ANKARA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

YENİLEME SÜREÇLERİNİN GARANTİ ANALİZİNE UYGULANMASI

Zeynep ORAN

İSTATİSİK ANABİLİM DALI

ANKARA
2005

Yrd. Doç. Dr. Halil AYDOĞDU'nun danışmanlığında, Zeynep ORAN tarafından hazırlanan bu çalışma 30/09/2005 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından İstatistik Anabilim Dalı'nda Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

Başkan: Doç. Dr. Salih ÇELEBİOĞLU
Gazi Üniversitesi

Üye : Doç. Dr. Yılmaz AKDİ
Ankara Üniversitesi

Üye :Yrd. Doç. Dr. Halil AYDOĞDU
Ankara Üniversitesi

Yukarıdaki sonucu onaylarım

Prof. Dr. Ülkü MEHMETOĞLU
Enstitü Müdürü

ÖZET

YENİLEME SÜREÇLERİNİN GARANTİ ANALİZİNE UYGULANMASI

Zeynep ORAN

Ankara Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
İstatistik Anabilim Dalı

Danışman: Yrd. Doç. Dr. Halil AYDOĞDU

Bu çalışmada bir ve iki boyutlu yenileme süreçleri tanıtılır. Bir ve iki boyutlu garanti analizinde kullanılan değişik garanti politikaları altında üretici açısından beklenen garanti masrafı verilir ve bu politikaların üretici ve tüketici açısından karşılaştırılması yapılır.

2005, 63 sayfa

Anahtar Kelimeler: Yenileme süreçleri, yenileme fonksiyonu, garanti analizi, yenileme denklemi, iki boyutlu yenileme süreci, iki boyutlu garanti analizi.

ABSTRACT

AN APPLICATION OF RENEWAL PROCESS TO WARRANTY ANALYSIS

Zeynep ORAN

Ankara University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Statistics

Supervisor: Asst. Prof. Dr. Halil AYDOĞDU

In this study one and two dimensional renewal processes are described. Under different warranty policies used in one and two dimensional warranty analysis, the expected warranty cost is given from the view of supplier and these policies are compared from the perspective of the both consumers and suppliers.

2005, 63 pages

Key Words: Renewal process, renewal function, warranty analysis, renewal equation, two dimensional renewal process, two dimensional warranty analysis

TEŞEKKÜR

“İki Boyutlu Yenileme Süreçlerinin Garanti Analizine Uygulanması” ile ilgili yaptığım bu çalışmamda bana araştırma olanağı sağlayan, çalışmamın her aşamasında beni önerileriyle olumlu yönde yönlendiren, her zaman ilgi ve alakasını gördüğüm danışman hocam sayın Yrd. Doç. Halil Aydoğdu’ya, bu uzun ve yorucu çalışmalar sırasında yardımlarını benden esirgemeyen arkadaşım Umut Fidan’a, çok sevdiğim İstatistik Bilimini bana sevdiren ve öğrenmemde büyük katkıları olan Ankara Üniversitesi İstatistik Bölümündeki sayın hocalarıma, beni bugünlere getiren canım anneme babama ve biricik kardeşim Aslı’ya teşekkürlerimi sunarım.

Zeynep ORAN
Ankara, Eylül 2005

İÇİNDEKİLER

SİMGELER DİZİNİ

$*$	Konvolüsyon İşlemi
$F^{n*}(x)$	F Dağılım Fonksiyonunun Kendisiyle n Katlı Konvolüsyonu
F_{LS}	F Dağılım Fonksiyonun Laplace Stieltjes Dönüşümü
f_{LS}	f Olasılık Yoğunluk Fonksiyonun Laplace Stieltjes Dönüşümü
F_L	F Dağılım Fonksiyonun Laplace Dönüşümü
f_L	f Olasılık Yoğunluk Fonksiyonun Laplace Stieltjes Dönüşümü
$p_{i,j}$	İki Boyutlu Rasgele Değişkenin Olasılık Dağılımı
$q_{i,j}$	İki Boyutlu Rasgele Değişkenin Kuyruk Olasılıkları
$P(s_1,s_2)$	İki Boyutlu Rasgele Değişkenin Olasılık Üreten Fonksiyonu
$Q(s_1,s_2)$	İki Boyutlu Rasgele Değişkenin Üretici Fonksiyonu
$E(X)$	X Rasgele Değişkeninin Beklenen Değeri
$Cov(X,Y)$	X ile Y Rasgele Değişkenlerinin Kovaryansı
X_i	(i-1).Yenileme Gerçekleştikten Sonra i. Yenileme Yapılıncaya Kadar Geçen Zaman Süresi
$N(x)$	$(0,x]$ Zaman Aralığında Gerçekleşen Yenilemelerin Sayısı
S_n	n. Yenilemenin Gerçekleşme Zamanı
$M(x)$	$(0,x]$ Zaman Aralığında Yapılan Yenilemelerin Ortalama Sayısı
$m(x)$	Yenileme Yoğunluğu
$N(x,y)$	$(0,x]\times(0,y]$ dikdörtgenindeki (X,Y) yenilemelerinin sayısı
$N_1(x)$	$(0,x]$ Zaman Aralığında Gerçekleşen Yenilemelerin Sayısı
$N_2(y)$	$(0,y]$ Zaman Aralığında Gerçekleşen Yenilemelerin Sayısı
$p_{m,n}(x,y)$	$N_1(x)$ ve $N_2(y)$ Rasgele Değişkenlerinin Ortak Olasılık Dağılımı
$q_{m,n}(x,y)$	$N_1(x)$ ve $N_2(y)$ Rasgele Değişkenlerinin Kuyruk Olasılıkları
$Q(x,y;s_1,s_2)$	$N_1(x)$ ve $N_2(y)$ Rasgele Değişkenlerinin Olasılık Üreten Fonksiyonu
$P(x,y;s_1,s_2)$	$N_1(x)$ ve $N_2(y)$ Rasgele Değişkenlerinin Üretici Fonksiyonu
$K(x,y)$	$N_1(x)$ ve $N_2(y)$ Rasgele Değişkenlerinin Kovaryansı
$K_L(p,q)$	$N_1(x)$ ve $N_2(y)$ Rasgele Değişkenlerinin Kovaryansının Laplace Dönüşümü
$\Pi(x,y;s)$	$N(x,y)$ İki Boyutlu Kesikli Rasgele Değişkenin Olasılık Üreten Fonksiyonu
$M(x,y)$	$(0,x]\times(0,y]$ Düzlemi İçinde Yapılan Yenilemelerin Ortalama Sayısı

$m(x,y)$	İki Boyutlu Yenileme Yoğunluğu
I_0	0. Mertebeden Birinci Çeşit Genişletilmiş Bessel Fonksiyonu
FRW	Ücretsiz Yer Değiştirme Garantisi
PRW	Ücretin Paylaştırıldığı Yer Değiştirilme Garantisi
c	Ürünün Tamiri İçin Ortalama Tamir Masrafı
r	Yenileme Meydana Geldiğinde Üreticinin Ödeyeceği Tamir Masrafının Oranı
g	Malın Satış Fiyatı
W	Satılan Bir Mal İçin Garanti Süresi
$A(w)$	w Anında Kullanılmakta Olan Malın Geriye Kalan Ömrü
$E(C^A(w,u))$	A politikası Altında Satıcının Beklenen Garanti Masrafı
$E(C^B(w,u))$	B politikası Altında Satıcının Beklenen Garanti Masrafı
C_W	Satıcının Garanti Masrafı

ŞEKİLLER DİZİNİ

ÇİZELGELER DİZİNİ

1. GİRİŞ

Garanti, bir üreticinin (satıcının) belirlenmiş bir zamandan önce bozulan bir ticari veya tüketim malını tamir veya değiştirilmesini (yenilemesini) kabul etmesi durumunda mukaveleden doğan bir mecburiyettir. Üreticiler garantiyi güven vasfı, mal satışının artışının sağlanması ve alıcı (tüketici) riskinin azalması gibi değişik amaçların üstesinden gelmek için malların kalitesinin reklâmı olarak kullanırlar. Garantili ve garantisiz malların fiyat farkları ve özellikle garanti süresi satıcı–alıcı açısından önemli etkenlerdir.

Garanti kapsamında satılan bir ürünün (malın) üretici ya da tüketici açısından değişik garanti politikaları altında belirli bir zaman aralığında (garanti süresi, ürünün piyasada kaldığı süre gibi) garanti masrafı ya da kazancının dağılımının beklenen değerinin ve bunlarla ilgili bazı özel hesapların çıkartılması ile ilgili incelemelere garanti analizi denir. Bir ürünün ömrü rasgele olduğundan rasgele zamanlarda bozulan ürün yenisiyle değiştirilir. Bu durumda bu ürün yardımıyla bir yenileme süreci oluşturulur ve böylece garanti analizi yapabilmek için yenileme teorisi araçlarına ihtiyaç duyulur, yani garanti analizi yenileme teorisine bağlı bir analizdir. Dayanma süresi F dağılımı olan bir ürünü düşünelim. Çoğu ürün için F bir boyutlu dağılım fonksiyonu iken bazı ürünler için F iki boyutlu bir dağılım fonksiyonu olabilir. Ürünün ömrünün dağılımı olan F bir boyutlu ise yapılan analize bir boyutlu garanti analizi denirken F nin iki boyutlu olması durumunda bu analize iki boyutlu garanti analizi denir.

Bu çalışmanın amacı bir ve iki boyutlu yenileme süreçlerini tarif ederek, bir ve iki boyutlu garanti analizinde kullanılan değişik garanti politikaları altında üretici açısından beklenen garanti masrafını elde etmek ve bu politikaları üretici ve tüketici açısından karşılaştırmaktır. Bu çalışma aşağıdaki biçimde düzenlenmiştir.

İkinci bölüm bazı temel bilgiler için ayrılmıştır. Tek boyutlu ve iki boyutlu konvolüsyon, tek değişkenli ve iki değişkenli Laplace-Stieltjes, Laplace Dönüşümü, olasılık üreten fonksiyon ve bazı özellikleri verilmiştir.

Üçüncü bölümde bir boyutlu yenileme süreci, yenileme fonksiyonu açıklanıp yenileme fonksiyonunun analitik ve sayısal hesabı (RS-Yöntemi) üzerinde durulmuştur.

Dördüncü bölümde ise iki boyutlu yenileme süreçleri üzerinde durularak bu süreçlerin genel özellikleri açıklanmıştır. $(N_1(x), N_2(y))$ iki boyutlu rasgele değişkeninin ve $N(x, y)$ rasgele değişkeninin dağılımının bazı karakteristik özellikleri ifade edilmiş ve iki boyutlu yenileme fonksiyonu ile yenileme yoğunluğu verilmiştir. İki değişkenli üstel dağılım durumunda bu iki fonksiyonun elde edilmesi üzerinde durulmuştur.

Beşinci bölümde ise bir ve iki boyutlu garanti analizinde uygulanan politikalar üzerinde durulmuştur. Bu politikalar altında üreticinin beklenen garanti masrafları için yenileme fonksiyonlarına bağlı ifadeler verilmiştir ve ifadeler yardımıyla ele alınan politikalar üretici ve tüketici açısından karşılaştırılmıştır. Buna ilişkin bir örnek verilmiştir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde bir ve iki boyutlu yenileme süreçleri teorisinde araç olarak kullanılan bir ve iki boyutlu konvolüsyon işlemi, Laplace ve Laplace-Stieltjes dönüşümleri ile olasılık üreten fonksiyonlar verilmiştir.

2.1 Dağılım Fonksiyonlarının Konvolüsyonu

Bu kısımda sırasıyla bir boyutlu ve iki boyutlu dağılım fonksiyonları için konvolüsyon kavramı verilir ve bazı özellikleri incelenir.

2.1.1 Bir boyutlu konvolüsyon işlemi

f ve g reel sayılarda tanımlı mutlak integrallenebilen fonksiyonların $L_{l_1}(-\infty,\infty)$ cümlesine ait iki fonksiyon olsun. Lebesgue ölçüsüne göre hemen hemen her x için aşağıdaki eşitliğin sağ tarafındaki integral vardır

$$f * g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x-y) f(y) dy \tag{2.1}$$

ile ifade edilen $f * g$ fonksiyonuna f ile g 'nin konvolüsyonu denir (Kawata 1972). Konvolüsyondaki * işlemi değişme ve birleşme özelliğine sahiptir. Aynı zamanda $f * g \in L_{l_1}(-\infty,\infty)$ ve

$$\int_{-\infty}^{\infty} f * g(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx \int_{-\infty}^{\infty} g(x) dx$$

dir.

f ve g $x < 0$ için $f(x) = g(x) = 0$ özelliğini sağlayan iki fonksiyon olsun. (2.1) den f ile g 'nin konvolüsyonu

$$f * g(x) = \int_0^x g(x-y) f(y) dy, x \geq 0 \tag{2.2}$$

dır.

F sağdan sürekli, azalmayan (veya özel olarak bir dağılım fonksiyonu) ve g reel değerli bir fonksiyon olmak üzere

$$K(F,g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x-y) dF(y) \tag{2.3}$$

ile tanımlanan $K(F,g)$ fonksiyonunu göz önüne alalım. F 'nin bir dağılım fonksiyonu olduğu ve F 'ye bir f yoğunluk fonksiyonu karşılık geldiği durumlarda

$$\begin{aligned} K(F,g)(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} g(x-y) dF(y) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} g(x-y) f(y) dy \\ &= f * g(x) \end{aligned}$$

olacaktır. Konvolüsyon için var olan $f * g = g * f$ değişme özelliği $K(F,g)$ için F ve g fonksiyonlarına bağlı olarak geçerli olmayacaktır. Ancak F ve G, $(-\infty,\infty)$ üzerinde dağılım fonksiyonu özelliklerine sahip iki fonksiyon olduğunda

$$\begin{aligned} F * G(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} G(x-y) dF(y) \\ &= G(x-y)F(y) \Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} F(y) dG(x-y) \\ &= G(-\infty)F(\infty) - G(\infty)F(-\infty) + \int_{-\infty}^{\infty} F(x-z) dG(z) \\ &= G * F(x) \end{aligned}$$

dir. O halde dağılım fonksiyonları için konvolüsyon, değişme özelliğine sahiptir. Dağılım fonksiyonları arasındaki konvolüsyon aynı zamanda birleşme özelliğine de sahiptir (Feller 1971).

Teorem 2.1 X ve Y birbirinden bağımsız, sırasıyla F ve G dağılım fonksiyonlarına sahip iki rasgele değişken olsun. bu durumda $X+Y$ rasgele değişkeninin dağılım fonksiyonu

$$F_{X+Y}(t)=\int_{-\infty}^{\infty} G(t-x)dF(x)=F*G(t) \tag{2.4}$$

dir. Ayrıca F ve G dağılım fonksiyonlarına sırasıyla f ve g yoğunluk fonksiyonları karşılık geldiğinde $F*G$ dağılım fonksiyonuna da $f*g$ yoğunluk fonksiyonu karşılık gelir (Feller 1971).

İspat: X ile Y rasgele değişkenlerinin ortak dağılım fonksiyonu $F_{(X,Y)}$ olsun. Bu durumda Fubini Teoreminin kullanılmasıyla

$$\begin{aligned} F_{X+Y}(t) &= \int_{X+Y\le t} dF_{(X,Y)}(x,y) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{t-y} dF(x)\right)dG(y) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} F(t-y)dG(y) \\ &= G*F(t)=F*G(t) \end{aligned}$$

dir.

Yukarıda verilen teorem herhangi sonlu sayıdaki bağımsız rasgele değişkenler için de geçerlidir. $X_1, X_2, \cdots, X_n$ birbirlerinden bağımsız aynı F dağılım fonksiyonuna ve f

olasılık yoğunluk fonksiyonuna sahip n tane rasgele değişken olsun. $F^{n*} = F * F * \ldots * F$ (n kez) olmak üzere F^{n*} dağılım fonksiyonu da f^{n*} yoğunluk fonksiyonuna sahiptir. Burada her n doğal sayısı için $F^{(n+1)*} = F^{n*} * F$ ve $n = 1$ için $F^{1*} = F$ dir. Ayrıca $n = 0$ için F^{n*} dağılım fonksiyonu

$$F^{0*}(t) = \begin{cases} 1, t \geq 0 \\ 0, t < 0 \end{cases}$$

olarak tanımlanır.

2.1.2 İki boyutlu konvolüsyon işlemi

F ve G, $\Re^2$ üzerinde tanımlı iki boyutlu dağılım fonksiyonu olsunlar.

$$F * G(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} F(x-u, y-v)dG(u,v),\, x, y \in \Re \tag{2.5}$$

ile tanımlanan $F * G$ fonksiyonuna F ve G fonksiyonlarının ikili Stieltjes konvolüsyonu denir. İkili Stieltjes konvolüsyon işlemi olan * değişme ve birleşme özelliğine sahiptir (Hunter 1974).

F ve G dağılım fonksiyonları, $x < 0$ veya $y < 0$ için $F(x, y) = G(x, y)$ şartını sağlar ise (2.5) ifadesi

$$F * G(x, y) = \int_{0}^{x}\int_{0}^{y} F(x-u, y-v)dG(u,v), x \geq 0, y \geq 0 \tag{2.6}$$

olur.

Teorem 2.2 (X_1, Y_1) ve (X_2, Y_2) bağımsız ve sırasıyla F ve G dağılımlarına sahip iki boyutlu rasgele değişkenler olsunlar. Bu durumda $(X_1 + X_2, Y_1 + Y_2)$ iki boyutlu rasgele değişkeninin dağılım fonksiyonu $F * G$ dır.

İspat:

$$P(X_1+X_2\le x, Y_1+Y_2\le y)=\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} P(X_1+X_2\le x, Y_1+Y_2\le y / X_1=u, Y_1=v)dF(u,v)$$

$$=\int_0^{x}\int_0^{y} P(u+X_2\le x, v+Y_2\le y)dF(u,v)$$

$$=\int_0^{x}\int_0^{y} P(X_2\le x-u, Y_2\le y-v)dF(u,v)$$

$$=\int_0^{x}\int_0^{y} G(x-u, y-v)dF(u,v)$$

$$=G*F(x,y) \text{ dir.}$$

Yukarıda verilen teorem herhangi sonlu sayıdaki bağımsız iki boyutlu rasgele değişkenler içinde geçerlidir. $(X_1,Y_1),\cdots,(X_n,Y_n)$ bağımsız aynı F dağılım fonksiyonuna sahip n tane iki boyutlu rasgele değişken olsun. Her $x,y\in\Re$ için $F^{n*}(x,y)=F*\cdots*F(x,y)$ (n kere) olmak üzere $(S_{1n},S_{2n})=\left(\sum_{i=1}^{n}X_i,\sum_{i=1}^{n}Y_i\right)$ ile tanımlanan (S_{1n},S_{2n}) iki boyutlu rasgele değişkeninin dağılım fonksiyonu $P(S_{1n}\le x, S_{2n}\le y)=F^{n*}(x,y)$ dır (Hunter 1974). Burada belirtelim ki her n doğal sayısı için $F^{(n+1)*}(x,y)=F*F^{n*}(x,y)$ ve $n=1$ için $F^{1*}(x,y)=F(x,y)$'dir. Ayrıca $n=0$ için F^{n*} dağılım fonksiyonu

$$F^{0*}(x,y)=\begin{cases}1, & x\ge 0, y\ge 0\\ 0, & diger\ \ yerlerde\end{cases}$$

olarak tanımlanır.

2.2 Laplace Dönüşümleri

Bu kısımda bir ve iki boyutlu dağılımların Laplace-Stieltjes ve Laplace dönüşümleri verilir ve bu dönüşümlerin bazı özellikleri üzerinde durulur.

2.2.1 Tek değişkenli laplace-stieltjes ve laplace dönüşümü

Bilindiği gibi $\Re$ de tanımlı, sınırlı ve azalmayan bir F fonksiyonunun Laplace-Stieltjes dönüşümü

$$F_{LS}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-xt} dF(x), -\infty < t < \infty \tag{2.7}$$

ile ifade edilir. F ve G $\Re$ de sınırlı azalmayan ve $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0, \lim_{x \to -\infty} G(x) = 0$ şartını sağlayan iki fonksiyon olsun. Bu durumda,

$$F_{LS}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-xt} dF(x)$$
$$G_{LS}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-xt} dG(x)$$

olmak üzere

$$(F * G)_{LS}(t) = F_{LS}(t) G_{LS}(t)$$

dir (Kawata 1972). Tek değişkenli bir F fonksiyonunun Laplace dönüşümü aşağıdaki integralin mevcut olması durumunda

$$F_L(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-tx} F(x) dx$$

ile verilir.

2.2.2 İki değişkenli laplace stieltjes ve laplace dönüşümü

$x < 0$ veya $y < 0$ iken $F(x, y) = 0$ şartını sağlayan iki değişkenli bir F fonksiyonunu göz önüne alalım.

$$F_{LS}(p,q)=\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-px-qy}dF(x,y) \tag{2.8}$$

ile verilen F_{LS} fonksiyonuna F 'nin iki değişkenli Laplace Stieltjes dönüşümü denir (Hunter 1974).

Ayrıca F 'nin iki değişkenli Laplace dönüşümü F_L

$$F_L(p,q)=\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-px-qy}F(x,y)dxdy \tag{2.9}$$

ile tanımlanır. Burada F_{LS} ve F_L iki değişkenli fonksiyonları ilgili integrallerinin mevcut olması durumunda tanımlıdır.

Laplace ve Laplace-Stieltjes dönüşümlerinin tanımları göz önüne alındığında aşağıdaki teoremde verilen ifadelere kolaylıkla ulaşılır.

Teorem 2.3 (Hunter 1974)

F, olasılık yoğunluk fonksiyonu f olan iki boyutlu mutlak sürekli bir dağılım fonksiyonu ve F_1 ile F_2 bu dağılımın marjinal dağılım fonksiyonları olsun. f_1 ve f_2 bu dağılıma karşılık gelen marjinal olasılık yoğunluk fonksiyonları olmak üzere $p,q \geq 0$ için

$$F_{LS}(p,q)=f_L(p,q), \tag{2.10}$$

$$F_L(p,q)=\frac{f_L(p,q)}{p.q}, \tag{2.11}$$

$$(F_1)_L(p,q)=\frac{f_L(p,0)}{p.q}, \tag{2.12}$$

$$(F_2)_L(p,q)=\frac{f_L(0,q)}{p.q}, \tag{2.13}$$

$$\left(f_1\right)_L(p)=f_L(p,0), \tag{2.14}$$

$$\left(f_2\right)_L(p)=f_L(0,q). \tag{2.15}$$

Şimdi herhangi iki tane iki boyutlu dağılım fonksiyonunun konvolüsyonunun Laplace-Stieltjes dönüşümü altındaki karşılığının dağılım fonksiyonlarının Laplace-Stieltjes dönüşümlerinin çarpımı olduğunu ifade eden teoremi verelim.

Teorem 2.4 F ve G iki boyutlu bağımsız dağılımın herhangi iki dağılım fonksiyonu olmak üzere;

$$(F*G)_{LS}(p,q)=F_{LS}(p,q)G_{LS}(p,q)$$

dır.

İspat: $F*G$ dağılımına karşılık gelen iki boyutlu rasgele değişkeni $\left(X_1+X_2,Y_1+Y_2\right)$ ile gösterelim. Burada $\left(X_1,Y_1\right)$ ve $\left(X_2,Y_2\right)$ bağımsız sırasıyla F ve G dağılımlı rasgele vektörlerdir. $H=F*G$ diyelim. Bu durumda

$$\begin{aligned}
(F*G)_{LS}(p,q) &= \int_0^\infty\int_0^\infty e^{-px}e^{-qy}\,d(F*G)(x,y)\\
&= \int_0^\infty\int_0^\infty e^{-px}e^{-qy}\,dH_{X_1+X_2,Y_1+Y_2}(x,y)\\
&= E\left(e^{-p\left(X_1+X_2\right)-q\left(Y_1+Y_2\right)}\right)\\
&= E\left(e^{-pX_1-pX_2}e^{-qY_1-qY_2}\right)\\
&= E\left(e^{-pX_1-qY_1}e^{-pX_2-qY_2}\right)\\
&= E\left(e^{-pX_1-qY_1}\right)E\left(e^{-pX_2-qY_2}\right)\\
&= \int_0^\infty\int_0^\infty e^{-pX_1-qY_1}\,dF_{X_1,Y_1}\left(x_1,y_1\right)\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-pX_2-qY_2}\,dG_{X_2,Y_2}\left(x_2,y_2\right)\\
&= F_{LS}(p,q).G_{LS}(p,q)
\end{aligned}$$

bulunur.

F ve G herhangi iki boyutlu dağılım fonksiyonu ve G dağılım fonksiyonu g olasılık yoğunluk fonksiyonu ile mutlak sürekli olsun. Bu durumda (2.10) ifadesinden ve Teorem 2.4'den

$$(F * G)_L(p,q) = F_L(p,q) \cdot g_L(p,q) \tag{2.16}$$

Olduğu açıktır. Ayrıca, F iki boyutlu dağılım fonksiyonu f olasılık yoğunluk fonksiyonuna sahip iken aşağıdaki ifadeler kolaylıkla elde edilebilir.

$$\left(F^{k*} * F^{r*}\right)_L(p,q) = \frac{\left[f_L(p,q)\right]^{k+r}}{p \cdot q}, \tag{2.17}$$

$$\left(F_1^{k*} * F^{r*}\right)_L(p,q) = \frac{\left[f_L(p,0)\right]^{k} \cdot \left[f_L(p,q)\right]^{r}}{p \cdot q}, \tag{2.18}$$

$$\left(F_2^{k*} * F^{r*}\right)_L(p,q) = \frac{\left[f_L(0,q)\right]^{k} \cdot \left[f_L(p,q)\right]^{r}}{p \cdot q}. \tag{2.19}$$

İki boyutlu yenileme süreçlerinin ve ilgili fonksiyonlarının incelenmesinde iki boyutlu olasılık üreten fonksiyonu önemli bir araçtır. Aşağıdaki alt kısımda olasılık üreten fonksiyonu ve bazı özellikleri verilir.

2.3 Olasılık Üreten Fonksiyonu

(X,Y) bileşenleri negatif olmayan tamsayı değerli iki boyutlu kesikli bir rasgele değişken olsun. Bu iki boyutlu rasgele değişkeni olasılık dağılımı

$p_{i,j} = P(X = i, Y = j), \;\; i, j = 0,1,2,\cdots$

ile verilmek üzere

$$P(s_1, s_2) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} p_{i,j} s_1^i s_2^j$$

ile tanımlanan iki değişkenli P fonksiyonuna (X,Y) iki boyutlu rasgele değişkeninin olasılık üreten fonksiyonu denir.

$i, j \in \{0,1,\cdots\}$ için $q_{i,j} = P(X \geq i, Y \geq j)$ diyelim. q_{ij} “kuyruk olasılıkları” için

$$Q(s_1, s_2) = \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} q_{i,j} s_1^i s_2^j$$

ile verilen Q üretici fonksiyonunu gözönüne alalım. P ve Q fonksiyonları arasındaki ilişki aşağıdaki teorem ile verilir.

Teorem 2.5 (Hunter 1974)

$|s_1| < 1, |s_2| < 1$ için;

$$(1-s_1)(1-s_2)Q(s_1,s_2) = 1 - s_1P(s_1,1) - s_2P(1,s_2) + s_1s_2P(s_1,s_2) \qquad (2.20)$$

ve

$$s_1s_2P(s_1,s_2) = 1 - (1-s_1)Q(s_1,0) - (1-s_2)Q(0,s_2) - (1-s_1)(1-s_2)Q(s_1,s_2) \qquad (2.21)$$

dır.

(2.20) ifadesinde sırasıyla $s_1 = 0$ ve $s_2 = 0$ alınırsa

$$(1-s_2)Q(0,s_2) = 1 - s_2P(1,s_2)$$

ve

$$(1-s_1)Q(s_1,0) = 1 - s_1P(s_1,1)$$

ifadeleri elde edilir. Burada $P(1,s_2)\left(= \sum_{j=0}^{\infty} P(Y=j)s_2^j\right)$ ve $P(s_1,1)$ fonksiyonları sırasıyla X ve Y rasgele değişkenlerinin marjinal olasılık üreten fonksiyonlarıdır.

Benzer olarak $Q(s_1,0)\left(=\sum_{i=0}^{\infty}P(X\geq i)s_1^i\right)$ ve $Q(0,s_2)$ ile verilen fonksiyonlar sırasıyla X ve Y 'nin marjinal dağılımlarının "kuyruk olasılıklarının" üretici fonksiyonlarıdır.

Şimdi X ve Y rasgele değişkenlerinin bağımsızlığının belirlenmesinde kullanılabilecek önemli bir teoremi ifade edelim.

Teorem 2.6 (Hunter 1974)

Aşağıdaki ifadeler birbirlerine denktir.

(i) X ve Y bağımsızdır.

(ii) $P(s_1,s_2)=P(s_1,1)\cdot P(1,s_2)$, $|s_1|,|s_2|\leq 1$

(iii) $Q(s_1,s_2)=Q(s_1,0)\cdot Q(0,s_2)$, $|s_1|,|s_2|<1$

X ve Y rasgele değişkenlerinin özellikle küçük mertebeden momentleri Q fonksiyonu yardımıyla elde edilebilir. $E(X), E(Y), E(XY)$ ve $Cov(X,Y)$ beklenen değerleri için Hunter (1974) aşağıdaki ifadeleri elde etmiştir.

$$E(X)=\sum_{i=1}^{\infty}q_{i,0}=Q(1,0)-1\,, \tag{2.22}$$

$$E(Y)=\sum_{j=1}^{\infty}q_{0,j}=Q(0,1)-1\,, \tag{2.23}$$

$$E(XY)=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}q_{i,j}=Q(1,1)-Q(1,0)-Q(0,1)+1\,, \tag{2.24}$$

$$Cov(X,Y)=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\left(q_{i,j}-q_{i,0}.q_{0,j}\right)=Q(1,1)-Q(0,1)\cdot Q(1,0)\,. \tag{2.25}$$

3. BİR BOYUTLU YENİLEME SÜREÇLERİ VE YENİLEME FONKSİYONLARI

Bu bölümde bir boyutlu yenileme süreçleri üzerinde durulur. Bir boyutlu yenileme süreçleri için yenileme rasgele değişkeninin olasılık dağılımının verilmesinin ardından yenileme fonksiyonunu tarif edilir. Bu fonksiyonun bazı özellikleri incelenir. Yenileme fonksiyonunun bazı özel dağılımlar (iki parametreli üstel, düzgün, hiper üstel, Erlang) için analitik ifadeleri verilir. Genelde analitik olarak elde edilemeyen sanal hesabı için literatürde mevcut olan yöntemlerden R-S yöntemi üzerinde durulur.

3.1 Bir Boyutlu Yenileme Süreci

$N(x), (0, x]$ aralığında gerçekleşen olayların sayısı olmak üzere $\{N(x), x \geq 0\}$ stokastik sürecine sayma süreci denir.

$\{N(x), x \geq 0\}$ sayma süreci aşağıdakileri sağlar.

i) $N(x) \geq 0$.

ii) $N(x)$ tamsayı değerli rasgele değişkendir.

iii) Eğer $y < x$ ise $N(y) \leq N(x)$ dir.

iv) $y < x$ için $N(x) - N(y)$, $(y, x]$ aralığında gerçekleşen olay sayısıdır.

$\{N(x), x \geq 0\}$ bir sayma süreci olsun. Bu sayma süreci için olaylar arası geçen zaman süreleri birbirinden bağımsız ve aynı dağılımlı rasgele değişkenler ise, $\{N(x), x \geq 0\}$ sayma sürecine bir alışılmış yenileme süreci denir (Ross 1983). Bu sürece kısaca yenileme süreci denilmektedir. Burada her bir olay bir yenileme olarak adlandırılır.

$\{N(x), x \geq 0\}$ bir yenileme süreci olsun. X_1,birinci yenileme yapılıncaya kadar geçen zaman süresi ve $i = 1,2,\ldots$ için $X_i, (i-1)$. yenileme gerçekleştikten sonra i. yenileme yapılıncaya kadar geçen zaman süresi olmak üzere $n.$ yenilemenin gerçekleşme zamanı $S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$ dir.

Ayrıca,

$$N(x) = maks\{n : S_n \leq x\}, x \geq 0 \tag{3.1}$$

olduğu açıktır. Her sabit $x \geq 0$ için $N(x)$ rasgele değişkeni $(0, x]$ zaman aralığında gerçekleşen yenilemelerin sayısıdır.

Matematiksel olarak bir yenileme sürecine negatif olmayan bağımsız aynı dağılımlı rasgele değişkenlerin bir $\{X_n, n = 1,2,\ldots\}$ dizisi olarak bakılabilir.

Örnek 3.1: Elimizde tek pille çalışan bir el radyosu olduğunu kabul edelim. Sıfır anında, yani başlangıçta radyo üzerinde yeni bir pil olduğunu düşünerek bozuldukça yenisiyle değiştirilen aynı marka pillerin ömürlerinin dizisi bir yenileme süreci oluşturur. Bu süreç için $X_i, i.$ değiştirilen pilin ömrü, $S_n, n.$ değiştirmenin yapıldığı zaman olup, $N(x), (0, x]$ zaman aralığında değiştirilen pillerin sayısıdır.

Örnek 3.2: $\{N(x), x \geq 0\}, \lambda$ oranlı bir Poisson süreci olsun. Bu süreç, yenilemeler arası geçen zaman süreleri bağımsız ver her biri λ parametreli üstel dağılımlı olan bir yenileme sürecidir.

$\{N(x), x \geq 0\}$ yenileme sürecinde yenilemeler arası geçen zaman süreleri dağılım fonksiyonunu F ile gösterelim. Aşikâr durumlardan kaçınmak için $F(0) < 1$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda bir yenileme aralığı bir olasılıkla sıfıra eşit olamaz. $F(0) < 1$ olduğunda F dağılımının ortalaması $\mu > 0$ olup güçlü büyük sayılar yasasının göz önüne alınmasıyla S_n en fazla n'nin sonlu sayıdaki değerleri için x'ye eşit ya da x'den küçük olabilir. Bu varsayımla $N(x)$ sonlu olmak zorundadır. Ancak $N(x)$ sonlu bir rasgele değişken olmasına rağmen bir olasılıkla $\lim_{x \to \infty} N(x) = \infty$'dır. Çünkü

$$P(N(\infty) = \infty) = P(\text{ En az bir } n \text{ için } X_n = \infty)$$

$$
\begin{aligned}
&= P\left[\bigcup_{n=1}^{\infty}\left(X_n = \infty\right)\right] \\
&\leq \sum_{n=1}^{\infty} P\left(X_n = \infty\right) \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

(3.1) ifadesi gözönüne alındığında

$$N(x) \geq n \Leftrightarrow S_n \leq x$$

olduğu açıktır. Bu durumda her sabit $x \geq 0$ için $N(x)$ kesikli rasgele değişkeninin olasılık dağılımı

$$
\begin{aligned}
P(N(x) = n) &= P(N(x) \geq n) - P(N(x) \geq n+1) \\
&= P(S_n \leq x) - P(S_{n+1} \leq x) \\
&= F^{n*}(x) - F^{(n+1)*}(x), \quad n = 0,1,2,... \qquad (3.2)
\end{aligned}
$$

olur (Grimnett and Stirzakar 1992). Burda *, Kısım 2.1.1'de verilen bir boyutlu konvolüsyon işlemidir.

$N(x)$ yenileme rasgele değişkeninin her mertebeden sonlu momentlere sahip olduğu bilinmektedir (Ross 1983). Yani her $x \geq 0, k \geq 0$ için $E\left(N^k(x)\right)$ sonludur. Yenileme süreçleri ile ilgili uygulamalarda, özellikle garanti analizinde sürecin ortalama değer fonksiyonuna ihtiyaç duyulmaktadır. Yenileme fonksiyonu olarak adlandırılan bu fonksiyon ve bazı özellikleri aşağıdaki kısımda ele alınır.

3.2 Yenileme Fonksiyonu

$\{N(x), x \geq 0\}$ bir yenileme süreci olmak üzere

$$M(x) = E[N(x)], \quad x \geq 0 \tag{3.3}$$

ile verilen M fonksiyonuna yenileme sürecinin ortalama değer fonksiyonu denir. Aynı zamanda yenileme fonksiyonu olarak adlandırılır. Burada $M(x), (0, x]$ zaman aralığında yapılan yenilemelerin ortalama sayısıdır. Her $x \geq 0$ için $M(x)$'in sonlu olduğu açıktır.

$$I_n = \begin{cases} 1 & S_n \leq x \\ 0 & S_n > x \end{cases}$$

olsun.

$$N(x) = \sum_{n=1}^{\infty} I_n$$

olup

$$\begin{aligned} E[N(x)] &= E\left(\sum_{n=1}^{\infty} I_n\right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} E(I_n) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} P(S_n \leq x) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} F^{n*}(x) \end{aligned}$$

elde edilebilir. O halde,

$$M(x) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n*}(x), \quad x \geq 0 \tag{3.4}$$

dır. (3.4) ifadesinin kullanılmasıyla M 'nin sağdan sürekli ve azalmayan bir fonksiyon olduğu gösterilebilir. Bununla birlikte

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} M(x) &= \lim_{x\to\infty} \sum_{n=1}^{\infty} F^{n*}(x) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x\to\infty} F^{n*}(x) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} 1 \\
&= \infty
\end{aligned}
$$

olmak üzere M yenileme fonksiyonu $x \to \infty$ için bire yakınsamaması dışında bir dağılım fonksiyonu özelliklerine sahiptir.

Birinci yenileme yapılıncaya kadar geçen zaman süresi olan X_1 rasgele değişkeni ile koşullandırma yapıldığında

$$
\begin{aligned}
M(x) &= E[N(x)] \\
&= E[E(N(x) \mid X_1 = y)] \\
&= \int_0^{\infty} E(N(x) \mid X_1 = y) dF(y)
\end{aligned}
$$

olur.

$$
E[N(x) \mid X_1 = y] = \begin{cases} E[1 + N(x-y)] & y \le x \\ 0 & y > x \end{cases}
$$

olduğundan

$$
\begin{aligned}
M(x) &= F(x) + \int_o^x M(x-y) dF(y), x \ge 0 \\
&= F(x) + F * M(x), x \ge 0
\end{aligned} \tag{3.5}
$$

bulunur. M 'nin sağladığı yukarıdaki integral denkleme yenileme denklemi denir.

* konvolüsyon işlemi değişme özelliğine sahip olduğundan (3.5) denklemi

$$M(x) = F(x) + \int_0^x F(x-y)dM(y),\ x > 0 \tag{3.6}$$

biçiminde yazılabilir.

(3.5) yenileme denklemine Laplace-Stieltjes dönüşümünün uygulanması ile

$$M_{LS}(x) = F_{LS}(x) + F_{LS}(x).M_{LS}(x)$$

olur. Böylece

$$M_{LS}(x) = \frac{F_{LS}(x)}{1 - F_{LS}(x)},\ x > 0 \tag{3.7}$$

ve

$$F_{LS}(x) = \frac{M_{LS}(x)}{1 + M_{LS}(x)}, x \geq 0 \tag{3.8}$$

dir. Ayrıca F dağılım fonksiyonu f yoğunluk fonksiyonuna sahip iken f ve M fonksiyonlarının Laplace dönüşümleri

$$f_L(x) = \int_0^\infty e^{-xy} f(y)dy$$

ve

$$M_L(x) = \int_0^\infty e^{-xy} M(y)dy$$

olmak üzere $x > 0$

$$M_L(x) = \frac{f_L(x)}{x(1 - f_L(x))} \tag{3.9}$$

olarak bulunur.

Bir fonksiyon Laplace-Stieltjes dönüşümü o fonksiyonu tek olarak belirler (Kawata 1972). Dolayısı ile (3.7) ve (3.8) ifadelerinden F ve M fonksiyonları birbirlerini tek olarak belirler.

F dağılım fonksiyonu f yoğunluk fonksiyonuna sahip ise M 'nin x noktasında türev fonksiyonu

$$\begin{aligned} \frac{dM(x)}{dx} &= \frac{d}{dx}\sum_{n=1}^{\infty} F^{n*}(x) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{dx} F^{n*}(x) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} f^{n*}(x) \end{aligned}$$

dır. $m(x) = \dfrac{dM(x)}{dx}$ ile tanımlanan m fonksiyonuna yenileme yoğunluğu denir (Ross 1983). (3.5) integral denkleminin x 'e göre türevinin alınmasıyla

$$m(x) = f(x) + \int_o^x m(x-y) f(y) dy$$

lineer ikinci çeşit Volterra integral denklemi elde edilir. $\Delta x > 0$ olmak üzere

$$M(x + \Delta x) - M(x) = \sum_{n=1}^{\infty} P(x < S_n < x + \Delta x)$$

olup m yenileme fonksiyonunun tanımlanan Δx çok küçük iken ,

$$\Delta x m(x) \approx \sum_{n=1}^{\infty} P(x < S_n \leq x + \Delta x)$$

yazılabilir. O halde $\Delta x m(x)$ dar bir $(x, x + \Delta x)$ aralığında yaklaşık olarak bir yenileme gerçekleşmesi olasılığını ifade eder.

3.3 Yenileme Fonksiyonun Hesabı

Bir $\{N(x), x \geq 0\}$ yenileme sürecinde yenilemeler arası geçen zaman süreleri dağılım fonksiyonu F bilindiğinde sürecin M yenileme fonksiyonu görünüşte (3.4), (3.5) ve (3.6) ifadelerinin birinden elde edilebilir. Fakat genelde iki parametreli üstel, düzgün, hiper üstel ve gamma dağılımı dışında M yenileme fonksiyonu bu denklemlerden analitik olarak elde edilemez. Bu durumda M sayısal olarak elde edilebilir. Literatürde Laplace ve ters Laplace dönüşümlerinin hesabına, kuvvet serileri açılımına, kübik spline yaklaşımına ve yenileme integral denkleminin sayısal dönüşümüne dayalı bazı yöntemler vardır (Baxter 1981, Baxter *et al*. 1982, Xie 1989, Cui and Xie 2003). Kolay olarak programlanabilmesi hemen hemen tüm durumlarda basitliği ve yakınsaklığı ile iyi sonuçlar veren ve diğer bilinen yöntemlerle karşılaştırıldığında uygulanabilirliği daha fazla olan bir yöntem Xie'nin (1989) RS-yöntemidir. Bu kısımda yukarıda belirtilen dağılımlar için M yenileme fonksiyonun analitik ifadeleri verilir. Ayrıca bu fonksiyonun sayısal hesabı için RS-yöntemi üzerinde durulur.

3.3.1 Yenileme fonksiyonunun analitik hesabı

Bu alt kısımda F dağılım fonksiyonunun iki parametreli üstel, düzgün, hiper üstel ve şekil parametresi doğal sayı olan gamma (Erlang dağılımı) olması durumunda M yenileme fonksiyonunun analitik ifadesi verilir.

3.3.1.1 İki parametreli üstel dağılım

X rasgele değişkenin olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f(x)=\begin{cases}\theta_1 e^{-\theta_1(x-\theta_2)}, & x>\theta_2 \ ;\theta_1,\theta_2>0\\ 0 \quad , & d.y.\end{cases}$$

olsun. n=1,2,… için X_n ler yukarıda verilen iki parametreli üstel dağılıma sahip birbirlerinden bağımsız rasgele değişkenler olmak üzere $\{N(x), x\geq 0\}$ yenileme süreci gözönüne alınsın. $n\geq 1$ için $S_n = X_1+....+X_n$ rasgele değişkenin olasılık yoğunluk fonksiyonu ardışık olarak hesaplanan konvolüsyon integrallerinden

$$f^{n*}(x)=\begin{cases}\dfrac{\theta_1^{\,n}(x-n\theta_2)^{n-1}}{(n-1)!}\ e^{-\theta_1(x-n\theta_2)} & , \quad x>n\theta_2\\ 0 & , \quad x\leq n\theta_2\end{cases}$$

bulunur. Bu ifade yardımıyla S_n nin dağılım fonksiyonu

$$F^{n*}(x)=\begin{cases}0 & , \quad x<n\theta_2\\ 1-\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1}\frac{[\theta_1(x-n\theta_2)]^i}{i!}\ e^{-\theta_1(x-n\theta_2)} & , \quad x\geq n\theta_2\end{cases}$$

elde edilir. $F^{n*}(x)$ in analitik ifadesine bağlı olarak bu yenileme süreçle ilgili fonksiyonlar analitik olarak elde edilebilir. $N(x)$ yenileme rasgele değişkenin olasılık fonksiyonu

$$P(N(x)=n)=\begin{cases}0 \quad , & x\leq n\theta_2\\ e^{-\theta_1(x-(n+1)\theta_2)}\displaystyle\sum_{i=0}^{n}\frac{[\theta_1(x-(n+1)\theta_2)]^i}{i!}-e^{-\theta_1(x-n\theta_2)}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{[\theta_1(x-n\theta_2)]^i}{i!} , & (n+1)\theta_2\leq x\\ 1-\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1}\frac{[\theta_1(x-n\theta_2)]^i}{i!}e^{-\theta_1(x-n\theta_2)} \quad , & n\theta_2\leq x\leq (n+1)\theta_2\end{cases}$$

dır.

(3.4) konvolüsyon serisi yardımıyla $M(x)$ yenileme fonksiyonunun elde edilmesi üzerinde duralım. $r=[\![x/\theta_2]\!]$ olmak üzere,

$$M(x)=\sum_{n=1}^{\infty}F^{n*}(x)$$
$$=\sum_{n=1}^{r}F^{n*}(x)$$
$$=r-\sum_{j=1}^{r}e^{-\theta_1(x-(r-j+1)\theta_2)}\sum_{i=0}^{r-j}\frac{[\theta_1(x-(r-j+1)\theta_2)]^i}{i!}$$

($r-j+1=s$ dersek)

$$=r-\sum_{s=1}^{r}e^{-\theta_1(x-s\theta_2)}\sum_{i=0}^{s-1}\frac{[\theta_1(x-s\theta_2)]^i}{i!}$$

dır.

3.3.1.2 Düzgün dağılım

X rasgele değişkenin olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta} & , \quad 0<x<\theta \\ 0 & , \quad d.y.\end{cases}$$

olsun. n=1,2,… için X_n ler yukarıda verilen düzgün dağılıma sahip bağımsız rasgele değişkenler olmak üzere $\{N(x), x\geq 0\}$ yenileme süreci gözönüne alınsın. $n\geq 1$ için $S_n=X_1+....+X_n$ rasgele değişkenin olasılık yoğunluk fonksiyonu ardışık olarak hesaplanan konvolüsyon integrallerinden

$$f^{n*}(x)=\begin{cases}\dfrac{x^{n-1}}{(n-1)!\theta^n} & , \; 0<x\leq\theta \\ \dfrac{1}{(n-1)!\theta^n}[x^{n-1}-\binom{n}{1}(x-\theta)^{n-1}] & , \; \theta\leq x\leq 2\theta \\ \dfrac{1}{(n-1)!\theta^n}[x^{n-1}-\binom{n}{1}(x-\theta)^{n-1}+\binom{n}{2}(x-2\theta)^{n-1}] & , \; 2\theta\leq x\leq 3\theta \\ . \\ . \\ . \\ \dfrac{1}{(n-1)!\theta^n}[x^{n-1}-\binom{n}{1}(x-\theta)^{n-1}+\binom{n}{2}(x-2\theta)^{n-1}-\cdots+(-1)^{n-1}(x-(n-1)\theta)^{n-1}] & , \; (n-1)\theta\leq x<n\theta \\ 0 & , \; d.y.\end{cases}$$

$$
= \begin{cases} \dfrac{1}{(n-1)!\,\theta^n} \displaystyle\sum_{j=0}^{k} (-1)^j \binom{n}{j} (x - j\theta)^{n-1} & , \ k\theta \le x \le (k+1)\theta \ ; \ k = 0,1,\ldots,n-1 \\ 0 & , \ d.y. \end{cases}
$$

elde edilir. Bu ifade yardımıyla S_n nin dağılım fonksiyonu

$$
F^{n*}(x) = \begin{cases} 0 \quad , \qquad x < 0 \\ \dfrac{1}{n!\,\theta^n} \displaystyle\sum_{j=0}^{k} (-1)^j \binom{n}{j} (x - j\theta)^n & , \ k\theta \le x \le (k+1)\theta \ ; \ k = 0,1,\ldots,n-1 \\ 1 \quad , \qquad x \ge n\theta \end{cases}
$$

bulunur. Böylece $N(x)$ yenileme rasgele değişkenin olasılık fonksiyonu için bir kapalı form

$$
P(N(x) = n) = \begin{cases} 0 & , \ (n+1)\theta \le x \\ \dfrac{((n+1)\theta - x)}{n!\,\theta^{n+1}} \displaystyle\sum_{j=0}^{k} \dfrac{(-1)^j}{(n-j+1)} \binom{n}{j} (x - j\theta)^n & , \ k\theta \le x \le (k+1)\theta ; k = 0,1,\ldots n-1 \\ 1 - \dfrac{1}{(n+1)!\,\theta^{n+1}} \displaystyle\sum_{j=0}^{n} (-1)^j \binom{n+1}{j} (x - j\theta)^{n+1} & , \ n\theta \le x \le (n+1)\theta \end{cases}
$$

olarak bulunur. Ayrıca $M(x)$, (3.4) ifadesinde $F^{n*}(x)$ in yukarıdaki analitik ifadesinin kullanılmasıyla analitik olarak elde edilebilir.

$$
M(x) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n*}(x)
$$

$$
= \begin{cases}
-1+e^{x/\theta} & , 0 \le x \le \theta \\
-1+e^{x/\theta} - \dfrac{x-\theta}{\theta} e^{\frac{x-\theta}{\theta}} & , \theta \le x \le 2\theta \\
-1+e^{x/\theta} - \dfrac{x-\theta}{\theta} e^{\frac{x-\theta}{\theta}} + \dfrac{(x-\theta)^2}{2!\theta^2} e^{\frac{x-2\theta}{\theta}} & , 2\theta \le x \le 3\theta \\
. & \\
. & \\
. & \\
-1+e^{x/\theta} - \dfrac{x-\theta}{\theta} e^{\frac{x-\theta}{\theta}} + \ldots + (-1)^n \dfrac{(x-n\theta)^n}{n!\theta^n} e^{\frac{x-n\theta}{\theta}} & , n\theta \le x \le (n+1)\theta \\
. & \\
. & \\
. &
\end{cases}
$$

$$
= -1 + \sum_{j=0}^{k} \frac{(-1)^j}{j!} \left(\frac{x-j\theta}{\theta} \right)^j e^{\frac{x-j\theta}{\theta}} \quad , \; k\theta \le x \le (k+1)\theta ; k = 0,1,\ldots
$$

dır.

3.3.1.3 Hiper üstel dağılım

X rasgele değişkenin olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$
f(x) = \begin{cases} \dfrac{\theta_1 \theta_2}{\theta_2 - \theta_1} (e^{-\theta_1 x} - e^{-\theta_2 x}) & , \quad x > 0;\ \theta_2 > \theta_1 > 0 \\ 0 & , \quad d.y. \end{cases}
$$

olsun. n=1,2,… için X_n ler yukarıda verilen hiper üstel dağılıma sahip bağımsız rasgele değişkenler olmak üzere $\{N(x), x \ge 0\}$ yenileme süreci göz önüne alınsın. Bu sürecin ortalama değer fonksiyonu (3.4) konvolüsyon serisi ya da (3.5) integral denklemi dışında kolaylıkla (3.9) dan elde edilebilecek Laplace-Stieltjes ya da Laplace dönüşümünün ters dönüşümünün alınmasıyla elde edilebilir. Gerçekten

$$
f_L(x) = \frac{\theta_1 \theta_2}{(x+\theta_1)(x+\theta_2)}
$$

olup (3.9) dan

$$M_L(x) = \frac{\theta_1 \theta_2}{x^2(x+\theta_1+\theta_2)}$$

elde edilir. M_L nin ters Laplace dönüşümünün alınmasıyla

$$M(x) = \frac{\theta_1 \theta_2}{(\theta_1+\theta_2)^2}(e^{-(\theta_1+\theta_2)x} - 1 + (\theta_1+\theta_2)x) \ , \ x \geq 0$$

bulunur.

3.3.1.4 Gama dağılımı

$\{N(x), x \geq 0\}$ yenilemeler arası geçen zaman süreleri $\alpha, \beta > 0$ parametreli gama dağılımına sahip bir yenileme süreci olsun. Bu durumda $[0,x]$ deki her bir yenileme süresinin olasılık yoğunluk ve dağılım fonksiyonu sırasıyla

$$f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} x^{\alpha-1} e^{-x/\beta} \ , \quad x \geq 0$$

ve

$$F(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} \int_0^x x^{\alpha-1} e^{-x/\beta} dx \quad , \quad x \geq 0$$

dır. $\alpha > 0$ reel sayısının doğal sayı olması durumunda F için kapalı bir formun

$$F(x) = 1 - \sum_{k=0}^{\alpha-1} \frac{(x/\beta)^k}{k!} e^{-x/\beta} \quad , \quad x \geq 0$$

olduğu bilinmektedir. $n \geq 1$ için S_n rasgele değişkeni $n\alpha$ ve β parametreli gamma dağılımına sahip olduğundan

$$F^{n*}(x) = 1 - \sum_{k=0}^{n\alpha-1} \frac{(x/\beta)^k}{k!} e^{-x/\beta}$$

ve

$$P(N(x)=n)=\sum_{k=n\alpha}^{(n+1)\alpha-1}\frac{(x/\beta)^k}{k!}e^{-x/\beta}$$

dır.

Şimdi $N(x)$'in olasılık üreten fonksiyonu yardımıyla $M(x)$'nin bilinen kapalı form ifadesini elde edelim.

$N(x)$ nin olasılık üreten fonksiyonunu P ile gösterelim. $G(z,x)=\sum_{n=1}^{\infty}z^{n-1}F^{n*}(x)$ olmak üzere

$$\begin{aligned}P(z,x)&=\sum_{n=0}^{\infty}z^n P(N(x)=n)\\&=1+(z-1)G(z,x)\end{aligned}$$

dir. $y^{\alpha}=z$ dönüşümünün yapılmasıyla

$$\begin{aligned}G(z,x)&=\sum_{n=1}^{\infty}z^{n-1}F^{n*}(x)\\&=\sum_{n=1}^{\infty}z^{n-1}[\int_0^x\frac{(x/\beta)^{n\alpha-1}}{\beta(n\alpha-1)!}e^{-x/\beta}dx]\\&=\int_0^x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^{n-1}(x/\beta)^{n\alpha-1}}{\beta(n\alpha-1)!}e^{-x/\beta}dx\\&=y^{1-\alpha}\int_0^x\frac{e^{-x/\beta}}{\beta}(\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{xy}{\beta})^{n\alpha-1}/(n\alpha-1)!)dx\end{aligned}$$

bulunur. Herhangi bir u reel sayısı ve α tamsayısı olmak üzere $c=e^{2\pi i/\alpha}$ alındığında

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{u^{n\alpha-1}}{(n\alpha-1)!}=\frac{1}{\alpha}\sum_{r=0}^{\alpha-1}c^r e^{uc^r}$$

olduğu bilinmektedir (Parzen 1962). Böylece

$$G(z,x) = y^{1-\alpha}\frac{1}{\alpha}\int_0^x \frac{e^{-x/\beta}}{\beta}(\sum_{r=0}^{\alpha-1} c^r e^{xyc^r/\beta})dx$$

$$=y^{1-\alpha}\frac{1}{\alpha\beta}\sum_{r=0}^{\alpha-1} c^r \int_0^x e^{x(yc^r-1)/\beta}dx$$

$$=\frac{1}{\alpha z}\sum_{r=0}^{\alpha-1}\frac{z^{1/\alpha}c^r}{1-z^{1/\alpha}c^r}(1-e^{-x(1-z^{1/\alpha}c^r)/\beta})$$

bulunduğundan $N(x)$ nin olasılık üreten fonksiyonu

$$P(z,x)= 1+(z-1)G(z,x)$$

$$=1+\frac{z-1}{\alpha z}\frac{z^{1/\alpha}}{1-z^{1/\alpha}}(1-e^{-x(1-z^{1/\alpha})/\beta})+\frac{z-1}{\alpha z}\sum_{r=1}^{\alpha-1}\frac{z^{1/\alpha}c^r}{1-z^{1/\alpha}c^r}(1-e^{-x(1-z^{1/\alpha}c^r)/\beta})$$

olarak bulunur. Buradan

$$h(z,x) = \frac{z-1}{\alpha z}\frac{z^{1/\alpha}}{1-z^{1/\alpha}}(1-e^{-x(1-z^{1/\alpha})/\beta})$$

ve

$$g(z,x) = \sum_{r=1}^{\alpha-1}\frac{z^{1/\alpha}c^r}{1-z^{1/\alpha}c^r}(1-e^{-x(1-z^{1/\alpha}c^r)/\beta})$$

gösterimiyle

$$\frac{dP(z,x)}{dz} = \frac{dh(z,x)}{dz}+\frac{1}{\alpha}(\frac{1}{z^2}g(z,x)+\frac{z-1}{z}\frac{dg(z,x)}{dz})$$

yazılabilir.

$$g(z,x)\big|_{z=1} = \sum_{r=1}^{\alpha-1}\frac{c^r}{1-c^r}(1-e^{-x(1-c^r)/\beta}) \ ,$$

$$\frac{dg(z,x)}{dz}\Big|_{z=1} = \sum_{r=1}^{\alpha-1}[\frac{1}{\alpha}\frac{c^r}{1-c^r}(1+\frac{c^r}{1-c^r})(1-e^{-x(1-c^r)/\beta})-\frac{t}{\alpha\beta}\frac{c^{2r}}{1-c^r}e^{-x(1-c^r)/\beta}] \ ,$$

$$\frac{dh(z,x)}{dz}=\frac{1}{\alpha}\frac{d}{dz}(\frac{z^{1/\alpha}-z^{1/\alpha-1}}{1-z^{1/\alpha}})(1-e^{-x(1-z^{1/\alpha})/\beta})+\frac{1}{\alpha}\frac{d}{dz}(1-e^{-x(1-z^{1/\alpha})/\beta})\frac{z^{1/\alpha}-z^{1/\alpha-1}}{1-z^{1/\alpha}}$$

dır. $z\rightarrow 1$ için $(1-e^{-x(1-z^{1/\alpha})/\beta})\rightarrow 0$, $\frac{d}{dz}(1-e^{-x(1-z^{1/\alpha})/\beta})\rightarrow -\frac{x}{\alpha\beta}$, $\frac{z^{1/\alpha}-z^{1/\alpha-1}}{1-z^{1/\alpha}}\rightarrow -\alpha$,

$\frac{d}{dz}(\frac{z^{1/\alpha}-z^{1/\alpha-1}}{1-z^{1/\alpha}})\rightarrow \frac{1}{2}(\alpha-1)$ olduğundan

$$\lim_{z\rightarrow 1}\frac{dh(z,x)}{dz}=\frac{x}{\alpha\beta}$$

bulunur. Bu durumda

$$\lim_{z\rightarrow 1}\frac{dP(z,x)}{dz}=\frac{x}{\alpha\beta}+\frac{1}{\alpha}\sum_{r=1}^{\alpha-1}\frac{c^r}{1-c^r}(1-e^{-x(1-c^r)/\beta})$$

dır. Böylece bu sürecin yenileme fonksiyonu α bir doğal sayı olmak üzere sırasıyla

$$M(x)=\frac{x}{\alpha\beta}+\frac{1}{\alpha}\sum_{r=1}^{\alpha-1}\frac{c^r}{1-c^r}(1-e^{-x(1-c^r)/\beta}) \qquad (3.10)$$

ile kapalı bir formda elde edilir.

$\alpha=1$, $\alpha=2$, $\alpha=3$ ve $\alpha=4$ için sırasıyla (3.10) den

$$M(x)=\frac{x}{\beta}$$

$$M(x)=\frac{x}{2\beta}-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}e^{-2x/\beta} \qquad (3.11)$$

$$M(x)=\frac{x}{3\beta}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}e^{-3x/2\beta}(\cos(\frac{\sqrt{3}x}{2\beta})+\frac{1}{\sqrt{3}}\sin(\frac{\sqrt{3}x}{2\beta})) \qquad (3.12)$$

$$M(x)=\frac{x}{4\beta}-\frac{3}{8}+\frac{1}{8}e^{-2x/\beta}+\frac{1}{4}e^{-x/\beta}(\cos(\frac{x}{\beta})+\sin(\frac{x}{\beta})) \qquad (3.13)$$

$$-\frac{1}{9}e^{-3x/\beta}(\cos(\frac{\sqrt{3}x}{2\beta})+\frac{1}{\sqrt{3}}\sin(\frac{\sqrt{3}x}{2\beta}))^2$$

ifadeleri bulunur.

3.3.2 Yenileme fonksiyonun sayısal hesabı (rs-yöntemi)

Bu kısımda M yenileme fonksiyonunun (3.6) integral denkleminden sayısal çözümü için Xie (1989) tarafından verilen RS-yöntemi üzerinde durulur.

Riemann-Stieltjes integralin tanımının ışığı altında $\int_a^b g(x)dh(x)$ integrali, $[a,b]$ aralığının bir parçalanması $\Delta = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ olmak üzere,

$$\int_a^b g(x)dh(x) = \sum_{i=1}^{n} g((x_i + x_{i-1})/2)(h(x_i) - h(x_{i-1}))$$

şeklinde yazılabilir. Riemann-Stieltjes integralin sayısal hesaplanması için kullanılabilecek bu formülde parçalanmanın normu küçüldükçe yaklaşımın daha iyi olacağı açıktır. (3.6)'da verilen

$$M(x) = F(x) + \int_0^x F(x-y)dM(y), \quad x \geq 0$$

integral denklemini göz önüne alalım. x verilmiş bir değer ve $\{x_0, x_1, \cdots, x_n\}$ $0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = x$ koşulunu sağlayan bir parçalanma olsun. Bu durumda,

$$M(x_i) = F(x_i) + \int_0^x F(x_i - y)dM(y)$$

olup yukarıdaki ifadenin kullanılmasıyla

$$M(x_i) = F(x_i) + \sum_{j=1}^{i} F(x_i - (x_j + x_{j-1})/2)(M(x_j) - M(x_{j-1}))$$

bulunur. Böylece $T_i = \sum_{j=1}^{i-1} F\left(x_i - \left(x_j + x_{j-1}\right)/2\right)\left(M\left(x_j\right) - M\left(x_{j-1}\right)\right)$ alındığında ardışık olarak, $\widetilde{M}\left(x_0\right) = 0$ olmak üzere M yenileme fonksiyonu

$$\widetilde{M}\left(x_i\right) = \frac{F\left(x_i\right) + T_i - F\left(x_i - \left(x_i + x_{i-1}\right)/2\right)\widetilde{M}\left(x_{i-1}\right)}{1 - F\left(x_i - \left(x_i + x_{i-1}\right)/2\right)}, i = 1,2,\ldots,n$$

ile yaklaşık olarak hesaplanabilir (Xie 1989).

F dağılım fonksiyonu yerine f olasılık yoğunluk fonksiyonu verildiğinde, yani F 'nin kapalı bir formda ifadesi yok ise F dağılım fonksiyonu,

$$F\left(x_i\right) = F\left(x_{i-1}\right) + f\left(\left(x_i - x_{i-1}\right)/2\right)\frac{x}{n}, i = 1,2,\ldots,n$$

formülü ile kolaylıkla hesaplanabilir.

(3.5) ve (3.6) denklemleri teorik olarak denktirler. Literatürde en yaygın olanı (3.5) denklemi olmasına rağmen RS yöntemi (3.6) denkleminin çözümüne kısıtlanmıştır. Eşit olmayan adım uzunlukları kullanırsa (3.6) denklemi ardışık çözüm için daha basit görünür. Aynı zamanda (3.5) yerine (3.6)'ün kullanılmasının temel avantajı $F(x)$'nin büyük x'ler için hemen hemen sabit olmasıdır ve böylece $F\left(x_i\right) - F\left(x_{i-1}\right)$'deki yuvarlama hatası nispeten büyük olacaktır.

4. İKİ BOYUTLU YENİLEME SÜREÇLERİ VE YENİLEME FONKSİYONU

Bu bölümde iki boyutlu yenileme süreçleri ile ilgili iki boyutlu yenileme rasgele değişkenlerinin olasılık dağılımları, olasılık üreten fonksiyonları elde edilir. Iki boyutlu yenileme sürecinde rasgele değişkenlerinin bağımsızlığı durumunda marjinallerinin çarpımı şeklinde yazıldığı gösterilir. Daha sonra, $N(x,y)$ rasgele değişkeninin dağılımı ve olasılık üreten fonksiyonu üzerinde durulur. Iki boyutlu yenileme fonksiyonu tanımlanır ve bazı denk ifadeleri verilir. Son olarak, iki boyutlu üstel dağılım için bu fonksiyonun elde edilmesi üzerinde durulur.

4.1 İki Boyutlu Yenileme Süreçleri

$(X_1,Y_1),(X_2,Y_2),\cdots$ negatif olmayan bağımsız ve aynı dağılımlı iki boyutlu rasgele değişkenler olsunlar. Bu rasgele vektörlerin ortak dağılım fonksiyonu

$$F(x,y)=P(X_n\le x, Y_n\le y),\ n=1,2,\cdots$$

$$S_n=(S_{1n},S_{2n})=\left(\sum_{i=1}^{n}X_i,\sum_{i=1}^{n}Y_i\right), n\ge 1$$

olmak üzere

$$N(x,y)=maks\{n: S_{1n}\le x, S_{2n}\le y\},\quad x,y\ge 0$$

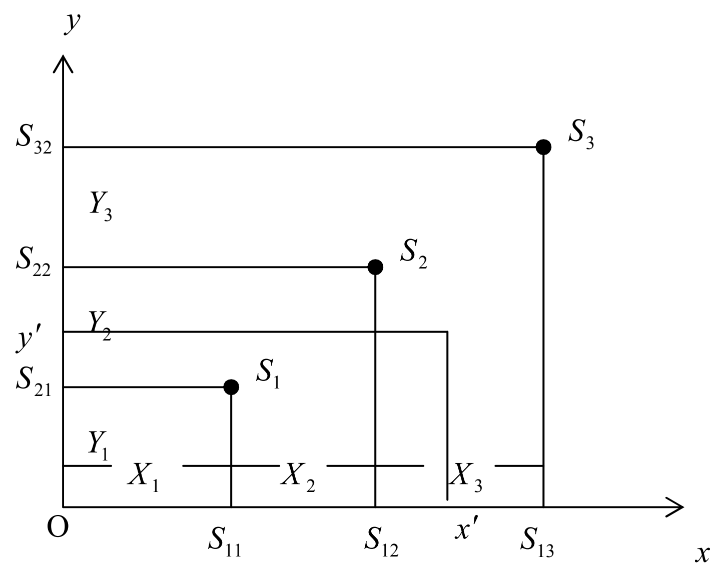
ile verilen $\{N(x,y),x,y\ge 0\}$ sürecine iki boyutlu yenileme süreci denir.

$(X_n)_{n=1,2,\cdots}$ ve $(Y_n)_{n=1,2,\cdots}$ rasgele değişken dizileri de birer yenileme süreci doğurur ve bu süreçleri sırasıyla $\{N_1(x),x\ge 0\}$ ve $\{N_2(y),y\ge 0\}$ ile gösterelim. Bu durumda

$$N(x,y)=\min\{N_1(x),N_2(y)\}$$

olacaktır. Burada $N_1(x) = maks\{n : S_{1n} \leq x\}, x \geq 0$ ve $N_2(y) = maks\{n : S_{2n} \leq y\}, y \geq 0$ dır. Ayrıca $\{(N_1(x), N_2(y)), x, y \geq 0\}$ sürecine de iki değişkenli yenileme süreci denildiğini belirtelim (Hunter 1974).

En az bir n için $S_{1n} = x$ ve $S_{2n} = y$ ise sırasıyla $\{N_1(x), x \geq 0\}$ ve $\{N_2(y), y \geq 0\}$ süreçlerine göre $x-$ ekseninde x noktasında bir $X-$ yenilemesi ve $y-$ ekseninde y noktasında bir $Y-$ yenilemesi gerçekleştiği söylenir. Ayrıca en az bir n için $S_{1n} = x$ ve $S_{2n} = y$ ise $xy-$ düzleminde (x, y) noktasında bir $(X, Y)-$ yenilemesi gerçekleşir denir. Bu durumda $N(x, y)$ $xy-$ düzleminde $(0, x] \times (0, y]$ dikdörtgenindeki (X, Y) yenilemelerinin sayısıdır. Buna ilişkin bir örnek aşağıdaki şekilde verilmiştir. Bu şekle göre $N_1(x') = 2$ ve $N_2(y') = 1$ iken $N(x', y') = 1$ 'dir.



Şekil 4.1 $xy-$ düzleminde (x', y') noktasına kadar gerçekleşen yenilemelerin sayısı

Örnek 4.1: Bozuldukça yenisiyle değiştirilen bir ürünü göz önüne alalım ve bu ürünün bozulmaları iki boyutlu bir dağılım ile karakterize edilsin. (X_1, Y_1) ürünün ilk bozulma zamanını ve ilk bozulmadaki kullanım süresini ifade etsin. Benzer olarak $n \geq 2$ için (X_n, Y_n) $(n-1)$.nci ve n.nci bozulma arasındaki zamanı ve bu iki bozulma arasındaki kullanım süresini belirtsin. $n = 1, 2, \cdots$ için (X_n, Y_n) iki boyutlu rasgele değişkenlerinin bağımsız ve aynı dağılımlı olduğu kabul edilebilir. Bu durumda bu rasgele vektörler bir $\{N(x,y), x,y \geq 0\}$ iki boyutlu yenileme süreci ortaya çıkarır ve ürünün bozulmaları (yenilenmeleri) bu sürece göre gerçekleşir.

4.2 $(N_1(x), N_2(y))$ İki Boyutlu Rasgele Değişkenin Dağılımı

Bu kısımda verilen herhangi $x,y \geq 0$ için $N_1(x)$ ve $N_2(y)$ rasgele değişkenlerinin ortak olasılık ve ortak olasılık üreten fonksiyonları bulunur. Ayrıca bu bilgiler yardımıyla $N_1(x)$ ve $N_2(y)$ rasgele değişkenlerinin bağımsızlığı için gerek ve yeter şartlar verilir.

$\{N_1(x), x \geq 0\}$ ve $\{N_2(y), y \geq 0\}$ süreçleri bir boyutlu yenileme süreçleridir. Bu durumda (3.2) ifadesinin göz önüne alınmasıyla verilen herhangi $x,y \geq 0$ için $(N_1(x), N_2(y))$ iki boyutlu rasgele değişkeninin marjinal olasılık dağılımları sırasıyla

$$P(N_1(x) = m) = F_1^{m*}(x) - F_1^{(m+1)*}(x),\ m = 0,1,2,\cdots$$

ve

$$P(N_2(y) = n) = F_2^{n*}(x) - F_2^{(n+1)*}(x),\ n = 0,1,2,\cdots$$

olur. Şimdi $N_1(x)$ ve $N_2(y)$ rasgele değişkenlerinin ortak olasılık dağılımını bulalım.

$$\begin{aligned} q_{m+r,m}(x,y) &= P(N_1(x) \geq m+r, N_2(y) \geq m) \\ &= P(S_{1,m+r} \leq x, S_{2,m} \leq y) \end{aligned}$$

olup, $(S_{1,m}, S_{2,m})$ üzerinden koşullandırma yapılmasıyla

$$q_{m+r,m}(x,y)=\int_0^\infty\int_0^\infty P\left(S_{1,m+r}\le x, S_{2,m}\le y / X_1+X_2+\cdots+X_m=u, Y_1+Y_2+\cdots+Y_m=v\right)dF^{m*}(u,v)$$

$$=\int_0^\infty\int_0^\infty P\left(X_1+\cdots+X_m+X_{m+1}+\cdots+X_{m+r}\le x, Y_1+\cdots+Y_m\le y / X_1+\cdots+X_m=u, Y_1+\cdots+Y_m=v\right)dF^{m*}(u,v)$$

$$=\int_0^\infty\int_0^\infty P\left(u+X_{m+1}+\cdots+X_{m+r}\le x, v\le y\right)dF^{m*}(u,v)$$

$$=\int_0^\infty\int_0^y P\left(u+X_{m+1}+\cdots+X_{m+r}\le x\right)dF^{m*}(u,v)$$

$$=\int_0^x\int_0^y P\left(X_{m+1}+\cdots+X_{m+r}\le x-u\right)dF^{m*}(u,v)$$

$$=\int_0^x\int_0^y F^{r*}(x-u,\infty)dF^{m*}(u,v)=F_1^{r*}*F^{m*}(x,y)$$

bulunur. Böylece

$$q_{m+r,m}(x,y)=P\left(N_1(x)\ge m+r, N_2(y)\ge m\right)=F_1^{r*}*F^{m*}(x,y) \tag{4.1}$$

olur. Benzer olarak

$$q_{m,m+r}(x,y)=P\left(N_1(x)\ge m, N_2(y)\ge m+r\right)=F_2^{r*}*F^{m*}(x,y) \tag{4.2}$$

ve

$$q_{m,m}(x,y)=P\left(N_1(x)\ge m, N_2(y)\ge m\right)=F^{m*}(x,y) \tag{4.3}$$

elde edilir. Ayrıca

$$\begin{aligned}
p_{m,n}(x,y) &= P\left(N_1(x)=m, N_2(y)=n\right)\\
&= P\left(N_1(x)\ge m, N_2(y)=n\right)-P\left(N_1(x)\ge m+1, N_2(y)=n\right)\\
&= P\left(N_1(x)\ge m, N_2(y)\ge n\right)-P\left(N_1(x)\ge m+1, N_2(y)\ge n+1\right)\\
&\quad -P\left(N_1(x)\ge m+1, N_2(y)\ge n\right)+P\left(N_1(x)\ge m+1, N_2(y)\ge n+1\right)\\
&= q_{m,n}-q_{m,n+1}-q_{m+1,n}+q_{m+1,n+1}
\end{aligned}$$

dır. Böylelikle yukarıdaki eşitlikte (4.1), (4.2) ve (4.3) ifadelerinin kullanılmasıyla $N_1(x)$ ve $N_2(y)$ rasgele değişkenlerinin ortak olasılık dağılımına ulaşılır. Bu ortak dağılım aşağıdaki teoremde verilir.

Teorem 4.1 $m, n = 0,1,2,\cdots$, $r = 1,2,\cdots$ ve $x, y \geq 0$ için

(i) $p_{m,m}(x,y) = [F_0 - F_1 - F_2 + F] * F^{m*}(x,y)$,

(ii) $p_{n+r,n}(x,y) = \left[F_1^{r*} - F_1^{(r+1)*} - F_1^{(r-1)*} * F + F_1^{r*} * F\right] * F^{n*}(x,y)$,

(iii) $p_{m,m+r}(x,y) = \left[F_2^{r*} - F_2^{(r+1)*} - F_2^{(r-1)*} * F + F_2^{r*} * F\right] * F^{m*}(x,y)$.

4.2.1 $(N_1(x), N_2(y))$ İki boyutlu rasgele değişkenin olasılık üreten fonksiyonu

(4.1), (4.2) ve (4.3)'de $(N_1(x), N_2(y))$ rasgele vektörünün "kuyruk olasılıkları" için veriler ifadeler $N_1(x)$ ve $N_2(y)$ rasgele değişkenlerinin ortak olasılık fonksiyonu için Teorem 3.1'de verilenlerden matematiksel olarak çok daha kolayca kullanılabilir. Bu nedenle $(N_1(x), N_2(y))$'nin olasılık üreten fonksiyonunu bulmak için öncelikle kuyruk olasılıklarının üretici fonksiyonu elde edilir. Bu fonksiyonun (2.20)'de yerine konmasıyla olasılık üreten fonksiyona ulaşılır.

$$Q(x, y; s_1, s_2) = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} q_{m,n}(x,y) s_1^{\,m} s_2^{\,n}$$

olmak üzere Hunter (1974) göstermiştir ki $x, y \geq 0$ ve $|s_1|, |s_2| < 1$ için

$$Q(x, y; s_1, s_2) = \left[1 + \sum_{i=1}^{\infty} s_1^i F_1^{i*} + \sum_{i=1}^{\infty} s_2^j F_2^{j*}\right] * \left[\sum_{r=0}^{\infty} (s_1 s_2)^r F^{r*}(x,y)\right] \tag{4.4}$$

dır. Bu ifadenin (2.20) ifadesinde kullanılmasıyla $N_1(x)$ ve $N_2(y)$ rasgele değişkenlerinin ortak olasılık üreten fonksiyonu $P(x, y; s_1, s_2)$

$$P(x,y;s_1,s_2)=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}p_{m,n}(x,y)s_1^m s_2^n \text{ için}$$

$$s_1s_2P(x,y;s_1,s_2)=(1-s_1)(1-s_2)\left[F_0+\sum_{i=1}^{\infty}s_1^iF_1^{i*}+\sum_{j=1}^{\infty}s_2^jF_2^{j*}\right]*\left[\sum_{r=1}^{\infty}(s_1s_2)^rF^{r*}(x,y)\right]$$

$$-s_2(1-s_1)\sum_{i=1}^{\infty}s_1^iF_1^{i*}(x)-s_1(1-s_2)\sum_{j=1}^{\infty}s_2^jF_2^{j*}(y)+s_1s_2,\ |s_1|<1,|s_2|<1,x,y\geq 0 \qquad (4.5)$$

olarak elde edilir.

Yukarıdaki ifadede sırasıyla $s_2=1$ ve $s_1=1$ alınırsa $N_1(x)$ ve $N_2(y)$ rasgele değişkenlerinin marjinal olasılık üreten fonksiyonları $x,y\geq 0$ ve $|s_1|,|s_2|\leq 1$ için

$$P_1(x;s_1)=1+(s_1-1)\sum_{i=1}^{\infty}F_1^{i*}s_1^{i-1}$$

ve

$$P_2(y;s_2)=1+(1-s_2)\sum_{j=1}^{\infty}F_2^{j*}(y)s_2^{j-1}$$

olur.

4.2.2 $(N_1(x),N_2(y))$ İki boyutlu rasgele değişkenin olasılık üreten fonksiyonunun laplace dönüşümü

$(N_1(x),N_2(y))$'nin P olasılık üreten fonksiyonunun iki boyutlu Laplace dönüşümünü kolaylıkla bulmak için izlenecek yol $q_{m,n}$ "kuyruk olasılıkları" için üretici fonksiyon olan Q'nun Laplace dönüşümünü bulmaktır.

(2.16) ifadesinden

$$(F*G)_L(p,q)=F_L(p,q)g_L(p,q)$$

olduğunu biliyoruz. Bu ifade göz önüne alınarak (4.4)'deki

$$Q(x,y;s_1,s_2)=\left[1+\sum_{i=1}^{\infty}s_1^i F_1^{i*}+\sum_{j=1}^{\infty}s_2^j F_2^{j*}\right]*\left[\sum_{r=0}^{\infty}(s_1 s_2)^r F^{r*}(x,y)\right]$$

ifadesine Laplace dönüşümünün uygulanmasıyla aşağıda verilen teoremdeki sonuca ulaşılır.

Teorem 4.2

$$Q_L(p,q;s_1,s_2)=\frac{1-s_1 s_2 f_L(p,0)f_L(0,q)}{pq[1-s_1 s_2 f_L(p,q)][1-s_1 f_L(p,0)][1-s_2 f_L(0,q)]}$$

dır.

(2.20)'de verilen

$$s_1 s_2 P(s_1,s_2)=1-(1-s_1)Q(s_1,0)-(1-s_2)Q(0,s_2)+(1-s_1)(1-s_2)Q(s_1,s_2)$$

ifadesinin Laplace dönüşümü alınarak Teorem 3.2'deki Q_L kullanıldığında aşağıdaki sonuçta verilen $N_1(x)$ ve $N_2(y)$'nin ortak olasılık üreten fonksiyonun Laplace dönüşümü elde edilir.

Sonuç 4.1

$$\begin{aligned}P_L(p,q;s_1,s_2)=&\frac{(1-s_1)(1-s_2)[f_L(p,q)-f_L(p,0)f_L(0,q)]}{pq[1-s_1 s_2 f_L(p,q)][1-s_1 f_L(p,0)][1-s_2 f_L(0,q)]}\\&+\frac{[1-f_L(p,0)][1-s_2 f_L(0,q)]}{pq[1-s_1 f_L(p,0)][1-s_2 f_L(0,q)]}\end{aligned} \tag{4.6}$$

dır.

$P_L(p,q;s_1,1)=\frac{1}{q}(P_1)_L(p;s_1)$ ve $P_L(p,q;1,s_2)=\frac{1}{p}(P_2)_L(q;s_2)$ olup (2.14) ve (2.15) ifadelerinin yukarıdaki ifadede kullanılmasıyla $N_1(x)$ ve $N_2(y)$ rasgele değişkenlerinin marjinal olasılık üreten fonksiyonlarının Laplace dönüşümleri sırasıyla

$$(P_1)_L(p;s_1) = \frac{1-(f_1)_L(p)}{p[1-s_1(f_1)_L(p)]} \quad , \quad |s_1| \le 1 \tag{4.7}$$

ve

$$(P_2)_L(q;s_2) = \frac{1-(f_2)_L(q)}{p[1-s_2(f_2)_L(q)]} \quad , \quad |s_2| \le 1 \tag{4.8}$$

olarak bulunur.

4.2.3 $N_1(x)$ ve $N_2(y)$ Rasgele değişkenlerinin kovaryans özellikleri

$\{N_1(x), x \ge 0\}$ ve $\{N_2(y), y \ge 0\}$ süreçleri bir boyutlu yenileme süreçleri olup (3.4) denkleminden

$$E(N_1(x)) = \sum_{i=1}^{\infty} F_1^{i*}(x), \quad x \ge 0$$

ve

$$E(N_2(y)) = \sum_{j=1}^{\infty} F_2^{j*}(y), \quad y \ge 0$$

yazılabilir. Bu durumda (2.24) ve (4.4) ifadeleri göz önüne alındığında verilen herhangi $x, y \ge 0$ için $N_1(x)$ ve $N_2(y)$ rasgele değişkenlerinin kovaryansı,

$$Cov(N_1(x), N_2(y)) = \left[1 + \sum_{i=1}^{\infty} F_1^{i*} + \sum_{j=1}^{\infty} F_2^{j*}\right] * \left[\sum_{r=1}^{\infty} F^{r*}(x,y)\right] - \left[\sum_{i=1}^{\infty} F_1^{i*}(x)\right]\left[\sum_{j=1}^{\infty} F_2^{j*}(y)\right]$$

olarak bulunur.

$$K(x,y) = Cov(N_1(x), N_2(y)), \quad x, y \ge 0$$

diyelim. Bu fonksiyonun yukarıdaki ifadesine Laplace dönüşümünün uygulanmasıyla

$$K_L(p,q)=\frac{f_L(p,q)-f_L(p,0)f_L(0,q)}{pq[1-f_L(p,q)][1-f_L(p,0)][1-f_L(0,q)]} \tag{4.9}$$

bulunur. Yukarıdaki ifadenin kullanılmasıyla $N_1(x)$ ve $N_2(y)$ rasgele değişkenlerinin bağımsızlığının bunların kovaryanslarının sıfıra eşit olmasına denk olduğu gösterilebilir. Buna ilişkin sonuç aşağıdaki teorem ile verilir.

Teorem 4.3 Aşağıdaki (i), (ii) ve (iii) ifadeleri denktir.

(i) X ve Y bağımsızdır.

(ii) *Her* $x, y \geq 0$ için $Cov(N_1(x), N_2(y)) = 0$.

(iii) *Her* $x, y \geq 0$ için $N_1(x)$ ile $N_2(y)$ birbirinden bağımsızdır.

İspat:

X ve Y bağımsız $\Leftrightarrow F(x,y)=F_1(x)F_2(y), \quad \forall x,y\geq 0$

$$\Leftrightarrow f(x,y)=f_1(x)\cdot f_2(y), \quad \forall x,y\geq 0$$
$$\Leftrightarrow f_L(p,q)=(f_1)_L(p)(f_2)_L(q)=f_L(p,0)\cdot f_L(0,q)$$

yazılabilir. Ayrıca,

$\forall x,y\geq 0$ için

$$K(x,y)=Cov(N_1(x),N_2(y))=0 \;\Leftrightarrow\; K_L(p,q)=0$$
$$\Leftrightarrow f_L(p,q)=f_L(p,0)f_L(0,q) \text{ (3.23 ifadesinden)}$$

dır. Benzer olarak,

$\forall x,y\geq 0$ için $N_1(x)$ ve $N_2(y)$ bağımsız

$$\Leftrightarrow P(x,y;s_1,s_2) = P_1(x;s_1)P_2(y;s_2)$$

$$\Leftrightarrow P_L(p,q;s_1,s_2) - (P_1)_L(p;s_1)\cdot(P_2)_L(q;s_2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(1-s_1)(1-s_2)[f_L(p,q) - f_L(p,0)f_L(0,q)]}{pq[1-s_1s_2f_L(p,q)][1-s_1f_L(p,0)][1-s_2f_L(0,q)]} = 0 \quad \text{(4.6, 4.7 ve 4.8 ifadelerinden)}$$

$$\Leftrightarrow f_L(p,q) - f_L(p,0)f_L(0,q) = 0$$

olur. Böylelikle ispat tamamlanır.

4.3 $N(x,y)$ Rasgele Değişkeninin Dağılımı ve Olasılık Üreten Fonksiyonu

$\{N(x,y), x,y \geq 0\}$ iki boyutlu bir yenileme süreci olsun. x ve y 'nin her sabit değeri için $N(x,y)$ negatif olmayan tamsayı değerli kesikli bir rasgele değişken olup bu rasgele değişkenin olasılık dağılımı, $N(x,y) = \min\{N_1(x), N_2(y)\}$, $x,y \geq 0$ ifadesinin göz önüne alınmasıyla

$$\begin{aligned}
P(N(x,y) = n) &= P(N(x,y) \geq n) - P(N(x,y) \geq n+1) \\
&= P(N_1(x) \geq n, N_2(y) \geq n) - P(N_1(x) \geq n+1, N_2(y) \geq n+1) \\
&= P(S_{1n} \leq x, S_{2n} \leq y) - P(S_{1(n+1)} \leq x, S_{2(n+1)} \leq y) \\
&= F^{n*}(x,y) - F^{(n+1)*}(x,y), \quad x,y \geq 0, n = 0,1,\ldots
\end{aligned}$$

olarak bulunur.

Şimdi $N(x,y)$ iki boyutlu kesikli rasgele değişkenin olasılık üreten fonksiyonunu bulalım. $x,y \geq 0$ ve $|s| \leq 1$ için

$$\begin{aligned}
\Pi(x,y;s) &= \sum_{n=0}^{\infty} P(N(x,y) = n)\cdot s^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left[F^{n*}(x,y) - F^{(n+1)*}(x,y)\right]\cdot s^n
\end{aligned}$$

$$= \left(1 - F^{1*}(x,y)\right) + \left(F^{1*}(x,y) - F^{2*}(x,y)\right)s + \left(F^{2*}(x,y) - F^{3*}(x,y)\right)s^2 + \cdots$$
$$= 1 - F^{1*}(x,y) + F^{1*}(x,y)s - F^{2*}(x,y)s + F^{2*}(x,y)s^2 - F^{3*}(x,y)s^2 + \cdots$$
$$= 1 + s\sum_{n=1}^{\infty} F^{n*}(x,y)s^{n-1} - \sum_{n=1}^{\infty} F^{n*}(x,y)s^{n-1}$$
$$= 1 + (s-1)\sum_{n=1}^{\infty} F^{n*}(x,y)s^{n-1}$$

dır. Yani $N(x,y)$'nin olasılık üreten fonksiyonu

$$\Pi(x,y;s) = 1 + (s-1)\sum_{n=1}^{\infty} F^{n*}(x,y)s^{n-1} \tag{4.10}$$

(4.10) ifadesine Laplace dönüşümü uygulandığında

$$\Pi_L(p,q) = \frac{1 - f_L(p,q)}{pq\left[1 - sf_L(p,q)\right]} \tag{4.11}$$

elde edilir.

4.4 İki Boyutlu Yenileme Fonksiyonu ve Yenileme Yoğunluğu

$\{N(x,y), x,y \geq 0\}$ iki boyutlu yenileme süreci olmak üzere

$$M(x,y) = E(N(x,y)), \quad x,y \geq 0$$

ile verilen sürecin ortalama değer fonksiyonuna iki boyutlu yenileme fonksiyonu denir.

$$\begin{aligned} M(x,y) &= E(N(x,y)) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} P(N(x,y) \geq n) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} P(\min\{N_1(x), N_2(y)\} \geq n) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} P(S_{1n} \leq x, S_{2n} \leq y) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} F^{n*}(x,y), \end{aligned}$$

yani

$$M(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}F^{n*}(x,y), \quad x,y\geq 0. \tag{4.12}$$

M 'nin (4.12) konvolüsyon serisi ifadesinden

$$M_1(x)=M(x,\infty)$$

ve

$$M_2(y)=M(\infty,y)$$

bulunur. Burada M_1 ve M_2 fonksiyonları sırasıyla $\{N_1(x), x\geq 0\}$ ve $\{N_2(y), y\geq 0\}$ yenileme süreçlerine ilişkin yenileme fonksiyonlarıdır.

M 'nin (3.26) ifadesinin F dağılım fonksiyonu ile iki boyutlu konvolüsyonu

$$\begin{aligned} M*F(x,y) &= \sum_{n=1}^{\infty}F^{(n+1)*}(x,y) \\ &= M(x,y)-F(x,y) \end{aligned}$$

olduğundan M iki boyutlu yenileme fonksiyonu için

$$M(x,y)=F(x,y)+\int_0^x\int_0^y M(x-u,y-v)dF(u,v) \tag{4.13}$$

integral denklemi elde edilir. Bu denklem (3.5)'de bir boyutlu yenileme fonksiyonu için verilen yenileme denkleminin bir benzeri olup iki boyutlu yenileme denklemi olarak adlandırılır.

(4.13) integral denklemine Laplace-Stieltjes dönüşümünün uygulanması ile

$$M_{LS}(p,q)=\frac{F_{LS}(p,q)}{1-F_{LS}(p,q)} \tag{4.14}$$

ve

$$F_{LS}(p,q)=\frac{M_{LS}(p,q)}{1+M_{LS}(p,q)} \tag{4.15}$$

ifadeleri elde edilir. Bir fonksiyonun Laplace Stieltjes dönüşümü o fonksiyonu tek olarak belirlediğinden yukarıdaki ifadelerin göz önüne alınmasıyla M ve F fonksiyonları birbirlerini tek olarak belirler, böylece iki boyutlu bir yenileme süreci iki boyutlu yenileme fonksiyonu ile karakterize edilir.

$F(x,y)$ mutlak sürekli ise

$$m(x,y)=\frac{\partial^2 M(x,y)}{\partial x \partial y}$$

ile verilen m fonksiyonuna iki boyutlu yenileme sürecinin iki boyutlu yenileme yoğunluğu denir.

$$m(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty} f^{n*}(x,y), \qquad x,y \geq 0$$

olduğu açıktır.
İki boyutlu yenileme denkleminden türev alınarak

$$m(x,y)=f(x,y)+\int_0^x\int_0^y m(x-u,y-v)f(u,v)dudv \tag{4.16}$$

integral denklemine ulaşılır. Bu denkleme iki boyutlu yenileme yoğunluğu integral denklemi adı verilir.
(4.16) integral denkleminin Laplace dönüşümünün alınmasıyla

$$m_L(p,q) = \frac{f_L(p,q)}{1 - f_L(p,q)} \tag{4.17}$$

bulunur.

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{P(x < S_{1n} \le x + \Delta x, y < S_{2n} \le y + \Delta y)}{\Delta x \Delta y} = f^{n*}(x,y)$$

olduğu bilinmektedir. Bu durumda $\Delta x, \Delta y$ çok küçük iken

$$P(x < S_{1n} \le x + \Delta x, y < S_{2n} \le y + \Delta y) \approx \Delta x \Delta y f^{n*}(x,y)$$

olacağından

$$m(x,y)\Delta x \Delta y = \sum_{n=1}^{\infty} f^{n*}(x,y)\Delta x \Delta y$$

olur. Böylece $m(x,y)\Delta x \Delta y$, $(x, x+\Delta x) \times (y, y+\Delta y)$ dikdörtgeninde bir yenileme gerçekleşmesi olasılığını ifade eder.

4.5 Örnek (İki Değişkenli Üstel Dağılım)

$\{N(x,y), x,y \ge 0\}$, F dağılımı aşağıda verilen iki değişkenli üstel dağılım olan iki boyutlu bir yenileme süreci olsun. X ve Y rasgele değişkenlerinin ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f(x,y) = \frac{\lambda_1 \lambda_2}{1-\rho} \exp\left\{ -\frac{\lambda_1 x + \lambda_2 y}{1-\rho} \right\} \mathrm{I}_0\left(\frac{2(\rho \lambda_1 \lambda_2 xy)^{1/2}}{1-\rho} \right) \quad x,y > 0; \lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0; 0 \le \rho < 1$$

ise X ve Y'nin ortak dağılımına iki değişkenli üstel dağılım denir. Burada I_0,

$$\mathrm{I}_0(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2k}}{(k!)^2},\quad x\geq 0$$

ile verilen 0. mertebeden birinci çeşit genişletilmiş Bessel fonksiyonudur. Bu ortak dağılımın marjinal dağılımları sırasıyla $\mu_1=\frac{1}{\lambda_1}$ ve $\mu_2=\frac{1}{\lambda_2}$ ortalamalı üstel ve $Cov(X,Y)=\rho$ olduğu kolaylıkla gösterilebilir. $\rho=0$ olması X ve Y'nin bağımsız olmasına denktir. Ayrıca f'nin Laplace dönüşümünün

$$f_L(p,q)=\frac{1}{(1+\mu_1 p)(1+\mu_2 q)-\rho\mu_1\mu_2 pq}$$

olduğu bilinir (Hunter 1974).

$f_L(p,q)$'nun yukarıdaki ifadesi kullanılarak verilen herhangi $x,y>0$ için $(N_1(x),N_2(y))$ ve $N(x,y)$ rasgele değişkenlerinin olasılık üreten fonksiyonlarının Laplace dönüşümleri sırasıyla (4.6) ve (4.11) ifadeleri kullanılarak

$$P_L(p,q;s_1,s_2)=\frac{\{[\rho\mu_1\mu_2(1-s_1)(1-s_2)/[1-s_1s_2+\mu_1 p+\mu_2 q+(1-\rho)\mu_1\mu_2 pq]]+\mu_1\mu_2\}}{[1-s_1+\mu_1 p]\cdot[1-s_2+\mu_2 q]}$$

ve

$$\Pi_L(p,q;s_1,s_2)=\frac{\mu_1 p+\mu_2 q+(1-\rho)\mu_1\mu_2 pq}{pq[1-s+\mu_1 p+\mu_2 q+(1-\rho)\mu_1\mu_2 pq]}$$

biçiminde elde edilir. Prensip olarak $(N_1(x),N_2(y))$ ve $N(x,y)$ rasgele değişkenlerinin dağılımlarına yukarıdaki ifadelerden ulaşılabilir.

İki değişkenli üstel dağılımın marjinal dağılımları λ_1 ve λ_2 parametreli üstel olduğundan $\{N_1(x),x\geq 0\}$ ve $\{N_2(y),y\geq 0\}$ yenileme süreçleri λ_1 ve λ_2 oranlı Poisson sürecidir. Böylece $(N_1(x),N_2(y))$ iki değişkenli Poisson dağılımına sahip iki boyutlu bir rasgele değişkendir. $\rho = 0$ iken X ile Y bağımsız olacağından Teorem 3.3'ün kullanılmasıyla $N_1(x)$ ve $N_2(y)$ rasgele değişkenleri her $x, y \geq 0$ için bağımsız olur.

f_L'nin yukarıdaki ifadesi (4.17) denkleminde yerine konulduğunda iki boyutlu yenileme yoğunluğunun Laplace dönüşümü

$$m_L(p,q) = \frac{1}{(\mu_1 p + \mu_2 q + (1-\rho)\mu_1\mu_2 pq)}$$

olarak bulunur. Bu ifadeye ters Laplace dönüşümünün uygulanmasıyla

$$m(x,y) = \frac{\lambda_1\lambda_2}{1-\rho}\exp\left(-\frac{\lambda_1 x + \lambda_2 y}{1-\rho} I_0\left(\frac{2(\lambda_1\lambda_2 xy)^{1/2}}{1-\rho}\right)\right)$$

elde edilir (Hunter 1974).

İki değişkenli üstel dağılıma karşılık gelen iki boyutlu yenileme sürecinin yenileme fonksiyonunu $M_\rho(x,y)$ ile gösterelim. Bu fonksiyonun Laplace dönüşümü

$$\begin{aligned}(M_\rho)_L(p,q) &= \frac{m_L(p,q)}{pq} \\ &= \frac{1}{[pq(\mu_1 p + \mu_2 q + (1-\rho)\mu_1\mu_2 pq)]}\end{aligned} \tag{4.18}$$

olur. Bunun yardımıyla

$$M_\rho(x,y) = (1-\rho)M_0\left(\frac{x}{1-\rho}, \frac{y}{1-\rho}\right), \quad x, y \geq 0 \tag{4.19}$$

elde edilir (Hunter 1974). Burada $S_{1n} \sim\ gama\left(\alpha = n, \beta = \dfrac{1}{\lambda_1}\right)$ ve

$S_{2n} \sim\ gama\left(\alpha = n, \beta = \dfrac{1}{\lambda_2}\right)$ olduğundan

$$
\begin{aligned}
M_0(x,y) &= \sum_{n=1}^{\infty} F^{n^*}(x,y) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} P(S_{1n} \le x, S_{2n} \le y) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} P(S_{1n} \le x) P(S_{2n} \le y) \qquad\qquad (X \text{ ile } Y \text{ bağımsız}) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_0^x \frac{\lambda_1^n}{\Gamma(n)} u^{n-1} e^{-\lambda_1 u} du \right) \left(\int_0^y \frac{\lambda_2^n}{\Gamma(n)} u^{n-1} e^{-\lambda_2 u} du \right)
\end{aligned}
\tag{4.20}
$$

dır. Eğer $P_n(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{u^{n-1} e^{-u}}{\Gamma(n)} du$ dersek

$$M_0(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} P_n(\lambda_1 x) P_n(\lambda_2 y), \quad x, y \ge 0 \tag{4.21}$$

olur. P_n fonksiyonu tam olmayan gama fonksiyonu olarak bilinir. Her $x \ge 0$ için

$$P_n(x) = 1 - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^k}{k!} e^{-x}, \quad x \ge 0$$

dır.

5. GARANTİ ANALİZİ

Garanti, bir üreticinin (satıcının) belirlenmiş bir zamandan önce bozulan bir ticari veya tüketim malını tamir veya değiştirilmesini (yenilenmesini) kabul etmesi durumunda mukaveleden doğan bir mecburiyettir. Üreticiler garantiyi güven vasfı, mal satışının artışının sağlanması ve alıcı (tüketici) riskinin azalması gibi değişik amaçların üstesinden gelmek için mallarının kalitesinin reklâmı olarak kullanırlar. Garantili ve garantisiz malların fiyat farkları ve özellikle garanti süresi satıcı – alıcı açısından önemli etkenlerdir.

Garanti kapsamında satılan bir ürünün (malın) üretici ya da tüketici açışından değişik garanti politikaları altında belirli bir zaman aralığında (garanti süresi, ürünün piyasada kaldığı süre gibi) garanti masrafı ya da kazancına ilişkin dağılımın beklenen değerini ve bunlarla ilgili bazı özel hesapların çıkartılması ile ilgili incelemelere garanti analizi denir. Bir ürünün ömrü rasgele olduğundan rasgele zamanlarda bozulan ürün yenisiyle değiştirilir. Bu durumda bu ürün yardımıyla bir yenileme süreci oluşturulur ve böylece garanti analizi yapabilmek için yenileme teorisi araçlarına ihtiyaç duyulur, yani garanti analizi yenileme teorisine bağlı bir analizdir. Dayanma süresi F dağılımına sahip bir ürünü düşünelim. Çoğu ürün için F bir boyutlu dağılım fonksiyonu iken bazı ürünler için F iki boyutlu bir dağılım fonksiyonu olabilir. Örneğin bir araba lastiğinin ömrü iki boyutlu bir dağılım ile daha anlamlı modellenebilir. Bu dağılıma karşılık gelen iki boyutlu rasgele değişkenin birinci değişkeni yaşı ifade ederken ikinci değişkeni kullanım süresini belirler. Ürünün ömrünün dağılımı olan F bir boyutlu ise yapılan analizi bir boyutlu garanti analizi denilirken F nin iki boyutlu olması durumunda bu analize iki boyutlu garanti analizi denilir. Çalışmanın bu kısmında bir ve iki boyutlu garanti analizi üzerinde durulur. Bu analizler için değişik garanti politikaları verilir ve bu politikalar altında bazı hesaplamalar yapılır.

5.1 Bir Boyutlu Garanti Analizi

Uygulanan tek boyutlu garanti, önceden belirlenmiş $(0,W)$ zaman periyodu içerisinde ürünün yenisiyle değiştirilmesini ya da tamir edilmesini sağlar. Bazı ürünlerin maliyeti tamirinden daha masraflı olmasına rağmen, üretici bir sonraki yenilemelerini de düşünerek yenisiyle değiştirilmesini tercih eder.

Tek boyutlu garanti analizinde kullanılan garanti politikalarından en önemlilerinden biri FRW (ücretsiz yer değiştirme garantisi) politikasıdır (Murthy and Wilson 1995). Bu politikaya göre, $(0,W)$ zaman periyodu içerisinde bozulan bir ürün, ya yenisiyle değiştirilir ya da bozulan ürün tamir edilir. Bu garanti altında iki durumda da üreticinin tüketiciden herhangi bir ücret talebi olmaz (Blischke and Scheuer 1981) Pratikte bu politikaya bağlı olarak bozulan ürünler tamir edilir; çünkü bu garantinin uygulandığı ürünler genellikle tamir edilebilen pahalı ürünlerdir. Örneğin; beyaz eşya, müzik seti vb.

Diğer bir politika ise PRW (ücretin paylaştırıldığı yer değiştirme garantisi) politikasıdır. Bu garanti politikası da FRW 'ya benzerdir. Burada da, $(0,W)$ zaman periyodunda bozulan ürün ya yenisiyle değiştirilir ya da tamir edilir. Fakat bu politikada diğerinden farklı olarak, bozulan ürünün yaşına bağlı olarak kararlaştırılan belirli bir oranda üretici tüketiciden ücret talep eder. Bu politika altında pratikte bozulan ürünler yenisiyle değiştirilir. Çünkü bu ürünler genellikle tamir edilmesi zor ve çok pahalı olmayan ürünlerdir. Örneğin mutfak eşyaları, piller vb.

FRW ve PRW politikalarının özellikleri kullanılarak bunların kombinasyonundan oluşan bir garanti politikası da ürünlere uygulanabilir. Bu garanti şeklinde ise $W < T$ olmak uzere $(0,W]$ zaman periyodunda bozulan bir ürün üreticiden hiçbir ücret talep edilmeksizin yenisiyle değiştirilirken $(W,T]$ aralığında bozulan ürün için üretici belirli bir oranda tüketiciden ücret talep eder. Bu politika tüketiciler için cazip olduğu halde üreticiler için pek istenmemektedir.

FRW ve PRW garantilerinin tüketici ve üretici için hem avantajları hem de dezavantajları vardır. Üretici gözüyle FRW politikası, özellikle karmaşık ve yeni ürünlerde, ürünün kalitesini göstermede en önemli işarettir. Fakat bu ürünler $(0,W)$ periyodunda ne zaman bozulursa bozulsun tamir edileceğinden, tüketicinin ürünü hatalı kullanımına da eğilimlidir. Diğer yandan PRW politikasında, ürünün bozulduğu zamana bağlı olarak tüketiciden alınan belirli bir ücret karşılığı ürün yenilendiği için tüketicinin cesaretini kırmakta ve ürünü daha dikkatli kullanmaya teşvik etmektedir.

Ürünün her bir tamiri için ortalama tamir masrafı olan c'nin sabit bir değer olduğunu varsayalım. W garanti süresini, $M(w)$ garanti süresi içerisinde beklenen yenileme sayısını, r $(0 < r < 1)$ ise PRW politikası altında bu garanti süresi içinde yenileme (bozulma) meydana geldiğinde üreticinin ödeyeceği tamir masrafının oranını göstersin. C_W, bu garanti süresi boyunca üreticinin masrafı olmak üzere bu masrafın c, r ve $N(W)$ ya bağlı olduğu açıktır.

FRW politikası altında $r = 1$ olmak üzere

$$C_W = cN(w) \tag{5.1}$$

ve

PRW politikası altında

$$C_W = crN(w) \tag{5.2}$$

dır (Jie 1995). Burada { $N(t), t \geq 0$ }bahsedilen ürünün ardışık bozulma zamanları üzerine kurulu yenileme süreci olup $N(W)$, $(0,W]$ garanti aralığında gerçekleşen ürün bozulmalarının sayısıdır. $N(W)$ rasgele değişkeninin dağılımı teorik bilindiğinden her iki strateji altında C_W masraf rasgele değişkeninin dağılımı elde edilebilir. Kısım 3.3.1 de belirtilen Üstel, şekil parametresi doğal sayı olan gama, düzgün ve hiper üstel dağılım için C_W nın dağılımı analitik olarak bulunabilir. Bu dağılımlar dışında C_W nın analitik ifadesine ulaşılamaz.

Üretici C_W masraf rasgele değişkeninin dağılımından daha çok pratikte $E(C_W)$ ortalama masrafını bilmek ister. FRW ve PRW garanti politikaları altında üreticinin ortalama masrafı sırasıyla

$$E(C_W) = cM(W) \tag{5.3}$$

ve

$$E(C_W) = rcM(W) \tag{5.4}$$

olur.

Ürünün ömrünün dağılımı üstel, Erlang, düzgün ve hiper üstel iken $E(C_W)$ ortalama masrafına Kısım 3.3 de verilen analitik ifadeler yardımıyla kolaylıkla ulaşılır. Bu dağılımlar dışındaki dağılımlar içinde $E(C_W)$ Kısım 3.3.2 de verilen RS- yöntemiyle hesaplanabilir.

Örnek 5.1: Garanti kapsamında satılan ürünün ömrünün dağılımı $\alpha = 2$ ve $\beta = 4$ parametreleri ile gama dağılımına sahip olsun. $W = 10$, $c = 15$ ve $r = \frac{1}{2}$ olmak üzere FRW ve PRW politikaları altında üreticinin bu ürün için ortalama garanti masraflarını bulalım.(3.11) den

$$M(x) = \frac{x-2}{8} + \frac{1}{4}e^{-\frac{x}{2}}, x \geq 0$$

olduğunu biliyoruz. Bu durumda FRW politikası için

$$\begin{aligned} E(C_W) &= cM(W) \\ &= 15M(10) \\ &= 10 + \frac{5}{2}e^{-5} \\ &= 10.0168 \end{aligned}$$

ve PRW politikası için

$$
\begin{aligned}
E(C_W) &= rcM(W) \\
&= \frac{1}{2}15M(10) \\
&= 5 + \frac{5}{4}e^{-5} \\
&= 5.0084
\end{aligned}
$$

elde edilir.

c maliyetli g satış fiyatlı bir ürün için garanti süresi W olsun. $M_X(W)$, garanti süresi boyunca ücretsiz yenilemelerinin sayısının ortalaması olmak üzere satıcının beklenen kazancı

$$K(W) = g - c(1 + M_X(W)) \tag{5.5}$$

olur. Burada X rasgele değişkeni ürünün ömrünü gösterir. Uzun süreli o ürünleri kullanan ve garanti süresinden sonra bozulduğu zaman anında satın alan bir alıcı için satın almalar arasındaki dönemlerin uzunluğu Y rasgele değişkeni ile gösterilsin. $Y = W + A(W)$ dır. $A(W)$, W anında kullanılmakta olan ürünün geriye kalan ömrü olan rasgele değişkendir ve kalan ömür rasgele değişkeni olarak bilinir. Y nin olasılık dağılımı, X in olasılık dağılımına ve W garanti süresine bağlı olacaktır. Belli bir sabit T anına kadar alıcı için dönemlerin ortalama sayısı $M_Y(T)$ olmak üzere T anında satıcının beklenen kazancı

$$K_T(W) = M_Y(T)(g - c(1 + M_X(W))) \tag{5.6}$$

dır (Blischke and Scheuer 1981). Burada T genellikle ürünün piyasada kaldığı süre olarak ifade edilir. Üreticinin uzun dönemli $K_T(W)$ beklenen kazanç X ve Y nin dağılımına bağlı olarak Kısım 3.3 de verilen araçlar yardımıyla analitik ya da sayısal olarak hesaplanabilir. Burada Y nin dağılımı, X in dağılımı ve M_X yenileme fonksiyonuna bağlı olan $A(W)$ kalan ömür rasgele değişkeninin

$$F_{A(W)}(x) = F(W + x) - \int_0^W (1 - F(W + x - y))dM_X(y)$$

dağılım fonksiyonu ile elde edilir (Blischke and Scheuer 1981).

5.2 İki Boyutlu Garanti Analizi

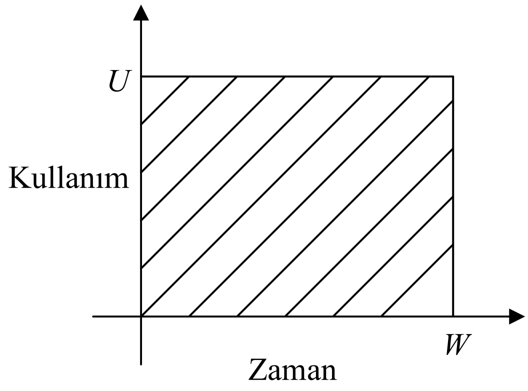
İki boyutlu garanti, tek boyutlu garantinin genişletilmiş şeklidir. Tek boyutlu garanti sadece malın dayanma süresine bağlı iken, bu garanti şeklinde hem malın satışından itibaren geçen zaman hem de malın kullanılma süresine bağlıdır. Bundan dolayı, bu garanti, bir ekseninde malın kullanılma süresi diğer ekseninde ise satışından itibaren geçen zaman sürecinin bulunduğu iki boyutlu bölge ile karakterize edilir. Kim and Rao (2000) farklı basit dikdörtgenlerle karakterize edilen garanti bölgeleriyle 2 tane yeni iki boyutlu garanti politikası vermişlerdir. Bir boyutlu garanti analizinde olduğu gibi bu garanti politikaları altında garanti masrafının dağılımı ve beklenen garanti masraflarının elde edilmesi önemlidir.

Rasgele bir yaşa ve kullanım süresine sahip iki boyutlu bir dağılım ile ömrü modellenen c maliyetli bir ürün için $[0,W]X[0,U]$ kartezyen kümesi garanti bölgesi olsun. Burada W ve U pozitif reel sayılardır. $N(W,U)$, bu garanti bölgesinde gerçekleşen yenilemelerin (bozulmaların) sayısı olsun. $\{ N(W,U), W > 0, U > 0 \}$ sürecinin Kısım 4.1 den iki boyutlu yenileme süreci olduğunu biliyoruz. Bu sürecin ortalama değer fonksiyonu

$$M(W,U) = E(N(W,U))$$

olmak üzere $M(W,U)$ garanti bölgesinde ürünlerin ücretsiz yenilemelerin ortalama sayısıdır. Aşağıda iki boyutlu garanti analizi ile ilgili 2 ayrı politika verilir.

POLİTİKA A



Şekil 5.1 Politika A altında taralı alanla gösterilen garanti bölgesi

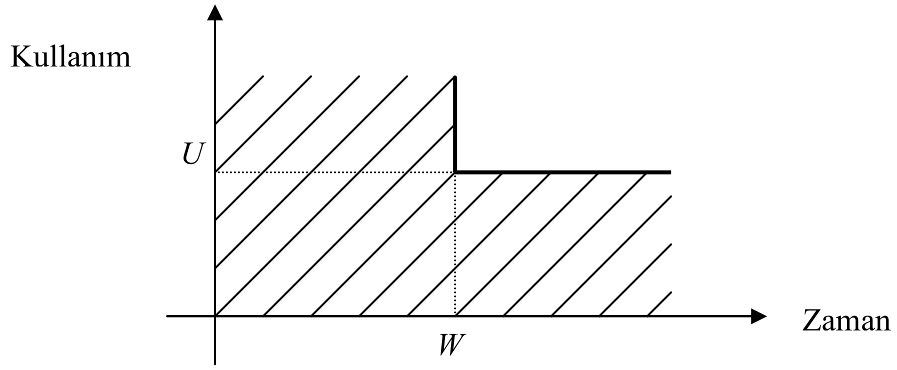
Şekil 5.1'de gösterilen $[0,W]\times[0,U]$ dikdörtgeniyle Politika A'nın garanti bölgesi karakterize edilir. Bu bölgenin dışında gerçekleşen ilk yenileme ile bu garantiye son verilir, yani maksimum kullanım limiti U ya da maksimum zaman limiti W nun aşılmasıyla garanti sona erer. Politika A satıcılar tarafından tercih edilen bir politikadır.

A politikası altında satıcının beklenen garanti masrafı;

$$E(C^A(W,U)) = c.M(W,U) \tag{5.7}$$

dır.

POLİTİKA B



Şekil 5.2 Politika B altında taralı alanla gösterilen garanti bölgesi

Şekil 5.2'de taralı olarak gösterilen sınırsız şeritler garanti bölgesini karakterize eder. Bu garanti, ürünün hem maksimum kullanım limiti U'nun hem de maksimum zaman limiti W'nun ilk aşıldığı zaman sona erer. Bu politika ürünü çok sık kullanan ya da çok az kullanan tüketiciler tarafından tercih edilir.

$N^B(W,U)$, Politika B altında meydana gelen yenilemelerin sayısı olmak üzere;

$$N^B(W,U) = Maks(N_1(W), N_2(U)) = N_1(W) + N_2(U) - N(W,U) \tag{5.8}$$

dır. Burada $N(W,U) = \min\{N_1(W), N_2(U)\}$ olup $\{N_1(W), W \geq 0\}$ ve $\{N_2(U), U \geq 0\}$, $\{N(W,U); W,U \geq 0\}$ iki boyutlu yenileme sürecinin çıkardığı bir boyutlu yenileme süreçleridir. Bu politika altında üreticinin beklenen garanti masrafı;

$$E(C^B(W,U)) = c[M_1(W) + M_2(U) - M(W,U)] \tag{5.9}$$

olur. Burada $M_1(W)$ ve $M_2(U)$ sırasıyla $\{N_1(W), W \geq 0\}$ ve $\{N_2(U), U \geq 0\}$ süreçlerini yenileme fonksiyonlarıdır.

5.2.1 Bir örnek

İki boyutlu garanti analizinin hem A hem de B politikasında gerek beklenen garanti masrafının gerekse beklenen kazanç fonksiyonlarının analitik olarak elde edilebilmesi için yenileme fonksiyonları bilgisine ihtiyaç duyulmaktadır. Maalesef genelde yenileme fonksiyonlarının analitik ifadeleri mevcut olmadığında bu fonksiyonların sayısal olarak hesaplanması gerekmektedir. Buna ilişkin olarak Kim and Rao (2000) nin çalışmasından esinlenerek oluşturulan bir örnek aşağıda verilir.

Yeni bir otomobil göz önüne alınsın. Burada arabanın kullanılma birimi 10^4 mil ile gösterilirken yaşının birimini ise yıl ile ifade edilsin. Kitlemizde çok değişik araba kullanan kişiler olacaktır. Bu yüzden arabanın kullanımı için hafif kullanıcılar, orta kullanıcılar ve ağır kullanıcılar olmak üzere üç seviye seçilsin. X ve Y sırasıyla arabanın yaşını ve kullanım uzunluğunu gösteren rasgele değişkenler olmak üzere (X,Y), Kısım 4.5 de verilen λ_1, λ_2 ve ρ $(0 \leq \rho < 1)$ parametreli iki değişkenli üstel dağılım olsun. $i = 1,2,3$ için (X_i, Y_i) i. seviyedeki aracın ömrünü gösteren iki boyutlu rasgele değişken olmak üzere $\rho = \frac{1}{2}$ alınarak λ_1 ve λ_2 parametreleri her seviye için çizelge 5.1'de verilen biçimde seçilsin.

Çizelge 5.1 Üç seviye için iki değişkenli üstel dağılımın parametreleri

Kullanım	$E(X_i) = 1/\lambda_1$ (yıl)	$E(Y_i) = 1/\lambda_2 (10^4\, mil)$	$E(Y_i)/E(X_i)$
Hafif	4	2.0	0.5
Orta	3	3.0	1.0
Ağır	2	4.0	2.0

İki boyutlu üstel dağılım için karşılık gelen $\{ N_1(W), W \geq 0 \}$ve $\{ N_2(U), U \geq 0 \}$yenileme süreçleri sırasıyla $\lambda_1$ve $\lambda_2$oranlı birer Poisson süreci olduğundan

$$M_1(W) = \lambda_1 W$$

ve

$$M_2(U) = \lambda_2 U$$

olur. Ayrıca yine bu dağılım durumunda $\{ N(W,U), W,U \geq 0 \}$ sürecinin yenileme fonksiyonu $M_\rho(W,U)$ için kapalı formda bir ifade (4.21) ifadesinin (4.19)'da kullanılmasıyla

$$M_\rho(W,U) = (1-\rho)\sum_{n=1}^{\infty} P_n\left(\frac{\lambda_1 W}{1-\rho}\right) P_n\left(\frac{\lambda_2 U}{1-\rho}\right) \tag{5.10}$$

bulunur. Burada $P_n(x) = \int_0^x \frac{z^{n-1}e^{-z}}{\Gamma(n)} dz$ ile verilen tam olmayan gama fonksiyonudur.

Çizelge 5.1' de verilen üç ayrı seviyenin λ_1 ve λ_2 parametrelerinin değerleri ve bu üç seviyenin her birinde korelasyon katsayısı $\rho = \frac{1}{2}$ olmak üzere W ve U sayıları 0, 0.5, 1 ,1.5 ,2 olarak seçilmiştir. Mathlab paket programında yazılan bir bilgisayar programı ile (5.10) da verilen serinin ilk 50 terimin hesaplatılmasıyla A ve B politikaları için $c = 1$ seçilerek ortalama garanti masrafları $E(C^A(W,U))$ ve $E(C^B(W,U))$ yaklaşık olarak elde edilmiştir. Bu değerler sırasıyla A ve B politikaları için Çizelge 5.2 ve Çizelge 5.3' de verilmiştir.

Çizelge 5.2 Politika A için beklenen garanti masrafı

U	Kullanım	W			
		0.5	1.0	1.5	2.0
	Hafif	0.0447	0.0735	0.0920	0.1039
0.5	Orta	0.0412	0.0723	0.0957	0.1133
	Ağır	0.0417	0.0816	0.1119	0.1369
	Hafif	0.0816	0.1369	0.1742	0.1994
1.0	Orta	0.0723	0.1293	0.1741	0.2093
	Ağır	0.0735	0.1369	0.1914	0.2381
	Hafif	0.1119	0.1914	0.2474	0.2867
1.5	Orta	0.0957	0.1741	0.2381	0.2901
	Ağır	0.0920	0.1742	0.2474	0.3123
	Hafif	0.1369	0.2381	0.3123	0.3662
2.0	Orta	0.1133	0.2093	0.2901	0.3577
	Ağır	0.1039	0.1994	0.2867	0.3662

Çizelge 5.3 Politika B için beklenen garanti masrafı

U	Kullanım	W				
		0.0	0.5	1.0	1.5	2.0
	Hafif	0.0000	0.1250	0.2500	0.3750	0.5000
0.0	Orta	0.0000	0.1667	0.3333	0.5000	0.6667
	Ağır	0.0000	0.2500	0.5000	0.7500	1.0000
	Hafif	0.2500	0.3303	0.5515	0.7830	1.0211
0.5	Orta	0.1667	0.2921	0.4277	0.5710	0.7200
	Ağır	0.1250	0.3303	0.4184	0.5131	0.6131
	Hafif	0.5000	0.4184	0.6131	0.8258	1.0506
1.0	Orta	0.3333	0.4277	0.5374	0.6592	0.7907
	Ağır	0.2500	0.5515	0.6131	0.6836	0.7619
	Hafif	0.7500	0.5131	0.6836	0.8776	1.0883
1.5	Orta	0.5000	0.5710	0.6592	0.7619	0.8766
	Ağır	0.3750	0.7830	0.8258	0.8776	0.9377
	Hafif	1.0000	0.6131	0.7619	0.9377	1.1338
2.0	Orta	0.6667	0.7200	0.7907	0.8766	0.9756
	Ağır	0.5000	1.0211	1.0506	1.0883	1.1338

Politika A ve B için garanti limitleri U ve W büyüdükçe beklenen yenilemelerin sayısı da artmıştır. U ve W değerleri verildiğinde, $E\left[C^{B}\left(W,U\right)\right] > E\left[C^{A}\left(W,U\right)\right]$ olduğu çizelgelerde görülmektedir. Beklenen yenileme sayıları karşılaştırıldığında Politika B hafif ve ağır kullanıcılar tarafından tercih edilmekte iken Politika A ise üreticiler tarafından tercih edilmektedir.

6. SONUÇ

Her iki garanti şeklinde ele alınan garanti politikaları altında üretici garanti masrafının beklenen değerini bilmek isteyecektir. Bu çalışmada bir ve iki boyutlu garanti analizinde sırasıyla bir ve iki boyutlu yenileme teorisi kullanılarak ele alınan garanti politikaları için beklenen garanti masrafları elde edilmiştir. Bunlara bağlı olarak üretici ve tüketici açısından garanti politikaları karşılaştırılmıştır. Bir boyutlu garanti analizinde üretici açısından PRW politikası FRW politikasına tercih edilir. Tüketici açısından bunun tersi geçerlidir. İki boyutlu garanti analizinde ele alınan iki değişkenli üstel dağılım örneğinde üretici için A politikası B politikasına tercih edilir. Pratikte karşılaşılabilecek başka iki boyutlu dağılımlar içinde benzer sonuçların çıkacağı düşüncesindeyiz.

KAYNAKLAR

Baxter, L.A. 1981. ‘‘Some Remarks on Numerical Convolutıon’’Communications in Statistics, Ser. B, 10, 281-288.

Baxter, L.A., Scheuer, E.M., Macconalogue, D.J. and Blischke, W.R. 1982. ‘‘On the Tabulatıon of the Renewal Function.’’ Technometrics, 24, 151-158.

Blischke, W.R. and Scheuer, E.M. 1981. “Applıcatıons of Renewal Theory in Analysis of the Free-Replacement Warranty’’ , Naval Research Logistics Quarterly, 28, 193-205.

Cui, L. and Xie, M.L. 2003.“ Some Normal Approximations For Renewal Function Of Large Weibull Shape Parameter”. Commun Statist. Simula. Computa, 32(1), 17-30.

Feller ,W. 1971. “An Introduction to Probability Theory and its Applications”. Volume II, Second Edition. John Wiley & Sons ,Inc.New York.

Grimmett, G.R. and Stırzaker, D. R. 1992. “Probability and Random Processes”. Oxford University Pres Inc.,New York.

Hunter, J. 1974. ”Renewal Theory In Two Dimensions: Basic Results”. Advances in Applied Probability, 6, 379-391.

Jie, M. 1995. Warranty Policies and Burn-in.

Kawata, T. 1972. “Fourier Analysis in Probability Theory”. Academic Pres, Inc. New York.

Kim, H.G. and Rao, B.M. 2000. “Expected warranty cost of two attribute free replacement warranties based on a bivariate exponential distribution”. Computers and Industrial Engineering, 38, 425-434.

Murthy, D.N.P. and Wilson, R.J. 1995. “Two-dimensional failure-free warranty policies:two-dimensional point process models”. Operation Research, 43, 356-366.

Parzen, E. 1962 . Stochastic Processes. Holden-Day, Inc. San Fracisco.

Ross, M.S. 1983. Stochastic Processes. John Wiley&Sons,İnc., New York.

Xie, M.1989. ‘‘On the Solution of Renewal Type Integral Equations”. Commun. Statist. Simula, 18(1), 281-293.

Xie, M.1989. ‘‘Some Results on the Renewal Equations’’. Commun. Statist. Theory Meth, 18(3), 1159-1171.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı: Zeynep ORAN

Doğum Yeri: Ankara

Doğum Tarihi: 02.06.1980

Medeni Hali: Bekar

Yabancı Dili: İngilizce

Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl)

Lise	: Gazi Anadolu Lisesi 1994-1998
Lisans	: Ankara Üniversitesi 1998-2002

Çalıştığı Kurum ve Yıl

Devlet İstatistik Enstitüsü Siirt Bölge Müdürlüğü 2004-