ANKARA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

n-BOYUTLU BİR RİEMANN MANİFOLDUNUN k-BOYUTLU (k<n-1) BİR ALTMANİFOLDU ÜZERİNDEKİ BİR EĞRİ BOYUNCA n-k TANE BİRİM NORMAL VEKTÖR ALANLARININ KÜRESEL GÖSTERGELERİNİN EĞRİLİKLERİ

İLKAY ARSLAN

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ANKARA
2006

Prof. Dr. H. Hilmi HACISALİHOĞLU danışmanlığında, İlkay ARSLAN tarafından hazırlanan bu çalışma 11/07/2006 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oybirliği ile Ankara Üniversitesi Fen Bilimler Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda "n-Boyutlu Bir Riemann Manifoldunun k-Boyutlu (k<n-1) Bir Altmanifoldu Üzerindeki Bir Eğri Boyunca n-k Tane Birim Normal Vektör Alanlarının Küresel Göstergelerinin Eğrilikleri" konulu tezi yüksek lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Başkan : Prof. Dr. H. Hilmi HACISALİHOĞLU

Üye : Prof. Dr. Baki KARLIĞA

Üye : Yrd. Doç. Dr. Nejat EKMEKCİ

Yukarıdaki sonucu onaylarım.

Prof. Dr. Ülkü MEHMETOĞLU
Enstitü Müdürü

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

n-BOYUTLU BİR RİEMANN MANİFOLDUNUN k-BOYUTLU (k<n-1) ALTMANİFOLDU ÜZERİNDEKİ BİR EĞRİ BOYUNCA n-k TANE BİRİM NORMAL VEKTÖR ALANLARININ KÜRESEL GÖSTERGELERİNİN EĞRİLİKLERİ

İlkay ARSLAN

Ankara Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. H. Hilmi HACISALİHOĞLU

Bu Yüksek Lisans tezi dört bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölüm giriş kısmına ayrılmıştır.

İkinci bölümde, E^n in (n-1)-boyutlu altmanifoldundaki bir eğri üzerindeki Frenet vektör alanları ve bunların küresel göstergeleri incelenmiştir. (n-1) tane küresel göstergenin her birinin yay uzunlukları, geodezik eğrilikleri, asimptotik eğrilik fonksiyonları ve eğrilik çizgileri incelenmiştir. Yay uzunlukları ve geodezik eğrilikler için genelleme yapılmıştır.

Üçüncü bölümde, n-boyutlu bir Riemann manifoldunun k-boyutlu altmanifoldu özetlenmiştir. Altmanifolda ait tanımlar ve teoremler verilmiştir.

Dördüncü bölümde, n-boyutlu bir Riemann manifoldunun k-boyutlu (k<n-1) altmanifoldundaki bir eğri üzerindeki Frenet vektör alanlarının küresel göstergeleri incelenmiştir. k tane küresel göstergenin geodezik eğrilikleri incelenmiştir ve genelleme yapılmıştır.

2006, 70 sayfa

Anahtar Kelimeler: Küresel göstergeler, altmanifoldlar, Riemann manifoldu, normal eğrilik, normal eğrilik vektör alanı, asimtotik doğrultu, eşlenik doğrultular, geodezik eğrilik

ABSTRACT

Master Thesis

ON THE CURVATURES OF THE SPHERİCAL İNDİCATRİCES OF THE (N-K) UNİTE NORMAL VECTOR FİELDS ON A CURVE OF K-DİMENSİONAL SUBMANİFOLD OF AN N-DİMENSİONAL RİEMANNİAN MANİFOLD

İlkay ARSLAN

Ankara Universty
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Prof.Dr. H. Hilmi HACISALİHOĞLU

This thesis consist of four chapters.

First chapter is devoted to the introduction.

In the second chapter, it is studied that Frenet vector fields on a curve of (n-1)-dimensional submanifold in E^n and their spherical indicators. And also it is studied arc lengths, geodesic curvatures, asymtotic curvature functions and line curvatures of each of the (n-1) spherical indicators. It is generalized arc lengths and geodesic curvatures.

In the third chapter, k-dimensional submanifold of n-dimensional Riemannian manifold is summarized. Submanifolds' definitions and theorems are given.

In the fourth chapter, it is studied that spherical indicators of Frenet vector fields on a curve of k-dimensional (k<n-1) submanifold in n-dimensional Riemannian manifold. It is examined and generalized geodesic curvatures of k-spherical indicators.

2006, 70 pages

Key Words: Spherical indicators, submanifolds, Riemannian manifold, normal curvature, normal curvature vector field, asymtotic direction, conjugated directions, geodesic curvature

TEŞEKKÜR

Bu tezin hazırlanmasında değerli zamanını ayıran, her aşamasını titizlikle değerlendirip önerileriyle yol gösteren danışman hocam, Sayın Prof. Dr. H. Hilmi HACISALİHOĞLU (Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi)' na , yardımlarından dolayı Sayın Prof. Dr. Yusuf YAYLI (Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi)' ya ve Doç. Dr. Levent KULA (Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi)' ya teşekkür ederim.

İlkay ARSLAN

Ankara, Temmuz 2006

İÇİNDEKİLER

SİMGELER DİZİNİ

E^n	n-boyutlu Riemann manifoldu
k_i	i-yinci eğrilik
V_i	i-yinci Frenet vektör alanı
s_α	yay uzunluğu
S^i	i-boyutlu birim hiperküre
D	E^n in koneksiyonu
$\overline{D}$	birim hiperkürenin koneksiyonu
k_g	E^n e göre geodezik eğrilik
S	şekil operatörü
γ_g	birim hiperküreye göre geodezik eğrilik
k_a	asimptotik eğrilik fonksiyonu
$\chi(E^n)$	E^n üstünde vektör alanlarının uzayı
$\chi(M)^\perp$	ortogonal tamamlayıcı uzay
V	ikinci temel tensör
B_i	ikinci temel formlar
S_i	i-yinci Weingarten dönüşümü

ŞEKİLLER DİZİNİ

1. GİRİŞ

E^n in (n-1)-boyutlu altmanifoldu, E^n in bir hiperyüzeyidir. (n-1)-boyutlu hiperyüzey üzerindeki bir eğrinin Frenet vektör alanlarının küresel göstergeleri E^n de ve (n-1) boyutlu birim hiperküre (S^{n-1}) üzerinde oluşurlar. Her bir küresel gösterge için yay uzunluğunun, geodezik eğriliğin, küresel involütün, asimptotik eğrilik fonksiyonunun ve eğrilik çizgisinin bulunması bizi, bütün küresel göstergelerin bu özeliklerini genellemeye götürür.

Riemann metriği E^n de tanımlanabilir. Tanımlanan metrikle n-boyutlu Riemann manifoldu oluşur. E^n in, k-boyutlu (k<n-1) altmanifoldu üzerindeki bir eğrinin k-tane Frenet vektör alanlarının küresel göstergeleri yine E^n ve k-boyutlu birim hiperküre (S^k) üzerinde oluşurlar. k-boyutlu altmanifold alındığında birim normal vektör alanları (n-k) tanedir. Bu nedenle S^k nın şekil operatörü, S^{n-1} in şekil operatöründen farklıdır.
S^k ya göre küresel göstergelerin geodezik eğrilikleri bulunurken genelleştirilmiş Gauss denklemi ve şekil operatörü kullanıldığından S^{n-1}e göre olanlardan farklı olduğu sonucu doğar.

Bu çalışma, altmanifold teorisini özetleyen bilgiler verilerek, küresel göstergelerin E^n in hiperyüzeyine ve k-boyutlu altmanifolduna göre özeliklerini incelemeyi ve genelleme yapmayı amaçlamıştır.

2. (n-1)-BOYUTLU BİR HİPERYÜZEY ÜZERİNDEKİ BİR EĞRİNİN FRENET VEKTÖR ALANLARININ KÜRESEL GÖSTERGELERİ

Tanım 2.1 M, E^n in (n-1)-boyutlu altmanifoldu (hiperyüzeyi) olsun ve α eğrisi s$\in$ I yay parametresi ile verilsin. α(s) noktasındaki i-yinci eğrilik k_i(s)ve Frenet (n-1)-ayaklısı $\{V_1(s), V_2(s), \ldots, V_{n-1}(s)\}$ olsun.

Bu Frenet vektör alanları paralel öteleme ile küre merkezine taşındığında , küre üzerinde oluşan eğrilere **küresel gösterge eğrileri** denir. ($1 \leq$ i $\leq$ n-1)

Frenet vektörleri ile türevleri arasındaki ilişki şöyledir:

$$V_1'(s) = k_1(s)V_2(s)$$

$$V_i'(s) = -k_{i-1}(s)V_{i-1}(s) + k_i(s)V_{i+1}(s) \qquad ; 1<i<n-1$$

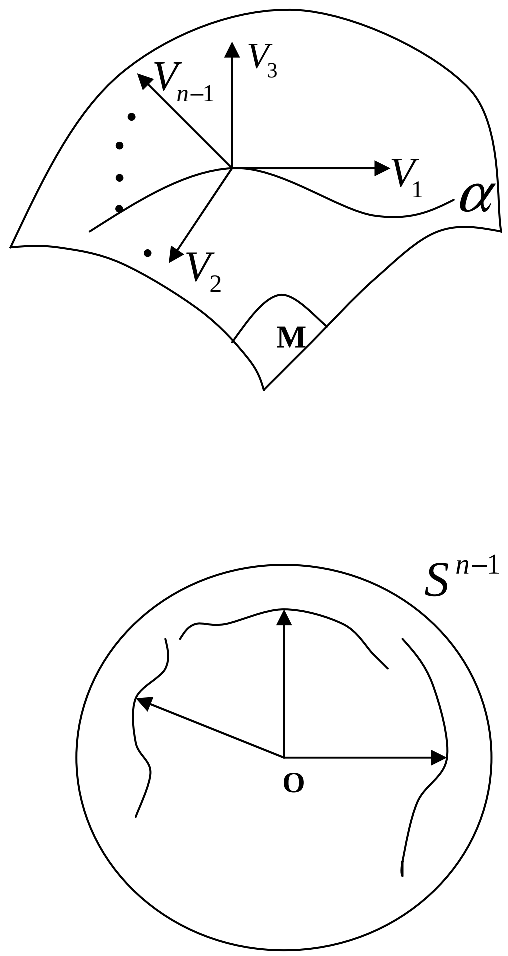
$$V_{n-1}'(s) = -k_{n-2}(s)V_{n-2}(s)$$

Bu eşitlikler matris formunda yazılırsa;

$$\begin{matrix} V_1' \\ V_2' \\ V_3' \\ V_4' \\ \vdots \\ V_{n-2}' \\ V_{n-1}' \end{matrix} = \begin{matrix} 0 & k_1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ -k_1 & 0 & k_2 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -k_2 & 0 & k_3 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -k_3 & 0 & k_4 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & -k_{n-3} & 0 & k_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & -k_{n-2} & 0 \end{matrix} \begin{matrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \\ \vdots \\ V_{n-2} \\ V_{n-1} \end{matrix}$$

elde edilir (Hacısalihoğlu 2000).

Bu eşitliklere **Frenet formülleri** denir.



Şekil 2.1 E^n in hiperyüzeyi üzerindeki eğrinin Frenet vektör alanlarının küresel göstergeleri

2.1 Küresel Göstergelerin Yay Uzunlukları

E^3de bir α eğrisinin küresel göstergeleri olan (T),(N),(B) ve (C) eğrilerinin yay uzunlukları ve geodezik eğrilikleri biliniyor.

α eğrisini E^nin bir hiperyüzeyinde alalım ve (n-1) tane Frenet vektör alanlarının küresel göstergelerinin yay uzunluklarını ve geodezik eğriliklerini hesaplayalım.

Tanım 2.1 Bir α eğrisi s yay parametresi ile $a \leq s \leq b$ olmak üzere verilsin. α eğrisinin yay uzunluğu $s_\alpha = \int_a^b \left\| \frac{d\alpha}{ds} \right\| ds = \int_a^b \|T\| ds$ dir (Hicks 1974).

a=0, b=s olmak üzere yay uzunlukları hesaplanacaktır.

2.1.1 (V_1) in yay uzunluğu

$$\alpha : \mathrm{I} \rightarrow S^{n-1}$$
$$s \rightarrow \alpha(s) = V_1(s)$$

şeklindeki eğri birinci küresel göstergedir.

$$s_{V_1} = \int_0^s \left\| \frac{dV_1}{ds} \right\| ds$$

$$= \int_0^s \left\| V_1' \right\| ds$$

$$= \int_0^s \left\| k_1 V_2 \right\| \, ds$$

$$= \int_0^s k_1 \, ds$$

bulunur.

2.1.2 (V_2) nin yay uzunluğu

$$s_{V_2} = \int_0^s \left\| \frac{dV_2}{ds} \right\| \, ds$$

$$= \int_0^s \left\| V_2' \right\| \, ds$$

$$= \int_0^s \left\| -k_1 V_1 + k_2 V_3 \right\| \, ds$$

$$= \int_0^s \sqrt{k_1^{\,2} + k_2^{\,2}} \, .ds \qquad \text{bulunur.}$$

2.1.3 (V_3) ün yay uzunluğu

$$s_{V_3} = \int_0^s \left\| \frac{dV_3}{ds} \right\| \text{ ds}$$

$$= \int_0^s \left\| V_3{}' \right\| \text{ ds}$$

$$= \int_0^s \left\| -k_2 V_2 + k_3 V_4 \right\| \text{ ds}$$

$$= \int_0^s \sqrt{k_2{}^2 + k_3{}^2} \text{ .ds}$$

bulunur.

2.1.4 (V_4) ün yay uzunluğu

$$s_{V_4} = \int_0^s \left\| \frac{dV_4}{ds} \right\| \text{ ds}$$

$$= \int_0^s \left\| V_4{}' \right\| \text{ ds}$$

$$= \int_0^s \left\| -k_3 V_3 + k_4 V_5 \right\| \text{ ds}$$

$$= \int_0^s \sqrt{k_3{}^2 + k_4{}^2} \text{ .ds}$$

bulunur.

$\vdots$

2.1.(n-2) (V_{n-2}) nin yay uzunluğu

$$s_{V_{n-2}} = \int_0^s \left\| \frac{dV_{n-2}}{ds} \right\| \text{ ds}$$

$$= \int_0^s \left\| V_{n-2}' \right\| \text{ ds}$$

$$= \int_0^s \left\| -k_{n-3} V_{n-3} + k_{n-2} V_{n-1} \right\| \text{ ds}$$

$$= \int_0^s \sqrt{k_{n-3}{}^2 + k_{n-2}{}^2} \text{ .ds}$$ bulunur.

2.1.(n-1) (V_{n-1}) in yay uzunluğu

$$s_{V_{n-1}} = \int_0^s \left\| \frac{dV_{n-1}}{ds} \right\| \text{ ds}$$

$$= \int_0^s \left\| V_{n-1}' \right\| \text{ ds}$$

$$= \int_0^s \left\| -k_{n-2} V_{n-2} \right\| \text{ ds}$$

$$= \int_0^s k_{n-2} \text{ .ds}$$

bulunur.

Sonuç 2.1 E^n in hiperyüzeyi üzerindeki bir eğrinin Frenet vektör alanlarının küresel göstergelerinin yay uzunlukları için genelleme yapılırsa, (V_i) nin yay uzunluğu s_{V_i} olmak üzere;

$i = 1$ için

$$s_{V_1} = \int_0^s k_1 \text{ .ds}$$

$$s_{V_i} = \int_0^s \sqrt{k_{i-1}{}^2 + k_i{}^2} \text{ .ds} \quad ; \quad 2 \le i \le n-2$$

$i = n-1$ için

$$s_{V_{n-1}} = \int_0^s k_{n-2} \text{ .ds}$$

olur.

İspat: Tümevarımla ispatlayalım.

$i=2$ için $s_{V_2}=\int_0^s \sqrt{k_1^2+k_2^2}\,.ds$ doğrudur.

$i=p$ için doğru olsun.

$$s_{V_p}=\int_0^s \sqrt{k_{p-1}^{\;2}+k_p^{\;2}}\,.ds$$

olur.

$i=p+1$ için doğru mudur?

$$s_{V_{p+1}}=\int_0^s \sqrt{k_p^{\;2}+k_{p+1}^{\;2}}\,.ds$$

bulunmalıdır.

$$s_{V_{p+1}}=\int_0^s \left\| \frac{dV_{p+1}}{ds} \right\| ds$$

$$=\int_0^s \left\| V_{p+1}{}' \right\| ds$$

$$=\int_0^s \left\| -k_p V_p + k_{p+1} V_{p+2} \right\| ds$$

$$=\int_0^s \sqrt{k_p^{\;2}+k_{p+1}^{\;2}}\,.ds$$

elde edilir ve $i=p+1$ için de doğrudur.

2.2 Küresel Göstergelerin E^n e Göre Geodezik Eğrilikleri

(n-1) tane küresel göstergenin geodezik eğrilikleri, E^nde ve küre üzerinde oluştuklarından birim küreye(S^{n-1}) göre de hesaplanacaktır.

Tanım 2.2 Bir α eğrisi $s \in I$ yay parametresi ile verilsin. α eğrisinin birim teğet vektörü $\vec{T}$, E^nnin koneksiyonu D olmak üzere;

$$k_g = \|D_T T\| = \left\|\frac{d^2\alpha}{ds^2}\right\|$$

ifadesi α nın, α (s) noktasındaki E^n e göre **geodezik eğriliğidir** (Hacısalihoğlu 2000).

2.2.1 (V_1) in E^n e göre geodezik eğriliği

Tanım 2.2 kullanılarak E^n e göre geodezik eğrilik hesaplanacaktır.

(V_1) in yay parametresi s_{V_1} , birim teğet vektörü T_{V_1} olsun. (V_1) in E^n deki geodezik eğriliği k_{V_1} olmak üzere;

$$k_{V_1} = \left\|D_{T_{V_1}} T_{V_1}\right\|$$

dir.

α eğrisinin yay parametresi s ve birim teğet vektörü $\overrightarrow{V_1}$ olmak üzere (V_1) in denklemi

$$\alpha_{V_1}\left(s_{V_1}\right) = V_1(s)$$

dir.

Bu denklemde her iki tarafın türevi alalım:

$$\frac{d\alpha_{V_1}}{ds_{V_1}} = \frac{dV_1}{ds_{V_1}}$$

$$\frac{d\alpha_{V_1}}{ds_{V_1}} = \frac{dV_1}{ds} \cdot \frac{ds}{ds_{V_1}}$$

olur. Her iki tarafın normunu alalım:

$$\left\|\frac{d\alpha_{V_1}}{ds_{V_1}}\right\| = \left\|V_1'\right\| \cdot \left|\frac{ds}{ds_{V_1}}\right| \qquad ; \qquad \left\|\frac{d\alpha_{V_1}}{ds_{V_1}}\right\| = 1$$

olur.Burada Frenet formülü $\left(V_1' = k_1 \cdot V_2\right)$ kullanılarak;

$$\frac{ds}{ds_{V_1}} = \frac{1}{k_1}$$

elde edilir.

Bu değer $\dfrac{d\alpha_{V_1}}{ds_{V_1}} = k_1 V_2 \cdot \dfrac{ds}{ds_{V_1}}$ eşitliğinde yerine yazılırsa;

$T_{V_1} = V_2$ bulunur.

$$D_{T_{V_1}} T_{V_1} = \frac{dT_{V_1}}{ds_{V_1}}$$

$$D_{T_{V_1}} T_{V_1} = \frac{dT_{V_1}}{ds} \cdot \frac{ds}{ds_{V_1}}$$

$$D_{T_{V_1}} T_{V_1} = \frac{dV_2}{ds} \cdot \frac{ds}{ds_{V_1}}$$

$$D_{T_{V_1}} T_{V_1} = \left(-k_1 V_1 + k_2 V_3\right) \cdot \frac{1}{k_1}$$

$$D_{T_{V_1}} T_{V_1} = -V_1 + \frac{k_2}{k_1} V_3$$

olur. Buradan norm alınırsa, (V_1) in E^n e göre geodezik eğriliği için;

$$k_{V_1} = \left\| D_{T_{V_1}} T_{V_1} \right\| = \sqrt{1^2 + \left(\frac{k_2}{k_1}\right)^2}$$

elde edilir.

2.2.2 (V_2) nin E^n e göre geodezik eğriliği

(V_2) nin yay parametresi s_{V_2}, birim teğet vektörü T_{V_2} olsun. (V_2) nin E^n deki geodezik eğriliği k_{V_2} olmak üzere;

$$k_{V_2} = \left\| D_{T_{V_2}} T_{V_2} \right\|$$

dir.

α eğrisinin yay parametresi s ve birim teğet vektörü $\overrightarrow{V_2}$ olmak üzere (V_2) nin denklemi

$$\alpha_{V_2}\left(s_{V_2}\right) = V_2\left(s\right)$$

dir.

Bu denklemde her iki tarafın türevi alalım:

$$\frac{d\alpha_{V_2}}{ds_{V_2}} = \frac{dV_2}{ds_{V_2}}$$

$$\frac{d\alpha_{V_2}}{ds_{V_2}} = \frac{dV_2}{ds} \cdot \frac{ds}{ds_{V_2}}$$

olur. Her iki tarafın normu alınırsa;

$$\left\| \frac{d\alpha_{V_2}}{ds_{V_2}} \right\| = \left\| V_2{}' \right\| \cdot \left| \frac{ds}{ds_{V_2}} \right| \qquad ; \quad \left\| \frac{d\alpha_{V_2}}{ds_{V_2}} \right\| = 1$$

olur.Burada Frenet formülü $\left(V_2{}' = -k_1 \cdot V_1 + k_2 V_3 \right)$ kullanılarak

$$\frac{ds}{ds_{V_2}} = \frac{1}{\sqrt{k_1{}^2 + k_2{}^2}}$$

elde edilir.

Bu değer $\frac{d\alpha_{V_2}}{ds_{V_2}} = \left(-k_1 V_1 + k_2 V_3 \right) \cdot \frac{ds}{ds_{V_2}}$ eşitliğinde yerine yazılırsa;

$$T_{V_2} = -\frac{k_1}{\sqrt{k_1{}^2 + k_2{}^2}} V_1 + \frac{k_2}{\sqrt{k_1{}^2 + k_2{}^2}} V_3$$

bulunur.

$$D_{T_{V_2}} T_{V_2} = \frac{dT_{V_2}}{ds_{V_2}}$$

$$D_{T_{V_2}} T_{V_2} = \frac{dT_{V_2}}{ds} \cdot \frac{ds}{ds_{V_2}}$$

$$D_{T_{V_2}} T_{V_2} = \frac{d}{ds} \quad -\frac{k_1}{\sqrt{k_1{}^2 + k_2{}^2}} V_1 + \frac{k_2}{\sqrt{k_1{}^2 + k_2{}^2}} V_3 \quad \cdot \frac{1}{\sqrt{k_1{}^2 + k_2{}^2}}$$

$$-\frac{k_1}{\sqrt{k_1^{\,2}+k_2^{\,2}}}=x \quad , \quad \frac{k_2}{\sqrt{k_1^{\,2}+k_2^{\,2}}}=y \qquad \text{diyelim.}$$

$$\begin{aligned}
D_{T_{V_2}} T_{V_2} &= \left(x'V_1 + y'V_3 + xV_1' + yV_3'\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{k_1^{\,2}+k_2^{\,2}}} \\
&= \left(x'V_1 + y'V_3 + x\left(k_1V_2\right) + y\left(-k_2V_2 + k_3V_4\right)\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{k_1^{\,2}+k_2^{\,2}}} \\
&= \left(x'V_1 + \left(k_1x - k_2y\right)V_2 + y'V_3 + k_3yV_4\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{k_1^{\,2}+k_2^{\,2}}}
\end{aligned}$$

olur. Buradan norm alınırsa

$$k_{V_2} = \left\| D_{T_{V_2}} T_{V_2} \right\| = \frac{1}{\sqrt{k_1^{\,2}+k_2^{\,2}}}\cdot\sqrt{\left(x'\right)^2 + \left(k_1x - k_2y\right)^2 + \left(y'\right)^2 + k_3^{\,2}y^2}$$

elde edilir.

2.2.3 (V_3) ün E^n e göre geodezik eğriliği

(V_3) ün yay parametresi s_{V_3}, birim teğet vektörü T_{V_3} olsun. (V_3) ün E^n deki geodezik eğriliği k_{V_3} olmak üzere;

$$k_{V_3} = \left\| D_{T_{V_3}} T_{V_3} \right\|$$

dir.

α eğrisinin yay parametresi s ve birim teğet vektörü $\overrightarrow{V_3}$ olmak üzere (V_3) ün denklemi

$$\alpha_{V_3}\left(s_{V_3}\right) = V_3\left(s\right)$$

dir.

Bu denklemde her iki tarafın türevi alalım:

$$\frac{d\alpha_{V_3}}{ds_{V_3}} = \frac{dV_3}{ds_{V_3}}$$

$$\frac{d\alpha_{V_3}}{ds_{V_3}} = \frac{dV_3}{ds} \cdot \frac{ds}{ds_{V_3}}$$

olur. Her iki tarafın normu alınırsa;

$$\left\| \frac{d\alpha_{V_3}}{ds_{V_3}} \right\| = \left\| V_3' \right\| \cdot \left| \frac{ds}{ds_{V_3}} \right| \qquad ; \quad \left\| \frac{d\alpha_{V_3}}{ds_{V_3}} \right\| = 1$$

olur. Burada Frenet formülü $\left(V_3' = -k_2 \cdot V_2 + k_3 V_4 \right)$ kullanılarak

$$\frac{ds}{ds_{V_3}} = \frac{1}{\sqrt{k_2^{\,2} + k_3^{\,2}}}$$

elde edilir.

Bu değer $\frac{d\alpha_{V_3}}{ds_{V_3}} = \left(-k_2 V_2 + k_3 V_4\right) \cdot \frac{ds}{ds_{V_3}}$ eşitliğinde yerine yazılırsa;

$$T_{V_3} = -\frac{k_2}{\sqrt{k_2^{\,2} + k_3^{\,2}}} V_2 + \frac{k_3}{\sqrt{k_2^{\,2} + k_3^{\,2}}} V_4$$

bulunur.

$$D_{T_{V_3}} T_{V_3} = \frac{dT_{V_3}}{ds_{V_3}}$$

$$D_{T_{V_3}} T_{V_3} = \frac{dT_{V_3}}{ds} \cdot \frac{ds}{ds_{V_3}}$$

$$D_{T_{V_3}} T_{V_3} = \frac{d}{ds} \quad -\frac{k_2}{\sqrt{k_2^{\,2} + k_3^{\,2}}} V_2 + \frac{k_3}{\sqrt{k_2^{\,2} + k_3^{\,2}}} V_4 \quad \cdot \frac{1}{\sqrt{k_2^{\,2} + k_3^{\,2}}}$$

$$-\frac{k_2}{\sqrt{k_2^{\,2} + k_3^{\,2}}} = z \quad , \quad \frac{k_3}{\sqrt{k_2^{\,2} + k_3^{\,2}}} = w$$ diyelim.

$$D_{T_{V_3}}T_{V_3}=\left(z'V_2+w'V_4+zV_2'+wV_4'\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{k_2^{\,2}+k_3^{\,2}}}$$

$$=\left(z'V_2+w'V_4+z\left(-k_1V_1+k_2V_3\right)+w\left(-k_3V_3+k_4V_5\right)\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{k_2^{\,2}+k_3^{\,2}}}$$

$$=\left(-k_1zV_1+z'V_2+\left(k_2z-k_3w\right)V_3+w'V_4+k_4wV_5\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{k_2^{\,2}+k_3^{\,2}}}$$

olur. Buradan norm alınırsa;

$$k_{V_3}=\left\|D_{T_{V_3}}T_{V_3}\right\|=\frac{1}{\sqrt{k_2^{\,2}+k_3^{\,2}}}\cdot\sqrt{k_1^{\,2}z^2+\left(z'\right)^2+\left(k_2z-k_3w\right)^2+\left(w'\right)^2+k_4^{\,2}w^2}$$

elde edilir.

2.2.4 (V_4) ün E^n e göre geodezik eğriliği

(V_4) ün yay parametresi s_{V_4}, birim teğet vektörü T_{V_4} olsun. (V_4) ün E^n deki geodezik eğriliği k_{V_4} olmak üzere;

$$k_{V_4}=\left\|D_{T_{V_4}}T_{V_4}\right\|$$

dir.

α eğrisinin yay parametresi s ve birim teğet vektörü $\overrightarrow{V_4}$ olmak üzere (V_4) ün denklemi $\alpha_{V_4}\left(s_{V_4}\right)=V_4\left(s\right)$ dir.

Bu denklemde her iki tarafın türevi alalım:

$$\frac{d\alpha_{V_4}}{ds_{V_4}}=\frac{dV_4}{ds_{V_4}}$$

$$\frac{d\alpha_{V_4}}{ds_{V_4}}=\frac{dV_4}{ds}\cdot\frac{ds}{ds_{V_4}}$$

olur. Her iki tarafın normu alınırsa;

$$\left\| \frac{d\alpha_{V_4}}{ds_{V_4}} \right\| = \left\| V_4' \right\| \cdot \left| \frac{ds}{ds_{V_4}} \right| \qquad ; \quad \left\| \frac{d\alpha_{V_4}}{ds_{V_4}} \right\| = 1$$

olur. Burada Frenet formülü $\left(V_4' = -k_3 \cdot V_3 + k_4 V_5 \right)$ kullanılarak

$$\frac{ds}{ds_{V_4}} = \frac{1}{\sqrt{k_3^{\,2} + k_4^{\,2}}}$$

elde edilir.

Bu değer $\dfrac{d\alpha_{V_4}}{ds_{V_4}} = \left(-k_3 V_3 + k_4 V_5\right) \cdot \dfrac{ds}{ds_{V_4}}$ eşitliğinde yerine yazılırsa;

$$T_{V_4} = -\frac{k_3}{\sqrt{k_3^{\,2} + k_4^{\,2}}} V_3 + \frac{k_4}{\sqrt{k_3^{\,2} + k_4^{\,2}}} V_5$$

bulunur.

$$D_{T_{V_4}} T_{V_4} = \frac{dT_{V_4}}{ds_{V_4}}$$

$$D_{T_{V_4}} T_{V_4} = \frac{dT_{V_4}}{ds} \cdot \frac{ds}{ds_{V_4}}$$

$$D_{T_{V_4}} T_{V_4} = \frac{d}{ds} \quad -\frac{k_3}{\sqrt{k_3^{\,2} + k_4^{\,2}}} V_3 + \frac{k_4}{\sqrt{k_3^{\,2} + k_4^{\,2}}} V_5 \quad \cdot \frac{1}{\sqrt{k_3^{\,2} + k_4^{\,2}}}$$

$-\dfrac{k_3}{\sqrt{k_3^{\,2} + k_4^{\,2}}} = \mathrm{f}$, $\dfrac{k_4}{\sqrt{k_3^{\,2} + k_4^{\,2}}} = \mathrm{g}$ diyelim.

$$D_{T_{V_4}} T_{V_4} = \left(f'V_3 + g'V_5 + fV_3' + gV_5' \right) \cdot \frac{1}{\sqrt{k_3^{\,2} + k_4^{\,2}}}$$

$$= \left(f'V_3 + g'V_5 + f\left(-k_2 V_2 + k_3 V_4\right) + g\left(-k_4 V_4 + k_5 V_6\right) \right) \cdot \frac{1}{\sqrt{k_3^{\,2} + k_4^{\,2}}}$$

$$= \left(-k_2 f V_2 + f'V_3 + \left(k_3 f - k_4 g\right) V_4 + g'V_5 + k_5 g V_6 \right) \cdot \frac{1}{\sqrt{k_3^{\,2} + k_4^{\,2}}}$$

olur. Buradan norm alınırsa

$$k_{V_4} = \left\| D_{T_{V_4}} T_{V_4} \right\| = \frac{1}{\sqrt{k_3{}^2 + k_4{}^2}} \cdot \sqrt{k_2{}^2 f^2 + (f')^2 + (k_3 f - k_4 g)^2 + (g')^2 + k_5{}^2 g^2}$$

elde edilir.

$\vdots$

2.2.(n-1) (V_{n-1}) in E^n e göre geodezik eğriliği

(V_{n-1}) in yay parametresi $s_{V_{n-1}}$, birim teğet vektörü $T_{V_{n-1}}$ olsun. (V_{n-1}) in E^n deki geodezik eğriliği $k_{V_{n-1}}$ olmak üzere;

$$k_{V_{n-1}} = \left\| D_{T_{V_{n-1}}} T_{V_{n-1}} \right\|$$

dir.

α eğrisinin yay parametresi s ve birim teğet vektörü $\overrightarrow{V_{n-1}}$ olmak üzere (V_{n-1}) in denklemi $\alpha_{V_{n-1}}\left(s_{V_{n-1}}\right) = V_{n-1}(s)$ dir.

Bu denklemde her iki tarafın türevi alalım:

$$\frac{d\alpha_{V_{n-1}}}{ds_{V_{n-1}}} = \frac{dV_{n-1}}{ds_{V_{n-1}}}$$

$$\frac{d\alpha_{V_{n-1}}}{ds_{V_{n-1}}} = \frac{dV_{n-1}}{ds} \cdot \frac{ds}{ds_{V_{n-1}}}$$

olur. Her iki tarafın normu alınırsa;

$$\left\| \frac{d\alpha_{V_{n-1}}}{ds_{V_{n-1}}} \right\| = \left\| V_{n-1}' \right\| \cdot \left| \frac{ds}{ds_{V_{n-1}}} \right| \quad ; \quad \left\| \frac{d\alpha_{V_{n-1}}}{ds_{V_{n-1}}} \right\| = 1$$

olur. Burada Frenet formülü $\left(V_{n-1}' = -k_{n-2} \cdot V_{n-2}\right)$ kullanılarak

$$\frac{ds}{ds_{V_{n-1}}} = \frac{1}{k_{n-2}}$$

elde edilir.

Bu değer $\frac{d\alpha_{V_{n-1}}}{ds_{V_{n-1}}} = \left(-k_{n-2}V_{n-2}\right) \cdot \frac{ds}{ds_{V_{n-1}}}$ eşitliğinde yerine yazılırsa;

$$T_{V_{n-1}} = -V_{n-2}$$

bulunur.

$$D_{T_{V_{n-1}}} T_{V_{n-1}} = \frac{dT_{V_{n-1}}}{ds_{V_{n-1}}}$$

$$D_{T_{V_{n-1}}} T_{V_{n-1}} = \frac{dT_{V_{n-1}}}{ds} \cdot \frac{ds}{ds_{V_{n-1}}}$$

$$D_{T_{V_{n-1}}} T_{V_{n-1}} = -\frac{dV_{n-2}}{ds} \cdot \frac{1}{k_{n-2}}$$

$$= -\left(-k_{n-3}V_{n-3} + k_{n-2}V_{n-1}\right) \cdot \frac{1}{k_{n-2}}$$

$$= \frac{k_{n-3}}{k_{n-2}} V_{n-3} - V_{n-1}$$

olur. Buradan norm alınırsa

$$k_{V_{n-1}} = \left\| D_{T_{V_{n-1}}} T_{V_{n-1}} \right\| = \frac{1}{k_{n-2}} \cdot \sqrt{\left(k_{n-3}\right)^2 + \left(k_{n-2}\right)^2}$$

elde edilir.

Sonuç 2.2 E^n in hiperyüzeyi üzerindeki bir eğrinin Frenet vektör alanlarının küresel göstergelerinin E^n e göre geodezik eğrilikleri için genelleme yapılırsa,(V_j) nin geodezik eğriliği k_{V_j} ile ifade edilirse;

$\lambda = -\frac{k_{j-1}}{\sqrt{k_{j-1}{}^2 + k_j{}^2}}$, $\ell = \frac{k_j}{\sqrt{k_{j-1}{}^2 + k_j{}^2}}$ olmak üzere,

$j = 1$ için

$$k_{V_1} = \sqrt{1^2 + {\frac{k_2}{k_1}}^2}$$

$j = 2$ için

$$k_{V_2} = \frac{1}{\sqrt{k_1^{\,2} + k_2^{\,2}}} \cdot \sqrt{\left(\lambda'\right)^2 + \left(k_1\lambda - k_2\ell\right)^2 + \left(\ell'\right)^2 + k_3^{\,2}\ell^2}$$

$3 \le j \le n-3$ için

$$k_{V_j} = \frac{1}{\sqrt{k_{j-1}^{\,2} + k_j^{\,2}}} \cdot \sqrt{k_{j-2}^{\,2}\lambda^2 + \lambda'^2 + \left(k_{j-1}\lambda - k_j\ell\right)^2 + \ell'^2 + k_{j+1}^{\,2}\ell^2}$$

$j = n-2$ için

$$k_{V_{n-2}} = \frac{1}{\sqrt{k_{n-3}^{\,2} + k_{n-2}^{\,2}}} \cdot \sqrt{k_{n-4}^{\,2}\lambda^2 + \left(\lambda'\right)^2 + \left(k_{n-3}\lambda - k_{n-2}\ell\right)^2 + \left(\ell'\right)^2}$$

$j = n-1$ için

$$k_{V_{n-1}} = \frac{1}{k_{n-2}} \cdot \sqrt{\left(k_{n-3}\right)^2 + \left(k_{n-2}\right)^2}$$

olur.

İspat: $j = 3$ için

$$k_{V_3} = \frac{1}{\sqrt{k_2^{\,2} + k_3^{\,2}}} \cdot \sqrt{k_1^{\,2}\lambda^2 + \left(\lambda'\right)^2 + \left(k_2\lambda - k_3\ell\right)^2 + \left(\ell'\right)^2 + k_4^{\,2}\ell^2}$$

doğrudur.

$j = p$ için doğru olsun.

$$k_{V_p}=\frac{1}{\sqrt{{k_{p-1}}^2+{k_p}^2}}\cdot\sqrt{{k_{p-2}}^2\lambda^2+\lambda'^2+\left(k_{p-1}\lambda-k_p\ell\right)^2+\ell'^2+{k_{p+1}}^2\ell^2}$$

olur.

$j=p+1$ için doğru mudur?

$$k_{V_{p+1}}=\frac{1}{\sqrt{{k_p}^2+{k_{p+1}}^2}}\cdot\sqrt{{k_{p-1}}^2\lambda^2+\lambda'^2+\left(k_p\lambda-k_{p+1}\ell\right)^2+\ell'^2+{k_{p+2}}^2\ell^2}$$

bulunmalıdır.

(V_{p+1}) in yay parametresi $s_{V_{p+1}}$, birim teğet vektörü $T_{V_{p+1}}$ olsun. (V_{p+1}) in E^n deki geodezik eğriliği $k_{V_{p+1}}$ olmak üzere;

$$k_{v_{p+1}}=\left\|D_{T_{V_{p+1}}}T_{V_{p+1}}\right\|$$

dir.

α eğrisinin yay parametresi s ve birim teğet vektörü $\overrightarrow{V_{p+1}}$ olmak üzere (V_{p+1}) in denklemi $\alpha_{V_{p+1}}\left(s_{V_{p+1}}\right)=V_{p+1}(s)$ dir.

Bu denklemde her iki tarafın türevi alalım:

$$\frac{d\alpha_{V_{p+1}}}{ds_{V_{p+1}}}=\frac{dV_{p+1}}{ds_{V_{p+1}}}$$

$$\frac{d\alpha_{V_{p+1}}}{ds_{V_{p+1}}}=\frac{dV_{p+1}}{ds}\cdot\frac{ds}{ds_{V_{p+1}}}$$

olur. Her iki tarafın normu alınırsa;

$$\left\|\frac{d\alpha_{V_{p+1}}}{ds_{V_{p+1}}}\right\|=\left\|{V_{p+1}}'\right\|\cdot\left|\frac{ds}{ds_{V_{p+1}}}\right| \qquad ; \quad \left\|\frac{d\alpha_{V_{p+1}}}{ds_{V_{p+1}}}\right\|=1$$

olur. Burada Frenet formülü $\left({V_{p+1}}'=-k_p\cdot V_p+k_{p+1}V_{p+2}\right)$ kullanılarak

$$\frac{ds}{ds_{V_{p+1}}}=\frac{1}{\sqrt{k_p{}^2+k_{p+1}{}^2}}$$

elde edilir.

Bu değer $\dfrac{d\alpha_{V_{p+1}}}{ds_{V_{p+1}}}=\left(-k_pV_p+k_{p+1}V_{p+2}\right)\cdot\dfrac{ds}{ds_{V_{p+1}}}$ eşitliğinde yerine yazılırsa;

$$T_{V_{p+1}}=-\frac{k_p}{\sqrt{k_p{}^2+k_{p+1}{}^2}}V_p+\frac{k_{p+1}}{\sqrt{k_p{}^2+k_{p+1}{}^2}}V_{p+2}$$

bulunur.

$$D_{T_{V_{p+1}}}T_{V_{p+1}}=\frac{dT_{V_{p+1}}}{ds_{V_{p+1}}}$$

$$D_{T_{V_{p+1}}}T_{V_{p+1}}=\frac{dT_{V_{p+1}}}{ds}\cdot\frac{ds}{ds_{V_{p+1}}}$$

$$D_{T_{V_{p+1}}}T_{V_{p+1}}=\frac{d}{ds}\left(-\frac{k_p}{\sqrt{k_p{}^2+k_{p+1}{}^2}}V_p+\frac{k_{p+1}}{\sqrt{k_p{}^2+k_{p+1}{}^2}}V_{p+2}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{k_p{}^2+k_{p+1}{}^2}}$$

$-\dfrac{k_p}{\sqrt{k_p{}^2+k_{p+1}{}^2}}=\lambda$, $\dfrac{k_{p+1}}{\sqrt{k_p{}^2+k_{p+1}{}^2}}=\ell$ olmak üzere

$$D_{T_{V_{p+1}}}T_{V_{p+1}}=\left(\lambda' V_p+\ell' V_{p+2}+\lambda V_p{}'+\lambda V_{p+2}{}'\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{k_p{}^2+k_{p+1}{}^2}}$$

$$=\left(\lambda' V_p+\ell' V_{p+2}+\lambda\left(-k_{p-1}V_{p-1}+k_pV_{p+1}\right)+\ell\left(-k_{p+1}V_{p+1}+k_{p+2}V_{p+3}\right)\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{k_p{}^2+k_{p+1}{}^2}}$$

$$=\left(-k_{p-1}\lambda V_{p-1}+\lambda' V_p+\left(k_p\lambda-k_{p+1}\ell\right)V_{p+1}+\ell' V_{p+2}+k_{p+2}\ell V_{p+3}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{k_p{}^2+k_{p+1}{}^2}}$$

olur. Buradan norm alınırsa

$$k_{V_{p+1}}=\left\|D_{T_{V_{p+1}}}T_{V_{p+1}}\right\|=\frac{1}{\sqrt{k_p{}^2+k_{p+1}{}^2}}\cdot\sqrt{k_{p-1}{}^2\lambda^2+\left(\lambda'\right)^2+\left(k_p\lambda-k_{p+1}\ell\right)^2+\left(\ell'\right)^2+k_{p+2}{}^2\ell^2}$$

elde edilir ve $j=p+1$ için de doğrudur.

2.3 Küresel Göstergelerin Birim Hiperküreye (S^{n-1}) Göre Geodezik Eğrilikleri

S^{n-1} hiperküresine göre geodezik eğrilikler hesaplanırkan Gauss denklemi kullanılacaktır.

E^n deki koneksiyon D, S^{n-1} deki koneksiyon $\overline{D}$, S^{n-1} in birim normal vektör alanı N ve S^{n-1} in şekil operatörü S olmak üzere $\forall X, Y \in \chi(S^{n-1})$ için Gauss denklemi;

$$\overline{D}_X Y = D_X Y + \langle S(X), Y \rangle N$$

dir (Hacısalihoğlu 2000).

Burada birim hiperkürenin şekil operatörü;

$$S = \frac{1}{r} \cdot I_{n-1} = \begin{matrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{matrix}_{(n-1)\times(n-1)}$$

dir.

(V_i) nin küresel göstergesinin birim teğet vektör alanı $\vec{T}_{V_i}$ olmak üzere, (V_i) nin S^{n-1} e göre geodezik eğriliğine γ_{V_i} denirse;

$$\gamma_{V_i} = \left\| \overline{D}_{T_{V_i}} T_{V_i} \right\| \quad , 1 \leq i \leq n-1$$

olacaktır.

2.3.1 (V_1) in S^{n-1} e göre geodezik eğriliği

(V_1) in birim hiperküreye göre geodezik eğriliği γ_{V_1} olmak üzere $\gamma_{V_1} = \left\| \overline{D}_{T_{V_1}} T_{V_1} \right\|$ dir.

$\overline{D}_{T_{V_1}} T_{V_1} = D_{T_{V_1}} T_{V_1} + \langle S(T_{V_1}), T_{V_1} \rangle V_1$ ifadesinin normu (V_1) in S^{n-1} e göre geodezik eğriliğidir.

Burada $S(T_{V_1}) = S \cdot T_{V_1} = I_{n-1} \cdot T_{V_1} = T_{V_1}$ olur.

$$\overline{D}_{T_{V_1}} T_{V_1} = D_{T_{V_1}} T_{V_1} + \langle S(T_{V_1}), T_{V_1} \rangle V_1$$

$$= D_{T_{V_1}} T_{V_1} + \underbrace{\langle T_{V_1}, T_{V_1} \rangle}_{1} V_1$$

$$= D_{T_{V_1}} T_{V_1} + V_1$$

olur. E^n e göre bulunan $D_{T_{V_1}} T_{V_1}$ yerine yazılırsa;

$$\overline{D}_{T_{V_1}} T_{V_1} = -V_1 + \frac{k_2}{k_1} V_3 + V_1$$

$$= \frac{k_2}{k_1} V_3$$

bulunur ve norm alınırsa;

$$\gamma_{V_1} = \left\| \overline{D}_{T_{V_1}} T_{V_1} \right\| = \frac{k_2}{k_1}$$

elde edilir.

2.3.2 (V_2) nin S^{n-1} e göre geodezik eğriliği

(V_2) nin birim hiperküreye göre geodezik eğriliği γ_{V_2} olmak üzere $\gamma_{V_2} = \left\| \overline{D}_{T_{V_2}} T_{V_2} \right\|$ dir. $\overline{D}_{T_{V_2}} T_{V_2} = D_{T_{V_2}} T_{V_2} + \langle S(T_{V_2}), T_{V_2} \rangle V_2$ ifadesinin normu (V_2) nin S^{n-1} e göre geodezik eğriliğidir.

Burada $S(T_{V_2}) = S \cdot T_{V_2} = I_{n-1} \cdot T_{V_2} = T_{V_2}$ olur.

$$\overline{D}_{T_{V_2}} T_{V_2} = D_{T_{V_2}} T_{V_2} + \langle S(T_{V_2}), T_{V_2} \rangle V_2$$

$$= D_{T_{V_2}} T_{V_2} + \underbrace{\langle T_{V_2}, T_{V_2} \rangle}_{1} V_2$$

$$= D_{T_{V_2}} T_{V_2} + V_2$$

olur. E^n e göre bulunan $D_{T_{V_2}} T_{V_2}$ yerine yazılırsa;

$$x = -\frac{k_1}{\sqrt{k_1{}^2 + k_2{}^2}} \quad , \quad \mathrm{y} = \frac{k_2}{\sqrt{k_1{}^2 + k_2{}^2}}$$

$$\overline{D}_{T_{V_2}} T_{V_2} = \frac{1}{\sqrt{k_1{}^2 + k_2{}^2}} \cdot \left(x' V_1 + \left(k_1 x - k_2 y \right) V_2 + y' V_3 + k_3 y V_4 \right) + V_2$$

$$= \frac{x'}{\sqrt{k_1{}^2 + k_2{}^2}} V_1 + \quad \frac{k_1 x - k_2 y}{\sqrt{k_1{}^2 + k_2{}^2}} + 1 \;\; V_2 + \frac{y'}{\sqrt{k_1{}^2 + k_2{}^2}} V_3 + \frac{k_3 y}{\sqrt{k_1{}^2 + k_2{}^2}} V_4$$

bulunur ve norm alınırsa;

$$\gamma_{V_2} = \left\| \overline{D}_{T_{V_2}} T_{V_2} \right\|$$

$$= \sqrt{\frac{x'^2 + y'^2 + k_3{}^2 y^2}{k_1{}^2 + k_2{}^2} + \quad \frac{k_1 x - k_2 y}{\sqrt{k_1{}^2 + k_2{}^2}} + 1 \quad {}^2}$$

elde edilir.

2.3.3 (V_3) ün S^{n-1} e göre geodezik eğriliği

(V_3) ün birim hiperküreye göre geodezik eğriliği γ_{V_3} olmak üzere $\gamma_{V_3} = \left\| \overline{D}_{T_{V_3}} T_{V_3} \right\|$ dir. $\overline{D}_{T_{V_3}} T_{V_3} = D_{T_{V_3}} T_{V_3} + \langle S(T_{V_3}), T_{V_3} \rangle V_3$ ifadesinin normu (V_3) ün S^{n-1}e göre geodezik eğriliğidir.

Burada $S(T_{V_3}) = S \cdot T_{V_3} = I_{n-1} \cdot T_{V_3} = T_{V_3}$ olur.

$$\overline{D}_{T_{V_3}} T_{V_3} = D_{T_{V_3}} T_{V_3} + \langle S(T_{V_3}), T_{V_3} \rangle V_3$$

$$= D_{T_{V_3}} T_{V_3} + \underbrace{\langle T_{V_3}, T_{V_3} \rangle}_{1} V_3$$

$$= D_{T_{V_3}} T_{V_3} + V_3$$

olur. E^n e göre bulunan $D_{T_{V_3}} T_{V_3}$ yerine yazılırsa;

$$z = -\frac{k_2}{\sqrt{{k_2}^2 + {k_3}^2}} \quad , \quad \mathrm{w} = \frac{k_3}{\sqrt{{k_2}^2 + {k_3}^2}}$$

$$\overline{D}_{T_{V_3}} T_{V_3} = \frac{1}{\sqrt{{k_2}^2 + {k_3}^2}} \cdot \left(-k_1 z V_1 + z' V_2 + \left(k_2 z - k_3 w \right) V_3 + w' V_4 + k_4 w V_5 \right) + V_3$$

$$= -\frac{k_1 z}{\sqrt{{k_2}^2 + {k_3}^2}} V_1 + \frac{z'}{\sqrt{{k_2}^2 + {k_3}^2}} V_2 + \quad \frac{k_2 z - k_3 w}{\sqrt{{k_2}^2 + {k_3}^2}} + 1 \;\; V_3 + \frac{w'}{\sqrt{{k_2}^2 + {k_3}^2}} V_4 + \frac{k_4 w}{\sqrt{{k_2}^2 + {k_3}^2}} V_5$$

bulunur ve norm alınırsa;

$$\gamma_{V_3} = \left\| \overline{D}_{T_{V_3}} T_{V_3} \right\|$$

$$= \sqrt{\frac{{k_1}^2 z^2 + z'^2 + w'^2 + {k_4}^2 w^2}{{k_2}^2 + {k_3}^2} + \quad {\frac{k_2 z - k_3 w}{\sqrt{{k_2}^2 + {k_3}^2}} + 1}^{\;2}}$$

elde edilir.

2.3.4 (V_4) ün S^{n-1} e göre geodezik eğriliği

(V_4) ün birim hiperküreye göre geodezik eğriliği γ_{V_4} olmak üzere $\gamma_{V_4} = \left\| \overline{D}_{T_{V_4}} T_{V_4} \right\|$ dir. $\overline{D}_{T_{V_4}} T_{V_4} = D_{T_{V_4}} T_{V_4} + \langle S(T_{V_4}), T_{V_4} \rangle V_4$ ifadesinin normu (V_4) ün S^{n-1} e göre geodezik eğriliğidir.

Burada $S(T_{V_4}) = S \cdot T_{V_4} = I_{n-1} \cdot T_{V_4} = T_{V_4}$ olur.

$$\overline{D}_{T_{V_4}} T_{V_4} = D_{T_{V_4}} T_{V_4} + \langle S(T_{V_4}), T_{V_4} \rangle V_4$$

$$= D_{T_{V_4}} T_{V_4} + \underbrace{\langle T_{V_4}, T_{V_4} \rangle}_{1} V_4$$

$$= D_{T_{V_4}} T_{V_4} + V_4$$

olur. E^n e göre bulunan $D_{T_{V_4}} T_{V_4}$ yerine yazılırsa;

$$f = -\frac{k_3}{\sqrt{k_3^{\,2} + k_4^{\,2}}} \quad , \quad \mathrm{g} = \frac{k_4}{\sqrt{k_3^{\,2} + k_4^{\,2}}}$$

$$\overline{D}_{T_{V_4}} T_{V_4} = \frac{1}{\sqrt{k_3^{\,2} + k_4^{\,2}}} \cdot \left(-k_2 f V_2 + f' V_3 + \left(k_3 f - k_4 g\right) V_4 + g' V_5 + k_5 g V_6\right) + V_4$$

$$= -\frac{k_2 f}{\sqrt{k_3^{\,2} + k_4^{\,2}}} V_2 + \frac{f'}{\sqrt{k_3^{\,2} + k_4^{\,2}}} V_3 + \quad \frac{k_3 f - k_4 g}{\sqrt{k_3^{\,2} + k_4^{\,2}}} + 1 \quad V_4 + \frac{g'}{\sqrt{k_3^{\,2} + k_4^{\,2}}} V_5 + \frac{k_5 g}{\sqrt{k_3^{\,2} + k_4^{\,2}}} V_6$$

bulunur ve norm alınırsa;

$$\gamma_{V_4} = \left\| \overline{D}_{T_{V_4}} T_{V_4} \right\|$$

$$= \sqrt{\frac{k_2^{\,2} f^2 + f'^2 + g'^2 + k_5^{\,2} g^2}{k_3^{\,2} + k_4^{\,2}} + \quad \frac{k_3 f - k_4 g}{\sqrt{k_3^{\,2} + k_4^{\,2}}} + 1 \quad ^{2}}$$

elde edilir.

$\vdots$

2.3.(n-1) (V_{n-1}) in S^{n-1} e göre geodezik eğriliği

(V_{n-1}) in birim hiperküreye göre geodezik eğriliği $\gamma_{V_{n-1}}$ olmak üzere $\gamma_{V_{n-1}} = \left\| \overline{D}_{T_{V_{n-1}}} T_{V_{n-1}} \right\|$ dir.

$\overline{D}_{T_{V_{n-1}}} T_{V_{n-1}} = D_{T_{V_{n-1}}} T_{V_{n-1}} + \langle S(T_{V_{n-1}}), T_{V_{n-1}} \rangle V_{n-1}$ ifadesinin normu (V_{n-1}) in S^{n-1} e göre geodezik eğriliğidir.

Burada $S(T_{V_{n-1}}) = S \cdot T_{V_{n-1}} = I_{n-1} \cdot T_{V_{n-1}} = T_{V_{n-1}}$ olur.

$$\overline{D}_{T_{V_{n-1}}} T_{V_{n-1}} = D_{T_{V_{n-1}}} T_{V_{n-1}} + \langle S(T_{V_{n-1}}), T_{V_{n-1}} \rangle V_{n-1}$$

$$= D_{T_{V_{n-1}}} T_{V_{n-1}} + \underbrace{\langle T_{V_{n-1}}, T_{V_{n-1}} \rangle}_{1} V_{n-1}$$

$$= D_{T_{V_{n-1}}} T_{V_{n-1}} + V_{n-1}$$

olur. E^n e göre bulunan $D_{T_{V_{n-1}}} T_{V_{n-1}}$ yerine yazılırsa;

$$\overline{D}_{T_{V_{n-1}}} T_{V_{n-1}} = \frac{k_{n-3}}{k_{n-2}} V_{n-3} - V_{n-1} + V_{n-1}$$

$$= \frac{k_{n-3}}{k_{n-2}} V_{n-3}$$

bulunur ve norm alınırsa;

$$\gamma_{V_{n-1}} = \left\| \overline{D}_{T_{V_{n-1}}} T_{V_{n-1}} \right\| = \frac{k_{n-3}}{k_{n-2}}$$

elde edilir.

Sonuç 2.3 E^n in hiperyüzeyi üzerindeki bir eğrinin Frenet vektör alanlarının küresel göstergelerinin S^{n-1}e göre geodezik eğrilikleri için genelleme yapılırsa, (V_j) nin geodezik eğriliği γ_{V_j} ile ifade edilirse;

$$\lambda = -\frac{k_{j-1}}{\sqrt{k_{j-1}^2 + k_j^2}} \quad , \quad \ell = \frac{k_j}{\sqrt{k_{j-1}^2 + k_j^2}} \quad \text{olmak üzere}$$

$j = 1$ için

$$\gamma_{V_1} = \frac{k_2}{k_1}$$

$j = 2$ için

$$\gamma_{V_2} = \sqrt{\frac{\lambda'^2 + \ell'^2 + k_3^2 \ell^2}{k_1^2 + k_2^2} + \left(\frac{k_1 \lambda - k_2 \ell}{\sqrt{k_1^2 + k_2^2}} + 1 \right)^2}$$

$3 \leq j \leq n-3$ için

$$\gamma_{V_j}=\sqrt{\frac{k_{j-2}{}^{2}\lambda^{2}+\lambda'^{2}+\ell'^{2}+k_{j+1}{}^{2}\ell^{2}}{k_{j-1}{}^{2}+k_{j}{}^{2}}+\;\frac{k_{j-1}\lambda-k_{j}\ell}{\sqrt{k_{j-1}{}^{2}+k_{j}{}^{2}}}+1\;^{2}}$$

$j=n-2$ için

$$\gamma_{V_{n-2}}=\sqrt{\frac{k_{n-4}{}^{2}\lambda^{2}+\lambda'^{2}+\ell'^{2}}{k_{n-3}{}^{2}+k_{n-2}{}^{2}}+\;\frac{k_{n-3}\lambda-k_{n-2}\ell}{\sqrt{k_{n-3}{}^{2}+k_{n-2}{}^{2}}}+1\;^{2}}$$

$j=n-1$ için

$$\gamma_{V_{n-1}}=\frac{k_{n-3}}{k_{n-2}}$$

olur.

İspat: $j=3$ için

$$\gamma_{V_3}=\sqrt{\frac{k_{1}{}^{2}\lambda^{2}+\lambda'^{2}+\ell'^{2}+k_{4}{}^{2}\ell^{2}}{k_{2}{}^{2}+k_{3}{}^{2}}+\;\frac{k_{2}\lambda-k_{3}\ell}{\sqrt{k_{2}{}^{2}+k_{3}{}^{2}}}+1\;^{2}}$$

doğrudur.

$j=p$ için doğru olsun.

$$\gamma_{V_p}=\sqrt{\frac{k_{p-2}{}^{2}\lambda^{2}+\lambda'^{2}+\ell'^{2}+k_{p+1}{}^{2}\ell^{2}}{k_{p-1}{}^{2}+k_{p}{}^{2}}+\;\frac{k_{p-1}\lambda-k_{p}\ell}{\sqrt{k_{p-1}{}^{2}+k_{p}{}^{2}}}+1\;^{2}}$$

olur.

$j=p+1$ için doğru mudur?

$$\gamma_{V_{p+1}}=\sqrt{\frac{k_{p-1}{}^{2}\lambda^{2}+\lambda'^{2}+\ell'^{2}+k_{p+2}{}^{2}\ell^{2}}{k_{p}{}^{2}+k_{p+1}{}^{2}}+\;\frac{k_{p}\lambda-k_{p+1}\ell}{\sqrt{k_{p}{}^{2}+k_{p+1}{}^{2}}}+1\;^{2}}$$

bulunmalıdır.

(V_{p+1}) in birim hiperküreye göre geodezik eğriliği $\gamma_{V_{p+1}}$ olmak üzere $\gamma_{V_{p+1}} = \left\| \overline{D}_{T_{V_{p+1}}} T_{V_{p+1}} \right\|$ dir.

$\overline{D}_{T_{V_{p+1}}} T_{V_{p+1}} = D_{T_{V_{p+1}}} T_{V_{p+1}} + \langle S(T_{V_{p+1}}), T_{V_{p+1}} \rangle V_{p+1}$ ifadesinin normu (V_{p+1}) in S^{n-1}e göre geodezik eğriliğidir.

Burada $S(T_{V_{p+1}}) = S \cdot T_{V_{p+1}} = I_{n-1} \cdot T_{V_{p+1}} = T_{V_{p+1}}$ olur.

$$
\begin{aligned}
\overline{D}_{T_{V_{p+1}}} T_{V_{p+1}} &= D_{T_{V_{p+1}}} T_{V_{p+1}} + \langle S(T_{V_{p+1}}), T_{V_{p+1}} \rangle V_{p+1} \\
&= D_{T_{V_{p+1}}} T_{V_{p+1}} + \underbrace{\langle T_{V_{p+1}}, T_{V_{p+1}} \rangle}_{1} V_{p+1} \\
&= D_{T_{V_{p+1}}} T_{V_{p+1}} + V_{p+1}
\end{aligned}
$$

olur. E^n e göre bulunan $D_{T_{V_{p+1}}} T_{V_{p+1}}$ yerine yazılırsa;

$$
\lambda = -\frac{k_p}{\sqrt{k_p^{\,2} + k_{p+1}^{\,2}}} \quad , \quad \ell = \frac{k_{p+1}}{\sqrt{k_p^{\,2} + k_{p+1}^{\,2}}}
$$

$$
\begin{aligned}
\overline{D}_{T_{V_{p+1}}} T_{V_{p+1}} = & \frac{1}{\sqrt{k_p^{\,2} + k_{p+1}^{\,2}}} \cdot \left(-k_{p-1}\lambda V_{p-1} + \lambda' V_p + \left(k_p\lambda - k_{p+1}\ell \right) V_{p+1} + \ell' V_{p+2} + k_{p+2}\ell V_{p+3} \right) \\
& + V_{p+1} \\
= & -\frac{k_{p-1}\lambda}{\sqrt{k_p^{\,2} + k_{p+1}^{\,2}}} V_{p-1} + \frac{\lambda'}{\sqrt{k_p^{\,2} + k_{p+1}^{\,2}}} V_p + \left(\frac{k_p\lambda - k_{p+1}\ell}{\sqrt{k_p^{\,2} + k_{p+1}^{\,2}}} + 1 \right) V_{p+1} \\
& + \frac{\ell'}{\sqrt{k_p^{\,2} + k_{p+1}^{\,2}}} V_{p+2} + \frac{k_{p+2}\ell}{\sqrt{k_p^{\,2} + k_{p+1}^{\,2}}} V_{p+3}
\end{aligned}
$$

bulunur ve norm alınırsa;

$$\gamma_{V_{p+1}} = \left\| \overline{D}_{T_{V_{p+1}}} T_{V_{p+1}} \right\|$$

$$= \sqrt{\frac{{k_{p-1}}^2 \lambda^2 + \lambda'^2 + \ell'^2 + {k_{p+2}}^2 \ell^2}{{k_p}^2 + {k_{p+1}}^2} + \left(\frac{k_p \lambda - k_{p+1} \ell}{\sqrt{{k_p}^2 + {k_{p+1}}^2}} + 1 \right)^2}$$

elde edilir ve $j = p+1$ için de doğrudur.

2.4 Küresel Göstergelerin S^{n-1} e Göre Asimptotik Eğrilik Fonksiyonları

Tanım 2.4 M bir hiperyüzey olsun.M'nin şekil operatörü S ve M üzerindeki bir α eğrisinin teğet vektör alanı $\vec{T}$ olmak üzere;

$\langle S(T), T \rangle = 0$

diferensiyel denkleminin çözüm eğrisine **asimptotik eğri** denir (Hacısalihoğlu 2000).

$k_a = \langle S(T), T \rangle \neq 0$ ise bu değere α eğrisinin **asimptotik eğrilik fonksiyonu** denir.

2.4.1 (V_1) in asimptotik eğrilik fonksiyonu

Tanım 2.4 kullanılarak (V_1) in asimptotik eğrilik fonksiyonu S^{n-1} e göre bulunacaktır. (V_1) in birim vektör alanı $\vec{\mathrm{T}}_{V_1}$ ve hiperkürenin(S^{n-1}) şekil operatörü $\mathrm{S=I_{n-1}}$ olmak üzere (V_1) in asimptotik eğrilik fonksiyonuna $\mathrm{k}_{\mathrm{a}_{\mathrm{V}_1}}$ denirse; $\mathrm{k}_{\mathrm{a}_{\mathrm{V}_1}} = \langle S(T_{V_1}), T_{V_1} \rangle$ olacaktır.

$$\begin{aligned} \mathrm{k}_{\mathrm{a}_{\mathrm{V}_1}} &= \langle S(T_{V_1}), T_{V_1} \rangle \\ &= \langle T_{V_1}, T_{V_1} \rangle \\ &= 1 \end{aligned}$$

dir.

$\vdots$

2.4.(n-1) (V_{n-1}) in asimptotik eğrilik fonksiyonu

(V_{n-1}) in asimptotik eğrilik fonksiyonuna $k_{a_{V_{n-1}}}$ denirse; $k_{a_{V_{n-1}}} = \langle S(T_{V_{n-1}}), T_{V_{n-1}} \rangle$ olacaktır.

$$\begin{aligned} k_{a_{V_{n-1}}} &= \langle S(T_{V_{n-1}}), T_{V_{n-1}} \rangle \\ &= \langle T_{V_{n-1}}, T_{V_{n-1}} \rangle \\ &= 1 \qquad \text{dir.} \end{aligned}$$

Sonuç 2.4 E^n in altmanifoldu olan (n-1)-boyutlu birim hiperküre üzerindeki bütün küresel göstergelerin asimptotik eğrilik fonksiyonları 1'dir ve küresel göstergeler asimptotik eğri degildirler.

2.5 Küresel Göstergeler S^{n-1} e Göre Eğrilik Çizgileri midir?

Tanım 2.5 E^n de bir hiperyüzey M ve M üzerinde bir eğri α olsun. α eğrisinin teğet vektör alanı $\vec{T}$ ve hiperyüzeyin şekil operatörü S olmak üzere; eğer $\vec{T}$, α eğrisi boyunca S'nin karakteristik vektörlerine karşılık geliyorsa α eğrisine M üzerinde **eğrilik çizgisi** denir (Hacısalihoğlu 2000).

Bu tanıma göre S^{n-1} üzerinde öyle eğriler vardır ki; bu eğrilerin teğet vektör alanları eğrinin her noktasında S'nin karakteristik vektörleridir.
O halde $S(T) = \lambda T$ olacak şekilde $T \in \chi(S^{n-1})$ aranıyor demektir.
$\forall T \in \chi(S^{n-1})$ için $S(T) = I_{n-1} \cdot T = T$ dir. $(\lambda = 1)$
Buradan görülüyor ki birim hiperküre üzerinde yatan her eğri eğrilik çizgisidir.

Sonuç 2.5 E^n in altmanifoldu olan (n-1)-boyutlu birim hiperküre üzerindeki bütün küresel göstergeler eğrilik çizgisidir.

2.6 Küresel Göstergelerin Evolüt ve İnvolütleri

Tanım 2.6.1 $M, N \subset E^n$ de iki eğri olsun. M ve N sırasıyla, (I, α) ve (I, β) koordinat komşulukları ile verilsin. $\alpha(s)$, $\beta(s)$ noktalarında M ve N eğrilerinin Frenet r-ayaklıları sırasıyla, $\{V_1(s), V_2(s), ..., V_r(s)\}$ ve $\{V_1^*(s), V_2^*(s), ..., V_r^*(s)\}$ olmak üzere; $\langle V_1(s), V_1^*(s)\rangle = 0$ ise N eğrisine M eğrisinin **involütü**, M eğrisine de N eğrisinin **evolütü** denir (Hacısalihoğlu 2000).

Tanım 2.6.2 Bir eğrinin teğetlerine dik olan yörüngeye o eğrinin bir **involütü** denir.

Teorem 2.6.1 E^3 de bir α eğrisinin teğetler göstergesi ve binormaller göstergesi, sabit pol eğrisinin iki tane küresel involütüdür.

İspat: (T), (B) ve (C) nin teğetlerinin dik olduklarını göstereceğiz.

$$\frac{dC}{ds} = C' = (\sin\Phi)'T + (\cos\Phi)'B$$

$$\frac{dT}{ds} = T' = k_1 N$$

$$\frac{dB}{ds} = B' = -k_2 N$$

olduğuna göre;

$$\langle \frac{dC}{ds}, \frac{dT}{ds} \rangle = 0 \text{ ve } \langle \frac{dC}{ds}, \frac{dB}{ds} \rangle = 0 \text{ dır.}$$

Burada küresel involüt ilişkisi E^n in, (n-1)-boyutlu bir M altmanifoldunda incelenecektir.

M altmanifoldu üzerindeki bir eğrinin Frenet (n-1)-ayaklısı $\{V_1(s), V_2(s), ..., V_{n-1}(s)\}$ olmak üzere; bu vektörlerin eğri boyunca türevleri ile aralarındaki ilişki şöyledir:

$$V_1' = k_1 V_2$$

$$V_2' = -k_1 V_1 + k_2 V_3$$

$$V_3' = -k_2 V_2 + k_3 V_4$$

$$V_4' = -k_3V_3 + k_4V_5$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$V_{n-3}' = -k_{n-4}V_{n-4} + k_{n-3}V_{n-2}$$

$$V_{n-2}' = -k_{n-3}V_{n-3} + k_{n-2}V_{n-1}$$

$$V_{n-1}' = -k_{n-2}V_{n-2}$$

2.6.1 (V_1) in küresel involütleri

$$\begin{aligned}\langle V_1', V_2' \rangle &= \langle k_1V_2, -k_1V_1 + k_2V_3 \rangle \\ &= \langle k_1V_2, -k_1V_1 \rangle + \langle k_1V_2, k_2V_3 \rangle \\ &= -k_1^{\,2} \underbrace{\langle V_2, V_1 \rangle}_{0} + k_1k_2 \underbrace{\langle V_2, V_3 \rangle}_{0} \\ &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\langle V_1', V_3' \rangle &= \langle k_1V_2, -k_2V_2 + k_3V_4 \rangle \\ &= \langle k_1V_2, -k_2V_2 \rangle + \langle k_1V_2, k_3V_4 \rangle \\ &= -k_1k_2 \underbrace{\langle V_2, V_2 \rangle}_{1} + k_1k_3 \underbrace{\langle V_2, V_4 \rangle}_{0} \\ &= -k_1k_2 \\ &\neq 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\langle V_1', V_4' \rangle &= \langle k_1V_2, -k_3V_3 + k_4V_5 \rangle \\ &= \langle k_1V_2, -k_3V_3 \rangle + \langle k_1V_2, k_4V_5 \rangle \\ &= -k_1k_3 \underbrace{\langle V_2, V_3 \rangle}_{0} + k_1k_4 \underbrace{\langle V_2, V_5 \rangle}_{0} \\ &= 0\end{aligned}$$

Ve bu şekilde devam edilirse;

$$\vdots$$

$$\langle V_1', V_{n-3}' \rangle = 0$$

$$\langle V_1', V_{n-2}' \rangle = 0$$

$\langle V_1', V_{n-1}' \rangle = 0$

elde edilir.

Görülüyor ki (V_3) hariç diğer küresel göstergeler, (V_1) in (n-3) tane küresel involütüdür.

2.6.2 (V_2) nin küresel involütleri

$$\langle V_2', V_1' \rangle = \langle -k_1V_1 + k_2V_3, k_1V_2 \rangle$$
$$=0$$

$$\langle V_2', V_3' \rangle = \langle -k_1V_1 + k_2V_3, -k_2V_2 + k_3V_4 \rangle$$
$$=0$$

$$\langle V_2', V_4' \rangle = \langle -k_1V_1 + k_2V_3, -k_3V_3 + k_4V_5 \rangle$$
$$= -k_2k_3$$
$$\neq 0$$

Ve bu şekilde devam edilirse;

$\vdots$

$\langle V_2', V_{n-3}' \rangle = 0$

$\langle V_2', V_{n-2}' \rangle = 0$

$\langle V_2', V_{n-1}' \rangle = 0$

elde edilir.

Görülüyor ki (V_4) hariç diğer küresel göstergeler, (V_2) nin (n-3) tane küresel involütüdür.

2.6.3 (V_3) ün küresel involütleri

$$\langle V_3', V_1' \rangle = \langle -k_2V_2 + k_3V_4, k_1V_2 \rangle$$

$$= -k_2k_1$$

$$\neq 0$$

$$\langle V_3', V_2' \rangle = \langle -k_2V_2 + k_3V_4, -k_1V_1 + k_2V_3 \rangle$$

$$=0$$

$$\langle V_3', V_4' \rangle = \langle -k_2V_2 + k_3V_4, -k_3V_3 + k_4V_5 \rangle$$

$$=0$$

$$\langle V_3', V_5' \rangle = \langle -k_2V_2 + k_3V_4, -k_4V_4 + k_5V_6 \rangle$$

$$\neq 0$$

$$\langle V_3', V_6 \rangle = 0$$

Ve bu şekilde devam edilirse;

$\vdots$

$$\langle V_3', V_{n-3}' \rangle = 0$$

$$\langle V_3', V_{n-2}' \rangle = 0$$

$$\langle V_3', V_{n-1}' \rangle = 0$$

elde edilir.

Görülüyor ki (V_1) ve (V_5) hariç diğer küresel göstergeler, (V_3) ün (n-4) tane küresel involütüdür.

2.6.4 (V_4) ün küresel involütleri

$$\langle V_4', V_1' \rangle = 0$$

$$\langle V_4', V_2' \rangle \neq 0$$

$$\langle V_4', V_3' \rangle = 0$$

$$\langle V_4', V_5' \rangle = 0$$

$\langle V_4', V_6 \rangle \neq 0$

$\vdots$

$\langle V_4', V_{n-3}' \rangle = 0$

$\langle V_4', V_{n-2}' \rangle = 0$

$\langle V_4', V_{n-1}' \rangle = 0$

Görülüyor ki (V_2) ve (V_6) hariç diğer küresel göstergeler, (V_4) ün (n-4) tane küresel involütüdür.

$\vdots$

2.6.(n-3) (V_{n-3}) ün küresel involütleri

$\langle V_{n-3}', V_1' \rangle = 0$

$\langle V_{n-3}', V_2' \rangle = 0$

$\langle V_{n-3}', V_3' \rangle = 0$

$\vdots$

$\langle V_{n-3}', V_{n-5}' \rangle \neq 0$

$\langle V_{n-3}', V_{n-4}' \rangle = 0$

$\langle V_{n-3}', V_{n-2}' \rangle = 0$

$\langle V_{n-3}', V_{n-1}' \rangle \neq 0$

Görülüyor ki (V_{n-5}) ve (V_{n-1}) hariç diğer küresel göstergeler, (V_{n-3}) ün (n-4) tane küresel involütüdür.

2.6.(n-2) (V_{n-2}) nin küresel involütleri

$\langle V_{n-2}', V_1' \rangle = 0$

$\langle V_{n-2}', V_2' \rangle = 0$

$\langle V_{n-2}', V_3' \rangle = 0$

$\vdots$

$\langle V_{n-2}', V_{n-5}' \rangle = 0$

$\langle V_{n-2}', V_{n-4}' \rangle \neq 0$

$\langle V_{n-2}', V_{n-3}' \rangle = 0$

$\langle V_{n-2}', V_{n-1}' \rangle = 0$

Görülüyor ki (V_{n-4}) hariç diğer küresel göstergeler, (V_{n-2}) nin (n-3) tane küresel involütüdür.

2.6.(n-1) (V_{n-1}) nin küresel involütleri

$\langle V_{n-1}', V_1' \rangle = 0$

$\langle V_{n-1}', V_2' \rangle = 0$

$\langle V_{n-1}', V_3' \rangle = 0$

$\vdots$

$\langle V_{n-1}', V_{n-4}' \rangle = 0$

$\langle V_{n-1}', V_{n-3}' \rangle \neq 0$

$\langle V_{n-1}', V_{n-2}' \rangle = 0$

Görülüyor ki (V_{n-3}) hariç diğer küresel göstergeler, (V_{n-1}) in (n-3) tane küresel involütüdür.

Sonuç 2.6 Küresel göstergelerin küresel involütleri için genelleme yapılırsa;
$1 \leq j \leq n-1$ olmak üzere j-yinci küresel gösterge için $(V_j), (V_{j-2})$ ve (V_{j+2}) hariç bütün (V_j) eğrileri küresel involüttür.

$j = 1, 2, (n-2), (n-1)$ olmak üzere (V_j) için küresel involütler (n-3) tanedir.

$j = 3, 4, ..., (n-4), (n-3)$ olmak üzere (V_j) için küresel involütler (n-4) tanedir.

3. ALTMANİFOLDLAR

E^n, n-boyutlu Riemann manifoldu ve E^n nin k-boyutlu altmanifoldu M ele alınacaktır.

Tanım 3.1 E^n, n-boyutlu C^∞ manifold olsun. E^n üstünde vektör alanlarının uzayı $\chi(E^n)$ ve reel değerli C^∞ fonksiyonların halkası $C^\infty(E^n, R)$ olmak üzere;

$\langle,\rangle \;:\; \chi(E^n)\times\chi(E^n)\to C^\infty(E^n,R)$

şeklinde bir iç çarpım tanımlı ise E^n e **Riemann manifoldu** denir.Burada $\langle,\rangle$ işlemine E^n üzerinde **Riemann metriği** denir (Hacısalihoğlu 2000).

Tanım 3.2 E^n, n-boyutlu C^∞ manifold ve E^n üzerinde vektör alanlarının uzayı $\chi(E^n)$ olsun.

$$\begin{aligned} D \;:\; &\chi(E^n)\times\chi(E^n)\to\chi(E^n)\\ &(X,Y) \quad\to\quad D(X,Y)=D_XY \end{aligned}$$

fonksiyonu için;

1) $D_X(Y+Z)=D_XY+D_XZ$

2) $D_{X+Y}Z=D_XZ+D_YZ$

3) $D_{fX}Y=fD_XY$

4) $D_X(fY)=X[f]Y+fD_XY$

5) $D_XY-D_YX=[X,Y]$ (sıfır tensör özeliği)

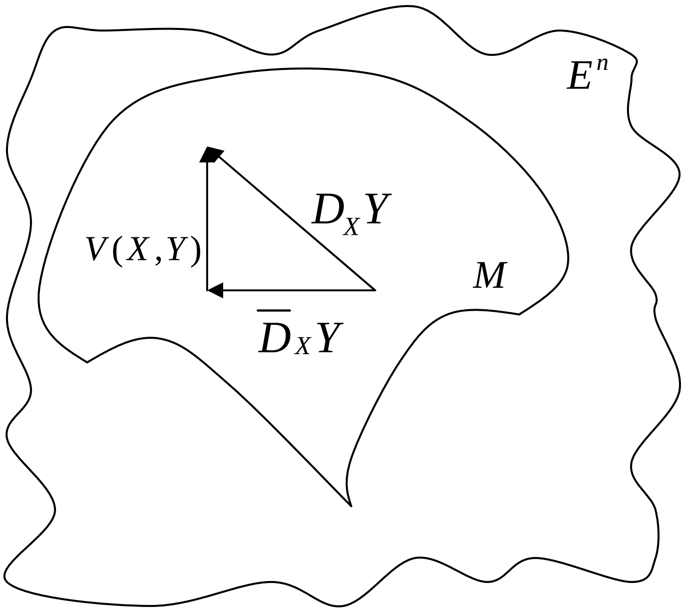
6) $Z[\langle X,Y\rangle]=\langle D_ZX,Y\rangle+\langle X,D_ZY\rangle$ (metrikle bağdaşabilme özeliği)

özellikleri sağlanıyorsa D ye E^n manifoldu üzerinde **Riemann koneksiyonu** denir (Hicks 1974).

3.1 Genelleştirilmiş Gauss Denklemi

E^n, n-boyutlu Riemann manifoldu ve E^n nin k-boyutlu (k<n-1) altmanifoldu M olmak üzere $\chi(M)$ nin $\chi(E^n)$ deki ortogonal tamamlayıcı uzayı $\chi(M)^\perp$ ve E^n nin Riemann koneksiyonu D olsun.

$\underbrace{\chi(E^n)}_{n} = \underbrace{\chi(M)}_{k} \oplus \underbrace{\chi(M)^{\perp}}_{n-k}$ eşitliğinden yararlanılacaktır (Chen 1973).



Şekil 3.1 $D_X Y$ nin teğetsel ve normal bileşenleri

$\forall X, Y \in \chi(M)$ için $D_X Y = \overline{D}_X Y + V(X,Y)$ eşitliğine **genelleştirilmiş Gauss denklemi** denir (Hacısalihoğlu 2004).

Burada $\overline{D}_X Y \in \chi(M)$, $D_X Y$ nin teğetsel bileşeni ve $V(X,Y) \in \chi(M)^{\perp}$, $D_X Y$ nin normal bileşenidir. $\overline{D}_X Y = teg(D_X Y)$, $V(X,Y) = nor(D_X Y)$ şeklinde ifade edilir.

3.2 Teğetsel ve Normal Bileşenlerle İlgili Özelikler

Teorem 3.2.1 E^n, n-boyutlu Riemann manifoldu ve M, k-boyutlu altmanifoldu olsun.

$$\begin{aligned} \overline{D} : \chi(M) \times \chi(M) &\to \chi(M) \\ (X,Y) &\to \overline{D}_X Y = teg(D_X Y) \end{aligned}$$

şeklinde tanımlı $\overline{D}$ fonksiyonu M' nin Riemann koneksiyonudur (Hacısalihoğlu 2004).

İspat: $\overline{D}$ fonksiyonunun Riemann koneksiyon şartlarını sağladığını gösterelim.

1) $\forall X, Y, Z \in \chi(M)$ için $\overline{D}_X (Y+Z) = \overline{D}_X Y + \overline{D}_X Z$ olduğu gösterilecektir.

$\overline{D}_X(Y+Z) = teg(D_X(Y+Z))$

$= teg(D_X Y + D_X Z)$ (D, E^n nin Riemann koneksiyonu olduğundan)

$= teg(D_X Y) + teg(D_X Z)$ (teg fonksiyonu lineer olduğundan)

$= \overline{D}_X Y + \overline{D}_X Z$

2) $\forall X, Y, Z \in \chi(\overline{M})$ için $\overline{D}_{X+Y} Z = \overline{D}_X Z + \overline{D}_Y Z$ olduğu gösterilecektir.

$\overline{D}_{X+Y} Z = teg(D_{X+Y} Z)$

$= teg(D_X Z + D_Y Z)$ (D, E^n nin Riemann koneksiyonu olduğundan)

$= teg(D_X Z) + teg(D_Y Z)$ (teg fonksiyonu lineer olduğundan)

$= \overline{D}_X Z + \overline{D}_Y Z$

3) $\forall X, Y \in \chi(M)$ ve $\forall f \in C^\infty(M, R)$ için $\overline{D}_{fX} Y = f\overline{D}_X Y$ olduğu gösterilecektir.

$\overline{D}_{fX} Y = teg(D_{fX} Y)$

$= teg(fD_X Y)$ (D, E^n nin Riemann koneksiyonu olduğundan)

$= fteg(D_X Y)$

$= f\overline{D}_X Y$

4) $\forall X, Y \in \chi(M)$ ve $\forall f \in C^\infty(M, R)$ için $\overline{D}_X fY = X[f]Y + f\overline{D}_X Y$ olduğu gösterilecektir.

$\overline{D}_X fY = teg(D_X fY)$

$= teg(X[f]Y + fD_X Y)$ (D, E^n nin Riemann koneksiyonu olduğundan)

$= teg(X[f]Y) + teg(fD_X Y)$ (teg fonksiyonu lineer olduğundan)

$= X[f]tegY + fteg(D_X Y)$

$= X[f]Y + f\overline{D}_X Y$

5) $\forall X, Y \in \chi(M)$ için $\overline{D}_X Y - \overline{D}_Y X = [X, Y]$ olduğu gösterilecektir.

$\overline{D}_X Y - \overline{D}_Y X = teg(D_X Y) - teg(D_Y X)$

$= teg(D_X Y - D_Y X)$ (teg fonksiyonu lineer olduğundan)

$= teg([X, Y])$ (D, E^n nin Riemann koneksiyonu olduğundan)

$= [X, Y]$

6) $\forall X,Y,Z\in \chi(M)$ için $X\left[\langle Y,Z\rangle\right]=\langle \overline{D}_X Y,Z\rangle+\langle Y,\overline{D}_X Z\rangle$ olduğunu gösterilecektir.

$X\left[\langle Y,Z\rangle\right]=\langle D_X Y,Z\rangle+\langle Y,D_X Z\rangle$ (D, E^n nin Riemann koneksiyonu olduğundan)

$$=\langle \overline{D}_X Y+V(X,Y),Z\rangle+\langle Y,\overline{D}_X Z+V(X,Z)\rangle$$

$$=\langle \overline{D}_X Y,Z\rangle+\langle V(X,Y),Z\rangle+\langle Y,\overline{D}_X Z\rangle+\langle Y,V(X,Z)\rangle$$

$V(X,Y)\in \chi(M)^{\perp}$ ve $Z\in \chi(M)$ olduğundan $\langle V(X,Y),Z\rangle=0$

$V(X,Z)\in \chi(M)^{\perp}$ ve $\mathrm{Y}\in \chi(M)$ olduğundan $\langle Y,V(X,Z)\rangle=0$ dır.

O halde $X\left[\langle Y,Z\rangle\right]=\langle \overline{D}_X Y,Z\rangle+\langle Y,\overline{D}_X Z\rangle$ elde edilir.

Riemann koneksiyon şartları sağlandığından $\overline{D}$ Riemann koneksiyonudur.

Teorem 3.2.2 E^n, n-boyutlu Riemann manifoldu ve M, k-boyutlu altmanifoldu olmak üzere E^n nin koneksiyonu D ve M nin koneksiyonu $\overline{D}$ olsun.

$$\begin{aligned} \mathrm{V}:\ &\chi(M)\times\chi(M)\to\chi(M)^{\perp} \\ &(X,Y)\quad\to\quad \mathrm{V(X,Y)}=D_X Y-\overline{D}_X Y \end{aligned}$$

fonksiyonu $\chi(M)^{\perp}$ değerli, simetrik ve 2-kovaryant tensördür (Hacısalihoğlu 2004).

İspat: a) Değer kümesinden $\chi(M)^{\perp}$ değerli olduğu aşikardır.

b) $\forall X,Y\in \chi(M)$ için $V(X,Y)=V(Y,X)$ olduğu gösterilecektir.(simetrik)

$$V(X,Y)-V(Y,X)=(D_X Y-\overline{D}_X Y)-(D_Y X-\overline{D}_Y X)$$

$$=(D_X Y-D_Y X)-(\overline{D}_X Y-\overline{D}_Y X)$$

$$=\left[X,Y\right]-\left[X,Y\right]$$ (D ve $\overline{D}$ Riemann koneksiyonu olduğundan)

$=0$

O halde $V(X,Y)=V(Y,X)$ dir.

c) V fonksiyonunun tanım bölgesi $\chi(M)\times\chi(M)=\chi(M)^2$ olduğundan mertebesi 2'dir ve 2-kovaryanttır (Hacısalihoğlu ve Ekmekçi 2003).

V'nin 2-lineer olduğunu göstermek yeterlidir.

$\forall X,Y,Z\in \chi(M)$ ve $\forall f,g\in C^{\infty}(M,R)$ için $V(fX+gY,Z)=fV(X,Z)+gV(Y,Z)$ olduğu gösterilecektir.

$$V(fX+gY,Z)=D_{fX+gY}Z-\overline{D}_{fX+gY}Z$$
$$=D_{fX}Z+D_{gY}Z-\overline{D}_{fX}Z-\overline{D}_{gY}Z$$
$$=fD_XZ+gD_YZ-f\overline{D}_XZ-g\overline{D}_YZ$$
$$=f(D_XZ-\overline{D}_XZ)+g(D_YZ-\overline{D}_YZ)$$
$$=fV(X,Z)+gV(Y,Z)$$

V fonksiyonu birinci yere göre lineerdir.Simetrik olduğundan ikinci yere göre de lineerdir.O halde V, 2-lineerdir.

Tanım 3.2.1 $\forall X,Y\in\chi(M)$ için

$$\mathrm{V}:\chi(M)\times\chi(M)\rightarrow\chi(M)^{\perp}$$
$$(X,Y)\quad\rightarrow\quad \mathrm{V(X,Y)}=D_XY-\overline{D}_XY$$

$\chi(M)^{\perp}$ değerli, simetrik, 2-kovaryant tensöre M nin **ikinci temel tensörü** veya **genelleştirilmiş Weingarten dönüşümü** denir (Hicks 1974).

Tanım 3.2.2 E^n, n-boyutlu Riemann manifoldu ve E^n nin k-boyutlu altmanifoldu M olsun.

$\chi(M)^{\perp}$ in $\Psi=\{N_1,N_2,...,N_{n-k}\}$ ortonormal bazı yardımıyla tanımlanan $\forall X,Y\in\chi(M)$ için

$$B_i(X,Y)=\langle V(X,Y),N_i\rangle \quad ;1\le i\le n-k \quad , \quad V(X,Y)=\sum_{i=1}^{n-k}B_i(X,Y)N_i$$

bilineer formlarına M nin Ψ 'ye göre **ikinci temel formları** denir(Hacısalihoğlu 2004).

Tanım 3.2.3 $\forall X\in\chi(M)$ ve $N_i\in\Psi$ $(1\le i\le n-k)$ için

$$S_i:\chi(M)\rightarrow\chi(M)$$
$$X\quad\rightarrow S_i(X)=tegD_XN_i=\overline{D}_XN_i$$

şeklinde tanımlı fonksiyona, M'nin Ψ 'ye göre **i-yinci Weingarten dönüşümü** denir (Hacısalihoğlu 2004).

Teorem 3.2.3 E^n, n-boyutlu Riemann manifoldu ve E^n nin k-boyutlu altmanifoldu M olsun.

M'nin ikinci temel tensörü V ve $\chi(M)^{\perp}$ in ortonormal bazı $\{N_1, N_2, ..., N_{n-k}\}$ olmak üzere;

$$B_i : \chi(M)\times\chi(M) \to C^{\infty}(M,R)$$
$$(X,Y) \to B_i(X,Y) = \langle V(X,Y), N_i\rangle$$

şeklindeki B_i fonsiyonları $\chi(M)$ üzerinde bilineer formdurlar (Hacısalihoğlu 2004).

İspat: B_i fonksiyonlarının bilineer ve simetrik olduklarını göstermek yeterlidir.

$\forall X, Y, Z \in \chi(M)$ ve $\forall f, g \in C^{\infty}(M,R)$ için $B_i(fX + gY, Z) = fB_i(X,Z) + gB_i(Y,Z)$ olduğu gösterilecektir.

$$\begin{aligned} B_i(fX + gY, Z) &= \langle V(fX + gY, Z), N_i\rangle \\ &= \langle fV(X,Z) + gV(Y,Z), N_i\rangle \\ &= f\langle V(X,Z), N_i\rangle + g\langle V(Y,Z), N_i\rangle \\ &= fB_i(X,Z) + gB_i(Y,Z) \end{aligned}$$

Aynı şekilde ikinci yere göre de lineer olduğundan B_i ler bilineerdir.

$\forall X, Y \in \chi(M)$ için $B_i(X,Y) = B_i(Y,X)$ olduğu gösterilecektir.

$$\begin{aligned} B_i(X,Y) &= \langle V(X,Y), N_i\rangle \\ &= \langle V(Y,X), N_i\rangle \quad \text{(V, simetrik olduğundan)} \\ &= B_i(Y,X) \end{aligned}$$

O halde simetriktir.

Teorem 3.2.4 E^n, n-boyutlu Riemann manifoldu ve E^n nin k-boyutlu altmanifoldu M olsun.

M'nin i-yinci Weingarten dönüşümü S_i ve ikinci temel formları B_i ise;

1) $\forall X, Y \in \chi(M)$ için $B_i(X,Y) = -\langle S_i(X), Y\rangle$ dir.

2) $\forall X, Y \in \chi(M)$ için $V(X,Y) = -\sum_{i=1}^{n-k}\langle S_i(X), Y\rangle N_i$ dir.

(Hacısalihoğlu 2004).

İspat: 1) $\forall X, Y \in \chi(M)$ için;

$$B_i(X,Y) = \langle V(X,Y), N_i \rangle$$

$$= \langle D_X Y - \overline{D}_X Y, N_i \rangle$$

$$= \langle D_X Y, N_i \rangle - \underbrace{\langle \overline{D}_X Y, N_i \rangle}_{0} \qquad ; \ \overline{D}_X Y \in \chi(M) \text{ ve } N_i \in \chi(\mathrm{M})^{\perp}$$

$$= X(\underbrace{\langle Y, N_i \rangle}_{0}) - \langle Y, D_X N_i \rangle \qquad ; \ Y \in \chi(M) \text{ ve } N_i \in \chi(M)^{\perp}$$

$$= -\langle Y, D_X N_i \rangle$$

$$= -\langle Y, tegD_X N_i + norD_X N_i \rangle$$

$$= -\langle Y, tegD_X N_i \rangle - \underbrace{\langle Y, norD_X N_i \rangle}_{0}$$

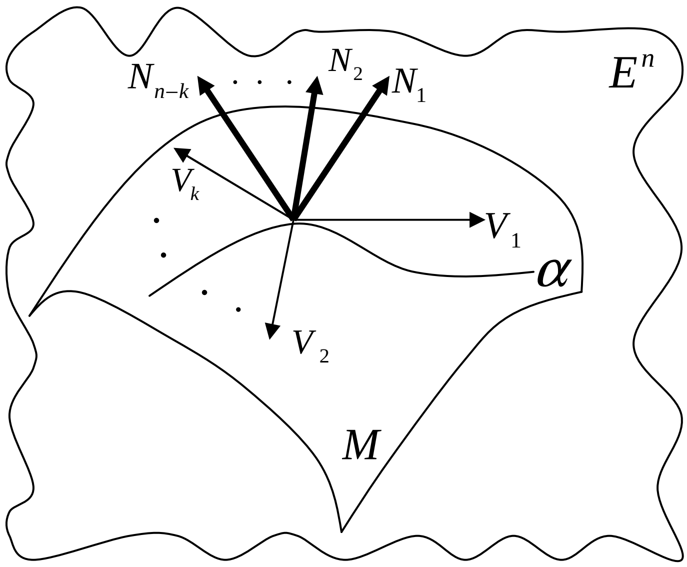
$$= -\langle Y, S_i(X) \rangle$$

2) $V(X,Y) = \sum_{i=1}^{n-k} B_i(X,Y) N_i$ olduğu biliniyor.

Burada $B_i(X,Y) = -\langle S_i(X), Y \rangle$ eşitliği kullanılarak $V(X,Y) = -\sum_{i=1}^{n-k} \langle S_i(X), Y \rangle N_i$ elde edilir.

4. k-BOYUTLU ALTMANİFOLD ÜZERİNDEKİ BİR EĞRİNİN FRENET VEKTÖR ALANLARININ KÜRESEL GÖSTERGELERİNİN EĞRİLİKLERİ

E^n, n-boyutlu Riemann manifoldu ve E^n nin k-boyutlu $(k < n-1)$ altmanifoldu M olsun. M üzerindeki bir eğrinin $\{V_1, V_2, ..., V_k\}$ Frenet vektör alanlarının küresel göstergelerinin geodezik eğrilikleri hesaplanacaktır.



Şekil 4.1 E^n in k-boyutlu altmanifoldu üzerindeki eğrinin Frenet vektör alanları ve birim normal vektör alanları

Frenet vektör alanlarının küresel göstergeleri E^n de ve birim hiperküre (S^k) üzerinde oluştuğundan, E^n e ve S^k ya göre geodezik eğrilikler hesaplanacaktır.

4.1 Küresel Göstegelerin E^n e göre Geodezik Eğrilikleri

4.1.1 (V_1) in E^n e geodezik eğriliği

(V_1) in yay parametresi s_{V_1}, birim teğet vektörü T_{V_1} olsun. (V_1) in E^n e göre geodezik eğriliği k_{V_1} olmak üzere;

$$k_{V_1} = \left\| D_{T_{V_1}} T_{V_1} \right\|$$

dir.

α eğrisinin yay parametresi s ve birim teğet vektörü $\overrightarrow{V_1}$ olmak üzere (V_1) in denklemi

$$\alpha_{V_1}\left(s_{V_1}\right) = V_1(s)$$

dir.

Bu denklemde her iki tarafın türevi alalım:

$$\frac{d\alpha_{V_1}}{ds_{V_1}} = \frac{dV_1}{ds_{V_1}}$$

$$\frac{d\alpha_{V_1}}{ds_{V_1}} = \frac{dV_1}{ds} \cdot \frac{ds}{ds_{V_1}}$$

olur. Her iki tarafın normu alınırsa;

$$\left\| \frac{d\alpha_{V_1}}{ds_{V_1}} \right\| = \left\| V_1' \right\| \cdot \left| \frac{ds}{ds_{V_1}} \right| \qquad ; \quad \left\| \frac{d\alpha_{V_1}}{ds_{V_1}} \right\| = 1$$

olur. Burada Frenet formülü $\left(V_1' = k_1 \cdot V_2\right)$ kullanılarak

$$\frac{ds}{ds_{V_1}} = \frac{1}{k_1}$$

elde edilir.

Bu değer $\frac{d\alpha_{V_1}}{ds_{V_1}} = k_1 V_2 \cdot \frac{ds}{ds_{V_1}}$ eşitliğinde yerine yazılırsa;

$$T_{V_1} = V_2$$

bulunur.

$$D_{T_{V_1}} T_{V_1} = \frac{dT_{V_1}}{ds_{V_1}}$$

$$D_{T_{V_1}} T_{V_1} = \frac{dT_{V_1}}{ds} \cdot \frac{ds}{ds_{V_1}}$$

$$D_{T_{V_1}} T_{V_1} = \frac{dV_2}{ds} \cdot \frac{ds}{ds_{V_1}}$$

$$D_{T_{V_1}} T_{V_1} = \left(-k_1 V_1 + k_2 V_3\right) \cdot \frac{1}{k_1}$$

$$D_{T_{V_1}} T_{V_1} = -V_1 + \frac{k_2}{k_1} V_3$$

olur. Buradan norm alınırsa, (V_1) in E^n e göre geodezik eğriliği için;

$$k_{V_1} = \left\| D_{T_{V_1}} T_{V_1} \right\| = \sqrt{1^2 + \left(\frac{k_2}{k_1}\right)^2}$$

elde edilir.

4.1.2 (V_2) **nin** E^n **e göre geodezik eğriliği**

(V_2) nin yay parametresi s_{V_2}, birim teğet vektörü T_{V_2} olsun. (V_2) nin E^n e göre geodezik eğriliği k_{V_2} olmak üzere;

$$k_{V_2} = \left\| D_{T_{V_2}} T_{V_2} \right\|$$

dir.

α eğrisinin yay parametresi s ve birim teğet vektörü $\overrightarrow{V_2}$ olmak üzere (V_2) nin denklemi

$$\alpha_{V_2}\left(s_{V_2}\right) = V_2\left(s\right)$$

dir.

Bu denklemde her iki tarafın türevi alalım:

$$\frac{d\alpha_{V_2}}{ds_{V_2}} = \frac{dV_2}{ds_{V_2}}$$

$$\frac{d\alpha_{V_2}}{ds_{V_2}} = \frac{dV_2}{ds} \cdot \frac{ds}{ds_{V_2}}$$

olur. Her iki tarafın normu alınırsa;

$$\left\| \frac{d\alpha_{V_2}}{ds_{V_2}} \right\| = \left\| V_2' \right\| \cdot \left| \frac{ds}{ds_{V_2}} \right| \qquad ; \quad \left\| \frac{d\alpha_{V_2}}{ds_{V_2}} \right\| = 1$$

olur. Burada Frenet formülü $\left(V_2' = -k_1 \cdot V_1 + k_2 V_3 \right)$ kullanılarak

$$\frac{ds}{ds_{V_2}} = \frac{1}{\sqrt{k_1^{\,2} + k_2^{\,2}}}$$

elde edilir.

Bu değer $\frac{d\alpha_{V_2}}{ds_{V_2}} = \left(-k_1 V_1 + k_2 V_3\right) \cdot \frac{ds}{ds_{V_2}}$ eşitliğinde yerine yazılırsa;

$$T_{V_2} = -\frac{k_1}{\sqrt{k_1^{\,2} + k_2^{\,2}}} V_1 + \frac{k_2}{\sqrt{k_1^{\,2} + k_2^{\,2}}} V_3$$

bulunur.

$$D_{T_{V_2}} T_{V_2} = \frac{dT_{V_2}}{ds_{V_2}}$$

$$D_{T_{V_2}} T_{V_2} = \frac{dT_{V_2}}{ds} \cdot \frac{ds}{ds_{V_2}}$$

$$D_{T_{V_2}} T_{V_2} = \frac{d}{ds} \left(-\frac{k_1}{\sqrt{k_1^{\,2} + k_2^{\,2}}} V_1 + \frac{k_2}{\sqrt{k_1^{\,2} + k_2^{\,2}}} V_3 \right) \cdot \frac{1}{\sqrt{k_1^{\,2} + k_2^{\,2}}}$$

$-\frac{k_1}{\sqrt{k_1^{\,2} + k_2^{\,2}}} = x \quad , \quad \frac{k_2}{\sqrt{k_1^{\,2} + k_2^{\,2}}} = y$ diyelim.

$$D_{T_{V_2}} T_{V_2} = \left(x'V_1 + y'V_3 + xV_1' + yV_3' \right) \cdot \frac{1}{\sqrt{{k_1}^2 + {k_2}^2}}$$

$$= \left(x'V_1 + y'V_3 + x\left(k_1V_2\right) + y\left(-k_2V_2 + k_3V_4\right) \right) \cdot \frac{1}{\sqrt{{k_1}^2 + {k_2}^2}}$$

$$= \left(x'V_1 + \left(k_1x - k_2y\right)V_2 + y'V_3 + k_3yV_4 \right) \cdot \frac{1}{\sqrt{{k_1}^2 + {k_2}^2}}$$

olur. Buradan norm alınırsa, (V_2) nin E^n e göre geodezik eğriliği için;

$$k_{V_2} = \left\| D_{T_{V_2}} T_{V_2} \right\| = \frac{1}{\sqrt{{k_1}^2 + {k_2}^2}} \cdot \sqrt{\left(x'\right)^2 + \left(k_1x - k_2y\right)^2 + \left(y'\right)^2 + {k_3}^2 y^2}$$

elde edilir.

4.1.3 (V_3) ün E^n e göre geodezik eğriliği

(V_3) ün yay parametresi s_{V_3}, birim teğet vektörü T_{V_3} olsun. (V_3) ün E^n e göre geodezik eğriliği k_{V_3} olmak üzere;

$$k_{V_3} = \left\| D_{T_{V_3}} T_{V_3} \right\|$$

dir.

α eğrisinin yay parametresi s ve birim teğet vektörü $\overrightarrow{V_3}$ olmak üzere (V_3) ün denklemi

$$\alpha_{V_3}\left(s_{V_3}\right) = V_3\left(s\right)$$

dir.

Bu denklemde her iki tarafın türevi alalım:

$$\frac{d\alpha_{V_3}}{ds_{V_3}} = \frac{dV_3}{ds_{V_3}}$$

$$\frac{d\alpha_{V_3}}{ds_{V_3}} = \frac{dV_3}{ds} \cdot \frac{ds}{ds_{V_3}}$$

olur. Her iki tarafın normu alınırsa;

$$\left\| \frac{d\alpha_{V_3}}{ds_{V_3}} \right\| = \left\| V_3' \right\| \cdot \left| \frac{ds}{ds_{V_3}} \right| \qquad ; \quad \left\| \frac{d\alpha_{V_3}}{ds_{V_3}} \right\| = 1$$

olur. Burada Frenet formülü $\left(V_3' = -k_2 \cdot V_2 + k_3 V_4 \right)$ kullanılarak

$$\frac{ds}{ds_{V_3}} = \frac{1}{\sqrt{k_2^{\,2} + k_3^{\,2}}}$$

elde edilir.

Bu değer $\frac{d\alpha_{V_3}}{ds_{V_3}} = \left(-k_2 V_2 + k_3 V_4 \right) \cdot \frac{ds}{ds_{V_3}}$ eşitliğinde yerine yazılırsa;

$$T_{V_3} = -\frac{k_2}{\sqrt{k_2^{\,2} + k_3^{\,2}}} V_2 + \frac{k_3}{\sqrt{k_2^{\,2} + k_3^{\,2}}} V_4$$

bulunur.

$$D_{T_{V_3}} T_{V_3} = \frac{dT_{V_3}}{ds_{V_3}}$$

$$D_{T_{V_3}} T_{V_3} = \frac{dT_{V_3}}{ds} \cdot \frac{ds}{ds_{V_3}}$$

$$D_{T_{V_3}} T_{V_3} = \frac{d}{ds} \left(-\frac{k_2}{\sqrt{k_2^{\,2} + k_3^{\,2}}} V_2 + \frac{k_3}{\sqrt{k_2^{\,2} + k_3^{\,2}}} V_4 \right) \cdot \frac{1}{\sqrt{k_2^{\,2} + k_3^{\,2}}}$$

$-\frac{k_2}{\sqrt{k_2^{\,2} + k_3^{\,2}}} = z \quad , \quad \frac{k_3}{\sqrt{k_2^{\,2} + k_3^{\,2}}} = w$ diyelim.

$$D_{T_{V_3}} T_{V_3} = \left(z'V_2 + w'V_4 + zV_2' + wV_4' \right) \cdot \frac{1}{\sqrt{k_2^{\ 2} + k_3^{\ 2}}}$$

$$= \left(z'V_2 + w'V_4 + z\left(-k_1V_1 + k_2V_3\right) + w\left(-k_3V_3 + k_4V_5\right)\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{k_2^{\ 2} + k_3^{\ 2}}}$$

$$= \left(-k_1 zV_1 + z'V_2 + \left(k_2 z - k_3 w\right)V_3 + w'V_4 + k_4 wV_5 \right) \cdot \frac{1}{\sqrt{k_2^{\ 2} + k_3^{\ 2}}}$$

olur. Buradan norm alınırsa, (V_3) ün E^n e göre geodezik eğriliği için;

$$k_{V_3} = \left\| D_{T_{V_3}} T_{V_3} \right\| = \frac{1}{\sqrt{k_2^{\ 2} + k_3^{\ 2}}} \cdot \sqrt{k_1^{\ 2} z^2 + \left(z'\right)^2 + \left(k_2 z - k_3 w\right)^2 + \left(w'\right)^2 + k_4^{\ 2} w^2}$$

elde edilir.

4.1.4 (V_4) ün E^n e göre geodezik eğriliği

(V_4) ün yay parametresi s_{V_4}, birim teğet vektörü T_{V_4} olsun. (V_4) ün E^n e göre geodezik eğriliği k_{V_4} olmak üzere;

$$k_{V_4} = \left\| D_{T_{V_4}} T_{V_4} \right\|$$

dir.

α eğrisinin yay parametresi s ve birim teğet vektörü $\overrightarrow{V_4}$ olmak üzere (V_4) ün denklemi

$$\alpha_{V_4}\left(s_{V_4}\right) = V_4\left(s\right)$$

dir.

Bu denklemde her iki tarafın türevi alalım:

$$\frac{d\alpha_{V_4}}{ds_{V_4}} = \frac{dV_4}{ds_{V_4}}$$

$$\frac{d\alpha_{V_4}}{ds_{V_4}} = \frac{dV_4}{ds} \cdot \frac{ds}{ds_{V_4}}$$

olur. Her iki tarafın normu alınırsa;

$$\left\| \frac{d\alpha_{V_4}}{ds_{V_4}} \right\| = \left\| V_4' \right\| \cdot \left| \frac{ds}{ds_{V_4}} \right| \qquad ; \quad \left\| \frac{d\alpha_{V_4}}{ds_{V_4}} \right\| = 1$$

olur. Burada Frenet formülü $\left(V_4' = -k_3 \cdot V_3 + k_4 V_5 \right)$ kullanılarak

$$\frac{ds}{ds_{V_4}} = \frac{1}{\sqrt{k_3^{\,2} + k_4^{\,2}}}$$

elde edilir.

Bu değer $\frac{d\alpha_{V_4}}{ds_{V_4}} = \left(-k_3 V_3 + k_4 V_5 \right) \cdot \frac{ds}{ds_{V_4}}$ eşitliğinde yerine yazılırsa;

$$T_{V_4} = -\frac{k_3}{\sqrt{k_3^{\,2} + k_4^{\,2}}} V_3 + \frac{k_4}{\sqrt{k_3^{\,2} + k_4^{\,2}}} V_5$$

bulunur.

$$D_{T_{V_4}} T_{V_4} = \frac{dT_{V_4}}{ds_{V_4}}$$

$$D_{T_{V_4}} T_{V_4} = \frac{dT_{V_4}}{ds} \cdot \frac{ds}{ds_{V_4}}$$

$$D_{T_{V_4}} T_{V_4} = \frac{d}{ds} \left(-\frac{k_3}{\sqrt{k_3^{\,2} + k_4^{\,2}}} V_3 + \frac{k_4}{\sqrt{k_3^{\,2} + k_4^{\,2}}} V_5 \right) \cdot \frac{1}{\sqrt{k_3^{\,2} + k_4^{\,2}}}$$

$-\frac{k_3}{\sqrt{k_3^{\,2} + k_4^{\,2}}} = \mathrm{f}$, $\frac{k_4}{\sqrt{k_3^{\,2} + k_4^{\,2}}} = \mathrm{g}$ diyelim.

$$D_{T_{V_4}} T_{V_4} = \left(f'V_3 + g'V_5 + fV_3' + gV_5' \right) \cdot \frac{1}{\sqrt{k_3^{\,2} + k_4^{\,2}}}$$

$$= \left(f'V_3 + g'V_5 + f\left(-k_2V_2 + k_3V_4\right) + g\left(-k_4V_4 + k_5V_6\right)\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{k_3^{\,2} + k_4^{\,2}}}$$

$$= \left(-k_2 fV_2 + f'V_3 + \left(k_3 f - k_4 g\right)V_4 + g'V_5 + k_5 gV_6\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{k_3^{\,2} + k_4^{\,2}}}$$

olur. Buradan norm alınırsa, (V_4) ün E^n e göre geodezik eğriliği için;

$$k_{V_4} = \left\| D_{T_{V_4}} T_{V_4} \right\| = \frac{1}{\sqrt{k_3^{\,2} + k_4^{\,2}}} \cdot \sqrt{k_2^{\,2} f^{\,2} + \left(f'\right)^2 + \left(k_3 f - k_4 g\right)^2 + \left(g'\right)^2 + k_5^{\,2} g^{\,2}}$$

elde edilir.

$\vdots$

4.1.k (V_k) nın E^n e göre geodezik eğriliği

(V_k) nın yay parametresi s_{V_k} , birim teğet vektörü T_{V_k} olsun. (V_k) nın E^n e göre geodezik eğriliği k_{V_k} olmak üzere;

$$k_{V_k} = \left\| D_{T_{V_k}} T_{V_k} \right\|$$

dir.

α eğrisinin yay parametresi s ve birim teğet vektörü $\overrightarrow{V_k}$ olmak üzere (V_k) nın denklemi $\alpha_{V_k}\left(s_{V_k}\right) = V_k\left(s\right)$

dir.

Bu denklemde her iki tarafın türevi alalım:

$$\frac{d\alpha_{V_k}}{ds_{V_k}} = \frac{dV_k}{ds_{V_k}}$$

$$\frac{d\alpha_{V_k}}{ds_{V_k}} = \frac{dV_k}{ds} \cdot \frac{ds}{ds_{V_k}}$$

olur. Her iki tarafın normu alınırsa;

$$\left\| \frac{d\alpha_{V_k}}{ds_{V_k}} \right\| = \left\| V_k{}' \right\| \cdot \left| \frac{ds}{ds_{V_k}} \right| \qquad ; \quad \left\| \frac{d\alpha_{V_k}}{ds_{V_k}} \right\| = 1$$

olur. Burada Frenet formülü $\left(V_k{}' = -k_{k-1} \cdot V_{k-1}\right)$ kullanılarak

$$\frac{ds}{ds_{V_k}} = \frac{1}{k_k}$$

elde edilir.

Bu değer $\frac{d\alpha_{V_k}}{ds_{V_k}} = \left(-k_{k-1}V_{k-1}\right) \cdot \frac{ds}{ds_{V_k}}$ eşitliğinde yerine yazılırsa;

$$T_{V_k} = -V_{k-1}$$

bulunur.

$$D_{T_{V_k}} T_{V_k} = \frac{dT_{V_k}}{ds_{V_k}}$$

$$D_{T_{V_k}} T_{V_k} = \frac{dT_{V_k}}{ds} \cdot \frac{ds}{ds_{V_k}}$$

$$\begin{aligned} D_{T_{V_k}} T_{V_k} &= -\frac{dV_{k-1}}{ds} \cdot \frac{1}{k_{k-1}} \\ &= -\left(-k_{k-2}V_{k-2} + k_{k-1}V_k\right) \cdot \frac{1}{k_{k-1}} \\ &= \frac{k_{k-2}}{k_{k-1}} V_{k-2} - V_k \end{aligned}$$

olur. Buradan norm alınırsa, (V_k) nın E^n e göre geodezik eğriliği için;

$$k_{V_k} = \left\| D_{T_{V_k}} T_{V_k} \right\| = \frac{1}{k_{k-1}} \cdot \sqrt{\left(k_{k-2}\right)^2 + \left(k_{k-1}\right)^2}$$

elde edilir.

Sonuç 4.1 E^n in k-boyutlu altmanifoldu M üzerindeki Frenet vektör alanlarının küresel göstergelerinin E^n e göre geodezik eğrilikleri için genelleme yapalırsa, (V_j) nin geodezik eğriliği k_{V_j} ile ifade edilirse;

$$\lambda = -\frac{k_{j-1}}{\sqrt{k_{j-1}{}^2 + k_j{}^2}} \quad , \quad \ell = \frac{k_j}{\sqrt{k_{j-1}{}^2 + k_j{}^2}} \quad \text{olmak üzere}$$

$j=1$ için

$$k_{V_1} = \sqrt{1^2 + \frac{k_2}{k_1}^{2}}$$

$j=2$ için

$$k_{V_2} = \frac{1}{\sqrt{k_1{}^2 + k_2{}^2}} \cdot \sqrt{\left(\lambda'\right)^2 + \left(k_1\lambda - k_2\ell\right)^2 + \left(\ell'\right)^2 + k_3{}^2\ell^2}$$

$3 \leq j \leq k-2$ için

$$k_{V_j} = \frac{1}{\sqrt{k_{j-1}{}^2 + k_j{}^2}} \cdot \sqrt{k_{j-2}{}^2\lambda^2 + \lambda'^2 + \left(k_{j-1}\lambda - k_j\ell\right)^2 + \ell'^2 + k_{j+1}{}^2\ell^2}$$

$j = k-1$ için

$$k_{V_{k-1}} = \frac{1}{\sqrt{k_{k-2}{}^2 + k_{k-1}{}^2}} \cdot \sqrt{k_{k-3}{}^2\lambda^2 + \lambda'^2 + \left(k_{k-2}\lambda - k_{k-1}\ell\right)^2 + \ell'^2}$$

$j=k$ için

$$k_{V_k}=\frac{1}{k_{k-1}}\cdot\sqrt{\left(k_{k-2}\right)^2+\left(k_{k-1}\right)^2}$$

olur.

İspat: $j=3$ için

$$k_{V_3}=\frac{1}{\sqrt{k_2{}^2+k_3{}^2}}\cdot\sqrt{k_1{}^2\eta^2+\left(\eta'\right)^2+\left(k_2\eta-k_3\mu\right)^2+\left(\mu'\right)^2+k_4{}^2\mu^2}$$

doğrudur.

$j=p$ için doğru olsun.

$$k_{V_p}=\frac{1}{\sqrt{k_{p-1}{}^2+k_p{}^2}}\cdot\sqrt{k_{p-2}{}^2\eta^2+\left(\eta'\right)^2+\left(k_{p-1}\eta-k_p\mu\right)^2+\left(\mu'\right)^2+k_{p+1}{}^2\mu^2}$$

olur.

$j=p+1$ için doğru mudur?

$$k_{V_{p+1}}=\frac{1}{\sqrt{k_p{}^2+k_{p+1}{}^2}}\cdot\sqrt{k_{p-1}{}^2\eta^2+\left(\eta'\right)^2+\left(k_p\eta-k_{p+1}\mu\right)^2+\left(\mu'\right)^2+k_{p+2}{}^2\mu^2}$$

bulunmalıdır.

(V_{p+1}) in yay parametresi $s_{V_{p+1}}$, birim teğet vektörü $T_{V_{p+1}}$ olsun. (V_{p+1}) in E^n e göre geodezik eğriliği $k_{V_{p+1}}$ olmak üzere;

$$k_{v_{p+1}}=\left\|D_{T_{V_{p+1}}}T_{V_{p+1}}\right\|$$

dir.

α eğrisinin yay parametresi s ve birim teğet vektörü $\overrightarrow{V_{p+1}}$ olmak üzere (V_{p+1}) in denklemi $\alpha_{V_{p+1}}\left(s_{V_{p+1}}\right)=V_{p+1}\left(s\right)$

dir.

Bu denklemde her iki tarafın türevi alalım:

$$\frac{d\alpha_{V_{p+1}}}{ds_{V_{p+1}}} = \frac{dV_{p+1}}{ds_{V_{p+1}}}$$

$$\frac{d\alpha_{V_{p+1}}}{ds_{V_{p+1}}} = \frac{dV_{p+1}}{ds} \cdot \frac{ds}{ds_{V_{p+1}}}$$

olur. Her iki tarafın normu alınırsa;

$$\left\| \frac{d\alpha_{V_{p+1}}}{ds_{V_{p+1}}} \right\| = \left\| V_{p+1}{}' \right\| \cdot \left| \frac{ds}{ds_{V_{p+1}}} \right| \qquad ; \quad \left\| \frac{d\alpha_{V_{p+1}}}{ds_{V_{p+1}}} \right\| = 1$$

olur. Burada Frenet formülü $\left(V_{p+1}{}' = -k_p \cdot V_p + k_{p+1} V_{p+2} \right)$ kullanılarak

$$\frac{ds}{ds_{V_{p+1}}} = \frac{1}{\sqrt{k_p{}^2 + k_{p+1}{}^2}}$$

elde edilir.

Bu değer $\dfrac{d\alpha_{V_{p+1}}}{ds_{V_{p+1}}} = \left(-k_p V_p + k_{p+1} V_{p+2} \right) \cdot \dfrac{ds}{ds_{V_{p+1}}}$ eşitliğinde yerine yazılırsa;

$$T_{V_{p+1}} = -\frac{k_p}{\sqrt{k_p{}^2 + k_{p+1}{}^2}} V_p + \frac{k_{p+1}}{\sqrt{k_p{}^2 + k_{p+1}{}^2}} V_{p+2}$$

bulunur.

$$D_{T_{V_{p+1}}} T_{V_{p+1}} = \frac{dT_{V_{p+1}}}{ds_{V_{p+1}}}$$

$$D_{T_{V_{p+1}}} T_{V_{p+1}} = \frac{dT_{V_{p+1}}}{ds} \cdot \frac{ds}{ds_{V_{p+1}}}$$

$$D_{T_{V_{p+1}}} T_{V_{p+1}} = \frac{d}{ds} \left(-\frac{k_p}{\sqrt{k_p{}^2 + k_{p+1}{}^2}} V_p + \frac{k_{p+1}}{\sqrt{k_p{}^2 + k_{p+1}{}^2}} V_{p+2} \right) \cdot \frac{1}{\sqrt{k_p{}^2 + k_{p+1}{}^2}}$$

$$-\frac{k_p}{\sqrt{{k_p}^2+{k_{p+1}}^2}}=\eta \quad , \quad \frac{k_{p+1}}{\sqrt{{k_p}^2+{k_{p+1}}^2}}=\mu \quad \text{diyelim.}$$

$$D_{T_{V_{p+1}}} T_{V_{p+1}} = \left(\eta' V_p + \mu' V_{p+2} + \eta {V_p}' + \mu {V_{p+2}}'\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{{k_p}^2+{k_{p+1}}^2}}$$

$$= \left(\eta' V_p + \mu' V_{p+2} + \mu\left(-k_{p-1}V_{p-1} + k_p V_{p+1}\right) + \mu\left(-k_{p+1}V_{p+1} + k_{p+2}V_{p+3}\right)\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{{k_p}^2+{k_{p+1}}^2}}$$

$$= \left(-k_{p-1}\eta V_{p-1} + \eta' V_p + \left(k_p\eta - k_{p+1}\mu\right)V_{p+1} + \mu' V_{p+2} + k_{p+2}\mu V_{p+3}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{{k_p}^2+{k_{p+1}}^2}}$$

olur. Buradan norm alınırsa, (V_{p+1}) in E^n e göre geodezik eğriliği için;

$$k_{V_{p+1}} = \left\| D_{T_{V_{p+1}}} T_{V_{p+1}} \right\| = \frac{1}{\sqrt{{k_p}^2+{k_{p+1}}^2}} \cdot \sqrt{{k_{p-1}}^2\eta^2 + (\eta')^2 + \left(k_p\eta - k_{p+1}\mu\right)^2 + (\mu')^2 + {k_{p+2}}^2\mu^2}$$

elde edilir ve $j = p+1$ için de doğrudur.

4.2 Küresel Göstergelerin Birim Hiperküreye Göre Geodezik Eğrilikleri

S^k ya göre geodezik eğrilikler hesaplanırken genelleştirilmiş Gauss denkleminden yararlanılacaktır.

$D_X Y = \overline{D}_X Y + V(X,Y)$ genelleştirilmiş Gauss denkleminden

$\overline{D}_X Y = D_X Y - V(X,Y)$

olur.

Burada Teorem 3.2.4 ün 2) maddesinden $V(X,Y) = -\sum_{i=1}^{n-k} \langle S_i(X), Y\rangle N_i$ eşitliği kullanılarak;

$$\overline{D}_X Y = D_X Y + \sum_{i=1}^{n-k} \langle S_i(X), Y\rangle N_i \quad \ldots(*)$$

elde edilir.

$$
\begin{aligned}
S_i \quad : \quad & \chi(S^k) \to \chi(S^k) \\
& X \quad \to \quad S_i(X) = tegD_X N_i \qquad (1 \le i \le n-k)
\end{aligned}
$$

şeklinde tanımlı S_i lineer dönüşümünün matrisini bulalım.

$\chi(S^k) = Sp\{Y_1, Y_2, ..., Y_k\}$ ortonormal baz olsun.

$\forall X \in \chi(S^k)$ için $S_i(X) \in \chi(S^k)$ dır.

$$S_i(Y_1) = \sum_{r=1}^{k} a_{r1} Y_r \qquad ...\ (1)$$

$$S_i(Y_2) = \sum_{r=1}^{k} a_{r2} Y_r \qquad ...\ (2)$$

$$\vdots$$

$$S_i(Y_k) = \sum_{r=1}^{k} a_{rk} Y_r \qquad ...\ (k)$$

olur.

(1) eşitliğinin her iki tarafı sırasıyla $Y_1,\ Y_2, ..., Y_k$ ile çarpılırsa

$$\langle S_i(Y_1), Y_1 \rangle = a_{11}$$

$$\langle S_i(Y_1), Y_2 \rangle = a_{21}$$

$$\vdots$$

$$\langle S_i(Y_1), Y_k \rangle = a_{k1}$$

olur.

Teorem 3.2.4 ün 1) maddesinden $B_i(X, Y) = -\langle S_i(X), Y \rangle$ olduğu biliniyor.Bu eşitlikten yararlanarak;

$$a_{11} = -B_i(Y_1, Y_1)$$

$$a_{21} = -B_i(Y_1, Y_2)$$

$\vdots$

$a_{k1} = -B_i(Y_1, Y_k)$

elde edilir.

(2) eşitliğinin her iki tarafı sırasıyla $Y_1,\ Y_2, ..., Y_k$ ile çarpılırsa

$$\langle S_i(Y_2), Y_1\rangle = a_{12} \quad \Rightarrow \; a_{12} = -B_i(Y_2, Y_1)$$
$$\langle S_i(Y_2), Y_2\rangle = a_{22} \quad \Rightarrow \; a_{22} = -B_i(Y_2, Y_2)$$
$$\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots$$
$$\langle S_i(Y_2), Y_k\rangle = a_{k2} \quad \Rightarrow \; a_{k2} = -B_i(Y_2, Y_k)$$

elde edilir.

$\vdots$

(k) eşitliğinin her iki tarafı sırasıyla $Y_1,\ Y_2, ..., Y_k$ ile çarpılırsa

$$\langle S_i(Y_k), Y_1\rangle = a_{1k} \quad \Rightarrow \; a_{1k} = -B_i(Y_k, Y_1)$$
$$\langle S_i(Y_k), Y_2\rangle = a_{2k} \quad \Rightarrow \; a_{2k} = -B_i(Y_k, Y_2)$$
$$\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots$$
$$\langle S_i(Y_k), Y_k\rangle = a_{kk} \quad \Rightarrow \; a_{kk} = -B_i(Y_k, Y_k)$$

elde edilir.

B_i fonksiyonları simetrik olduğundan S_i lineer dönüşümünün matrisinin elemanları arasında şu eşitlikler vardır:

$$a_{21} = a_{12}\ ,\ a_{31} = a_{13}\ ,\dots,\ a_{k1} = a_{1k}$$
$$a_{32} = a_{23}\ ,\ a_{42} = a_{24}\ ,\dots,\ a_{k2} = a_{2k}$$
$$\vdots$$

O halde S_i lineer dönüşümüne karşılık gelen matris A_i olmak üzere;

$$A_i = \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1k} & a_{2k} & \dots & a_{kk} \end{matrix}$$

olur. Buradan

$$A_i = \begin{matrix} -B_i(Y_1,Y_1) & -B_i(Y_2,Y_1) & \dots & -B_i(Y_k,Y_1) \\ -B_i(Y_2,Y_1) & -B_i(Y_2,Y_2) & \dots & -B_i(Y_k,Y_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -B_i(Y_k,Y_1) & -B_i(Y_k,Y_2) & \dots & -B_i(Y_k,Y_k) \end{matrix}$$

elde edilir.

4.2.1 (V_1) in S^k ya göre geodezik eğriliği

(V_1) in birim hiperküreye göre geodezik eğriliği γ_{V_1} olmak üzere;

$\gamma_{V_1} = \left\| \overline{D}_{T_{V_1}} T_{V_1} \right\|$

dir.

$(*)$ eşitliği kullanılırsa; $\overline{D}_{T_{V_1}} T_{V_1} = D_{T_{V_1}} T_{V_1} + \sum_{i=1}^{n-k} \langle S_i(T_{V_1}), T_{V_1} \rangle N_i$ ifadesinin normu (V_1) in S^k ya göre geodezik eğriliğidir.

$$\begin{aligned} \overline{D}_{T_{V_1}} T_{V_1} &= D_{T_{V_1}} T_{V_1} + \sum_{i=1}^{n-k} \langle S_i(T_{V_1}), T_{V_1} \rangle N_i \\ &= D_{T_{V_1}} T_{V_1} + \langle S_1(T_{V_1}), T_{V_1} \rangle N_1 + \langle S_2(T_{V_1}), T_{V_1} \rangle N_2 + \dots + \langle S_{n-k}(T_{V_1}), T_{V_1} \rangle N_{n-k} \\ &= D_{T_{V_1}} T_{V_1} + \underbrace{\langle S_1(T_{V_1}), T_{V_1} \rangle}_{-B_1(T_{V_1}, T_{V_1})} V_1 + \underbrace{\langle S_2(T_{V_1}), T_{V_1} \rangle}_{-B_2(T_{V_1}, T_{V_1})} V_1 + \dots + \underbrace{\langle S_{n-k}(T_{V_1}), T_{V_1} \rangle}_{-B_{n-k}(T_{V_1}, T_{V_1})} V_1 \\ &= D_{T_{V_1}} T_{V_1} - B_1(T_{V_1}, T_{V_1}) V_1 - B_2(T_{V_1}, T_{V_1}) V_1 - \dots - B_{n-k}(T_{V_1}, T_{V_1}) V_1 \end{aligned}$$

olur. E^n e göre bulunan $D_{T_{V_1}} T_{V_1}$ değeri yerine yazılırsa;

$$\overline{D}_{T_{V_1}} T_{V_1} = -V_1 + \frac{k_2}{k_1} V_3 - \sum_{i=1}^{n-k} B_i (T_{V_1}, T_{V_1}) \; V_1$$
$$= (-\sum_{i=1}^{n-k} B_i (T_{V_1}, T_{V_1}) - 1) V_1 + \frac{k_2}{k_1} V_3$$

bulunur ve norm alınırsa;

$$\gamma_{V_1} = \left\| \overline{D}_{T_{V_1}} T_{V_1} \right\| = \sqrt{ \left(1 + \sum_{i=1}^{n-k} B_i (T_{V_1}, T_{V_1}) \right)^2 + \left(\frac{k_2}{k_1} \right)^2 }$$

elde edilir.

4.2.2 (V_2) nin S^k ya göre geodezik eğriliği

(V_2) nin birim hiperküreye göre geodezik eğriliği γ_{V_2} olmak üzere;

$$\gamma_{V_2} = \left\| \overline{D}_{T_{V_2}} T_{V_2} \right\|$$

dir.

$(*)$ eşitliği kullanılırsa; $\overline{D}_{T_{V_2}} T_{V_2} = D_{T_{V_2}} T_{V_2} + \sum_{i=1}^{n-k} \langle S_i (T_{V_2}), T_{V_2} \rangle N_i$ ifadesinin normu (V_2) nin S^{n-1} e göre geodezik eğriliğidir.

$$\overline{D}_{T_{V_2}} T_{V_2} = D_{T_{V_2}} T_{V_2} + \sum_{i=1}^{n-k} \langle S_i (T_{V_2}), T_{V_2} \rangle N_i$$
$$= D_{T_{V_2}} T_{V_2} + \langle S_1 (T_{V_2}), T_{V_2} \rangle N_1 + \langle S_2 (T_{V_2}), T_{V_2} \rangle N_2 + \ldots + \langle S_{n-k} (T_{V_2}), T_{V_2} \rangle N_{n-k}$$
$$= D_{T_{V_2}} T_{V_2} + \underbrace{\langle S_1 (T_{V_2}), T_{V_2} \rangle}_{-B_1 (T_{V_2}, T_{V_2})} V_2 + \underbrace{\langle S_2 (T_{V_2}), T_{V_2} \rangle}_{-B_2 (T_{V_2}, T_{V_2})} V_2 + \ldots + \underbrace{\langle S_{n-k} (T_{V_2}), T_{V_2} \rangle}_{-B_{n-k} (T_{V_2}, T_{V_2})} V_2$$
$$= D_{T_{V_2}} T_{V_2} - B_1 (T_{V_2}, T_{V_2}) V_2 - B_2 (T_{V_2}, T_{V_2}) V_2 - \ldots - B_{n-k} (T_{V_2}, T_{V_2}) V_2$$

$$= D_{T_{V_2}} T_{V_2} - \sum_{i=1}^{n-k} B_i(T_{V_2}, T_{V_2})\ V_2$$

olur. E^n e göre bulunan $D_{T_{V_2}} T_{V_2}$ değeri yerine yazılırsa;

$$x = -\frac{k_1}{\sqrt{k_1^2 + k_2^2}} \quad , \quad y = \frac{k_2}{\sqrt{k_1^2 + k_2^2}}$$

$$\overline{D}_{T_{V_2}} T_{V_2} = \frac{1}{\sqrt{k_1^2 + k_2^2}} \cdot \left(x' V_1 + \left(k_1 x - k_2 y\right) V_2 + y' V_3 + k_3 y V_4 \right) - \sum_{i=1}^{n-k} B_i(T_{V_2}, T_{V_2})\ V_2$$

$$= \frac{x'}{\sqrt{k_1^2 + k_2^2}} V_1 + \frac{k_1 x - k_2 y}{\sqrt{k_1^2 + k_2^2}} - \sum_{i=1}^{n-k} B_i(T_{V_2}, T_{V_2}) \quad V_2 + \frac{y'}{\sqrt{k_1^2 + k_2^2}} V_3 + \frac{k_3 y}{\sqrt{k_1^2 + k_2^2}} V_4$$

bulunur ve norm alınırsa;

$$\gamma_{V_2} = \left\| \overline{D}_{T_{V_2}} T_{V_2} \right\|$$

$$= \sqrt{\frac{x'^2 + y'^2 + k_3^2 y^2}{k_1^2 + k_2^2} + \frac{k_1 x - k_2 y}{\sqrt{k_1^2 + k_2^2}} - \sum_{i=1}^{n-k} B_i(T_{V_2}, T_{V_2})^{\,2}}$$

elde edilir.

4.2.3 (V_3) ün S^k ya göre geodezik eğriliği

(V_3) ün birim hiperküreye göre geodezik eğriliği γ_{V_3} olmak üzere;

$$\gamma_{V_3} = \left\| \overline{D}_{T_{V_3}} T_{V_3} \right\|$$

dir.

$(*)$ eşitliği kullanılırsa; $\overline{D}_{T_{V_3}} T_{V_3} = D_{T_{V_3}} T_{V_3} + \sum_{i=1}^{n-k} \langle S_i(T_{V_3}), T_{V_3} \rangle N_i$ ifadesinin normu (V_3) ün S^k ya göre geodezik eğriliğidir.

$$\overline{D}_{T_{V_3}} T_{V_3} = D_{T_{V_3}} T_{V_3} + \sum_{i=1}^{n-k} \langle S_i(T_{V_3}), T_{V_3} \rangle N_i$$

$$= D_{T_{V_3}} T_{V_3} + \langle S_1(T_{V_3}), T_{V_3} \rangle N_1 + \langle S_2(T_{V_3}), T_{V_3} \rangle N_2 + \ldots + \langle S_{n-k}(T_{V_3}), T_{V_3} \rangle N_{n-k}$$

$$= D_{T_{V_3}} T_{V_3} + \underbrace{\langle S_1(T_{V_3}), T_{V_3} \rangle}_{-B_1(T_{V_3}, T_{V_3})} V_3 + \underbrace{\langle S_2(T_{V_3}), T_{V_3} \rangle}_{-B_2(T_{V_3}, T_{V_3})} V_3 + \ldots + \underbrace{\langle S_{n-k}(T_{V_3}), T_{V_3} \rangle}_{-B_{n-k}(T_{V_3}, T_{V_3})} V_3$$

$$= D_{T_{V_3}} T_{V_3} - B_1(T_{V_3}, T_{V_3}) V_3 - B_2(T_{V_3}, T_{V_3}) V_3 - \ldots - B_{n-k}(T_{V_3}, T_{V_3}) V_3$$

$$= D_{T_{V_3}} T_{V_3} - \sum_{i=1}^{n-k} B_i(T_{V_3}, T_{V_3}) \; V_3$$

olur. E^n e göre bulunan $D_{T_{V_3}} T_{V_3}$ değeri yerine yazılırsa;

$$z = -\frac{k_2}{\sqrt{k_2^{\,2} + k_3^{\,2}}} \quad , \quad \mathrm{w} = \frac{k_3}{\sqrt{k_2^{\,2} + k_3^{\,2}}}$$

$$\overline{D}_{T_{V_3}} T_{V_3} = \frac{1}{\sqrt{k_2^{\,2} + k_3^{\,2}}} \cdot \left(-k_1 z V_1 + z' V_2 + \left(k_2 z - k_3 w \right) V_3 + w' V_4 + k_4 w V_5 \right) - \sum_{i=1}^{n-k} B_i(T_{V_3}, T_{V_3}) \; V_3$$

$$= -\frac{k_1 z}{\sqrt{k_2^{\,2} + k_3^{\,2}}} V_1 + \frac{z'}{\sqrt{k_2^{\,2} + k_3^{\,2}}} V_2 + \frac{k_2 z - k_3 w}{\sqrt{k_2^{\,2} + k_3^{\,2}}} - \sum_{i=1}^{n-k} B_i(T_{V_3}, T_{V_3}) \quad V_3$$
$$+ \frac{w'}{\sqrt{k_2^{\,2} + k_3^{\,2}}} V_4 + \frac{k_4 w}{\sqrt{k_2^{\,2} + k_3^{\,2}}} V_5$$

bulunur ve norm alınırsa;

$$\gamma_{V_3} = \left\| \overline{D}_{T_{V_3}} T_{V_3} \right\|$$

$$= \sqrt{\frac{k_1^{\,2} z^2 + z'^2 + w'^2 + k_4^{\,2} w^2}{k_2^{\,2} + k_3^{\,2}} + \frac{k_2 z - k_3 w}{\sqrt{k_2^{\,2} + k_3^{\,2}}} - \sum_{i=1}^{n-k} B_i(T_{V_3}, T_{V_3})^{\;2}}$$

elde edilir.

4.2.4 (V_4) ün S^k ya göre geodezik eğriliği

(V_4) ün birim hiperküreye göre geodezik eğriliği γ_{V_4} olmak üzere;

$$\gamma_{V_4} = \left\| \overline{D}_{T_{V_4}} T_{V_4} \right\|$$

dir.

$(*)$ eşitliği kullanılırsa; $\overline{D}_{T_{V_4}} T_{V_4} = D_{T_{V_4}} T_{V_4} + \sum_{i=1}^{n-k} \langle S_i(T_{V_4}), T_{V_4} \rangle N_i$ ifadesinin normu (V_4) ün S^k ya göre geodezik eğriliğidir.

$$\begin{aligned}
\overline{D}_{T_{V_4}} T_{V_4} &= D_{T_{V_4}} T_{V_4} + \sum_{i=1}^{n-k} \langle S_i(T_{V_4}), T_{V_4} \rangle N_i \\
&= D_{T_{V_4}} T_{V_4} + \langle S_1(T_{V_4}), T_{V_4} \rangle N_1 + \langle S_2(T_{V_4}), T_{V_4} \rangle N_2 + \ldots + \langle S_{n-k}(T_{V_4}), T_{V_4} \rangle N_{n-k} \\
&= D_{T_{V_4}} T_{V_4} + \underbrace{\langle S_1(T_{V_4}), T_{V_4} \rangle}_{-B_1(T_{V_4}, T_{V_4})} V_4 + \underbrace{\langle S_2(T_{V_4}), T_{V_4} \rangle}_{-B_2(T_{V_4}, T_{V_4})} V_4 + \ldots + \underbrace{\langle S_{n-k}(T_{V_4}), T_{V_4} \rangle}_{-B_{n-k}(T_{V_4}, T_{V_4})} V_4 \\
&= D_{T_{V_4}} T_{V_4} - B_1(T_{V_4}, T_{V_4}) V_4 - B_2(T_{V_4}, T_{V_4}) V_4 - \ldots - B_{n-k}(T_{V_4}, T_{V_4}) V_4 \\
&= D_{T_{V_4}} T_{V_4} - \sum_{i=1}^{n-k} B_i(T_{V_4}, T_{V_4}) \; V_4
\end{aligned}$$

olur. E^n e göre bulunan $D_{T_{V_4}} T_{V_4}$ değeri yerine yazılırsa;

$$f = -\frac{k_3}{\sqrt{k_3^2 + k_4^2}} \quad , \quad \mathrm{g} = \frac{k_4}{\sqrt{k_3^2 + k_4^2}}$$

$$\begin{aligned}
\overline{D}_{T_{V_4}} T_{V_4} &= \frac{1}{\sqrt{k_3^2 + k_4^2}} \cdot \left(-k_2 f V_2 + f' V_3 + \left(k_3 f - k_4 g \right) V_4 + g' V_5 + k_5 g V_6 \right) - \sum_{i=1}^{n-k} B_i(T_{V_4}, T_{V_4}) \; V_4 \\
&= -\frac{k_2 f}{\sqrt{k_3^2 + k_4^2}} V_2 + \frac{f'}{\sqrt{k_3^2 + k_4^2}} V_3 + \frac{k_3 f - k_4 g}{\sqrt{k_3^2 + k_4^2}} - \sum_{i=1}^{n-k} B_i(T_{V_4}, T_{V_4}) \quad V_4 \\
&\quad + \frac{g'}{\sqrt{k_3^2 + k_4^2}} V_5 + \frac{k_5 g}{\sqrt{k_3^2 + k_4^2}} V_6
\end{aligned}$$

bulunur ve norm alınırsa;

$$\gamma_{V_4} = \left\| \overline{D}_{T_{V_4}} T_{V_4} \right\|$$

$$= \sqrt{\frac{k_2^{\,2} f^2 + f'^2 + g'^2 + k_5^{\,2} g^2}{k_3^{\,2} + k_4^{\,2}} + \frac{k_3 f - k_4 g}{\sqrt{k_3^{\,2} + k_4^{\,2}}} - \sum_{i=1}^{n-k} B_i (T_{V_4}, T_{V_4})}^{\;2}$$

elde edilir.

$\vdots$

4.2.k (V_k) nın S^k ya göre geodezik eğriliği

(V_k) nın birim hiperküreye göre geodezik eğriliği γ_{V_k} olmak üzere;

$$\gamma_{V_k} = \left\| \overline{D}_{T_{V_k}} T_{V_k} \right\|$$

dir.

$(*)$ eşitliği kullanılırsa; $\overline{D}_{T_{V_k}} T_{V_k} = D_{T_{V_k}} T_{V_k} + \sum_{i=1}^{n-k} \langle S_i (T_{V_k}), T_{V_k} \rangle N_i$ ifadesinin normu (V_k) nın S^k ya göre geodezik eğriliğidir.

$$\overline{D}_{T_{V_k}} T_{V_k} = D_{T_{V_k}} T_{V_k} + \sum_{i=1}^{n-k} \langle S_i (T_{V_k}), T_{V_k} \rangle N_i$$

$$= D_{T_{V_k}} T_{V_k} + \langle S_1 (T_{V_k}), T_{V_k} \rangle N_1 + \langle S_2 (T_{V_k}), T_{V_k} \rangle N_2 + \ldots + \langle S_{n-k} (T_{V_k}), T_{V_k} \rangle N_{n-k}$$

$$= D_{T_{V_k}} T_{V_k} + \underbrace{\langle S_1 (T_{V_k}), T_{V_k} \rangle}_{-B_1 (T_{V_k}, T_{V_k})} V_k + \underbrace{\langle S_2 (T_{V_k}), T_{V_k} \rangle}_{-B_2 (T_{V_k}, T_{V_k})} V_k + \ldots + \underbrace{\langle S_{n-k} (T_{V_k}), T_{V_k} \rangle}_{-B_{n-k} (T_{V_k}, T_{V_k})} V_k$$

$$= D_{T_{V_k}} T_{V_k} - B_1 (T_{V_k}, T_{V_k}) V_k - B_2 (T_{V_k}, T_{V_k}) V_k - \ldots - B_{n-k} (T_{V_k}, T_{V_k}) V_k$$

$$= D_{T_{V_k}} T_{V_k} - \sum_{i=1}^{n-k} B_i (T_{V_k}, T_{V_k}) \; V_k$$

olur. E^n e göre bulunan $D_{T_{V_k}} T_{V_k}$ değeri yerine yazılırsa;

$$\overline{D}_{T_{V_k}} T_{V_k} = \frac{k_{k-2}}{k_{k-1}} V_{k-2} - V_k - \left(\sum_{i=1}^{n-k} B_i (T_{V_k}, T_{V_k}) \right) V_k$$

$$= \frac{k_{k-2}}{k_{k-1}} V_{k-2} - \left(\sum_{i=1}^{n-k} B_i (T_{V_k}, T_{V_k}) + 1 \right) V_k$$

bulunur ve norm alınırsa;

$$\gamma_{V_k} = \left\| \overline{D}_{T_{V_k}} T_{V_k} \right\| = \sqrt{ \left(\frac{k_{k-2}}{k_{k-1}} \right)^2 + \left(\sum_{i=1}^{n-k} B_i (T_{V_k}, T_{V_k}) + 1 \right)^2 }$$

elde edilir.

Sonuç 4.2 E^n in k-boyutlu altmanifoldu M üzerindeki Frenet vektör alanlarının küresel göstergelerinin S^k ya göre geodezik eğrilikleri için genelleme yapılırsa, (V_j) nin geodezik eğriliği γ_{V_j} ile ifade edilirse;

$\lambda = -\dfrac{k_{j-1}}{\sqrt{k_{j-1}^2 + k_j^2}}$, $\ell = \dfrac{k_j}{\sqrt{k_{j-1}^2 + k_j^2}}$ olmak üzere

$j = 1$ için

$$\gamma_{V_1} = \sqrt{ \left(1 + \sum_{i=1}^{n-k} B_i (T_{V_1}, T_{V_1}) \right)^2 + \left(\frac{k_2}{k_1} \right)^2 }$$

$j = 2$ için

$$\gamma_{V_2} = \sqrt{ \frac{\lambda'^2 + \ell^2 + k_3^2 \ell^2}{k_1^2 + k_2^2} + \left(\frac{k_1 \lambda - k_2 \ell}{\sqrt{k_1^2 + k_2^2}} - \sum_{i=1}^{n-k} B_i (T_{V_2}, T_{V_2}) \right)^2 }$$

$3 \leq j \leq k-2$ için

$$\gamma_{V_j} = \sqrt{\frac{k_{j-2}{}^2\lambda^2 + \lambda'^2 + \ell'^2 + k_{j+1}{}^2\ell^2}{k_{j-1}{}^2 + k_j{}^2} + \frac{k_{j-1}\lambda - k_j\ell}{\sqrt{k_{j-1}{}^2 + k_j{}^2}} - \sum_{i=1}^{n-k} B_i(T_{V_j}, T_{V_j})^{\;2}}$$

$j = k-1$ için

$$\gamma_{V_{k-1}} = \sqrt{\frac{k_{k-3}{}^2\lambda^2 + \lambda'^2 + \ell'^2}{k_{k-2}{}^2 + k_{k-1}{}^2} + \frac{k_{k-2}\lambda - k_{k-1}\ell}{\sqrt{k_{k-2}{}^2 + k_{k-1}{}^2}} - \sum_{i=1}^{n-k} B_i(T_{V_{k-1}}, T_{V_{k-1}})^{\;2}}$$

$j = k$ için

$$\gamma_{V_k} = \sqrt{\frac{k_{k-2}}{k_{k-1}}^{\;2} + \sum_{i=1}^{n-k} B_i(T_{V_k}, T_{V_k}) + 1^{\;2}}$$

olur.

İspat: $j = 3$ için

$$\gamma_{V_3} = \sqrt{\frac{k_1{}^2\lambda^2 + \lambda'^2 + \ell'^2 + k_4{}^2\ell^2}{k_2{}^2 + k_3{}^2} + \frac{k_2\lambda - k_3\ell}{\sqrt{k_2{}^2 + k_3{}^2}} - \sum_{i=1}^{n-k} B_i(T_{V_3}, T_{V_3})^{\;2}}$$

doğrudur.

$j = p$ için doğru olsun.

$$\gamma_{V_p} = \sqrt{\frac{k_{p-2}{}^2\lambda^2 + \lambda'^2 + \ell'^2 + k_{p+1}{}^2\ell^2}{k_{p-1}{}^2 + k_p{}^2} + \frac{k_{p-1}\lambda - k_p\ell}{\sqrt{k_{p-1}{}^2 + k_p{}^2}} - \sum_{i=1}^{n-k} B_i(T_{V_p}, T_{V_p})^{\;2}}$$

olur.

$j = p+1$ için doğru mudur?

$$\gamma_{V_{p+1}}=\sqrt{\frac{k_{p-1}{}^{2}\lambda^{2}+\lambda'^{2}+\ell'^{2}+k_{p+2}{}^{2}\ell^{2}}{k_{p}{}^{2}+k_{p+1}{}^{2}}+\left(\frac{k_{p}\lambda-k_{p+1}\ell}{\sqrt{k_{p}{}^{2}+k_{p+1}{}^{2}}}-\sum_{i=1}^{n-k}B_{i}(T_{V_{p+1}},T_{V_{p+1}})\right)^{2}}$$

bulunmalıdır.

(V_{p+1}) in birim hiperküreye göre geodezik eğriliği $\gamma_{V_{p+1}}$ olmak üzere;

$$\gamma_{V_{p+1}}=\left\|\overline{D}_{T_{V_{p+1}}}T_{V_{p+1}}\right\|$$

dir.

$(*)$ eşitliği kullanılırsa; $\overline{D}_{T_{V_{p+1}}}T_{V_{p+1}}=D_{T_{V_{p+1}}}T_{V_{p+1}}+\sum_{i=1}^{n-k}\langle S_{i}(T_{V_{p+1}}),T_{V_{p+1}}\rangle N_{i}$ ifadesinin normu (V_{p+1}) in S^{k} ya göre geodezik eğriliğidir.

$$\begin{aligned}
\overline{D}_{T_{V_{p+1}}}T_{V_{p+1}}&=D_{T_{V_{p+1}}}T_{V_{p+1}}+\sum_{i=1}^{n-k}\langle S_{i}(T_{V_{p+1}}),T_{V_{p+1}}\rangle N_{i}\\
&=D_{T_{V_{p+1}}}T_{V_{p+1}}+\langle S_{1}(T_{V_{p+1}}),T_{V_{p+1}}\rangle N_{1}+\langle S_{2}(T_{V_{p+1}}),T_{V_{p+1}}\rangle N_{2}+\dots+\langle S_{n-k}(T_{V_{p+1}}),T_{V_{p+1}}\rangle N_{n-k}\\
&=D_{T_{V_{p+1}}}T_{V_{p+1}}+\underbrace{\langle S_{1}(T_{V_{p+1}}),T_{V_{p+1}}\rangle}_{-B_{1}(T_{V_{p+1}},T_{V_{p+1}})}V_{p+1}+\underbrace{\langle S_{2}(T_{V_{p+1}}),T_{V_{p+1}}\rangle}_{-B_{2}(T_{V_{p+1}},T_{V_{p+1}})}V_{p+1}+\dots+\underbrace{\langle S_{n-k}(T_{V_{p+1}}),T_{V_{p+1}}\rangle}_{-B_{n-k}(T_{V_{p+1}},T_{V_{p+1}})}V_{p+1}\\
&=D_{T_{V_{p+1}}}T_{V_{p+1}}-B_{1}(T_{V_{p+1}},T_{V_{p+1}})V_{p+1}-B_{2}(T_{V_{p+1}},T_{V_{p+1}})V_{p+1}-\ldots-B_{n-k}(T_{V_{p+1}},T_{V_{p+1}})V_{p+1}\\
&=D_{T_{V_{p+1}}}T_{V_{p+1}}-\left(\sum_{i=1}^{n-k}B_{i}(T_{V_{p+1}},T_{V_{p+1}})\right)V_{p+1}
\end{aligned}$$

olur. E^{n} e göre bulunan $D_{T_{V_{p+1}}}T_{V_{p+1}}$ değeri yerine yazılırsa;

$$\lambda=-\frac{k_{p}}{\sqrt{k_{p}{}^{2}+k_{p+1}{}^{2}}}\quad,\quad\ell=\frac{k_{p+1}}{\sqrt{k_{p}{}^{2}+k_{p+1}{}^{2}}}$$

$$\begin{aligned}
\overline{D}_{T_{V_{p+1}}}T_{V_{p+1}}=&\frac{1}{\sqrt{k_{p}{}^{2}+k_{p+1}{}^{2}}}\cdot\left(-k_{p-1}\lambda V_{p-1}+\lambda' V_{p}+\left(k_{p}\lambda-k_{p+1}\ell\right)V_{p+1}+\ell' V_{p+2}+k_{p+2}\ell V_{p+3}\right)\\
&-\left(\sum_{i=1}^{n-k}B_{i}(T_{V_{p+1}},T_{V_{p+1}})\right)V_{p+1}
\end{aligned}$$

$$= -\frac{k_{p-1}\lambda}{\sqrt{{k_p}^2 + {k_{p+1}}^2}} V_{p-1} + \frac{\lambda'}{\sqrt{{k_p}^2 + {k_{p+1}}^2}} V_p + \left(\frac{k_p \lambda - k_{p+1}\ell}{\sqrt{{k_p}^2 + {k_{p+1}}^2}} - \sum_{i=1}^{n-k} B_i(T_{V_{p+1}}, T_{V_{p+1}}) \right) V_{p+1}$$

$$+ \frac{\ell'}{\sqrt{{k_p}^2 + {k_{p+1}}^2}} V_{p+2} + \frac{k_{p+2}\ell}{\sqrt{{k_p}^2 + {k_{p+1}}^2}} V_{p+3}$$

bulunur ve norm alınırsa;

$$\gamma_{V_{p+1}} = \left\| \overline{D}_{T_{V_{p+1}}} T_{V_{p+1}} \right\|$$

$$= \sqrt{\frac{{k_{p-1}}^2 \lambda^2 + \lambda'^2 + \ell'^2 + {k_{p+2}}^2 \ell^2}{{k_p}^2 + {k_{p+1}}^2} + \left(\frac{k_p \lambda - k_{p+1}\ell}{\sqrt{{k_p}^2 + {k_{p+1}}^2}} - \sum_{i=1}^{n-k} B_i(T_{V_{p+1}}, T_{V_{p+1}}) \right)^2}$$

elde edilir ve $j = p+1$ için de doğrudur.