirler. Bu durumda $p^2 + q \to p$ değişimine neden olan

$$q \to p - q^2, \qquad p \to -q \tag{4.3}$$

kanonik dönüşümün iki adımlı ayrışımı

1. değiş-tokuş: $q \to p$, $p \to -q$,

2. ayar: $q \to q$, $p \to p - q^2$,

dönüşümlerini içerir ve toplam doğurucu fonksiyon

$$F = \exp\left(\frac{iq^3}{3}\right)I \tag{4.4}$$

şeklindedir.

4.4 Lineer Kanonik Dönüşümler

Literatürde lineer kanonik dönüşümler genellikle

$$q' = aq + bp\,, \qquad p' = cq + dp\,, \qquad (\,ad - bc = 1\,) \tag{4.5}$$

formunda verilirler ve iyi huylu olmalarından dolayı büyük ilgiye sahiptirler. İddiamız şudur ki, beş adımdan oluşan

$$F_L = \exp[i(\ln\lambda)qp]\exp(i\beta q^2)I\exp(i\alpha q^2)I^{-1} \tag{4.6}$$

ayrışımı

$$q' = F_L q F_L^{-1}, \qquad p' = F_L p F_L^{-1} \tag{4.7}$$

ile (4.5) dönüşümünü verir. (4.6) ayrışımı ayar, nokta ve değiş-tokuş operatörlerinin çarpımı olarak şu şekilde gösterilebilir:

$$F_L = PG_2IG_1I^{-1}\,, \tag{4.8}$$

burada doğal olarak dönüşümlerin uygulanma sırası sağdan sola doğrudur. İlk üç dönüşüm G_1 ayar dönüşü üzerine bir değiş-tokuş operasyonu olduğundan (4.6) ayrışımı daha kısa olarak şu şekilde yazılabilir:

$$F_L = \exp[i(\ln\lambda)qp]\exp(i\beta q^2)\exp(i\alpha p^2) \tag{4.9}$$

Artık ifade iki ayar ve bir nokta dönüşümünü içermektedir. İlk operasyon

$$q \to q + 2\alpha p \ , \quad p \to p \tag{4.10}$$

dönüşümünü verir. İkinci operasyon

$$q + 2\alpha p \to q + 2\alpha(p - 2\alpha q) \ , \quad p \to p - 2\alpha q \tag{4.11}$$

ve son olarak üçüncü operasyon bir skala düzeltmesi operasyonudur ve

$$q + 2\alpha(p - 2\alpha q) \to \lambda q + 2\alpha\left(\frac{p}{\lambda} - 2\alpha\lambda q\right), \ p - 2\alpha q \to \frac{p}{\lambda} - 2\alpha\lambda q \tag{4.12}$$

dönüşümüne neden olur. Üç adım sonunda toplam dönüşüm ise

$$\left(\lambda - 4\alpha^2\lambda\right)q + \frac{2\alpha}{\lambda}p = aq + bp, \quad \left(-2\alpha\lambda\right)q + \frac{1}{\lambda}p = cq + dp \tag{4.13}$$

istenen lineer dönüşümü verir. Diğer taraftan ilgili özfonksiyonların değişimi ise şudur:

$$\psi^{(1)} = \exp\left[i(\ln\lambda)qp\right]\exp\left(i\beta q^2\right)\exp\left(i\alpha p^2\right)\psi^{(0)} \tag{4.14}$$

Değiş-tokuş operatörleri lineer dönüşümlerin özel bir hali olmasına rağmen, değiş-tokuş operatörünün daha önce

$$F_I = \exp\left(\frac{iq^2}{2}\right)\exp\left(\frac{ip^2}{2}\right)\exp\left(\frac{iq^2}{2}\right)$$

ile verilen doğurucu fonksiyonunu, F_L ' nin özel bir haline karşı gelmemektedir. Bunun nedeni F_L 'deki ayrışımın tek olmamasıdır, yani pekâlâ sonuçta aynı dönüşümü veren pek çok değişik ayrışım yapılabilir. Diğer taraftan bu gerçek, bütün kanonik dönüşümlerin temel dönüşümlere ayrıştırılabileceği iddasının ispatını güçleştirmektedir.

4.5 Eylem-açı Dönüşümü (Kuantum Mekaniksel İnceleme)

Harmonik salınıcı kuantum mekaniğinde model bir problemdir ve herhangi bir hesaplama tekniğinin ya da yaklaşımın test edilmesinde bir nevi deneme sahası olarak kullanılır. Aşağıdaki

$$q \to e^{q} + \frac{i}{2} e^{-q} p, \quad p \to \frac{1}{2} e^{-q} p + i e^{q} \tag{4.15}$$

dönüşümü, $H = p^2 + q^2$ Hamilton fonksiyonunu $H = 2ip + 1$ eylem-açı formuna dönüştürür. Dönüşümün ayrıştırılmış biçimi üç adım içerir:

1. ayar: $q \to q$, $\quad p \to p + iq$,

2. ayar: $q \to q + ip/2$, $\quad p \to p$,

3. nokta: $q \to e^{q}$, $\quad p \to e^{-q} p$.

Toplam bileşke doğurucu fonksiyon ise

$$F_L = \exp(q^2/2)\exp(-p^2/4)F_{A(q)} \tag{4.16}$$

formundadır, burada $F_{A(q)}$, $A(q) = e^{q}$ nokta dönüşümüne karşı gelen doğurucu fonksiyonun sembolik gösterimidir.

4.6 Darboux Dönüşümü (Intertwining) Metodu

Bu metod, potensiyel formundaki $H_0 = p^2 + V_0$ ve $H_1 = p^2 + V_1$ gibi iki Hamiltoniyen arasındaki ilişkiyi

$$LH_0 = H_1 L \tag{4.17}$$

bağıntısı ile sağlayan bir $L(q,p)$ operatörünün varlığını gerektirir. Başlangıç sistemi $H_0\psi_0 = E\psi_0$ Schrödinger denklemini sağlarken dönüşmüş sistem aynı özdeğerli $H_1\psi_1 = E\psi_1$ denklemini sağlar. (4.17) denklemi sağdan ψ_0 ile çarpılırsa $\psi_1 = L\psi_0$ olduğu rahatlıkla görülebilir. Dolayısıyla, intertwining metodu, ψ_1 çözümlerini ψ_0 cinsinden elde etme olanağı sağladığından kuantum mekaniğinde kullanılan oldukça etkili bir metoddur. Buradaki asıl mesele L operatörünün belirlenebilmesidir. Bu metodu uygularken (V_0,ψ_0) çiftinden arzu edilen herhangi bir (V_1,ψ_1) çiftine ulaşılamayacağını, bu keyfiyetin (4.17) denklemi tarafından sınırlandırıldığını hatırlatmakta fayda görüyoruz. Bu alt kesimde intertwining metodunun da aslında bir kanonik dönüşüm olduğunu ve dolayısıla da ayrıştırılabileceğini göstereceğiz. Daha önce bu metodu kısaca özetlemekte fayda vardır.

(4.17) denkleminde intertwining operatörü için

$$L(q,p) = p - ig(q) \tag{4.18}$$

önerisini ortaya atalım. Bu öneri ile (4.17) denklemini keyfi bir $\varphi(q)$ fonksiyonuna uygulayıp açalım. $\varphi(q)$ ve $\frac{\partial\varphi(q)}{\partial q}$'nun katsayıları

$$\begin{aligned} &2c + V_0 + V_1 = 2g^2 \\ &V_1 = V_0 - 2\frac{\partial g}{\partial q} \end{aligned} \tag{4.19}$$

şartlarına neden olur. (4.19)'deki denklemleri taraf tarafa çıkarırsak lineer olmayan

$$V_0 + c = g^2 + \frac{\partial g}{\partial q} \tag{4.20}$$

Riccati denklemini elde ederiz. Bu denklem $g = -\frac{\partial\phi / \partial q}{\phi}$ Darboux dönüşümü ile lineer hale getirilebilir ve sonuç ϕ'yi çözüm kabul eden c özdeğerli Schrödinger denklemidir. Bu denklem ise doğrudan H_0'ın enerji özdeğer denklemine özdeştir. Böylece H_0'ın özfonksiyonları cinsinden hem L operatörü, hem V_1 potansiyeli hem de ψ_1 belirlenmiş olur.

Temel amacımıza dönelim, (4.17) denklemini yeniden yazalım:

$$LH_0L^{-1} = H_1 \tag{4.21}$$

şüphesiz bu bir kanonik dönüşüm denklemidir ve L doğurucu fonksiyonunu bulmak için (4.18) denklemine geri dönelim. Bu açıkça p'ye uygulanmış bir ayar dönüşümüdür:

$$L(q,p) = \exp\left(-\int g(q)dq\right)p\exp\left(\int g(g)dq\right) \tag{4.22}$$

(4.22)'daki p'yi tekrar kanonik bir dönüşüm olarak yazarsak L operatörünü temel kanonik dönüşümler cinsinden tümüyle ayrıştırmış oluruz:

$$L(q,p) = \exp\left(-\int g(q)dq\right)I\exp(\ln q)I^{-1}\exp\left(\int g(g)dq\right) \tag{4.23}$$

5. KLASİK VE KUANTUM KANONİK DÖNÜŞÜMLERİNİN KIYASLANMASI

Daha önce 3.1 kesiminde klasik ve kuantum kanonik dönüşümler arasındaki farklılığı vurgulamış ve kuantum kanonik dönüşümlerin, klasik olanların kuantumlanmış halleri olmadığını vurgulamıştık. Bu bölümde bu konuyu biraz daha geniş olarak inceleyeceğiz. Farklı bir bakış açısı olarak, her birinin klasik ve kuantum karşılıkları özdeş olan H_0 ve H_1 gibi iki Hamilton fonksiyonu arasındaki kanonik dönüşümleri ve ayrışımlarını kıyaslayacağız. Bu inceleme sonucunda, kanonik dönüşümleri oluşturan temel dönüşümlerin klasik ve kuantum durumları için farklı sıralamalara sahip olduğunu göreceğiz. Dahası, toplam dönüşümler dikkate alındığında, klasik dönüşüme karşı gelen kuantum toplam dönüşümünün oldukça karmaşık bir operatör sıralamasına sahip olabileceğini de göreceğiz. Bu iki sonuç bize, kuantum mekaniksel kanonik bir dönüşümü klasik olanı kuantumlayarak oluşturmanın boşuna bir uğraş olduğunu söyler. Ancak, basit polinomları içeren dönüşümler gibi çok özel durumlarda bu yöntem denenebilir. Dolayısıyla, kuantum bir dönüşümü klasik karşılığını göz önüne almaksızın doğrudan kurmaya çalışmak daha etkili bir yol olacaktır.

Örneğimiz

$$H_0 = p^2 + e^{2q} \qquad \rightarrow \quad H_1 = p^2 \tag{5.1}$$

dönüşümü olacaktır. Bu Hamiltoniyenler klasik ve kuantum mekaniksel olarak özdeştirler. Problemi önce klasik olarak inceleyelim:

1. nokta: $\quad q \rightarrow \ln q \;, \qquad p \rightarrow qp$

$$H_0 = p^2 + e^{2q} \rightarrow q^2 p^2 + q^2$$

2. değiş-tokuş: $\quad q \rightarrow p \,, \qquad p \rightarrow -q$

$$q^2 p^2 + q^2 \rightarrow p^2 q^2 + p^2$$

3. nokta: $q \to \sinh q\,, \qquad p \to \frac{1}{\cosh q}\, p$

$$p^2 q^2 + p^2 \to p^2 = H_1$$

Böylece dönüşüm tamamlanmış olur. Toplam dönüşüm

$$q \to \ln\left(\frac{1}{\cosh q}\, p\right), \qquad p \to -\frac{\sinh q}{\cosh q}\, p \tag{5.2}$$

gönderimleri ile verilirse, bu gönderim

$$q = \ln\left(\frac{1}{\cosh q'}\, p'\right), \qquad p = -\frac{\sinh q'}{\cosh q'}\, p' \tag{5.3}$$

anlamına gelir. Bu durumda koordinatların toplam dönüşmüş formları daha alışkın olduğumuz hali ile yazılabilir:

$$q' = \sinh^{-1}\left(-e^{-q} p\right), \qquad p' = \left(p^2 + e^{2q}\right)^{1/2} \tag{5.4}$$

Şimdi de problemi kuantum mekaniksel olarak inceleyelim. İlk iki dönüşüm, öncekilerle aynı olacaktır.

1. nokta: $q \to \ln q\;, \qquad p \to qp$

$$H_0 = p^2 + e^{2q} \to q^2 p^2 - iqp + q^2$$

2. değiş-tokuş: $q \to p\,, \qquad p \to -q$

$$q^2 p^2 - iqp + q^2 \to p^2 (1 + q^2) + ipq$$

3. ayar: $q \to q + ip^{-1}\,, \qquad p \to p$

$$p^2(1+q^2) + ipq \to (1+q^2)p^2 - iqp$$

4. nokta: $q \to \sinh q\,, \qquad p \to \frac{1}{\cosh q}\, p$

$$(1+q^2)p^2 - iqp \to p^2 = H_1$$

Görüldüğü gibi, kuantum mekaniksel olarak fazladan bir dönüşüme (ayar) daha ihtiyaç duyulmuştur. Toplam dönüşüm ise

$$q' = \sinh^{-1}\left(-e^{-q}p\right) - \frac{i}{\left[1+\left(e^{-q}p\right)^2\right]^{1/2}}\, e^{-q}\,, \qquad p' = e^{q}\left[1+\left(e^{-q}p\right)^2\right]^{1/2} \tag{5.5}$$

ile verilir, fakat bunların (5.4) deklemlerinin kuantumlanmış hali olduklarını görmek çok zordur. Dolayısıyla klasik ve kuantum kanonik dönüşümler arasında basit bir ilişki yoktur ve her birini kendi formalizmi içinde incelemek daha sağlıklı bir yoldur.

KAYNAKLAR

Anderson, A.1994, *Ann. Phys.,* **232** 292-331 (*Preprint:* hep-th/9305054)

Deenen, J.1991, *J. Phys. A.,* **24** 3851-3858

Dirac, P. A. M.1958, *The Principles of Quantum Mechanics,* 4th ed., (Oxford University Press, Oxford)

Jose, J.V. and Saletan, E.J.2002, *Classical Dynamics: A contemporary approach,* (Cambridge University Press)

Leyvraz, F. and Seligman, T. H.1989, *J. Math. Phys.,* **30** 2512-2515

Mello, P.A. and Moshinsky, M.1975, *J. Math. Phys.,* **16** 2017

Weyl, H.1950, *The Theory of Groups and Quantum Mechanics,* 2nd ed. (Dover Publishing, New York,)

EKLER

EK 1 A: OPERATÖRLERİN ÖZDEŞLİĞİ

EK 1 B: BAZI TEMEL OPERATÖRLERİN CEBİRSEL TERSLERİ

EK 2 A: KUANTUM KANONIK DÖNÜŞÜM ÖRNEKLERİ

EK 2 B: SONSUZ KÜŞÜK KUANTUM KANONİK DÖNÜŞÜM ÖRNEKLERİ

EK 1 A: OPERATÖRLERİN ÖZDEŞLİĞİ

Bu ek kesimde kuantum kanonik dönüşümlerde veya daha genel olarak kuantum mekaniğinde sıkça karşılaşılan polinom formundaki bazı basit operatörlere eşdeğer bağıntılar verilecektir. Dikkat edilirse operatörlerin eşdeğer ifadelerindeki momentum operatörleri her bir terimde en sağ tarafta bulunmaktadır. Bu ise hesaplamalarda büyük kolaylık sağlar.

1. $pq = qp - i$

$$pq\psi = -i\partial_q \, q\psi \; = -i(\psi + q\partial_q\psi) = -i(1 + q\partial_q)\psi \; = qp - i$$

2. $\frac{1}{2}(qp + pq) = qp - i/2$

$$\frac{1}{2}(qp + pq)\psi = \frac{qp}{2}\psi + \frac{pq}{2}\psi \; = \frac{qp}{2}\psi + \frac{qp - i}{2}\psi = (qp - i/2)\psi$$

3. $p^2 q = qp^2 - 2ip$

$$p^2 q\psi = ppq\psi \; = p(-i\partial_q q\psi) = -ip(\psi + q\partial_q\psi) \; = -(2\partial_q\psi + q\partial_q{}^2\psi)$$

$$= -(2\partial_q + q\partial_q{}^2)\psi = (qp^2 - 2ip)\psi$$

4. $pqp = qp^2 - ip$

$$pqp\psi = p(-iq\partial_q\psi) = -\partial q(q\partial_q\psi) = -(\partial_q\psi + q\partial_q{}^2\psi) = (qp^2 - ip)\psi$$

EK 1 B: BAZI TEMEL OPERATÖRLERİN CEBİRSEL TERSLERİ

1. $q^{-1} = \dfrac{1}{q}$

2. $p^{-1} = i \int . \, dq$

3. $(qp)^{-1} = i \int . \dfrac{1}{q} \, dq$

4. $(pq)^{-1} = \dfrac{i}{q} \int . \, dq$

5. $\left(1 + q\partial_q\right)^{-1} = \dfrac{1}{q} \int .dq$

6. $\left(\dfrac{1}{2} + q\partial_q\right)^{-1} = q^{-1/2} \int .q^{-1/2} dq$

7. $(qp + pq)^{-1} = \dfrac{i}{2} q^{-1/2} \int .q^{-1/2} dq = \dfrac{1}{2} q^{-1/2} p^{-1} q^{-1/2}$

EK 2 A: KUANTUM KANONIK DÖNÜŞÜM ÖRNEKLERİ

Bu ek kısımda, metin içinde kuantum kanonik dönüşümleri tanımlayan

$$CqC^{-1} = q' = Q, \quad CpC^{-1} = p' = P$$

denklemlerinin kullanılmasını göstermek amacı ile değişik C doğurucu fonksiyonları için kanonik dönüşümler üreteceğiz. Bu işlemleri yaparken operatörlerin cebirsel terslerinin nasıl işleme konulduğunu göstermek de amaçlanmaktadır.

1. $C = qp$

$p = -i\partial q$ olduğundan doğurucu fonksiyonun açık ifadesi $C = -iq\partial q$ şeklindedir. C'nin tersini kurabilmek için p'nin cebirsel tersine ihtiyacımız vardır. p'nin cebirsel tersi EK1 B, 2. maddede $p^{-1} = i\int .dq$ ile verilir. Aşağıdaki iki satır gerçekten böyle olduğunu doğrular.

$$pp^{-1}\psi = p(p^{-1}\psi) = pi\int \psi dq = -i\partial_q(i\int \psi dq) = \partial_q \int \psi dq = \psi$$

$$p^{-1}p\psi = p^{-1}(-i\partial_q \psi) = i\int(-i\frac{d\psi}{dq})dq = \psi$$

Bu durumda artık C^{-1}'yi

$$C^{-1} = (qp)^{-1} = p^{-1}q^{-1} = i\int .\frac{1}{q}dq$$

olarak elde ederiz. Gerçekten

$$CC^{-1}\psi = -iq\partial_q(i\int \frac{\psi}{q}dq) = q\frac{\psi}{q} = \psi$$

$$C^{-1}C\psi = C(-iq\partial_q \psi) = i\int(-iq\frac{d\psi}{dq})\frac{1}{q}dq = \psi \ .$$

Artık dönüşümün üretimine geçersek,

$$CqC^{-1} = Q(q,p) = qpqp^{-1}q^{-1}$$
$$CpC^{-1} = P(q,p) = qpq^{-1}$$

Daha açık olmak gerekirse,

$$CqC^{-1}\psi = qpq(i\int\frac{\psi}{q}dq) = i\hat{q}(-i\partial_q)(q\int\frac{\psi}{q}dq) = (q - iqp^{-1}q^{-1})\psi$$

$$CpC^{-1}\psi = q(-i\partial_q)\frac{\psi}{q} = -i\partial_q\psi + i\frac{\psi}{q} = (p + iq^{-1})\psi$$

Bu dönüşümün $[Q,P] = i$ ifadesini doğruladığı biraz uzunca ama basit bir hesaplamayla görülebilir.

2. $C = pq$

Bu örnekte bu kez, klasik mekanik ile farklılığı vurgulamak için bir önceki örnekteki sıralama ters çevrilmiştir. Doğurucu fonksiyonun açık hali $C = -i\partial_q .q$ iken, cebirsel tersi

$$C^{-1} = q^{-1}p^{-1} = \frac{i}{q}\int ..dq$$

ile verilir. Gerçekten

$$CC^{-1}\psi = C(\frac{i}{q}\int\psi \ dq) = -i\partial_q \ (\ q \ \frac{i}{q}\int\psi \ dq \ ) = \partial_q \int\psi \ dq = \psi$$

$$C^{-1}C\psi = C^{-1}[\ -i\partial_q(q\psi)\ ] = \frac{i}{q}\int[\ -i\partial_q(q\psi)\ ]\,dq = \frac{1}{q}\int\frac{d}{dq}(q\psi)\,dq = \frac{1}{q}(q\psi) = \psi$$

Dönüşümler ise aşağıdaki hesaplamalar sonucu verilmektedir:

$$CqC^{-1}\psi = pqp^{-1}\psi = -i\partial_q(qi\int\psi dq) = \partial_q(q\int\psi dq)$$

$$= \int\psi\ dq + q\partial_q\int\psi\ dq = (\ \int.\ dq + q\ )\psi = (q - ip^{-1})\psi\ .$$

$$CpC^{-1}\psi = pqpq^{-1}p^{-1}\psi = pq(-i\partial_q)[\ \frac{1}{q}i\int\psi\ dq\ ] = pq(-\frac{1}{q^2}\int\psi\ dq + \frac{1}{q}\partial_q\int\psi\ dq\ )$$

$$= pq(-\frac{1}{q^2}\int\psi\ dq + \frac{1}{q}\psi) = p(-\frac{1}{q}\int\psi\ dq + \psi) = -i\partial_q(-\frac{1}{q}\int\psi\ dq + \psi)$$

$$= -i(\frac{1}{q^2}\int\psi\ dq - \frac{1}{q}\partial_q\int\psi\ dq + \partial_q\psi) = -\frac{1}{q^2}i\int\psi\ dq + \frac{1}{q}\psi - i\partial_q\psi$$

$$= (-\frac{1}{q^2}i\int.\ dq + \frac{i}{q} - i\partial_q)\psi = (p - q^{-2}p^{-1} + iq^{-1})\psi$$

Dönüşümün yine kanonik olduğu rahatlıkla görülebilir.

3. $C = \frac{1}{2}(qp + pq)$

Klasik olarak qp ifadesinin kuantumlanmış hali olan bu örneği vermek ilginç olabilir. EK1 B'nin 7. maddesinin kullanılmasıyla, rahatlıkla

$$Q = q + 2q(1 + iqp),\quad P = p + 2i(2ip + p^2q)$$

olduğu görülebilir.

EK 2 B: SONSUZ KÜŞÜK KUANTUM KANONİK DÖNÜŞÜM ÖRNEKLERİ

Bu kesimde yine metin içinde verilen

$$q' = Q = \exp(i\varepsilon G) q \exp(-i\varepsilon G), \quad p' = P = \exp(i\varepsilon G) p \exp(-i\varepsilon G)$$

bağıntısını esas alarak , değişik G fonksiyonları için üretilen dönüşümleri özetleyeceğiz.

1. $G = f(q)$

$Q = q$, $P = p - \varepsilon\partial_q f$

2. $G = q(p)$

$Q = q + \varepsilon\partial_p g$, $P = p$

3. $G = f\ (q)p$

$Q = \exp(\varepsilon f\partial_q)q = u(q)$, $P = (\partial qU\ )^{-1} p$

4. $G = qg(p)$

$Q = \exp(-\varepsilon g\partial_p)p = w(p)$, $P = q(\partial_p w)^{-1}$

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Şeyda ERAZ

Doğum Yeri : Altındağ

Doğum Tarihi : 28.10.1982

Medeni Hali : Bekâr

Yabancı Dili : İngilizce

Eğitim Durumu:

Lise : Yıldırım Beyazıt Süper Lisesi (1996-2000)

Lisans : Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Fizik Bölümü (2000-2004)

Yüksek Lisans : Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Fizik Anabilim Dalı Eylül 2005- Temmuz 2008)