ANKARA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

KÜTLEÇEKİM TEORİSİNDE DİFERENSİYEL GEOMETRİ YÖNTEMLERİ

ERDAL ÇATAK

FİZİK MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI

ANKARA
2006

Prof. Dr. Zekeriya AYDIN danışmanlığında, Erdal ÇATAK tarafından hazırlanan "**Kütleçekim Teorisinde Diferansiyel Geometri Yöntemleri**" adlı tez çalışması 02/10/2006 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oybirliği ile Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Fizik Mühendisliği Anabilim Dalı'nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Başkan: Prof. Dr. Zekeriya AYDIN
Ankara Üniversitesi Fizik Mühendisliği A.B.D.

Üye : Prof. Dr. Metin ÖNDER
Hacettepe Üniversitesi Fizik Mühendisliği A.B.D.

Üye : Yrd. Doç. Dr. Refik TURAN
Ankara Üniversitesi Fizik Mühendisliği A.B.D.

Yukarıdaki sonucu onaylarım

Prof. Dr. Ülkü MEHMETOĞLU
Enstitü Müdürü

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

KÜTLEÇEKİM TEORİSİNDE DİFERENSİYEL GEOMETRİ YÖNTEMLERİ

Erdal ÇATAK

Ankara Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Fizik Mühendisliği Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Z. Zekeriya AYDIN

Newtonian olmayan kütleçekim teorisi uzayın eğriliğini madde alanlarının enerji-momentum formlarına bağlar, dolayısıyla uzay yapısı ve madde ilişkisinin anlaşılabilmesi için diferensiyel geometriye başvurulmalıdır. Bu ilişkiyi anlayabilmek için birinci bölümde temel geometrik tanımlar verildi. İkinci bölümde manifoldlar (çok katlılar) üzerinde differensiyellenebilme, türev işlemcileri, dönüşümler ve integral hesapları ele alındı. Üçüncü bölümde uzayın eğriliği ve kovaryant türev arasındaki ilişkiler çıkarıldı. Bunlara bağlı olarak Bianchi özdeşlikleri ve eğrilik formları çıkarıldı ve geodezik vektör alanları ve Killing vektör alanları incelendi. Dördüncü bölümde Lagrangian formülasyonu kurululararak, elektromanyetik alan denklemleri ve Einstein alan denklemleri çıkarıldı. Einstein alan denklemlerinin farklı formları çıkarıldı. Beşinci bölümde maksimal simetrik uzayların genel özellikleri ve metrik yapıları çıkarıldı.

2006, 193 sayfa

Anahtar Kelimeler: Kütleçekim, Kovaryant Türev, Eğri Uzaylar, Einstein Alan Denklemleri

ABSTRACT

Master Thesis

DIFFERENTIAL GEOMETRIC METHODS IN GRAVITATION

Erdal ÇATAK

Ankara University
Graduate School of Naturel and Applied Sciences
Department of Physics Engineer

Supervisor: Prof. Dr. Z. Zekeriya AYDIN

Nonnewtonian theory of gravitation relates the curvature of space to the energy-momentum of matter fields. Therefore, in order to able to understand the space structure and its relation to matter, one has to use differential geometric methods. In this thesis,at first, fundamental geometric definations are given. Then the notions of differentiation on the manifolds, derivative operators, transformations and integral calculus are introduced. Relations between the curvature of space and covariant derivative are derived. After the derivation of Bianchi identities and curvature forms, geodesic vector fields and Killing vector fields are studied. Finally, within the framework of Lagrangian formulation electromagnetic field equations and Einstein field equations are derived. Also, different forms of Einstein field equations are derived. In last section of the thesis general properties of maximal symmetric spaces and metrics are discussed.

2006, 193 pages.

Key Words: Gravitation, Covariant Derivative, Curvature, Curved Spaces, Einstein Field Equations.

TEŞEKKÜR

Bu çalışmada birlikte çalıştığımız ve çalışmanın her safhasında yakın ilgi ve önerileri ile beni yönlendiren danışman hocam sayın Prof. Dr. Z. Zekeriya AYDIN'a ve bana verdiği destek ve önerilerinden dolayı sayın Prof. Dr. Abdullah VERÇİN'e teşekkür ederim. Ayrıca daima benimle olan ve tezi yazarken verdikleri manevi ve teknik destekleri için sevgili arkadaşlarım Zafer KARAOĞLAN ve Deniz AGPUNAR'a ve biricik arkadaşım Elif Dürbin'e teşekkürlerimi sunarım. Eğitim ve öğretim hayatım boyunca bana destek olan aileme minnettarım.

Erdal ÇATAK

Ankara, Ekiml 2006

İÇİNDEKİLER

SİMGELER DİZİNİ

(V,Φ)	Harita
C^p	p-kere türevlenebilir fonksiyonların cümlesi
C_0^p	Kompakt destekli C^p-fonksiyonlar
∂M	M, manifoldunun sınırı
$\Theta_C(q)$	Tanjant gönderimi
$T_q(M)$	q noktasında tanjant uzayı
$T_q(f)$	q noktasında f 'nin türevi
$T(M)$	Tanjant demeti
Π	Bir baz üzerine izdüşüm
$T(f)$	$f: M_1 \to M_2$ gönderiminin türevi
$\mathrm{T}_0^1(M)$	Vektör alanları cümlesi
L_X	Lie türevi
∂_i	Tanjant uzayı üzerinde doğal baz
Φ_t^X	Akış
τ_t^X	Akışın otomorfizimi
W	Eylem
L	Lagrangian
H	Hamiltonian
$T_q^*(M)$	Kotanjant uzayı
e_i^*	Dual baz
df	Bir fonksiyonun türevi
$\mathrm{T}_{qs}^r(M)$	Tensör uzayı
$\langle \mid \rangle$	Skaler çarpım
$\otimes$	Tensör çarpım
$\wedge$	Kama (dış) çarpım
i_X, i_υ	İç çarpım
ε	Hacim m-formu
$*1$	Hacim m-formu
$*$	Yıldız gönderimi (Hodge dualite gönderimi)
$T_s^r(M)$	Tensör demeti
g	Metrik (pseudo-Riemannian metrik)
$\mathrm{T}_s^r(M)$	Tensör alanları cümlesi
Λ_p	p-form
$E_p(M)$	p-form
$\overset{\pi}{\times}$	Lif çarpım

Φ^*	Pull-back gönderimi (kovartant tensörlerin ters gör
d	Dış türev
$[,]$	Lie parantezi
$\eta_{\alpha\beta}$	Minkowsi uzayı metriği
$e^{i_1 i_2 \dots i_p}$	p-form bazı
δ	Kodiferensiyel
Δ	Laplace-Beltrami işlemcisi
L_υ	Lie türevi
ω_k^i	Afin bağlantı
S	Süper potansiyel
S_p	Kesit
D	Dış kovaryant türev
D_X	Kovaryant türev
L_υ	Kovaryant Lie türevi
Ω	Eğrilik formu
R	Uzay-zaman üzerinde eğrilik formu
Γ_{ijk}	Christoffel sembolleri
R_{ijkm}	Riemann-Christoffel tensörü
C_{jk}	Weyl formları
L	Lagrangian
A	Vektör potansiyel
F	Elektromanyetik 2-form
Λ	Ayar fonksiyonu
J	Akım 3-formu
$T^{\alpha\beta}$	Enerji-momentum tensörü
T^{α}	Alanın enerji-momentum tensörü
t^{α}	Maddenin enerji-momentum tensörü
t^{α}	Akımların Landau-Lİfshitz formu
K	Eğrilik parametresi

ŞEKİLLER DİZİNİ

ÇİZELGELER DİZİNİ

1. GİRİŞ

Mekaniğin nokta parçacıklarla ilgili olan kısmının temelleri Newton tarafından Doğa Felsefesinin Matematiksel İlkeleri adlı eserinde atıldı. Newton mutlak uzay varsayımını eylemsizlik direncinin ve merkezkaç kuvvetlerin varsayımına dayandırmıştı. Gözlemin erişebildiği kadarıyla bunların bütün evrende, kütlenin yerel dağılımından bağımsız, aynı biçimde gerçekleştikleri için cisimler arasındaki etkileşimlere bağlı olmaları gerekir. Bu nedenle Newton, onların mutlak ivmelere dayandıkları sonucuna vardı. Mutlak uzay bu nedenle fiziksel fenomenlerin yakıştırma nedeni olarak tanıtıldı.

Merkezkaç kuvvetlerin nedeni uzak kütlelerin bütünlüğüdür düşüncesi ilk kez Ernst Mach tarafından dile getirilmiştir. Bununla çelişen hiçbir deney yoktur, çünkü gök cisimlerinin, kendisine göre göreli olarak döndükleri başvuru (referans) sistemi öyle seçilmiştir ki bir bütün olarak yıldızlar sistemine göre hareketsizdir; daha doğrusu, başvuru sistemine göre sabit yıldızların görünürdeki hareketleri tümüyle düzensizdir ve yeğlenen doğrular yoktur. Buna göre mekanik yasalarının (genel olarak fiziğin) yalnızca göreli konumları ve hareketli cisimleri içermesi istenir. Başvuru sistemleri, Einstein'nın özel görelilik kuramı ve Newton mekaniğinin eylemsiz sistemleriyle apriori olarak yeğlenmiş olmamalıdır, aksi takdirde fizik yasaları içine yalnız cisimlerin göreli hareketleri değil bu yeğlenmiş başvuru sistemlerine göre mutlak ivmeler de girer. Böylece, doğru fizik yasalarının gelişigüzel hareket eden başvuru sistemlerinde kesinlikle aynı biçimde geçerli olduğu postülatına varılır.

Minkowski evreninde hareketler dünya çizgileri olarak gösterilir. Bu dört boyutlu geometrinin çatısı, ışık ışınlarının ya da hiçbir kuvvetin etkisi olmadan hareket eden eylemsiz kütlelerin yörüngeleri tarafından çatılmıştır. Bu dünya çizgileri eylemsiz sistemlere göre doğrudurlar, fakat genel görelilik kuramı açısından bakılırsa, ivmeli sistemler eşdeğerdirler ve onlarda daha önce doru olan dünya çizgileri şimdi eğridir. Bunların yerinde şimdi başka dünya çizgileri doğru olurlar ve dahası bu değişme uzaydaki yörüngeler için de doğrudur. Bu, Euclides geometrisinin bütün yapısını sarsıyor; çünkü o, temelde doğru çizgilerin belirlediği, klasik eylemsizlik yasasına dayanır.

Doğru, düzlem ve benzeri geometrik öğelerin tanımı için yalnız katı ölçüm çubukları kullanmakla bu güçlüğün giderilebileceği düşünülebilir, fakat bu mümkün değildir. Uygun biçimde seçilmiş bir S başvuru sistemine göre, belli bir zaman aralığında çekimsel alanın var olmadığı bir uzay-zaman bölgesi ve bu bölgede sabit bir dönme hızıyla dönen bir cisim var olsun. Örneğin kendi düzlemine dik bir eksen etrafında dönen dairesel bir düzlemsel disk var olsun. S ve diskle birleştirilmiş bir S′ gözlem çerçevesinde tamamen aynı iki katı çubuğa sahip birer gözlemci bulunsun. Şimdi içinde hareketin tekdüze sayılabileceği bir uzay-zaman bölümüyle kısıtlanmak koşuluyla özel görelilik ilkesi geçerli olsun. Bunu olanaklı kılmak için birim çubuğun diskin yarıçapı ile karşılaştırıldığında küçük olduğu varsayılır. S′′ündeki gözlemci çubuğunu diskin yarıçapı doğrultusunda uygularsa, çubuğun hareketi boyuna dik olduğundan, S'deki gözlemci S'ye göre hareketli çubuğun boyunun aynı kaldığını düşünecek. S′′ündeki gözlemci, çubuğu diskin çevresine uygularsa, o zaman, özel görelilik kuramına göre, o, S'deki gözlemciye kısalmış görünecek.

Buna göre S'deki gözlemci, daire çevresinin çapa oranının π sayısından daha büyük olduğunu ileri sürebilir. Böylece Euclides geometrisi ile ters düşmüş olur.

Zaman ölçümleri içinde buna benzer sonuç elde edilebilir. S sisteminde hareketsiz, eşanlı saatler ve S′'ye göre hareketsiz döner diskin yarıçapı üzerine konulmuş tamamen özdeş saatler bulunsun. Diskteki saatleri hareketsiz olanlarla karşılaştırılması disk üzerindeki saatlerin S'dekinden daha yavaş ilerlediklerini gösterir ve bu fark merkezden uzaklaştıkça artar. Yalnız diskin merkezindeki saat, S'ye göre hareketsiz olduğundan, S'deki saatlerle eşzamanlıdır. Disk üzerindeki saatlerin bile eşzamanlı olmadıkları görülür. Bu sonuçlara göre, eğer gözlem sistemi dönüyorsa yani ivmelendirilmiş ise ya da içinde, eşdeğerlik ilkesine göre aynı şey demek olan bir çekim varsa, bu gözlem çerçevesine göre hareketsiz saatlerle zamanın doğru bir tanımı verilemez.

Bu basit ölçümler, olağan uzay ve zaman dünyası temelinin çöktüğünü gösteriyor. Yapılacak tek şey bu kavramları yeniden köktenci bir biçimde yorumlamak ve uygun bir geometri üzerinde genellemektir. Bu geometrinin Euclidean olamayacağı açıktır. Bu çalışmada bu geometri ayrıntılı olarak incelenmiştir.

2. MATEMATİKSEL HAZIRLIK

Manifold Kavramı ve Diferansiyellenebilme

Düz bir yüzeyin sezgisel resmi manifold kavramı ile analitik hale gelir. Küçük ölçekte bir manifold bir Euclidean uzaya benzer, öyle ki diferansiyel gibi sonsuz küçük işlemciler onun üzerinde tanımlanabilsin.

$\mathbb{R}^n$'in bir U açık altcümlesinden $\mathbb{R}^m$'ye bir f fonksiyonu bir $x \in U$ noktasında, o noktaya bir $Df : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ gönderimi ile yaklaşılabiliniyorsa türevlenebilirdir. Her $\varepsilon > 0$ için x'in bir U komşuluğu vardır öyle ki,

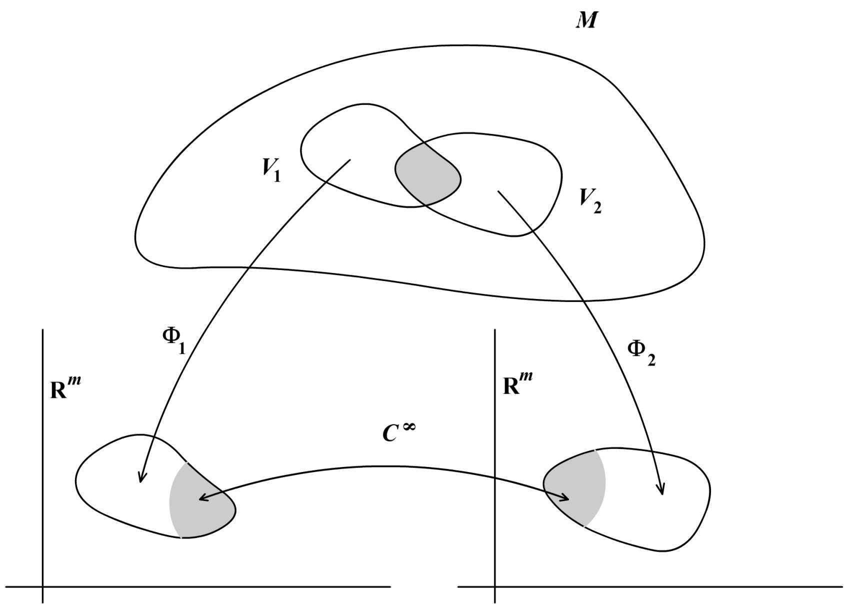
$$\left\| f\left(x'\right) - f\left(x\right) - Df\left(x\right)\left(x' - x\right) \right\| < \varepsilon \left\| x' - x \right\|, \ \forall x' \in U$$

Burada x ve f sırasıyla $\mathbb{R}^n$ ve $\mathbb{R}^m$'de vektördürler ve $\|\upsilon\|$, υ vektörünün boyudur. Bileşenler cinsinden yazıldığında, Df parçalı diferansiyellerin matrisidir;

$$\left(Df\right)_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}, \ \ i = 1,2,...,m, \ \ j = 1,2,...,n \tag{2.1}$$

f, fonksiyonu bir komşulukta verilmelidir. Eğer basit olarak türevden konuşuyorsak, bir açık cümlenin bir gönderimiyle ilgileniyoruz. Her noktada Df türevi aşağıdaki anlama sahip bir $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ lineer gönderimdir: Eğer $u : I \to \mathbb{R}^n$ eğrisi x'den geçerse, o zaman Df eğrinin yönünü f altında eğrinin görüntüsünün yönüne dönüştürür, $\left(df_i\left(x\left(t\right)\right)/dt = f_{i,j}dx_j / dt\right)$. p-kere sürekli olarak türevlenebilir fonksiyonların kümesi C^p ile gösterilir.

Tanım: M bir topolojik uzay olsun. Bir (V, Φ) haritası $\mathbb{R}^m$'de bir açık cümleye M'in bir açık V (haritanın tanım bölgesi) cümlesinin Φ homeomorfizimidir. İki harita $V_1 \cap V_2 = \varnothing$ olduğu takdirde veya eğer $\Phi_1 \circ \Phi_2^{-1}$ gönderimleri, açık bir biçimde kısıtlanmış, $\mathbb{R}^m$'de açık cümlelerin C^∞-gönderimleri ise uyumludur denir.



Şekil 2.1 Haritaların uyumluluğu

Tanım: Bir atlas M'yi örten uyumlu haritaların bir cümlesidir. İki atlas, onların tüm haritaları uyumlu ise uyumludur denir.

Atlasların uyumluluğu açık olarak bir özdeşlik bağıntısıdır: Her atlas kendisiyle uyumludur ve tanım simetriktir. $\bigcup_i (V_{1i}, \Phi_{1i})$, $\bigcup_i (V_{3i}, \Phi_{3i})$ ile uyumlu olan $\bigcup_i (V_{2i}, \Phi_{2i})$ ile uyumlu olduğunu farzedin. $V_{1i} \cap V_{3i}$'yi V_{2k} ile örtün ve f ve g türevlenebilirken $f \circ g$'nin türevlenebildiğini hatırlayın. Varsayalım ki bütün haritalar M'yi aynı m ile bir $\mathbb{R}^m$ içine haritalasınlar, m'ye M'nin boyutudur denir. Eğer V'ler yeterince küçük seçilirse, hepsinin bağlı (birleştirilmiş) cümleler olduğunu varsayabiliriz.

Tanım: M bir topolojik uzay olsun. M için aşağıdaki önermeler doğru ise M bir n-boyutlu topolojik manifolddur denir:

(i) M bir Hausdorf uzayıdır,

(ii) M 'in bir açık altcümlesi $\mathbb{R}^n$ ve ya $\mathbb{R}^n$ 'nin bir açık bir altcümlesine homeomorftur,

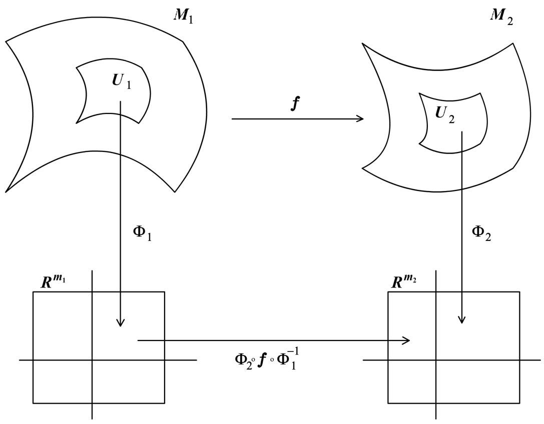
(iii) M sayılabilir çoklukta açık cümlelerle örtülebilir.

Tanım: Bir diferensiyellenebilir manifold atlasların bir eşdeğerlik sınıfı olan ayrılabilir, metriklenebilir M uzayıdır (Thirring 1997)

Tanım: $N \subset M$ bir n-boyutlu altmanifolddur ancak ve ancak her $q \in N$ için $q \in V \subset M$ ve $\Phi(q) \in \mathbb{R}^n$ olan yerde, bir (V, Φ) haritası vardır, öyleki her $q' \in N \cap V$ için $\Phi(q') = (x_1, x_2, ..., x_n, 0, ..., 0)$ olur.

Bu tanımdaki atlasın N 'ye bir diferansiyellenebilir manifold yapısı verdiği kolayca görülebilir: Sadece ilk n koordinat değiştiğinden dolayı uyumluluk için gereksinen diferansiyellenebilirlik etkilenmemiştir. Y, X 'in bir altmanifoldu olsun ve Z, Y 'nin bir altcümlesi olsun. O zaman Z, Y 'nin bir bir altmanifoldudur ancak ve ancak X 'in bir altmanifoldudur.

Tanım: Bir $f : M_1 \to M_2$ gönderimi p-kez diferansiyellenebilirdir ancak ve ancak M_1 için bir atlasın bütün haritaları için ve M_2 için bir atlasın bütün haritaları için $\Phi_2 \circ f \circ \Phi_1^{-1}$ 'in aşikar kısıtlaması (koşulu) $\Phi_1\left(U_1 \cap f^{-1}(U_2)\right) \subset \mathbb{R}^{m_1}$ 'den $\mathbb{R}^{m_2}$ 'ye bir p-kez diferansiyellenebilir gönderimdir. Bu aşağıdaki şekilde ifade edilmiştir:



Şekil 2.2 Manifoldlar üzerinde bir gönderimin diferensiyellenebilmesi

Eğer f_1 ve $f_2 \in C^p$ iseler, onların bileşimi $f = f_1 \times f_2 : M_3 \xrightarrow{f_2} M_2 \xrightarrow{f_1} M_1$ de C^p-gönderimdir. Eğer M çarpım manifoldu $M_1 \times M_2$ ve $f = f_1 \times f_2$ ise, o zaman f_i'ler C^p-gönderimler iken f de C^p-gönderimdir. $M_1 = I \subset \mathbb{R}$ olsun. I bir zaman aralığı ve M_2 gibi düşünülerek, f fonksiyonunu bir eğri olarak ve $f(I)$'ye onun yörüngesi olarak bakılabilir.

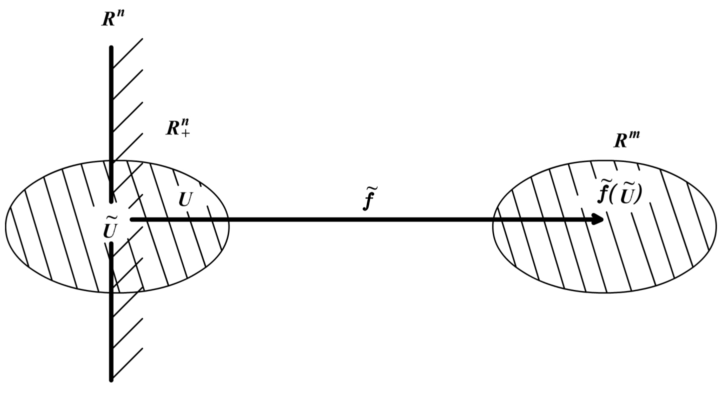
Yukarıdaki tanım sadece bir atlastan bahseder fakat uyumluluk koşulu diferansiyellenebilirliğin bir eşdeğerlik sınıfının bütün atlasları için özdeş olarak tanımlandığını garantiler. Bu haritaların değişimi altında bir diferansiyellenebilir gönderimin diferansiyellenebiilir kaldığını ve diferansiyellenebilir olmayan bir gönderimin asla diferensiyellenebilir olamadığını ifade eder.

Eğer N_1, M_1'in bir altmanifoldu ise, o zaman $f_{|N_1}$, f kadar diferansiyellenebilirdir.

Tanım: İki manifoldun bir f diffomorfizmi f ve f^{-1}'in her ikisi C^∞ olan bir birebir eşleme (bijection)'dir. İki manifold diffeomorfiktir ancak ve ancak aralarında bir diffeomorfizim vardır.

Bir (U,Φ) haritası $1 \in C^{\infty}$ olduğundan altmanifold U ve $\Phi(U) \subset \mathbb{R}^n$ arasında bir Φ diffeomorfizimi sağlar. Aynı M cümlesi üzerinde iki manifold yapısı özdeştir yani eşdeğer atlaslar ile tanımlanırlar ancak ve ancak 1 bir diffeomorfizimdir. Buna göre $M \xrightarrow{1} \mathbb{R}$ bir diffeomorfizim değilken, $\mathbb{R}$ üzerinde özdeş olmayan diffeomorfik manifold yapılar vardır. $\mathbb{R}^n$'e özelliği olmayan bir manifold olarak atıfta bulunulduğu zaman, $(\mathbb{R}^n,1)$ standart haritalı $\mathbb{R}^n$ kastedilecektir. Karmaşık topolojik uzaylar ve hatta $\mathbb{R}^4$ üzerinde diffeomorfik bile olmayan ayrık manifold yapılar vardır. Fakat bir-boyutlu manifoldlar bağlamında kompakt olanların hepsi S^1'e ve kompakt olmayanlar $\mathbb{R}$'ye diffeomorfiktirler.

Tanım: $\mathbb{R}^n_+ = \{x \in \mathbb{R}^n : x_1 \geq 0\}$, $\partial\mathbb{R}^n_+ = \{x \in \mathbb{R}^n : x_1 = 0\}$ olsun. $U \subset \mathbb{R}^n$ açık altcümlesinden $\mathbb{R}^m$'e bir f gönderimi diferansiyellenebilirdir ancak ve ancak U'yu içeren $\mathbb{R}^n$'nin bir açık $\tilde{U}$ altcümlesi ve bir diferansiyellenebilir $\tilde{f} : \tilde{U} \to \mathbb{R}^m$ gönderimi vardır öyle ki $\tilde{f}_{|U} = f$ olur.



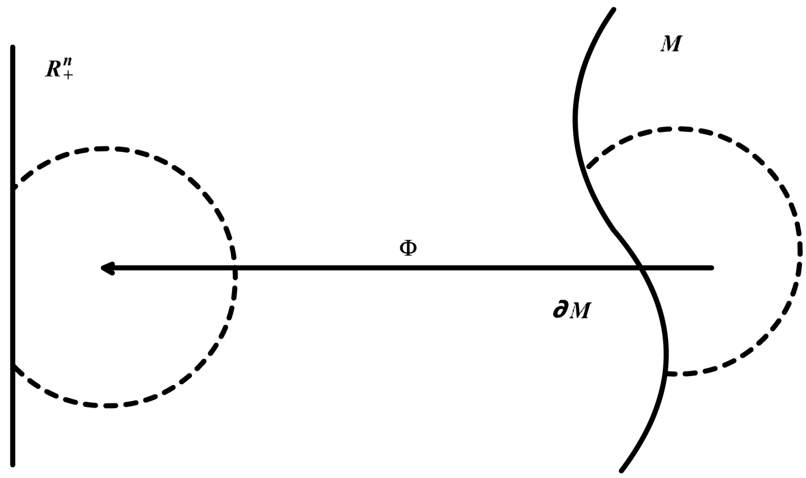
Şekil 2.3 $\mathbb{R}^n$'nin diferansiyellenebilir gönderimi

Burada U, $\mathbb{R}^n$'de bir açık olmak zorunda değil ve $\partial\mathbb{R}^n_+$'nin kısımlarını içerebilir. $\partial\mathbb{R}^n_+$, $\mathbb{R}^n$'nin bir altmanifoldu olmakla beraber $\partial\mathbb{R}^n_+$ olmak zorunda değildir.

Tanım: M bir ayrılabilir, metriklenebilir uzay olsun. Bir $\{U_i\}$ açık örteni ve $\forall i, j$ için $\Phi_i \circ \Phi^{-1}_{j|\Phi_j(U_i \cap U_j)} \in C^\infty$ olan $\Phi_i : U_i \to \mathbb{R}^n_+$'nin açık altcümleleri, homeomorfizimleri var olduğu zaman M bir sınırlı manifold yapısına sahiptir. M'nin sınırı

$$\partial M = \bigcup_i \Phi_i^{-1}\left(\Phi_i\left(U_i\right) \cap \partial \mathbb{R}^n\right) \tag{2.2}$$

dır (şekil 2.4).



Şekil 2.4 Sınırlı manifold

∂M sınırı, bir daldırmaya (imbedding) bağlı olan bir topolojik sınırdan ayırt edilmiştir. $\mathbb{R}^n$'de $\mathbb{R}^n_+$'nin topolojik sınırı $\partial \mathbb{R}^n_+$'dir. $\partial M = \varnothing$ ise yukarıdaki tanım manifold tanımına indirgenir ve bu takdirde basit olarak bir manifoldtan (diferansiyellenebilir) söz ederiz ve yalnız aksi takdirde sınırlı manifoldtan söz ederiz. $\Phi_i \circ \Phi^{-1}_{j|\Phi_j(U_i \cap U_j)}$'ler homeomorfizim olduklarından, $\mathbb{R}^n$'nin sınır noktaları, sınır noktalarına haritalanır ve böylece uyumlu atlaslar aynı sınırı tanımlarlar. Yine, bir haritalar sistemi öyle ki $M = \bigcup_i U_i$ olsun bir manifoldu tanımlamak için yeterlidir, fakat bu sistem diğer uyumlu olanlara tercih edilmez. Bir sınırlı manifold kompakt olmak zorunda değil ve bir kompakt manifold bir sınıra sahip olmayabilir.

Önerme: $M \backslash \partial M$ ve ∂M 'nin ikisi (sınırı olmayan) manifold yapısına sahiptirler.

Bir sınırın sınıra sahip olmadığı Stokes integral teoreminin genellemesinden de çıkar.

2.2 Tanjant Vektörleri ve Uzayları

Bir düzgün yüzey tanjant düzlemi tarafından bir noktada yakınlaştırılabilir. Bu kavramın genelleştirilmesi tanjant uzayıdır. Bir manifoldun bir gönderiminin türevi onun tanjant uzayı üzerine bir lineer dönüşüm gibi etki eder (Thirring 1997).

Mekanik, $I \subset \mathbb{R}$ aralığından bir M manifolduna tanımlanan $t \in I \xrightarrow{u} u(t) \in M$ biçimindeki u gönderimleri olan parçacık yörüngeleri ile ilgilenir. Daha sonraki adım bir $\dot{u}$ hız vektörü tanımlanır, fakat bu kolay değildir çünkü M lineer bir yapıya sahip değildir. Eğer M, $\mathbb{R}^n$ içine daldırılmış (imbedded) olsaydı, o zaman u tanjant hiperdüzlemi içinde uzanır ve M 'den dışarı uzanır. Yapılması gereken bir-boyutlu daldırmaları (imbedding) hesaba katmadan hız vektörlerini yörüngelerle ilişkilendirmektir. Bir $C = \left(V \ni q = u(0), \Phi\right)$ haritasında q noktasında yörüngenin $\Phi \circ u$ görüntüsü $D(\Phi \circ u)\big|_{t=0} \in \mathbb{R}^m$ hız vektörünü tanımlar ve bir koordinat sisteminde bileşenleri her zamanki gibi $\left(\partial / \partial t\right) x^i\left(u(t)\right)\Big|_{t=0}$ olur. Farklı noktalarda hızlar yalnız bir haritaya ilişkin olarak karşılaştırılabilmelerine rağmen, bir tek noktada iki hızın eşit olması durumu haritadan bağımsızdır: u ve $\upsilon, I \to M$ 'ye iki yörünge olsunlar ve $D(\Phi_1 \circ u)\big|_{t=0} = D(\Phi_2 \circ u)\big|_{t=0}$ olsun. O zaman farklı bir harita ile

$$
\begin{aligned}
D(\Phi_2 \circ u)\big|_{t=0} &= D\left(\Phi_2 \circ \Phi_1^{-1}\right) \cdot D\left(\Phi_1 \circ u\right)\Big|_{t=0} \\
&= D\left(\Phi_2 \circ \Phi_1^{-1}\right) \cdot D\left(\Phi_1 \circ \upsilon\right)\Big|_{t=0} \\
&= D\left(\Phi_2 \circ \upsilon\right)\Big|_{t=0}
\end{aligned}
$$

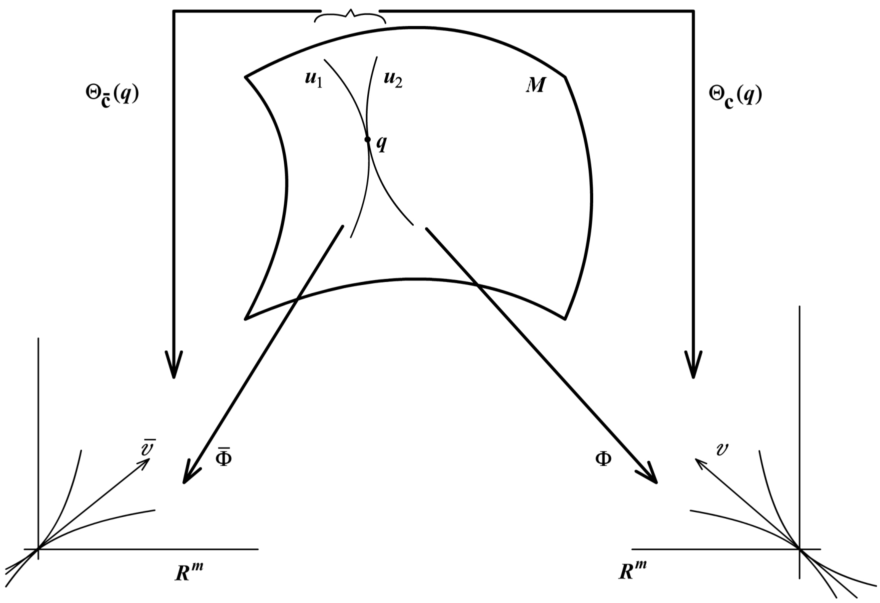
olur. Böylece tanjantsal yörüngelerin eşdeğerlik sınıfları içine q noktasından geçen yörüngeleri paylaştırmak için bir harita-bağımsız yol vardır.

Tanım: $\Theta_C(q)$ gönderimi q'dan geçen bir u eğrisini aşağıdaki vektöre dönüştürür (şekil 2.5):

$$u \xrightarrow{\Theta_C(q)} D(\Phi \circ u)(0) \in \mathbb{R}^m \tag{2.3}$$

Tersine, herhangi $\upsilon \in \mathbb{R}^m$ için ters gönderim uygun sınıfın $(0 \in I \subset \mathbb{R})$ temsili bir u eğrisini tanımlar:

$$\upsilon \xrightarrow{\Theta_C^{-1}(q)} u = \left\{ t \in \mathbb{R} \to \Phi^{-1}\left(\Phi(q) + t\upsilon\right) \in M \right\} \tag{2.4}$$



Şekil 2.5 $\Theta_C(q)$ birebir eşlemesinin eylemi

u, eğrisi boyunca yönelen bir tanjant vektörü basitçe, $\lim_{n\to\infty}\left(n\left(u\left(1/n\right)-u(0)\right)\right)$ biçiminde tanımlanabileceği düşünülebilir. Bunun sakıncası bu farkın sonlu n için belirsiz olmasıdır. Bir sınıfın farklı eğrileri $\Theta_C(q)$ ile aynı vektöre karşılık gelirler, fakat farklı haritalar üzerinde aynı sınıf farklı vektörler ile ilişkilendirilir (Şekil 2.5). $\Theta_C(q)$ gönderimi bir vektör uzayı yapılı eşdeğerlik sınıfları sağlar. Bu, harita değişimi altında $\Theta_C(q), D\left(\bar{\Phi}\circ\Phi^{-1}\right)$ ile çarpılacağından harita seçiminden bağımsızdır. D için zincir kuralı o zaman, bir birebir eşlemenin (bijection) türevi gibi, bunun bir terslenebilir lineer dönüşüm olduğunu ifade eder ve böylece vektör uzayı yapısını korur. Bundan dolayı $\Theta_C(q)$ birebir eşlemesi, gerçekte $\mathbb{R}^m$ içine M 'nin bir kanonik bir-boyutlu daldırması (imbedding) yokluğunda tanjant düzlemi tanımlanmaz olmasına rağmen, bir tanjant düzleminin istenilen karakteristiklerinin korunmasına izin verir.

Tanım: q noktasında tanjant eğrilerinin eşdeğerlik sınıflarının uzayına q noktasında M 'nin tanjant uzayı denir ve $T_q(M)$ ile gösterilir. Tanımla $\upsilon,\omega\in T_q(M)$ ve $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ için

$$\alpha\upsilon+\beta\omega=\Theta_C^{-1}(q)\left(\alpha\Theta_C(q)(\upsilon)+\beta\Theta_C(q)(\omega)\right) \tag{2.5}$$

kurulduğu zaman bu bir vektör uzayı yapısına sahip olur ve bu yapı harita bağımsızdır.

Bu tanım soyut görünebilir fakat gerçekten sadece noktadan geçen eğrilerin yönlerini gösteren oklar gibi bir tanjant düzleminde vektörlerin sezgisel tasımını formalize eder. Bu M 'yi bir manifold yapmak için kullanılan haritalar üzerinde onları $\mathbb{R}^n$ 'nin elemanları yapar.

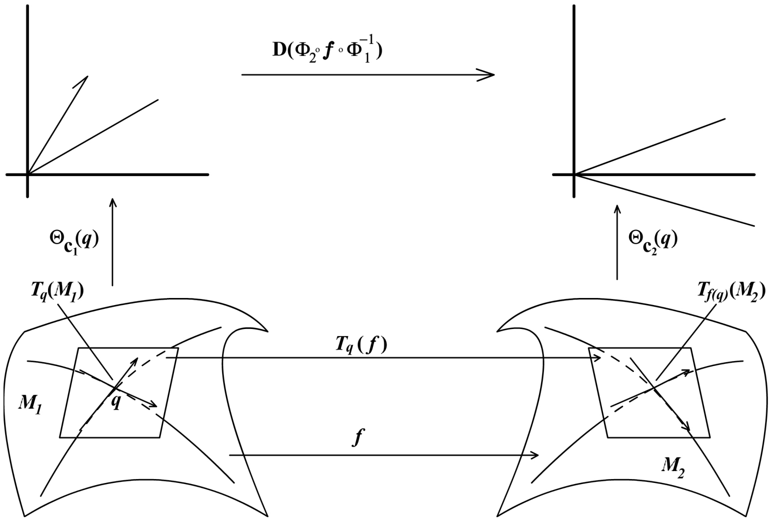
Açıktır ki haritaların değişimi ile Θ farklı haritaların içine konulduklarında u eğrilerinin görüntülerinin nasıl etrafında buruldağunu (büküldüğünü) tayin eden matris olan $D\left(\bar{\Phi}\circ\Phi^{-1}\right)$ ile çarpılır. Eğer N, M 'nin bir altmanifoldu ise, o zaman bir $q\in N$

için $T_q(N)$, $T_q(M)$'nin bir altuzayı ile bir tutulabilir (aynı olduğu anlamında). $T_q(N)$, cümlesinin elemanları N'de yörüngelere karşılık gelirler. Bu vektörler için bir koordinat dönüşümü altında bilinen dönüşüm bağıntılarıyla ile yakından ilişkilidir: eğer $\bar{x} \xleftarrow{\bar{\Phi}} q \xrightarrow{\Phi} x$ ise, o zaman $D\left(\bar{\Phi} \circ \Phi^{-1}\right)$ basitçe $\partial\bar{x}_i / \partial x_j$ matrisi olarak ifade edilir ve tanjant uzayının bir vektörü $\upsilon_i \rightarrow \bar{\upsilon}_i = \upsilon_j \, \partial\bar{x}_i / \partial x_j$ biçiminde dönüştürülür.

$\Theta_C(q)$ birebir eşleme gönderiminin tanımına göre bir $\mathbb{R}^{m_1} \rightarrow \mathbb{R}^{m_2}$ gönderiminin türevi yörüngeleri bu dönüşüm altında kendi görüntülerinin yönüne yönelten (döndüren) bir lineer dönüşüm gibi yorumlanabilir. Bu düşünce $T_q(M)$'nin lineer yapısı kullanılarak manifoldlar üzerine aşağıdaki tanımla taşınır.

Tanım: $f : M_1 \rightarrow M_2$ bir C^∞ dönüşüm olsun. $T_q(f)$, olarak yazılan f'nin türevi $T_q(f) = \Theta_{C_2}^{-1}\left(f(q)\right) \circ D\left(\Phi_{C_2} \circ f \circ \Phi_{C_1}^{-1}\right) \circ \Phi_{C_1}(q)$ biçiminde tanımlanan bir lineer $T_q(M_1) \rightarrow T_q(M_2)$ gönderimidir (Şekil 2.6). Bu gönderim harita-bağımsızdır:

$$
\begin{aligned}
&\Theta_C^{-1}(q)\left(\alpha\Theta_C(q)(\upsilon) + \beta\Theta_C(q)(\omega)\right) \\
&\quad = \Theta_{\bar{C}}^{-1}\left(D\left(\Phi \circ \bar{\Phi}^{-1}\right)\right)^{-1}\left(\alpha D\left(\Phi \circ \bar{\Phi}^{-1}\right)\Theta_{\bar{C}}(\upsilon) + \beta D\left(\Phi \circ \bar{\Phi}^{-1}\right)\Theta_{\bar{C}}(\omega)\right) \\
&\quad = \Theta_{\bar{C}}^{-1}(q)\left(\alpha\Theta_{\bar{C}}(\upsilon) + \beta\Theta_{\bar{C}}(\omega)\right)
\end{aligned}
$$



Şekil 2.6 $T_q\left(f\right)$ gönderimi

Bu tanım bir haritadan bahsetmekle birlikte gerçekte tanjant uzayları ve $D\left(\Phi_2 \circ f \circ \Phi_1^{-1}\right)$ bunu telafi etmek için dönüştüklerinden dolayı harita-bağımsızdır. Eğer, örneğin M_1 üzerinde harita $\overline{\Phi}_1$'e değiştirilirse, önceden bilindiği gibi, $\Theta_{C_1}\left(q\right)$ soldan bir $D\left(\overline{\Phi}_1 \circ f \circ \Phi_1^{-1}\right)$ çarpanı kazanırken $D\left(\Phi_2 \circ f \circ \Phi_1^{-1}\right)$ zincir kuralıyla sağdan $D\left(\Phi_1 \circ f \circ \overline{\Phi}_1^{-1}\right)$ ile çarpılır.

$M_1 = \mathbb{R} = T_0\left(M_1\right),\ \Phi_1 = 1$ olsun. Bu kendi vektörlerinden biriyle bir eşdeğerlik sınıfı tanılamak için bir kanonik yöntem sağlar. Bu tanım ile $T_0\left(M_1\right)$'nin baz vektörü 1 ile gösterilir. O zaman $T_0\left(f\right)\cdot 1 = \Theta_C^{-1} \circ D\left(\Phi_2 \circ f\right)\left(0\right) = \Theta_C^{-1} \circ \Theta_C\left[f\right] = \left[f\right] \in T_{f(0)}\left(M_2\right)$, bu takdirde bir tek eğriden meydana gelen, f'nin eşdeğerlik sınıfının temsili vektörüdür. Bu şematik olarak aşağıdaki gibidir:

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{R} \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\mathbf{I}"'] \arrow[dr, "\text{kanonik belirleme}"] & \mathrm{M} \\
\mathrm{T}_0(\mathbf{R}) \arrow[r, "\mathrm{T}_0(f)"] & \mathrm{T}_{f(0)}(\mathrm{M})
\end{tikzcd}$$

Eğer $\upsilon \in T_q(M_1), u$ eğrisi tarafından belirlenirse, o zaman $T_q(f)\cdot\upsilon, f\circ u$ ile belirlenir, çünkü

$$\begin{aligned} T_q(f)\cdot\upsilon &= \Theta_{C_2}^{-1}\left(f(q)\right)D\left(\Phi_2\circ f\circ\Phi_1^{-1}\right)D\left(\Phi_1\circ u\right) \\ &= \Theta_{C_2}^{-1}\left(f(q)\right)D\left(\Phi_2\circ f\circ u\right) \end{aligned} \tag{2.6}$$

dır. Kısaca f, u eğrisini $f\circ u$'ya dönüştürür ve $T_q(f), q$ noktasında u eğrisine tanjant vektörlerini $f(q)$ noktasında $f\circ u$'ya tanjant vektörlere dönüştürür. Bu ifade tüm haritalarda aynı kalır yani $T_q(f)$ harita-bağımsızdır. Bu şematik olarak aşağıdaki gibidir:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{T_q}(\mathrm{M}_1) \arrow[d, "\mathrm{T_q}(f)"'] & & \mathrm{M}_1 \arrow[ll, "\text{kanonik belirleme}"'] \arrow[dd, "f"] \\
 & \mathbf{I} \arrow[ur, "\mathrm{u}"] \arrow[dr, "f\circ\mathrm{u}"'] & \\
\mathrm{T}_{f(\mathrm{q})}(\mathrm{M}_2) & & \mathrm{M}_2 \arrow[ll, "\text{kanonik belirleme}"]
\end{tikzcd}$$

$M_2 = \mathbb{R}$ olsun. Bu durumda f'ler bir cebir oluştururlar ve türev cebirsel işlemler için her zamanki gibi davranır: $\left(f_1+f_2\right)\circ\Phi^{-1} = f_1\circ\Phi^{-1} + f_2\circ\Phi^{-1}$ ve $\left(f_1\cdot f_2\right)\circ\Phi^{-1} = \left(f_1\circ\Phi^{-1}\right)\cdot\left(f_2\circ\Phi^{-1}\right)$'den aşağıdakiler elde edilir:

(a) $T_q(sabit) = 0$,

(b) $T_q\left(f_1 + f_2\right) = T_q\left(f_1\right) + T_q\left(f_2\right)$,

(c) $T_q\left(f_1 \cdot f_2\right) = f_1(q) \cdot T_q\left(f_2\right) + f_2(q) \cdot T_q\left(f_1\right)$.

İki diferansiyellenebilir gönderimin bileşimi de diferansiyellenebilirdir. Bu T için doğrulanabilir: D için zincir kuralı uygulanarak,

$$
\begin{aligned}
T_q\left(f_2 \circ f_1\right) &= \Theta_{C_3}^{-1}\left(f_2 \circ f_1(q)\right) \circ D\left(\Phi_3 \circ f_2 \circ f_1 \circ \Phi_1^{-1}\right)\Theta_{C_1}(q) \\
&= \Theta_{C_3}^{-1}\left(f_2 \circ f_1(q)\right) D\left(\Phi_3 \circ f_2 \circ f_1 \circ \Phi_2^{-1}\right)\Theta_{C_2}\left(f_1(q)\right) \\
&\quad \times \Theta_{C_2}^{-1}\left(f_1(q)\right) D\left(\Phi_2 \circ f_1 \circ \Phi_1^{-1}\right)\Theta_{C_1}(q) \\
&= T_{f_1(q)}\left(f_2\right) \circ T_q\left(f_1\right)
\end{aligned}
$$

elde edilir.

2.3 Tanjant Demeti ve Vektör Alanı

Türevi bir noktada değerlendirmekten ona q'nun bir fonksiyonu gibi davranmaya ilerlemek için farklı noktalardaki tanjant uzaylarını birleştirmek gerekir. Bu düzeyde birbirleriyle henüz bir ilişkileri yoktur; farklı q noktalarındaki vektörlerin bir aralıkta paralel oluklarını söylemek için bir yöntem henüz yoktur. Harita değişimleri bölgelerin (tanım bölgeleri) biçimini bozar, dönüşümler sadece sonsuz küçük ölçekte lineerdirler. Hala tek bir haritanın bölgesi içinde $U \times \mathbb{R}^m$ ile birlikte $T(U) = \bigcup_{q \in U} T_q(M)$ tanımlanabilir ve sonra $\Theta_C(q)$ gönderimi

$$
\Theta_C : T(U) \to \Phi(U) \times \mathbb{R}^m,\ (q,\upsilon) \to \left(\Phi(q), \Theta_C(q) \cdot \upsilon\right) \tag{2.7}
$$

ye genişletilir. Farklı noktalardaki tanjant vektörlerini bu tanjant demeti içinde karşılaştırmak olasıdır. Θ_C gönderimi açık olarak bir birebir eşlemedir (bijection) ve

$T(U)$ topolojiklenebilirdir öyle ki bir homeomorfizim olur. Bu bir diffeomorfizime dönüştürülebilir ve bu nedenle $T(U)$ üzerinde bir manifold yapısı kurulur. Atlas o zaman bir tek haritaya sahip olur ve dolayısıyla sağlanacak uyumluluk koşulları yoktur. Tanjant demetini M'nin bütününe genişletmek için bir $\bigcup_i (U_i, \Phi_i)$ atlasının U_i komşuluklarından inşa edilmelidir. Tek $T(U_i) = U_i \times \mathbb{R}^m$'ler üzerinde çarpım topolojilerinin uyumluluğunu da sağlayan, bu haritaların uyumluluğunu göstermek yeterlidir. Şimdi $\overline{\Phi} \circ \Phi^{-1} \in C^\infty$ olmak üzere

$$\begin{aligned}\Theta_{\overline{C}}(q) \circ \Theta_C^{-1}(q) : \upsilon &\to \frac{d}{dt}\overline{\Phi} \circ \Phi^{-1}\left(\Phi(q) + \upsilon t\right)\Big|_{t=0} \\ &= D\left(\overline{\Phi} \circ \Phi^{-1}\right) \cdot \upsilon, \quad \upsilon \in \mathbb{R}^m\end{aligned} \tag{2.8}$$

ve böylece,

$$\Theta_{\overline{C}} \circ \Theta_C^{-1} : (x, \upsilon) \to \left(\overline{\Phi}\left(\Phi^{-1}(x)\right), D\left(\overline{\Phi} \circ \Phi^{-1}\right)(x) \cdot \upsilon\right) \tag{2.9}$$

bir atlastan elde edilir. İkinci çarpan υ'de lineerdir ve dolayısıyla C^∞'dur ve ayrıca $\overline{\Phi} \circ \Phi^{-1} \in C^\infty$ olmasından dolayı x'e göre C^∞'dur. Bu, Θ_C'lerin uyumluluğunu kanıtlar.

Tanım: $T(M) = \bigcup_{q \in M} T_q(M)$ cümlesine M'nin tanjant demetidir denir ve $\bigcup_i \left(U_i \times \mathbb{R}^m, \Theta_{C_i}\right)$ atlaslı bir manifolddur.

Bu şekilde $T(M)$ soyut olarak veriliyor ve $\mathbb{R}^n$'nin bir altmanifoldu gibi somut bir şekilde verilmiyor. Tanjant demetinin anlamı, bununla beraber, parçacıkların konumlarının ve hızlarının uzayı olarak düşünülürse daha sezgisel hale gelir. Eğer $T_q(M)$, $\{q\} \times \mathbb{R}^m$ çifti olarak düşünülürse, o zaman

$T(M)=\bigcup_{q\in M}T_q(M)=\bigcup_{q\in M}\left(\{q\}\times\mathbb{R}^m\right)=\left(\bigcup_{q\in M}\{q\}\right)\times\mathbb{R}^m=M\times\mathbb{R}^m$ daima bir çarpımdır. Bununla beraber bu, topolojik olarak $T(M)\neq M\times\mathbb{R}^m$ olduğu için, bir Möbius şeridi gibi topolojiklenebilir. Şayet, bununla beraber, $T(M)$ bir manifold olarak $M\times\mathbb{R}^m$'e diffeomorfik ise, o zaman M paralellenebilirdir denir. Paralellenebilir olan n-küreler sadece S^1,S^2,S^7 n-küreleridir. Lokal olarak $T(M)$ her zaman bir çarpım manifoldudur.

Tanım: Bir vektör demeti bir X manifoldu, bir M altmanifoldu (taban olarak bilinir) ve bir $\Pi:X\to M$ örteni (surjection)'nden oluşur. Ayrıca, her $q\in M$ için $\Pi^{-1}(q)$ lifleri, hepsi bir F sabit (fixed) vektör uzayına izomorfik olan vektör uzayları yapısına sahip oldukları kabul edilir. Demet atlasları X üzerinde, U_i'ler M'de komşuluklar olmak üzere $\Pi^{-1}(U_i)$ tanım bölgeleri ile verildikleri kabul edilir. Karşılık gelen Φ_i harita gönderimleri sadece $U_i\times F$ üzerinde diffeomorfizimler değillerdir, fakat aynı zamanda lifleri lineer olarak F'ye gönderirler. Eğer X, $M\times F$'ye diffeomorfik ise, o zaman X sıradanlaştırılabilirdir (trivializable) ve sıradandır (trivial) ancak ve ancak bir Cartesian çarpım olarak verilmiştir. Örneğin, $X=\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, $M=F=\mathbb{R}$ ve $\Pi:(x,y)\to x$ olsun. $X=M\times\mathbb{R}$ aşikardır ve bayağıdır (trivial). Çarpım yapısı Cartesian olanı ayırt etmesine rağmen, bir manifold olarak $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ için çok sayıda koordinat sistemleri vardır. Eğer $X=T(M)$, $F=\mathbb{R}^m$ ve $\Pi:(q,\upsilon)\to q$ ise, o zaman lifler $T_q(M)$ tanjant uzayları olurlar.

Tanım: $T(M_1)\to T(M_2):(q,\upsilon)\to\left(f(q),T_q(f)\cdot\upsilon\right)$ gönderimine $f:M_1\to M_2$ fonksiyonunun $T(f)$ türevidir denir. Eğer $f\in C^r$ ise, o zaman $T(f)\in C^{r-1}$'dir. Eğer f bir diffeomorfizim ise, o zaman $T(f)$de diffeomorfizimdi

$$
\begin{tikzcd}
q \arrow[r, "f"] & f(q) \\
(q, \upsilon) \arrow[u, "\Pi_1"] \arrow[r, "T(f)"] & (f(q), T_q(f).\upsilon) \arrow[u, "\Pi_2"']
\end{tikzcd}
$$

yukarıda verilen diyagramı ifade eden,

$$
\begin{tikzcd}
M_1 \arrow[r, "f"] & M_2 \\
T(M_1) \arrow[u, "\Pi_1"] \arrow[r, "T(f)"] & T(M_2) \arrow[u, "\Pi_2"']
\end{tikzcd}
$$

diyagramı sıra değişir. Böylece yukarıda verilen zincir kuralı daha kullanışlı bir şekilde;

$$T(f \circ g) = T(f) \circ T(g) \qquad (2.10)$$

olarak yazılabilir. Cartesian çarpımalarla herşey çarpanlarına ayrılır; türev dahil: $T(f \times g) = T(f) \times T(g)$

Tanım: Bir C^r-vektör alanı $X : M \to T(M)$ bir C^r-gönderimdir öyle ki $\Pi \circ X = 1$ ’dir. M için tüm vektör alanlarının kümesi $\mathrm{T}_0^1(M)$ ile gösterilir.

$\Pi \circ X = 1$, $T(M)$’nin demet haritası üzerinde $X : q \to (q, \mathbf{v}(q))$ olduğunu belirtir; sıklıkla yalnızca vektör kısmı $\mathrm{v}(q)$ yazılır. $T(M)$ bayağı hale getirilebilir (trivilizable) ancak ve ancak m lineer bağımsız C^∞-vektör alanı vardır. Eğer bu alanlar e_i, $i = 1, 2, ..., m$, ile gösterilirse, bu her $q \in M$ için $e_i(q)$’ların lineer bağımsız olduğu anlamına gelir. $X^i \in C^r(M)$ olmak üzere, her vektör $X = X^i e_i$ biçiminde yazılabildiğinden bu vektör alanları bir baz için kullanılabilirler. Böyle bir baz her zaman lokal olarak vardır, örneğin, Θ_C altında $\mathbb{R}^n$ ’de birim vektörlerin ters görüntüleri.

Vektörler bir lineer uzay oluştururlar (biçimlendirirler) ve ve vektör alanları bir modül yani, skaler çarpanlar $C^r(M)$’de fonksiyonlar olabilir ve sadece reel sayılar olmayabilirler.

Tanım: Bir $\Phi : M_1 \to M_2$ diffeomorfizimi aşağıda verilen diyagramın değiş tokuşu (komütatifliği) ile tanımlanan bir $\Phi_* : \mathrm{T}_0^1(M_1) \to \mathrm{T}_0^1(M_2)$ gönderimi tanımlar:

$$
\begin{tikzcd}
M_1 \arrow[r, "\Phi"] \arrow[d, "X"'] & M_2 \arrow[d, "\Phi_* X"] \\
T(M_1) \arrow[r, "T(\Phi)"] & T(M_2)
\end{tikzcd}
$$

Yani, $\Phi_* X = T(\Phi) \circ X \circ \Phi^{-1}$ olur. Bu açık olarak tıpkı Φ ’nin yönü tanımlayan eğrileri döndürdüğü (yönünü) gibi Φ_* ’ın vektör alanlarını aynı biçimde döndürdüğünü anlatır (Thirring 1997). Bir dönüşümün aşağıda verilen diyagramı genelde sağlanır:

$$
\begin{tikzcd}
q_i \arrow[r, "\Phi"] \arrow[d, "X"'] & \overline{q}_i \arrow[d, "\Phi_* X"] \\
(q_i, \upsilon_i(q)) \arrow[r, "T(\Phi)"] & \left(\overline{q}_i, \frac{\partial \overline{q}_i}{\partial q_j}, \upsilon_j(q)\right)
\end{tikzcd}
$$

Bir X vektör alanı bir $f \in C^1(M)$ fonksiyonunu Lie türevine gönderen bir

$$L_X\left(f\right) \equiv I \circ T\left(f\right) \circ X = M \xrightarrow{X} T\left(M\right) \xrightarrow{T(f)} T\left(\mathbb{R}\right) \xrightarrow{I} \mathbb{R} \quad (2.11)$$

dönüşümüne neden olur; burada I, $T\left(\mathbb{R}\right) = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ için ikinci çarpan üzerinde izdüşümü gösterir. Verilen bir demet haritada ki içinde $q \to \left(q, \mathbf{v}\right)$'dir, bu fonksiyon $L_X\left(f\right) = \upsilon^i\left(q\right)\partial f / \partial q^i$ yani, X tarafından tanımlanan yön boyunca f'nin değişim oranı olur. Lie türevi aşağıdaki özelliklere sahiptir:

(a) $L_X\left(f + g\right) = L_X\left(f\right) + L_X\left(g\right)$ her $f, g \in C\left(M\right)$ için,

(b) $L_X\left(f \cdot g\right) = f \cdot L_X\left(g\right) + g \cdot L_X\left(f\right)$, ve (2.12)

(c) $L_{\alpha X_1 + \beta X_2}\left(f\right) = \alpha L_{Xl1}\left(f\right) + \beta L_{X_2}\left(f\right)$ her $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ için.

Gerçekte, Özellik (a) ve (b) vektör alanlarını karakterize ederler. Böylece C^1-fonksiyonların değişim oranını belirleyen bir yön manifold üzerinde tanımlamak olasıdır.

Teorem (2.3.1):

(a) $L\left(f + g\right) = L\left(f\right) + L\left(g\right)$

(b) $L\left(f \cdot g\right) = f \cdot L\left(g\right) + g \cdot L\left(f\right)$

özelliklerine sahip bir $L : C^\infty\left(M\right) \to C^\infty\left(M\right)$ gönderimi $L = L_X$ olan bir C^∞ vektör alanını tek olarak belirleyen bir türev olarak bilinir.

Mekanikte L_X Liouville işlemcisi olarak bilinir. L_X bir lokal işlem ile tanımlandığından dolayı, X'i belirlemek için kompakt destekli (compakt suport) C^∞-fonksiyonların üzerinde L_X'in etkisini bilmek yeterlidir.

$$\begin{tikzcd}
M_1 \arrow[r, "\Phi"] \arrow[d, "X"'] & M_2 \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\Phi_* X"] & \mathbb{R} \\
T(M_1) \arrow[r, "T(\Phi)"] & T(M_2) \arrow[r, "T(f)"] & T(\mathbb{R})
\end{tikzcd}$$

diyagramı sıra değiştiğinden, yani $T(f) \circ T(\Phi) \circ X = T(f) \circ \Phi_* X \circ \Phi$ olmasından,

$$L_X(f \circ \Phi) = \left(L_{\Phi_* X}(f)\right) \circ \Phi \qquad (2.13)$$

sonucu çıkar. Dolayısıyla X'in görüntüsü bir fonksiyon üzerine X'in o fonksiyonun görüntüsü üzerine etkidiği gibi etki eder. Bu durum, L_X $\left(\text{ve } L_{\Phi_* X}\right)$, X yönünde bir eğri boyunca değişim oranı gibi düşünüldüğünde açık olur.

2.4 Doğal Baz

$\mathbb{R}^n$'nin koordinat ızgaraları bir haritanın V tanım bölgesini $\mathrm{T}_0^1(V)$ için, **doğal baz** olarak bilinen bir baz ile donatırlar. Bu aşağıdaki nedenden dolayı sıklıkla $\{\partial/\partial x_i\}$ veya basit olarak $\{\partial\}_i$ ile gösterilir: $\{e_i\}$, $\mathbb{R}^m$ için bir baz olsun ve $\Phi : q \to \sum_i e_i x^i \in \mathbb{R}^m$ olsun. Herhangi bir $g \in C^\infty(M)$ fonksiyonu için haritanın $\Phi(V)$ görüntüsü üzerinde $g \cdot \Phi^{-1}$ ile verilen bir gönderim vardır. (2.11)'e göre e_i boyunca Lie türevi $\partial/\partial x_i$ türevidir, dolayısıyla

$$L_{\Theta_C^{-1} e_i} g = \frac{\partial}{\partial x_i} g\left(q(x)\right) \tag{2.14}$$

olur.

2.5 Akışlar

Bir X vektör alanı bir manifoldun tüm noktalarında X yönünde bir hareket tanımlar. Doğru koşullar altında bu bir akış tanımlar, yani M 'nin diffeomorfizimlerinin bir tek-parametre grubunu tanımlar.

Bir X vektör alanına yön işaretleyicilerin bir alanı olarak bakılabilir; yani M 'in her noktasına bu noktadaki tanjant uzayında bir vektör atar. Bir $u : I \rightarrow M,\ t \rightarrow u(t)$ eğrisi her noktada X ile aynı yöne sahipse veya daha kesin olarak onun vasıtasıyla tanımlanan tanjant vektörü her noktada X 'e eşitse X 'in bir **integral eğrisi** adını alır. Bu şöyle ifade edilebilir: $e : t \rightarrow (t, \mathbf{1})$, $\mathbf{I}$ üzerinde birim vektör alanı olsun ve $\dot{u} = T(u)\cdot e$ olsun, o zaman X 'in integral eğrisi

$$\dot{u} = X \circ u \tag{2.15}$$

olur. Bunun şematik anlatımı aşağıdaki komütatif diyagramdır:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{I} \arrow[r, "\mathrm{u}"] \arrow[d, "\mathrm{I\ birim\ vektör}"'] \arrow[dr, "\dot{\mathrm{u}}"] & \mathrm{M} \arrow[d, "\mathrm{X}"] \\
\mathrm{T(I)} \arrow[r, "\mathrm{T(u)}"] & \mathrm{T(M)}
\end{tikzcd}$$

Üzerinde $\Phi \circ u : t \rightarrow \left(u_i(t)\right)$ ve $T(\Phi) \circ X \circ \Phi^{-1} : q \rightarrow \left(q_i, X_i(q)\right)$ olan bir harita için bu genellikle,

$$\dot{u}_i(t) = X_i(u(t)), \quad i = 1,2,...,m \qquad (2.16)$$

biçiminde m-boyutlu bir adi diferansiyel denklem formunda yazılır. M üzerinde hareketi tanımlamak için buradaki t parametresi zaman olarak düşünülebilir. Bir yüksek dereceden denklem yeni değişkenlerin tanımlanmasıyla her zaman bir birinci dereceden denkleme indirgenebildiğinden, (2.16) denklemi bir birinci dereceden denklem olmaması için bir geçerli neden yoktur.

Teorem (2.5.1): X bir M manifoldu üzerinde bir C^∞-vektör alanı olsun. O zaman her $q \in M$ için $\eta > 0$, q'nun bir V komşuluğu ve bir

$$\Phi^X : (-\eta,\eta) \times V \to M, \ (t,q(0)) \to \Phi^X(t,q(0)) = u(t,q)$$

gönderimi vardır, öyle ki;

(1) Her $q \in V$ için $t \to u(t,q)$, X'in q'dan geçen bir integral eğrisidir, yani $\dot{u} = X \circ u$ ve $u(0,q) = q$ olur.

(2) Her t, $|t| < \eta$ için $\Phi_t^X : V \to M$, $q \to \Phi_t^X(q) = \Phi^X(t,q)$ gönderimi M'nin bir altcümlesi üstünde bir V diffeomorfizimidir (V'nin bir diffeomorfizimidir).

Bir sabit vektör alanı gözönüne alınsın. $M = \mathbb{R}^n$, $X : (x_1,...,x_n) \to (x_1,...,x_n;\upsilon,0,...,0)$. $V = \mathbb{R}^n$, $\eta = \infty$, $u(t,x(0)) : u(t,x_i(0)) \to (x_1(0) + \upsilon t, x_2(0),...,x_n(0))$ olur. Buna göre bir sabit vektör alanı bir **lineer hareket alanı**na neden olur. Burada X, M üzerinde Φ_t^X diffeomorfizimlerinin bir tek-parametere grubunu gerçekler. Çünkü

$u\left(t_1+t_2,q\left(0\right)\right)=u\left(t_2,u\left(t_1,q\left(0\right)\right)\right)$'dir, onun varlığı $V=M$ ve $\eta=\infty$ olmasına izin verme olasılığına eşdeğerdir.

Teorem (2.5.1) yakın komşu yörüngelerin birden ayrılmış olmadığını ifade eder. X'in türevi uygun bir normda sınırlı kalmak koşuluyla komşu noktaların zamanda üstel biçimden daha hızlı birbirinden uzaklaşmadıkları görülür.

Tanım: Eğer Teorem (2.5.1)'in Φ_t^X diffeomorfizimleri $M\rightarrow M$'ye birebir eşleşmelerinin (bijections) bir tek-parametre grubunu oluşturuyorsa, X **tam**dır denir ve gruba bir **akış** denir. Eğer

$$\Phi_{t_1}^X\circ\Phi_{t_2}^X=\Phi_{t_1+t_2}^X \tag{2.17}$$

bağıntısı sadece herhangi bir noktanın yeterince küçük komşulukları ve yeterince kısa zamanlar için sağlanırsa, Φ_t^X bir **yerel akış**tır (diffeomorfizimlerin bir yerel grubu) denir.

Zaman-evrimi gözlenebilirlerin cebirinin otomorfizimlerinin bir grubu olarak kurulabilir. Cebiri C_0^∞ olarak (kompak destekli C_0^∞-fonksiyonlar) seçerek, bir vektör alanın yerel akışı kısa zamanlar için

$$\tau_t^X\left(f\right)=f\circ\Phi_t^X,\ \ f\in C_0^\infty \tag{2.18}$$

ile bir otomorfizim sağlar. Eğer X tam ise τ_t^X'ler bir tek-parametre grubudurlar:

$$\tau_{t_1}^X\circ\tau_{t_2}^X=\tau_{t_1+t_2}^X,\ \ t_1,t_2\in\mathbb{R} \tag{2.19}$$

Bu takdirde $t\rightarrow\tau_t^X\left(f\right)\left(q\right)$ gönderimi 0'ın herhangi bir komşuluğunda t için türevlenebilirdir. Bir harita kullanılarak bu zaman türevinin X ile ilişkilendirilen Lie türevi ile aynı olduğu gösterilebilir: $q(t)=u(t,q)$ Denklem (2.15)'in çözümü olsun. O zaman Teorem (2.5.1) göz önüne alındığında

$$\tau_t^X f_{|q} = f \circ \Phi_t^X{}_{|q} = f(q(t))$$

olur. Sonuç olarak,

$$\frac{d}{dt}\tau_t^X f\Big|_{t=0} = \frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial q_i}{\partial t}\Big|_{t=0} = \frac{\partial f}{\partial q_i}X_i(q) = L_X f,\ \ \forall f \in C_0^\infty \tag{2.20}$$

elde edilir.

Böylece bir vektör alanı bir lokal akış belirler ki bu, (2.18) ile verilen C^∞'un otomorfizimlerini belirler. (2.20) ve Teorem (2.3.1) ile otomorfizimler tekrar bir vektör alanı belirlerler, dolayısıyla üç kavram bir kavramda birleştirilebilir.

Eğer M, X ve f analitiklerse, o zaman $t \to \tau_t^X(f)\Big|_q$, 0'ın bir komleks komşuluğunda analitiktir. t'ye göre kuvvet serisi,

$$\tau_t^X(f) = e^{tL_X} f = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}(L_X)^n f \tag{2.21}$$

biçiminde yazılabilir. İki $\tilde{X}$ ve X vektör alanlarının akışları asimptotik olarak birbirlerine yaklaşıyor olabilir; yani her $q \in M$ için bir $p \in M$ vardır, öyle ki $\Phi_t^{\tilde{X}}$ ve Φ_t^X beraber yakınsıyor olabilir. Bununla beraber bunlar ayrı ayrı yakınsamayacaklarından burada gerekli olan

$$\lim_{t\to\infty}\Phi_{-t}^X \circ \Phi_t^{\tilde{X}} = \Omega \tag{2.22}$$

limitinin var olmasıdır. Diffeomorfizimlerin bir noktasal limiti bir diffeomorfizim olmayabilir; mesela □ üzerinde $x \to x/t$ gönderimlerinin limiti □ $\to 0$ 'dır. Bununla beraber, eğer Ω bir diffeomorfizim ise, o zaman grup özelliğinden

$$\begin{aligned} \Omega \circ \Phi_{\tau}^{\tilde{X}} &= \lim_{t\to\infty} \Phi_{-t}^{X} \circ \Phi_{t}^{\tilde{X}} \circ \Phi_{\tau}^{\tilde{X}} = \lim_{t\to\infty} \Phi_{-t}^{X} \circ \Phi_{t+\tau}^{\tilde{X}} \\ &= \lim_{t\to\infty} \Phi_{\tau}^{\tilde{X}} \circ \Phi_{-t}^{X} \circ \Phi_{t}^{\tilde{X}} = \Phi_{\tau}^{\tilde{X}} \circ \Omega \end{aligned} \tag{2.23}$$

olur, dolayısıyla her t için

$$\Phi_{t}^{X} = \Omega \circ \Phi_{t}^{\tilde{X}} \circ \Omega^{-1} \tag{2.24}$$

olur. Bundan dolayı X ve $\tilde{X}$ tarafından meydana getirilen akışlar aynı zamanda diffeomorfik olmalıdırlar. Teorem (2.5.1) ve (2.13), (2.20) ve (2.21) eşitlikleri kullanılarak, $f \in C^{\infty}$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt}\left(f \circ \Phi_{t}^{X} \circ \Omega \right)\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt}\left(f \circ \Omega \circ \Phi_{t}^{\tilde{X}} \right)\Big|_{t=0} \\ \Rightarrow & \frac{d}{dt}\left(\tau_{t}^{X}\left(f \right) \circ \Omega \right)\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt}\left(\tau_{t}^{\tilde{X}}\left(f \circ \Omega \right) \right)\Big|_{t=0} \\ \Rightarrow & \frac{d}{dt}\left(e^{tL_X} f \circ \Omega \right)\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt}\left(e^{tL_{\tilde{X}}\left(f \circ \Omega \right)} \right)\Big|_{t=0} \\ \Rightarrow & \frac{d}{dt}\left(e^{tL_X} f\left(\Omega \right) \right)\Big|_{t=0} = L_{\tilde{X}}\left(f \circ \Omega \right)\Big|_{t=0} \\ \Rightarrow & \left(L_X\left(f \right) \right) \circ \Omega \Big|_{t=0} = \left(L_{\Omega_* \tilde{X}}\left(f \right) \right) \circ \Omega \Big|_{t=0} \end{aligned}$$

elde edilir. Son işlem satırından,

$$L_X = L_{\Omega_* \tilde{X}} \; \left(\text{veya} \right) \; X = \Omega_* X \tag{2.25}$$

sonucu çıkar. Buna göre Ω diffeomorfizimi vektör alanlarını birbirlerine dönüştürür. Böylece asimptotik olarak eşit akışlar farklı koordinat sistemlerinde ifade edilmiş aynı akış olarak görülebilir.

Teorem (2.5.2): $X(q) \neq 0$ olan her $q \in M$ noktasında; $\Phi(U) = I \times V$, $V \subset \mathbb{R}^{m-1}$; her $x \in V$ için $t \to \Phi^{-1}(t,\{x\})$, $\forall t \in I$, X'in bir integral eğrisidir; ve $\Phi_* X : (x_1, x_2, ..., x_m) \to (x_1, x_2, ..., x_m; 1, 0, ..., 0)$ olacak biçimde bir (U, Φ) haritası vardır.

İspat: $X(q) \neq 0$ olduğundan, $\psi(q) = 0 \in \mathbb{R}^m$ olan bir (U_1, ψ) haritası bulunabilir öyle ki, $\psi_* X(0) = (1, 0, ..., 0)$'dır. $\psi_* X \in \mathrm{T}_0^1(\psi(U_1))$, sürekli olduğu için üzerinde X'in görüntüsünün birinci bileşenin $(1/2)$'den daha büyük olduğu 0'ın bir açık, göreli olarak kompakt U_2 komşuluğu vardır: $(\psi_* X)^1 > 1/2$, $\forall x \in U_2$. Eğer $X_0 \in \mathrm{T}_0^1(\mathbb{R}^m) : x \to (x; 1, 0, ..., 0)$ ve $U \subset U_2$, 0'ı içeren bir açık cümle ise, o zaman verilen bir fonksiyon $0 \leq f \leq 1$ olan $f \in C^\infty(\mathbb{R}^m)$ ve

$$f = \begin{cases} 0 & CU_2 \text{ üzerinde} \\ 1 & U \text{ üzerinde} \end{cases}$$

ise,

$$\tilde{X} = f \cdot \psi_* X + (1 - f) X_0 \in \mathrm{T}_0^1(\mathbb{R}^m)$$

aradeğer vektör alanı tanımlanabilir. Açık olarak $(\tilde{X})^1(x) > 1/2,\ \forall x \in \mathbb{R}^m$, ve $\tilde{X}$ bir akış meydana getirir, çünkü bir kompakt cümlenin dışında X_0 ile aynıdır (Şekil 2.7). Dolayısıyla, $\left(\Phi_t^{\tilde{X}}(x)\right)^1 \geq x^t + t/2$ için

$$\Omega = \lim_{t \to \infty} \Phi_{-t}^{X_0} \circ \Phi_t^{\tilde{X}}$$

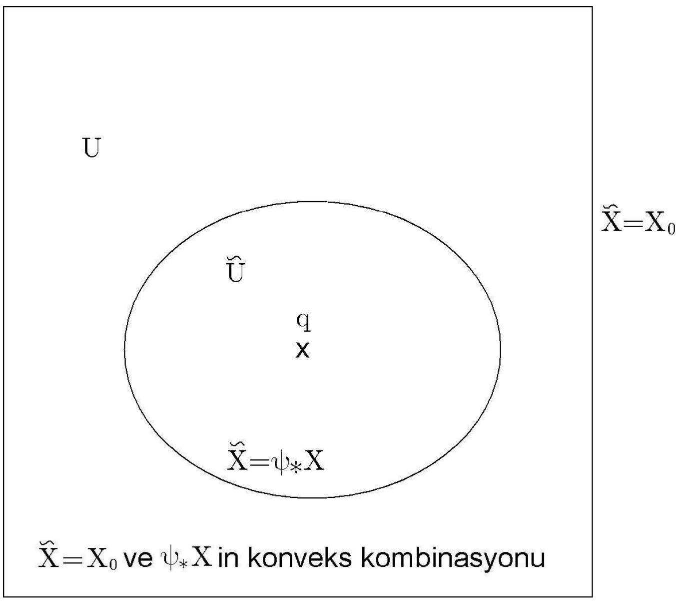
vardır ve

$$\left\{ x \in \mathbb{R}^m : x^1 > \sup_{\bar{x} \in U_2} \bar{x}^1 \right\}$$

üzerinde $\Phi_t^{X_0}$ ve $\Phi_t^{\tilde{X}}$ özdeştirler. Eğer $t > \tau$ için, $\Phi_t^{\tilde{X}}$ bir noktayı U_2'nin dışına göndermişse, o zaman o noktada $\Phi_t^{X_0}$ ve $\Phi_t^{\tilde{X}}$ özdeş olduklarından her $t > 0$ için

$$\Phi_{-\tau-t_1}^{X_0} \circ \Phi_{\tau+t_1}^{\tilde{X}} = \Phi_{-\tau}^{X_0} \circ \Phi_{-t}^{X_0} \circ \Phi_{\tau}^{\tilde{X}} \circ \Phi_{t_1}^{\tilde{X}} = \Phi_{-\tau}^{X_0} \circ \Phi_{\tau}^{\tilde{X}}$$

olur. Bu yüzden limit sonlu bir zaman sonra kompakt cümlenin üzerinde elde edilir ve Ω bir diffeomorfizimdir. (2.24) eşitliğine göre Ω, $\tilde{X}$'yı X_0'a dönüştürür ve U üzerinde $\tilde{X}$ ve $\psi_* X$ eşittirler. Teoremin Φ gönderimi $\Omega \circ \psi$'dir.



Şekil 2.7 Aradeğer vektör alanı $\tilde{X}$

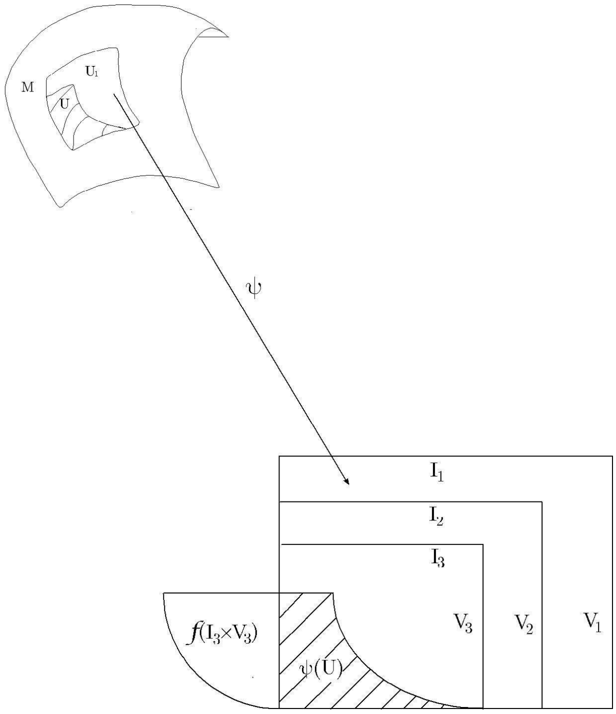
Bu teorem X 'in akış çizgisi kullanarak şöyle ispatlanır: U_1, ψ 'nin tanım bölgesi olsun ve $\psi(U_1) = I_1 \times V_1$, $I_1 \subset \mathbb{R}$, $V_1 \subset \mathbb{R}^{m-1}$ olsun. Teorem (2.5.2) bu haritayı kullanarak, $\psi_* X \circ u = \dot{u}$ denkleminin bir lokal $u(t; x_1, ..., x_m)$ çözümünün varlığını garantiler. Orijinde $f(t; x_2, ..., x_m) = u(t; 0, x_2, ..., x_m) : I_2 \times V_2 \to \mathbb{R}$, $I_2 \subset I_1$, $V_2 \subset V_1$ fonksiyonu $Df(0) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ türevine sahiptir, çünkü f_i bileşenleri

$$\frac{\partial f}{\partial t}\Big|_0 = X_i(0) = (1, 0, ..., 0), \quad \frac{\partial f}{\partial x_2}\Big|_0 = \delta_{i2}, \text{ v.s.}$$

sağlayacak biçimde bulunur. Bu yüzden $I_3 \subset I_2$, ve $V_3 \subset V_2$ olan bir $I_3 \times V_3$ komşuluğu üzerinde Df terslenebilirdir ve sonuç olarak f orada diffeomorfizimdir. Çünkü $f(0, x_2, ..., x_m) = (0, x_2, ..., x_m)$, $\psi(U) = I_3 \times V_3 \cap f(I_3 \times V_3) \neq \varnothing$ 'dır, yeni bir harita olarak $\left(U, f^{-1} \circ \psi_{|U}\right)$ tanımlamak mümkündür (Şekil 2.8). Bu harita üzerinde vektör alanı,

$$\begin{aligned}\Phi_* X &= T(\Phi) \circ X \circ \Phi^{-1} = T\left(f^{-1}\right) \circ \psi_* X \circ f = T\left(f^{-1}\right) \circ \dot{f} \\ &= T\left(f^{-1}\right) \circ T(f) \circ (1, 0, ..., 0) = (1, 0, ..., 0)\end{aligned}$$

formuna sahiptir. Bu yüzden $I \times \{x\}$ 'ler integral eğrileridir.



Şekil 2.8 Bölgelerin ilişkisi

$X(q)=0$ olan q noktaları **kritik noktalar**dır denir; bu noktalar akışın sabit noktalarıdır. Teorem $m-1$ tanesi zamandan bağımsız m yerel hareket integralini gösterir: $x_1-t, x_2, ..., x_m$. Bununla beraber x_i'ler yalnızca $M \to \mathbb{R}$ fonksiyonlardır. Bunlara Euclides koordinat fonksiyonları denir. Faz hareket interalleri $L_X K = 0$ olan C^r-fonksiyonlar $(r \geq 0)$, $K : M \to \mathbb{R}$ için korunumlu olurlar.

Mekaniğin diferensiyel denklemleri varyasyonel problemin Euler-Lagrange denklemleri olarak bir dereceye kadar özeldirler. Burada gerekli olan $x(t)$'nin bir,

$$W = \int dt L(x(t), \dot{x}(t)) \qquad (2.26)$$

fonksiyonelinin DW türevinin (Frechet) sıfır olmasıdır. Bu, $DW = 0$ koşulu herhangi bir özel koordinat sistemi ayırmadığından, bir koordinat-bağımsız formülasyon avantajına sahiptir. m_i ve e_i sırasıyla i-yinci parçacığın kütlesi ve yükü, $|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|$, i-yici ve j-yinci parçacıklar arasındaki uzaklık olmak üzere N-parçacıklı bir sistemin makroskopik Lagrangianı

$$L = \sum_{i=1}^{N} m_i \frac{|\mathbf{x_i}|^2}{2} - \sum_{i>j}^{N} \left(e_i e_j - \kappa m_i m_j \right) |\mathbf{x_i} - \mathbf{x_j}|^{-1} \tag{2.27}$$

olur. Burada κ genel çekim sabitidir. Korunumlu sistemler için Euler-Lagrange denklemleri,

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{x}}_i} = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{x}_i}, \quad i = 1, ..., N \tag{2.28a}$$

ile verilir. $q_i(x),\ i = 1, ..., N$, genelleştirilmiş koordinatları kullanılarak, yukarıdaki Lagrangian,

$$L = \sum_{i,k=1}^{3N} m_{ik}(q) \frac{q_i q_k}{2} - V(q) \tag{2.28b}$$

şeklinde yazılabilir. Burada m_{ik} her q için tekil olmayan (nonsingular) bir maristir. Euler-Lagrange denklemleri

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial L}{\partial q_i}, \quad i = 1, ..., 3N \tag{2.29}$$

olurlar ve q_i'ler konjuge momentum $p_i = \partial L / \partial \dot{q}_i = m_{ik}(q)\dot{q}_k$ ile ifade edilebilirler, böylece Euler-Lagrange denklemlerine eşdeğer olarak Hamiltonian formunda denklemleri yazmak daha uygun olur: Sistemin Hamiltonianı

$$H(q,p) = \sum_i p_i \dot{q}_i - L = \sum_{i,k} \frac{\dot{q}_i \dot{q}_k}{2} \left(m^{-1}(q) \right)_{ik} + V(q) \tag{2.30}$$

olur ve Hamilton denklemleri

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \tag{2.31}$$

yazılabilir. Burada açıkça L'nin tanjant demeti üzerinde bir vektör alanı ((p,q) koordinatları) sağladığı görülüyor.

2.6 Tensörler

Eğer E bir sonlu boyutlu vektör uzayı ise, o zaman $E \to \mathbb{R}$ $\left(\text{veya } \mathbb{C}\right)$ lineer gönderimlerinin uzayına onun dual uzayı E^* denir. Bu gönderimler skaler çarpımlar biçiminde yazılabilir: Herhangi bir $\upsilon^* \in E^*$'a bir $u \to \left(\upsilon^* | u\right)$ gönderimi karşı gelir, öyle ki her $\alpha_i \in \mathbb{R}$ için

$$\left(\upsilon^* | \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2\right) = \alpha_1 \left(\upsilon^* | u_1\right) + \alpha_2 \left(\upsilon^* | u_2\right) \tag{2.32}$$

dir. Eğer aynı zamanda,

$$\left(\alpha_1 \upsilon_1^* + \alpha_2 \upsilon_2^* | u\right) = \alpha_1 \left(\upsilon_1^* | u\right) + \alpha_2 \left(\upsilon_2^* | u\right) \tag{2.33}$$

olduğu varsayılırsa, o zaman E^* bir lineer uzaydır. E^*, aşağıdaki özellikleri sağlar:

(i) Eğer her $\upsilon^* \in E^*$ için $\left(\upsilon^* | u\right) = 0$ ise, o zaman $u = 0$'dır.

(ii) $\dim E^* = \dim E$

(iii) $\left(E^*\right)^* = E$

(iv) Her lineer $L: E \to F$ (bir vektör uzayı) gönderimi birebir ve örten olarak (birebir eşleme biçiminde) bir lineer $L^t : F^* \to E^*$ gönderimi ile ilişkilendirilir, öyle ki her $\upsilon^* \in F^*$ ve $u \in E$ için $\left(L^t \upsilon_1^* \middle| u\right) = \left(\upsilon_1^* \middle| Lu\right)$ olur. L^t, gönderimi L'nin **adjointi (eşleniği)** olarak adlandırılır.

İspat (iv): $\upsilon \to \left(\omega^* \middle| L\upsilon\right)$, E üzerinde bir lineer fonksiyoneldir ve bundan dolayı L^t bir lineer $F^* \to E^*$ gönderim olmak üzere, $\upsilon \to \left(L^t \omega^* \middle| \upsilon\right)$ yazılabilir. $L \to L^t$ ilişkisi

$$
\begin{aligned}
&L_1^t = L_2^t \Leftrightarrow L_1^t \omega^* = L_2^t \omega^*, \ \forall \omega^* \in F^* \Leftrightarrow \\
&\left\langle L_1^t \omega^* \middle| \upsilon \right\rangle = \left\langle L_2^t \omega^* \middle| \upsilon \right\rangle, \ \forall \upsilon \in E \Leftrightarrow \\
&\left\langle \omega^* \middle| L_1 \upsilon \right\rangle = \left\langle \omega^* \middle| L_2 \upsilon \right\rangle, \ \forall \upsilon \in E, \ \forall \omega^* \in F^* \Leftrightarrow L_2 = L_1
\end{aligned}
$$

için birebirdir. $E^{**} = E$ ve $F^{**} = F$ (E ve F sonlu boyutludur) olduğundan, herhangi $L: E \to F$ için,

$$\left\langle L^{tt} \upsilon \middle| \omega^* \right\rangle = \left\langle \upsilon \middle| L^t \omega^* \right\rangle = \left\langle L^t \omega^* \middle| \upsilon \right\rangle = \left\langle \omega^* \middle| L\upsilon \right\rangle$$

dir. Bu yüzden $L^{tt} = L$ olur. Böylece bir $L^t : F^* \to E^*$ için

$$L = L^{*t} : E \to F, \ \left\langle L\upsilon \middle| \omega^* \right\rangle = \left\langle \upsilon \middle| L^* \omega^* \right\rangle, \ \forall \upsilon \in E, \ \forall \omega^* \in F^*$$

ve dolayısıyla $L^t = \left(L^{*t}\right)^t \equiv L^{*tt}$'dir, yani ilişki aynı zamanda örtendir. Bu ispatı tamamlar.

Tanım: $T_q(M)$'nin $T_q^*(M)$ dual uzayına q noktasında M'nin **kotanjant uzayı** denir ve bunun elemanlarına **kovektör** denir.

Bir ortogonal baz e_i, $\left(e_i \middle| e_j\right) = \delta_{ij}$ ile $\mathbb{R}^n$ kendi dual uzayı ile belirlenebilir. Eğer baz bir ortogonal L birebir eşleşmesi $e_i \to Le_i$ gibi dönüştürülürse, $\left(e^{*i} \middle| e_j\right) = \delta_{ij}$ sağlamak için **dual baz**, $\left\{e^{*i}\right\}$, $\left(L^{-1}\right)^t$ ile dönüştürülmelidir. Φ diffeomorfizimi tarafından $T_q(M)$ üzerinde meydana getirilen (indüklenen) $T_q(\Phi)$ dönüşümü genellikle ortogonal olmadığından ve ayırt edilen koordinat sistemi olmadığından, $T_q(M)$'de bir vektör $T_q^*(M)$'de harita-bağımsız anlama sahip olmayan bir vektörle aynıdır. Haritaların değişimi ile farklılaşırlar ve eşit olmazlar. Bu yüzden $T_q(M)$'yi M ek bir yapıya, bir Riemannian metrik gibi, sahip olmadan $T_q^*(M)$'den ayırt etmek zorunludur.

$T_q^*(M)$'nin $T_q^{**}(M)$ dual uzayının $T_q(M)$ ile belirlenmesi $\left(\left(\left(L^{-1}\right)^t\right)^{-1}\right)^t = L$ olduğundan haritaların değişimi tarafından etkilenmez. Bir $\upsilon^* \in T_q^*(M)$, υ^*'a ortogonal olan tüm υ'lerden meydana gelen bir $m-1$ boyutlu hiperdüzlem tanımlar. $\left(\upsilon^* \middle| \upsilon\right) = 0$ olduğu için, skaler çarpımın hiperdüzlemin dışına yönelen bir vektörün bileşenini ölçtüğü görülüyor. Eğer υ bir ok ve υ^* paralel hiperdüzlemlerin bir dizisi olarak düşünülürse, o zaman $\left(\upsilon^* \middle| \upsilon\right)$ onların kaç tanesinin ok tarafından delinip geçildiğini söyler. Bununla berber υ^*, $\left(\upsilon^* \middle| \upsilon_\perp\right) = 0$ olan bir tek $\upsilon = \upsilon_\parallel + \upsilon_\perp$ ayrışımı tanımlamaz.

Vektör analizinde bir f fonksiyonunun gradyenti bir vektör örneğidir. Burada ise $T_q^*(M)$'in bir elemanı olarak tanımlanır. Bir $f \in C^\infty(M)$ fonksiyonu bir $T_q(f): T_q(M) \to T_q^*(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ gönderimi tanımlar ki bu yüzden $T_q^*(M)$'nin bir elemanıdır. Bu gönderim $df_{|q}$ ile gösterilir ve q noktasında f 'nin **dış türevi** olarak adlandırılır. Bir harita üzerinde

$$df_{|q}(\upsilon) = \upsilon^i \frac{\partial f}{\partial q^i}\Big|_q \,,\ \forall \upsilon \in T_q(M) \tag{2.34}$$

bilinen formül ile verilir.Eğer $T_q(M)$'nin bir vektörü X vektör alanı ile belirtilirse, bu gönderim

$$df_{|q}\left(X(q)\right) = \left(L_X f\right)(q),\ X \in T(M) \tag{2.35}$$

olur. Böylece df 'nin etkisi bir X vektörüne X yönünde f 'nin değişim oranını yükler.

Bir $C = (U, \Phi)$ haritası, $\Phi(q) = \sum e_i q^i \in \mathbb{R}^m$ verilmiş olsun, $\Theta_C^{-1}(q)$ ters gönderimi $\{e_i\}$ bazını $\mathbb{R}^m$'den $\{\partial/\partial q_i\}$ biçiminde yazılan $T_q(U)$'ya nakleder. Aynı şekilde, $\Theta_C^t(q)$, $\{e^{*i}\}$ bazını $\partial/\partial q^i$ 'ye dual $T_q^*(M)$'nin bazına dönüştürür. Bu baz, eğer q^i, M üzerinde bir C^∞-fonksiyon olarak düşünülürse, dış türev notasyonunda dq^i şeklinde yazılır:

$$\left(dq^i \middle| \Theta_C^{-1}(q) e_j\right) = dq^i\Big|_q \left(\Theta_C^{-1}(q) e_j\right) = L_{\Theta_C^{-1}(q)e_j} q^i = \frac{\partial q^i}{\partial q^j} = \delta_{ij} \tag{2.36}$$

Koordinatların diferansiyelleri dq^i 'ler $T_q^*(U)$'nun **doğal bazı** olarak adlandırılır. (2.34)'e göre

$$df = \upsilon \frac{\partial f}{\partial q^i} dq^i \tag{2.37}$$

olur.

Her çarpanında lineer bir

$$\underbrace{T_q^*(M)\times T_q^*(M)\times\ldots\times T_q^*(M)}_{\text{r kere}}\to \mathbb{R}$$

gönderimi **r-dereceden bir kontravaryant tensör**dür. Aynı biçimde **s-dereceden bir kovaryant tensör**

$$\underbrace{T_q(M)\times T_q(M)\times\ldots T_q(M)}_{\text{s kere}}\to \mathbb{R}$$

bir multilineer gönderimdir.

Tanım: q noktasında her çarpanına göre lineer bir

$$\underbrace{T_q^*(M)\times T_q^*(M)\times\ldots\times T_q^*(M)}_{\text{r kere}}\times\underbrace{T_q(M)\times T_q(M)\times\ldots\times T_q(M)}_{\text{s kere}}\to \mathbb{R} \tag{2.38}$$

gönderimi bir **r-dereceden kontravaryant ve s-dereceden kovaryant tensör**dür denir. Bu multilineer gönderim,

$$\begin{aligned}\left(t\middle|\upsilon_1^*+u_1^*,\upsilon_2^*,\ldots,\upsilon_r^*;\upsilon_1,\ldots,\upsilon_s\right)&=\left(t\middle|\upsilon_1^*,\upsilon_2^*,\ldots,\upsilon_r^*;\upsilon_1,\ldots,\upsilon_s\right)\\&\quad+\left(t\middle|u_1^*,\upsilon_2^*,\ldots,\upsilon_r^*;\upsilon_1,\ldots,\upsilon_s\right)\end{aligned}$$

v.s. olmak üzere,

$$\left(\upsilon_1^*,...,\upsilon_r^*;\upsilon_1,...,\upsilon_s\right) \to \left(t \middle| \upsilon_1^*,...,\upsilon_r^*;\upsilon_1,...,\upsilon_s\right) \in \mathbb{R} \tag{2.39}$$

bir skaler çarpım biçiminde ifade edilir. Eğer ilk çarpan için bir dağılma kuralı,

$$\begin{aligned}\left(\alpha_1 t_1 + \alpha_2 t_2 \middle| \upsilon_1^*,...,\upsilon_r^*;\upsilon_1,...,\upsilon_s\right) &= \alpha_1\left(t_1 \middle| \upsilon_1^*,...,\upsilon_r^*;\upsilon_1,...,\upsilon_s\right)\\ &+ \alpha_2\left(t_2 \middle| \upsilon_1^*,...,\upsilon_r^*;\upsilon_1,...,\upsilon_s\right)\end{aligned}$$

kabul edilirse, o zaman multilineer gönderimlerin uzayı bir lineer yapı da kazanır ve bu uzay $T_{qs}^r(M)$ ile gösterilir. Buna göre $T_{q0}^1(M) = T_q(M)$ ve $T_{q1}^0(M) = T_q^*(M)$ olur.

Tanım: r vektörün ve s kovektörün $u_1 \otimes u_2 \otimes ... \otimes u_r \otimes u_1^* \otimes u_2^* \otimes ... \otimes u_s^* \in T_s^r$ **tensör çarpımı,**

$$\left(u_1 \otimes ... \otimes u_r \otimes u_1^* \otimes ... \otimes u_s^* \middle| \upsilon_1 \otimes ... \otimes \upsilon_r \otimes \upsilon_1^* \otimes ... \otimes \upsilon_s^*\right) = \prod_{i=1}^{r}\left(\upsilon_i^* \middle| u_i\right)\prod_{i=1}^{s}\left(\upsilon_j^* \middle| u_j\right) \tag{2.40}$$

ile tanımlanır. Tensör çarpım aşağıda verilen özellikleri sağlar:

(i) $(\upsilon_1 + \upsilon_2) \otimes \omega = \upsilon_1 \otimes \omega + \upsilon_2 \otimes \omega$

(ii) $\upsilon \otimes (\omega_1 + \omega_2) = \upsilon \otimes \omega_1 + \upsilon \otimes \omega_2$ (2.41)

(iii) $\alpha(\upsilon \otimes \omega) = \alpha\upsilon \otimes \omega = \upsilon \otimes \alpha\omega$

Dolayısıyla $\otimes$ tensör çarpımı $T_s^r \times T_{s'}^{r'}$'den $T_{s+s'}^{r+r'}$'ye dağılımlı (distributive) ve birleşmeli (associative) bir gönderimdir. Fakat tanımdan görüldüğü gibi değişmeli (commutative) değildir. Bu gönderimle $\otimes_{r,s} T_s^r$ bir cebir olur ve buna T **tensör cebiri** denir (Hassani 1999).

Her tensör, vektörlerin bir tensör çarpımı biçiminde yazılmamasına rağmen, T_s^r açık olarak böyle terimlerin bir lineer kombinasiyonu tarafından gerilir. Eğer $\{e^{*i}\}$ ve $\{e_j\}$ sırasıyla T_1^0 ve T_0^1 için baz (taban) iseler, o zaman bir $t \in T_s^r$

$$t = \sum_{i,j} t_{i_1 \dots i_s}^{j_1 \dots j_r} e^{*i_1} \otimes \dots \otimes e^{*i_s} \otimes e_{j_1} \otimes \dots \otimes e_{j_r} \tag{2.42}$$

biçiminde yazılabilir. $t_{i_1 \dots i_s}^{j_1 \dots j_r}$, nicelikleri t'nin bileşenleridir. Bir vektör uzayı gibi düşünülerek T_s^r, m^{r+s} boyuta sahiptir. Kartezyen çarpımda boyutlar toplanırdı, fakat burada, yani, tensör çarpımda boyutlar çarpılır.

Toplam tensör cebiri T sonsuz-boyutlu iken idealler yardımıyla bölüm cebirleri üretilebilir.

$$I = \left\{ \sum_i t \otimes t_i \otimes \bar{t}\,,\ t_i \in T_1,\ t, \bar{t} \in T \right\} \tag{2.43}$$

cümlesi T'nin T_1 altcümlesi tarafından üretilen bir **iki-taraflı ideal** olarak tanımlanır ve bölüm cebirleri modülo I eşdeğerlik sınıflarıdır. Çarpımlar ve toplamlar bu bölüm uzayları üzerinde bilinen yoldan tanımlanır.

Tanım: Bir t tensörü i-yinci ve j-yinci değerlerinde **simetriktir** ancak ve ancak bu değerler değiş tokuş edildiği zaman onun değeri bir multilineer fonksiyon biçiminde değişmez kalır. Aşikar olarak bu iki değeri aynı türden olmalıdır. Bir tensör kontravaryant indislerinin her çiftinde simetrik ise **kontravaryant-simetrik** ve kovaryant indislerinin her çiftinde simetrik ise **kovaryant-simetriktir** denir. Bir tensör hem kontravaryant-simetrik hem de kovaryant-simetrik ise **simetriktir**.

$(r,0)$ tipinde tüm simetrik tensörlerin $\mathrm{S}^r(M)$ cümlesi $T_0^r(M)$ vektör uzayının bir altuzayını meydana getirir. Aynı şekilde, $(0,s)$ tipinde simetrik tensörlerin cümlesi $T_s^0(M)$ uzayının bir $\mathrm{S}_s(M)$ altuzayını biçimlendirir. Bir simetrik $t \in \mathrm{S}^r(M)$ tensörünün bağımsız bileşenleri, $i_1 \le i_2 \le ... \le i_r$ olmak üzere, $t_{i_1 i_2 ... i_r}$'dir. Simetrik tensörlerin bir cümlesi bir vektör uzayı biçimlendirmesine rağmen, tensörlerin bilinen çarpımı altında bir cebir biçimlendirmez. Gerçekten, $t = t^{ij} e_i \otimes e_j$ ve $\overline{t} = \overline{t}^{kl} e_k \otimes e_l$ tensörleri $(2,0)$ tipinde simetrik tensörler olsalar bile $t \otimes \overline{t} = t^{ij} \overline{t}^{kl} e_i \otimes e_j \otimes e_k \otimes e_l$, $(4,0)$ tipinde simetrik tensör olmak zorunda değildir. Örneğin, $t^{ij} \overline{t}^{kl} \neq t^{ik} \overline{t}^{jl}$ olabilir. Bununla beraber simetrik tensörler için simetrik çarpanların bir simetrik çarpımını bulmak için tensör çarpımın tanımı değiştirilebilir.

Bir t tensörü i ve j indislerinde kontravaryant (kovaryant) **skew-simetriktir** ancak ve ancak her $\omega^* \in T_1^0$ $\left(\upsilon \in T_0^1\right)$ için t'nin i-yinci ve j-yinci değişkenleri için $\omega^* \in T_1^0$ $\left(\upsilon \in T_0^1\right)$ yerine konulması kalan değişkenlerin değerlerine bakmaksızın sıfır sonucunu verir. Bir **kontravaryant (kovaryant) skew-simetrik tensör** her kontravaryant (kovaryant) değişken çiftinde skew-simetrik tensördür (Hassani 1999). Bir tensör hem kovaryant hem de kontravaryant skew-simetrik ise **skew-simetrik**tir denir.

Tanım: V bir vektör uzay ve V^* onun dual uzayı olsun. Bir **simetrileyici**, toplam $1,2,...,r$ tamsayılarının $r!$ permütasyonları üzerinden alınmak üzere ve $\tau^1, \tau^2, ..., \tau^r \in V^*$ olmak üzere,

$$\left[\mathrm{S}(t)\right]\left(\tau^1, \tau^2, ..., \tau^r\right) = \frac{1}{r!} \sum_{\pi} t\left(\tau^{\pi(1)}, \tau^{\pi(2)}, ..., \tau^{\pi(r)}\right) \tag{2.44}$$

ile verilen $\mathrm{S} : T_0^r \to \mathrm{S}^r$'ye bir işlemcidir. $\mathrm{S}(t)$, sıklıkla t_{S} ile gösterilir, açık olarak t_{S} bir simetrik tensördür. Benzer bir tanım $\mathrm{S} : T_r^0 \to \mathrm{S}_s$ simetrileyicisini verir. Burada (2.44)'deki $\tau^1, \tau^2, ..., \tau^r$ yerine $\upsilon_1, \upsilon_2, ..., \upsilon_s \in V$ alınır.

Tanım: $t \in \mathrm{S}^r$ ve $\overline{t} \in \mathrm{S}^s$ tensörlerinin simetrik çarpımı $t\overline{t}$ ile gösterilir ve toplam $1,2,...,r+s$ 'nin bütün permütasyonları üzerinden olmak üzere,

$$
\begin{aligned}
t\overline{t}\left(\tau^1,\tau^2,...,\tau^{r+s}\right) &\equiv \frac{(r+s)!}{r!s!}\mathrm{S}\left(t\otimes\overline{t}\right)\left(\tau^1,\tau^2,...,\tau^{r+s}\right) \\
&= \frac{1}{r!s!}\sum_{\pi} t\left(\tau^{\pi(1)},\tau^{\pi(2)},...,\tau^{\pi(r+s)}\right)\overline{t}\left(\tau^{\pi(1)},\tau^{\pi(2)},...,\tau^{\pi(r+s)}\right)
\end{aligned}
\tag{2.45}
$$

biçiminde tanımlanır. $t \in \mathrm{S}_r$ ve $\overline{t} \in \mathrm{S}_s$ tensörlerinin simetrik çarpımı da aynı şekilde tanımlanır. Tanımdan simetrik çarpımın değişmeli (commutative), birleşmeli (associative) ve dağılımlı (disributive) olduğu açıktır.

Tanım: p kovektörün $\upsilon_1^* \wedge \upsilon_2^* \wedge ... \wedge \upsilon_p^* \in T_p^*$ **dış çarpımı** veya **kama (wedge) çarpımı**

$$
\left(\upsilon_1^* \wedge \upsilon_2^* \wedge ... \wedge \upsilon_p^* \middle| u_1,u_2,...,u_p\right) = \det\left(\upsilon_i^* \middle| u_j\right) \tag{2.46}
$$

ile tanımlanır. $\otimes$ notasyonu ile bağlantı herhangi iki kovektör için, $\upsilon_1^* \wedge \upsilon_2^* = \upsilon_1^* \otimes \upsilon_2^* - \upsilon_2^* \otimes \upsilon_1^*$ 'dir. Daha genel olarak, eğer $t_{i_1i_2...i_p}$ tamamen antisimetrik ise

$$
t_{i_1i_2...i_p} e^{*i_1} \otimes e^{*i_2} \otimes ... \otimes e^{*i_p} = \frac{1}{p!} t_{i_1i_2...i_p} e^{*i_1} \wedge e^{*i_2} \wedge ... \wedge e^{*i_p} \tag{2.47}
$$

dir. Bu ifadede, $(-1)^P$ permütasyon işareti olmak üzere, herhangi bir $\left(i_1...i_p\right) \rightarrow \left(P_{i_1...i_p}\right)$ permütasyonu için $t_{P_{i_1}...P_{i_p}} = (-1)^P t_{i_1...i_p}$ 'dir. p-yinci dereceden kovaryant, tamamen antisimetrik tensörlerden meydana gelen lineer uzay Λ_p ile gösterilir ve elemanları,

$$\sum_{(i)} \frac{1}{p!} e^{*i_1} \wedge e^{*i_2} \wedge \ldots \wedge e^{*i_1} \omega_{i_1 i_2 \ldots i_p} \tag{2.48}$$

formundadır ve boyutu $\binom{m}{p}$'dir. Eğer kama (wedge) çarpım $\wedge$ için değişme (associative) ve dağılma (distributive) kuralları tüm Λ_p'ye genişletilirse, o zaman $\oplus_{p=0}^{m} \Lambda_p$ (Λ_0 skaler olsun) cümlesi **dış cebir** olarak bilinen bir dereceli (graduated) cebir olur. e^{*i}'ler tarafından ki onlar için çarpım sıra değişmezdir (antikomütatif), meydana getirildiğinden bir Grosmann cebiridir. Λ_p'nin ilgi çekici olmasının nedeni onun elemanlarının p vektör tarafından gerilen hacimleri ölçmesidir. Kovektörler$\in \Lambda_1$ bir vektörün bileşenlerinin boyunu tanımlarlar. Doğal skaler çarpımın e^{*i}'yi e^i ile tanımladığı $\mathbb{R}^n$ de, $\left(e^{*i} \wedge e^i \middle| u, \upsilon\right) = u^1\upsilon^2 - u^2\upsilon^1$ $(1-2)$-düzlemi üzerinde u ve υ'nün izdüşümleri tarafından gerilen paralelkenarın alanıdır. Bu açık olarak p vektörün, $1 \le p \le m$, durumunu geneller.

Şimdiye kadar hacimleri ölçmek için elde edilen aksiyomlar aşağıdaki biçimdedirler: $\mu(u, \upsilon, \omega, \ldots)$, $u, \upsilon, \omega, \ldots$ vektörleri tarafından gerilen hacim olsun

(i) $\mu(\alpha u, \upsilon, \omega, \ldots) = \mu(u, \alpha\upsilon, \omega, \ldots) = \ldots = \alpha\mu(u, \upsilon, \omega, \ldots)$

(ii) $\mu(u_1 + u_2, \upsilon, \omega, \ldots) = \mu(u_1, \upsilon, \omega, \ldots) + \mu(u_2, \upsilon, \omega, \ldots)$, ve benzer şekilde $\upsilon = \upsilon_1 + \upsilon_2$, v.s. için de sağlanır

(iii) $\mu(u, u, \upsilon, \omega, \ldots) = \mu(u, \upsilon, \upsilon, \omega, \ldots) = \ldots = 0$

Bu gereklilikler bir $t \in \Lambda_p$, $\mu(u, \upsilon, \omega, \ldots) = \mu\left(t \middle| u, \upsilon, \omega, \ldots\right)$ için şuna eşdeğerdir: Aksiyom (i) ve (ii) bir multilineer yapıya neden olurlar ve Aksiyom (iii) tam antisimetriyi ifade eder. Tam antisimetri iki argümanın değişiminde işaretin değişmesine eşdeğerdir ve Aksiyom (iii)

$$\mu(u+\upsilon,u+\upsilon,\omega,...)=\mu(u,\upsilon,\omega,...)=\mu(u,\upsilon,\omega,...)=0 \tag{2.49}$$

yol açar.

Tanım: İç çarpım $(\omega, X)\to i_X\omega,\ \Lambda_p\wedge T_0^1$dan Λ_{p-1}'e her iki çarpanında lineer bir gönderimdir ve aşağıda verilen şekilde belirlenir:

$$\begin{aligned}&\text{(i) } i_X\omega=(\omega|X),\ \omega\in\Lambda_p \text{ için}\\ &\text{(ii) } i_X(\omega\wedge\upsilon)=i_X\omega\wedge\upsilon+(-1)^p\,\omega\wedge i_X\upsilon,\ \omega\in\Lambda_p \text{ için}\end{aligned} \tag{2.50}$$

Her $p<0$ için $\Lambda_p=0$ kabul edilir ve, dolayısıyla $\omega\in T_0^0$ iken $i_X\omega$=0 'dır .

Bir $g\in T_2^0$ tensörü $(u,\upsilon)\in T_0^1\times T_0^1$'i $g(u,\upsilon)\in\mathbb{R}$ 'ye resmeder. Bileşenlerinden, $u=u^ie_i,\ \upsilon=\upsilon^ie_i$ ve $g=e^{*i}\otimes e^{*k}g_{ik}$ olmak üzere $g(u,\upsilon)=u^i\upsilon^kg_{ik}$ yazılabilir. Eğer g_{ik} matrisi tamamen pozitif ise, yani $g_{ik}=g_{ki}$ ve bütün özdeğerleri pozitif ise, o zaman bu bilineer gönderim $g(u,\upsilon)=\langle u,\upsilon\rangle$ biçiminde yazılır ve bu skaler çarpımın özelliklerine sahiptir:

$$\langle u|\upsilon\rangle=\langle\upsilon|u\rangle,\quad \langle\upsilon|\upsilon\rangle\geq 0 \text{ ve } \langle\upsilon|\upsilon\rangle=0\Leftrightarrow\upsilon=0 \tag{2.51}$$

Eğer g_{ik} matrisinin özdeğerleri muhakkak pozitif değiller ama hiçbiri sıfır değilse, o zaman

$$g(u,\upsilon)=0 \text{ her } \upsilon \text{ için } \Leftrightarrow u=0 \tag{2.52}$$

ifadesi bulunur. Bu koşulu sağlayan g **dejenere değildir (nondegenerate)** denir. Bu durum için de yukarıdaki notasyon kullanılabilir: $g(u,\upsilon)=\langle u,\upsilon\rangle$. Bu bağıntı her bir $\upsilon \in T_0^1$'in

$$\langle \upsilon | \omega \rangle = \left(\upsilon^* | \omega\right) \text{ her } \omega \text{ için} \tag{2.53}$$

formülü aracılığıyla birebir ve örten olarak bir $\upsilon^* = e^{*i} g_{ik} \upsilon^k$ tayin edebildiğini garantiler:

$$\omega = \omega^i e_i;\ \langle \upsilon | \omega \rangle = \left(\upsilon^* | \omega\right) = \upsilon^i \omega^k g_{ik} \Rightarrow \upsilon^* = e^{*i} g_{ik} \upsilon^k$$

g tensörü böylece uzayı T_0^1 ve T_1^0 bir belirlenimine izin veren bir ek yapıyla donatır. O zaman basit olarak bir vektörden söz edilebilir ve onun kontravaryant bileşenleri υ^k ve kovaryant bileşenleri ise $\upsilon_i = g_{ik}\upsilon^k$ biçiminde gösterilir. Bu tanımlama ile yukarıda kobazlar için kullanılan yıldızlar artık düşülebilir:

$$e_i g_{ik} = e_k \text{ ve } u = u^i e_i = u_i e^i \tag{2.54}$$

olur, dolayısıyla

$$\delta_j^i = \left\langle e^i \middle| e_j \right\rangle = \left(\left(e^i\right)^* \middle| e_j\right) = \left(e^{*i} \middle| e_j\right) \tag{2.55}$$

olduğu için,

$$\left(e^i\right)^* = e^{*i} \tag{2.56}$$

olur. g 'ye ters matris üst indisle yazılır: $g_{ik}g^{kj} = \delta_i^j$. Diğer indisler bunun gibi g_{ik} ve g^{kj} ile aşağı veya yukarı yazılabilirler:

$$e^i = g^{ij}e_j \text{ ve } u^i = g^{ij}u_j \tag{2.57}$$

Eğer (2.51) sağlanırsa, o zaman $\langle \upsilon | \upsilon \rangle^{1/2}$ bir vektörün boyu olarak ifade edilebilir. Bununla beraber ne u^i ne de u_i, u vektörünün i-yinci bileşeninin boyu olamazlar, örneğin $\langle u^1 e_1 | u^1 e_1 \rangle^{1/2} = |u^1| \sqrt{g_{11}}$ gibi. Sadece $g_{ij} = \delta_{ij}$ olan bir **ortogonal baz**da bileşenler $\langle u^1 e_1 | u^1 e_1 \rangle^{1/2} = |u^1|$ şeklinde boy belirtirler.

Eğer vektör ve kovektörler belirlenirse, o zaman aynı $\sigma = r + s$ 'ye sahip bütün T_s^r 'lere,

$$t_{i_1 \ldots i_r j_1 \ldots j_s} = t_{j_1 \ldots j_s}^{k_1 \ldots k_r} g_{i_1 k_1} \ldots g_{i_r k_r}$$

olmak üzere,

$$\begin{aligned} t &= t_{j_1 \ldots j_s}^{i_1 \ldots i_r} e^{j_1} \otimes \ldots \otimes e^{j_s} \otimes e_{i_1} \otimes \ldots \otimes e_{i_r} \\ &= t_{i_1 \ldots i_r j_1 \ldots j_s} e^{i_1} \otimes \ldots \otimes e^{i_r} \otimes e^{j_1} \otimes \ldots \otimes e^{j_s} \end{aligned} \tag{2.58}$$

aracılığıyla özdeş bakılabilir, mesela, onların tümü birebir ve örten olarak T_σ^0 'ya resmedilir.

Tanım: İki tensörün **skaler çarpımı**

$$\langle \bar{t} | t \rangle = \bar{t}_{j_1 \ldots j_s}^{i_1 \ldots i_r} t_{n_1 \ldots n_s}^{m_1 \ldots m_r} g_{i_1 m_1} \ldots g_{i_r m_r} g^{j_1 n_1} \ldots g^{j_s n_s} \tag{2.59}$$

ile tanımlanan bir bilineer $T_s^r \times T_s^r \to \mathbb{R}$, $(\overline{t}, t) \to \langle \overline{t} | t \rangle \in \mathbb{R}$ gönderimidir.

Eğer g pozitif ve $t \in \Lambda_p$ ise, o zaman $\langle t|t \rangle^{1/2}$, t ile tanımlanan p-boyutlu hacim için bir ölçüm sağlar.

Tanım: Λ_p üzerinde **iç çarpım** aşağıdaki kurallarla belirlenen, $\Lambda_p \times \Lambda_q \to \Lambda_{p-q}, p \geq q,$ $(\omega, \upsilon) \to i_\upsilon \omega$ bilineer gönderimi olarak tanımlanır:

(i) $i_\upsilon \omega = \langle \omega | \upsilon \rangle$, $p = q = 1$ için,

(ii) $i_\upsilon (\omega_1 \wedge \omega_2) = (i_\upsilon \omega_1) \wedge \omega_2 + (-1)^p \omega_1 \wedge (i_\upsilon \omega_2)$, $\upsilon \in \Lambda_1$ ve $\omega_i \in \Lambda_{p_i}$ için (2.60)

(iii) $i_{\upsilon_1 \wedge \upsilon_2} = i_{\upsilon_2} \circ i_{\upsilon_1}$.

Bu tanım T_0^1, Λ_1 ile bir tutulursa, $(\omega, X) \to i_X \omega, \Lambda_p \times T_0^1$'dan Λ_{p-1}'e tanımlanan ve (2.50) ile belirlenen iç çarpımı geneller. i'yi bileşenler cinsinden ifade etmek için Λ_p'nin bazı için,

$$e^{j_1 \ldots j_p} = e^{j_1} \wedge e^{j_2} \wedge \ldots \wedge e^{j_p} \tag{2.61}$$

kısaltması kullanılabilir, böylece;

$$\omega = \frac{1}{p!} \omega_{j_1 \ldots j_p} e^{j_1 \ldots j_p}, \quad \upsilon = \frac{1}{q!} \upsilon_{j_1 \ldots j_q} e^{j_1 \ldots j_q} \tag{2.62}$$

ile,

$$i_{\upsilon}\omega = \frac{1}{q!(p-q)!}\upsilon^{j_1\ldots j_q}\omega_{j_1\ldots j_p}e^{j_{q+1}\ldots j_p} \tag{2.63}$$

bulunur. $p = q$ ise

$$i_{\upsilon}\omega = \frac{1}{p!}\langle\omega|\upsilon\rangle = \frac{1}{p!}\omega_{j_1\ldots j_p}\upsilon^{j_1\ldots j_p} = i_{\omega}\upsilon \tag{2.64}$$

olur.

Eğer $\upsilon \in \Lambda_q$ ile dış çarpma, bir $\Lambda_q \to \Lambda_{p+q}$ gönderimi şeklinde tanımlanırsa, o zaman υ ile iç çarpma adjoint gönderimdir ($\langle \; | \; \rangle$ çarpımına göre):

$$\langle \upsilon\wedge\omega|\mu\rangle = i_{\upsilon\wedge\omega}\mu = i_{\omega}\left(i_{\upsilon}\mu\right) = \langle\omega|i_{\upsilon}\mu\rangle = \left(\left(i_{\upsilon}\right)^{t}\omega|\mu\right) \tag{2.65}$$

Özellikle, $\varepsilon = |g|^{1/2}e^{1\ldots m}$ kanonik m-formu $i_{\varepsilon}\varepsilon = (-1)^{s}$ ile normalize edilir. Burada $g = \det(g_{ik})$ ve $(-1)^{s} = g/|g|$'dir. Λ_p ve Λ_{m-p} uzaylarının ikisi de $\binom{m}{p}$ boyutludurlar ve dolayısıyla (2.52) özelliğini sağlayan bir g ile tanılanabilirler.

Tanım: Dualite gönderimi veya **yıldız işlemcisi** $\omega \to *\omega = i_{\omega}\varepsilon$ biçiminde tanımlanan bir lineer $\Lambda_p \xrightarrow{*} \Lambda_{m-p}$ birebir eşlemesidir.

* işlemcisi birebirdir çünkü her $\omega \neq 0 \Rightarrow *\omega \neq 0$'dır, aynı sonlu boyutlu lineer gönderimler için birebirlik, örten olmayı ifade eder (garantiler) ve dolayısıyla * işlemcisi birebir ve örten bir gönderimdir (Lang 1999). Bileşenler cinsinden (2.63)'den,

$$*\omega = \frac{\omega^{i_1 \dots i_p}}{p!(m-p)!} e^{i_{p+1} \dots i_m} \varepsilon_{i_1 \dots i_m} \tag{2.66}$$

yazılır. Yıldız işlemcisi aşağıdaki özelliklere sahiptir:

(i) $\varepsilon = *\mathbf{1},\ *\varepsilon = (-1)^s$,

(ii) $* \circ * = (-1)^{p(m-p)+s}$, (2.67)

(iii) $i_\upsilon * \omega = *(\omega \wedge \upsilon)$,

(iv) Her $\upsilon, \omega \in \Lambda_p$ için $\upsilon \wedge *\omega = \varepsilon i_\upsilon \omega = \omega \wedge *\upsilon = \varepsilon(-1)^s i_{*\upsilon} * \omega.$

İspat:

(i) $i_\varepsilon \varepsilon = \langle \varepsilon | \varepsilon \rangle = (-1)^s$ şeklinde normalize edilir.

(ii) $*\omega = \dfrac{\omega^{j_1 \dots j_p}}{p!(m-p)!} e^{j_{p+1} \dots j_m} \varepsilon_{j_1 \dots j_m}$, $\omega \in \Lambda_p$ için ve

$$\varepsilon_{i_1 \dots i_m} = (-1)^{p(m-p)} \varepsilon_{i_{p+1} \dots i_m i_1 \dots i_p}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow *(*\omega) &= \frac{\omega^{j_1 \dots j_p}}{p!(m-p)!} \left(\varepsilon_{j_1 \dots j_m} e^{j_1 \dots j_m} \middle| e^{j_{p+1} \dots j_m} \varepsilon_{j_1 \dots j_m} \right) \\
&= \frac{\omega^{j_1 \dots j_p}}{p!(m-p)!} (m-p)! e_{j_1 \dots j_p} (-1)^{p(m-p)} \left(\varepsilon_{i_{p+1} \dots i_m i_1 \dots i_p} e^{j_{p+1} \dots j_m} \middle| e^{j_{p+1} \dots j_m} \varepsilon_{j_1 \dots j_m} \right) \\
&= (-1)^{p(m-p)+s} \frac{1}{p!} \omega^{j_1 \dots j_p} e_{j_1 \dots j_p} \\
&= (-1)^{p(m-p)+s} \omega \Rightarrow * \circ * = (-1)^{p(m-p)+s}
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada üçüncü adımda (i) sonucu ve dördüncü adımda (2.62) kullanıldı.

(iii) $i_{\upsilon} * \omega = i_{\upsilon} i_{\omega} \varepsilon = i_{\omega \wedge \upsilon} = *(\omega \wedge \upsilon)$

Λ_0 ve Λ_p ikisi de bir-boyutlu ($\varepsilon = *\mathbf{1}$, $* = (-1)^s$ kanonik m-form 1 rakamına dual görüntüsüdür) ve dolayısıyla □ 'ye izomorfiktirler. Özellik (ii)'ye göre * gönderimi $(-1)^{p(m-p)+s}$ işareti dışında kendi tersine eşit olacak, fakat bunun için işaretin tanımını değiştirmek gerekir ki bu olası değildir. Özellik (iii) iç dualite gönderiminin iç çarpımı dış çarpıma dönüştürdüğünü ifade eder; yani iç çarpımın dış çarpıma dual olduğunu belirtir. Özellik (iv)'de dualite teriminin orijini belirtilir. Her $\upsilon \in \Lambda_p$ ve $\omega \in \Lambda_{m-p}$ için

$$\upsilon \wedge \omega = \varepsilon \{\upsilon, \omega\} \tag{2.68}$$

şeklinde bir skaler çarpım tanımlanırsa, Λ_p için Λ_{m-p} dual uzay olur. Bu skaler çarpım, i iç çarpımı ile

$$\{\upsilon, \omega\} = (-1)^{p(m-p)+s} i_{\upsilon} * \omega \tag{2.69}$$

bağıntısı ile bağlanır. Bu, Özellik (iii)'den açıktır.

$m = 3$ ve $g_{ik} = \delta_{ik}$ olsun. Bu takdirde $* \circ * = 1$ olur. Baz vektörleri,

$$\begin{aligned} &p = 0,3 : \mathbf{1} \xleftrightarrow{*} dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3, \\ &p = 1,2 : \left(x^1, dx^2, dx^3\right) \xleftrightarrow{*} \left(dx^2 \wedge dx^3, dx^3 \wedge dx^1, dx^1 \wedge dx^2\right) \end{aligned} \tag{2.70}$$

olurlar ve bileşenler için bu,

$$\begin{aligned}
&\omega \in \Lambda_0 : (*\omega)_{ijk} = \omega \varepsilon_{ijk} \\
&\omega \in \Lambda_1 : (*\omega)_{ij} = \omega_k \varepsilon_{kij} \\
&\omega \in \Lambda_2 : (*\omega)_i = \frac{1}{2} \omega_{kj} \varepsilon_{kji} \\
&\omega \in \Lambda_3 : *\omega = \frac{1}{3!} \omega_{ijk} \varepsilon_{ijk}
\end{aligned} \tag{2.71}$$

ifade eder.

Artık farklı noktalardaki bütün tensörler M üzerinde bir bir demet içinde toplanabilir. M 'nin bir C haritasının U tanım bölgesi üzerinde $\left(\Theta_C^{-1}\right)^t$,

$$T^*(U) = \bigcup_{q \in U} T_p^*(M) \tag{2.72}$$

kotanjant demeti için

$$T^*(U) \to \Phi(U) \times \mathbb{R}^m : (q, \upsilon^*) \to \left(\Phi(q), \left(\Theta_C^{-1}(q)\right)^t \upsilon^*\right) \tag{2.73}$$

aracılığıyla bir harita sağlar. Bu şöyle çıkar: $\Theta_C(q) : T_q(M) \to \mathbb{R}^m$, $\left(\Theta_q^{-1}(q)\right)^t : T_q^*(M) \to \mathbb{R}^{*m} \equiv \mathbb{R}^m$ olmasını gerektirir, bundan dolayı $\left(\upsilon^* | u\right) = \left(\left(\Theta_q^{-1}(q)\right)^t \upsilon^* \middle| \Theta_C(q) U\right)$ 'dur. (2.8) ve (2.9)'da gösterildiği gibi farklı U 'lar için bu haritalar uyumludur. $D\left(\Phi \circ \overline{\Phi}^{-1}\right)$ yalnızca diferensiyellenebilme koşullarını ortadan kaldırmayan $D\left(\Phi \circ \overline{\Phi}^{-1}\right)^t$ ile değiştirilir. Böylece demet yapısı doğrudan tensörlere aktarılır.

$$\underbrace{\Theta_C(q) \otimes \ldots \otimes \Theta_C(q)}_{\text{r kere}} \otimes \underbrace{\left(\Theta_q^{-1}(q)\right)^t \otimes \ldots \otimes \left(\Theta_q^{-1}(q)\right)^t}_{\text{s kere}} \tag{2.74}$$

gönderimi her $q \in U$ noktasındaki T_{sq}^{r}'yi $\mathbb{R}^{m(r+s)}$ içine gönderir. Bir birebir eşleme olarak bu gönderim tensör demetlerinin haritaları için kullanılabilir.

Tanım: M, $\bigcup_i C_i = \bigcup_i \left(U_i, \Phi_i\right)$ atlaslı bir manifold olsun. $T_s^r\left(M\right) = \bigcup_q T_{qs}^r\left(M\right)$ üzerinde $\bigcup_i \left(\bigcup_{q \in U_i} T_{qs}^r\left(M\right), \left(q, u_1 \otimes \ldots \otimes u_r \otimes \upsilon_1 \otimes \ldots \otimes \upsilon_s\right) \rightarrow\right.$ $\left(\Phi_i\left(q\right); \Theta_{C_i}\left(q\right) u_1 \otimes \ldots \otimes \Theta_{C_i}\left(q\right) u_r \otimes \left(\Theta_{C_i}^{-1}\left(q\right)\right)^t \upsilon_1 \otimes \ldots \otimes \left(\Theta_{C_i}^{-1}\left(q\right)\right)^t \upsilon_r\right)\Big)$ haritası ile tanımlanan M üzerindeki vektör demetine **r-kere kontravaryant ve s-kere kovaryant tensörlerin demeti** denir.

Bu tanımla, $T\left(M\right) \equiv T_0^1\left(M\right)$ ve $T^*\left(M\right) \equiv T_1^0\left(M\right)$ olur. Vektör demetinin sağladığı lineer yapıyı tensör demeti de sağlar. Bu tanımdan aşikardır ve dolayısıyla izdüşüm $\Pi : \left(q; u_1, \ldots, u_r, \upsilon_1, \ldots, \upsilon_s\right) \rightarrow \left(q; 0, 0, \ldots, 0\right)$ olur. $T_s^r\left(M\right)$ üzerinde kullanılan topoloji $U \times \mathbb{R}^{m(r+s)}$'nin çarpım topolojisidir. Örneğin, M bir m-boyutlu, topolojik uzay olsun: $T_s^r\left(M\right) = M \times \mathbb{R}^{m(r+s)}$'dir. O zaman $T^*\left(M\right)$ ve $T\left(M\right)$'nin her ikisi $M \times \mathbb{R}^m$ formundadır, fakat tanılanamazlar çünkü ortogonal olarak ayırt edilen baz sağlanmamıştır. Eğer $M = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R}$ ise, ek Riemannian yapıdan dolayı bir ortogonal baz var olacaktır.

Tanım: $t : M \rightarrow T_s^r\left(M\right)$, $\Pi \circ t = \mathbf{1}$ biçiminde bir C^∞-gönderim olsun. Böyle bir t gönderimine **r-kere kontravaryant ve s-kere kovaryant tensör alanı** denir. Böyle bütün tensör alanlarının cümlesi $\mathrm{T}_s^r\left(M\right)$ ile gösterilir. p-kere kovaryant tamamen antisimetrik tensör alanlarına **p-form** denir ve p-formların cümlesi $E_p\left(M\right)$, $p = 0, 1, \ldots, m,$ ile gösterilir.

Kovaryant, tamamen antisimetrik p-yinci dereceden tensörlerden oluşan lineer uzaylar Λ_p gösterildi ve bu uzaylar aracılığıyla $\Lambda_p \times T_0^1 \rightarrow \Lambda_{p-1}$, $\left(X, \omega\right) \rightarrow i_X \omega$ ve

$\Lambda_p \times \Lambda_q \to \Lambda_{p-q}$, $(\upsilon,\omega) \to i_\upsilon \omega$, $q \le p$ iç çarpımları ve $\Lambda_p \xrightarrow{*} \Lambda_{m-p}$, $\omega \to *\omega = i_\omega \varepsilon$, yıldız işlemcisi tanımlandı. p-formlar, p-kere kovaryant tamamen antisimetrik tensör alanları olduklarından bu tanımlar tamamen aynı kalır. Bu notasyon aşağıda verilmiştir:

$$\begin{aligned}
&\langle \ | \ \rangle : \mathrm{T}_s^r \times \mathrm{T}_s^r \to C^\infty \\
&i : E_p \times \mathrm{T}_1^0 \to E_{p-1} \\
&\wedge : E_p \times E_q \to E_{p+q} \\
&i : E_p \times E_q \to E_{p-q} \\
&* : E_p \qquad \to E_{m-p}
\end{aligned} \tag{2.75}$$

Vektör alan ve 1-kere kontravaryant tensör alan terimleri kovaryant vektör alan ve 1-kere kovaryant rensör alan ve 1-form terimleri gibi eşanlamlıdır. Bir tensör alanı bir haritanın doğal bazında lokal (yerel) olarak,

$$\sum_{(i)(j)} c^{i_1 \ldots i_r}_{j_1 \ldots j_s} \partial_{i_1} \otimes \partial_{i_2} \otimes \ldots \otimes \partial_{i_r} \otimes dq^{j_1} \otimes dq^{j_2} \otimes \ldots \otimes dq^{j_s} \tag{2.76}$$

olarak yazılabilir, $c^{(i)}_{(j)} \in C^\infty(M)$. Fizikte $c^{(i)}_{(j)}$ bileşenleri tensör alanları olarak düşünülür. Bu bazda bir p-form,

$$\sum_{(j)} c_{j_1 \ldots j_p} dx^{j_1} \otimes dx^{j_2} \otimes \ldots \otimes dx^{j_p} \tag{2.77}$$

biçiminde yazılır.

Eğer T_0^1 ve T_1^0 için $\{e_i\}$ ve $\{e^i\}$ global bazları varsa, o zaman açık olarak her $T_s^r(M)$ için de bir global baz vardır. Bu takdirde

$$M \times \mathbb{R}^m \to T(M),\ (x,\upsilon) \to \left(x, e_i(x)\upsilon^i\right) \tag{2.78}$$

diffeomorfizimi atnımlanabilir ve manifold paralellenebilirdir denir (yani $T(M)$ bir manifold olarak $M \times \mathbb{R}^m$ 'ye difeomorfiktir). Bundan aynı zamanda bütün $T_s^r(M)$ demetlerinin triviallenebilir olduğu sonucu çıkar. Eğer bir tek haritadan meydana gelen bir atlas varsa, o zaman doğal baz global olarak tanımlanır. Bununla beraber bu koşul zorunlu değildir; örneğin, S^1 de paralellenebilirdir. Tersine, S^2 üzerinde hiçbir yerde sıfır olmayan düz bir vektör alanı dahi yoktur.

Eğer global olarak sıfır olmayan bir m-form varsa, o zaman M **yönlenebilir**dir denir. Herhangi bir paralellenebilir M, $e^1 \wedge e^2 \wedge \ldots \wedge e^m$ hiçbir zaman sıfır olmayacağı için aynı zamanda yönlenebilirdir. Bu koşul da zorunlu değildir, örneğin S^2 yönlenebilirdir ama paralellenebilir değildir. Her manifold bir Riemannian yapı ile donatılabildiği için, böyle bir yapı yönlenebilir olmayı açık olarak garantilemez. Tersine, aşağıda tanımlanan simplektik uzay,

$$\underbrace{g \wedge g \wedge \ldots \wedge g}_{m/2 \text{ kere}} = dq_1 \wedge dq_1 \wedge \ldots \wedge dq_m \sqrt{\det(g)} \tag{2.79}$$

m-formu, varsayıma göre sıfır olmayacağı için her zaman yönlenebilirdir.

Eğer $g \in \mathrm{T}_2^0(M)$, M'nin bütün noktalarında (2.52)'yi sağlıyor ise, o zaman orada oluşturulan yapı M 'nin tamamına genişletilebilir ve M üzerinde ek bir yapı yaratılır. g_{ik} 'nın tamamen simetrik veya antisimetrik ve tek bir noktada formüle edilmeyen (yani M 'nin tamamına genişletilebilen) bir difarensiyellenebilme koşulunu sağlayan durumları önemlidir. Eğer (2.52) her yerde sağlanıyorsa, tensör alanı **dejenere değildir (nondejeneredir)** denir.

Tanım: Eğer bir M manifoldu bir dejenere olmayan, simetrik tensör alanı $g \in \mathrm{T}_2^0(M)$ ile verilirse, o zaman M bir **pseudo-Riemannian uzay**dır denir. Eğer g

aynı zamanda pozitif ise, M **Riemannian uzay**dır ve g 'ye onun metriği denir. Eğer $g \in E_2$, dejenere değil (m'nin tek olmasını gerektiren) ve

$$g = \sum_{j=1}^{m/2} dq_j \wedge dq_{j+m/2} \tag{2.80}$$

olacak şekilde bir doğal baz, dq_j varsa, o zaman M bir **simplektik uzay**dır. Burada kullanılan 2-form kapalıdır dolayısıyla aynı zamanda tamdır. (Kapalı form $d\omega = 0$ eşitliğini sağlayan formdur, tam form ise başka bir formun dış türevi biçiminde yazılabilen formdur, dış türev biçiminde yazıldığı için kapalı olmayı otomatik olarak sağlar (Poincare leması)) (Lang 1999).

g_{ik}, bütün sıfır olmayan özdeğerleriyle bir sabit simetrik matris olmak üzere,

$$g = \sum_{i,k} dx^i \otimes dx^k g_{ik} \tag{2.81}$$

ile $\mathbb{R}^n$ bir pseudo-Riemannian uzay olur. g, bir ortogonal $x^i \to m^{ij} x_j$ dönüşümüyle diagonal hale getirilebilir ve o zaman bütün özdeğerler, bir

$$x^i \to \frac{x^i}{\left(|g_{ii}|\right)^{1/2}} \tag{2.82}$$

genişlemesiyle $g_{ii} = \pm 1$ 'e normalize edilebilirler. Bu haritalar pseudo-Euclidean dönüşümlere göre belirlendiklerinden özel bir konuma sahiptirler: $n = 4$ ve $g_{ii} = (-1,1,1,1)$ için dönüşüm Poincare grubu biçimlendirir (oluşturur). Her $g_{ii} = 1$ iken $\mathbb{R}^n$ bir Riemannnian uzay olur. Diğer haritalar üzerinde bu uzayın g_{ij} 'leri diagonal ya da sabit olmak zorunda değildirler; örneğin Riemannina durumda $\mathbb{R}^n$ 'de ve kutupsal koordinatlarda, $g = dr \otimes dr + r^2 d\varphi \otimes d\varphi$ 'dir.

M ve N iki manifold ve $N \subset M$ olsun. Bu takdirde $T(N)$, $T(M)$'nin bir altmanifoldu olur ve bir dejenere olmayan $g \in \mathrm{T}_2^0(M), g > 0$, N üzerinde bir Riemannian yapıya neden olur, çünkü g aynı zamanda bir dejenere olmayan $T_q(N) \times T_q(N) \to \mathbb{R}$ gönderimi sağlar. $\mathbb{R}^n$, üzerinde $g_{ik} = \delta_{ik}$ metriği S^n veya $T^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ üzerinde bilinen metriğe neden olur. $\mathbb{R}^n$'nin Riemannian yapısı mekanikte $m_{ik}(q)\dot{q}_i\dot{q}_k/2$ biçiminde yazılan kinetik enerji nedeniyle açıkça görünür. Bu, $T_q(M) \times T_q(M) \to \mathbb{R}$ gönderimi tam olarak bir metriktir. (2.54)'de belirtilen $T_q(M) \times T_q^*(M) \to \mathbb{R}$ birebir eşlemesi (bijection), bir metrik tarafından neden olunmuş ve $\dot{q}_i$'yı $m_{ik}(q)\dot{q}_k = \partial L/\partial \dot{q}_i$, yani $T^*(M)$'nin bir noktasına karşı gelen $p_i : (p,q)$ konjuge momentuma gönderir.

g_{ik}, bir pseudo-Riemannian uzay üzerinde diagonal hale getirelebildiği için, g'nin

$$g = e^i \otimes e^k \eta_{ik}, \quad \eta_{ik} = \begin{cases} 0, & i \neq j \text{ ise} \\ \pm 1, & i = j \text{ ise} \end{cases} \tag{2.83}$$

dik (normal) formuna sahip olduğu bir ortogonal $\{e^j\}$, bazı lokal olarak tanımlanabilir. Bu baz simplektik bazın dik formu (2.80) bazı gibi doğal olmak zorunda değildir.

2.7 Kovektörlerin Dönüşümleri

Bir $\Phi : M_1 \to M_2$, diffeomorfizimi bir $T(\Phi) : T(M_1) \to T(M_2)$ diffeomorfizmine neden olur. Bu ilişkiler göz önünde bulundurularak aşağıda $(|) : T^*(M) \overset{\pi}{\times} T^*(M) \to M \times \mathbb{R}^m$ skaler çarpımının invaryant (değişmez) kalacağı bir

$T^*\left(M_1\right) \to T^*\left(M_2\right)$ diffeomorfizimi tanımlanacak. Burada $\overset{\pi}{\times}$ simgesi lif (fiber) çarpımı ifade eder ve çarpanların aynı taban (base) noktasında alındığını anlatır.

Bir $\Phi : M_1 \to M_2$ diffeomorfizimi için diğer $T^*\left(\Phi\right) : T^*\left(M_1\right) \to T^*\left(M_2\right)$ diffeomorfizimi aşağıdaki diyagramları yer değiştirecek (değiş tokuş olacak) biçimde tanımlanır:

$$\begin{tikzcd}
M_1 \arrow[r, "\Phi"] & M_2 \\
T^*(M_1) \arrow[u, "\Pi_1"] \arrow[r, "T^*(\Phi)"] & T^*(M_2) \arrow[u, "\Pi_2"']
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
M_1 \times \mathbb{R} \arrow[r, "\Phi \times 1"] & M_2 \times \mathbb{R} \\
T^*(M_1) \overset{\pi}{\times} T(M_1) \arrow[u, "(|)"] \arrow[r, "T^*(\Phi) \times T(\Phi)"] & T^*(M_2) \overset{\pi}{\times} T(M_2) \arrow[u, "(|)"']
\end{tikzcd}$$

Bir haritanın tanım bölgesi üzerinde $T^*\left(\Phi\right)$ açık olarak $\left(q,u\right) \to \left(\Phi\left(q\right), \left(T\left(\Phi^{-1}\right)\right)^t \left(q\right) \cdot u\right)$, diferansiyellenebilme ve teklik aşikardır. Burada t bir sabit q noktasında bir lineer gönderimin transpozunu göstermektedir. Genellikle bu basit olarak $T^*\left(\Phi\right) = T\left(\Phi^{-1}\right)^t$ şeklinde gösterilir.

$$\underbrace{T\left(\Phi\right) \otimes T\left(\Phi\right) \otimes \ldots \otimes T\left(\Phi\right)}_{\text{r kere}} \otimes \underbrace{T^*\left(\Phi\right) \otimes T^*\left(\Phi\right) \otimes \ldots \otimes T^*\left(\Phi\right)}_{\text{s kere}}$$

tensör çarpımını kurmak, $T_s^r\left(M\right)$’nin bir diffeomorfizim altında nasıl değiştirildiğini gösterir.

$$\partial_{i_1} \otimes \partial_{i_2} \otimes ... \otimes \partial_{i_r} \otimes dq^{j_1} \otimes dq^{j_2} \otimes ... \otimes dq^{j_s}$$

bazının vektörleri sırasıyla $T(\Phi)$ ve $T^*(\Phi)$ ile dönüştürülmelidir ve linerlik bunu $T_s^r(M)$'nin tamamına genişletir. Bu yolla, bir manifoldun diffeomorfizimleri altında ve özellikle harita değişimleri altında tensör alanları için bir dönüşüm kuralı elde edilir.

Tanım: Bir $\Phi : M_1 \to M_2$ diffeomorfizimi aşağıda verilen diyagramın permüte edilebilirliği (pemutability) ile tanımlanan bir $\Phi_* : \mathrm{T}_s^r(M_1) \to \mathrm{T}_s^r(M_2)$ gönderimine neden olur (Thirring 1997):

$$\begin{tikzcd}
M_1 \ni q \arrow[r, "\Phi"] \arrow[d, "t(q)"'] & \Phi(q) \in M_2 \arrow[d, "\Phi_* t(\Phi(q))"] \\
\mathrm{T}_{qs}^{r} \arrow[r, "\overbrace{\mathrm{T}_q(\Phi)\otimes...\otimes\mathrm{T}_q(\Phi)}^{r}\otimes\overbrace{\mathrm{T}_q^*(\Phi)\otimes...\otimes\mathrm{T}_q^*(\Phi)}^{s}"] & \mathrm{T}_{\Phi(q)s}^{r}
\end{tikzcd}$$

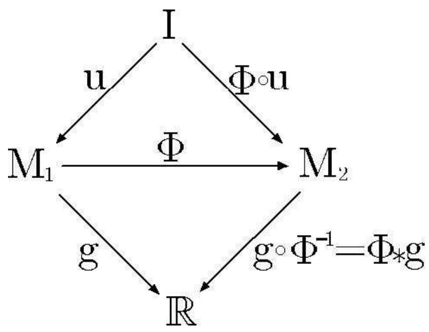
$t \in \mathrm{T}_s^r(M)$ olmak üzere,

$$\Phi_* t = \underbrace{T(\Phi) \otimes T(\Phi) \otimes ... \otimes T(\Phi)}_{\text{r kere}} \otimes \underbrace{T^*(\Phi) \otimes T^*(\Phi) \otimes ... \otimes T^*(\Phi)}_{\text{s kere}} \circ t \circ \Phi^{-1} \qquad (2.84)$$

olur. $g \in C^\infty(M_1)$ verilsin.

$$\Phi_* dg = d\left(g \circ \Phi^{-1}\right) = d\left(\Phi_* g\right) \qquad (2.85)$$

olur (aşağıdaki diyagrama bakın). Bir fomksiyonun dış türevinin görüntüsünün fonksiyonun görüntüsünün dış türevine eşit olması açıktır. dg, bir $u : I \to M_1$ eğrisi ile belirlenen bir υ vektörüne uygulanırken, u boyunca g'nin değişim oranıdır. Bu, $\Phi \circ u$ boyunca $g \circ \Phi^{-1}$'in değişim oranı ile aynıdır,



ve son eğri $T(\Phi)$ altında υ vektörünün görüntüsünü belirler.

Bir vektörün görüntüsü onu tanımlayan eğrilerin görüntüleri ile belirlenir. Bir kovektörün görüntüsü öyledir ki onun bir vektörün görüntüsü ile çarpımı vektörle kovektörün hakiki (orijinal) çarpımına eşittir. Bu koşullar tabanlar arasında ilişkileri sabitler ve Φ_*'ın cebirsel operatörlerle sıra değişebilirliğinden (permutability) dolayı: Bütün tensörler arasında

$$\begin{aligned} \Phi_*(t_1 + t_2) &= \Phi_*(t_1) + \Phi_*(t_2), \\ \Phi_*(t_1 \otimes t_2) &= \Phi_*(t_1) \otimes \Phi_*(t_2) \end{aligned} \tag{2.86}$$

vardır. Tensör alanları ise, her noktada o noktadaki tensörler gibi dönüşürler. Bileşim ise tanımda verilen diyagram gereğince aşağıdaki gibidir:

$$(\Phi_1 \circ \Phi_2)_* = \Phi_{1*} \circ \Phi_{2*} \tag{2.87}$$

Φ diffeomorfizimi altında $(|)$ skaler çarpımı değişmez (invaryant) olmakla beraber, aynısı $\langle \ | \ \rangle$ için veya daha genel olarak Φ, g metriğini değişmez (invaryant) bırakmak koşuluyla i iç çarpımı için doğrudur. Bir pseudo-Riemannian yapıyı değişmez (invaryant) bırakan diffeomorfizimler **izometri**dir denir ve onların bir simplektik yapıyı değişmez (invaryant) bırakanlarına **kanonik dönüşümler** denir.

Φ birebir olmadığı takdirde, yalnızca kovaryant tensör alanlarının terslerini tanımlamak olasıdır. Φ, örten bile olsa, örneğin bir alt manifoldun j injeksiyonu (tek boyutlu daldırması), $j : N \to M \supset N$, $T(j) : T(N) \to T(M) \supset T(N)$ ise, bir vektör alanının ne görüntüsü ne de ters görüntüsü tanımlanır; görüntünün heryerde tanımlanmış olması başarılmaz ve ters görüntü M, metrik verilmeden $T_q(N)$'ye tümleyen olan $T_q(M)$nin bir ayrık altuzayına sahip değildir.

Tanım: $\Phi : N \to M$ iki manifoldun bir diferansiyellenebilir gönderimi olsun. Kovaryant tensör alanlarının $\Phi^* : \mathrm{T}_s^{\,0}(M) \to \mathrm{T}_s^{\,0}(N)$, **ters görüntüsü** veya **pull-back gönderimi,**

$$\Phi^* X = \left(T(\Phi)\right)^t \circ X \circ \Phi \tag{2.88}$$

bağıntısı ile tanımlanır. Bu aşağıdaki diyagramın sıra değişmesine (commutativity) eşdeğerdir:

$$\Phi^* X = (T(\Phi))^t \circ X \circ \Phi \, , \qquad \begin{tikzcd} N \arrow[r, "\Phi"] \arrow[d, "\Phi^* X"'] & M \arrow[d, "X"] \\ T^*(N) & T^*(M) \arrow[l, "T(\Phi)^t"'] \end{tikzcd}$$

Diffeomorfizimler için,

$$\Phi^* = \left(\Phi^{-1}\right)_* \tag{2.89}$$

dir. Bir t kovaryant vektör alanının $\Phi^* t$, pull-backi vektörler üzerine tam olarak t'nin $T(\Phi)$ altında onların görüntüleri üzerine etkidiği gibi etki eder:

$$\Phi^* t(\upsilon_1, \upsilon_2, ..., \upsilon_s) = t\left(T(\Phi)\upsilon_1, T(\Phi)\upsilon_2, ..., T(\Phi)\upsilon_s\right) \tag{2.90}$$

Eğer $t = dg \in \mathrm{T}_1{}^0(M)$ ise, o zaman (2.85) ve (2.89)'a göre,

$$\Phi^* dg = d(g \circ \Phi) \tag{2.91}$$

bulunur ki Φ örten ya da birebir olmak zorunda değil.

$\omega \in \mathrm{T}_1{}^0(M)$ olsun, $\Phi^*\omega$'nın tam formu lokal koordinatlarda, koordinatların diferansiyellerinin temel (veya gradiyent) dönüşümleri ile ilişkilendirilmeli: $\Phi : q^i \to \overline{q}^i(q)$ için, $\left(T(\Phi)\right)_{ij} = \partial\overline{q}^i / \partial q^j$ olur. Bundan dolayı

$$\left(T(\Phi^{-1})\right)^t_{ij} = \left(T^*(\Phi)\right)_{ij} = \frac{\partial q^j}{\partial \overline{q}^i} \tag{2.92}$$

dir. $\omega : q \to \left(q, \omega_i(q) dq^i\right)$ olsun. O zaman,

$$\Phi^*\omega : \overline{q} \to \left(\frac{\partial q^j}{\partial \overline{q}^i}\right) \omega_j\left(\Phi^{-1}(\overline{q})\right) d\overline{q}^i \tag{2.93}$$

olur. Kovaryant bileşenler $T(M)$'nin ∂_i bazı ve dolayısıyla gradiyent ile aynı biçimde dönüşürler:

$$\left(\frac{\partial}{\partial \bar{q}^i}\right) f\left(q\left(\bar{q}\right)\right) = \left(\frac{\partial q^j}{\partial \bar{q}^i}\right)\left(\frac{\partial f}{\partial q^j}\right) \tag{2.94}$$

Diğer yandan,

$$dq^i = \left(\frac{\partial q^i}{\partial \bar{q}^j}\right) d\bar{q}^j \tag{2.95}$$

dir ve böylece bileşenler değişmez bırakılır. Bir m-form için dönüşüm kuralı ise, ω bir m-form olmak üzere,

$$\begin{aligned}
\omega &= \omega_{1,\dots,m} dx^1 \wedge dx^2 \wedge \dots \wedge dx^m \\
&= \omega_{1,\dots,m} \frac{\partial x^1}{\partial \bar{x}^{j_1}} \frac{\partial x^2}{\partial \bar{x}^{j_2}} \dots \frac{\partial x^m}{\partial \bar{x}^{j_m}} d\bar{x}^{j_1} \wedge d\bar{x}^{j_2} \wedge \dots \wedge d\bar{x}^{j_m} \\
&= \omega_{1,\dots,m} \det\left(\frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^j}\right) d\bar{x}^{j_1} \wedge d\bar{x}^{j_2} \wedge \dots \wedge d\bar{x}^{j_m}
\end{aligned} \tag{2.96}$$

şeklindedir.

3. TÜREVLER, LİE TÜREVİ VE İNTEGRALLER

3.1 Dış Diferansiyel

Sadece bir ek yapıya sahip olmayan bir manifold için diferansiyellenmenin temel işleminin genellemesi bir formun dış diferansiyelidir (türevidir). Eğer bir lokal akış bir vektör alanı ile verilirse o, bir keyfi vektör alanının Lie türevini tanımlar. (2.34) d dış türevi temel analizin diferansiyelleme işlemlerini de içeren bir $d : E_p \to E_{p+1}$ gönderimine genellenir.

Tanım: ω bir harita üzerinde

$$\omega = \frac{1}{p!}\sum_{(i)} c_{(i)} dq^{i_1} \wedge dq^{i_2} \wedge \ldots \wedge dq^{i_p}, \ c_{(i)} \in C^\infty(U) \tag{3.1}$$

şeklinde yazılan bir p-form olsun. O zaman (p+1)-form,

$$d\omega = \frac{1}{p!}\sum_{(i)} dc_{(i)} \wedge dq^{i_1} \wedge dq^{i_2} \wedge \ldots \wedge dq^{i_p} \tag{3.2}$$

verilen ω, p-formunun **dış diferansiyeli (türevi)'**dir denir. Bu tanım göz önüne alınarak dış türevin aşağıdaki kuralları sağladığı görülür:

(a) $d(\alpha\omega_1 + \beta\omega_2) = \alpha d(\omega_1) + \beta d(\omega_2), \ \omega_i \in E_p(M), \ \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

(b) $d(\omega_1 \wedge \omega_2) = d(\omega_1) \wedge \omega_2 + (-1)^p \omega_1 \wedge d(\omega_2), \ \omega_1 \in E_p, \ \omega_2 \in E_q$ (3.3)

(c) $dd\omega = 0, \ \omega \in E_p, \ p = 0, 1, \ldots, m$

(d) $df = \left(\partial_i f\right) dq^i$, f herhangi bir reel değerli fonksiyon.

(a), aşikardır ve (a), d 'nin lineerliğini ifade eder. (b) kuralına dış (wedge) çarpımına göre d 'nin **antitürev** özelliği denir (Warner 1971) ve $\omega_1 \in E_p$ ve $\omega_2 \in E_q$

$$
\begin{aligned}
d\left(\omega_1 \wedge \omega_2\right) &= d\left(\frac{1}{p!}\frac{1}{q!}\sum_{(i)(j)} c_{(i)} \cdot c_{(j)} dq^{i_1} \wedge dq^{i_2} \wedge \ldots \wedge dq^{i_p} \wedge dq^{j_1} \wedge dq^{j_2} \wedge \ldots \wedge dq^{j_q}\right) \\
&= \frac{1}{p!}\frac{1}{q!}\sum_{(i)(j)} \Big(\left(dc_{(i)} \cdot c_{(j)} + c_{(i)} \cdot dc_{(j)} \right) dq^{i_1} \wedge dq^{i_2} \wedge \ldots \wedge dq^{i_p} \\
&\quad \wedge dq^{j_1} \wedge dq^{j_2} \wedge \ldots \wedge dq^{j_q} \Big) \\
&= \left(\frac{1}{p!}\sum_{(i)} dc_{(i)} \wedge dq^{i_1} \wedge dq^{i_2} \wedge \ldots \wedge dq^{i_p} \right) \\
&\quad \wedge \left(\frac{1}{q!}\sum_{(j)} c_{(j)} dq^{j_1} \wedge dq^{j_2} \wedge \ldots \wedge dq^{j_q} \right) \\
&\quad + (-1)^p \left(\frac{1}{p!}\sum_{(i)} c_{(i)} dq^{i_1} \wedge dq^{i_2} \wedge \ldots \wedge dq^{i_p} \right) \\
&\quad \wedge \left(\frac{1}{q!}\sum_{(j)} dc_{(j)} \wedge dq^{j_1} \wedge dq^{j_2} \wedge \ldots \wedge dq^{j_q} \right) \\
&= d\left(\omega_1\right) \wedge \omega_2 + (-1)^p \, \omega_1 \wedge d\left(\omega_2\right)
\end{aligned}
$$

elde edilir ve (c) kuralı parçalı türevin simetrisinden çıkar:

$$
\begin{aligned}
dd\omega &= d\left(\frac{1}{p!}\sum_{(i)} dc_{(i)} \wedge dq^{i_1} \wedge dq^{i_2} \wedge \ldots \wedge dq^{i_p} \right) \\
&= d\left(\frac{1}{p!}\sum_{(i)}\sum_{j} \frac{\partial c_{(i)}}{\partial q^j} dq^j \wedge dq^{i_1} \wedge dq^{i_2} \wedge \ldots \wedge dq^{i_p} \right) \\
&= \sum_{(i)}\sum_{j,k} \frac{1}{p!} \frac{\partial^2 c_{(i)}}{\partial q^k \partial q^j} dq^k \wedge dq^j \wedge dq^{i_1} \wedge dq^{i_2} \wedge \ldots \wedge dq^{i_p}
\end{aligned}
$$

burada $\dfrac{\partial^2 c_{(i)}}{\partial q^k \partial q^j} = \dfrac{\partial^2 c_{(i)}}{\partial q^j \partial q^k}$ (simetrik) ve $dq^k \wedge dq^j = -dq^j \wedge dq^k$ (antisimetrik) olduklarından yukarıdaki toplam sıfıra eşit olur. Bu sonuç, $dd\omega = 0$ olduğunu ifade eder. (d) kuralı (2.37)'de verilmiştir. Yukarıdaki tanımın koordinat bağımsız olması istenir, bu da diffeomorfizimlere göre d 'nin doğal olmasını (doğal bazda ifade edilmiş olmasını) gerektirir. Bir $\Phi : M_1 \to M_2$ diffeomorfizimi için aşağıdaki diyagram permüte edilebilirdir:

$$\begin{tikzcd}
E_p(M_1) \arrow[r, "\Phi_*"] \arrow[d, "d"'] & E_p(M_2) \arrow[d, "d"] \\
E_{p+1}(M_1) \arrow[r, "\Phi_*"] & E_{p+1}(M_2)
\end{tikzcd}$$

Bu diyagram,

$$\Phi_* d\omega = d\Phi_* \omega \tag{3.4}$$

eşitliğine eşdeğerdir. Bu şu şekilde çıkar: (2.84) eşitliği (bu özel bir durumdur ve q^i 'ler M 'nin elemanları olduklarında geçerlidir) ve onun aşağısında verilen diyagram kullanılarak,

$$\begin{aligned}
\Phi_* \omega &= \sum_{(i)} \Phi_* \left(c_{(i)} \right) \Phi_* \left(dq^{i_1} \right) \wedge \ldots \wedge \Phi_* \left(dq^{i_p} \right) \\
&= \sum_{(i)} \left(c_{(i)} \circ \Phi^{-1} \right) d \left(q^{i_1} \circ \Phi^{-1} \right) \wedge \ldots \wedge d \left(q^{i_p} \circ \Phi^{-1} \right)
\end{aligned}$$

dir. Bu eşitlikten (3.4)'ün sağ tarafı (3.3 (b)) kullanılarak,

$$
\begin{aligned}
d\Phi_*\omega &= d\left(\sum_{(i)}\left(c_{(i)}\circ\Phi^{-1}\right)d\left(q^{i_1}\circ\Phi^{-1}\right)\wedge\ldots\wedge d\left(q^{i_p}\circ\Phi^{-1}\right)\right)\\
&= \sum_{(i)}\left(dc_{(i)}\circ\Phi^{-1}\right)\wedge d\left(q^{i_1}\circ\Phi^{-1}\right)\wedge\ldots\wedge d\left(q^{i_p}\circ\Phi^{-1}\right)
\end{aligned}
$$

bulunur. Diğer taraftan,

$$
\begin{aligned}
d\omega &= \frac{1}{p!}\sum_{(i)} dc_{(i)}\wedge dq^{i_1}\wedge dq^{i_2}\wedge\ldots\wedge dq^{i_p}\\
\Rightarrow \Phi_* d\omega &= \sum_{(i)}\Phi_*\left(dc_{(i)}\right)\Phi_*\left(dq^{i_1}\right)\wedge\ldots\wedge\Phi_*\left(dq^{i_p}\right)\\
&= \sum_{(i)} d\left(c_{(i)}\circ\Phi^{-1}\right)\wedge d\left(q^{i_1}\circ\Phi^{-1}\right)\wedge\ldots\wedge d\left(q^{i_p}\circ\Phi^{-1}\right)\\
&= d\Phi_*\omega
\end{aligned}
$$

Bu (3.4) eşitliğini ispatlar. Son adımda (2.84) eşitliği kullanıldı. Eğer Φ haritaların değişiminin diffeomorfizimi ise, o zaman $d\omega$, her şeyin yeni koordinatlarda ifade edilesi hariç, eski koordinatlardaki gibi yeni koordinatlarda oluşturulur. $\Phi_* d\omega = d\Phi_*\omega$ eşitliği yalnız diffeomorfizimler için doğru değil, aynı zamanda (2.87), formların ters görüntüleri (pull-back) için sağlanır.

$M = \mathbb{R}^3$ olsun. Buradaki notasyon ile vektör analizindeki notasyon arsındaki ilişki:

$$
\begin{aligned}
&(df)_i = (\nabla f)_i = (grad f)_i\\
&*(d\mathbf{v})_i = (curl\mathbf{v})_i\\
&*(*d\mathbf{v}) = \nabla\cdot\mathbf{v} = div\mathbf{v}
\end{aligned}
\tag{3.5}
$$

biçimindedir. (3.3) kuralları, aşağıdaki özel durumları içerir:

(b) $p = q = 0:\nabla\left(f\cdot g\right) = f\nabla g + g\nabla f$

(b) $p = 0, q = 1:\nabla\times\left(f\cdot\mathbf{v}\right) = \left(\nabla f\times\mathbf{v}\right) + f\nabla\times\mathbf{v}$

(b) $$p=q=1:\ \nabla\left[\mathbf{v}\times\mathbf{w}\right]=*\left(d\left(\upsilon\wedge\omega\right)\right)=*\left(d\upsilon\wedge\omega\right)-*\left(\upsilon\wedge d\omega\right)$$
$$=\left(\mathbf{w}\cdot\nabla\times\mathbf{v}\right)-\left(\mathbf{v}\cdot\nabla\times\mathbf{w}\right) \tag{3.6}$$

(c) $p=0:\nabla\times\nabla f=0$

(c) $p=1:\ \nabla\cdot\left(\nabla\times\mathbf{v}\right)=0$

(b) ve (c) $\nabla\left(f\square\nabla\times\mathbf{v}\right)=\left(\nabla f\square\nabla\times\mathbf{v}\right)$

Vektör analizinden rotasyonel-bağımsız vektörlerin (her yerde $\nabla\times\mathbf{v}=0$), bir skalerin gradyenti olarak yazılabildiği ve gradyent-bağımsız vektörlerin de bir vektörün rotasyoneli olarak yazılabildiği biliniyor.

Tanım: Bir ω**,** p-formu **kapalıdır** ancak ve ancak,

$$d\omega=0 \tag{3.7}$$

dır ve **tamdır** ancak ve ancak bir $\upsilon\in E_{p-1}\left(M\right)$ için,

$$\omega=d\upsilon \tag{3.8}$$

formundadır. (3.3 (c)) kuralına göre tam $\Rightarrow$ kaplıdır ve böylece tam formlar kapalı formların bir lineer altuzayıdırlar. Tam formlar genellikle bir öz altuzaydırlar. $M=\mathbb{R}^2\setminus\{0\}$, üzerinde

$$\omega_i=\frac{-ydx+xdy}{x^2+y^2}=\mathrm{Im}\frac{dz}{z},\ \ z=x+iy$$

ve

$$\omega_r=\frac{xdx+ydy}{x^2+y^2}=\mathrm{Re}\frac{dz}{z}$$

1-formları göz önüne alınsın. Açıkça $d\omega_i = d\omega_r = 0$ 'dır ve lokal olarak $\omega_r + i\omega_i = d\ln z$ 'dir. Fakat burada $\ln z$, M üzerinde sürekli olarak tanımlanmadığı için bu formlar tam değildirler. Buna göre her kapalı form tam olmak zorunda değildir.

Bir $S \in \mathbb{R}^n$ cümlesin bir **p noktasına göre yıldızsal**dır denir ancak ve ancak S 'nin hehangi bir noktasını p'ye bağlayan doğru tamamen S 'nin içinde kalır. Bir konveks cümle her noktasına göre yıldızsaldır.

Eğer M, $\mathbb{R}^n$ 'de bir yıldızsal açık cümle ise, o zaman

$$A \circ d + d \circ A = \mathbf{1} \tag{3.9}$$

olacak şekilde bir $A : E_p \to E_{p-1}$ gönderimi vardır. Bu yıldızsal cümlelere diffeomorfik M manifoldları için $d\omega = 0,\ \omega = d\left(A\omega\right)$ olduğunu belirtir (**Poincare lemması**). $\mathbb{R}^n$ 'de her komşuluk bir konveks cümle içerdiğinden dolayı yeterince küçük altcümleler üzerinde kapalı $\Rightarrow$ tamdır .

İspat: U orijine göre yıldızsal olsun ve $h : (1,0) \times U \to U,\ (x,t) \to tx$ olsun. $\omega \in E_p\left(U\right)$ için h altında ω 'nın ters görüntüsünü dt içeren kısım ve dt içermeyen kısma ayrıştırılabilir:

$$h^* \omega = \omega_0 + dt \wedge \omega_M ,\ \omega_0 \in E_p\left(\left(1,0\right)\times U\right),\ \ \omega_M \in E_{p-1}\left(\left(1,0\right)\times U\right) \tag{3.10}$$

O zaman,

$$A\omega = \int_0^1 dt \wedge \omega_M \in E_{p-1}\left(U\right) \tag{3.11}$$

tanımlanabilir.

$$\omega = \frac{1}{p!}\omega_{(i)}\left(x\right)dx^{i_1}\wedge dx^{i_2}\wedge\ldots\wedge dx^{i_p}$$

için,

$$\begin{aligned} h^*\omega &= \frac{1}{p!}\omega_{(i)}\left(xt\right)\left(tdx^{i_1}+x^{i_1}dt\right)\wedge\left(tdx^{i_2}+x^{i_2}dt\right)\wedge\ldots\wedge\left(tdx^{i_p}+x^{i_p}dt\right) \\ &= \frac{1}{p!}\omega_{(i)}t^p\left(xt\right)dx^{i_1}\wedge dx^{i_2}\wedge\ldots\wedge dx^{i_p} \\ &\quad + dt\wedge\frac{1}{p!}\omega_{(i)}\left(xt\right)\left(dt\right)^{p-1}x^{i_1}\wedge x^{i_2}\wedge\ldots\wedge x^{i_p} \\ &= \omega_0 + dt\wedge\omega_m \end{aligned}$$

bulunur. Burada dış çarpımın antisimetrisinden dolayı $dx^{i_1}\wedge dx^{i_2} = -dx^{i_2}\wedge dx^{i_1}$ v.b. terimler yok olur. t'ye göre dış türev d' ile gösterilsin, o zaman

$$dA\omega = \int_0^1 dt\wedge d'\omega_M\,,\quad Ad\omega\int_0^1 dt\left(\frac{\partial\omega_0}{\partial t} - d'\omega_M\right) \tag{3.12}$$

bulunur. Yukarıda tanımlandığı gibi, $\omega_{0|t=1} = \omega$ ve $\omega_{0|t=0} = \omega_0$ seçilirse ve (3.12) integralleri alınıp, taraf tarafa toplanırsa

$$A\circ d + d\circ A = \mathbf{1}$$

bulunur. Böylece (3.9) ifadesi ispatlanır.

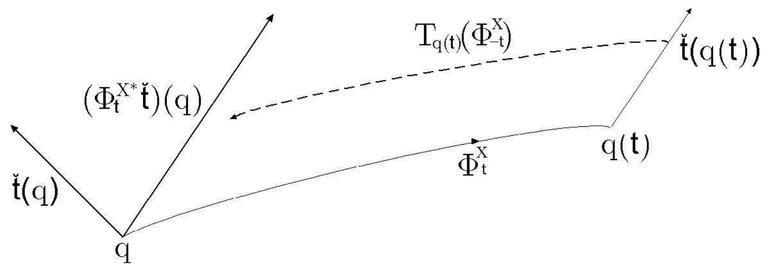
3.2 Lie Türevi

Tanımdan $p < 0$ olan p-formlar özdeş olarak sıfır oldukalrı için $df = 0$, $f = 0$ belirtiyor gibi görünür fakat gerçekte sadece f 'nin lokal olarak sabit olduğunu ifade eden dejenere bir durumdur.

Bir T tensör alanına bir koordinat bağımsız anlam atfetmek her zaman mümkün değildir. Fakat tanjant uzaylarının göreli yönlemesi (oryantasyonu) (2.7) koordinat sistemine bağlıdır. Bir örnek olarak $\upsilon^* \in \mathrm{T}_1{}^0$ alarak, dış türevden doğan $\upsilon^*_{i,k} - \upsilon^*_{k,i}$ kombinasyonunun dönüşümünde istenmeyen terimler yok olmasına rağmen, $\upsilon^*_{i,k}$ türevi ikinci dereceden bir tensör gibi dönüşmez. Eğer M üzerinde bir X vektör alanı verilirse, bu bir lokal Φ_t^X akışına neden olur, ve q noktasında diğer $\breve{t}$ vektör alanının türevini tanımlamak için, tanjant vektörleri q 'dan geçen yol boyunca, $q(t) = \Phi_t^X(q)$, boyunca $T_{q(t)}\left(\Phi_{-t}^X\right)$ kullanılarak geri $T_q(M)$ üzerine getirilebilirler (resmedilebilirler). O zaman q noktasında vektör alanının değeri olan $\breve{t}(q)$ ve zamanı geri akıtarak $\breve{t}(q(t))$ 'den oluşturulan vektörlerin ikisi aynı q noktasında karşılaştırılabilirler. Bu ikinci vektör $\left(\Phi_t^{X*}\breve{t}\right)(q)$ biçiminde yazılabilir; (2.87 pull-back) ve (Şekil 3.1)'de ifade edilmiştir. Karşılık gelen türev,

$$\frac{d}{dt}\left(\Phi_t^{X*}\breve{t}\right)(q) \tag{3.13}$$

bir tek $T_q(M)$, tanjant uzayının vektörlerini içerdiğinden ve vektörlerin diferansiyeli, lineer dönüşümlerle sıra değiştirdiğinden dolayı, kullanılan koordinat sisteminden bağımsızdır.



Şekil 3.1 Lie türevi

Tanım: Lie türevi, $L_X : \mathrm{T}_s^{\,r} \to \mathrm{T}_s^{\,r}$

$$L_X \breve{t} = \frac{d}{dt} \Phi_t^{X*} \breve{t}_{|t=0}, \;\; \breve{t} \in \mathrm{T}_s^{\,r} \tag{3.14}$$

ile tanımlanır.Burada $T_q\left(M\right)$'nin bir vektöründen ziyade bir X vektör alanına sahip olmak önemlidir. $L_X \breve{t}\left(q\right)$ için verilen ifadeler q noktasında sadece X'in bileşenlerinin değerlerini içermezler, fakat aynı zamanda $r = s = 0$ dışında onların türevlerini de içerirler. Eğer X bir analitik akışa neden olursa, o zaman (2.21) eşitliği,

$$\Phi_t^{X*} \breve{t} = e^{tL_X} \breve{t}, \;\; \breve{t} \in \mathrm{T}_s^{\,r} \tag{3.15}$$

eşitliğine genellenebilir. L_X aynı zamanda sonsuz küçük harita dönüşümü $q^i \to q^i + tX^i\left(q\right)$ göre değişim ile tanımlanabilir. Lie türevi aşağıda verilen özellikleri gerçekler:

1. Bir Φ diffeomorfizimi tarafından vektör alanları üzerinde meydana getirilen Φ^* gönderimi onların cebirsel yapılarını korur. Sonuç olarak $\breve{t}_i \in \mathrm{T}_s^{\,r}$, $i = 1, 2, ...$ ve $X, Y \in \mathrm{T}_0^{\,1}$ için;

(a) $\Phi_t^{X*}\left(\breve{t}_1 + \breve{t}_2\right) = \Phi_t^{X*}\breve{t}_1 + \Phi_t^{X*}\breve{t}_2$

(b) $\Phi_t^{X*}\left(\breve{t}_1 \otimes \breve{t}_2\right) = \left(\Phi_t^{X*}\breve{t}_1\right) \otimes \left(\Phi_t^{X*}\breve{t}_2\right)$ (3.16)

(c) $\Phi_t^{X*} V \breve{t}_2 = V \Phi_t^{X*} \breve{t}_2$, V bir daralma (büzülme)

özellikleri sağlanır. Sonsuz küçük t için;

(a) $L_X\left(\breve{t}_1 + \breve{t}_2\right) = L_X\breve{t}_1 + L_X\breve{t}_2$

(b) $L_X\left(\breve{t}_1 \otimes \breve{t}_2\right) = \left(L_X\breve{t}_1\right) \otimes \left(L_X\breve{t}_2\right)$ (3.17)

(c) $L_X V\breve{t} = V L_X \breve{t}$

olurlar. İzometrik (ve ya kanonik) Φ dönüşümleri için,

$\Phi_* g = g$, yani, $\Phi_*\left\langle \overline{t}_i \middle| \overline{t}_k \right\rangle = \left\langle \Phi_*\overline{t}_i \middle| \Phi_*\overline{t}_k \right\rangle$ (3.18)

dir. X, Killing vektör alanları için,

$L_X\left\langle \overline{t}_i \middle| \overline{t}_k \right\rangle = \left\langle L_X\overline{t}_i \middle| \overline{t}_k \right\rangle + \left\langle \overline{t}_i \middle| L_X\overline{t}_k \right\rangle$ (3.19)

sonucu çıkar.

2.

$$\begin{tikzcd}
\chi^r_s(M_1) \arrow[r, "\Psi_*"] \arrow[d, "\Phi^X_{t*}"'] & \chi^r_s(M_2) \arrow[d, "(\Phi_t^{\Psi^* X})_*"] \\
\chi^r_s(M_1) \arrow[r, "\Psi_*"] & \chi^r_s(M_2)
\end{tikzcd}$$

diyagramının permüte edilebilirliği, kendi sonsuz küçük karşılığının permüte edilebilirliğini ifade eder (diyagramlarda $\chi_s^r \equiv \mathrm{T}_s{}^r$.) :

$$\begin{tikzcd}
\chi_s^r(M_1) \arrow[r, "\Psi_*"] \arrow[d, "L_X"'] & \chi_s^r(M_2) \arrow[d, "L_{\Psi_* X}"] \\
\chi_s^r(M_1) \arrow[r, "\Psi_*"] & \chi_s^r(M_2)
\end{tikzcd}$$

yani,

$$L_{\Psi_* X}\Psi_*\breve{t} = \Psi_* L_X \breve{t} \tag{3.20}$$

dir. Bu, dönüşmüş sistem üzerindeki akışın dönüşmüş vektör alanı tarafından belirlendiğini belirtir, öyle ki bir tensör alanının Lie türevinin Ψ_* ile görüntüsü, tensör alanının görüntüsünün vektör alanının görüntüsüne göre Lie türevi ile aynıdır. Diffeomorfizimlere göre Lie türevinin bu tabiliği, onun harita-bağımsız tanımına işaret eder ve onun bir sonucudur; bu ters görüntü Ψ_* için de doğrudur.

3. d (3.4) diffeomorfizimlerine göre doğal olduğu için L_X ile sıra değişir. Formel olarak şöyledir: $\omega \in E_p$,

$$\begin{aligned} L_X d\omega = \frac{d}{dt}\Phi_t^{X*} d\omega_{|t=0} = \frac{d}{dt} d\Phi_t^{X*}\omega_{|t=0} = d\frac{d}{dt}\Phi_t^{X*}\omega_{|t=0} = dL_X\omega \\ \Rightarrow L_X d = dL_X \end{aligned} \tag{3.21}$$

elde edilir. Bu şematik olarak şöyledir:

$$
\begin{tikzcd}
E_p(M) \arrow[r, "L_X"] \arrow[d, "d"'] & E_p(M) \arrow[d, "d"] \\
E_{p+1}(M) \arrow[r, "L_X"] & E_{p+1}(M)
\end{tikzcd}
$$
4.

E_p üzerinde L_X, d ve (2.75) iç çarpımı cinsinden ifade edilebilir,

$$L_X = i_X \circ d + d \circ i_X ,\; i_X \circ L_X = L_X \circ i_X \tag{3.22}$$

İspat (Tümevarımsal): $p = 0$ için tanımdan, $i_X f = 0$ ve

$$i_X df = \left(df \,|\, X \right) = L_X f \tag{3.23}$$

olur. Her (p+1)-form,

$$\sum_i df_i \wedge \omega_i ,\; \omega_i \in E_p ,\; f \in C^\infty$$

biçiminde yazılabilir. Kural (3.3(b)) ve (3.3(c)) ve (2.50(ii)) iç çarpım kuralı kullanılarak,

$$
\begin{aligned}
\left(i_X \circ d + d \circ i_X \right)\left(df \wedge \omega \right) &= i_X \circ \left(-df \wedge d\omega \right) + d \circ \left(\left(i_X df \right) \omega - df \wedge i_X \omega \right) \\
&= -\left(i_X df \right) \wedge d\omega + df \wedge \left(i_X d\omega \right) + \left(d\left(i_X df \right) \right) \wedge \omega \\
&\quad + \left(i_X df \right) \wedge d\omega + df \wedge d\left(i_X \omega \right) \\
&= df \wedge \left(i_X d\omega + d\left(i_X \omega \right) \right) + \left(d\left(i_X df \right) \right) \wedge \omega
\end{aligned} \tag{3.24}
$$

bulunur. Burada L_X ile d sıra değiştirdiklerinden dolayı,

$$\left(d\left(i_X df\right)\right)\wedge\omega=\left(d\left(L_X f\right)\right)\wedge\omega=\left(L_X df\right)\wedge\omega \tag{3.25}$$

olur ve

$$\begin{aligned} L_X\omega &= d\left(\omega|X\right)=\left(d\omega|X\right)+\left(\omega|dX\right) \\ &= i_X d\omega+i_{dX}\omega=i_X d\omega+d\left(i_X\omega\right) \end{aligned} \tag{3.26}$$

(3.24), (3,25) ve (3.26) eşitliklerinin sonuçları birleştirilirse,

$$\left(i_X\circ d+d\circ i_X\right)\left(df\wedge\omega\right)=df\wedge L_X\omega+\left(L_X df\right)\wedge\omega=L_X\left(df\wedge\omega\right)$$

elde edilir. Bu istenilendir. Denklem (3.22)'nin her iki yanındaki işlemciler lineerdirler, dolayısıyla bu bağıntı $\sum_i\left(df_i\wedge\omega_i\right)$ için ve sonuç olarak E_{p-1} üzerinde de geçerlidir. $i_X\circ i_X=0$ olduğuna dikkat ederek,

$$\begin{aligned} i_X\circ L_X &= i_X\circ\left(i_X\circ d+d\circ i_X\right)=i_X\circ\left(i_X\circ d\right)+i_X\circ\left(d\circ i_X\right) \\ &= i_X\circ\left(d\circ i_X\right)=\left(i_X\circ d\right)\circ i_X=L_X\circ i_X \end{aligned}$$

bulunur. Bu yolla, d ile L_X'in sıra değiştiği farklı bir şekilde bulunur:

$$dL_X=d\circ\left(i_X\circ d+d\circ i_X\right)=d\circ i_X\circ d+d\circ d\circ i_X=d\circ i_X\circ d$$

diğer yandan,

$$L_X d=\left(i_X\circ d+d\circ i_X\right)\circ d=i_X\circ d\circ d+d\circ i_X\circ d=d\circ i_X\circ d$$

bulunur ve bu iki eşitlik birleştirilirse $L_X d=dL_X$ bulunur; yani (3.21) tekrar elde edilir.

5. i_X iç çarpımı lineerdir, yani

$i_{\alpha X_1+\beta X_2}=\alpha i_{X_1}+\beta i_{X_2}$, α,β=sabit

sağlanır. Bu bağıntı ve d 'nin linerliği kullanılarak, Lie türevi L_X, X vektör alanlarının lineerliği ile tutarlı olduğu görülür:

$$\begin{aligned} L_{\alpha X_1+\beta X_2} &= i_{\alpha X_1+\beta X_2}\circ d+d\circ i_{\alpha X_1+\beta X_2}=\left(\alpha i_{X_1}+\beta i_{X_2}\right)\circ d+d\circ\left(\alpha i_{X_1}+\beta i_{X_2}\right) \\ &=\alpha\left(i_{X_1}\circ d+d\circ i_{X_1}\right)+\beta\left(i_{X_2}\circ d+d\circ i_{X_2}\right)=\alpha L_{X_1}+\beta L_{X_2} \end{aligned} \tag{3.27}$$

Vektör alanlarının modül yapısı için, bu özellikten,

$$\begin{aligned} i_{fX}d\omega+di_{fX}\omega &= fi_X d\omega+d\left(fi_X\omega\right) \\ &= f\left(i_X d+di_X\right)\omega+df\wedge i_X\omega \\ &= fL_X\omega+df\wedge i_X\omega, \qquad \forall\omega\in E_p \end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla, E_p üzerinde

$$L_{fX}=fL_X+df\wedge i_X \tag{3.28}$$

sonucu çıkar. df 'i içeren ek terim, L_X içinde X 'in türevlerinin varlığını yansıtır. Yani X ve fX bir vektörün başlangıç ve bitim noktalarının yerlerini farklı olarak değiştirirler.

6. Bir vektör alanına göre Lie türevi, Lie parantez operatörü ile gösterilebilir: Lie türevinin lineerliği ve (3.23) ile (3.26) denklemleri kullanılarak,

$$L_X\left(df\,|Y\right)=\left(L_X df\,|Y\right)+\left(df\,|L_X Y\right)$$

elde edilir. Bu eşitlikten,

$$\begin{aligned}\left(df\,|L_XY\right)&=L_X\left(df\,|Y\right)-\left(L_Xdf\,|Y\right)\\ L_{L_XY}f&=L_XL_Yf-\left(dL_Xf\,|Y\right)\\ &=L_XL_Yf-L_YL_Xf\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece T_0^0 üzerinde,

$$L_{L_XY}=L_{[X,Y]}=L_XL_Y-L_YL_X \tag{3.29}$$

bulunur. Bu bağıntıdan yola çıkılarak,

$$[X,[Y,Z]]+[Y,[Z,X]]+[Z,[X,Y]]=0 \tag{3.30}$$

Jacobi özdeşliği gösterilebilir:

$$\begin{aligned}L_{[X,[Y,Z]]}+L_{[Y,[Z,X]]}+L_{[Z,[X,Y]]}&=\left(L_X\left(L_YL_Z-L_ZL_Y\right)-\left(L_YL_Z-L_ZL_Y\right)L_X\right)\\ &+\left(L_Y\left(L_ZL_X-L_XL_Z\right)-\left(L_ZL_X-L_XL_Z\right)L_Y\right)\\ &+\left(L_Z\left(L_XL_Y-L_YL_X\right)-\left(L_XL_Y-L_YL_X\right)L_Z\right)\\ &=0\end{aligned}$$

elde edilir, çünkü $L_X=0$, (T_0^0 üzerinde dahi) $X=0$ olduğunu ifade eder. Ayrıca (3.29) bağıntısından,

$$L_{L_XY}=-L_{L_YX} \tag{3.31}$$

olduğu açıktır, çünkü her vektör alanı tamamen T_0^0 üzerinde etkisi ile karakterize edilir. (3.29) bağıntısı bütün T_s^r'ye genişletilebilir. Eğer $L_XL_Y-L_YL_X$ bir $\breve{t}\in\mathrm{T}_s^0$,

$$\breve{t} = \sum_{(i)} c_{(i)} dq^{i_1} \wedge dq^{i_2} \wedge ... \wedge dq^{i_s}$$

uygulanırsa, yukarıda toplam ve tensör çarpım için verilen kurallar kullanılarak, yalnızca iki kere türevlenen terimler kalır, diğer terimler antisimetriden dolayı yok olur, yani birbirlerini karşılıklı yok ederler. Kalan terimler için sonuç, 3. özellik kullanularak sağlanır ve bu 1. özellikle bütün T_s^r'ye genişletilir. Örneğin X ve $Y \in \mathrm{T}_0^1$ ve $\alpha \in \mathrm{T}_1^0$ için,

$$\begin{aligned}\left(L_X\alpha\middle|Y\right)+\left(\alpha\middle|L_XY\right) &= \left(L_X\alpha\right)_i Y^i + \alpha_i\left(L_XY\right)\\ &= \left(\alpha_{i,k}X^k + \alpha_k X^k_{\ ,i}\right)Y^i + \alpha_i\left(Y^i_{\ ,k}X^k - X^i_{\ ,k}Y^k\right)\\ &= \alpha_{i,k}X^kY^i + \alpha_i Y^i_{\ ,k}X^k = L_X\left(\alpha\middle|Y\right)\end{aligned}$$

elde edilir. Bu bağıntı düzenlenirse;

$$\left(\alpha\middle|L_XY\right) = L_X\left(\alpha\middle|Y\right) - \left(L_X\alpha\middle|Y\right)$$

olur, bu da (3.29) eşitliğine özdeştir.

$r = s = 0$ olsun. Bu durumda, (2.21) eşitliği kullanılarak,

$$\Phi_t^{X*} f = f \circ \Phi_t^X = e^{tL_X} f = \tau_t^X f$$

yazılır. $X = X^i\partial_i$ alınırsa, Lie türevi tanımı, (3.14)

$$L_X f = X^i f_{,i} \tag{3.32}$$

sonucunu verir. Böylece Φ_t^{X*}, τ_t otomorfizimlerine neden olduğu görülür. Ayrıca, $f \in C(M)$ için doğrudan,

$$L_X df = d(L_X f) \tag{3.33}$$

olduğu gösterilebilir:

$$\begin{aligned} L_X L_Y f &= L_X (df|Y) = (L_X df|Y) + (df|L_X Y) \\ &= (dL_X f|Y) + L_{[X,Y]} f = L_Y L_X f + L_{[X,Y]} f \end{aligned}$$

bulunur. Bu eşitlikten,

$$(L_X df|Y) = L_Y L_X f = (d(L_X f)|Y), \quad \forall Y \in \mathrm{T}_0^1(M) \Rightarrow L_X df = d(L_X f)$$

elde edilir. Bu şöyle ifade edilebilir: f üzerinde, $L_X d = d_{i_X} d = dL_X$.

$r = 0$ ve $s = 1$ için, $\omega = \omega_i dq^i$ ve

$$\begin{aligned} L_X \omega &= L_X (\omega_i dq^i) = (L_X \omega_i) dq^i + \omega_i (L_X dq^i) = (L_X \omega_i) dq^i + \omega_i d(L_X q^i) \\ &= X^k \omega_{i,k} dq^i + \omega_k X^k_{,i} dq^i = (X^k \omega_{i,k} + \omega_k X^k_{,i}) dq^i \end{aligned}$$

olur. $r = 1$ ve $s = 0$; $\omega \in \mathrm{T}_1^0$, $Y = Y^i \partial_i \in \mathrm{T}_1^0$ için

$$\begin{aligned} (L_X \omega|Y) &= \omega_{i,k} Y^i X^k + \omega_i Y^i_{,k} X^k \\ &= \omega_{i,k} Y^i X^k - \omega_i X^i_{,k} Y^k + \omega_i Y^i_{,k} X^k + \omega_i X^i_{,k} Y^k \\ &= (\omega_{i,k} X^k + \omega_k X^k_{,i}) Y^i + \omega_i (Y^i_{,k} X^k - X^i_{,k} Y^k) \\ &= (L_X \omega|Y) + (\omega|L_X Y) \end{aligned} \tag{3.34}$$

elde edilir. Dolayısıyla Y ’nin Lie türevinin i-yinci bileşeni

$$Y^i_{,k}X^k - X^i_{,k}Y^k \tag{3.35}$$

olur. $X = \partial_i$ ve $Y = \partial_j$ ise, o zaman $\left[X, Y\right] = 0$ olur. Bunun anlamı: Doğal bazlarda parçalı türev sıra değişir.

$\omega \in E_1$ ve X ve Y birer vektör alanı olsunlar. Bu takdirde Lie türevi aşağıda verilen bağıntıyı sağlar:

$$\left(d\omega | X, Y\right) = L_X\left(\omega | Y\right) - L_Y\left(\omega | X\right) - \left(\omega \| \left[X, Y\right]\right) \tag{3.36}$$

İspat: (3.22) kullanılarak,

$$\begin{aligned} L_X\left(\omega | Y\right) &= \left(\left(i_X \circ d + d \circ i_X\right)\omega | Y\right) + \left(\omega | L_X Y\right) \\ &= \left(i_X\left(d\omega\right) | Y\right) + \left(d\left(i_X\omega\right) | Y\right) + \left(\omega \| \left[X, Y\right]\right) \\ &= \left(d\omega | XY\right) + L_Y\left(\omega | X\right) + \left(\omega \| \left[X, Y\right]\right) \end{aligned}$$

elde edilir. Bu sonuç düzenlendiğinde (3.36) elde edilir.

3.3 Vektör Alanlarının İntegrallenebilirliği

Her x noktasında m-n lineer bağımsız ω_j, 1-formlarının herhangi bir cümlesi, $T_x\left(M\right)$ ’nin bir n-boyutlu altuzayını, $\mathrm{N}_x = \left\{\upsilon \in T_x\left(M\right) : \left(\omega_j | \upsilon\right) = 0, \text{ her } j \text{ için}\right\}$ tanımlar. Her x için $T_x\left(N\right) = \mathrm{N}_x$ olacak N altmanifoldları bulunabiliyorsa, bu, ω_j ’lerin **integrallenebilirliği** olarak adlandırılır. N lokal olarak, altmanifold tanımı gereğince

$f_j \in C^{\infty}(M)$ için $f_j = 0,\ j = 1, 2, ..., m-n$ formunun denklemlerinin bir cümlesi ile verilir. df_j, 1-formları koşulunu sağlar ve dolayısıyla her $\upsilon \in T_x(N)$ için istenilen

$$\left(df_j \middle| \upsilon\right) = 0 \tag{3.37}$$

özelliğine sahiptirler. Bunlar bu tip formlarının bir bazını oluştururlar ve dolayısıyla lokal olarak

$$\omega_j = c_{jk} df_k \tag{3.38}$$

yazılabilir. Bu yüzden $\upsilon_{ij} = dc_{ji}\left(c^{-1}\right)_{ik} \in E_1$ için

$$d\omega_j = \upsilon_{jk} \wedge \omega_k \tag{3.39}$$

olur ve dolyısıyla her j için,

$$d\omega_j \wedge d\omega_1 \wedge d\omega_2 \wedge ... \wedge d\omega_{m-n} = 0$$

olur. Bu, ω'ların dış türevlerinin onların gerdiği uzayda uzanan en az bir bileşene sahiplerse, N'nin var olabileceğini ifade eder. Eğer $d\omega_j = 0$ ise, $\omega_j = df_j$ olur. O zaman ω_j integrallenebilir ve N, $df_j = sabit$ ile verilir. Görünüşte daha genel olan $d\omega_j = \upsilon_{jk} \wedge \omega_k$, uygun lineer kombinasyonlarla bu duruma indirgenebilir ve bu koşul **lokal integrallenebilirlik** için **gerek ve yeterli** koşuldur. Bu alan elemanlarının sonsuz küçük düzeyden lokal düzeye genişletilmesini garantiler. Eğer n=1 ise, integrallenebilirlik koşulu daima sağlanır, burada $T_x(M)$'nin bazında eksik olan tek şey ω_0'dır ve $\omega_0 \wedge \omega_0 = 0$ olduğu için, her $d\omega_j$ en az bir ω_j çarpanı içermelidir. Bu takdirde N tek bir $X \in \mathrm{T}_0^1$ ile karekterize edilir ve o zaman lokal integral eğrileri vardır

(Kısım 2.5 (Akış)). Her halükarda, n-boyutlu altmanifoldlar, $\left(\omega_j \middle| X\right)=0$ olan X'ler tarafından meydana getirilen Φ^X akışları altında invaryanttırlar ve bundan başka bir noktaya etki etmek için lokal olarak Φ^X akışları tarafından üretilirler (meydana getirilirler).

Her noktada n-boyutlu bir $\mathrm{N}_x \subset T_x(M)$ altuzay tanımlayan $X_j, j=1,2,...,n$, vektör alanları verilmiş olsun, eğer her $x \in N$ için $T_x(N)=\mathrm{N}_x$ olacak n-boyutlu altmanifoldlar varsa, o zaman X_j'ler **yüzey-biçimleyen** veya **integrallenebilir** olarak adlandırılır. Bir altmanifold haritası üzerinde (Kısım 2.1),

$$N=\left\{x_1,...,x_m : x_{n+1}=...=x_m=0\right\}$$

ile verilir ve $T_x(N)$, $\left\{\partial/\partial x_k, k=1,2,...,n\right\}$ tarafından gerilir. (3.35) bağıntısına göre,

$$\left[X_i, X_l\right]=\left(c_i^j \frac{\partial}{\partial x_j} c_l^k - c_l^j \frac{\partial}{\partial x_j} c_i^k\right)\frac{\partial}{\partial x_k},\ i,l,j,k=1,..,n \tag{3.40}$$

dir ve $\partial/\partial x_k$, X_j'lerin bir lineer kombinasyonu olarak ifade edilebilir. Eğer X_j'ler bir yüzey biçimlendiriyorlarsa, o zaman onların Lie braketleri de N_x'e ait olmalıdır. Bu, yukarıda anlatılan lokal integrallenebilme için yeterli koşulu garantiler: Bir komşulukta her x ve j için $\left(\omega(x)\middle|X_j(x)\right)=0$ olan bütün ω'ların lineer uzayını $\mathrm{N}_x^{\perp}$ göstersin. Lokal integrallenebilirlik $d\omega$'nın $\mathrm{N}_x^{\perp}$'e ait olan en az bir çarpana sahip olduğunu belirtir. Eğer $\omega \in \mathrm{N}_x^{\perp}$ ve $X, Y \in \mathrm{N}_x$ iseler, (3.35) eşitliğinde sağda tarafta ω ile skaler çarpım olan terimler sıfır olur ve

$$\left(d\omega \middle| X,Y\right)=-\left(\omega \middle| \left[X,Y\right]\right) \tag{3.41}$$

olur. Bundan dolayı $d\omega$, $N_x^{\perp}$'de bir çarpana sahiptir ancak ve ancak $\left(d\omega | X, Y\right) = 0$ ancak ve ancak

$$\left(\omega \| \left[X, Y\right]\right) = 0 \tag{3.42}$$

Aşağıda verilen argüman $\left[X_j, X_k\right]$'nın $N_x^{\perp}$'e ait olması gerektiğini gösterir: $\Phi_{\tau_j}^{X_j}$, akışları N'yi değişmez (invaryant) bırakmalıdırlar. Bundan dolayı,

$$\Phi_{\tau}^{X_j} \circ \Phi_{\tau}^{X_k} \circ \Phi_{-\tau}^{X_j} \circ \Phi_{-\tau}^{X_k}$$

N'yi kendi içine haritalamalıdır (göndermelidir) ve [$\left[X_j, X_k\right]$ bundan bulunabilir:

$$\left[X_j, X_k\right] = \lim_{\tau \to 0} \tau^{-2} \left(\exp\left[\tau L_{X_j}\right] \exp\left[\tau L_{X_k}\right] \exp\left[-\tau L_{X_j}\right] \exp\left[-\tau L_{X_k}\right] - 1 \right) \tag{3.43}$$

dır. Burada (3.15) eşitliği kullanıldı. Doğal bazlı her X_j için,

$$\Phi_{\tau_j}^{X_j} \circ \Phi_{\tau_k}^{X_k} = \Phi_{\tau_k}^{X_k} \circ \Phi_{\tau_j}^{X_j} \tag{3.44}$$

dir ve N, altmanifoldu için tanımlanan harita

$$\Phi_{\tau_1}^{\partial_1} \circ \Phi_{\tau_2}^{\partial_2} \circ \ldots \circ \Phi_{\tau_n}^{\partial_n} x \to \left(\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n\right) \in \square^n \tag{3.45}$$

olur. Argümanı tersine çevirerek, $\Phi_{\tau_j}^{X_j} \circ \Phi_{\tau_k}^{X_k} = \Phi_{\tau_k}^{X_k} \circ \Phi_{\tau_j}^{X_j}$ olacak şekilde n bağımsız X_j verilmişse, o zaman bir N ve $\left\{X_j\right\}$'nin doğal baz olduğu bir harita bulunabilir:

$$\left(\tau_j\right) \to \Phi_{\tau_n}^{X_n} \circ \Phi_{\tau_{n-1}}^{X_{n-1}} \circ \ldots \circ \Phi_{\tau_1}^{X_1}\left(q\right) = q\left(\tau_j\right)$$

Gönderimi $q : \partial q(\tau)/\partial \tau_j = X_j(q(\tau))$'nun bir komşuluğuna, $0 \in \mathbb{R}^n$'nin bir komşuluğunun bir diffeomorfizimidir ve varsayıma göre $\tau = 0$ ve dolayısıyla 0'ın komşuluğunun her yerinde $\det\left(X_j^k(q)\right)$, sıfırdan farklıdır. Bu yüzden,

$$\left[X_j, X_k\right] = 0 \tag{3.46}$$

lokal integrallenebilirlik için yeterli koşuldur. Daha genel $\left[X_j, X_k\right] = c_{jkm} X_m$ durumu $\left[\bar{X}_j, \bar{X}_k\right] = 0$ sağlayan X_k'ların X_j, lineer kombinasyonlarının tanımlanmasıyla bu duruma indirgenir.

3.4 İntegraller

Bir m-form bir manifold üzerinde bir ölçüm tanımlar; integral, parçalı integralin Stokes teoremi şeklinde genellemesi anlamında, dış türevin tersidir. p-form tanımı yapılırken (Kısım 2.6), bunlar p-boyutlu hacim elemanları için ölçümler olarak yorumlandılar. p-formları bir koordinat bazına uygulamak ve sonra bilinen mantıkla bu koordinatlar üzerinden integral almakla, p-formlar üzerinden bir koordinat-bağımsız integral tanımlamak olasıdır. Bunun için yine tek bir noktadan başlayarak analiz bir koordinat sistemine genişletilmelidir. Ω, taşıyıcısı bir (U, Φ) haritasında uzanan bir m-form olsun. Onun harita altındaki görüntüsü,

$$\Phi_* \Omega = \omega(x)\, dx^1 \wedge dx^2 \wedge \ldots \wedge dx^m, \quad \omega = \left(\Omega \middle| \partial_1, \partial_2, \ldots, \partial_m\right) \tag{3.47}$$

formundadır ve eğer U göreli olarak kompakt ise,

$$\int \Omega = \int_{-\infty}^{\infty} dx^1 \ldots \int_{-\infty}^{\infty} dx^m\, \omega(x) \tag{3.48}$$

integrali tanımlanabilir. Bu integralin değeri (2.96) ile ω, $\det\left(\partial x^i / \partial \overline{x}^j\right)$ ile çarpıldığı için, bir diffeomorfizim altında değişmez kalır ve

$$\int d^m \overline{x} \det\left(\frac{\partial x^i}{\partial \overline{x}^j}\right) \omega\left(x\left(\overline{x}\right)\right) = \int d^m x \omega\left(x\right) \tag{3.49}$$

olur. Yakınsama sorunlarından kaçınmak için yalnızca bir sonlu bölgenin dışında sıfır olan formları integre etmek burada güdülen amaç için uygundur. Alışıldığı üzere, bir manifold üzerinde bir sonlu bölgenin notasyonu yerine kompaktlık bir diffeomorfizim altında değişmez kaldığı için, bir kompakt cümle konabilir. $\sup p\left(f\right)$'nin ($\sup p\left(f\right) : f$ **'nin taşıyıcısı (desteği)**: koplemanı $f = 0$ olan en küçük kapalı cümle) kompakt olması için, $f \in C\left(M\right)$ olmak üzere, $f\Omega$ şeklinde yazılabilen m-formlar düşünülecek. Böyle formların cümlesi E_p^0 ile gösterilir. Bir atlas verilmiş olsun, o zaman daima

$$\sup p\left(f\right) \subset \bigcup_i^{\text{sonlu}} U_i \tag{3.50}$$

olacak $\left(U_i, \Phi_i\right)$ haritaları seçmek mümkündür. Bileşimin bir bölüşümü kullanılarak, $\sup f_i \subset U_i$ olmak üzere,

$$f = \sum_i f_i \tag{3.51}$$

yazılabilir.

Tanım: Yönlenebilir bir M manifoldu üzerinde kompakt destekli (**kompakt destekli fonksiyonlar:** sonlu bir hacmin dışında sıfır olan fonksiyonlardır.) bir $f\Omega$, m-formunun integrali,

$$\int_M \Omega f = \sum_i \int \Phi_{i*}\left(\Omega f_i\right) \tag{3.52}$$

dır, öyle ki $f = \sum_i f_i$, $\left(U_i, \Phi_i\right)$ haritasının tanım bölgesinde kompakt desteklidir ve toplam altında verilen integraller, $\left(\Omega \middle| \partial_1, \partial_2, ..., \partial_m\right) > 0$ yönlenimine sahip haritaların kullanımı varsayımı ile verilirler.

Bütün haritalar aynı $(\Omega \mid \partial_1, \partial_2, ..., \partial_m) > 0$ yönlenimine sahip olmak şartıyla, öyle ki haritaların değişimi altında $\det\left(\partial x^i / \partial \bar{x}^j\right) > 0$ doğru kalır, integral haritaların seçiminden bağımsızdır. Eğer $\left(\partial \bar{U}_i,\ \bar{\Phi}_i\right)$ haritaları kullanılırsa, o zaman bir

$$f = \sum_{i,j} f_{ij}$$

birim bölüşümü, öyle ki $\sup p\left(f_{ij}\right) \subset U_i \cap \bar{U}_j$, tanımlanarak, $\int f\Omega$ integralinin değeri (3.49)'daki gibi aynı kaldığı görülür. $U_i \cap \bar{U}_j$, üzerinde Φ_i'den $\bar{\Phi}_j$'ye değişim yalnızca değişkenlerin değişimidir ve $f = \sum_{i,j} f_{ij}$ yakınsama problemleri olmaksızın her zaman sonlu bir toplam seçildiği için, toplamın derecesinin değiştirilmesi izinlidir. Bütün $f \in C^{\infty}$ -fonksiyonlar için $\int \Omega f$, $\sup|f|$ tarafından sınırlanan bir lineer fonksiyoneldir, yalınızca bir sabit $\sup p(f)$'ye bağılıdır ve böylece M üzerinde bir ölçüm tanımlar. O zaman lineer fonksiyonel, kompakt desteğe sahip olmak zorunda olmayan, fakat yalınızca yeterince hızlı bir şekilde azalan daha geniş bir fonksiyonlar sınıfına genişletilebilir (Thirring 1997).

Eğer ω bir p-form ve M manifoldunun yönlenebilir n-boyutlu bir altmanifoldu N ise o zaman

$$\int_N \omega \qquad (3.53)$$

integrali $\omega_{|N}$ ile birlikte (3.52) ile tanımlanır. Eğer $M = (a,\ b)$ ve ω, $\sup pf$ ä M olan df 1-formu ise, o zaman,

$$\int df = \int_a^b dx \frac{\partial f}{\partial x} = 0$$

olur, çünkü f sınırlarda sıfıra eşittir. f 'nin desteği üzerinde koşul olmadan $\int df = f(b) - f(a)$ olur.

3.4.1 Teorem: Stokes Teoremi

M , sınırlı yönlenebilir m-boyutlu bir manifold olsun ve ω kompakt destekli bir (m-1)-form olsun. O zaman,

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega \qquad (3.54)$$

olur.

Burada ∂M 'nin yönlenmesi belirtilmedi çünkü M'nin yönlenmesi ∂M üzerinde bir yönlenmeye neden olur. Gerçekte, bu, "(2.2) formunun (sınırlı manifold tanımı) üzerinde M 'nin yönlenmesi $\omega(x)dx^1 \wedge dx^2 \wedge ... \wedge dx^m$, $\omega > 0$ ile verilirse, o zaman ∂M sınırına,

$$-dx^2 \wedge ... \wedge dx^m \qquad (3.55)$$

yönlenimi yüklenir", teoreminin ispatının bir sonucudur. İşaret önemlidir, çünkü eğer tersine çevrilirseydi (3.54) ifadesi yanlış olacaktı: $M = [0, \infty)$ için,

$$\int df = \int_0^\infty dx \frac{\partial f}{\partial x} = -f(0) \tag{3.56}$$

olur. M, R^n'nin sonlu bir kısmı olsa dahi, bir kompakt destek gereksinimi zorunludur. Örneğin, $M = (a, b)$, $\partial M = \varnothing$, $f = x$ olsun,

$$\int_a^b df = b - a \neq \int_{\partial M} f = 0 \tag{3.57}$$

$d \circ d = 0$ kuralı, bir sınır sınıra sahip değildir gerçeğinden çıkar: V, M'nin bir sınırlı kompakt altmanifoldu olsun. O zaman,

$$\int_V d \circ d\omega = \int_{\partial V} d\omega = \int_{\partial\partial V} \omega = 0 \tag{3.58}$$

elde edilir. Eğer bir m-formun integrali her sınırlı kompakt altmanifold üzerinde sıfıra eşit oluyorsa, m-form sıfıra eşittir ve dolayısıyla $d \circ d = 0$'dır.

İspat (Stokes Teoremi): Her ω_i, bir (2.2) sınırının bir haritasının U_i bölgesinde kompakt desteğe sahip olmak üzere,

$$\int d\omega = \sum_i \int d\omega_i$$

olsun; o zaman $\int_M d\omega_i = \int_{\partial M} \omega$ olduğunu göstermek yeterlidir. R^m'de differensiyellenebilir bir açık altcümle haritası üzerinde,

$$\Phi_i^* \omega_i = \sum_{j=1}^{m} g_j dx^1 \wedge dx^2 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx^j} \wedge \ldots \wedge dx^m \tag{3.59a}$$

ve

$$d\omega_i = \sum_{j=1}^{m} (-1)^{j+1} \frac{\partial g_j}{\partial x^j} \wedge dx^1 \wedge dx^2 \wedge \ldots \wedge dx^m \tag{359b}$$

dır, (burada $\widehat{dx^j}$ sembolü j-yinci diferensiyelin bulunmadığını gösterir) ve yönlenme olarak, $dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^m$ seçilisin. O zaman, (3.56) ifadesi yardımıyla,

$$\begin{aligned} \int_M d\omega_i &= \sum_{j=1}^{m} (-1)^{j+1} \int_0^\infty dx^1 \int_{-\infty}^{\infty} dx^2 \ldots \int_{-\infty}^{\infty} dx^m \frac{\partial g_j}{\partial x^j} \\ &= -\int_{-\infty}^{\infty} dx^2 \ldots \int_{-\infty}^{\infty} dx^m g_j \left(0, x^2, \ldots, x^m\right) \end{aligned} \tag{3.60a}$$

bulunur. Diğer yandan, (3.55)'den ∂M için,

$$\int_{\partial M} \omega_i = -\int_{-\infty}^{\infty} dx^2 \ldots \int_{-\infty}^{\infty} dx^m g_1 \left(0, x^2, \ldots, x^m\right) \tag{3.60b}$$

olduğu biliniyor, çünkü dx^1'in ∂M'ye kısıtlanması (sınırlaması) sıfıra eşttir, bundan dolayı,

$$\omega_{i|\partial M} = g_1 dx^2 \wedge \ldots \wedge dx^m \tag{3.61}$$

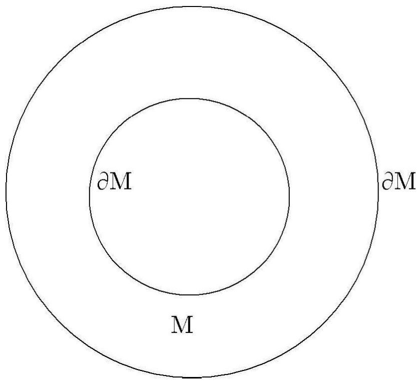
olur. (3.60a) ve (3.60b) ifadeleri karşılaştırıldığında (3.54) elde edilir ve bu da ispatı tamamlar.

Örneğin;

$$M = \left\{ (x,\ y) \in \mathbb{R}^2 \ :\ \frac{1}{2} \le x^2 + y^2 \le 1 \right\},\ \omega = \frac{-ydx + xdy}{x^2 + y^2}$$

verilsin. Burada $d\omega = 0$ olduğu açıktır. Stokes teoremi uygulandığında,

$$0 = \int_{x^2+y^2=1} \omega - \int_{x^2+y^2=1/2} \omega = 2\pi - 2\pi \tag{3.62}$$



Şekil 3.2 M manifoldu ve sınırı

Burada ω'nın kompakt destekli olması yine esas olduğu görünüyor, aksi takdirde ω, $M = \left\{ (x,\ y) \in \mathbb{R}^2 \ :\ 0 \le x^2 + y^2 \le 1 \right\}$, $\partial M = S^1$ üzerinden alınabilir ve (3.62) ifadesinden, $0 = 2\pi$ çelişkisine varılır. $\omega = d\upsilon$,

$$2\pi = \int_{S^1} \omega = \int_{S^1} d\upsilon = \int_{\partial S^1} \upsilon = 0,\ \partial S^1 = \varnothing \text{ iken} \tag{3.63}$$

belirttiğinden, ω tam olmayabilir.

$\mathbb{R}^3$'te C herhangi bir-boyutlu sınırlı bir altmanifold ve $\partial C = \{a, b\}$ olsun, df 1-formu, $u : I = (a,\ b) \to \mathbb{R}^3$ eğrisinin yörüngesi boyunca integre edilebilir. Bunu yapmak için bu bir boyutlu manifold üzerinde $\left(u(I),\ u^{-1} \right)$ haritası kullanılabilir. O zaman,

$$\int_{u(I)} df = \int_I (u)^* df = \int_I d\left((u)^* f\right) = \int_{\partial I} (f \circ u)$$
$$= f(u(b)) - f(u(a))$$

olur ve buradan Stokes teoremi,

$$\int_C df = \int_{\partial C} f \text{ veya } \int_C d\mathbf{s} \cdot \nabla f = f(b) - f(a) \tag{3.64}$$

ifade eder. $M = \mathrm{R}^3$'ün bir iki-boyutlu sınırlı altmanifoldu ve ω 1-form $\mathbf{w}$ olsun. Vektör notasyonunda, (3.54) Stokes teoremi ifadesi,

$$\int_M d\mathbf{S} \cdot \nabla \times \mathbf{w} = \int_{\partial M} d\mathbf{s} \cdot \mathbf{w} \tag{3.65}$$

olur ($d\mathbf{S}$: yüzeysel diferansiyel eleman ve $d\mathbf{s}$: çizgisel diferansiyel eleman).

M, R^3'ün bir üç-boyutlu sınırlı altmanifoldu ve ω, 2-form ${}^*\mathbf{w}$ olsun. O zaman (3.54) ifadesi, **Gauss teoremi** ifadesine dönüşür:

$$\int_M dV \nabla \cdot \mathbf{w} = \int_{\partial M} d\mathbf{f} \cdot \mathbf{w} \tag{3.66}$$

İntegral diffeomorfizimler altında değişmez kalır, bundan yararlanılarak Lie türeviyle integral arasında,

$$M_1 \xrightarrow{\Phi} M_2 \ : \int_{M_1} \omega = \int_{M_2} \Phi_* \omega \tag{3.67}$$

ilişkisi elde edilir. Eğer Φ, özel olarak $M = M_1 = M_2$ üzerinde bir akış ise, o zaman (3.67)'nin sonsuz küçük karşılığı

$$\int_M L_X \omega = 0,\ X \text{ ä } \mathrm{T}_0^1,\ \omega \text{ ä } E_m(M) \text{ ve } \Phi_t^X M = M \tag{3.68}$$

olur. Yukarıda verilen durumlar bir akı altında invaryant bir Ω m-formu düşünüldüğünde, fiziksel olarak ilginç formülasyonlara sahiptirler. Bu yönleme-koruyan izometrilerin tek-parametre grupları için ve $^*\mathbf{1}$ veya $g \wedge g \wedge ... \wedge g$'yi değişmez bırakan kanonik dönüşümler için olan durumdur. Faz uzayı üzerinde $^*\mathbf{1}$ veya $g \wedge g \wedge ... \wedge g$ **Liouville ölçümü** olarak bilinir ve genellikle,

$$dq_1 dq_2 ... dq_m dp_1 ... dp_m = dq_1 \wedge ... \wedge dq_m \wedge dp_1 \wedge ... \wedge dp_m \tag{3.69}$$

biçiminde gösterilir ve,

$$d^m q = d^m \overline{q} \det\left(\frac{\partial q_i}{\partial \overline{q}_j} \right) \text{ ve } d^m p = d^m \overline{p} \det\left(\frac{\partial \overline{q}_i}{\partial q_j} \right) \tag{3.70}$$

olduğu için bir $q \to \overline{q}$ nokta dönüşümü altında invaryant kalır.

M, bir yönlenebilir, sınırlı m-boyutlu manifold ve M üzerinde Ω bir m-form olsun. X, M üzerinde bir vektör alanı olsun. O zaman $d\Omega = 0$ ve dolayısıyla Lie türevi için,

$$L_X \Omega = d(\Omega \circ X) \tag{3.71}$$

olur ve sonuç olarak, bu durumda, Stokes teoremi

$$\int_M L_X \Omega = \int_{\partial M} \Omega \circ X \tag{3.72}$$

diverjans teoremini verir (Lang 1999).

M üzerinde Φ_t bir akış ve Ω, $\Phi_{t*}\Omega = \Omega$ sağlayan bir m-form olsun. O zaman $\forall f$ ä $C_0^\infty(M)$ için $\Phi_{-t*}f = g \circ \Phi_t$ olduğu göz önüne alınarak,

$$\Phi_{-t*}(\Omega \cdot f) = \Phi_{-t*}\Omega \cdot \Phi_{-t*}f = \Omega \cdot (g \circ \Phi_t) \tag{3.73}$$

elde edilir. Bu son eşitlik (3.67)'de yazılırsa,

$$\int \Omega \cdot f = \int \Omega \cdot (g \circ \Phi_t) \tag{3.74}$$

eşitliği elde edilir. Bu **akışın sıkıştırılamazlığı** olarak bilinir. Bu ölçülebilir tüm fonksiyonlar için sağlanır. Eğer f, bir A cümlesinin karakteristik fonksiyonu, χ_A ise, o zaman denklem, Ω tarafından ölçülen, cümlenin hacminin zaman-evrimi süresince değişmez kaldığını ifade eder. Hareket böylece sıkıştırılamaz bir akışkan hareketine benzer. Gerçekte, faz uzayı kompakt ise, bir sıkıştırılamaz akış yörüngeleri daima geri kendileri üzerine gönderir (haritalar).

3.4.2 Poincaré Yineleme (Recurrence) Teoremi

$A \subset M, \Phi_t(A) \subset A$ $\forall t$ ä R ve $\Omega(A) = \int \Omega \chi_A < \infty$ olsun. Eğer $\Phi_{t*}\Omega = \Omega$ ise, o zaman herhangi bir ölçülebilir $B \subset A$ altcümlesinin hemen hemen her p noktası için, p'den geçen yörünge sonsuz olarak sık B'ye geri döner.

İspat: $B \subset A$, bir keyfi ölçülebilir cümle, $\Omega(B) > 0$ olsun ve τ ä R^+ bir zaman birimi olsun. $K_n = \bigcup_{j=n}^{\infty} \Phi_{-j\tau}(B), j$ ve n ä Z^+, veya daha fazla zaman birimi sonra B'ye giren noktaların kümesidir. Açık olarak $B \subset K_0 \supset K_1 \supset ... \supset K_{n-1} \supset K_n$ kapsamaları vardır. Keyfi uzun zaman sonra geri dönenen B'nin noktalarının cümlesi B Ç $(\bigcap_{n \geq 0} K_n)$ cümlesidir. Bu, B'ye sonsuz olarak sık geri dönmeyen, fakat karşılık olarak, son bir kez

B ’de olan ve asla B ’ye geri dönmeyen noktaların cümlesinden kopmadır. Bu noktada yapılacak olan ilk cümlenin ölçümünün B ölçümüne eşit olduğunun gösterilmesidir. Varsayıma göre, K_n ’lerin kapsama düzeninden dolayı

$$\Omega(K_n) = \Omega(\Phi_\tau K_n) = \Omega(K_{n-1}) \leq \Omega(A) < \infty$$

dır. $B \text{ Ç } K_0 = B$, $((B \subset K_0))$ olduğu için ve $K_{n-1} \supset K_n$ ve $\Omega(K_n) = \Omega(K_{n-1})$ $\Rightarrow$ $\Omega(K_{n-1} \square K_n) = 0$ olduğu için,

$$\lim_{m\to\infty} \Omega\left(B \text{ Ç} \left(\bigcap_{n\geq 0}^{m} K_n \right)\right) = \Omega(B \text{ Ç } K_0) - \sum_{j=1}^{\infty} \Omega(B \text{ Ç } (K_{i-1} \square K_i)) = \Omega(B)$$

olur. Bundan dolayı keyfi ölçülebilir B cümlesinin ölçümü sonsuz olarak sık B cümlesine geri dönenen kendi noktalarının cümlesinin ölçümüne eşittir.

2.4.3 Schwarzchild Yakalama Teoremi

$\Phi_{t*}\Omega = \Omega$, olsun ve A sonlu ölçüme, $\Omega(A) < \infty$, sahip bir ölçülebilir cümle olsun. O zaman geçmişte çok uzun (sonsuzca uzun) bir zaman A'da olan fakat, gelecekte ebediyen A ’yı terk edecek (A ’dan ayrılacak) A ’nın noktalarının cümlesi sıfır ölçüme sahiptir. Aynısı sonlu bir zamanda A ’ya giren ve ebediyen kalan noktaların cümlesi için de doğrudur.

İspat: $A_\pm = \bigcap_{r¤0} \Phi_\tau (A)$ her zaman A ’da kalacak olan veya her zaman A ’da bulunan noktaların cümlesi olsun. O zaman herhangi bir t zamanı için,

$$\Omega)(A_+) = \Omega(\Phi_{-t}A_+) = \Omega\left(\bigcap_{\tau>-t}\Phi_\tau(A)\right)$$

$$= \Omega\left(\bigcap_{-\infty<\tau<\infty}\Phi_\tau(A)\right) = \Omega(A_+ \text{ Ç } A_-) = \Omega(A_-)$$

olur. Bundan dolayı,

$$\Omega(A_+ \square A_+ \text{ Ç } A_-) = \Omega(A_- \square A_+ \text{ Ç } A_-) = 0$$

olur. Sonsuzluktan gelen ve A'da sınırlanan yörüngeler veya, tersine, onların geçmişte daima A'da bulunan, A'dan ebediyen ayrılanları böylece en fazla A'nın sıfır ölçümlü bir altcümlesini oluşturabilirler. Sistem sabit olmayabilir ve $\Omega(A_+) = 0$ olabilir. Ω'nın değişmezliği (invaryansı) f fonksiyonları için zaman-ortalamasının,

$$f_\infty = \lim_{T\to\infty}\left(\frac{1}{T}\right)\int_0^T dt\tau_1 f \tag{3.75}$$

genel varlığını kurmaya çalışan **ergodik teori** için temeldir, gereksinen C^∞ olmaktan ziyade, sadece ölçülebilir olmaktır. Ω sadece çeşitli konfigürasyonların olasılıklarını ölçmeye yardım eder. Ω'nın bu yorumu Liouville ölçümü için uygundur. Her açık cümle Liouville ölçülebilirdir ve $B \neq 0$'dır ancak ve ancak $\Omega(B) > 0$'dır. Sonuç olarak Teorem (3.4.2) ve (3.4.3) her keyfi açık B cümlesine uygulanabilir.

Yenileme teoremi her türlü kafa karışıklığına neden olabilir, çünkü insanlar ne zaman bir akış kompakt bir cümle üzerinde ölçü koruyansa, bir başlangıç durumu var olmak zorundadır izlenimi edinirler. Bununla beraber, durumlar olasılık ölçümleridir. Ölçümler asla nokta olamazlar, fakat $f > 0$ ve ölçülebilir,

$$\int f\Omega = 1 \tag{3.76}$$

olmak üzere, $f\Omega$ formunda olmalıdır.

Diferansiyel ve integral için önemli formüller Çizelge 3.1'de soldaki formüller sağdaki formüllere karşılık gelecek biçimde verilmiştir.

Çizelge 3.1 Diferansiyel ve integral için önemli formüller

$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega$ (Stokes teoremi)	
$d(\alpha_i \omega_i) = \alpha_i d\omega_i, \alpha_i \in \mathbb{R},\ \omega_i \in E_p$	$\int \alpha_i \omega_i = \alpha_i \int \omega_i$
$d(\omega_1 \wedge \omega_2) = d\omega_1 \wedge \omega_2 + (-1)^p \omega_1 \wedge d\omega_2$	$\partial(M_1 \times M_2) = \partial M_1 \times M_2 \cup M_1 \times (-1)^{\dim M_1} \partial M_2$
$d \circ d\omega = 0$	$\partial\partial M = \emptyset$
$d\Phi_* \omega = \Phi_* d\omega$	$\int_{\Phi(M)} \Phi_* \omega = \int_M \omega$
$\int_M L_X \omega = 0$, eğer $\Phi_t^X M = M$ ise	

3.5 Kodiferansiyel

Aşağıda tanımlanan $\delta : E_p \to E_{p-1}$, gönderimi,

$$\delta = *d*(-1)^{m(p+1)+s}, \quad d = *\delta*(-1)^{m(p+1)+s+1} \tag{3.77}$$

diverjansın bir genellemesidir ($*$ burada **Hodge yıldız operatörü**nü temsil ediyor).

Kodiferansiyel ve dış diferansiyelin aşağıda verilen birleşimi, **Laplace-Beltrami** işlemcisi olarak bilinir:

$$\Delta = \delta d + d \tag{3.78}$$

(3.78) $\delta E_p(M)$, $0 \le p \le m$, üzerinde lineerdir. δ, d'nin adjointidir: α bir (p-1)-form olsun ve β bir p- form olsun. Bu takdirde,

$$d(\alpha \wedge *\beta) = d\alpha \wedge *\beta + (-1)^{p-1}\,\alpha \wedge d * \beta = d\alpha \wedge *\beta - \alpha \wedge *\delta\beta \tag{3.79}$$

elde edilir. Diğer yandan Stokes teoreminden, ω bir kompakt yönlenebilir m-boyutlu manifold üzerinde bir düz (m-1)-form olmak üzere,

$$\int_M d\omega = 0 \tag{3.80}$$

olur. Bu eşitlik göz önüne alınarak, (3.79) ifadesinin her iki yanı integre edilirse,

$$0 = \int_M d\alpha \wedge *\beta - \int_M \alpha \wedge *\delta\beta = \langle d\alpha, \beta \rangle - \langle \alpha, \delta\beta \rangle$$

olur ve buradan

$$\langle d\alpha, \beta \rangle = \langle \alpha, \delta\beta \rangle \tag{3.81}$$

oludğu görülüyor ve bu da δ 'nın, d 'nin adjointi olduğunu kanıtlar.

$g = dx^i \otimes dx^k \eta_{ik}$, $\eta_{ik} = \pm 1$, $i = k$ ise ve aksi takdirde $\eta_{ik} = 0$, olan $E_p\left(\mathrm{R}^m\right)$'nin bir doğal $e^{j_1 \dots j_p}$ bazı ile, f ä $E_0\left(\mathrm{R}^m\right)$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} \delta\left(fe^{j_1 \dots j_p}\right) &= *\left[(-1)^{m(p+1)+s}\, df \wedge *e^{j_1 \dots j_p}\right] = *\left[(-1)^{m(p+1)+s}\, f_{,k}e^k \wedge *e^{j_1 \dots j_p}\right] \\ &= *\left[(-1)^{(m+1)(p+1)+s} \sum_{j=1}^{p} f^{,i_j} * e^{i_1 \dots i_{j-1} i_{j+1} \dots i_p} (-1)^{j+1}\right] \\ &= \sum_{j=1}^{p} f^{,i_j} e^{i_1 \dots i_{j-1} i_{j+1} \dots i_p} (-1)^{j+1} \end{aligned} \tag{3.82a}$$

$$d\delta\left(fe^{j_1 \dots j_p} \right) = \sum_{j=1}^{p} f^{i_j}_{,\, i_0} e^{i_0 i_1 \dots i_{j-1} i_{j+1} \dots i_p} \left(-1 \right)^{j-1} \tag{3.82b}$$

$$\delta d\left(fe^{j_1 \dots j_p} \right) = \sum_{j=1}^{p} f^{i_j}_{,\, i_0} e^{i_0 i_1 \dots i_{j-1} i_{j+1} \dots i_p} \left(-1 \right)^{j} \tag{3.82c}$$

elde edilir. Son iki eşitlik taraf tarafa toplanılırsa, Laplace-Beltrami işlemcisi için,

$$\Delta\left(fe^{j_1 \dots j_p} \right) = \sum_{k=1}^{m} f^{\,k}_{,k} e^{i_1 \dots i_p} ,\ f^{\,k}_{,} \eta_{ik} = f_{,i} \tag{3.83}$$

bulunur. Eğer, özellikle, $p = 1$ ve f_k'lar bir vektör alanının bileşenleri ise, o zaman δ adi diverjans $f^{\,k}_{,k}$ olur ve Δ tek bileşenlere uygulandığı için,

$$\left(\eta^{-1} \right)^{ki} = \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^k} \tag{3.84}$$

işlemcisi olur. Eğer $m = 3$ ve $p = 1$ ise, o zaman $\Delta = \nabla\nabla - \nabla \times \nabla \times$ olur. Kodiferansiyel ve Laplace-Beltrami işlemcisi aşağıda verilen kuralları sağlar:

(a) $dd = dd = 0,\ d\,\mathrm{D} = \mathrm{D}\,d,\ d\,\mathrm{D} = \mathrm{D}\,d$

$$\text{(b) } d^* = (-1)^p *d,\ *d = (-1)^{p+1} d* \tag{3.85}$$

(c) $dd^* = *dd,\ \ *dd = dd^*,\ *\mathrm{D} = \mathrm{D}*$

İspat: $dd = 0$ olduğunu (Kısım 3.2)'de gösterildi ve kodiferansiyel tanımı da kullanılırsa $\delta\delta = 0$ olduğu açık. (3.78) ifadesinden,

$$d(\delta d + d\delta) = d\delta d = (\delta d + d\delta)d = d\delta d \quad \Rightarrow \quad d\,\Delta = \Delta\, d$$
$$\delta(\delta d + d\delta) = \delta d\delta = (\delta d + d\delta)\delta = \delta d\delta \quad \Rightarrow \quad \delta\,\Delta = \Delta\,\delta$$

olur. Kural (b) için, δ 'nın tanımından ve (2.67 (ii)) ifadesinden,

$$\delta * = *d * * (-1)^{m(m-p+1)+s} = *d(-1)^{p(m-p)+s}(-1)^{m(m-p+1)+s} = (-1)^{p} * d$$
$$d * = *\delta * * (-1)^{m(m-p)+1+s} = *\delta(-1)^{p(m-p)+s}(-1)^{m(m-p)+1+s} = (-1)^{p+1} * \delta$$

elde edilir. Kural (c) ve Kural (b) kullanılarak,

$$d\delta * = d(-1)^{p} * d = (-1)^{p}\, d * d = *\delta d$$
$$\delta d * = \delta(-1)^{p+1} * \delta = (-1)^{p+1}\,\delta * \delta = *d\delta$$

bulunur. Bu son iki eşitlikten Δ ve $*$ işlemcilerinin sıra değişmesi bağıntısı bulunabilir:

$$\begin{aligned} *\Delta &= *(\delta d + d\delta) = *\delta d + *d\delta = d\delta * + \delta d * \\ &= (\delta d + d\delta) * = \Delta * \end{aligned}$$

3.6 Afin Bağlantılar

Farklı bir koordinat sisteminde türevi hesaplamak için, bir sözde ortogonal baz kullanmak uygundur. g_{ik} bir simetrik matris olduğu için, baz değişimiyle, özdeğerler olarak yalnız ± 1 ile bir η_{ik} diagonal matrisine dönüştürülebilir. Bu, bir lokal Lorentz dönüşümüne göre e^{i} 'yi belirler:

$$\begin{aligned} &e^{i}(x) \to \Lambda^{i}_{k}(x)e^{k}(x) \\ &\eta_{k\ell}\Lambda^{k}_{m}(x)\Lambda^{\ell}_{n}(x) = \eta_{mn}, \quad \forall x \end{aligned} \tag{3.86}$$

Bir ortogonal baz doğal olmak zorunda değildir ve dolayısıyla bir ortogonal e^i 'nin dış türevi sıfır olmayabilir. Daha genel durum için,

$$de^i = -\omega^i_k \wedge e^k , \; dg_{ik} = \omega_{ik} + \omega_{ki} \qquad \omega_{ik} = g_{ij}\omega^j_k \tag{3.87}$$

afin bağlantıları tanımlanır. E_p 'de tabanların diferansiyelleri için, (3.87)'den,

$$de^{j_1 \ldots j_p} = -\omega^{j_1}{}_j \wedge \omega^{jj_2 \ldots j_p} - \omega^{j_2}{}_j \wedge \omega^{j_1 j \ldots j_p} - \ldots - \omega^{j_p}{}_j \wedge \omega^{j_1 \ldots j_{p-1} j} \tag{3.88a}$$

elde edilir ve benzer şekilde,

$$d * e^{j_1 \ldots j_p} = -\omega^{j_1}{}_j \wedge *\omega^{jj_2 \ldots j_p} - \omega^{j_2}{}_j \wedge *\omega^{j_1 j \ldots j_p} - \ldots - \omega^{j_p}{}_j \wedge *\omega^{j_1 \ldots j_{p-1} j} \tag{3.88b}$$

bulunur. Bu iki bağıntıyı elde etmek için $\omega^i{}_k = \eta^{ij}\omega_{kj}$ olmak üzere,

$$\omega_{k_1}{}^i \varepsilon_{ik_2 \ldots k_m} + \omega_{k_2}{}^i \varepsilon_{k_1 i \ldots k_m} + \ldots \omega_{k_m}{}^i \varepsilon_{k_1 \ldots k_{m-1} i} = 0, \; \forall k_1 = 1, \ldots, m; \ldots ; k_m = 1, \ldots, m \tag{3.89}$$

özdeşliği ele alınsın. Bunu doğrulamak için üç durum düşünülebilir:

(i) Bütün k_i 'ler farklı olsun. O zaman i, ε 'da olmayan k 'lara eşit olmalı ve $\omega_{ik} = -\omega_{ki}$ olmalıdır. η diyagonal olduğu için, $i = k$ iken $\omega_k{}^i = 0$ 'dır.

(ii) k_i 'lerin ikisi eşit olsun, mesela $k_1 = k_2$. O zaman,

$$\omega_{k_1}{}^i \varepsilon_{ik_1 \ldots} + \omega_{k_1}{}^i \varepsilon_{k_1 i \ldots} = 0$$

kalır.

(iii) Üç k_i eşit olsun. O zaman bütün ε 'lar sıfıra eşit olurlar.

Eğer özdeşlik $e^{k_{p+1}\ldots k_m}$ ile çarpılır ve indisler yeniden etiketlendirilirse, o zaman ortogonal bazda,

$$\omega_{k_{p+1}}{}^{i}\varepsilon_{k_1\ldots k_p i k_{p+2}\ldots k_m} e^{k_{p+1}\ldots k_m} = -\omega^{k_{p+1}}{}_{i}\varepsilon_{k_1\ldots k_m} e^{ik_{p+2}\ldots k_m}$$

olur. Genelde,

$$*e^{i_1\ldots i_p} = g^{i_1 j_1}\ldots g^{i_p j_p} e^{j_{p+1}\ldots j_m}\varepsilon_{j_1\ldots j_m}\frac{\sqrt{|\det g|}}{(m-p)!} \tag{3.90}$$

ifadesinden dolayı,

$$\begin{aligned}(m-p)!\,d\left(*e^{i_1\ldots i_p}\right) &= \eta^{j_1k_1}\ldots\eta^{j_pk_p}\varepsilon_{k_1\ldots k_m} de^{k_{p+1}\ldots k_m}\\ &= -\eta^{j_1k_1}\ldots\eta^{j_pk_p}\varepsilon_{k_1\ldots k_m}\left\{\omega^{k_{p+1}}{}_{i}e^{ik_{p+2}\ldots k_m} + \ldots + \omega_i^{k_m} e^{ik_{p+1}\ldots k_{m-1}i}\right\}\\ &= -\eta^{j_1k_1}\ldots\eta^{j_pk_p}\left\{\omega_{k_1}{}^{i}\varepsilon_{ik_2\ldots k_m} + \right.\\ &\left.\ldots + \omega_{k_p}{}^{i}\varepsilon_{k_1\ldots k_{p-1}ik_{p+1}\ldots k_m} e^{k_{p+1}k_{p+2}\ldots k_m}\right\}\\ &= -\omega^{j_1}{}_{i}* e^{ij_2\ldots j_p} - \ldots - \omega^{j_p}{}_{i}* e^{j_1\ldots j_{p-1}i}(m-p)!\end{aligned}$$

bulunur ve bu (3.88) ifadelerini ispatlar.

Afin bağlantılar baz değişimi altında homojen olarak dönüşmezler:

$$\omega^k{}_r \rightarrow A^k{}_s\omega^s{}_j\left(A^{-1}\right)^j{}_r - \left(A^{-1}\right)^j{}_r dA^k{}_j \tag{3.91}$$

İspat: $\overline{e}^{j} = A^{j}{}_{k} e^{k}$ olsun.

$$d\overline{e}^{j} = dA^{j}{}_{r}\left(A^{-1}\right)^{r}{}_{k}\overline{e}^{k} - A^{j}{}_{k}\omega^{k}{}_{r}\left(A^{-1}\right)^{r}{}_{s}\overline{e}^{s} = -\overline{\omega}^{j}\overline{e}^{k}$$
$$\Rightarrow \overline{\omega}^{j} = A^{j}{}_{s}\omega^{s}{}_{r}\left(A^{-1}\right)^{r}{}_{k} - \left(A^{-1}\right)^{s}{}_{k} dA^{j}{}_{s}$$

dir, çünkü bu aynı zamanda ikinci tanımlanan denklem ((3.87)'deki) için de sağlanır:

$$\overline{g} = A^{-1t} g A^{-1}$$
$$\Rightarrow d\overline{g} = A^{-1t} d(g) A^{-1} - A^{-1t} g A^{-1}(dA) A^{-1} - A^{-1t}\left(dA^{t}\right) A^{-1t} g A^{-1}$$
$$= A^{-1t} g\omega A^{-1} - A^{-1t} g A^{-1}(dA) A^{-1} + A^{-1t}(g\omega)^{t} A^{-1}$$
$$- A^{-1t}\left(gA^{-1}dA\right)^{t} A^{-1}$$
$$= \overline{g}\overline{\omega} + \left(\overline{g}\overline{\omega}\right)^{t}$$

Son olarak, iki bölümde incelenen matematiksel formülasyon göz önüne alınarak Maxwell denklemlerinin farklı matematiksel yazımları Çizelge 3.2'de verilmiştir:

Çizelge 3.2 Maxwell denklemlerinin evrimi

Homojen Denklem	Homojen Olmayan Denklem
İlk Form	İlk Form
$\frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0$	$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = \rho$
$\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = -\dot{B}_x$	$\frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} = j_x + \dot{E}_x$
$\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} = -\dot{B}_y$	$\frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x} = j_y + \dot{E}_y$
$\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = -\dot{B}_z$	$\frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} = j_z + \dot{E}_z$
19. Yüz Yılın Sonunda	19. Yüz Yılın Sonunda
$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$	$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho$
$\nabla \times \mathbf{E} = \dot{\mathbf{B}}$	$\nabla \times \mathbf{B} = \mathbf{j} + \dot{\mathbf{E}}$
20. Yüz Yılın Başında	20. Yüz Yılın Başında
$*F^{\alpha\beta}{}_{,\alpha} = 0$	$F^{\alpha\beta}{}_{,\alpha} = j^{\beta}$
20. Yüzyılın Ortasında	20. Yüzyılın Ortasında
$dF = 0$	$\delta F = J$

4. UZAYIN EĞRİLİĞİ VE KOVARYANT TÜREVLER

Kovaryant türev bir vektör yönünde bir tensör alanının değişim oranını tanımlar. İki ayrı yöndeki kovaryant türevler genelde sıra değişmezler ve onların sıra değişme bağıntıları (komütatörleri) uzayın eğriliğini verir.

4.1 Kesitler ve Lif Metrik

B taban manifoldu ve Π projeksiyonuna sahip bir Π vektör demetinin kesiti,

$$\Pi \circ \Phi = \mathbf{1}_B \tag{4.1}$$

biçiminde tanımlanan bir $\Phi : B \to V$ gönderimdir. Kesitlerin cümlesi, $S_0(V)$ ile gösterilir.

Vektör alanları (1-formlara karşı gelirler) $T(B)$ demetlerinde, ($T^*(B)$'ye karşı gelirler) kesittirler: $S_0\left(T^*(B)\right) = \mathrm{T}_1{}^0$. Burada işlenecek konu için B tabanı, uzay-zaman olacak ve $\dim B = 4$ dür. Bu yüzden $T(B)$'de lifler her zaman R^4 olacaklar. Benzer şekilde vektör alanları vektör demetlerinde kesitlerdir (Thirring 1999).

Dejenere olmayan, bilineer (veya kompleks demetler için sekuilineer (sequilinear))

$$S_0(V) \times S_0(V) \to C(B) : (\Phi,\ \Psi) \to \langle \Phi \mid \Psi \rangle \tag{4.2}$$

gönderimine bir **lif metriktir** denir. $S_0(V)$, $C(B)$ üzerinde bir modüldür ve bilineerlik $\forall f, g$ ä $C(B)$ için, $\langle f\Phi \mid g\Psi \rangle = fg\langle \Phi \mid \Psi \rangle$ eşitliğini ifade eder. Burada dejenere olmamak B'nin her noktasında, $\langle \Phi \mid \Psi \rangle = 0, \forall \Phi$ ä $V_0 \quad \Rightarrow \quad \Psi = 0$ olduğunu belirtir.

Bir M Riemannian uzay üzerinde metrik, $T(M)$ demetinde bir lif metrik tanımlar. Bu vektör alanlarının $T^*(M)$ ve tensör alanlarına genişletilmesinden yararlanılarak $T^*(M)$ ve tensör alanlarına genişletilebilir. Herhangi bir M üzerinde $T^*(M)$ üzerinde kanonik 2-form, $T\left(T^*(M)\right)$ demetinde bir lif metrik tanımlar ve lif metrik pozitif olmak zorunda değildir.

Bir vektör uzayının her elemanı $\{b_i\}$ bazına açılabilir, fakat bir tensör alanı için, bir kesitler için bir baz sadece lokal olarak var olabilir ve global olarak yoktur. Bu takdirde, metrik baz üzerinde etkisi ile lokal olarak tanımlanır ve bir simetrik metrik için metriğin dik (normal),

$$\left\langle b_i \mid b_j \right\rangle = \eta_{ij}, \quad \eta_{ij} = \begin{cases} \pm 1 & i = j \text{ için} \\ 0 & i \neq j \text{ için} \end{cases} \tag{4.3}$$

formunu kabul eden bir baz kullanmak iyi bir kestirim olacaktır. Bu koşul, b_i'yi tek olarak belirlemez: Eğer $L^t \eta L = \eta$ ise, $b_i = b_k L^k{}_i$ da bir ortogonal bazdır ve η_{ik}, x ä B'ye bağlı olmamasına rağmen L olabilir.

$\left\langle b_i \mid b_j \right\rangle = \eta_{ij}$ lif metrikli bir vektör demetinde kesitlerin bir lokal bazı $\{b_i\}$ olsun. $L^t \eta L = \eta$ olan $b_i \to b_k L^k{}_i$ dönüşümlerine **ayar dönüşümleri** denir. $L^k{}_i(x)$'ler, her x ä B için aynı ayar grubunu, demetin **sözde** G **ayar grubu**nu biçimlendirirler (kurarlar). Eğer demet trivial hale getirilebilir ve $L : B \to G$ bir sabit gönderimse, o zaman bir global ayar dönüşümünden söz edilebilir. Örneğin,

$$\left\langle \Phi \mid \Phi \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} \left(\varphi^i \right)^2$$

lif metrikli $\Phi = \sum b_i \varphi^i$ alanlarının G ayar grubu $O(n)$ dir (O(n): $MM^t = \mathbf{1}$ olan $n \times n$ matrislerin grubudur). $(n,\ m)$ (η, n pozitif ve m negatif özdeğere sahiptir) işaretli bir pseudo-Riemannian uzayda ise, ayar grubu $O(n,\ m)$ dir. Buradaki durumlarda ayar grubu daima bir lif metriğin değişmezliğinden (invaryansından) gelir.

$B \times V \otimes_\pi \wedge_p T^*(B)$ vektör demeti üzerindeki kesitlere **p-form değerli kesitler** (ve ya **vektör değerli kesitler**) denir, bunların cümlesi S_p ile gösterilir ($\otimes_\pi$, aynı bazlı demetlerin çarpımını gösterir. Onda lifler bireysel (tek tek) liflerdir ve baz genel bazdır. $\wedge_p T^*(B)$, $T^*(B)$'nin p-kere antisimetrik çarpımıdır.). Onlar bir lineer uzaydır ve $\wedge$ dış çarpımı $E_p \times S_q$'yu S_{p+q} içine gönderir (haritalar). Dolayısıyla Φ ä S_p, υ^i ä E_p ve S_0'da b_i bazları ile

$$\Phi = \sum_{i=1} b_i \upsilon^i \tag{4.4}$$

şeklinde yazılabilir. Bir u ä $\mathrm{T}_0^1(B)$ vektör alanı verimiş olsun, o zaman $i_u : S_p \to S_{p-1}$ iç çarpımı,

$$i_u \Phi = \sum_{j=1} b_j i_u \upsilon^j \tag{4.5}$$

şeklinde tanımlanır.

4.2 Kovaryant Türev

Bir $\Phi(x)$ kesitinin türevini tanımlayabilmek için $\Phi(x)$'in $x + dx$'e nasıl paralel olarak taşındığını bilmek gerekir, böylece $\Phi(x + dx) - \Phi(x)$ tanımlanabilir. Bu bağlantı sayesinde sonsuz küçük yüzey üzerinde tanımlanabilir, ve bu paralelizim lokal veya global yüzeylere genişletilebilir.

Kovaryant dış türev, D aşağıda verilen özelliklere sahip bir $S_p \to S_{p+1}$ gönderimdir:

$$\text{(i) } D(\alpha\Phi_1 + \beta\Phi_2) = \alpha D\Phi_1 + \beta D\Phi_2, \ \Phi_i \text{ ä } S_p, \ \alpha \text{ ve } \beta \text{ ä } \mathrm{R}$$

$$\text{(ii) } D(\Phi \wedge \upsilon) = (D\Phi) \wedge \upsilon + (-1)^p \Phi \wedge d\upsilon, \ \Phi \text{ ä } S_p, \ \upsilon \text{ ä } E_q \tag{4.6}$$

Bir b_i ä S_0 bazının,

$$Db_i = b_k \omega^k{}_i, \ \ \omega^k{}_i \text{ ä } E_1 \tag{4.7}$$

kovaraynt dış türevinin açılımında görülen $\omega^k{}_i$, 1-formları **lineer bağlantı** veya **ayar potansiyeli** olarak adlandırılır.

Kural (i) ve (ii) vasıtasıyla D tamamen ω'lar ile belirlenmiştir. Örneğin E_1'deki dx^α doğal bazı ile

$$\Phi = \frac{1}{p!}\sum_{i,(\alpha)} b_i \varphi^{i(\alpha)} dx^{\alpha_1} \wedge ... \wedge dx^{\alpha_p}$$

yazılabilir ve (4.6) kuralları ile,

$$D\Phi = \frac{1}{p!}\sum_{i,(\alpha)} b_i \left(d\varphi^{i(\alpha)} + \omega^i{}_k \varphi^{k(\alpha)} \right) \wedge dx^{\alpha_1} \wedge ... \wedge dx^{\alpha_p} \tag{4.8}$$

olur. b_i, global olmak zorunda olmadığı için, D global olarak var olmasına rağmen, ω da global olarak tanımlanamaz. ω, $S_1(L(F))$'nin, yani lifler gibi, liflerin F, lineer dönüşümleriyle b_i'nin tanım bölgesi üzerindeki demetin bir 1-form değerli kesitinin elemanı olarak düşünülebilir. Bu bağlamda,

$$D = d + \omega \wedge \tag{4.9}$$

kısaltması kullanılabilir. Bununla beraber, ω'lar F'de bir baz değişimi altında $S_1(L(F))$nin elemanları gibi dönüşmezler. Ayar dönüşümleri altında ayar potansiyelinin dönüşümü şu şekilde olur: Bir lokal $b_i \to bL$, L ä $S_0(L(F))$ baz dönüşümü altında ω,

$$\omega \to L^{-1}\omega L + L^{-1}dL \tag{4.10}$$

biçiminde dönüşür. dL ä $S_1(L(F))$, eğer baz dönüşümü $b_k \to \overline{b}_k = b_i L^i{}_k$ ise, $dL^i{}_k$ elemanlı matris olarak anlaşılmalıdır. Dolayısıyla, indis notasyonu ile

$$\overline{\omega}^i{}_k = \left(L^{-1}\right)^i{}_j \, \omega^j{}_l L^l{}_k + \left(L^{-1}\right)^i{}_j \, dL^j{}_k \tag{4.11}$$

olur. Dönüşüm kuralı (4.6) kurallarından çıkar:

$$\begin{aligned} &\overline{b} = bL \\ &\Rightarrow \quad D\overline{b} = (Dd)L + bDL = b\omega L + bdL \\ &\qquad\quad = bLL^{-1}\omega L + bLL^{-1}dL = \overline{b}\left(L^{-1}\omega L + L^{-1}dL\right) = \overline{b}\,\overline{\omega} \end{aligned} \tag{4.12}$$

$\Phi = \sum b_i \varphi^i \in S_0$ 'ın φ^i bileşenlerinin bakış açısından bakılarak, $D\Phi$ 'nin $d\varphi^i + \omega^i{}_k \varphi^k$ bileşenlerinin $\varphi^i \to \bar{\varphi}^i = \left(L^{-1}\right)^i{}_k \varphi^k$ ayar dönüşümü altında φ^i 'ler gibi dönüştüğü görülüyor. Homojen olmayan $\left(dL^{-1}\right)\Phi$ terimi,

$$L^{-1}L = 1 \quad \Rightarrow \quad dL^{-1}L = -L^{-1}dL \tag{4.13}$$

olduğu için ω dönüşümünde karşı gelen terim tarafından yok edilir.

Bir $u \in \mathrm{T}_0^1$ vektör alanı verilsin, kovaryant Lie türevi (3.22) Lie türevi ifadesine benzer biçimde

$$\mathrm{L}_u = i_u \circ D + D \circ i_u \tag{4.14}$$

eşitliği ile tanımlanır. Bu S_p 'yi S_p 'nin içine gönderir (haritalar). D ve i işlemcileri lineer oldukları için L_u, kovaryant Lie türevi de lineer bir işlemcidir. p=0 özel durumuna kovaryant türev denir ve

$$D_u = i_u D \tag{4.15}$$

ile gösterilir ve aşağıda verilen kuralları sağlar. Bir M manifoldu üzerinde u, υ ve ω vektör alanları ve f ve g fonksiyonlar olsunlar,

(a) $D_u (u + w) = D_u u + D_u w$

(b) $D_{fu+gu} w = f D_u w + g D_u w$

(c) $D_u (f w) = df u + f D_u u$ (4.16)

(d) $D_u u - D_u u = [u,\ u]$

Nicelikler daha kesin bir biçimde, $\varphi = \sum_i b_i \varphi^i$ ä S_0 olmak üzere,

$$\mathrm{L}_u \Phi = D_u \Phi = \sum_i b_i \left(\left(d\varphi^i \mid u \right) + \left(\omega^i{}_k \mid u \right) \varphi^k \right) \tag{4.17}$$

şeklinde ifade edilebilir. L_u için olduğu gibi, L_u için de Leibniz kuralı,

$$\mathrm{L}_u \left(\upsilon \wedge \Phi \right) = \left(\mathrm{L}_u \upsilon \right) \wedge \Phi + \upsilon \wedge \mathrm{L}_u \Phi$$

sağlanır. D_u için $D_{fu} = f D_u$, $\forall f$ ä E_0 olması dışında genellikle $\mathrm{L}_{fu} \neq f \mathrm{L}_u$ geçerlidir.

$\mathrm{T}^r_m (M)$'nin kuruluşu göz önüne alınarak V, kendi duali, V^* ve

$$V^r_s = \overbrace{V \underset{\pi}{\otimes} V \underset{\pi}{\otimes} \ldots \underset{\pi}{\otimes} V}^{r} \underset{\pi}{\otimes} \overbrace{V^* \underset{\pi}{\otimes} V^* \underset{\pi}{\otimes} \ldots \underset{\pi}{\otimes} V^*}^{s}$$

ile ilişkilendirilebilir. Diferansiyel işlemciler D ve dolayısıyla L, $p = 0$, için Leibniz kuralı,

$$D\left(\Phi_1 \otimes \Phi_2 \right) = \left(D\Phi_1 \right) \otimes \Phi_2 + \Phi_1 \otimes \left(D\Phi_2 \right), \ \Phi_i \text{ ä } S_0 \left(V \right) \tag{4.18}$$

ve gönderimlerin değişmezliği (invaryansı),

$$\begin{gathered} S_0\left(V^*\right)\times S_0(V)\to E_0(B)\ : \\ D(\Psi\mid\Phi)=(D\Psi\mid\Phi)+(\Psi\mid D\Phi),\ \Psi \text{ ä } S_0\left(V^*\right),\ \Phi \text{ ä } S_0(V) \end{gathered} \tag{4.19}$$

biçiminde tanımlanarak $S_p\left(V_s^r\right)$ kesitleri üzerine taşınabilir. Skalerler üzerinde $D=d$ olduğu için,

$$D(\Psi\mid\Phi)=d(\Psi\mid\Phi)$$

dir. Özellikle, b^{*j}, $\left(b^{*j}\mid b_k\right)=\delta^j{}_k$ dual bazı için $d\delta^j{}_k=0$ olduğu göz önüne alınarak,

$$\begin{aligned} 0=d\left(b^{*j}\mid b_k\right)=D\left(b^{*j}\mid b_k\right)&=\left(Db^{*j}\mid b_k\right)+\left(b^{*j}\mid Db_k\right) \\ &=\left(Db^{*j}\mid b_k\right)+\left(b^{*j}\mid \omega^i{}_k b_i\right)=\left(Db^{*j}\mid b_k\right)+\left(\omega^j{}_i b^{*i}\mid b_k\right) \end{aligned}$$

elde edilir ve buradan,

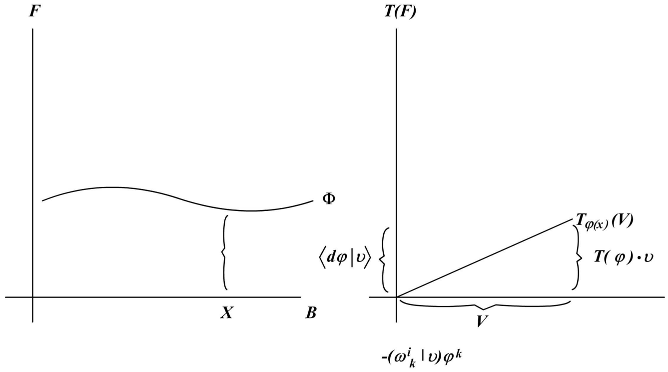
$$Db^{*j}=-\omega^j{}_i b^{*i} \tag{4.20}$$

sonucu çıkar.

Bir $B\to V$ gönderim olarak Φ ä $S_0(V)$ kesiti aynı zamanda $T(B)\xrightarrow{T(\Phi)}T(V)$ gönderimine neden olur. Bir baza ilişkin olarak bu, şu şekilde ifade edilebilir:

$$\begin{gathered} \Phi\ :\ x\to\left(x,\ \varphi^i(x)\right) \\ T(\Phi)\ :\ (x,\ \upsilon)\to\left(x,\ \varphi^i(x);\upsilon,\ \upsilon^\alpha\frac{\partial\varphi^i}{\partial x^\alpha}\right) \end{gathered} \tag{4.21}$$

Eğer F ve $T(F)$'i belirlenirse, bu şematik olarak (Şekil 4.1)'deki gibi olur.



Şekil 4.1 Kovaryant türevin geometrik anlatımı

$D_\upsilon(\Phi)$ için istenilen, B yönünde gidilirken Φ'nin dik kısmının F yönünde değişimidir. Bununla beraber, $T(V)$'de tercih edilen yatay yön yoktur. Dik yönde bileşenler için tercih edilen bir yatay yön gerekir. Bu yön, bir

$$(x,\upsilon) \to \left(x,\varphi^i(x);\upsilon,-\left(\omega^i{}_k \mid \upsilon\right)\varphi^k\right)$$

gönderimi olarak düşünülebilen $-\omega^i{}_k$, 1-formları tarafından tanımlanır. İki gönderim arasındaki fark olarak $D_\upsilon(\Phi)$, ω tarafından tayin edilen yatay yöne göre $T(\Phi)\upsilon$ değişimini hesaplar (Şekil 3.2). Böylece, $D_\upsilon(\Phi)$'ye υ yönünde ilerlerken Φ_x ä F'nin değişimi olarak bakılmalıdır çünkü, bileşenler $\left(d\varphi^i \mid \upsilon\right)$ ile değişirler ve baz $\left(\omega^i{}_k \mid \upsilon\right)$ tarafından döndürülür.

$$D_\upsilon\Phi = 0 \text{ veya } D\Phi = 0, \ \forall\upsilon \tag{4.22}$$

denklemini sağlayan kesitlerin dikey bileşenleri sabittir ve **kovaryant olarak sabit kesitler** olarak adlandırılırlar ve tek olarak belirlidirler. Bu ifade aynı zamanda B

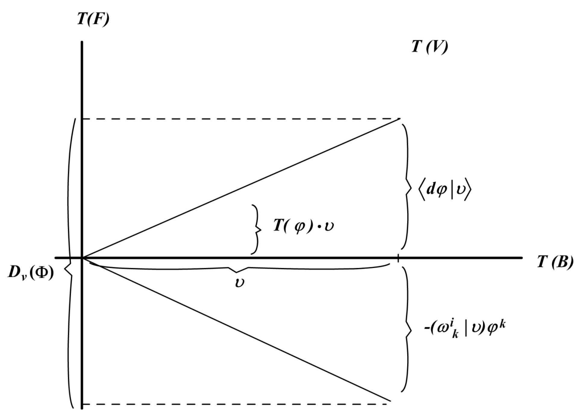
yönünde **paralel taşıma** olarak ifade edilir. Eğer kovaryant olarak sabit bir baz varsa, ω'lar sıfıra eşit olurlar ve kovaryant olarak sabit vektörler sabit bileşenlerle birlikte tek olarak belirlenirler. Bu takdirde D ile sonsuz küçük ölçekte tanımlanan paralelizim fikri bu bazın bölgesine genişletilebilir. Eğer manifold bir g metriğine sahipse, paralel taşıma metriğe etki etmez ve iki vektör arasıdaki açı, taşıma sonrasında yine aynı kalır. Böylece büyük çemberler boyunca paralel öteleme onlarla olan açıyı sabit tutarak sağlanır. Açık olarak $D\Phi = 0$ için bir koşul,

$$DD\Phi = 0$$

dır. d'den farklı olarak D'nin karesi özdeş olarak sıfır değildir. Bu, $D \circ D$'nin uygulanılan bir kesitin türevine bağlı olmadığını gösterir. (4.6) kuralları kullanılarak,

$$\begin{aligned} DD(f \wedge \Phi) &= D\left(df \wedge \Phi + (-1)^q f \wedge D\Phi\right) \\ &= ddf \wedge \Phi + (-1)^{q+1} df \wedge D\Phi + (-1)^q df \wedge D\Phi + f \wedge DD\Phi \\ &= f \wedge DD\Phi, \quad \forall f \text{ ä } E_q, \Phi \text{ ä } S_p \end{aligned} \tag{4.23}$$

eşitliği elde edilir. Böylece $DD\Phi$ ä S_{p+2}, Φ ile lineer olarak ifade edilebilir ve böylece $L(F)$'deki değerler ile bir 2-form tanımlar.



Şekil 4.2 D_υ işlemcisinin geometrik anlatımı

Ω ä $S_2\left(L(F)\right)$ **eğrilik formu**,

$$DD\Phi = \Omega \wedge \Phi, \quad \Phi \text{ ä } S_p \tag{4.24}$$

ile tanımlanır. (4.24) eşitliği,

$$DDb_i\varphi^i = b_k\Omega^k{}_i\varphi^i \tag{4.25}$$

olduğunu gösterdiği için Ω, bir baz üzerinde, $\Omega b_i = b_k\Omega^k{}_i$ etkisiyle tanımlanır:

$$DDb_i = D\left(b_k\omega^k{}_i\right) = b_k d\omega^k{}_i + b_k\omega^k{}_j \wedge \omega^j{}_i = b_k\Omega^k{}_i \tag{4.26}$$

elde edilir. Böylece **Cartan ikinci yapı denklemi**,

$$\Omega^i{}_k = d\omega^i{}_k + \omega^i{}_j \wedge \omega^j{}_k \tag{4.27}$$

bulunur (uzay-zaman tanjant demetinde Ω için R kullanılacak). ω ä $S_1\left(L(F)\right)$, düşünülerek bu eşitlik daha kompakt olarak

$$\Omega = d\omega + \omega \wedge \omega \tag{4.28}$$

şeklinde yazılabilir. Matris çarpımı sıra değişmediği için, metrik değerli 1-formlar için $\omega \wedge \upsilon \neq -\upsilon \wedge \omega$ olur ve $\omega \wedge \omega$ sıfıra eşit olmak zorunda değildir.

(4.11) bağlantıları için $\mathrm{A}(2)$ Abelian ayar gruplu $V = \mathrm{R}^4 \times \mathrm{R}^2$'de $A \wedge A = 0$ olduğu için $(\omega \wedge \omega)^i{}_k = A \wedge A\varepsilon^i{}_j\varepsilon^j{}_k$ sıfıra eşit olur ve

$$dA\varepsilon^i{}_k = F\varepsilon^i{}_k \left(\varepsilon^i{}_k = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right) \tag{4.29}$$

olur. Böylece elektromagnetik alan $F = dA$ bağlantı eğriliğidir. (4.24) eşitliğinden dolayı $b_i \to \overline{b_i} = b_k L^k{}_i$ baz değişimi ile,

$$DD\overline{b_i} = b_j \Omega^j{}_k L^k{}_i = \overline{b_k} \Omega^k{}_i \tag{4.30}$$

olur. Çünkü,

$$\overline{b_k} \Omega^k{}_i = b_j \Omega^j{}_k L^k{}_i = b_r L^r{}_j \left(L^{-1} \right)^j{}_s \Omega^s{}_k L^k{}_i = \overline{b_j} \overline{\Omega}^j_i$$

olur ve

$$\overline{\Omega}^j{}_i = \left(L^{-1} \right)^j{}_m \Omega^m{}_k L^k{}_i \tag{4.31}$$

olarak dönüşür. Böylece Ω, ω'nın tersine baz değişimi altında $S_2\left(L\left(F \right) \right)$'nin bir elemanının dönüşmesi gerektiği gibi dönüşür. (4.10) dönüşüm kuralında bulunan homojen olmayan terimler, $d\omega + \omega \wedge \omega$ kombinasyonunda yok olur:

$$\begin{aligned}
\overline{\omega} &= L^{-1}\omega L + L^{-1}dL, \\
d\overline{\omega} + \overline{\omega} \wedge \overline{\omega} &= \left(dL^{-1} \right) \wedge \omega L + L^{-1}d\omega L - L^{-1}\omega dL + \left(dL^{-1} \right) \wedge dL \\
&\quad + \left(L^{-1}\omega L + L^{-1}dL \right) \wedge \left(L^{-1}\omega L + L^{-1}dL \right) \\
&= -L^{-1}dL \wedge \omega L + L^{-1}d\omega L - L^{-1}\omega \wedge dL - L^{-1}dL \wedge dL \\
&\quad + L^{-1}\omega L \wedge L^{-1}\omega L + L^{-1}\omega \wedge dL + L^{-1}dL \wedge L^{-1}\omega L + L^{-1}dL \wedge L^{-1}dL \\
&= L^{-1}d\omega L + L^{-1}\omega L \wedge L^{-1}\omega L - L^{-1}dL \wedge \omega L + L^{-1}dL \wedge L^{-1}\omega L \\
&= L^{-1}d\omega L + L^{-1}\omega L \wedge L^{-1}\omega L = L^{-1}\left(d\omega + \omega \wedge \omega \right) L
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow d\overline{\omega} + \overline{\omega} \wedge \overline{\omega} = L^{-1}\left(d\omega + \omega \wedge \omega \right) L \tag{4.32}$$

bulunur. Yönlü türev için Ω 'nın anlamı anlamak için, Φ ä S_0 için

$$\left(i_\upsilon i_u DD \right)\Phi = i_u D i_\upsilon D\Phi - i_\upsilon D i_u D\Phi - D_{[u,\,\upsilon]}\Phi \tag{4.33}$$

eşitliği kullanılmalıdır. Bu ifadeyi kanıtalamak için ω ä S_1, daha genel durumu göz önüne alınsın. $\omega = b\nu$, b ä S_0, ν ä E_1, yazılabilir. Lineerlikten dolayı bağıntıyı bir bir terim için göstermek yeterlidir. (3.36) bağıntısından yararlanılarak,

$$i_\upsilon i_u d\nu = i_u d\left(\nu \mid \upsilon \right) - i_\upsilon d\left(\nu \mid u \right) - i_{[u,\,\upsilon]}\nu, \;\; \nu \text{ ä } E_1 \tag{4.34}$$

yazılır (bu eşitlik (3.36) eşitlliğinin i iç çarpımı kullanılarak yazılmasıdır). Bu eşitlikte $\omega = b\nu$ ve d yerine D yazılırsa,

$$\begin{aligned} i_\upsilon i_u D\omega &= \left(i_u Db \right)\left(i_\upsilon \nu \right) - \left(i_\upsilon Db \right)\left(i_u \nu \right) \\ &\quad + b\left(i_u d\left(i_\upsilon \nu \right) - i_\upsilon d\left(i_u \nu \right) - i_{[u,\,\upsilon]}\nu \right) \end{aligned}$$

olur. Bu,

$$i_u D\left(\omega \mid \upsilon \right) - i_\upsilon D\left(\omega \mid u \right) - i_{[u,\,\upsilon]}\omega = i_u D\left(b i_\upsilon \nu \right) - i_\upsilon D\left(b i_u \nu \right) - b i_{[u,\,\upsilon]}\nu$$

ifadesine eşittir ve ispatı tamamlar. (4.33) bağıntısı, eğer iki boyutlu yüzeyleri biçimlendirecek biçimde $[u,\ \upsilon] = 0$ olan iki vektör alanı varsa, o zaman

$$\left(D_u D_\upsilon - D_\upsilon D_u \right)\Phi = \left(i_\upsilon i_u \Omega \right)\Phi \tag{4.35}$$

olduğunu belirtir. Böylece Ω ilkin u yönünde ve sonra υ yönünde ilerleyerek ve ikinci olarak ters sırayla uygulanarak aynı noktaya geri (sonsuz küçük yakınına) gelmek suretiyle Φ 'nin kovaryant değişimleri arasındaki farkı ölçer.

Kovaryant olarak sabit kesitler için $D\Phi = 0$ 'dır. Bu $\Phi = \sum_i b_i \varphi^i$ için açık olarak yazılırsa,

$$0 = D\Phi = \sum_i b_i \left(\omega^i{}_k \varphi^k + d\varphi^i \right)$$

elde edilir. Burada,

$$\omega^i{}_k \varphi^k + d\varphi^i = 0 \tag{4.36}$$

olmalıdır. Bu ifade ve (4.26) ifadesi kullanılarak,

$$\begin{aligned} 0 &= d\left(\omega^i{}_k \varphi^k \right) = \left(\left(d\omega^i{}_k \varphi^k \right) + \omega^i{}_k d\varphi^k \right) \\ &= \left(d\omega^i{}_k + \omega^i{}_j \wedge \omega^j{}_k \right) \varphi^k = \Omega^i{}_k \varphi^k \end{aligned} \tag{4.37}$$

bulunur. Böylece kovaryant olarak sabit bir kesit her x ä B noktasında $\Omega^i{}_k(x)$ matrisinin sıfır özdeğerli bir özvektörüdür. Eğer kovaryant olarak sabit bir baz varsa, o zaman baz üzerinde etkisi sıfır olduğu için, Ω sıfıra eşit olmalıdır. Bu aynı zamanda böyle bir bazda $\omega = 0$ ve dolayısıyla $\Omega = 0$ durumundan da çıkar ve baz değişimi altında Ω homojen olarak dönüşür. $\Omega = 0$ (4.36) denklem sistemi için integrallenebilme koşulu,

$$d\omega^i{}_k + \omega^i{}_j \wedge \omega^j{}_k = 0 \tag{4.38}$$

ifade eder.

Aşağıda verilen iki eşdeğer koşuldan biri sağlanırsa, bir vektör demetinin bağlantısı lokal olarak **düzdür** denir:

(i) $\Omega = 0$

(ii) Kovaryant olarak sabit bir baz (lokal) vardır.

Eğer demet paralel hale getirilebilirse, yani bir global baz varsa, o zaman bu bazı kovaryant olarak sabit ifade etmekle bir düz bağlantı elde edilir. Bununla beraber, düz olma bir lokal bir özelliktir. Düz olma manifoldun içsel bir özelliğidir.

Kovaryant türev D, $S_p(L(F))$'ye genişletilebilir ((4.18) ve (4.19) ifadeleri) ve bunun Ω'y uygulanması ile

$$D\Omega = 0 \tag{4.39}$$

Bianchi özdeşliği elde edilir. $\Omega = b_k \Omega^k{}_i b^{*i}$'nin (4.26) bileşenleri ve (4.20) ifadesi kullanılarak,

$$\begin{aligned}
0 = D\Omega &= D\left(b_k \Omega^k{}_i b^{*i} \right) \\
&= (Db_k)\Omega^k{}_i b^{*i} + b_k \left(D\Omega^k{}_i \right) b^{*i} + b_k \Omega^k{}_i \left(Db^{*i} \right) \\
&= b_r \omega^r{}_k \Omega^k{}_j b^{*j} + b_r d\Omega^r{}_j b^{*j} - b_r \Omega^r{}_i \omega^i{}_j b^{*j} \\
&= b_r \left(\omega^r{}_k \Omega^k{}_j + d\Omega^r{}_j - \Omega^r{}_i \omega^i{}_j \right) b^{*j}
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow d\Omega^i{}_j = -\omega^i{}_k \Omega^k{}_j + \Omega^i{}_k \omega^k{}_j \tag{4.40}$$

veya

$$
\begin{aligned}
d\left(d\omega^i{}_j + \omega^i{}_s \wedge \omega^s{}_j\right) &= d\omega^i{}_s \wedge \omega^s{}_j - \omega^i{}_s \wedge d\omega^s{}_j \\
&= \left(d\omega^i{}_s \wedge \omega^s{}_j + \omega^i{}_k \wedge \omega^k{}_s \wedge \omega^s{}_j\right) - \omega^i{}_k \wedge \omega^k{}_s \wedge \omega^s{}_j \\
&\quad -\left(\omega^i{}_s \wedge d\omega^s{}_j + \omega^i{}_s \wedge \omega^s{}_k \wedge \omega^k{}_j\right) + \omega^i{}_s \wedge \omega^s{}_k \wedge \omega^k{}_j \\
&= \Omega^i{}_s \wedge \omega^s{}_j - \omega^i{}_s \wedge \Omega^s{}_j
\end{aligned}
$$

elde edilir, kısaca,

$$
d\Omega^i{}_j = -\omega^i{}_k \wedge \Omega^k{}_j + \Omega^i{}_k \wedge \omega^k{}_j \tag{4.41}
$$

olarak Bianchi özdeşliği bileşenleriyle elde edilir. $\Omega = D\omega$ olarak ve böylece ω üzerinde $D^2 = 0$ düşünülebilir. Bununla beraber, Ω, ω’nın kovaryant türevi olmasına rağmen, Ω baz değişimi altında $L(F)$ gibi dönüşür anlamında, ω baz değişimi altında $S_1(L(F))$ gibi dönüşmediği için, (4.39)'da kullanılan D tek değildir. Yukarıdaki gibi bileşenleri ile yazılırsa,

$$
(D\omega)^i{}_j = d\omega^i{}_j + 2\omega^i{}_k\omega^k{}_j \tag{4.42}
$$

elde edilir ve 2 çarpanı ile $\Omega^i{}_j$’den farklı olduğu görülür.

Lif metrik, F’de bir skaler çarpım tanımlar ve böylece $S_p(V)\times S_0(V)$’yi $E_p(B)$’nin içine gönderir (haritalar). Bağlantıların bu yapıyı koruması istenir. $\langle | \rangle$ lif metrikli bir V vektör demetinde,

$$
\begin{aligned}
D\langle \Psi \mid \Phi \rangle &= d\langle \Psi \mid \Phi \rangle \\
&= \langle D\Psi \mid \Phi \rangle + (-1)^p \langle \Psi \mid D\Phi \rangle, \ \ \Psi \text{ ä } S_p(V), \ \Phi \text{ ä } S_0(V)
\end{aligned} \tag{4.43}
$$

olması beklenir. Böyle bağlantılara **metrik bağlantı**lar denir. ω’lar için bu,

$$\begin{aligned} 0 = d\eta_{ik} &= d\langle e_i \mid e_k \rangle = \langle De_i \mid e_k \rangle + \langle e_i \mid De_k \rangle \\ &= \omega^j{}_i \langle e_j \mid e_k \rangle + \langle e_i \mid e_j \rangle \omega^j{}_k = \omega^j{}_i \eta_{jk} + \omega^j{}_k \eta_{ij} \end{aligned} \tag{4.44}$$

koşulunu yükler. Böylece eğer η'lar simetrik ise $\omega_{ik} = \omega^j{}_i \eta_{ij}$ antisimetrik olmak zorundadır:

$$\omega_{ik} = -\omega_{ki} \tag{4.45}$$

Bu $\omega_{ik}(x)$'in $L(F)$'nin bir keyfi elemanı olmayacağını, fakat ayar grubunun Lie cebrine ait olması gerektiğini belirtir. $\langle e_j \mid e_k \rangle = g_{ik}$'ya sahip bir keyfi baz için (4.44) denklemi,

$$dg_{ik} = \omega_{ik} + \omega_{ki} \tag{4.46}$$

ya genellenir.

Bir Riemannian uzayın tanjant demetinde $\eta_{ik} = \delta_{ik}$ ve böylece $\omega^i{}_k = -\omega^k{}_i$'dır. Pseudo-Riemannian uzay-zaman için

$$\eta_{ik} = \begin{cases} -1 & \text{eğer } i = k = 0 \text{ ise} \\ 1 & \text{eğer } i = k = 1,2,3 \text{ ise} \\ 0 & \text{diğer durumlar} \end{cases} \tag{4.47}$$

olur. Bundan dolayı

$$\omega^i{}_k = -\omega^k{}_i,\ i,k = 1,2,3;\ \omega^i{}_0 = \omega^0{}_i;\ \omega^i{}_i = 0 \tag{4.48}$$

dır.

Bir Riemannian uzayın $T(M)$ tanjant demetinde eğrilik R olsun. Bu durumda $S_0(T(M))$ kesitleri $\mathrm{T}_0^1(M)$ vektör alanları ile aynıdır. $\mathrm{T}_0^1(M)$ vektör alanları E_1'i E_0'ın içine resmettiği için $S_1(T(M))$'yi $S_0(T(M)) \equiv \mathrm{T}_0^1(M)$'nin içine resmeder.

Eğer $\mathrm{T}_0^1(M)$'de b_j'ler bir lokal baz ve e^i'ler dual baz, $\left(e^i \mid b_j\right) = \delta^i{}_j$ teşkil ediyorlarsa, o zaman

$$\theta = \sum_i b_i \otimes e^i \text{ ä } S_1(T(M)) \tag{4.49}$$

soldering form ve

$$T = D\theta \tag{4.50}$$

burulma (torsiyon) adını alırlar. $T = 0$, metrik bağlantısına **sıfır burulmalı bağlantı** veya **Levi-Civita bağlantıları** denir.

$$D\theta = \sum_i b_i \left(de^i + \omega^i{}_k \wedge e^k\right) \tag{4.51}$$

yazılabilir ve sıfır burulmalı bir bağlantılar için

$$de^i = -\omega^i{}_k \wedge e^k \tag{4.52}$$

olur. e^i, $\mathrm{T}_1^0(M)$'de bir baz olsun. $T = 0$ $(de^j = -\omega^j{}_k e^k)$ ise aşağıda verilen bağıntılar sağlanır:

$$(D_X u \mid Y) - (D_Y u \mid X) = (du \mid X \otimes Y),\ u \text{ ä } \mathrm{T}_1^0(M) \tag{4.53}$$

veya

$$D_X Y - D_Y X = [X,\ Y],\ \ X,Y \text{ ä } \mathrm{T}_0^1(M) \tag{4.54}$$

dır. Bunlar gösterilebilir.

$$\begin{aligned}
\Leftarrow \left(de^j \mid X \otimes Y \right) &= \left(D_X e^j \mid Y \right) - \left(D_Y e^j \mid X \right) \\
&= -\left(\omega^j{}_k \mid X \right)\left(e^k \mid Y \right) + \left(\omega^j{}_k \mid Y \right)\left(e^k \mid X \right) \\
&= -\left(\omega^j{}_k \wedge e^k \mid X \otimes Y \right) \Rightarrow de^j = -\omega^j{}_k e^k
\end{aligned}$$

Eğer $\Rightarrow$ Eğer $u = fe,\ f$ ä E_0, ise o zaman,

$du = df \wedge e + fde$ ve $D_X u = i_X\,(df \wedge e + fDe)$

olur. Bu ifadeden yararlanarak,

$$\begin{array}{l}
\quad (D_X u \mid Y) = (i_X\,(df \wedge e + fDe) \mid Y) \\
\underline{-((D_Y u \mid X) = (i_Y\,(df \wedge e + fDe) \mid X))} \\
(D_X u \mid Y) - (D_Y u \mid X) = (du \mid X \otimes Y)
\end{array}$$

olarak (4.53) elde edilir. (3.36) denkleminden,

$$(du \mid X \otimes\ Y) = L_X\,(u \mid Y) - L_Y\,(u \mid X) - (u \mid [X,\ Y])$$

olduğu biliniyor, diğer yandan,

$$L_X\,(u \mid Y) = D_X\,(u \mid Y) = (D_X u \mid Y) + (u \mid D_X Y)$$

dir. Böylece (4.53) denklemi de kullanılarak,

$$
\begin{aligned}
(du \mid X \otimes Y) &= (D_X u \mid Y) - (D_Y u \mid X) \\
&= L_X(u \mid Y) - L_Y(u \mid X) - (u \mid [X, Y]) \\
&= (D_X u \mid Y) - (D_Y u \mid X) + (u \mid D_X Y) \\
&\quad -(u \mid D_Y X) - (u \mid [X, Y])
\end{aligned}
$$

bulunur. Eşitliğin sağlanması için

$$D_X Y - D_Y X = [X, Y]$$

olmalıdır. Bu da (4.54)'dür.

Düz bir Riemannian uzayda kovaryant olarak sabit bazda $\omega^i{}_k = 0$'dır. Eğer $T = 0$ ise, o zaman (4.52)'den $de^j = 0$ olur veya $e^j = dx^j$ olur. Bu yüzden $R = T = 0$ durumu E_1'de bir doğal, kovaryant olarak sabit bazın varlığına işaret eder.

$R^2 \setminus \{0\}$ polar koordinatlarında; $e^1 = dr$, $e^2 = rd\varphi$ ortogonal bazında metrik,

$$g = dr^2 + r^2 d\varphi^2 = e^1 \otimes e^1 + e^2 \otimes e^2$$

dir. $de^1 = 0$ ve $de^2 = dr \wedge d\varphi$'den g'yi koruyan bir burulmasız (sıfır burulmalı) bağlantı için,

$$\omega_{12} = -\omega_{21} = -d\varphi = \frac{e^2}{r}, \ \omega_{11} = \omega_{22} = 0$$

bulunur. Dolayısıyla.

$R^i{}_k = d\omega^i{}_k + \omega^i{}_j \wedge \omega^j{}_k = 0$

olur. Ortogonal bazların kovaryant olarak sabit olduğu bir bağlantı ile, dual baz $b_1 = \partial r,\ b_2 = r^{-1}\partial\varphi$ oldun burulma, $b_2 de^2 = r^{-1}\partial\varphi \otimes dr \wedge d\varphi$ olur.

4.3 Afin Bağlantılar ve Türev İşlemcilerinin Sıra Değişme Bağıntıları

Afin bağlantılar doğal bazlarda ve ortogonal bazlarada ayrı ayrı hesap edilebilir:

(a) $be^j = dq^j$ doğal bazında: Γ_{ijk} ä T_0^0 **Christoffel simgeleri,** bazda ω_{ij} 'nin

$$\omega_{ij} = \Gamma_{ijk} dq^k \tag{4.55}$$

ayrışımından ortaya çıkar. Bu durumda,

$$de^i = 0 = \Gamma_{ijk} dq^j \wedge dq^k$$

olduğu için, bunlar j ve k 'ya göre simetriktirler. Bu bazda Christoffel simgeleri aşağıda verilen bağıntılar ile belirlenirler:

$$dg_{ij} = \omega_{ij} + \omega_{ji} \equiv \Gamma_{ijk} dq^k + \Gamma_{jik} dq^k \tag{4.56}$$

$$dg_{ij} = \frac{\partial g_{ij}}{\partial q^k} dq^k$$

olduğu için,

$$g_{ij,k} \equiv \frac{\partial g_{ij}}{\partial q^k} = \Gamma_{ijk} + \Gamma_{kij} \tag{4.57}$$

bulunur ve bu simgeler j ve k 'ya göre simetriktirler:

$$\begin{aligned} 0 = de^i &= -\omega^i{}_k \wedge e^k = -g^{ij}\omega_{jk} \wedge e^k = -g^{ij}\Gamma_{jkm} e^k \wedge e^m \\ &= \frac{1}{2} g^{ij} \left(\Gamma_{jkm} - \Gamma_{jmk} \right) e^k \wedge e^m \end{aligned}$$

olur ve buradan

$$\Gamma_{jkm} = \Gamma_{jmk} \tag{4.58}$$

elde edilir. Bu özellik ve (4.57) denklemi kullanılarak,

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{G}_{kjl} + \mathrm{G}_{jkl} & = & g_{jk,l} \\ \mathrm{G}_{jlk} + \mathrm{G}_{ljk} & = & g_{lj,k} \\ - \mathrm{G}_{lkj} - \mathrm{G}_{klj} & = & - g_{kl,j} \\ \hline 2\mathrm{G}_{jkl} & = & g_{jk,l} + g_{lj,k} - g_{kl,j} \end{array}$$

$$\mathrm{G}_{jkl} = \frac{1}{2}\left(g_{jk,l} + g_{lj,k} - g_{kl,j} \right) \tag{4.59}$$

elde edilir.

(b) Ortogonal bazda: $dg_{ik} = d\eta_{ik} = 0 = \omega_{ik} + \omega_{ki}$ ile birlikte

$$\left(de^j \mid e_k \otimes e_i \right) = -\left(\omega^j{}_l e^l \mid e_k \otimes e_i \right) = \left(\omega^j{}_k \mid e_i \right) - \left(\omega^j{}_i \mid e_k \right)$$

kullanılarak,

$$
\begin{array}{l}
\quad\left(de_j \mid e_k \otimes e_i \right) = \left(\omega_{jk} \mid e_i \right) - \left(\omega_{ji} \mid e_k \right) \\
\quad\left(de_k \mid e_i \otimes e_j \right) = \left(\omega_{ki} \mid e_j \right) - \left(\omega_{kj} \mid e_i \right) \\
\underline{-\left(de_i \mid e_j \otimes e_k \right) = -\left(\omega_{ij} \mid e_k \right) + \left(\omega_{ik} \mid e_j \right)} \\
\left(de^j \mid e_k \otimes e_i \right) + \left(de^k \mid e_i \otimes e_j \right) - \left(de^i \mid e_k \otimes e_j \right) = 2\left(\omega_{ik} \mid e_j \right)
\end{array}
$$

bulunur ve böylece,

$$
\left(\omega_{ik} \mid e_j \right) = \frac{1}{2}\left[\left(de_j \mid e_k \otimes e_i \right) + \left(de_k \mid e_i \otimes e_j \right) - \left(de_i \mid e_k \otimes e_j \right) \right] \tag{4.60}
$$

elde edilir.

Önerme (4.3.1): Eğrilik formları aşağıda verilen özdeşlikleri sağlar:

$$
\begin{array}{l}
\text{(a)}\ R_{ij} = -R_{ji} \\
\\
\text{(b)}\ R_{ij} \wedge e^i = 0
\end{array} \tag{4.61}
$$

İspat:

(a) Bu durum bazdan bağımsızdır. Eğer $\overline{e} = Ae$ baz değişimi yapılırsa, o zaman $R \to ARA^{-1}$ ((4.32) ifadesinden), $g \to A^{-1t} gRA^{-1}$ olur ve böylece

$$
R_{ij} = g_{ik} R^k{}_j \equiv \left(gR \right)_{ij} \to \left(A^{-1t} gRA^{-1} \right)_{ij}
$$

biçiminde dönüşür ki bu antisimetriyi korur. (a) durumu

$$\omega_{ij} = -\omega_{ji} \Rightarrow \omega_{ik} \wedge \omega^k{}_j = -\omega_{kj} \wedge \omega_i^k = -\omega_{jk} \wedge \omega^k{}_i$$

olan ortogonal bazlarda açıktır.

(b) $$\begin{aligned} 0 = dde^i &= -d\left(\omega^i{}_k \wedge e^k\right) = -d\omega^i{}_k \wedge e^k + \omega^i{}_k \wedge de^k \\ &= -d\omega^i{}_k \wedge e^k - \omega^i{}_j \wedge \omega^j{}_k \wedge e^k = -R^i{}_k \wedge e^k \end{aligned}$$

isapatı tamamlar.

m tane 3-form (b), $\binom{m}{2}$ tane sıfır olan 2-form elde edilir. Sonuç olarak diğer cebirsel koşullar dışında eğriliğin,

$$\binom{m}{2}^2 - m\binom{m}{3} = \frac{m^2\left(m^2-1\right)}{12} \tag{4.62}$$

bağımsız bileşeni vardır. Tek boyutta eğrilik 2-formu yoktur, iki boyutta bir tane ve dört boyutta yirmi tane vardır. Bununla beraber bazı bileşenler uygun bazlar ve koordinat sistemleri seçimi ile yok edilebilir.

$R^i{}_j$ 'ler bir bazda,

$$R^i{}_j = \frac{1}{2} R^i{}_{jkm} e^{km} \tag{4.63}$$

biçiminde ayrıştırılabilir. Burada,

$$R_{ijkm} = g_{in} R^n{}_{jkm} \tag{4.64}$$

Riemann-Christoffel tensörü olarak bilinir ve aşağıda verilen özellikleri sağlar:

$$
\begin{aligned}
&\text{(a) } R_{ijkm} = -R_{ijmk} \\
&\text{(b) } R_{ijkm} = -R_{jikm} \\
&\text{(c) } R_{ijkm} + R_{ikmj} + R_{imjk} = 0 \\
&\text{(d) } R_{ijkm} = R_{kmij}
\end{aligned}
\tag{4.65}
$$

İspat:

(a) Her iki tarafı 2-form

$$R_{ij} \equiv \frac{1}{2} R_{ijkm} e^k \wedge e^m$$

olduğu ve 2-formalar antisimetrik oldukları için sağlanır.

(b) (4.66)'da R_{ij}, 2-formu antisimetriktir dolayısıyla (4.61b) de antisimetrik olmalıdır.

(c) (4.61b) bağıntısından,

$$0 = R^i{}_j \wedge e^j = R^i{}_{jkm} \wedge e^{jkm} \tag{4.66}$$

(a)'dan dolayı bu toplamda sadece devirli permütasyonlar kalır.

(d) Bu özellik (a) ve (c) özelliklerinden çıkar: (c)'den,

$$
\begin{aligned}
R_{ijkm} &= -R_{ikmj} - R_{imjk} = R_{kimj} + R_{mijk} \\
&= -R_{kmji} - R_{kjim} - R_{mjki} - R_{mkij} \\
&= 2R_{kmij} + R_{kjim} + R_{jmki} \\
&= 2R_{kmij} - R_{ijkm} \quad \Rightarrow \quad 2R_{kmij} = 2R_{ijkm}
\end{aligned}
$$

Şayet R_{jk} ’ler,

$$i_{e_j} R^j_k = R^j_{kjm} e^m = R_k \text{ ä } E_1 \text{ ve } i_{e_k} R^k = R^{jk}{}_{jk} = R \text{ ä } E_0 \tag{4.67}$$

kısalmaları (büzülmeleri) ile yazılırsa, o zaman C_{jk} **Weyl formları**

$$R_{jk} = \frac{-R}{(m-2)(m-1)} e_j \wedge e_k + \frac{i}{m-2}\left(e_j \wedge R_k - e_k \wedge R_j \right) + C_{jk} \tag{4.68}$$

biçiminde tanımlanır. C_{ij} ’ler (4.37) ifadesini sağladıkları açıktır (Stewart 1990) ve kısalma ile,

$$i_{e_j} C^j{}_k = C_k = 0 \tag{4.69}$$

olduğu gösterilebilir: Her ω ä E_p için,

$$i_{e_j} e^j = m \text{ ve } e_j i_{e_j} \omega = p\omega \tag{4.70}$$

dir ve buradan,

$$
\begin{aligned}
R_k &= i_{e_j} R^j{}_k = \frac{-R(m-1)e_k}{(m-2)(m-1)} + \frac{1}{m-2}\left[Re_k - R_k - R_k + mR_k \right] + C_k \\
&= R_k + C_k \quad \Rightarrow \quad C_k = 0
\end{aligned}
$$

bulunur. $i_{e_j} R_k = i_{e_k} R_j$ 'dir dolayısıyla, $C_k = 0$ denklemleri yalnızca $m(m+1)/2$ bağımsız koşul oluştururlar ki C_{ij} için $m^2\left(m^2-1\right)/12 - m(m+1)/2 = m(m+1)(m+2)(m-3)/12$ bileşen bırakır. Üç boyutta bütün C_{ij} 'ler sıfıra eşittirler ve ilk olarak dört boyutta on bileşenle ortaya çıkarlar.

Önerme (3.3.2): $C^i{}_j$ 'ler $g \to fg,\ f$ ä E_0 konformal dönüşümleri altında değişmez kalırlar.

İspat: $\overline{e}^i = fe^i$ olsun, fakat $\overline{g}_{ik} = g_{ik}$ öyle ki $\overline{g} = f^2 g$ olsun. υ_i ä E_1 için

$$\overline{R}_{ik} = R_{ik} + \upsilon_i \wedge e_k - \upsilon_k \wedge e_i$$

olduğunu göstermek yeterlidir. Çünkü daha önce de gösterildiği gibi (4.20),

$$\begin{gathered} d\overline{e}^i = df \wedge e^i + fde^i = -\overline{\omega}^i{}_k \wedge \overline{e}^k \text{ ve } \overline{\omega}_{ik} + \overline{\omega}_{ki} = \omega_{ik} + \omega_{ki}, \\ \overline{\omega}_{ik} = \omega_{ik} + (df \mid e_i)e_k - (df \mid e_k)e_i \end{gathered} \tag{4.71}$$

dır. Bir doğal bazda $e_i \wedge \omega^i{}_j = 0$ 'dır ve bundan dolayı,

$$((df \mid e_i)e_k - (df \mid e_k)e_i) \wedge \omega^k{}_j = \upsilon_j \wedge e_i,\quad \upsilon_j = (df \mid e_k)\omega^k{}_j$$

olur ve (4.71)'den

$$d\overline{\omega}_{ik} - d\omega_{ik} = \upsilon_i \wedge e_k - \upsilon_k \wedge e_i$$

olur, buradan

$$d\bar{\omega}_{ik} + \bar{\omega}^i_j \wedge \bar{\omega}^j_k = d\omega_{ik} + \omega^i{}_j \wedge \omega^j{}_k + \upsilon_i \wedge e_k - \upsilon_k \wedge e_i$$
$$\bar{R}_{ik} = R_{ik} + \upsilon_i \wedge e_k - \upsilon_k \wedge e_i$$

olarak istenilen bulunur. Tersine, $C_k = 0$ ise o zaman, $g = f\eta$ olur.

Metrikleri ve eğrilikleri bağlayan formüller özet olarak aşağıda verilmiştir:

$$\begin{aligned} g &= g_{ik} e^i \otimes e^j \\ de^i &= -\omega^i{}_j \wedge e^j \\ dg_{ik} &= g_{ij}\omega^j{}_k + \omega^j{}_k g_{ji} \\ R^i{}_k &= d\omega^i{}_k + \omega^i{}_j \wedge \omega^j{}_k \end{aligned} \tag{4.72}$$

(4.33) bağıntısıda u, υ ve X vektör alanları için,

$$D_u D_\upsilon X - D_\upsilon D_u X - D_{[u,\,\upsilon]} X = (i_\upsilon i_u R) X = R(u,\ \upsilon) X \tag{4.73}$$

komütatörünün X'in türevine bağlı olmadığını fakat eğrilik tanımladığı belirtilmişti ((4.73) bağıntısı (4.33)'ün daha kullanışlı yazılmış halidir.). $DL_\upsilon - L_\upsilon D$ için benzer bir ifade (4.73) ve

$$L_\upsilon i_u X = i_{L_\upsilon u} X + i_u L_\upsilon X,\ u \text{ ä } E_1 \tag{4.74}$$

ifadesi kullanılarak üretilebilir: $[X,\ Y] = L_X Y = -L_Y X = D_X Y - D_Y X$ ifadesi, $L_\upsilon i_u = i_u L_\upsilon,\ D_u = i_u D$ ve $R(u,\ \upsilon) X = -R(\upsilon,\ u) X$ göz önüne alınarak,

$$
\begin{aligned}
\langle (DL_u - L_u D)X \mid u \rangle &= i_u DL_u X - L_u i_u DX + i_{L_u u} X \\
&= D_u L_u X - L_u D_u X + D_{[u,u]} X \\
&= D_u (D_u X - D_X u) - D_u D_u X + D_{D_u X} u + D_{[u,u]} X \\
&= D_u D_u X - D_u D_X u + D_{[u,u]} X - D_u D_u X + D_{D_u X} u \\
&= D_u D_u X - D_u D_u X - D_{[u,u]} X - D_u D_X u + D_{D_u X} u \\
&= R\left(u,\ u\right) X + D_{D_u X} u - \left(R\left(u,\ X\right) u + D_{[u,X]} u + D_X D_u u\right) \\
&= R\left(u,\ u\right) X + R\left(X,\ u\right) u + D_{D_u X} u - D_X D_u u \\
&\quad + D_{D_u X} u - D_{D_X u} u \\
&= R\left(u,\ u\right) X + R\left(X,\ u\right) u - D_X D_u u - D_{D_X u} u
\end{aligned}
$$

elde edilir. Burada (4.65c): $R_{ijkm} + R_{ikmj} + R_{imjk} = 0$ özelliğinden $R(u,\ \upsilon)X + R(X,\ u)\upsilon = R(X,\ \upsilon)u$ ve

$$
\begin{aligned}
D_X D_u \upsilon = D_X i_u D\upsilon &= i_{D_X u} D\upsilon + i_u D_X D\upsilon \\
&= D_{D_X u}\upsilon + \langle D_X D\upsilon \mid u \rangle
\end{aligned}
\tag{4.75}
$$

kullanılırsa, kovaryant türev ve Lie türevinin komütatörü,

$$
\langle (DL_\upsilon - L_\upsilon D) X \mid u \rangle = R(X,\ \upsilon)u - \langle D_X D\upsilon \mid u \rangle \tag{4.76}
$$

biçiminde elde edilir (Stewart 1990). Burada komütatör X’in herhangi bir türevini içermiyor fakat υ’nün ikinci türevini içeriyor.

(2.60)’da $\langle | \rangle$ skaler çarpımı, i_υ iç çarpımı biçiminde genişletildi. Bu göz önüne alındığında (4.43) işleminin genellemesi yukarıda (4.75)’de kullanılan

$$
D_X i_u = i_{D_X u} + i_u D_X \tag{4.77}
$$

ifadesidir. Özellikle,

$$0 = D_X 1 = D_X \langle \varepsilon \mid \varepsilon \rangle = 2\langle D_X \varepsilon \mid \varepsilon \rangle$$

olduğu için ve ε dejenere olmadığı için $D_X \varepsilon = 0$ olur. Bundan dolayı

$$D_X i_\upsilon \varepsilon = i_{D_X \upsilon} \varepsilon$$

ve dolayısıyla

$$D_X {*}\, \upsilon = \; * D_X \upsilon \tag{4.78}$$

Olarak D_X ve * işlemcisinin komütatörü elde edilir. Burada D_X, $S_0\left(\wedge_p T^*(B)\right)$ ile tanımlanmıştır $S_p\left(T^*(B)\right)$ ile tanımlanmamıştır. Böylece E_p üzerinde i_X, bir $E_p \to E_{p-1}$ gönderim iken D_X, $i_X D$ biçiminde yazılamaz.

4.4 Geodezik Vektör Alanları ve Killing Vektör Alanları

Bir pseudo-Riemannian uzayda,

$$D_X X = 0 \tag{4.79}$$

denklemini sağlayan bir X vektör alanına **geodezik vektör alanı** denir. Yani, eğer X vektör alanı bir pseudo-Riemannian manifoldta bir γ eğrisinin vektör alanı ise (4.79) X'in eğrinin her noktasında kendisi boyunca paralel taşındığını ifade eder ve γ eğrisine **geodezik eğrisi** denir.

$z(s)$ bir geodezik vektör alanının akış çizgisi olsun, yani $\dot{z}(s) = X(z(s))$ olsun. O zaman doğal bazda z'nin bileşenleri,

$$\ddot{z}^i(s) = -\Gamma^i{}_{jk}\dot{z}^j\dot{z}^k \tag{4.80}$$

denklemini sağlarlar. Çünkü $Db^{*j} = -\omega^j{}_i b^{*i}$ eşitliğinden dolayı

$$\begin{aligned} 0 = D_X\left(X^i\partial_i\right) &= X^i{}_{,k}\partial_i + X^i i_X\omega^k{}_i\partial_k \\ &= X^i{}_{,k}\partial_i + \left(\omega^k{}_j \mid \partial_k\right)X^jX^k\partial_i \\ &= \left(X^i{}_{,k} + \left(\omega^i{}_j \mid \partial_k\right)X^jX^k\right)\partial_i \end{aligned} \tag{4.81}$$

elde edilir ve

$$\ddot{z}^i(s) = \frac{d}{ds}X(z(s)) = X^i{}_{,k}\dot{z}^k \tag{4.82}$$

olur. (4.55) ve (4.81) karşılaştırıldığında

$$\Gamma^i{}_{jk} = \left(\omega^i{}_j \mid \partial_k\right) \tag{4.83}$$

olur ve böylece hareket geodezik denklemleri,

$$\frac{d^2x^\alpha}{ds^2} = -\Gamma^\alpha{}_{\beta\gamma}(x)\frac{dx^\alpha}{ds}\frac{dx^\beta}{ds} \tag{4.84}$$

elde edilir. En kısa yollar, böylece bir eğrinin tanjant vektörü yollar boyunca paralel taşıma altında kendisine dönüşmesi anlamında en kısadırlar.

g, metrikli bir pseudo-Riemannian uzay üzerinde,

$$L_{\upsilon} g = 0 \tag{4.85}$$

sağlayan bir υ vektör alanı, bir **Killing vektör alanı** olarak bilinir.

$[\,,\,]$ vektör alanlarının Lie parantez işlemcisi olmak üzere,

$$L_X L_Y - L_Y L_X = L_{[X,Y]}$$

olduğu için Killing vektör alanları bir Lie cebiri oluştururlar. Eğer bir $e^i \left(g = e^i \otimes e^j \eta_{ij} \right)$ ortogonal bazı kullanılarak e^i 'nin Lie türevi,

$$L_{\upsilon} e^i = A^i{}_j e^j , \ A^i{}_j \text{ ä } E_0$$

şeklinde ayrıştırılırsa, o zaman υ bir Killing vektör alanıdır ancak ve ancak, $A_{ij} = \eta_{ik} A^k{}_j$ olmak üzere, $A_{ij} = -A_{ji}$ 'dir. υ, Killing vektör alanları için,

$$^* L_{\upsilon} = L_{\upsilon}{}^* \tag{4.86}$$

olduğu gösterilebilir:

$$L_{\upsilon} e^{k_1 \ldots k_p} = \sum_j A^{k_j}{}_k e^{k_1 \ldots k_{j-1} k k_{j+1} \ldots k_p} \left(-1 \right)^{j+1}$$

dır. (3.89) özdeşliği, $\omega^i{}_k = \eta^{ij} \omega_{kj}$ olmak üzere,

$$\omega_{k_1}{}^i \varepsilon_{i k_2 \ldots k_m} + \omega_{k_2}{}^i \varepsilon_{k_1 i \ldots k_m} + \ldots \omega_{k_m}{}^i \varepsilon_{k_1 \ldots k_{m-1} i} = 0$$

$\forall k_1 = 1,...,m;...;k_m = 1,...,m$ olarak verildi ve bu özdeşlik $\omega^i{}_k$'ler yerine $A^k{}_j$'ler yazıldığında doğru kalır, çünkü $A^k{}_j$'ler aynı simetriye sahiptirler. Bundan dolayı,

$$L_\upsilon * e^{k_1...k_p} = \sum_j A^{k_j}{}_k * e^{k_1...k_{j-1}kk_{j+1}...k_p} (-1)^{j+1}$$

ve sonuç olarak,

$$\begin{aligned} *L_\upsilon \left(\omega_{k_1...k_p} e^{k_1...k_p} \right) &= \left(L_\upsilon \omega_{k_1...k_p} \right) * e^{k_1...k_p} + \omega_{k_1...k_p} {}^* L_\upsilon e^{k_1...k_p} \\ &= L_\upsilon \left(\omega_{k_1...k_p} {}^* e^{k_1...k_p} \right) \end{aligned}$$

elde edilir ve bu istenilen (4.86) bağıntısıdır. υ bir Killing vektör alanı olmasa dahi, özel p değerleri için $*L_\upsilon \omega = L_\upsilon * \omega, \omega$ ä E_p sağlanması olasıdır. Örneğin, $L_\upsilon e^j = fe^j$, f ä E_0

$$L_\upsilon e^{j_1...j_p} = pfe^{j_1...j_p} \text{ ve } L_\upsilon * e^{j_1...j_p} = (m-p) f * e^{j_1...j_p}$$

yol açar ve böylece her ω ä E_m için $*L_\upsilon \omega = L_\upsilon * \omega, \omega$ ä E_p olur. Dolayısıyla L_υ, $L_\upsilon g = 2fg$ konformal dönüşümünü üretir ve υ bir Killing vektör alanı değildir.

Bir X Killing vektör alanı için $L_X g = 0$'dır, oysa herhangi bir vektör alanı için $L_X X = 0$ sağlanır. Tersine, kovaryant türev için $D_X X = 0$ yalnız geodezik vektör alanları için sağlanır ve yine $D_X g = 0$ herhangi bir vektör alanı için sağlanır. Genelde Killing geodezik belirtmez veya tersi. Bununla beraber, aşağıdaki bağıntı vardır: υ bir Killing vektör alanı olsun, öyle ki $L_\upsilon \langle X \mid X \rangle = 2\langle L_\upsilon X \mid X \rangle$ ve X bir geodezik vektör alanı olsun. O zaman,

$$L_X \langle \upsilon \mid X \rangle = D_X \langle \upsilon \mid X \rangle = \langle D_X \upsilon \mid X \rangle + \langle \upsilon \mid D_X X \rangle$$
$$= \langle D_X \upsilon \mid X \rangle$$

olur. Burada,

$$\langle L_\upsilon X \mid X \rangle = i_X L_\upsilon X = i_X (D_\upsilon X + D_X \upsilon)$$
$$= \langle D_\upsilon X \mid X \rangle + \langle D_X \upsilon \mid X \rangle$$

$$\Rightarrow \langle D_X \upsilon \mid X \rangle = \langle L_\upsilon X \mid X \rangle - \langle D_\upsilon X \mid X \rangle = 0 \tag{4.87}$$

$$\begin{aligned} L_X \langle \upsilon \mid X \rangle &= \langle L_\upsilon X \mid X \rangle - \langle D_\upsilon X \mid X \rangle \\ &= \frac{1}{2}(L_\upsilon \langle X \mid X \rangle - D_\upsilon \langle X \mid X \rangle) = 0 \end{aligned} \tag{4.88}$$

elde edilir. Sonuç olarak, bir geodezik eğrisi boyunca bir geodezik vektör alanının bir Killing vektör alanı yönündeki bileşeni sabittir.

Eğer bir ortogonal bazdaki bir vektör alanı aynı zamanda doğal ise, o zaman bir geodeziktir. Bunu görmek için X bir vektör alanı ve υ, ya X (o zaman $\langle \upsilon \mid X \rangle = \pm 1$) ya da X 'e ortogonal bir doğal bazın bir elemanı olsun. Her durumda $\langle \upsilon \mid X \rangle$ sabittir ve (4.53) bağıntısı kullanılarak,

$$0 = L_X \langle \upsilon \mid X \rangle = D_X \langle \upsilon \mid X \rangle = \langle D_X \upsilon \mid X \rangle + \langle \upsilon \mid D_X X \rangle$$
$$= \frac{1}{2} D_\upsilon \langle X \mid X \rangle - \langle L_\upsilon X \mid X \rangle + \langle \upsilon \mid D_X X \rangle$$

bulunur. $\langle X \mid X \rangle = \pm 1$ olduğu için sağdaki ilk terim sıfırdır ve bir doğal bazın elemanları arasındaki Lie türevleri sıfır olduklar için $L_\upsilon X = 0$ 'dır. Bundan dolayı $D_X X$ 'in bütün bileşenleri sıfıra eşittir.

5. GRAVİTASYON VE EİNSTEİN ALAN DENKLEMLERİ

Alan denklemlerini Lagrangian formalizmi ile üretmek için, Lagrangian yoğunluğu olarak bir 4-form gereklidir. Bununla beraber, tutarlı olan alan denklemlerini elde etmek için eylem fonksiyonelinin bir durağan noktaya sahip olması gerekir. Maxwell teorisinde bu nicelik akımın korunumuna karşılık gelir. Akım bir S skaler alanından türetilir ve S için alan denklemleri akımı korumalıdır.

5.1 Lagrangian Formülasyonu

Alan teorisine nokta parçacıklar mekaniğinin genellemesi olarak bakılabilir. Burada $q_i(t)$ dinamik değişkenlerinin yerini $\mathbf{E}(x,t)$, $\mathbf{B}(x,t)$ gibi $\Phi(x,t)$ alanları, i kesikli indislerinin yerini sürekli x değişkenleri alır ve $\sum_i$ toplamları yerine integraller yazılır. Alan teorisinde

$$\int dtL(q,\dot{q}) \tag{5.1}$$

eylemi bir dört-boyutlu N_4 altmanifoldu üzerinden integral içerir ve dolayısıyla bir 4-form gerektirir. Alan teorisinde eylem

$$W = \int \mathrm{L}(\Phi,\ d\Phi) \tag{5.2}$$

ile verilir. Burada L ä E_4 **Lagrangian** olarak adlandırılır. Alan denklemleri her compakt N_4 ve ve her $\delta\Phi$ öyle ki, $\delta\Phi_{|\partial N_4} = 0$ için

$$\delta W = 0\delta \tag{5.3}$$

koşulundan elde edilir (burada δ imgesi değişimi gösteriyor).

$\mathbf{E}$, elektrik alanı ve $\mathbf{B}$ manyetik alanı içindeki m kütleli bir parçacığın hareket denklemi,

$$m\ddot{x}^{\alpha}\eta_{\alpha\beta} = e\dot{x}^{\alpha}F_{\alpha\beta}, \quad F = \begin{pmatrix} 0 & E_1 & E_2 & E_3 \\ -E_1 & 0 & -B_3 & B_2 \\ -E_2 & B_3 & 0 & -B_1 \\ -E_3 & -B_2 & B_1 & 0 \end{pmatrix} \tag{5.4}$$

Lorentz kuvveti ile verilir ($\dot{x}^{\alpha} = \dfrac{dx^{a}}{ds}, \ s = \text{öz zaman}$). Burada F Minkowski uzayı M_4 üzerindebir 2-formdur. Homojen Maxwell denklemleri

$$dF = 0 \tag{5.5}$$

ifadesine karşılık gelirler ve bu F elektromanyetik 4-formunun kapalı olduğunu belirtir ve (3.54) Stokes teoremine göre bu ifade,

$$0 = \int_{\partial N_3} F \tag{5.6}$$

olduğunu ifade eder. Buna göre F, 2-formu bir 1-formun dış türevi olarak ifade edilebilir,

$$F = dA,\ A\ \text{ä}\ E_1\left(\mathrm{R}^4\right) \tag{5.7}$$

A vektör potansiyeli olarak adlandırılır. Homojen olmayan Maxwell denklemleri,

$$\delta F = J \text{ veya } d * F = -* J \tag{5.8}$$

karşılık gelir. Buna göre J bir 3-formdur. Yükün korunumu gereği,

$$\delta J = 0 \text{ veya } d^{*}J = 0 \tag{5.9}$$

olmalıdır. Bunun integral formu,

$$\int_{\partial N_3} *J = 0, \quad *J \text{ ä } E_3^0(N_4) \tag{5.10}$$

olur. Burada

$$J = j \wedge dt - \rho dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3$$
$$j = j_1 dx^2 \wedge dx^3 + j_2 dx^3 \wedge dx^1 + j_3 dx^1 \wedge dx^2$$
(5.11)

yazılırsa (5.9) süreklilik denklemini verir; ρ, yük yoğunluğunu ve j, akım yoğunluğunu gösteriyor.

(5.2) eyleminde verilen L Lagrangianı elektromanyetik alan için Maxwell denklemlerini sağlayacak bir ifade olmalıdır:

$$\mathrm{L} = -\frac{1}{2} dA \wedge {*dA} - A \wedge {*J}$$
(5.12)

Lagrangianinin Maxwell denklemlerini sağladığı gösterilebilir: Bir $A \to A + \delta A$ değişimi ve

$$*e^{i_1 \ldots i_p} = g^{i_1 j_1} \ldots g^{i_p j_p} e^{j_{p+1} \ldots j_m} \varepsilon_{j_1 \ldots j_m} \frac{\sqrt{|\det g|}}{(m-p)!}$$

eşitliği kullanılarak,

$$
\begin{aligned}
0 = -\delta W &= \delta \int_{N_4} \left(\frac{1}{2} dA \wedge * \, dA + A \wedge *J \right) \\
&= \int_{N_4} \left(\frac{1}{2} d\left(A + \delta A \right) \wedge * \, d\left(A + \delta A \right) + \left(A + \delta A \right) \wedge *J \right) \\
&\quad - \int_{N_4} \left(\frac{1}{2} dA \wedge * \, dA + A \wedge *J \right) \\
&= \int_{N_4} \left[\frac{1}{2} dA \wedge * \, d\delta A + \frac{1}{2} d\delta A \wedge * \, dA + \frac{1}{2} d\delta A \wedge * \, d\delta A + \delta A \wedge *J \right]
\end{aligned}
$$

elde edilir. Burada $\frac{1}{2} d\delta A \wedge * \, d\delta A$ terimi δ değişimine göre ikinci dereceden olduğundan ihmal edilebilir. Böylece, (2.67 (iv)) özelliği. $\upsilon \wedge *\omega = \varepsilon i_{\upsilon}\omega = \omega \wedge *\upsilon$, kullanılarak

$$
\begin{aligned}
0 = -\delta W &= \int_{N_4} \left[\frac{1}{2} dA \wedge * \, d\delta A + \frac{1}{2} d\delta A \wedge * \, dA + \delta A \wedge *J \right] \\
&= \int_{N_4} \left[\frac{1}{2} d\delta A \wedge * \, dA + \frac{1}{2} d\delta A \wedge * \, dA + \delta A \wedge *J \right] \\
&= \int_{N_4} \left[d\delta A \wedge * \, dA + \delta A \wedge *J \right] \\
&= \int_{N_4} \left[d\left(\delta A \wedge *dA \right) + \delta A \wedge d * dA + \delta A \wedge *J \right] \\
&= \int_{N_4} \delta A \wedge \left(*J + d * dA \right) + \int_{N_4} d\left(\delta A \wedge *dA \right)
\end{aligned}
$$

olur ve (3.54) Stokes teoremi kullanarak

$$
0 = -\delta W = \int_{N_4} \delta A \wedge \left(*J + d * dA \right) + \int_{\partial N_4} \delta A \wedge *dA
$$

bulunur ve bu eşitliğin sıfır olması için

$$
d * dA = d * F = - * J \text{ ve } \delta A = 0 \qquad (5.13)
$$

olmalıdır. Bu (5.8) ile verilen homojen olmayan Maxwell denklemleri ifadesidir ve dolayısıyla istenilendir. F , 2-formu dA biçiminde yazılan bir kapalı form olduğu için homojen Maxwell denklemleri

$$dF = ddA = 0$$

ifadesinden (Poincaré lemması) bulunur.

Maddesel bir ortamda S ä E^0 süper potansiyel olmak üzere ve ρ yük yoğunluğunu ve m kütleyi göstermek üzere,

$$F = dA, \quad J = \frac{e\rho}{m}(dS + eA)$$
(5.14)

olarak tanımlanırsa o zaman, Lagrangian,

$$\mathrm{L} = -\frac{1}{2}\frac{m}{\rho e^2} J \wedge *J - \frac{1}{2} F \wedge *F$$
(5.15)

ile verilir.

İspat: (5.12) ifadesinin doğrulanmasında olduğu gibi $A \to A + \delta A$ ve $S \to S + \delta S$ değişimleri kullanılarak,

$$\begin{aligned} \delta\left(\frac{m}{\rho e^2} J \wedge *J \right) &= \left(\frac{1}{e} dS + \frac{1}{e} d\delta S + A + \delta A \right) \wedge *J \\ &\quad - \left(\frac{1}{e} dS + A \right) \wedge *J \\ &= \frac{1}{e} d\delta S \wedge *J + \delta A \wedge *J \\ &= \frac{1}{e} d (\delta S * J) - \frac{1}{e} \delta S d * J + \delta A \wedge *J \end{aligned} \qquad (5.16a)$$

ve (5.15)'in sağındaki ikinci terim için de aynı biçimde,

$$\begin{aligned}\delta(F\wedge {}^*F) &= \delta(dA\wedge {}^*F)\\ &= (dA+d\delta A)\wedge {}^*F - dA\wedge {}^*F\\ &= d\delta A\wedge {}^*F = d(\delta A\wedge {}^*F)+\delta A\wedge d{}^*F\end{aligned}$$

(5.16b)

bulunur. (5.16a) ve (5.16b) denklemleri (5.15) Langrangianinin değişiminde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}\delta \mathrm{L} &= -\frac{1}{e}d(\delta S{}^*J)+\frac{1}{e}\delta S d{}^*J-\delta A\wedge {}^*J-d(\delta A\wedge {}^*F)-\delta A\wedge d{}^*F\\ &= \frac{1}{e}\delta S d{}^*J-\frac{1}{e}d(\delta S{}^*J)-\delta A\wedge[{}^*J+d{}^*F]-d(\delta A\wedge {}^*F)\end{aligned}$$

bulunur ve Stokes teoremi kullanılarak eylem integrali,

$$0=\frac{1}{e}\int_{N_4}\delta S d{}^*J-\int_{N_4}\delta A\wedge[{}^*J+d{}^*F]-\frac{1}{e}\int_{\partial N_4}d(\delta S{}^*J)-\int_{\partial N_4}d(\delta A\wedge {}^*F)$$

burada sağdaki son iki terim sınırlarda değişimin sıfır olması nedeniyle ayrı ayrı sıfıra eşittirler ve ifadenin tamamının sıfıra eşit olabilmesi için

$d{}^*J=0$ ve $d{}^*F=-{}^*J$

olmalıdır, buradaki ilk ifade yükün korunumudur. Böylece (5.15) ifadesi istenilen Lagrangiandir.

Bir kompleks $\varphi=\exp(iS)$ alanını kullanarak $J\wedge {}^*J$'yi

$$\overline{(d+ieA)}\varphi\wedge *(d+ieA)\varphi=(idS+ieA)\varphi\wedge *(id\varphi+ieA)\varphi$$
$$=(dS+eA)\varphi\wedge *(d\varphi+eA)\varphi$$
$$=J\wedge *J|\varphi|^2=J\wedge *J$$
(5.17)

olarak ifade edilebilir. Bu modelde A'nın etkisi $\varphi\to\exp(ie\Lambda(x))$ altında dış türevi değişmez kılmaktır. Burada bir yüklü parçacığın alanı iki reel

$$\varphi^1=\sqrt{\rho}\cos S,\ \ \varphi^2=\sqrt{\rho}\sin S \tag{5.18a}$$

veya bir komoleks,

$$\Phi=\varphi^1+i\varphi^2=\sqrt{\rho}e^{iS}$$
(5.18b)

alanının uygun terimleri ile ifade edilebilir. Bir vektör demeti elde edebilmek için ρ'nun $\mathbb{R}^{+}$ üzerinde değişmesine (burada yavaşça değiştiği kabul edilecektir) izin verilmelidir. Bu durumda R^2 veya C'ye eşit olan F lifleri ve $V=\mathrm{R}^4\times F$ demeti vardır. Dış türevin (4.9) ifadesi göz önüne alındığında, (5.17) eşitliğinde, bu demette bir kovaryant dış türeve karşı gelen,

$$d\varphi+iA\varphi \text{ veya } d\varphi^i+i\omega^i{}_k\varphi^k,\ \ \omega^i{}_k=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$$
(5.19)

ifadesi bulunur. Dolayısıyla (5.17) eşitliği, bu değişmez formda,

$$-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}(D\varphi)^i\wedge *(D\varphi)^i,\ \ (D\varphi)^i=d\varphi^i+e\varepsilon^i{}_kA\varphi^k,\ \ \varepsilon^i{}_k=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$$
(5.20)

olur. Lokal ayar dönüşümleri altında değişmez diğer terim,

$$-\frac{1}{2}m^2\sum_i \varphi^i \wedge *\varphi^i$$
(5.21)

biçiminde tanımlanabilen bir kütle terimi olmalıdır. Böylece genel toplam Lagrangian,

$$\mathrm{L} = -\frac{1}{2}dA \wedge {}^*dA - \frac{1}{2}\sum_i \left((D\varphi)^i \wedge^* (D\varphi)^i + m^2\varphi^i \wedge^* \varphi^i \right)$$
(5.22)

olur ve $A \to A + d\Lambda,\ \varphi \to e^{-e\varepsilon\Lambda}\varphi,\ \Lambda$ ä $C\left(\mathrm{R}^4\right)$ ayar dönüşümü altında değişmezdir. Yukarıda (5.12) ve (5.15) Lagrangianlarının doğrulanmasında kullanılan değişimler hesabı $\mathrm{L} = \mathrm{L}(\varphi^i, d\varphi^i)$ olmak üzere ve φ^i 'ler p-form olmak üzere,

$$\begin{aligned}\delta\mathrm{L} &= \sum_i \left(\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \varphi^i} \wedge \delta\varphi^i + \frac{\partial \mathrm{L}}{\partial\left(d\varphi^i\right)} \wedge \delta\left(d\varphi^i\right) \right) \\ &= \sum_i \left[\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \varphi^i} \wedge \delta\varphi^i + d\left(\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial d\varphi^i} \wedge \delta\varphi^i \right) - (-1)^p \left(d\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial d\varphi^i} \right) \wedge \delta\varphi^i \right] \\ &= \sum_i \left(\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \varphi^i} - (-1)^p\, d\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial\left(d\varphi^i\right)} \right) \wedge \delta\varphi^i + \sum_i d\left(\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial d\varphi^i} \wedge \delta\varphi^i \right)\end{aligned}$$
(5.23)

olur. Bu ifade eylem integralinde yazıldığında ikinci toplamdaki ifade (4.54) Stokes teoremi gereğince ∂N_4 sınırı üzerinden değişimi ifade ettiği için sıfıra eşit olur ve

$$\delta\int \mathrm{L}(\varphi, d\varphi) = \sum_i \int \left(\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \varphi^i} - d\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial d\varphi^i} \right) \delta\varphi^i = 0$$

elde edilir. Bu ifadenin sıfıra eşit olma koşulu,

$$\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \varphi^i} - (-1)^p \, d \frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \left(d\varphi^i \right)} = 0$$
(5.24)

Euler denklemlerini verir. (5.22) Lagrangianı için (5.24),

$$\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial A} = \frac{\partial}{\partial A}\left((D\varphi)^i \wedge *(D\varphi)^i \right) = -e\varepsilon^i{}_k \varphi^k \wedge *(D\varphi)^i$$
$$\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial dA} = -*dA$$
$$\Rightarrow -e\varepsilon^i{}_k \varphi^k \wedge *(D\varphi)^i + d*dA = 0$$

verir ve (5.7) ve (5.8) denklemlerine göre son ifade

$$d*dA = d*F = *J = -\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial A} = e\varepsilon^i{}_k \varphi^k \wedge *(D\varphi)^i$$
(5.25)

ifadesine özdeştir. φ^i için Euler denklemleri benzer şekilde,

$$\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \varphi^i} = -\frac{\partial}{\partial \varphi^i}\left(m^2 \varphi^i \wedge *\varphi^i \right) = -m^2 * \varphi^i$$
$$\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial D\varphi^i} = -*(D\varphi)^i$$
$$\Rightarrow m^2 * \varphi^i - d*(D\varphi)^i = 0$$

bulunur ve bu son ifade,

$$D*D\Phi = m^2 * \Phi$$
(5.26)

denklemine özdeştir.

Euler denklemlerinin $[\,,\,]=0$ olmasını gerektirdiği açıktır. $\Phi \to e^{-e\varepsilon\Lambda}$ değişimi, yukarıdaki gibi değişimler hesabı uygulandığında birinci dereceden Λ 'ya bağlı olan,

$$\delta \mathrm{L} = ed\left(\Lambda\varepsilon^{i}{}_{k}\varphi^{k} \wedge *(D\varphi)^{i} \right)$$

katkısına neden olur. Eğer bir global ayar dönüşümü ($d\Lambda = 0$) seçilirse L'nin değişmezliği (invaryansı) $\delta \mathrm{L} = 0 = d * J$ eşitliğini garantiler. Bu düşünceler non-Abelian grup $O(3)$ 'e genişletilebilir. Bu durumda Φ üç bileşene sahip olur ve (5.22) Lagrangiani'ninde $\sum_{i=1}^{3}$ alınır. Bununla beraber, şimdi üç ayar potansiyeli de vardır ve dA (4.10) dönüşümüne göre $A \to L^{-1}AL + L^{-1}dL$ dönüşümü altında değişmez değildir. Bu sonuç, dA 'nın (4.31)'de gösterildiği gibi $(DA) \to L^{-1}AL$ biçiminde dönüşen $DA = \Omega$ ile değiştirilmesi gerektiğini belirtir. Böylece bilineer terim,

$$tr\Omega \wedge *\Omega = \Omega^{i}{}_{k} \wedge *\Omega^{k}{}_{i} \tag{5.27}$$

ayar değişmezdir ve ayar alanının Lagrangiani için kullanılabilir. Böyle bir kullanım ilk olarak Yang ve Mills tarafından önerildi ve **Yang-Mills Lagrangiani**,

$$\mathrm{L} = \frac{1}{2} trDA \wedge *DA - \frac{1}{2}\langle D\varphi \wedge *D\varphi \rangle - \frac{1}{2} m^{2} \langle \Phi \wedge *\Phi \rangle \tag{5.28}$$

ile verilir. Burada $\langle \Phi \wedge \Psi \rangle = \sum_{i} \varphi^{i} \wedge \psi^{i}$ notasyonu liflerde skaler çarpım için kullanıldı. Burada $O(3)$ için düşünülmesine rağmen, (5.28) Lagrangiani tüm $O(n)$ 'ler için doğrudur.

Yang-Mills Lagrangiani'nden değişimler hesabı ile elde edilen denklemler, F, Maxwell alanı yerine Ω eğriliği gelecek biçimde (5.25) ve (5.26) denklemleri ile aynıdır (daha sonra değişimler hesabı ele alındığı için burada denklemler doğrudan verildi):

$$d * \Omega = - * J = \frac{\partial \mathrm{L}}{\partial A}, \quad D * D\Phi = m^2 * \Phi$$
(5.29)

denklemleri **Yang-Mills denklemleri** olarak bilinir.

Daha açık ifadeler elde etmek için izi diagonal yapan Lie cebiri ($=(3\times 3)$) antisimetrik matrisler) için bir b_i bazı kullanılabilir. Eğer

$$trb_\alpha b_\beta = -\delta_{\alpha\beta} \text{ ve } A = \sum b_\alpha A^\alpha, \; A^\alpha \text{ ä } E_1$$

ise o zaman,

$$\Omega = \sum b_\alpha F^\alpha$$

eğriliği, (4.27) Cartan ikinci yapı denklemine göre,

$$F^\alpha = dA^\alpha + \frac{1}{2} c_{\beta\gamma}{}^\alpha A^\beta \wedge A^\gamma \qquad (5.30)$$

bileşenlerine sahiptir. $c_{\beta\gamma}{}^\alpha$ 'lar bu bazda $O(3)$ 'ün

$$b_\beta b_\gamma - b_\gamma b_\beta = c_{\beta\gamma}{}^\alpha b_\alpha$$
(5.31)

yapı sabitleridirler. Bu ayrışımla ayar alanının Lagrangiani,

$$\mathrm{L}^{gf} = -\frac{1}{2} F^{\alpha} \wedge^{*} F^{\alpha} \tag{5.32}$$

olur. F^{α}'lar burada yalnız dA'ya değil, A'ya da bağlıdırlar, bu nedenle J akımına, Maxwell teorisinde görünmeyen ve Yang-Mills denklemlerinin, skaler alanın yokluğunda bile lineer olmadıklarını gösteren bir

$$-\frac{\partial \mathrm{L}^{gf}}{\partial A} = c_{\beta\gamma}{}^{\alpha} A^{\beta} \wedge F^{\gamma}$$
(5.33)

katkısı gelir. Skaler alanın akıma katkısı (5.25) denkleminde verildiği gibi,

$$\left(b^{\alpha} \right)_{kl} \varphi^{k} \wedge * (D\Phi)^{l}$$

biçiminde olur. $d\Lambda^{\alpha} = 0$ ve $\Lambda^{\alpha} \to 0$, olan bir

$$L = 1 + b_{\alpha} \Lambda^{\alpha}$$
(5.34)

ayar dönüşümü alınırsa, $\delta A = c_{\beta\gamma}{}^{\alpha} A^{\beta} \Lambda^{\gamma}$ olur ve $\delta \mathrm{L} = 0$ olduğu için, (5.23) ifadesinin sağındaki ikinci toplam,

$$\Lambda^{\alpha} d \left(c_{\beta\gamma}{}^{\alpha} A^{\beta} \wedge * F^{\gamma} + \left(b^{\alpha} \right)_{mn} \varphi^{m} \wedge (D\varphi)^{n} \right) = 0$$
(5.35)

olduğunu söyler. Böylece Maxwell teorisinden çıkan sonuçlar örneğin, kapalı bir evrende toplam yükün sıfır olması ve ya düzlem dalga çözümü, hala geçerlidir.

Maxwell teorisinden temel fark, akımın ayar invaryant olduğu yerde ortaya çıkar. Burada akım ayar dönüşümü altında Ω gibi, yani $J \to L^{-1}JL$ olarak dönüşmez, aksine homojen olmayarak dönüşür. $*\Omega$, $*\Omega \to L^{-1}*\Omega L$, olarak dönüşmesine rağmen, $d\Omega$'nın böyle dönüşmeyeceği açıktır, dolayısıyla bu uzayda herhangi bir x noktasında belirli bir yük bulunduğunu söylemek için ayar değişmez (ayar invaryant) bir anlama sahip değildir ve buna rağmen her zaman $J(x) = 0$ olan bir ayar dönüşümü bulmak mümkündür. Bu nedenle burada,

$$Q_\alpha = \int_{N_3} *J = -\int_{\partial N_3} *F$$
(5.36)

yükleri daha uygundur. Çünkü bunlar sınır integralleri oldukları için ∂N_3 üzerinde $dL = 0$ olan tüm ayar dönüşümleri altında homojen olarak dönüşürler. J ayar alanında bulunan A nedeniyle homojen olarak dönüşmüyordu, kovaryant türevin $S_p(L(F))$'ye genişletilmesi ile bunların (5.20) ifadesinde tanımlandığı gibi kovaryant dış türevin bileşenleridir. Kovaryant dış türev $L^{-1}D*\Omega L$ biçiminde homojen olarak dönüşür. Böylece (5.29)'da ilk denklem

$$D*\Omega = -*J(\Phi)$$

olarak yazılabilir. $*J(\Phi)$ tek başına korunmaz fakat D, iki kez ard arda $*J(\Phi)$'ye uygulanırsa, sıfır verir: Bir V ä $S_p(V(F))$ için, Kovaryant türev

$$DV = dV + \omega \wedge V + (-)^p V \wedge \omega$$
(5.37)

biçimindedir ve $ddV = 0$ eşitliği de göz önüne alınarak,

$$
\begin{aligned}
D*\Omega &= d*\Omega + \omega \wedge *\Omega - *\Omega \wedge \omega \\
DD*\Omega &= dd*\Omega + \omega \wedge d*\Omega + (-1)^3 d*\Omega \wedge \omega + d(\omega \wedge *\Omega) \\
&\quad + \omega \wedge (\omega \wedge *\Omega) + (-1)^3 (*\Omega \wedge \omega) \wedge \omega - d(*\Omega \wedge \omega) \\
&\quad - \omega \wedge (*\Omega \wedge \omega) - (-1)^3 (*\Omega \wedge \omega) \wedge \omega \\
&= d\omega \wedge *\Omega - \omega \wedge d*\Omega - d*\Omega \wedge \omega - *\Omega \wedge d\omega \\
&\quad + \omega \wedge (d*\Omega + \omega \wedge *\Omega - *\Omega \wedge \omega) \\
&\quad + (d*\Omega + \omega \wedge *\Omega - *\Omega \wedge \omega) \wedge \omega \\
&= d\omega \wedge *\Omega - *\Omega \wedge d\omega - \omega \wedge d*\Omega - d*\Omega \wedge \omega \\
&\quad + \omega \wedge D*\Omega + D*\Omega \wedge \omega
\end{aligned}
$$

elde edilir burada dış çarpım için υ ä E_p ve ω ä E_q olmak üzere $\upsilon \wedge \omega = (-1)^{pq} \omega \wedge \upsilon$ özelliği ve υ ve ω ä E_q için $\upsilon \wedge *\omega = \varepsilon i_\upsilon \omega = \omega \wedge *\upsilon$ özelliği kullanılarak

$$
\begin{aligned}
DD*\Omega &= d\omega \wedge *\Omega + (\omega \wedge \omega) \wedge *\Omega - *\Omega \wedge d\omega - *\Omega \wedge (\omega \wedge \omega) \\
&\quad + (-\omega \wedge d*\Omega) - (-1)^3 \omega \wedge d*\Omega + \omega \wedge D*\Omega + (-1)^{3.1} \omega \wedge D*\Omega \\
&= (d\omega + \omega \wedge \omega) \wedge^* \Omega -^* \Omega \wedge (d\omega + \omega \wedge \omega)
\end{aligned}
$$

ve (4.28) eşitliği ile bu,

$$
DD*\Omega = \Phi \wedge *\Omega - *\Omega \wedge \Phi = 0
$$
(5.38)

olur. Böylece **kovaryant Yang-Mills denklemleri**

$$
D\Omega = 0, \; D*\Omega = -*J(\Phi) \Rightarrow D*J(\Phi) = 0
$$
(5.39)

elde edilir.

Şimdiye kadar tartışılan ayar teorileri elektrozayıf ve güçlü etkileşimler için uygun bir tanımlama getirdikleri için, kütleçekim (gravitasyon) için de uygun bir model oluşturabildikleri düşünülebilir. Kütleçekim uzay-zaman M'nin metrik yapısıyla ilgilidir. Bu lif demet olarak $T(M)$, lif metrik olarak pseudo-Riemannian metrik, ayar grubu olarak Lorentz dönüşümleri ve ayar potansiyeli olarak ω bağlantılarını almayı gerektirir. Böylece olası bir Lagrangian,

$$-\frac{1}{2}R^{\alpha}{}_{\beta} \wedge R^{\beta}{}_{\alpha} + (5.15) \quad madde \quad Lagrangianı$$
(5.40)

olur. Bununla beraber ω bağlantıları (5.15) Lagrangiani'nde bulunmamaktadırlar ve her şey $*$ ve d cinsinden ifade edilmiştir, dolayısıyla bu ifade bir kütleçekim teorisi vermez. (5.40) Lagrangiani göz önüne alındığında $*J = \delta \mathrm{L} / \delta\omega$ akımına Maxwell alanlarından veya skaler alanlardan bir katkı gelmez. Tüm maddenin kütleçekim potansiyelinin kaynağı olduğu bilindiği için bu teori uygun bir yaklaşım oluşturmaz gibi görünüyor. Daha özel olarak tüm enerji ve momentum akımlarının kütleçekim kaynakları oldukları düşünülür. Dolayısıyla, kütleçekimsel Lagrangian'ın kurulması biraz tahmin içerecektir. Bu takdirde maddenin enerji ve momentum akımları $\partial \mathrm{L} / \partial e^{\alpha}$ olurlar. Burada e^{α} ä E_1 dörtlüleri bir bazdır ve bu yüzden onlara A'ların yerini alan ayar potansiyelleri olarak bakılabilir. Eğer bir ortogonal baz kullanılırsa, bazın elemanları

$$g = \sum \eta_{\alpha\beta} e^{\alpha} \otimes e^{\beta}$$

metriğinin tüm bilgisini içerirler ve onun madde üzerindeki etkisi L^{madde}, madde Lagrangianinde içerilen $*$, Hodge yıldız gönderimi vasıtasıyla olur. Artık madde bir skaler ve bir elektromanyetik alan ile gösterilebilir ($\rho e^2 / m = 1$ birimi alınabilir) ve (5.15)'den madde için

$$\mathrm{L}^{\text{madde}} = -\frac{1}{2} J \wedge^{*} J - \frac{1}{2} F \wedge {*F}$$
(5.41)

Lagrangiani yazılır (Lagunov 2001). Burada J ve F (5.14) bağıntısıyla tanımlanmışlardır.

Einstein alan denklemlerinin, Maxwell denklemlerini $\delta A = 0$ Lorentz ayarı ile çalışmak gibi, içinde daha sade olduğu bazı koordinat sistemleri vardır, örneğin $\delta dx = 0$ sağlayan harmonik koordinatlarda yazarken, bazı formüllerin daha kısa olduğu görülecektir. Özellikle ortogonal bazlar özeldirler, çünkü g_{ik} metriğini η_{ik} gibi standart hale getirirler. Bunlar hala bir $e^{\alpha} \rightarrow L^{\alpha}{}_{\beta}(x)e^{\beta}$, $L^{t}(x)\eta L(x) = \eta$ Lorentz dönüşümü olasılığını açık bırakırlar. (5.41) Lagrangiani bu dönüşüm altında değişmezdir ve kütleçekim Lagrangiani de bu dönüşüm altında değişmez kalacak biçimde kurulmalıdır.

$T(M)$ için 4. kısımda sağlanan materyalden L^{g} ä E_4 Lagrangiani seçilmeli ve bu aşağıda verilen koşulları sağlamalıdır:

(a) Baz değişimi altında değişmez (invaryant) olmalıdır

(b) e^{α} 'nın türevinde kuadratik olmalıdır.

Bu koşullar ile,

$$\begin{aligned} L \,\square\, *R = R_{\alpha\beta} \wedge e^{\alpha\beta} &= 2\left(e^{\alpha} \wedge *de_{\alpha}\right) - \left(de^{\alpha} \wedge e^{\beta}\right) \wedge *\left(de_{\beta} \wedge e_{\alpha}\right) \\ &\quad + \frac{1}{2}\left(de^{\alpha} \wedge e_{\alpha}\right) \wedge *\left(de^{\beta} \wedge e_{\beta}\right) \end{aligned}$$

(5.42)

Lagrangiani'nin tek olduğu gösterilebilir: Bir ortogonal bazda sabit η metriği düşünüldüğünde, indisler serbestçe türev altında aşağı ve yukarı alınabilir ve

$$\omega_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\gamma}\varepsilon^{\gamma}{}_{\beta} \tag{5.43}$$

notasyonu kullanılabilir.

$$\begin{aligned} *e^{\alpha\beta} \wedge d\omega_{\alpha\beta} - d\left(*e^{\alpha\beta} \wedge \omega_{\alpha\beta}\right) &= -\left(d * e^{\alpha\beta}\right) \wedge \omega_{\alpha\beta} \\ &= -\omega^{\alpha}{}_{\gamma} \wedge^{*} e^{\gamma\beta} \wedge \omega_{\alpha\beta} + \omega^{\beta}{}_{\gamma} \wedge^{*} e^{\alpha\gamma} \wedge \omega_{\alpha\beta} \\ &= -2^{*} e^{\beta\gamma} \wedge \omega_{\gamma}{}^{\alpha} \wedge \omega_{\alpha\beta} \end{aligned} \tag{5.44}$$

bulunur ve bu eşitlikten,

$$*e^{\alpha\beta} \wedge d\omega_{\alpha\beta} + *e^{\beta\gamma} \wedge \omega_{\gamma}{}^{\alpha} \wedge \omega_{\alpha\beta} = d\left(*e^{\alpha\beta} \wedge \omega_{\alpha\beta}\right) + * e^{\beta\gamma} \wedge \omega_{\gamma}{}^{\alpha} \wedge \omega_{\alpha\beta}$$

olur ve açıkça görüldüğü gibi bu eşitliğin sol tarafı $*e^{\alpha\beta} \wedge \textit{eğrilik}$ olur ve böylece,

$$*e^{\alpha\beta} \wedge R_{\alpha\beta} = d\left(*e^{\alpha\beta} \wedge \omega_{\alpha\beta}\right) + *e^{\beta\gamma} \wedge \omega_{\gamma}{}^{\alpha} \wedge \omega_{\alpha\beta}$$
(5.45)

elde edilir. Diğer yandan,

$$\begin{aligned} e_{\alpha} \wedge *de^{\alpha} &= (-1)^{2+1} * i_{e_{\alpha}} de^{\alpha} = -* i_{e_{\alpha}}\left(-\omega^{\alpha}{}_{\beta} \wedge e^{\beta}\right) \\ &= *e^{\beta}\left\langle \omega^{\alpha}{}_{\beta} \mid e_{\alpha}\right\rangle \end{aligned}$$

dir ve bu eşitlik kullanılarak,

$$\begin{aligned} &\left(*e^{\alpha\beta}\right) \wedge \omega_{\alpha\beta} = *i_{\omega_{\alpha\beta}} e^{\alpha\beta} = 2 * e^{\beta}\left\langle \omega^{\alpha}{}_{\beta} \mid e_{\alpha}\right\rangle \\ &\qquad \Rightarrow \frac{1}{2}\left(*e^{\alpha\beta}\right) \wedge \omega_{\alpha\beta} = e_{\alpha} \wedge *de^{\alpha} \end{aligned}$$
(5.46)

bulunur. (5.76)'dan

$$
\begin{aligned}
F_{\alpha} &= -\frac{1}{2} * \left(\omega_{\beta\gamma} \wedge * e^{\alpha\beta\gamma} \right) \\
-de^{\alpha} \wedge * F &= \frac{1}{2} de^{\alpha} \wedge \left(\omega_{\beta\gamma} \wedge * e^{\alpha\beta\gamma} \right) \\
&= \frac{1}{2} \omega_{\alpha\sigma} \wedge e^{\sigma} \wedge \omega_{\beta\gamma} \wedge * e^{\alpha\beta\gamma} \\
&= \frac{1}{2} \omega_{\alpha\sigma} \wedge \omega_{\beta\gamma} \left[\eta^{\sigma\alpha} * e^{\beta\gamma} - \eta^{\sigma\beta} * e^{\sigma\gamma} + \eta^{\sigma\gamma} * e^{\alpha\beta} \right] \\
&= * e^{\gamma\alpha} \wedge \omega_{\gamma}{}^{\beta} \wedge \omega_{\alpha\beta}
\end{aligned}
$$

(5.47)

bulunur. Diğer taraftan, (5.74) ifadesinde,

$$
* F_{\alpha} = e^{\beta} \wedge * \left(de_{\beta} \wedge e_{\alpha} \right) - \frac{1}{2} e_{\alpha} \wedge * \left(de^{\beta} \wedge e_{\beta} \right)
$$

olarak verildi. Bu ifade (5.47)'nın sol tarafında yerine yazılırsa,

$$
\begin{aligned}
& -\left(de^{\alpha} \wedge e^{\beta} \right) \wedge * \left(de_{\beta} \wedge e_{\alpha} \right) + \frac{1}{2} \left(de^{\alpha} \wedge e_{\alpha} \right) \wedge * \left(de^{\beta} \wedge e_{\beta} \right) \\
& = * e^{\gamma\alpha} \wedge \omega_{\gamma}{}^{\beta} \wedge \omega_{\alpha\beta}
\end{aligned}
$$

(5.48)

elde edilir ve (5.46) ve (5.48) ifadeleri (5.45) ifadesinde yerine yazıldığında,

$$
\begin{aligned}
* e^{\alpha\beta} \wedge R_{\alpha\beta} = {} & 2 \left(e_{\alpha} \wedge * de^{\alpha} \right) - \left(de^{\alpha} \wedge e^{\beta} \right) \wedge * \left(de_{\beta} \wedge e_{\alpha} \right) \\
& + \frac{1}{2} \left(de^{\alpha} \wedge e_{\alpha} \right) \wedge * \left(de^{\beta} \wedge e_{\beta} \right)
\end{aligned}
$$

biçiminde (5.42) Lagrangian ifadesi elde edilir.

Böylece toplam Lagrangian üç katkıdan oluşacaktır:

1. Skaler alandan gelen katkılar: $\mathrm{L}^S = -\frac{1}{2} J \wedge *J$

2. elektromanyetik alan katkıları: $\mathrm{L}^e = -\frac{1}{2} F \wedge *F$

3. Kütleçekim (gravitasyon) katkısı: $\mathrm{L}^g = \frac{1}{16\pi\kappa} R_{\alpha\beta} \wedge *e^{\alpha\beta}$

Burada kolaylık olması için $\rho e^2 / m = 1$ alındı ve kütleçekim katkısındaki $8\pi\kappa$ terimi Newtonian teori ile uyumu sağlaması için yazılır ve κ evrensel çekim sabitidir. Böylece,

$$F = dA, \; J = dS + eA$$
(5.49)

olmak üzere, toplam sistem için Lagrangian

$$\mathrm{L} = -\frac{1}{2} J \wedge *J - \frac{1}{2} F \wedge *F + \frac{1}{16\pi\kappa} R_{\alpha\beta} \wedge *e^{\alpha\beta}$$
(5.50)

olur. Eğer e^α, A'ya tamamlayıcı gibi düşünülürse, o zaman Lorentz dönüşümleri altında değişmez olan $dA \wedge *dA$'ya en sade benzetme $de^\alpha \wedge *de^\alpha$ olacaktır. (5.49) Lagrangiani'nin biraz değişik formu lokal Lorentz dönüşümleri altında değişmez kalır. Bu değişmezlikten (invaryansdan) dolayı Euler denklemlerinin çıkarılışı için bir ortogonal baz kullanılabilir. g metriğinin değişimi (varyasyonu), herhangi bir ortogonallik sınırlaması dayatmaksızın e'ye değişimler hesabı uygulanarak çıkar. Burada η metriği ile birlikte lokal ayar dönüşümleri altında bir diğer sabit nicelik $*1$'dir. Bu herhangi bir türev içermediğinden bir diferensiyel denkleme neden olmaz.

İlkin Einstein, alan denklemlerine $*1\Lambda$ gibi bir sabit terim ekledi ve sonra bu terimden vazgeçti ve bu konuda herhangi bir deneysel gözlem de yapılabilmiş değildir. Yukarıda bir ortogonal bazda (5.44) ifadesinin kütleçekimsel Lagrangianini verdiği gösterildi, dolayısıyla bu ifade kullanılarak basitçe kütleçekim için biraz farklı olarak lokal ayar dönüşümleri altında yine değişmez olan,

$$L' = -\frac{1}{16\pi\kappa} * e^{\beta\gamma} \wedge \omega_{\gamma}{}^{\alpha} \wedge \omega_{\alpha\beta}$$
(5.51)

Lagrangiani elde edilir.

5.2 Euler-Lagrange Denklemlerinin Türetilmesi ve Einstein Alan Denklemleri

Alan denklemlerini bulmak için toplam Lagrangian (5.50)'nin üç bileşenine ayrı ayrı değişimler hesabı uygulanacaktır.

Skaler alan Lagrangianinin değişimi: (2.67(iii))'den $e^{\alpha} \wedge *J = J \wedge *e^{\alpha}$ olduğu biliniyor, bu özellikten,

$$e^{\alpha} \wedge \delta * J + \left(\delta e^{\alpha}\right) \wedge *J = \delta J \wedge *e^{\alpha} + J \wedge \delta * e^{\alpha}$$
$$\Rightarrow e^{\alpha} \wedge \delta * J = \delta J \wedge *e^{\alpha} + J \wedge \delta * e^{\alpha} - \left(\delta e^{\alpha}\right) \wedge *J$$
(5.52)

sonucu çıkar. $\varepsilon = *1$, hacim m-formu ortogonal bazda,

$$\varepsilon = *1 = \frac{1}{m!}\varepsilon_{i_1 \ldots i_p} e^{i_1 \ldots i_m}$$
$$*e_{i_1} = \frac{1}{(m-1)!}\varepsilon_{i_1 \ldots i_p} e^{i_2 \ldots i_m}$$

göz önüne alınarak,

$$\delta\varepsilon = \frac{1}{m!}\varepsilon_{i_1\ldots i_p}\left(\delta e^{j_1}\wedge e^{j_2\ldots i_m} + \delta e^{j_2}\wedge e^{j_1 i_3\ldots i_m} + \ldots + \delta e^{j_m}\wedge e^{j_1\ldots i_{m-1}}\right)$$
$$= \frac{1}{m!}m\varepsilon_{i_1\ldots i_p}\left(\delta e^{j_1}\wedge e^{j_2\ldots i_m}\right) = \delta e^{j_1}\wedge\left(\frac{1}{(m-1)!}\varepsilon_{i_1\ldots i_p}e^{j_2\ldots i_m}\right)$$
$$= \delta e^{j_1}\wedge * e_{i_1}$$
(5.53)

olur. Bu takdirde,

$$\delta e^{\alpha} = \delta e^{\beta}\wedge *\left(e^{\alpha}\wedge e_{\beta}\right) = \delta e^{\beta}\wedge i_{\beta} * e^{\alpha},\;\; i_{\beta} = i_{e_{\beta}}$$
(5.54)

olur. (5.52) ifadesinde her iki taraf J_{α} ile çarpılıp (5.54) yerine yazılır ve $J = J_{\alpha}e^{\alpha}$ eşitliği kullanılırsa,

$$J\wedge\delta J = \delta J\wedge J_{\alpha} * e^{\alpha} + J\wedge J_{\alpha}\left(\delta e^{\beta}\wedge i_{\beta} * e^{\alpha}\right) - J_{\alpha}\left(\delta e^{\alpha}\right)\wedge * J$$
$$= \delta J\wedge * J_{\alpha}e^{\alpha} + J\wedge\left(\delta e^{\beta}\wedge i_{\beta} * J_{\alpha}e^{\alpha}\right) - J_{\alpha}\left(\delta e^{\alpha}\right)\wedge * J$$
$$= \delta J\wedge * J - \delta e^{\alpha}\wedge J\wedge i_{\alpha} * J - \delta e^{\alpha}\wedge\left(i_{e_{\alpha}}J_{\alpha}e^{\alpha}\right)\cdot * J$$
$$= \delta J\wedge * J - \delta e^{\alpha}\wedge\left[J\wedge i_{\alpha} * J + \left(i_{\alpha}J\right)\cdot * J\right]$$

elde edilir ve buradan,

$$\delta\left(-\frac{1}{2}J\wedge * J\right) = -\delta J\wedge * J + \frac{1}{2}\delta e^{\alpha}\wedge\left[J\wedge i_{\alpha} * J + \left(i_{\alpha}J\right)\cdot * J\right]$$
(5.55)

bulunur.

Elektromanyetik Lagrangianinin değişimi: Yukarıda olduğu gibi

$$e^{\alpha\beta} \wedge \delta * F = \delta F \wedge *e^{\alpha\beta} + F \wedge \delta * e^{\alpha\beta} - \left(\delta e^{\alpha\beta} \right) \wedge *F$$
(5.56)

olur ve

$$i_{e_j} * e^{j_1 \dots j_p} = *e^{j_1 \dots j_p j}$$

ifadesinden,

$$\delta * e^{\alpha\beta} = \delta e^{\gamma} \wedge i_{\gamma} * e^{\alpha\beta} = \delta e^{\gamma} \wedge *e^{\alpha\beta}{}_{\gamma}$$
(5.57)

bulunur. Yine (5.56)'nın her iki yanı $F_{\alpha\beta}$ ile çarpılıp, (5.57) yerine yazılırsa ve $F_{\alpha\beta} e^{\alpha\beta} = F$ eşitliğine dikkat edilirse

$$\begin{aligned} F \wedge \delta * F &= \delta F \wedge *F_{\alpha\beta} e^{\alpha\beta} + F \wedge F_{\alpha\beta} \delta e^{\gamma} \wedge *e^{\alpha\beta}{}_{\gamma} - F_{\alpha\beta} \left(\delta e^{\alpha\beta} \right) \wedge *F \\ &= \delta F \wedge *F + F \wedge \delta e^{\gamma} \wedge *F_{\alpha\beta} e^{\alpha\beta}{}_{\gamma} - \delta e^{\beta} \wedge F_{\alpha\beta} e^{\alpha} \wedge *F \\ &= \delta F \wedge *F + \delta e^{\gamma} \wedge F \wedge i_{\gamma} * F - \delta e^{\beta} \wedge i_{\beta} F_{\alpha\beta} e^{\alpha\beta} \wedge *F \\ &= \delta F \wedge *F + \delta e^{\alpha} \wedge \left[F \wedge i_{\alpha} * F - \left(i_{\alpha} F \right) \wedge *F \right] \end{aligned}$$

elde edilir ve böylece,

$$\delta \left(-\frac{1}{2} F \wedge *F \right) = -\delta F \wedge *F + \frac{1}{2} \delta e^{\alpha} \wedge \left[\left(i_{\alpha} F \right) \wedge *F - F \wedge i_{\alpha} * F \right]$$
(5.58)

elde edilir.

Kütleçekimsel kısmın değişimi:

$$\delta * e^{\alpha\beta} = \delta e^{\gamma} \wedge i_{\gamma} * e^{\alpha\beta} = \delta e^{\gamma} \wedge *e^{\alpha\beta}{}_{\gamma}, \quad e^{\alpha\beta}{}_{\gamma} = \eta_{\gamma\sigma} e^{\alpha\beta\sigma}$$
(5.59)

eşitliği ile başlanabilir. $R_{\alpha\beta}$ eğriliğinin kendisi ω'lardan meydana geliyor ve e'lerin değişimi ω'ların değişimine indirgenebilir.

$$\delta\left(R_{\alpha\beta} \wedge *e^{\alpha\beta} \right) = \delta R_{\alpha\beta} \wedge *e^{\alpha\beta} + R_{\alpha\beta} \wedge \delta * e^{\alpha\beta}$$
(5.60)

bu eşitliğin sağ tarafındaki ilk terim ele alınırsa, ve d ile δ işlemcilerinin sıra değiştikleri dikkate alınırsa,

$$\begin{aligned} *e^{\alpha\beta} \wedge \delta R_{\alpha\beta} &= *e^{\alpha\beta} \wedge \delta\left(d\omega_{\alpha\beta} + \omega_{\alpha}{}^{\gamma} \wedge \omega_{\gamma\beta} \right) \\ &= *e^{\alpha\beta} \wedge \left(d\delta\omega_{\alpha\beta} + \delta\omega_{\alpha}{}^{\gamma} \wedge \omega_{\gamma\beta} + \omega_{\alpha}{}^{\gamma} \wedge \delta\omega_{\gamma\beta} \right) \\ &= *e^{\alpha\beta} \wedge d\delta\omega_{\alpha\beta} + 2 * e^{\alpha\beta} \wedge \omega_{\alpha}{}^{\gamma} \wedge \delta\omega_{\gamma\beta} \end{aligned}$$

elde edilir. Eşitliğin sağ tarafına $d * e^{\alpha\beta} \wedge \delta\omega_{\alpha\beta}$ terimi eklenip çıkarılırsa,

$$*e^{\alpha\beta} \wedge \delta R_{\alpha\beta} = d\left(*e^{\alpha\beta} + \delta\omega_{\alpha\beta} \right) - d * e^{\alpha\beta} \wedge \delta\omega_{\alpha\beta} + 2 * e^{\alpha\beta} \wedge \omega_{\alpha}{}^{*\gamma} \wedge \delta\omega_{\gamma\beta}$$

bulunur ve (4.20) ve (4.42)'den

$$D * e^{\alpha\beta} = d * e^{\alpha\beta} - 2 * e^{\alpha\gamma} \wedge \omega_{\gamma}{}^{\beta}$$

olduğu biliniyor ve sıfır burulmalı olması için, $D * e^{\alpha\beta} = 0$ olduğu için yukarıdaki eşitlik,

$$*e^{\alpha\beta} \wedge \delta R_{\alpha\beta} = d\left(*e^{\alpha\beta} + \delta\omega_{\alpha\beta}\right) - D * e^{\alpha\beta}$$
$$= d\left(*e^{\alpha\beta} + \delta\omega_{\alpha\beta}\right)$$
(5.61)

elde edilir. (5.60)'ın sağdaki ikinci terimi ele alınırsa, (5.59) ifadesinden,

$$R_{\alpha\beta} \wedge \delta * e^{\alpha\beta} = R_{\alpha\beta} \wedge \delta e^{\gamma} \wedge *e^{\alpha\beta}{}_{\gamma}$$

bulunur ve böylece,

$$\delta\left(\frac{1}{16\pi\kappa} R_{\alpha\beta} \wedge *e^{\alpha\beta}\right) = \frac{1}{16\pi\kappa}\left(\delta e^{\alpha} \wedge *e_{\alpha\beta\gamma} \wedge R^{\beta\gamma} + d\left(*e^{\alpha\beta} + \delta\omega_{\alpha\beta}\right)\right)$$
(5.62)

elde edilir ve bulunan üç sonucun birleşimi

$$\delta \mathrm{L} = -\delta J \wedge *J - \delta F \wedge *F + \delta e^{\alpha} \wedge \left[*t_{\alpha} + * \mathrm{T}_{\alpha} + \frac{1}{16\pi\kappa} * e_{\alpha\beta\gamma} \wedge R^{\beta\gamma} \right]$$
$$+ \frac{1}{16\pi\kappa} d\left(*e^{\alpha\beta} + \delta\omega_{\alpha\beta}\right)$$
$$*t_{\alpha} = \frac{1}{2}[J \wedge i_{\alpha} * J + (i_{\alpha} J) \cdot *J]$$
$$*\mathrm{T}_{\alpha} = \frac{1}{2}[(i_{\alpha} F) \wedge *F - F \wedge i_{\alpha} * F]$$
(5.63)

$*t_{\alpha}$ skaler alanın enerji-momentum tensörü ve $*\mathrm{T}_{\alpha}$ elektromanyetik alanın enerji-momentum tensörüdür. S ve A cinsinden $J = dS + eA$ ve $F = dA$ yazılarak

$$
\begin{aligned}
\delta \mathrm{L} &= \delta S d * J - \delta A \wedge (e * J + d * F) \\
&+ \delta e^{\alpha} \wedge \left[*t_{\alpha} + * \mathrm{T}_{\alpha} + \frac{1}{16\pi\kappa} * e_{\alpha\beta\gamma} \wedge R^{\beta\gamma} \right] \\
&- d \left[\delta S * J + \delta A \wedge *F - \frac{1}{16\pi\kappa} \left(*e^{\alpha\beta} + \delta\omega_{\alpha\beta} \right) \right]
\end{aligned}
$$
(5.64)

bulunur. Burada (5.16a,b) sonuçları kullanıldı. $\delta \int \mathrm{L} = 0$ koşulundan (5.64) ifadesi kullanılarak toplam sistemin alan denklemleri,

(a) $d * J = 0$
(b) $d * F = -e * J$
(c) $-\frac{1}{2} * e_{\alpha\beta\gamma} \wedge R^{\beta\gamma} = 8\pi\kappa (*t_{\alpha} + * \mathrm{T}_{\alpha})$
(5.65)

olarak bulunur. Burada (a) **yük korunumunu**, (b) **Maxwell alan denklemlerin**i ve (c) **Einstein alan denklemlerini** gösteriyor. (c) denklemine dikkat edilirse sol tarafı uzayın eğriliğini temsil ederken, sağ tarafı bir skaler alan ile elektromanyetik alanın toplam enerji-momentum akımlarını temsil ediyor. Bu akımların mekanikten bilinen $p\dot{q} - L$ sahip oldukları kolayca görülebilir:

$$
\begin{aligned}
*t_{\alpha} &= \frac{1}{2} [J \wedge i_{\alpha} * J + (i_{\alpha} J) \cdot *J] \\
&= (i_{\alpha} * J) - i_{\alpha} \left(-\frac{1}{2} J \wedge *J \right) \\
&= (i_{\alpha} * J) - i_{\alpha} \mathrm{L}^{S}
\end{aligned}
$$
(5.66)

$$
\begin{aligned}
*\mathrm{T} &= \frac{1}{2} [(i_{\alpha} F) \wedge *F - F \wedge i_{\alpha} * F] \\
&= \frac{1}{2} [(i_{\alpha} F) \wedge *F + F \wedge i_{\alpha} * F] - dA \wedge i_{\alpha} * F \\
&= i_{\alpha} * F \wedge dA - i_{\alpha} \mathrm{L}^{e}
\end{aligned}
$$
(5.67)

Burada $*J = -\partial \mathrm{L}^S / \partial dS$ (ve $*F = -\partial \mathrm{L}^e / \partial dA$), p 'ye, momentuma; dSE (ve dA), $\dot{q}$ 'ya karşı gelirler. (5.64) denklemleri türetilirken bir ortogonal baz kullanılmasına rağmen, $R_{\alpha\beta}$ için (4.31) homojen dönüşüm kuralından dolayı, (c) Einstein alan denklemi herhangi bir bazda aynı forma sahiptir. (c) denklemi (a) ve (b) denklemlerinden farklıdır ve bir alan şiddetinin türevinin akıma eşit olduğunu söylemez ve uzayın yapısını enerji-momentum ile ilişkilendirir.

Enerji, momentum ve elektrik akımı 3-formları, hepsi (5.65) denklemlerinde bulunurlar. (5.65 (c)) denklemi 1-formlar cinsinden yazılabilir. Hodge yıldız işlemcisi için

$$e_j \wedge *e^{j_1 \cdots j_p} = \sum_{r=1}^{p} (-1)^{p+r} \delta^{j_r}{}_j * e^{j_1 \cdots j_{r-1} j_{r+1} \cdots j_p} = (-1)^{p+1} * i_{e_j} e^{j_1 \cdots j_p}$$

kuralı kullanılırsa, her ω ä E_2 için

$$-*e_{\alpha\beta\gamma} \wedge \omega = \left(*e_\alpha i_\beta i_\gamma + *e_\beta i_\gamma i_\alpha + *e_\gamma i_\alpha i_\beta \right) \omega$$
(5.68)

olur. Eğer $\omega = R^{\beta\gamma}$ ise,

$$i_\alpha i_\beta R^\beta{}_\gamma = i_\alpha R_\gamma = i_\gamma R_\alpha$$

ve

$$\begin{aligned} *e^\gamma i_\gamma R_\alpha &= *e^\gamma \left(i_\gamma R_{\alpha\beta} e^\beta \right) = *e^\gamma \left(R_{\alpha\beta} i_\gamma e^\beta \right) \\ &= *e^\gamma \left(R_{\alpha\beta} \left\langle e^\beta \mid e_\gamma \right\rangle \right) = *e^\gamma \left(R_{\alpha\beta} \delta_\beta{}^\gamma \right) \\ &= R_{\alpha\beta} * e^\gamma \delta_\beta{}^\gamma = R_{\alpha\gamma} * e^\gamma = *R_{\alpha\gamma} e^\gamma = *R_\alpha \end{aligned}$$
(5.69)

olur. (5.68) ve (5.69) ifadeleri kullanılarak,

$$
\begin{aligned}
-*e_{\alpha\beta\gamma}\wedge R^{\beta\gamma} &= *e_{\alpha}i_{\beta}i_{\gamma}R^{\beta\gamma} + *e_{\beta}i_{\gamma}i_{\alpha}R^{\beta\gamma} + *e_{\gamma}i_{\alpha}i_{\beta}R^{\beta\gamma} \\
&= -*e_{\alpha}i_{\beta}R^{\beta} + *e_{\beta}i_{\alpha}R^{\beta} + *e_{\gamma}i_{\alpha}R^{\gamma} \\
&= -*e_{\alpha}R + *e_{\beta}i^{\beta}R_{\alpha} + *e_{\gamma}i^{\gamma}R_{\alpha} = 2*R_{\alpha} - *e_{\alpha}R
\end{aligned}
$$

bulunur. Bu ifade (5.65 (c)) Einstein alan denkleminde yerine yazılırsa,

$$R_{\alpha} - \frac{1}{2}e_{\alpha}R = 8\pi\kappa\left(t_{\alpha} + \mathrm{T}_{\alpha}\right)$$
(5.70)

olarak Einstein alan denklemlerinin **klasik karşılığı** bulunur veya $R = 8\pi\kappa\left(t + \mathrm{T}\right)$ olmak üzere,

$$R_{\alpha} = 8\pi\kappa\left(t_{\alpha} + \mathrm{T}_{\alpha} + \frac{1}{2}e_{\alpha}\left(t + \mathrm{T}\right)\right),\ t_{\alpha} = i_{\alpha}t^{\alpha},\ \mathrm{T}_{\alpha} = i_{\alpha}\mathrm{T}^{\alpha}$$
(5.71)

yazılır. Riemann-Christoffel tensörünün (4.63) ve (4.64) bileşenleri,

$$R_{a} = R^{\gamma}{}_{\alpha\gamma\beta}e^{\beta},\quad R = g_{\alpha\beta}R^{\gamma}{}_{\sigma\gamma}{}^{\sigma}e^{\alpha\beta}$$

ve enerji-momentum tensörü için

$$t_{\alpha} + \mathrm{T}_{\alpha} = T_{\alpha\beta}e^{\beta}$$

ifadesi kullanılırsa (5.70) ifadesi

$$R^{\gamma}{}_{\alpha\gamma\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} R^{\gamma}{}_{\sigma\gamma}{}^{\sigma} = 8\pi\kappa T_{\alpha\beta}$$
(5.72)

bulunur.

Kütleçekimsel Lagrangian bir Yang-Mills denklemi olarak (5.51)'de,

$$\mathrm{L}' = -\frac{1}{16\pi\kappa} - e^{\beta\gamma} \wedge \omega_{\gamma}{}^{\alpha} \wedge \omega_{\alpha\beta}$$

şeklinde verildi ve $8\pi\kappa = 1$ alınarak, bu ifadenin sağ tarafına (5.48) eşitliği yazılırsa,

$$\mathrm{L}' = -\frac{1}{2}\left(de^{\alpha} \wedge e^{\beta} \right) \wedge -\left(de_{\beta} \wedge e_{\alpha} \right) + \frac{1}{4}\left(de^{\alpha} \wedge e_{\alpha} \right) \wedge -*\left(de^{\beta} \wedge e_{\beta} \right)$$
(5.73)

elde edilir. $J = dS + eA$ ve $F = dA$ ve sistemin toplam Lagrangianı göz önüne alınarak e^{α}'ya göre yukarıda olduğu gibi değişimler hesabı uygulanması ile (5.65 (c)) ifadesinin **Yang-Mills karşılığı**,

$$d * F_{\alpha} = -* J_{\alpha}$$
$$*F_{\alpha} = \frac{\partial \mathrm{L}}{\partial de^{\alpha}} = e^{\beta} \wedge *\left(de_{\beta} \wedge e_{\alpha} \right) - \frac{1}{2} e_{\alpha} \wedge *\left(de^{\beta} \wedge e_{\beta} \right)$$
$$*J_{\alpha} = \frac{\partial \mathrm{L}}{\partial e^{\alpha}} = i_{\alpha} * J \wedge dS + i_{\alpha} * F \wedge dA + i_{\alpha} * F_{\beta} \wedge de^{\beta} - i_{\alpha}\mathrm{L}'$$
(5.74)

bulunur. Bu denklemler bir akımın dualini veren bir alan şiddetinin dış türevi formundalar ve denklemlerden görüldüğü gibi, e^{α}'dan akımlara

$$*t_{\alpha} = i_{\alpha} * F_{\beta} \wedge de^{\beta} - i_{\alpha}\mathrm{L}'$$
(5.75)

katkısı olur. Bu katkı kütleçekimsel alanın enerji-momentum akımları olarak yorumlanabilir ve açıkça görüldüğü gibi S ve A için (5.66) ve (5.67) ifadeleriyle akımlar gibi, $p\dot{q}-L$ formuna sahiptirler.

$e^{\alpha} \rightarrow L^{\alpha}{}_{\beta}(x)e^{\beta}$ altında $d*F_{\alpha}$ ve $*J_{\alpha}$'nın ikisi de homojen dönüşmezler. $*J_{\alpha}$'ya gelen üç katkıda yalnızca t_{α} homojen dönüşür. Verilen bir x noktası için $t_{\alpha}(x)=0$ olan bir çerçeve bulunabilir. Aksine, Cartesian olmayan koordinatlara sahip düz bir uzay üzerinde $t^{\alpha} \neq 0$'dır. Toplam akımlar korunur, $d*J_{\alpha}=0$ ve dolayısıyla yine bir kapalı evrenin veya bir periyodik alanın toplam enerji-momentumu sıfırdır sonucu çıkar.

Klasik karşılıkla bağlantı kurabilmek için, de'ler tekrar ω cinsinden ifade edilmelidir. (2.67 (iii)) ifadesine göre dış çarpım iç çarpımın dualidir. Bu sonuç kullanılarak,

$$
\begin{aligned}
F^{\alpha} &= i_{\beta}\left(de^{\beta} \wedge e^{\alpha} - \frac{1}{2}\eta^{\alpha\beta} de^{\gamma} \wedge e_{\gamma} \right) \\
&= -i_{\beta}\left(\omega^{\beta}{}_{\gamma} \wedge e^{\gamma\alpha} - \frac{1}{2}\eta^{\alpha\beta}\omega^{\gamma}{}_{\sigma} \wedge e^{\sigma}{}_{\gamma} \right) \\
&= -\left\langle \omega_{\beta\gamma} \mid e^{\beta} \right\rangle e^{\gamma\alpha} + \frac{1}{2}\left\langle \omega_{\gamma\sigma} \mid e^{\alpha} \right\rangle e^{\sigma\gamma} \\
&= -\frac{1}{2} i_{\omega_{\beta\gamma}} e^{\alpha\beta\gamma} = -\frac{1}{2} * \left(\omega_{\beta\gamma} \wedge * e^{\alpha\beta\gamma} \right)
\end{aligned}
$$
(5.76)

bulunur. Bu ifade kullanılırsa,

$$
d*F_{\alpha} = \frac{1}{2} d\left(\omega_{\beta\gamma} \wedge * e^{\alpha\beta\gamma} \right)
$$
(5.77)

bulunur. Bu ifade (5.65 (c))'nin sol tarafıyla aynı forma sahiptir. Bu son ifadeyi ω cinsinden yazabilmek için,

$$*e^{\alpha\beta\gamma} = \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} e_{\delta}$$

ifadesinden yararlanılabilir,

$$d\left(\omega_{\beta\gamma} + e_{\delta}\right) = d\omega_{\beta\gamma} - \omega_{\beta\gamma} \wedge \omega_{\sigma\delta} \wedge e^{\sigma}$$

ve diğer yandan,

$$R_{\beta\gamma} = d\omega_{\beta\gamma} - \omega_{\sigma\beta} \wedge \omega^{\sigma}{}_{\gamma}$$

dır. Bu ifadeler yerlerine yazılarak (5.74) ifadesi (5.65 (c)) ile karşılaştırıldığında,

$$*t^{\alpha} = -\frac{\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}}{16\pi\kappa}\left(\omega_{\sigma\beta} \wedge \omega^{\sigma}{}_{\gamma} \wedge e_{\delta} - \omega_{\beta\gamma} \wedge \omega_{\sigma\delta} \wedge e^{\sigma}\right)$$
(5.78)

elde edilir. Akımların bu formu ilk defa Landau ve LİfshitZ tarafından ileri sürülmüştür, dolayısıyla (5.74) denklemlerine **Einstein denklemlerinin Landau-LİfshitZ formu** ve bu akıma da akımların **Landau-LİfshitZ formu** denir. Onların kullandığı baz bir ortogonal baz değildir, denklemler doğal bazlarda üretilmiştir. Bir doğal bazda

$$e^{\alpha} = dx^{\alpha},\ \omega_{\alpha\beta} = \Gamma_{\alpha\beta\mu} dx^{\mu};\ \Gamma_{\sigma\beta\mu} = \Gamma_{\sigma\mu\beta}$$

dır. Bu takdirde kütleçekimin enerji-momentum tensörü simetriktir, yani $*t^{\alpha}$'nın bu bazdaki bileşenleri simetriktirler:

$$dx^{\rho} \wedge *t^{\alpha} = -\frac{\sqrt{|g|}}{16\pi\kappa}\left(\Gamma_{\sigma\beta\mu}\Gamma^{\sigma}{}_{\gamma\upsilon}\varepsilon^{\rho\mu\upsilon}{}_{\delta} + \Gamma_{\beta\gamma\mu}\Gamma_{\sigma\delta\upsilon}\varepsilon^{\rho\mu\upsilon\sigma}\right).\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} *1$$
$$= dx^{\alpha} \wedge *t^{\rho} \tag{5.79}$$

Bu simetri lokal açısal momentumun korunumunu sağlar:

$$d\left(*t^{\beta} + *\mathrm{T}^{\beta} + *t^{\beta}\right) = 0$$

ifadesi, $dx^{\rho} \wedge *t^{\alpha} - dx^{\alpha} \wedge *t^{\rho} = 0$ ifadesi t ve T için olduğu kadar t için de sağlanıyorsa,

$$d\left(x^{\alpha}\left(*t^{\beta} + *\mathrm{T}^{\beta} + *t^{\beta}\right) - x^{\beta}\left(*t^{\alpha} + *\mathrm{T}^{\alpha} + *t^{\alpha}\right)\right)$$

ifadesinin doğru olacağını ifade eder. Burada x^{α} bir lokal koordinattır ve böylece açısal momentumun korunum yasası tek bir haritanın bölgesi üzerinde ifade edilmiş oldu.

Burada Abelian olmayan Yang-Mills teorilerine benzerlik gösterildi. Alan denklemleri lineer değildirler, çünkü kütleçekimsel alan enerji ve momentum taşır. Bununla beraber, bu nicelikler lokal Lorentz dönüşümleri altında homojen olarak dönüşmediklerinden dolayı lokal olmaktan kurtulurlar. $R_{\alpha\beta}$ eğrilikleri değil fakat onların R_{α} kısalmaları (büzülmeleri) Einstein denklemleri tarafından lokal olarak belirlenirler. Eğer $C_{\alpha\beta}$ Weyl formları bilinirse, örneğin uzay konformal olarak düz ($C_{\alpha\beta} = 0$) ise, o zaman (5.65 (c)) $R_{\alpha\beta}$ eğriliklerini belirlerler. Boş uzayda (vakumda) ($\mathrm{T}_{\alpha} = t_{\alpha} = 0$), $R_{\alpha\beta}$ ve $C_{\alpha\beta}$ aynıdırlar ve konformal olarak düz olan çözümler düzdürler (flat). Weyl formlarının sıfır olduğu iki ve üç boyutlarda Einstein denklemlerinin çözümlerinin tümü düzdür.

Önerme (5.2.1): e^{α}'lar bir u lokal koordinatına göre olası süreksiz ikinci türevlere sahip olsunlar ve t^{α} ve T^{α} sürekli olsunlar. O zaman ya $R_{\alpha\beta}$ süreklidir veyahut

$$n^2 = n_\alpha n_\beta \eta^{\alpha\beta} = \langle du \mid du \rangle = 0$$

olmak üzere bir ortogonal bazda, $du = n_\alpha e^\alpha$ 'dır (Thirring 1997).

İspat: de^α 'nın süreksiz birinci türevler içeren kısmı du ile orantılı olmalıdır:

$$de^\alpha = \left(A^\alpha{}_\beta + S^\alpha{}_\beta \right) du \wedge e^\beta$$
$$A_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\gamma} A^\gamma{}_\beta = -A_{\beta\alpha}, \; S_{\alpha\beta} = S_{\beta\alpha}$$

Katsayılar bir simetrik bir de antisimetrik kısma ayrıldılar, çünkü bunlar $\omega_{\alpha\beta} = -\omega_{\beta\alpha}$ içinde farklı şekillerde davranırlar. Eğer aşağıdaki denklemler modülo sürekli terimler kabul edilirse, o zaman

$$\omega_{\alpha\beta} = -A_{\alpha\beta} du + S_\alpha n_\beta - S_\beta n_\alpha, \; S_\alpha = S_{\alpha\gamma} e^\gamma$$

yazılabilir. Bu, $de^\alpha = -\omega^\alpha{}_\beta \wedge e^\beta$ ifadesinde yerine yazılarak doğrulanabilir. Varsayıma göre eğrilikteki herhangi bir olası süreksizlik $d\omega_{\alpha\beta}$ ile meydana gelir, bundan dolayı $dS_\alpha = du \wedge S'_\alpha$ olmak üzere ya S'_α ya da $dA_{\alpha\beta} = A'_{\alpha\beta} du$ ile meydana gelir. Son olasılık $d\omega_{\alpha\beta}$ 'ya katkı yapmaz ve böylece eğriliğin süreksiz kısmı

$$R_{\alpha\beta} = du \wedge \left(S'_\alpha n_\beta - S'_\beta n_\alpha \right)$$

olur ve bundan dolayı

$$R_\beta \wedge du = i_\alpha R^\alpha{}_\beta \wedge du = \left(n^\alpha S'_\alpha n_\beta - S' n^2 \right) \wedge du$$

olur. Bu takdirde,

$$\left(R_\beta n_\gamma - R_\gamma n_\beta \right) \wedge du = n^2 \left(S'_\gamma n_\beta - S'_\beta n_\gamma \right) \wedge du = n^2 R_{\gamma\beta}$$

dır. (5.65 (c)) Einstein denklemlerine göre R_α sürekli olmak zorunda olduğu için, ya $n^2 = 0$ veyahut $R_{\gamma\beta}$ sürekli kalır.

Eğer e^α'ların C^∞ olmasına izin verilmezse, o zaman düz uzayda dahi onları süreksiz ikinci türevli seçmek olasıdır. $\delta dA = J$, denklemleri J sürekli olsa dahi A'da süreksizliklere izin verir; bununla birlikte, bunlar bir $A = d\Lambda$ ayar potansiyelinde içerilebilirler. Benzer alternatifler $F = dA$ süreklidir veya $n^2 = 0$'dır.

5.3 Lineer Yaklaşım ve Büzülmüş Bianchi Özdeşliği

Einstein ve Maxwell denklemlerinin karakteristikleri arasında bulunan benzerlik zayıf alanlar durumunda kütleçekimsel alan için bir düzlem dalga çözümüne genişletilebilir. Bu yaklaşım Einstein alan denklemlerini çözmek için özellikle de içinde bulunulan uzay yeterince zayıf eğimli ise bir ilk yaklaşımdır. Bir ortogonal baz

$$e^\alpha = dx^\alpha + \varphi^\alpha{}_\beta dx^\beta\,,\ \ \varphi_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\sigma}\varphi^\sigma{}_\beta = \varphi_{\beta\alpha}$$
(5.80)

ile tanımlanmış olsun ve her x için $\left|\varphi^\alpha{}_\beta(x)\right| \ll 1$ olsun. O zaman,

$$de^\alpha = \varphi^\alpha{}_{\beta,\gamma} dx^\gamma \wedge dx^\beta$$
(5.81)

olur ve bundan, (3.87) afin bağlantıları bu mertebeyi sağladıkları için φ'ye birinci mertebeden bağlı,

$$\omega^{\alpha}{}_{\beta} = \left(\varphi^{\alpha}{}_{\gamma,\beta} - \varphi_{\beta\gamma,}{}^{\alpha} \right) dx^{\gamma}$$
(5.82)

sonucu çıkar. Bu takdirde,

$$d\omega^{\alpha}{}_{\beta} = \left(\varphi^{\alpha}{}_{\gamma,\beta\rho} - \varphi_{\beta\gamma,\rho}{}^{\alpha} \right) dx^{\rho} \wedge dx^{\gamma}$$
$$\Rightarrow i_{\alpha}\left(d\omega^{\alpha}{}_{\beta} \right) = \left(\varphi^{\alpha}{}_{\gamma,\beta\alpha} - \varphi_{\beta\gamma,\alpha}{}^{\alpha} - \varphi^{\alpha}{}_{\alpha,\beta\gamma} + \varphi_{\beta\alpha,}{}^{\alpha}{}_{\gamma} \right) dx^{\gamma}$$
(5.83)

elde edilir. $\delta dx^{\alpha} = 0$ olan harmonik koordinatlarda,

$$\varphi_{\beta\alpha,}{}^{\alpha} = \frac{1}{2}\varphi^{\alpha}{}_{\alpha,\beta}$$
(5.84)

olduğu gösterilebilir: (5.80) ifadesiden,

$$dx^{\alpha} = e^{\alpha} - \varphi^{\alpha}{}_{\beta} dx^{\beta}$$

yazılabilir. Kodiferensiyel işlemcisinin (3.85(b)) özelliği kullanılarak,

$$0 = *\delta dx^{\alpha} = d*\left(e^{\alpha} - \varphi^{\alpha}{}_{\beta} e^{\beta} \right) = d\left(*e^{\alpha} - \varphi^{\alpha}{}_{\beta} * dx^{\beta} \right)$$
$$= -\omega^{\alpha}{}_{\beta} \wedge *e^{\beta} - \varphi^{\alpha}{}_{\beta,\gamma} e^{\gamma} \wedge *dx^{\beta}$$

bulunur. Burada $dx^{\beta} = e^{\beta}$ alınır ve (5.82) ifadesi kullanılırsa,

$$0 = -\left(\varphi^{\alpha}{}_{\gamma,\beta} - \varphi_{\beta\gamma,}{}^{\alpha} \right) dx^{\gamma} \wedge *e^{\beta} - \varphi^{\alpha}{}_{\beta,\gamma} e^{\gamma} \wedge *e^{\beta}$$
$$= \left(\varphi_{\beta\gamma,}{}^{\alpha} - \varphi^{\alpha}{}_{\gamma,\beta} - \varphi^{\alpha}{}_{\beta,\gamma} \right) e^{\gamma} \wedge *e^{\beta}$$

elde edilir ve

$$e^{\gamma} \wedge *e^{\beta} = *\left(e^{\gamma} \wedge e^{\beta} \right) = \eta^{\gamma\beta} *1$$

ifadesi kullanıldığında eşitliğin sağlanma koşulu,

$$\varphi_{\beta\alpha,}{}^{\alpha} - \varphi^{\alpha}{}_{\alpha,\beta} - \varphi^{\alpha}{}_{\beta,\alpha} = \varphi_{\beta\alpha,}{}^{\alpha} - \varphi^{\alpha}{}_{\alpha,\beta} + \varphi_{\beta\alpha,}{}^{\alpha} = 0$$
$$\Rightarrow \quad \varphi_{\beta\alpha,}{}^{\alpha} = \frac{1}{2}\varphi^{\alpha}{}_{\alpha,\beta}$$

Bu sonuca göre (5.82) yeniden düzenlenir ve $t_{\alpha} + \mathrm{T}_{\alpha} = T_{\alpha\beta}e^{\beta}$ olmak üzere (5.71) Einstein denkleminde yazılırsa,

$$-\varphi_{\beta\gamma,}{}^{\alpha}{}_{\alpha}dx^{\gamma} = 8\pi\kappa\left(T_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\eta_{\beta\gamma}T^{\alpha}{}_{\alpha} \right)dx^{\gamma}$$
(5.85)

elde edilir. Bu denklemlerin çözümleri elektromanyetik teoriden Maxwell denklemleri çözümlerine analoji ile Green fonksiyonları cinsinden,

$$\varphi_{\alpha\beta}\left(\overline{x}\right) = \varphi^{in}_{\alpha\beta}\left(\overline{x}\right) + 8\pi\kappa\int d^4xD^{ret}\left(\overline{x} - x\right)\left(T_{\alpha\beta}\left(x\right) - \frac{1}{2}\eta_{\beta\gamma}T^{\rho}{}_{\rho}\left(x\right) \right)$$
$$\varphi^{in}_{\alpha\beta,\rho}{}^{\rho} = 0, \quad \varphi^{in}_{\beta\alpha,}{}^{\alpha} = \frac{1}{2}\varphi^{in\alpha}_{\alpha}{}_{,\beta}$$
(5.86)

yazılabilir. Burada D^{ret} gecikmiş Green fonksiyonunu temsil ediyor. $T_{\alpha\beta}dx^{\beta}$ kütleçekimi katkısı olmayan enerji-momentum formlarıdır. Bu yaklaşımda kütleçekimi ihmal etmek tutarsızlık yaratmaz, çünkü $\kappa T_{\beta\gamma}{}^{\gamma}$ sıfırıncı mertebeye doğru sıfıra yaklaşır. Bu sonuç (5.84) ve (5.86) ifadelerini tutarlı kılar.

$j = (-1,\ \mathbf{v})\delta^3(\mathbf{x})$ olmak üzere,

$$\int dt D^{ret}(x - \bar{x}) = \frac{1}{4\pi|\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}|}, \quad T_{\alpha\beta} = Mj_\alpha j_\beta$$

klasik limitinde,

$$\varphi_{\alpha\beta}(\bar{x}) = \frac{2M\kappa}{r}(j_\alpha j_\beta, +\eta_{\alpha\beta})$$
(5.87)

olur. Bu ifade, metrik

$$g = (\eta_{\alpha\beta} + 2\varphi_{\alpha\beta})dx^\alpha \wedge dx^\beta$$

alınırsa, $\mathbf{j}$, $|\mathbf{j}| \ll 1$ hızıyla hareket eden M kütleli bir parçacığın orijinde oluşturduğu potansiyele özdeştir. Böylece (5.86), $8\pi\kappa > 0$ seçimini doğrular.

Metrik apriori olarak belirlenmediğinden daha fazla değişmez niceliğin olması beklenir. Bunun için L 'nin (5.63) ile verilen değişimine bakılabilir. (3.22) ifadesinde X vektör alanı yönünde L_X Lie türevi

$$L_X = i_X \circ d + d \circ i_X$$

olarak verildi ve $L_X d = L_X d$ sıra değime bağıntısı vardır ((3.21) ifadesi). (5.63) denklemindeki değişim X vektör alanı yönünde L_X Lie türevinden kaynaklansın,

$*T^\alpha = *e^{\alpha\beta\gamma} \wedge R_{\beta\gamma}$ ä E_3

ve e^{α} bir ortogonal baz olsun. (5.61) ifadesi kullanılarak,

$$\delta\left(*e^{\alpha\beta} \wedge R_{\alpha\beta} \right) = \delta * e^{\alpha\beta} \wedge R_{\alpha\beta} + *e^{\alpha\beta} \wedge \delta R_{\alpha\beta}$$
$$= \delta * e^{\alpha\beta} \wedge R_{\alpha\beta} + d\left(*e^{\alpha\beta} \wedge \delta\omega_{\alpha\beta} \right)$$

bulunur ve (5.62) ifadesi

$$R_{\alpha\beta} \wedge \delta * e^{\alpha\beta} = R_{\alpha\beta} \wedge \delta e^{\gamma} \wedge *e^{\alpha\beta}{}_{\gamma}$$

olarak verildi. Böylece $\delta \to L_X$ alınarak,

$$\begin{aligned} L_X\left(*e^{\alpha\beta} \wedge R_{\alpha\beta} \right) - d\left(*e^{\alpha\beta} \wedge L_X\omega_{\alpha\beta} \right) &= \left(L_X e_{\alpha} \right) \wedge \left(*e^{\alpha\beta\gamma} \wedge R_{\beta\gamma} \right) \\ &= \left(L_X e_{\alpha} \right) \wedge *T^{\alpha} = \left(i_X de_{\alpha} + d\left(i_X e_{\alpha} \right) \right) \wedge *T^{\alpha} \\ &= \left(i_X\left(-\omega_{\alpha\sigma} \wedge e^{\sigma} \right) + d\left(i_X e_{\alpha} \right) \right) \wedge *T^{\alpha} \\ &= -i_X\left(\omega_{\alpha\sigma} \right) e^{\sigma} \wedge *T^{\alpha} + \omega_{\alpha\sigma}\left(i_X e^{\sigma} \right) \wedge *T^{\alpha} \\ &\quad + d\left(i_X e_{\alpha} \right) \wedge *T^{\alpha} \\ &= -i_X\left(\omega_{\alpha\sigma} \right) e^{\sigma} \wedge *T^{\alpha} + d\left(i_X e_{\alpha} \right) \wedge *T^{\alpha} \\ &\quad + d\left(\left(i_X e_{\alpha} \right) * T^{\alpha} \right) - \left(i_X e_{\alpha} \right) \wedge d * T^{\alpha} \end{aligned}$$

(5.88)

ifadesi elde edilir. Bu ifadenin X vektör alanlarının içinde kompakt destekli olduğu dört-boyutlu sınırı olmayan bir N manifoldu üzerinden integali alınırsa, o zaman, her $\omega \in E_m$ için (3.68) ifadesi;

$$\int L_X\omega = 0$$

Lie türevi altında integral değişmezliği kullanılarak ve

$i_X(\omega_{\alpha\sigma})e^\sigma \wedge *T^\alpha = 0, \left(\text{çünkü } e^\sigma \wedge *T^\alpha = e^\alpha \wedge *T^\sigma\right)$

olduğundan,

$$\int_N x_\alpha\left(d * T^\alpha + \omega^\alpha{}_\sigma \wedge *T^\sigma\right), \ x_\alpha = i_X e_\alpha \tag{5.89}$$

elde edilir. Bu ifade N'de kompakt destekli olan tüm vektör alanları için doğru olduğundan,

$$d * T^\alpha = -\omega^\alpha{}_\sigma \wedge *T^\sigma \tag{5.90}$$

olmalıdır ve bu ifadeye **büzülmüş Bianchi özdeşliği** olarak bilinir. Bu sonuç daha genel bir ifadeden de türetilebilir:

$$\begin{aligned} d * T^i &= d\left(*e^{imk} \wedge R_{mk}\right) = d\left(*e^{imk}\right) \wedge R_{mk} - *e^{imk} \wedge dR_{mk} \\ &= -\omega^i{}_j \wedge *e^{jmk} \wedge R_{mk} - 2\omega^m{}_s \wedge *e^{isk} \wedge R_{mk} + 2 * e^{imk} \wedge \omega_m{}^s \wedge R_{sk} \\ &= -\omega^i{}_j \wedge *e^{jmk} \wedge R_{mk} = -\omega^i{}_j \wedge *T^j \end{aligned}$$

Burada dR_{mk} türevi için (4.41) Bianchi özdeşliği kullanıldı. Böylece büzülmüş Bianchi özdeşliği daha genel bir şekilde elde edilmiş oldu. (5.90) ifadesi ortogonal bazlar için türetilmesine rağmen, $*T^\alpha$'lar, $*e^\alpha$'lar gibi dönüştükleri için tüm bazlarda geçerlidir.

6. SİMETRİK UZAYLAR

Düz uzaylardan sonra en basit yapılı uzaylar sabit eğrilikli uzaylardır. Bunlar, küresel yüzeylerin birer genellemesidirler ve basit olmalarına rağmen ilginç bazı fiziksel görünüşlere sahiptirler.

6.1 Maksimal Simetrik Uzaylar

Killing vektör alanları uzayın izometrilerini (yani g metriğini değişmez bırakan diffeomorfizimleri) meydana getirirler ve birebir ve örten olarak hareket sabitleri ve korunan akımlarla ilişkilendirilirler. Bunlar, izometrilerin tek-parametre gruplarını oluşturmazlarken bile uzay üzerinde lokal bir yapı oluştururlar. Killing vektör alanları ile Einstein alan denklemleri daha kolay bir forma sokulabilir ve böylece hesaplar daha kolay olur. Bir Killing vektör alanı prototipi R^m'in bir dönmesidir; bir çift $(i,\ k)$ indisi için $\upsilon^i = x^k$ ve $\upsilon^k = -x^i$'dir ve diğer bileşenler sıfırdır. Aynı zamanda,

$$\begin{aligned} &\text{(a)}\ \ \upsilon^i{}_{,k} + \upsilon^k{}_{,i} = 0 \\ &\text{(b)}\ \ \upsilon^l{}_{,jk} = 0 \end{aligned} \tag{6.1}$$

olur. Bu durumların pseudo-Riemannian uzaylara genişletilmesi υ Killing vektör alanlarını kovaryant türevleri arasındaki ilişkileri verir.

Önerme (6.1.1): Doğal baz, $e_\alpha = \partial_\alpha$ ve

$$\left\langle D_{e_\beta}\upsilon \mid e_\alpha \right\rangle = \upsilon_{\alpha;\beta}, \quad \left\langle \left(D_{e_\gamma} D_{e_\beta}\upsilon - D_{D_{e_\beta e_\gamma}}\upsilon \right) \mid e_\alpha \right\rangle = \upsilon_{\alpha;\beta;\gamma} \tag{6.2}$$

olarak notasyon belirlensin. O zaman $R^\lambda{}_{\sigma\rho\mu}$ Riemann-Christoffel tensörü ile

(a) $\upsilon_{\alpha;\beta} + \upsilon_{\beta;\alpha} = 0$

(b) $\upsilon_{\mu;\rho;\sigma} = R^\lambda{}_{\sigma\mu\rho}\upsilon_\lambda$

(6.3)

ifadeleri sağlanır.

İspat:

Killing vektör alanları skaler çarpımı invaryant bırakırlar, yani υ bir Killing vektör alanı olmak üzere,

$$L_\upsilon \langle X \mid Y \rangle = \langle L_\upsilon X \mid Y \rangle + \langle X \mid L_\upsilon Y \rangle$$

olur. Diğer yandan, bir skaler üzerinde Lie türevinin etkisi,

$$L_\upsilon \langle X \mid Y \rangle = D_\upsilon \langle X \mid Y \rangle = \langle D_\upsilon X \mid Y \rangle + \langle X \mid D_\upsilon Y \rangle$$

biçiminde tanımlandı. Burada,

$$L_\upsilon X = D_\upsilon X - D_X\upsilon \Rightarrow D_\upsilon X = L_\upsilon X + D_X\upsilon$$

eşitliği kullanılırsa,

$$\begin{aligned} L_\upsilon \langle X \mid Y \rangle &= D_\upsilon \langle X \mid Y \rangle \\ &= \langle D_X\upsilon \mid Y \rangle + \langle L_\upsilon X \mid Y \rangle + \langle X \mid L_\upsilon Y \rangle + \langle X \mid D_Y\upsilon \rangle \\ &= \langle D_X\upsilon \mid Y \rangle + \langle X \mid D_Y\upsilon \rangle + L_\upsilon \langle X \mid Y \rangle \end{aligned}$$

elde edilir ve buradan,

$$\langle D_X\upsilon \mid Y \rangle + \langle X \mid D_Y\upsilon \rangle = 0$$

olur. Burada X ve Y yerine baz vektörleri alınırsa,

$$\left\langle e_\alpha \mid D_{e_\beta}\upsilon \right\rangle + \left\langle D_{e_\alpha}\upsilon \mid e_\beta \right\rangle = \upsilon_{\alpha;\beta} + \upsilon_{\beta;\alpha} = 0$$

olarak (a) elde edilir.

Bir υ Killing vektör alanı metrik yapısını koruduğu ve bir burulmasız (sıfır burulmalı) bağlantı tarafından tek olarak belirlendiği için Lie türevi L_υ, kovaryant dış tüerev D ile sıra değişir. Bunu formel olarak göstermek için υ ile oluşturulan izometrilerin Φ_t tek-parametre grubu düşünülmelidir ve Lie türevinin (2.20) tanımı göz önüne alındığında,

$$\frac{\partial}{\partial t} D\Phi_t \,|_{t=0} = \frac{\partial}{\partial t} \Phi_t D \,|_{t=0}$$

olduğu görülür. Böylece (4.76) ifadesi tekrar yazılırsa,

$$\begin{aligned}\langle (DL_\upsilon - L_\upsilon D)X \mid u\rangle &= \langle (L_\upsilon D - L_\upsilon D)X \mid u\rangle \\ &= R(X,\ \upsilon)u - \langle D_X D\upsilon \mid u\rangle \\ &\Rightarrow \quad R(X,\ \upsilon)u = \langle D_X D\upsilon \mid u\rangle \end{aligned} \tag{6.4}$$

bulunur. (4.75) eşitliğinden,

$$\langle D_X D\upsilon \mid u\rangle = D_X D_u \upsilon - D_{D_X u}\upsilon = R(\upsilon,\ X)u$$

bulunur ve bu eşitlikte X ve u yerine baz vektörleri yazılıp bir baz vektörü ile iç çarpılırsa,

$$\left\langle \left(D_{e_\gamma} D_{e_\beta} \upsilon - D_{D_{e_\gamma} e_\beta} \upsilon \right) \mid e_\alpha \right\rangle = R^{\lambda}{}_{\gamma\alpha\beta}\upsilon =_\lambda \upsilon_{a;\beta;\gamma}$$

elde edilir. Bu sonuç (b) önermesini doğrular.

Önermenin (b) kısmı υ'nün ikinci türevinin υ cinsinden lineer yazılmasına izin verir; böylece bu yöntem ileri götürülülerek, bütün yüksek türevler υ'ye ve onun ilk türevine indirgenebilir. Bir tek noktada υ lokal olarak υ ve onun birinci türevi cinsinden ifade edilebilir; örneğin 0, noktasında:

$$\upsilon_\rho(x) = A_\rho{}^{\lambda}(x)\upsilon_\lambda(0) + B_\rho{}^{\lambda\sigma}(x)\upsilon_{\lambda;\sigma}(0) \tag{6.5}$$

yazılır. Bu olası Killing vektör alanlarının sayısını oldukça kısıtlar. Bir m-buyutlu uzayda, $\upsilon_{\lambda;\sigma}(0) = -\upsilon_{\sigma;\lambda}(0)$, $m(m-1)/2$ değer kabul edebilir ve $\upsilon_\lambda(0)$, m değer kabul edebilir. Dolayısıyla en fazla,

$$m + \frac{m + m(m-1)}{2} = \frac{m(m+1)}{2}$$

tane lineer bağımsız Killing vektör alanı vardır ve $x_j\partial_i - x_i\partial_j$ dönmelerinin ∂_i ötelemeleri cinsinden yazılması gibi değişken katsayılı denklemleri sağlarlar.

Tanım:

(a) Bir uzay **maksimal simetriktir** ancak ve ancak $m(m+1)/2$ tane bağımsız Killing vektör alanına sahiptir.

(b) Bir uzay x **noktası civarında izotropiktir** ancak ve ancak x'in akışın sabit bir noktası olduğu $m(m-1)/2$ tane Killing vektör alanına sahiptir ve e^k'ler bir ortogonal baz olmak üzere $\left(L_\upsilon e^i\right)(x) = A^i{}_k(x)e^k(x)$'deki $A^i{}_k$'lar $\left(\mathrm{R}^m,\ \eta\right)$'nın toplam Lorentz grubunu meydana getirir. Bu tanım $\upsilon^i{}_\alpha(x) = 0$ olan $m(m-1)/2$ tane υ^i Killing vektör alanının olduğunu ve $i = 1,...,m(m-1)/2$ olmak üzere, $\upsilon^i{}_{\alpha;\beta}(x)$'lerin $m \times m$ antisimetrik matrislerin uzayı için bir baz oluşturduğunu ifade eder. Bir maksimal simetrik uzayda buradaki gibi Killing vektör alanları vardır, bu yüzden izotropiktir.

(c) Bir uzay izotropiktir ancak ve ancak her noktası civarında **izotropiktir.**

(d) Bir uzay izometrilerin bir geçişli (transitive) grubuna sahip ise, **homojendir**. Geçişli olma herhangi bir noktanın, her noktadan gruptan bir dönüşümle ulaşılabilir olmasını ifade eder.

(e) Bir uzay zamansal bir Killing vektör alanına sahip ise **durağandır** (**stationary**) denir. Eğer bu uzay, uzaysal hiperyüzeylerin bir ailesine ortogonal ise **statiktir** denir.

Bir izotropik uzay üzerinde eğrilik her yönde aynı olmalıdır. Bu nedenle bir izotropik uzayın eğrilik formlarının aşırı derecede basit bir yapısı vardır.

6.2 İzotropik Uzayların Eğrilik Formları ve Yapısı

Önerme (6.2.1): Bir izotropik uzay üzerinde eğrilik formları

$$R^{ik} = Ke^{ik}, \quad K = sabit \tag{6.6}$$

yapısına sahiptirler.

İspat: Φ bir izometri ve tensörler üzerinde oluşturduğu dönüştürüm Φ_* olsun. Φ_*, D ile sıra değişir ve dolayısıyla,

$$\begin{aligned} DD\Phi_* &= \Phi_* DD \\ \Rightarrow R\Phi_* &= \Phi_* R \end{aligned}$$

bağıntısı sağlanır. Φ , $L^t\eta L = \eta$ olmak üzere, $\left(\Phi_* e^i\right)(x) = L^i{}_k e^k(x)$ olacak biçimde belirlenmiş nokta olarak x'e sahip bir izometri olsun. Eğer R bu bazda ayrışırsa, o zaman onun Φ_* altında değişmezliği (4.64) Rieman-Christoffel tensörlerinin

$$R_{ijkl} \rightarrow R_{mnop} L^m{}_i L^n{}_j L^o{}_k L^p{}_l$$

altında değişmez olduğunu belirtir; antisimetrik tensör çarpım uzayında bir matris gibi dönüşür. Bu temsil indirgenemez ($m = 4$ için hariç) ve matris grubu elemanları birim matris ile orantılı olmalıdırlar:

$$R_{ij}{}^{lm} = K\left(\delta_i{}^l \delta_j{}^m - \delta_i{}^m \delta_j{}^l\right)$$

veya eğrilik formları için,

$$R_{ij}(x) = K(x)e_{ij}(x)$$

olmalıdır. $m = 4$ için $R_{ij} \wedge e^j = 0$ tarafında dışarıda bırakılan bir $R_{ij} = {*e_{ij}}$ olasılığı olacaktır. K 'nın neden sabit olması gerektiğini görmek için,

$$dR_{ik} = dK \wedge e_{ik} + Kde_{ik}$$

denklemi göz önüne alımalıdır. (4.41) Bianchi özdeşliğinin kullanılması ile $dK = 0$ olduğu görülür ve dolayısıyla K, x 'den bağımsızdır.

Eğer eğrilik yönden bağımsız ise, o zaman konumdan da bağımsızdır. Bu sebepten dolayı, böyle uzayların sabit eğrilikli olduğu rahatça söylenebilir. (4.69) ve (6.6)'dan dolayı izotropik uzaylarda Weyl formları bulunmaz. Bu yüzden $m > 0$ ise, konformal olarak düzdürler.

$m \geq 3$, olan izotropik uzaylar konformal olarak düz oldukları için,

$$e^a = \frac{dx^a}{\psi}, \quad \psi \text{ ä } E_0$$
(6.7)

formunda bir ortogonal baz vardır. Bu yüzden,

$$de^a = \psi_{,b}e^{ba}$$

dır ve dolayısıyla,

$$\omega_{ab} = \psi_{,a}e_b - \psi_{,b}e_a \tag{6.8}$$

olur. (4.72) ile bu

$$R_{ab} = \psi\left(\psi_{,ac}e^{c}{}_{b} - \psi_{,bc}e^{c}{}_{a}\right) - \psi_{,c}\psi^{,c}e_{ab} \tag{6.9}$$

eğrilik formlarına yol açar. Eğer bu Ke_{ab} eğriliğine eşit ise, o zaman her her $a \neq b$ için $\psi_{,ab} = 0$ olmalıdır ve bu yüzden,

$$\psi = \sum_{i=1}^{m} f^{i}\left(x^{i}\right)$$
(6.10)

dir. Eğer $f_a = \eta_{ai} f^{i}$ ise, o zaman (6.9) ifadesi Ke_{ab} eğriliğine eşitlenerek,

$$f_b'' + f_a'' = \psi^{-1}\left(K + f_c' f^{c'}\right)$$
(6.11)

elde edilir. Sağ taraf bütün a ve b 'ler için aynı iken, sol taraf yalnızca x^{a} ve x^{b} 'ye bağlı olduğu için, her iki taraf gerçekte sabit olmalıdır. Bu sonuç f 'yi bir kuadratik fonksiyon yapar ve bundan dolayı ψ ,

$$\psi = 1 + \frac{K}{4} x^{a} x^{b} \eta_{ab}$$
(6.12)

formuna sokulabilir. Bu yüzden, lokal olarak, bir sabit eğrilikli uzay daima

$$g = \frac{dx^i dx^k \eta_{ik}}{\left(1 + Kx^2/4\right)^2}, \quad e^i = \frac{dx^i}{1 + Kx^2/4}$$
$$\omega^{ik} = \frac{K}{2}\left(x^i e^k - x^k e^i\right) \tag{6.13}$$

olacak koordinatlara sahiptir; burada $x^2 = x^a x^b \eta_{ab}$'dir. İsotropik uzaylar için hacim elemanı,

$$*1 = \frac{d^m x}{\left(1 + Kx^2/4\right)^m}$$
(6.14)

olur. Bu ifadenin $x = r$ alınarak $K = 1$ için integrali,

$$\int *1 = \int \frac{d^m x}{\left(1 + r^2/4\right)^m} = S_m \int_0^\infty \frac{dr r^{m-1}}{\left(1 + r^2/4\right)^m}$$

olur. Burada $S_m = \dfrac{2\pi^{m/2}}{\Gamma(m/2)}$, m-kürenin yüzey alanıdır. $\beta = \left(1 + r^2/4\right)$ yazılır ve Γ fonksiyonlarının

$$\Gamma(m)\Gamma(m/2) = \frac{2^{m-1}}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\frac{1}{2}(m+1)\right)$$

özelliği kullanılırsa,

$$\int *1 = S_m 2^{m-1} \int_0^\infty d\beta \beta^{m-2} \left(\frac{1}{\beta} - 1\right)^{(m-2)/2}$$
$$= S_m 2^{m-1} \frac{\Gamma\left(m^2/2\right)}{\Gamma(m)} = \frac{2\pi^{(m+1)/2}}{\Gamma((m+1)/2)} = S_{m+1}$$
(6.15)

bulunur. İzotropik uzay $(m+1)$-küreye izometrik olduğu için bu hacim hesabı doğrudur.

İzotropik uzaylarda orijin civarında izotropiden dolayı, dönmelerin üreteçleri Killing vektör alanlarıdır: $x_j = \eta_{jk}x^k$ ve ∂_k, $dx^k \left(i_{\partial_k} dx^i = \delta^i{}_k \right)$'ye dual baz olmak üzere,

$$\upsilon = x_j\partial_k - x_k\partial_j$$

olsun ve bir çift (i, j) indisi belirlensin, o zaman

$$\begin{aligned}
L_\upsilon e^m &= di_\upsilon e^m + i_\upsilon de^m \\
&= d\left(x_j \left(1+\frac{Kx^2}{4} \right)^{-1} i_{\partial_k} dx^m \right) - x_j \frac{K}{2}\left(1+\frac{Kx^2}{4} \right)^{-2} x_l i_{\partial_k} dx^l \wedge dx^m \\
&= d\left[x_j \delta^m{}_k \left(1+\frac{Kx^2}{4} \right)^{-1} \right] \\
&\quad + x_j \frac{K}{2}\left(1+\frac{Kx^2}{4} \right)^{-2} \left(\delta^m{}_k x_l dx^l - x_k dx^m \right) \\
&= dx_r \left(1+\frac{Kx^2}{4} \right)^{-1} \left(\delta^m{}_k \delta^r{}_j - \delta^m{}_j \delta^r{}_k \right)
\end{aligned}$$

(6.16)

elde edilir.

$$L_\upsilon e^m = A^{mr} e_r \text{ ve } A^{mr} = \delta^m{}_k \delta^r{}_j - \delta^m{}_j \delta^r{}_k = -A^{rm}$$

olduğu için orijin civarında dönmeler Killing vektör alanlarıdır.

Eğer k belirlenmiş ise,

$$\upsilon = \partial^k \left(1 - \frac{Kx^2}{4} \right) + \frac{K}{2} x^k x_j \partial^j$$
(6.17)

bir Killing vektör alanıdır. Bu ifade yukarıdaki gibi gösterilebilir veya daha basit olarak, doğal bazda υ'nün bir Killing vektör alanı olabilmesi için aşağıda verilen g_{lm} üzerindeki koşul kullanılabilir:

$$L_\upsilon dx^m = d\left(i_\upsilon dx^m \right) = d\upsilon^m = \upsilon^m{}_{,i} dx^i$$

olsun. Böylece,

$$0 = L_\upsilon g_{lm} dx^l dx^m = \upsilon^i g_{lm,i} dx^l dx^m + 2 g_{lm} \upsilon^l{}_{,i} dx^i dx^m$$
$$\Rightarrow \quad \upsilon^i g_{lm,i} + g_{im} \upsilon^i{}_{,l} + g_{il} \upsilon^i{}_{,m} = 0$$
(6.18)

olur. Bu ifadede υ için (6.17) ifadesinin bileşenleri kullanılırsa,

$$\begin{aligned} 0 &= \upsilon^i g_{lm,i} + g_{im} \upsilon^i{}_{,l} + g_{il} \upsilon^i{}_{,m} \\ &= \left(1 + \frac{Kx^2}{4} \right)^{-3} \left\{ -\eta_{lm} \left[Kx^k \left(1 - \frac{Kx^2}{4} \right) + \frac{x^k x^2 K^2}{2} \right] \right. \\ &\quad + \left(1 + \frac{Kx^2}{4} \right) \left[-\frac{K}{2} \delta^k{}_m x_l + \frac{K}{2} \left(x^k \eta_{ml} + x_m \delta^k{}_l \right) \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{K}{2} \delta^k{}_l x_m + \frac{K}{2} \left(x^k \eta_{ml} + x_l \delta^k{}_m \right) \right] \right\} \end{aligned}$$

bulunur. Dolayısıyla (6.17) bir Killing vektör alanıdır. Bu υ'ler küçük x'ler için bir baz teşkil ederler ve böylece orijin civarında oluşturdukları grup geçişli olarak davranır: herhangi bir nokta diğerine gönderilebilir.Bu bölüm boyunca verilen bilgiler aşağıda bir önerme ile özetlenmiştir:

Önerme (6.2.2): Bir M , pseudo-Riemannian uzay için aşağıdaki özellikler eşdeğerdir:

(a) M maksimal simetriktir,

(b) M sabit eğriliğe sahiptir

(c) M izotropiktir

(d) M bir nokta civarında homojen ve izotropiktir.

Burada verilen argümanlar tam olarak lokaldır ve dolayısıyla global davranış hakkında hiç bir sonuç çıkarılamaz; Killing vektör alanları tam bile olmaz zorunda değiller. Küresel yüzeylerin bileşimleri ve parçaları da izotropik uzaylardır. Bununla beraber, aynı K 'ya sahip uzaylar lokal olarak izotropiktirler (Thirring 1997).

Maksimal simetrik uzaylar için Einstein denklemlerini incelemek, bu uzayların evren için bir model oluşturup oluşturmadıklarını anlamaya yardım eder: Eğer $R_{\alpha\beta} = Ke_{\alpha\beta}$ ise, o zaman

$$R_{\beta} = i_{\alpha} R^{\alpha}{}_{\beta} = 3Ke_{\beta}, \; R = i_{\alpha} R^{\alpha} = 12K$$

elde edilir ve buradan,

$$R_{\alpha} - \frac{1}{2} e_{\alpha} R = -3Ke_{\alpha} \tag{6.19}$$

bulunur. Dolayısıyla (5.70) Einstein alan denklemlerinden

$$T_{\alpha\beta} = -\frac{\eta_{\alpha\beta} K}{8\pi\kappa}$$
(6.20)

elde edilir. Bu ifade

$$enerji \;\; yoğunluğu = -basınc = \frac{3K}{8\pi\kappa}$$

olan bir durgun akışkana karşı gelir (Thrring 1999). Böyle fiziksel olmayan $T_{\alpha\beta}$ 'lara;

(a) L 'ye bir $\Lambda * 1$ sabitinden gelen katkı (böyle bir katkı teorinin başlangıcında Einstein tarafından ileri sürülmüştü),

(b) Değişmezlik (invaryans) nedenlerinden dolayı □□ $\eta_{\alpha\beta}$ olan alanların enerji-momentum tensörünün boşluk (vakum) beklenen değeri,

(c) Einstein denklemlerindeki ek terimler; neden olabilir.

Böyle önerilerden birine inanmak için ikna edici nedenler yoktur ve dolayısıyla estetik olmalarına rağmen maksimal simetrik uzaylar evren modelleri için iyi adaylar değillerdir (Thrring 1999).

6.3 Altı Killing Vektör Alanlı Uzaylar

Burada ilginç olan durum altı uzaysal Killing vektör alanlı, $O(4)$'e izomorfik bir grup oluşturan **Friedmann evrenidir**. Grubun eylemi altında bir noktanın yörüngeleri altı Killing vektör alanlı bir uzaysal altmanifold biçimlendirir; yani üç boyutlu bir sabit eğrilikli Riemannian uzay oluştururlar. Bu durumda birlikte hareket eden (comoving) koordinatlar seçmek kullanışlıdır, bunlar için geodezik vektör alanı bu uzya dik, $x = sabit$ koordinat çizgileri meydana getirir ve bu geodezik çizgileri üzerinde öz zaman t zaman koordinatıdır. $r^2 = |\mathbf{x}|^2$ yazılarak g metriği

$$g = -dt^2 + R(t)^2 \frac{d|\mathbf{x}|^2}{\left(1 + Kr^2/4\right)^2}$$
(6.21)

biçiminde tanımlanır ve **Robertson-Walker metriği** olarak bilinir. Burada $R(t)$ daha belirlenmemiş zamanın bir fonksiyonudur. Eğer $K > 0$ ise, o zaman (6.15)'e benzer biçimde $t = sabit$ altmanifoldunun $2\pi R^3(t)/K^{3/2}$ hacmine sahip olduğu gösterilebilir. Eğer

$$\frac{dt'}{dt} = \frac{1}{R(t)}$$

olacak biçimde yeni bir t' zaman değişkeni tanımlanırsa, o zaman g Minkowski uzyındaki metrik olur:

$$g = R(t)^2 \left(-dt'^2 + \frac{d|\mathbf{x}|^2}{\left(1 + Kr^2/4\right)^2} \right)$$
(6.22)

Friedmann evreni için eğrilk formları bulunarak, burada Einstein alan denklemlerini incelemek ilginç sonuçlara götürür. Grek idisleri 0'dan 3'e ve Romen indisleri 1'den 3'e kadar değişsin. Eğer ortogonal baz,

$$e^{\alpha} = \left(dt, \frac{R(t)\,dx^a}{1 + Kr^2/4} \right)$$

biçiminde yazılırsa, o zaman,

$$de^{\alpha} = \left(0, \frac{\dot{R}}{R} e^{0a} - \frac{K}{2R} x_b e^{ba} \right)$$

bulunur ve dolayısıyla,

$$\omega^a{}_0 = \omega^0{}_a = \frac{\dot{R}}{R} e^a, \;\; \omega_{ab} = \frac{K}{2R} (x_a e_b - x_b e_a)$$

(6.23)

olur. Sonuç olarak,

$$d\omega^{0a} = \frac{\ddot{R}}{R} e^{0a} - \frac{K\dot{R}}{2R^2} x_b e^{ba},$$

$$d\omega^{ab} = \frac{K}{R^2} e^{ab} \left(1 + \frac{Kr^2}{4} \right) + \frac{K^2}{4R^2} \left(x^a x_c e^{bc} - x^b x_c e^{ac} \right)$$

(6.24)

bulunur ve (6.9)'dan benzer hesaplama ile

$$R^{0a} = \frac{\ddot{R}}{R} e^{0a}, \;\; R^{ab} = \frac{K + \dot{R}^2}{R^2} e^{ab}$$

(6.25)

bulunur. Büzülmüş (kısalmış) nicelikler

$$R^0 = i_a R^{0a} = 3 \frac{\ddot{R}}{R} e^0, \;\; R^a = i_b R^{ab} = \left(\frac{\ddot{R}}{R} + 2 \frac{K + \dot{R}^2}{R^2} \right) e^a$$

$$R = i_a R^a = 6 \left(\frac{K + \dot{R}^2(t)}{R^2(t)} + \frac{\ddot{R}(t)}{R(t)} \right)$$

(6.26)

olurlar. $R(t) = sabit$ ise, o zaman eğrilik yalnızca uzaysal yönlerde değişir ve (6.25) ifadesi

$$R^{ab} = \frac{K}{R^2} e^{ab}, \quad R^{0a} = 0$$
(6.27)

olur. (6.26) ve (4.68) ifadeleri karşılaştırılırsa, burada Weyl formlarının sıfır olacağı aşikardır.

(5.70) ve (5.71) tipindeki Einstein alan denklemlerinin sağlanması için (6.26) ifadelerinden dolayı maddenin enerji momentum formları $e^a \times (t\text{'nin bir fonksiyonu})$ olmalıdırlar. Bu yüzden maddenin enerji-momentum tensörü diagonaldır. Klasik olarak alan teorisnde,

$$T_{00} = \rho = \text{ enerji yoğunluğu}, \quad T_{ij} = p = \text{basınç}$$
(6.28)

olarak tanımlanırlar. Bu takdirde Einstein alan denklemleri,

$$3\frac{\dot{R}^2 + K}{R^2} = 8\pi\kappa\rho$$
$$-\frac{2\ddot{R}}{R} - \frac{\dot{R}^2 + K}{R^2} = 8\pi\kappa p$$
(6.29)

ifade ederler. (5.90) Bianchi özdeşliği ρ ve p'yi R ile ilişkilendirir ve aynı ilişki (6.29)'dan çıkar. Bu,

$$d * \mathrm{T}_0 = d\left(\rho * e^0\right) = d\rho \wedge *e^0 + \rho d * e^0$$
$$= -\omega^0{}_j \wedge *\mathrm{T}^j = -p\omega^0{}_j \wedge *e^j$$
(6.30)

olacağını belirtir. Bundan dolayı

$$d\rho \wedge *e^0 = (\rho - p)\omega^0{}_j \wedge *e^j \Rightarrow \dot{\rho} = 3\frac{\dot{R}}{R}(\rho - p)$$
(6.31)

olur. Bu ifade

$$p = \frac{\frac{d}{dt}\left(\rho R^3\right)}{\frac{d}{dt}R^3}$$
(6.32)

Formunda

$$\text{basınç} = -\frac{\text{enerjinin değişim oranı}}{\text{hacmin değişim oranı}}$$

ifadesini verir. Böylece birlikte hareket eden koordinatlarda toplam enerjide kütleçekim gözükmemektedir. $\dot{R} = 0$ statik durumu eğer eğer $K > 0$ ise, bir negatif basınç ve eğer $K < 0$ ise, bir negatif enerji gerektirir. Esas olarak ,bu durum Einstein'ı kendi hareket prensibinde bir kozmolojik $\Lambda^{*}1$ terimi dahil etmeye zorladı. Friedmann daha sonra kendi adını taşıyan çözümü buldu.

(5.74)'de madde ve kütleçekim için enerji-momentum formları, 2-formların dış türevleri biçiminde ifade edildi. Kütleçekimsel enerji henüz tam olarak bilinmediğinden izi sürülerek bulunabilir. Bunu için 2-formun dış türevinin $t = sabit$ kısıtlaması (sınırlaması) hesaplanabilir. Bu hesap Landau-Lifshitz formunda Einstein denklemlerini verir:

$$
\begin{aligned}
-\frac{1}{2}\varepsilon^{0bcd}\omega_{bc}\wedge e_d &= -\frac{K}{2R}\varepsilon^{0bcd}x_b e_{cd}, \\
-\frac{1}{2}\varepsilon^{0bcd}d\left[\,\omega_{bc}\wedge e_d\,\right]_{t=sbt} &= -\frac{K}{2R}\varepsilon^{0bcd}\left[\, e_{bcd}\left(1+\frac{Kr^2}{4}\right) - Kx_b x^m e_{mcd}\,\right]_{t=sbt} \\
&= \frac{3K - K^2r^2/4}{R^2} * e^0 \,|_{t=sbt} \\
&= 8\pi\kappa\left(*\mathrm{T}^{\,0} + *t^0\right)
\end{aligned}
\tag{6.33}
$$

Bu denklem,

$$8\pi\kappa\cdot(\text{ toplam enerji yoğunluğu }) = \frac{3K - K^2r^2/4}{R^2}$$

(6.34)

olduğunu ifade eder. Böylece bu denklem (6.29)'un ilk denklemi ile birleştirilirse,

$$
\begin{aligned}
&8\pi\kappa\cdot(\text{ küteçekimsel enerji yoğunluğu }) \\
&\qquad = (\text{ toplam enerji yoğunluğu } - \rho\,) = -\frac{K^2r^2 - 12\dot{R}^2}{4R^2}
\end{aligned}
$$

(6.35)

bulunur. $\dot{R} = 0$ statik durumunda, bu Newton teorisine göre bir ρ homojen kütle dağılımının enerji yoğunluğudur. $R = 1$ olmak üzere $8\pi\kappa \to e$ seçilirse, o zaman

$$
\begin{aligned}
&\Delta V = e\rho\frac{3K}{2e}, \quad V = \frac{Kr^2}{4e}, \\
&\nabla V = \frac{\mathbf{x}K}{2e}, \quad -\frac{1}{2}|\nabla V|^2 = -\frac{1}{2e^2}\frac{K^2r^2}{4}
\end{aligned}
$$

(6.36)

yazılabilir ve böylece $-K^2 r^2 / 4R^2$, yaklaşık Cartesian koordinatlarda $8\pi\kappa \cdot (\text{Newtonian kütleçekimenerji})$'ye karşılık gelir. Dinamik durumda ayrıca bir $\dot{R}^2$ katkısı gelir.

Eğer $K > 0$ ise, toplam enerjinin tüm uzay üzerinden integrali sıfıra eşittir: (6.34) kullanılarak,

$$3K\int_0^\infty \frac{r^2 dr}{\left(1 + Kr^2/4\right)^3} = \frac{K^2}{4}\int_0^\infty \frac{r^4 dr}{\left(1 + Kr^2/4\right)^3}$$

bulunur. (6.29)'un ilk denklemi

$$\frac{\dot{R}^2}{2} - 4\pi\kappa\rho\frac{R^2}{3} = -\frac{K}{2} = sabit \tag{6.37}$$

biçiminde yazılırsa, o zaman bu R koordinatlı $\dot{R}$ hızlı bir parçacığın (göreli olmayan) enerjisi için korunum denklemi bulunur.

7. SONUÇ

Bu tez kapsamında kütleçekim teorisi gerekli olan geometrik temeller incelenmiştir. Euclidean olmayan geometrinin fiziksel evrenin daha doğru bir tanımını verdiği görülmüş ve evrenin çok küçük boyutları düşünüldüğünde bu evrensel tanımların Newtonian tanımlarla uyumlu olduğu görülüyor. Fizik yasalarının gözlem çerçevelerinden bağımsız olmasını sağlayacak formlar bu geometrik tanımlarla garanti ediliyor.

Genel geometrik incelemelerin ardından türetilen elektromanyetik alan denklemleri ve Einstein alan denklemleri genel değişmezliği (kovaryansı) sağlamışlardır. Son bölümde incelenen sabit eğrilikli uzaylar ve maksimal simetrik uzaylar bu teorinin gerçeğe olan yaklaşımı konusunda ikna edici fikirler veriyor ve aynı zamanda Newtonian evren tanımını da içerdiğini gösteriyor.

Evrenin yapısı ve bu yapıya maddenin etkisi Einstein alan denklemlerinde içeriliyor ve bunların çözümleri bu yapıyı açığa kavuşturacaktır. Einstein alan denklemlerinin çözümleri bu çalışmanın kapsamını aştığından girilmemiş sadece basit sonuçlara değinilmiştir. Buna karşılık Einstein alan denklemlerinin farklı formları incelenmiş ve Einstein denklemlerini Yang-Mills karşılığı elde edilerek, akımın duali bir alan şiddetinin dış türevi olarak bulunmuştur. Bu denklemlerden yola çıkılarak akımların Landau-Lifshitz formuna ulaşılmış ve bu formu elde ederken doğal baz kullanılmasına rağmen, bu akım formunun bütün bazlarda aynı kaldığı sonucuna varılmıştır. Buradan açısal momentumun lokal korunumu elde edilir. Ayrıca Lie türevi altında integral değişmezliği kullanılarak akımların korunumu elde edilebilir.

KAYNAKLAR

Cartan, E. 2001. Riemannian Geometry in an Orthogonal Frame. World Scientific, 253 s., Singapore.

Hassani, S. 1999. Mathematical Physics: A Modern Introduction to Its Foundations. Springer, 1025 s., New York.

Lang, S. 1999. Graduate Text in Mathematics: Fundamentals of Differential Geometry. Springer, 535 s., New York.

Logunov, A. A. 2001. The Theory of Gravity. Nauka 256 s., Moskow.

Stewart, J. 1990. Cambridge Monographs on Mathematical Physics: Advanced General Relativity. Cambridge University Press, 228 s. New York.

Thirring, W. 1997. Classical Mathematical Physics: Dynamical Systems and Field Theories. Springer-Verlag, 543 s., New York.

Warner, F. W. 1971. Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups. Scott, Foresman and Company, 270 s., Illinois.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı	: Erdal ÇATAK
Doğum Yeri	: Bingöl/ Kiğı
Doğum Tarihi	: 20.02.1982
Medeni Hali	: Bekar
Yabancı Dili	: İngilizce

Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl)

Lise	: Tuzla Kaşif Kalkavan Lisesi, (1999)
Lisans	: Ankara Üniversitesi, Fizik Mühendisliği Bölümü (2003)
Yüksek Lisans	: Ankara Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Fizik Mühendisliği Anabilim Dalı (2003-2006)