ANKARA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

DURAĞAN OLMAYAN ZAMAN SERİLERİNDE KOİNTEGRASYON VEKTÖRÜNÜN TAHMİNİ ÜZERİNE BİR ÇALIŞMA

Yudum BALKAYA

İSTATİSTİK ANABİLİM DALI

ANKARA
2006

Doç. Dr. Yılmaz AKDİ danışmanlığında, Yudum BALKAYA tarafından hazırlanan **"**Durağan Olmayan Zaman Serilerinde Kointegrasyon Vektörünün Tahmini Üzerine Bir Çalışma**"** adlı tez çalışması 27/12/2006 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oybirliği ile Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü İstatistik Anabilim Dalı'nda YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Başkan : Prof. Dr. Reşat KASAP
Gazi Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi,
İstatistik Bölümü

Üye : Doç. Dr. Yılmaz AKDİ
Ankara Üniversitesi, Fen Fakültesi,
İstatistik Bölümü

Üye : Yrd. Doç. Dr. İhsan KARABULUT
Ankara Üniversitesi, Fen Fakültesi,
İstatistik Bölümü

Yukarıdaki sonucu onaylarım

Prof. Dr. Ülkü MEHMETOĞLU

Enstitü Müdürü

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

DURAĞAN OLMAYAN ZAMAN SERİLERİNDE KOİNTEGRASYON VEKTÖRÜNÜN TAHMİNİ ÜZERİNE BİR ÇALIŞMA

Yudum BALKAYA

Ankara Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
İstatistik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Yılmaz AKDİ

$\underset{\sim}{X}_t$ serisinin kendisi durağan değil, fakat $\underset{\sim}{\beta}'\underset{\sim}{X}_t$ durağan olacak şekilde bir $\underset{\sim}{\beta}$ vektörü (veya matrisi) varsa, $\underset{\sim}{X}_t$ zaman serisine kointegre bir seridir denir. $\underset{\sim}{\beta}$ vektörüne ise kointegrasyon vektörü denir. Durağan olmayan bir seriyi, durağan hale getirmek için fark alma yöntemi kullanılmaktadır. Fakat $\underset{\sim}{\beta}'\underset{\sim}{X}_t$ durağan olacak şekilde bir $\underset{\sim}{\beta}$ vektörünün bulunması durumunda, fark alma işlemine gerek kalmamaktadır. Dolayısıyla $\underset{\sim}{\beta}$ vektörünün en iyi şekilde tahmin edilmesi önem kazanmaktadır. Burada amaç $\underset{\sim}{\beta}$ parametre vektörünün tahmini ile ilgili önerilen yöntemleri göstermektir.

2006, 61 sayfa

Anahtar Kelimeler: Zaman Serisi, Çok Değişkenli, Birim Kök, Kointegre, Kointegrasyon Vektörü

ABSTRACT

Master Thesis

A STUDY ON THE ESTIMATION OF COINTEGRATION VECTOR ON NONSTATIONARY TIME SERIES

Yudum BALKAYA

Ankara University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Statistics

Supervisor: Assoc. Doç. Dr. Yılmaz AKDİ

Most of the statistical inference of time series is based on the stationarity assumption. The most practical way to achieve stationarity for a non-stationary series is to compute their differences. However, if a multivariate time series, $\underset{\sim}{X}_t$ is nonstationary, sometimes it is possible to find a vector (or matrix) $\underset{\sim}{\beta}$ such that $\underset{\sim}{\beta}'\underset{\sim}{X}_t$ stationary. Such a system is called cointegrated and the vector $\underset{\sim}{\beta}$ is called the cointegrating vector. Existence of $\underset{\sim}{\beta}$ eliminates the need to computation of differences. Consequently, a good estimation of $\underset{\sim}{\beta}$ is very important. This master thesis is a study on the estimation of $\underset{\sim}{\beta}$ with various methods.

2006, 61 pages

Key Words: Time Series, Multivariate, Unit Root, Cointegration, Cointegration Vector

TEŞEKKÜR

Bana araştırma olanağı sağlayan ve çalışmamın her safhasında yakın ilgi ve önerileri ile beni yönlendiren danışman hocam, Sayın Doç. Dr. Yılmaz AKDİ (Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi İstatistik Bölümü)'ye teşekkürlerimi sunuyorum.

Ayrıca akademik çalışmalarım boyunca bana karşı gösterdikleri anlayış ve sabırdan dolayı, aileme özellikle annem Satı BALKAYA'ya ve maddi ve manevi desteğini hiçbir zaman benden esirgemeyen ablam İçim KÖSE' ye sonsuz teşekkürler.

Yudum BALKAYA

Ankara, Aralık 2006

İÇİNDEKİLER

SİMGELER DİZİNİ

∇	Fark operatörü
AIC	Akaike Bilgi Kriteri
ADF Testi	Geliştirilmiş Dickey Fuller Testi
AR	Otoregresif Seri
ARMA	Otoregresif Hareketli Ortalama Zaman Serisi
DHF Testi	Dickey, Hazsa ve Fuller Testi
HEGY Testi	Hylleberg, Engle, Granger, Yoo Testi
MA	Hareketli Ortalama Serisi
WN(White noise)	Beyaz Gürültü serisi
PP Testi	Phillips- Perron Testi
SBC	Schwartz Bayesian Kriteri
VAR	Vektör Otoregresif Zaman Serisi

ŞEKİL DİZİNİ

ÇİZELGELER DİZİNİ

1. GİRİŞ

Zaman serileri analizi, incelenen bir değişkenin şimdiki ve geçmiş dönemdeki gözlem değerlerini kullanarak sonraki dönemlerde alacağı değerlerin hangi güven sınırları arasında gerçekleşebileceğini ortaya koymak için yapılan çalışmalardır.

Zaman serileri ise, istatistiki verilerin oluş zamanları esas alınarak sıralanmasıyla elde edilen serilerdir.

Zaman serileri analizinin önemli amaçlarından biri, birden fazla değişken için oluşturulan zaman serilerinden birinde meydana gelen değişmelerin kullanılarak diğer serilerdeki değişmelerin açıklanabilmesidir. Ayrıca geleceğe ilişkin öngörülerin yapılabilmesi de zaman serileri analizinin amaçlarından biridir.

Zaman serileri, basit şekli ile bir regresyon modeline benzemesine rağmen temel varsayımlarda birbirlerinden ayrılmaktadır. Bir regresyon modelinde bağımsız değişken konumundaki değişkenler zaman serilerinde bağımlı değişken olarak karşımıza çıkabilmektedir. Zaman serilerinde önemli kavramlardan biri değişkenler arasında uzun dönemli bir ilişkinin olup olmadığı, yani kointegrasyon (eşbütünleşme) konusudur.

Literatürde, kointegrasyon analizi hakkında, çok sayıda çalışma bulunmaktadır. Bunlardan en temelleri Engle ve Granger (1987) ’ da önerilen kointegrasyon testi benzer şekilde ilk defa Hylleberg, Engle, Granger ve Yoo (1990) tarafından İngiltere verilerine (gelir ve tüketim) uygulanarak geliştirilmiştir. Daha sonra, Engle, Granger, Hylleberg ve Lee (1993) Japonya verilerine aynı metodu uygulamışlar ve Japonya’nın gelir ve tüketim verilerinde mevsimsel birim kök olduğu sonucuna ulaşmışlardır.

Bu çalışmada birinci bölüm Giriş metninden oluşmaktadır. İkinci bölümde, zaman serilerine ilişkin temel kavramlar, özellikleri, durağan zaman serileri ve bu serilerin özellikleri hakkında bazı temel kavramlar özetlenmiştir. Üçüncü bölümde ise; birim köklü seriler ve uygulamada yaygın olarak kullanılan bazı birim kök testleri kısaca özetlenmiştir. Dördüncü bölümde, serinin bileşenleri arasındaki lineer durağan ilişkinin yani kointegrasyonun tanımı, tahmini ve testler ayrıntılı bir şekilde özetlenmiştir. Bu bölümde standart yöntemler haline gelmiş Engle ve Granger ile Johansen (1988) in önerdiği en çok olabilirlik test yöntemleri açıklanmıştır. Beşinci bölümde ise Türkiye verileri kullanılarak Borsa Bileşik Endeksi, Altın Fiyatları ve Döviz Kuru serileri arasında 1994:01–2005:12 dönemi için bir kointegrasyon ilişkisinin olup olmadığı araştırılmıştır.

2. ZAMAN SERİLERİNE İLİŞKİN TEMEL KAVRAMLAR

2.1 Zaman Serileri

Belirli zaman aralıklarında bir değişken üzerinde alınan ardışık gözlemlerin kümesi zaman serisi olarak tanımlanır. Zaman serisi özel bir stokastik süreçtir. (Ω, F, P) bir olasılık uzayı, T'de bir indis kümesi olmak üzere, bir zaman serisi Ω x T çarpım uzayında reel sayılara giden

$$
\begin{aligned}
& X(\cdot,\cdot) : \Omega \times T \to \mathbb{R} \\
& (\omega, t) \to X(\omega, t) = X_t(\omega)
\end{aligned}
\tag{2.1}
$$

bir fonksiyondur. Bu tanıma göre, bir zaman serisi, her sabit t için bir rasgele değişkendir, ω sabit tutulduğunda ise t'nin reel değerli bir fonksiyonudur. Bu reel değerli fonksiyona zaman serisinin bir realizasyonu (veya yörüngesi) adı verilir. Bu yörünge gazetelerde, dergilerde veya kitaplarda gördüğümüz zaman serisi grafikleridir (Fuller 1976).

Bir zaman serisinde aşağıdaki dört unsurdan birkaçı veya hepsi aynı anda etkili olabilir.

i) Trend (Uzun süreli eğilim)

ii) Mevsimlik dalgalanmalar

iii) Konjektürel dalgalanmalar

iv) Düzensiz hareketler

Trend; zaman serisinin uzun dönem içindeki eğilimlerini göstermektedir. Mevsimlik dalgalanmalar; ele alınan iktisadi değişkene ait haftalık, aylık, üç aylık, dört aylık, … verilerde kendini göstermekte ve mevsimlerin etkisi altında kalan serilerde ortaya çıkmaktadır. Konjektürel dalgalanmalar; bir trend doğrusu veya eğrisinin etrafındaki uzun dönemli dalgalanmalardır (Örneğin; ekonomide, belli bir süre ekonomik gelişme görüldükten sonra yükseliş maksimum noktasında bir kriz patlak verdiğinde bir düşüş başlar. İzleyen aşamada bir süre hareketsizlik gözlenir. Daha sonra yeniden bir kımıldama ve canlanma başlar. Bu aşamalar tekrarlanıp devam eder.). Düzensiz hareketler ise, rasgele sebeplerle veya geçici olarak ortaya çıkarlar. Bunların ne zaman, nasıl bir şiddet derecesi ile ortaya çıkacakları önceden kestirilemez.

Trend, mevsimlik dalgalanmalar ve konjektürel dalgalanmalar, zamanın bir fonksiyonu olarak ifade edilebilmektedirler. Buna karşılık düzensiz hareketler ancak kendi geçmiş değerleri ve hata teriminin bir fonksiyonu olarak gösterilirler.

Trend: $T_t = \beta_1 + \beta_2 t$

Mevsimsel: $S_t = \beta_1 \sin\left(t\frac{\pi}{2} \right)$

Düzensiz: $I_t = \beta_1 I_{t-1} + e_t$

T_t, t dönemdeki, trend unsurunun değeri; S_t, t dönemdeki mevsimsel unsurunun değeri; I_t, t dönemdeki düzensiz hareketler unsuru ve e_t'de t dönemdeki hata terimidir (Kutlar 2000).

Bir ekonomik uygulamanın yapılabilmesi için ilk olarak uygulama alanının, konusunun ve modelinin belirlenmesi gerekmektedir. İkinci olarak ekonomik gerçekler teoride, varsayımlara ve hipotezlere bağlı olarak matematiksel bir kalıp çerçevesinde ifade edilirler. Bir sonraki aşama ise, teorik modelin uygulamaya aktarılmasıdır. Burada uygulama alanı ile ilgili veriler ve ekonomik gerçeklerin sayısal ölçülerle ifadesi önemlidir. Bu aşamada model, gözlenen veriler ve çeşitli teknikler yardımıyla belirlenir. Son aşamada ise elde edilen sonuçlar anlamlıysa, model ekonomi politikası değerlendirme analizlerinde kullanılmaktadır.

Zaman serileri analizinin gelişmesiyle, verilerin stokastik ilişkilerinin incelenmesi önem kazanmıştır. Herhangi bir değişkene ait gözlemlenen zaman serisinin, teorik olarak var olduğu düşünülen bir veri üretme süreci (data generating process) tarafından önceki dönemlere ait değerlerinin yardımıyla belirlendiği varsayılır.

1980 yılından bu yana pek çok yöntemin (durağanlık, birim kök, kointegrasyon, nedensellik, hatta düzeltme modeli vb.) gelişmesiyle zaman serileri analizinin önemi artmıştır. Bu yöntemlerin ortak özelliği verilerin yapısını yani, veri üretme sürecini dikkate alarak model oluşturmalarıdır (Kadılar 2000).

Zaman serileri çeşitli amaçlarla analiz edilirler. Bunlar içinde en önemlisi serinin belli başlı özelliklerini ortaya çıkarabilmektir. Böylece incelenen dönemde trendin bulunup bulunmadığı, mevsimlik dalgalanmaların olup olmadığı saptanabilir.

Analizin başka bir amacı ise açıklamadır. Farklı zaman serilerinde serinin birinde meydana gelen değişmeler açıklanabilir. Böyle bir analiz, zaman serilerini oluşturan sistem hakkında bazı önemli bilgiler ortaya koymaktadır, diğer bir amaç ise sistemin kontrolüdür. Seriyi oluşturan olayın işleyiş mekanizmasını ortaya koymak veya geçmiş olaylardan elde edilen bilgileri kullanarak sistemin planlanan yönde gelişmesini sağlamak ve sistemi kontrol etmek mümkündür.

2.2 Durağanlık Kavramı

Zaman serilerinde en önemli kavramlardan biri durağanlıktır. Durağanlık, seride hakim olan olasılık konumlarının zaman ile değişmemesi temel fikrine dayalı istatistiksel bir dengeyi ifade eder. Zaman serileri ile ilgili analizleri yaparken en önemli varsayımlardan biri, serinin durağanlığıdır. Birçok istatistiki sonuç çıkarımında serinin durağan olduğu varsayılır. Eğer seri durağan değil ise çeşitli teknikler kullanılarak durağan hale getirilir (Fark alma gibi). Genel olarak zayıf ve güçlü durağanlık gibi iki çeşit durağanlıktan bahsedilebilir (Kayım 1985).

Herhangi bir rasgele değişkenler dizisinin ortak olasılık dağılımı rasgele değişkenlerin yapıldığı zamanın ileriye veya geriye doğru kaydırılması ile herhangi bir değişikliğe uğramıyorsa bu serilere güçlü durağandır denir. Kısaca X_t ile X_{t+h} nin ortak dağılımı t' ye değil h' ye bağlıdır. Başka bir ifade ile bir zaman serisinin $t_1, t_2, ..., t_n$ anlarındaki $X_1, X_2, ..., X_n$ rasgele değişkenlerinin ortak olasılık dağılımı ile $t_{1+h}, t_{2+h}, ..., t_{n+h}$ zamanlarındaki $X_{1+h}, X_{2+h}, ..., X_{n+h}$ $\forall$ n, h, n+h $\in \mathrm{T}$, rasgele değişkenlerinin ortak olasılık dağılım şekli değişmiyorsa bu seriye güçlü durağan seri bu duruma da güçlü durağanlık denir. Başka bir deyişle, her $(x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ ve her $t_1, t_2, ..., t_n \in \mathrm{T}$, $t_{1+h}, t_{2+h}, ..., t_{n+h} \in \mathrm{T}$ için $F_{X_1, X_2, ..., X_n}(x_1, x_2, ..., x_n) = F_{X_{1+h}, X_{2+h}, ..., X_{n+h}}(x_1, x_2, ..., x_n)$ oluyorsa $\{X_t : t \in \mathrm{T}\}$ zaman serisine güçlü durağandır denir. Burada $F_{X_1, X_2, ..., X_n}(x_1, x_2, ..., x_n)$, $X_1, X_2, ..., X_n$ rasgele değişkenlerinin ortak olasılık dağılım fonksiyonudur. Eğer $\{X_t : t \in \mathrm{T}\}$ zaman serisi güçlü durağan ise bu $\forall t_i \in \mathrm{T}$, $\forall n$ için $(X_{t_1}, X_{t_2}, ..., X_{t_n}) \underline{\underline{D}} (X_{t_1+h}, X_{t_2+h}, ..., X_{t_n+h})$ şeklinde gösterilmektedir.

Ayrıca, $X_1, X_2, ..., X_n$ rasgele değişkenlerinin ortalaması $E(X_t) = \mu_t$ olmak üzere, $\{X_t : t \in \mathrm{T}\}$ zaman serisi için t' nin tüm değerleri için

i) $E(X_t) = \mu$ (sonlu ve t den bağımsız)

ii) $Cov(X_t, X_{t+h}) = E\left[(X_t - \mu)(X_{t+h} - \mu)\right]$ h=0, 1, 2, 3…

koşulları sağlanıyorsa $\{X_t : t \in \mathrm{T}\}$ zaman serisine zayıf durağan, ikinci dereceden durağan, kovaryans durağan veya kısaca durağandır denir.

Bir serinin durağan olması güçlü durağan olmasını ve güçlü durağan olması da durağan olmasını gerektirmez. Fakat

a) $\{X_t : t \in \mathrm{T}\}$ zaman serisi durağan ve aynı zamanda normal dağılım varsayımını sağlıyorsa bu seri aynı zamanda güçlü durağandır.

b) $\{X_t : t \in \mathrm{T}\}$ zaman serisi güçlü durağan ve $E(X_t^2) < \infty$ koşulunu sağlıyorsa bu seri aynı zamanda durağandır (Brockwell and Davis 1987).

Yukarıdaki tanımda, (ii) koşuluna göre $Cov(X_t, X_{t+h})$ kovaryansının sadece h'nin bir fonksiyonu olması gerekir. Bu fonksiyona $\{X_t : t \in T\}$ zaman serisinin otokovaryans fonksiyonu denir ve $\gamma(h)$ ile gösterilir. Yani serinin otokovaryans fonksiyonu $\gamma(h) = Cov(X_t, X_{t+h})$ dir. Bu fonksiyon zaman serilerinde çok kullanışlı özelliklere sahiptir. Özellikle uygulamalarda, zaman serilerinin modellenmesinde sezgisel olarak modelin türü ve model derecesinin belirlenmesinde kullanıldığı gibi serinin durağan olup olmaması hakkında da bilgi verir.

Otokovaryans fonksiyonu yardımı ile tanımlanan otokorelasyon fonksiyonu ve buna bağlı olarak elde edilen kısmi otokorelasyon fonksiyonu serilerin modellenmesinde ve serinin durağan olup olmadığına karar verilmesinde de kullanılmaktadırlar.

Otokorelasyon fonksiyonu aynı değişkenin değerleri ile çeşitli gecikme değerleri arasındaki ilişkileri inceler ve değeri ± 1 değerleri arasındadır. Serinin otokovaryans fonksiyonu $\gamma(h)$ olmak üzere X_t ile X_{t+h} arasındaki korelasyon serinin otokorelasyonu olarak bilinir ve

$$\rho(h) = \frac{Cov(X_t, X_{t+h})}{\sqrt{Var(X_t)Var(X_{t+h})}} = \frac{\gamma(h)}{\gamma(0)} \tag{2.2}$$

ile gösterilmektedir. Yukarıda (2.2) ile verilen $\rho(h)$ serinin teorik otokorelasyonları olup, verilen herhangi bir örneklem için örneklem otokovaryansları

$$\hat{\gamma}(h) = \frac{1}{n-h}\sum_{t=1}^{n-h}(X_t - \bar{X})(X_{t+h} - \bar{X}) \tag{2.3}$$

şeklinde hesaplanır. Örneklem otokovaryansları, Yule-Walker, en çok olabilirlik ve en küçük kareler yöntemleri ile değişik olarak hesaplanabilir. Örneklem otokovaryansları yardımı ile örneklem otokorelasyonları

$$\hat{\rho}(h) = \frac{\hat{\gamma}(h)}{\hat{\gamma}(0)} \tag{2.4}$$

olarak hesaplanır ve burada $\hat{\gamma}(0)$ serinin örneklem varyansıdır. Yani

$$\hat{\gamma}(0) = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}(X_t - \bar{X})^2 \tag{2.5}$$

dir. Herhangi bir X_t zaman serisi için kısmi otokorelasyonlar X_t'nin $X_{t-1}, X_{t-2}, ..., X_{t-h}$ üzerine regresyonu yapıldığında X_{t-h}'nin regresyon katsayısı h'inci kısmi otokorelasyondur ve $\phi(h)$ ile gösterilir. Yani, h tane kısmi otokorelasyon bulabilmek için h defa regresyon modeli oluşturmak gerekir. Eğer kısmi otokorelasyonlar belli bir noktadan sonra sıfır oluyorsa (veya anlamlı olarak sıfıra yakınsa) bu tür seriler otoregresif serilerdir. Verilen herhangi bir serinin kısmi otokorelasyonlarını hesaplamak için regresyon tekniklerinin kullanılması uzun işlem gerektirmektedir. Ayrıca kısmi otokorelasyonların bazılarının sıfır olup olmadığının sınanması gerekebilir. Dolayısıyla regresyon parametrelerinin tahmin edicilerinin asimptotik dağılımlarına ihtiyaç duyulur. Fakat aynı kısmi otokorelasyonlar daha önce elde ettiğimiz otokorelasyonlar yardımı ile de bulunabilir. Kısmi otokorelasyonlar, P_h matrisi

$$P_h = \begin{bmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 & \cdots & \rho_{h-1} \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 & \cdots & \rho_{h-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \rho_{h-1} & \rho_{h-2} & \rho_{h-3} & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

şeklinde olmak üzere P_h matrisinin son sütun vektörü $\underline{c}' = (\rho_{h-1}, \rho_{h-2}, ..., 1)$ yerine $\underline{a} = (\rho_1, \rho_2, ..., \rho_h)$ yazılarak P_h^* matrisi elde edilir.

$$P_h^* = \begin{bmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 & \cdots & \rho_{h-2} & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 & \cdots & \rho_{h-3} & \rho_2 \\ \vdots & & & & & \\ \rho_{h-1} & \rho_{h-2} & \rho_{h-3} & \cdots & \rho_1 & \rho_h \end{bmatrix}$$

Buradan da verilen bir zaman serisinin h'inci kısmi otokorelasyonu

$$\phi(h) = \frac{\det(P_h^*)}{\det(P_h)} \tag{2.6}$$

formülü ile de hesaplanabilir. Burada, $\det(P_h)$, P_h matrisinin determinantını göstermektedir (Wei 1990).

Durağanlık zaman serisi analizleri için oldukça önemli olmasına rağmen, iktisadi zaman serileri genellikle durağan değildir ve trend, konjektürel dalgalanmalar, mevsimsel dalgalanmalar ve değişen hareketler gibi zaman serilerini etkileyen birtakım faktörler içerir (Nelson and Plosser 1992).

Bunlardan uygulamada daha çok üzerinde durulan faktörler trend ve mevsimsel dalgalanmalardır. Örneğin iktisadi bir zaman serisi trend unsurundan dolayı durağan değilse, bu durumda durağan olmama durumunun deterministik trendden mi, yoksa stokastik trendden mi kaynaklandığının belirlenmesi gerekmektedir. Serilerde deterministik bir trend varsa, seriyi trendden arındırmak için, zaman unsuru modele dahil edilmeli ve bu işlem sonucunda trenden arındırılmış serilere kointegrasyon analizi uygulanmalıdır. Trend stokastik ise, bu serileri durağan hale getirmek için fark alma işlemi uygulanmaktadır. Durağan olmayan bir iktisadi serisinin “d” defa farkı alınır ve bu işlem sonucu seri durağan hale gelirse, bu seriye I(d), d’inci sıradan farkı alınmış seri denir. Durağan hale getirilmiş bir seri I(0)’ dır. Fark alma yönteminin kullanımı oldukça basit olmakla birlikte, fark alma işleminin kaç kez yineleneceğinin belirlenmesi bir sorun oluşturmaktadır. Genellikle birinci ya da ikinci dereceden ardışık farklar, durağanlığın sağlanması için yeterlidir (Metin 1993).

2.3 Hareketli Ortalama Serisi (MA)

Durağan zaman serilerine en basit örnek hareketli ortalama serileridir Eğer bir $\{e_t : t \in \mathrm{T}\}$ zaman serisi $E(e_t) = 0$ ve otokovaryans fonksiyonu

$$\gamma_e(h)=\begin{cases}\sigma^2, & h=0\\ 0, & d.d.\end{cases} \tag{2.7}$$

şeklinde ise $\{e_t : t \in T\}$ serisine beyaz gürültü süreci (white noise) denir (Fuller 1976).

Pratikte, bağımsız aynı dağılıma sahip rasgele değişkenlerin bir dizisi beyaz gürültü serisi olarak alınmaktadır. Fakat bazı istatistiki sonuç çıkarımlar sırasında normallik varsayımı da yapılmaktadır. Tanımdan da görüleceği gibi beyaz gürültü süreci $\{e_t\}$ durağan bir süreçtir. Bu sürecin otokorelasyon fonksiyonu

$$\rho_X(h)=\begin{cases}1, & h=0\\ 0, & h\neq 0\end{cases}$$

ve kısmi otokorelasyon fonksiyonu ise

$$\phi(h)=\begin{cases}1, & h=0\\ 0, & h\neq 0\end{cases}$$

şeklindedir. Bundan sonra aksi söylenmedikçe e_t ler beyaz gürültü serisi olarak kabul edilecek ve $e_t \sim WN\left(0,\sigma^2\right)$ gösterimi kullanılacaktır.

$e_t \sim WN\left(0,\sigma^2\right)$, μ serinin ortalaması, q sonlu bir doğal sayı ve $\beta_q \neq 0$ olmak üzere q ’ncu dereceden hareketli ortalama serisi,

$$X_t-\mu=\sum_{j=1}^{q}\beta_j e_{t-j}+e_t \qquad \text{t=1,2,...,n} \tag{2.8}$$

şeklindedir ve $X_t \sim MA(q)$ şeklinde gösterilir. MA(q) hareketli ortalama serisinin otokovaryans fonksiyonu,

$$\gamma_x(h) = \begin{cases} \sigma^2 \sum_{j=0}^{q-h} \beta_j \beta_{j+h} & 0 \le h \le q \\ 0 & d.d. \end{cases} \tag{2.9}$$

şeklinde yazılır. Buradan otokorelasyon fonksiyonu,

$$\rho_x(h) = \begin{cases} \left(\sum_{j=0}^{q-h} \beta_j \beta_{j+h} \right) \left(\sum_{j=0}^{q} \beta_j^2 \right)^{-1} & 0 \le h \le q \\ 0 & d.d. \end{cases} \tag{2.10}$$

şeklinde olacaktır. Herhangi bir hareketli ortalama $\{X_t : t \in T\}$ zaman serisinin varyansı, otokovaryans ve otokorelasyon fonksiyonu t' den bağımsızdır. Dolayısıyla hareketli ortalama serileri her sonlu q için durağandır. MA serilerinde otokorelasyonlar belli bir gecikmeden sonra sıfır olur, kısmi otokorelasyonlar ise mutlak değer içinde üstel olarak azalır. Otokorelasyonlar ile hesaplanabilen kısmi otokorelasyonların grafikleri çizilerek serinin modeli hakkında sezgisel olarak bir fikir edinilebilir.

2.4 Otoregresif Seri (AR)

Bir zaman serisi kendi gecikmeli değerlerinin bir fonksiyonu şeklinde ifade ediliyorsa, otoregresif seri (AR, Autoregresive process) olarak tanımlanır. Yani bu modelde serinin şimdiki değerleri geçmiş değerlerinden etkilenir. AR(p) serilerinde p serinin derecesini gösterir, p'inci dereceden bir otoregresif zaman serisi modeli;

$$X_t - \mu = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \left(X_{t-i} - \mu \right) + e_t \qquad \text{t=1,2,...,n} \tag{2.11}$$

şeklinde tanımlanır. Burada $(k \times k)$ serinin beklenen değeri ve $e_t \sim WN\left(0, \sigma^2\right)$ dir.

Otoregresif sürecinin otokovaryans ve otokorelasyon fonksiyonları Yule-Walker denklemlerinden

$$\gamma(h) = \alpha_1 \gamma(h-1) + \alpha_2 \gamma(h-2) + ... + \alpha_p \gamma(h-p)$$
$$\rho(h) = \alpha_1 \rho(h-1) + \alpha_2 \rho(h-2) + ... + \alpha_p \rho(h-p)$$

şeklinde elde edilir. Bu serilerin otokorelasyonları üstel olarak azalmakta ve kısmi otokorelasyonlarda belli bir yerden sonra sıfır olmaktadır.

Bu serilerin durağan olup olmadığının araştırılması için beklenen değer ve kovaryansın zamana bağlı olup olmadığının araştırılması gerekir. Otoregresif zaman serilerinde durağanlık,

$$m^p - \sum_{i=1}^{p} \alpha_i m^{p-i} = 0 \tag{2.12}$$

denklemi ile verilen serinin karakteristik denkleminin köklerine bağlıdır. Serinin durağan olabilmesi için (2.12)'de verilen karakteristik denklemin bütün köklerinin mutlak değerce 1'den küçük olması gerekir. Yani serinin karakteristik denkleminin köklerinden en az bir tanesi mutlak değerce 1 veya 1'den büyükse seri durağan değildir.

2.5 Otoregresif Hareketli Ortalama Zaman Serileri (ARMA)

ARMA modeli, otoregresif ve hareketli ortalama modellerinin karışımı olup bir ARMA (p, q) serisini $\theta_q \neq 0$ ve $\phi_p \neq 0$ olmak üzere,

$$X_t - \mu = \sum_{j=1}^{p} \phi_j \left(X_{t-j} - \mu \right) + e_t + \sum_{i=1}^{q} \theta_i e_{t-i} \tag{2.13}$$

şeklinde ifade edilir. Bu modelde p serinin AR kısmının model derecesini, q'da serinin MA kısmının model derecesini göstermektedir. ARMA serisinin otokovaryans fonksiyonu

$$\gamma(h) = \phi_1 \gamma(h-1) + \phi_2 \gamma(h-2) + ... + \phi_p \gamma(h-p) \tag{2.14}$$

şeklinde hesaplanır. Otokorelasyon fonksiyonu ise $\rho(h) = \dfrac{\gamma(h)}{\gamma(0)}$ eşitliğinden yararlanarak

$$\rho(h) = \phi_1 \rho(h-1) + \phi_2 \rho(h-2) + ... + \phi_p \rho(h-p) \tag{2.15}$$

şeklinde bulunur. ARMA(p,q) modelinin otokorelasyon fonksiyonu q gecikmesine kadar hem otoregresif hem de hareketli ortalama parametrelerine bağlı olarak değer alırken q gecikmesinden sonra sadece otoregresif serinin parametrelerine bağlı olarak sıfıra yaklaşır (Wei 1990).

2.6 Mevsimsel Zaman Serileri

Birçok ticari ve ekonomik zaman serisi mevsimsel davranışlar sergilemektedir. Mevsimsel hareketler zamanın belirli periyotlarında kendiliğinden gerçekleşmektedir. Daha açık bir ifadeyle mevsimsellik, zaman serisinin zamanın belirli aralıklarında belirli sayıda tepe ve dip değerleri içermesidir. Mevsimselliğin oluşmasındaki etkenler üç sınıf içerisinde toplanabilir.

i) Hava durumu; yani, sıcaklık, yağış, güneş ışığından faydalanma saati vb.

ii) Takvimsel olaylar, dini veya milli bayramlar vb.

iii) Karar verme zamanları; yani okul tatilleri, iş sektörü tatilleri, vergi yılları, hesap dönemleri, kar payı veya maaş ödeme dönemleri

Bu etkenlerden bazıları uzun dönemde değişim gösterirken bazıları da kesikli zaman aralıklarında değişim göstermektedirler (tatiller, vergi yılları gibi). Bu etkilerden bazılarının ne zaman olacakları tahmin edilebilmekte, bazıları ise tahmin edilememektedir (hava durumu gibi) (Hylleberg 1992).

3. BİRİM KÖK ANALİZİ VE TESTLERİ

3.1 Birim Kök Kavramı

Zaman serileri analizlerinin gelişmesi ile ekonomi ve finans teorilerinde meydana gelen değişmeler yeni kavramların ortaya çıkmasına sebep olmuştur. "Birim Kök" kavramı da bunlardan biridir. MA serileri her zaman durağandır. Fakat AR zaman serilerinde durağanlık serinin (2.12)' deki karakteristik denklemin köklerine bağlıdır. Karakteristik denklemin bütün kökleri mutlak değerce 1'den küçük ise seri durağandır. Eğer köklerden en az bir tanesi mutlak değerce 1 veya 1'den büyük ise seri durağan değildir. Köklerin 1'den büyük olması sıkça karşılaşılan bir durum değildir, ama köklerin mutlak değerce 1 olması durumu ile çok karşılaşılmaktadır. Bu tür seriler birim köklü seriler olarak adlandırılmaktadır. Bu konuda çok değişik metotlar tavsiye edilmesine rağmen Dickey ve Fuller (1979)'in önerdiği parametrelerin en küçük kareler tahmin edicisinin dağılımına dayanan test metodu oldukça yoğun kullanılmakta ve neredeyse standart birim kök test yöntemi haline gelmiştir (Akdi 2003).

3.2 Dickey-Fuller Testi

Zaman serilerinde birim kökü veya durağanlığı test etmekte değişik metotlar vardır. Bunlardan uygulamada en çok kullanılanı parametrelerin en küçük kareler tahmin edicisinin birim kök varsayımı altındaki dağılımına dayanan Dickey-Fuller yöntemidir. Dickey-Fuller birim kök testleri zaman serilerinin birim kök içerip içermediğini sınamak için geliştirilen ilk biçimsel testtir. Dickey-Fuller testleri seri birim köke sahipse ve bu durum fark alma işlemiyle ortadan kaldırılabiliyorsa uygundur. Birinci dereceden bir otoregresif zaman serisi modeli, $e_t \sim WN(0,\sigma^2)$ olmak üzere

$$X_t = \rho X_{t-1} + e_t \qquad t = 1,2,3,...,n \tag{3.1}$$

şeklinde verilmiş olsun. Burada ρ 'nun en küçük kareler tahmin edicisi,

$$\hat{\rho}_n = \frac{\sum_{t=2}^{n} X_t X_{t-1}}{\sum_{t=2}^{n} X_{t-1}^2} \tag{3.2}$$

şeklindedir. Burada $X_0 = 0$ başlangıç koşulu altında (3.1) denklemi (3.2) denkleminde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \hat{\rho}_n &= \frac{\sum_{t=2}^{n} (\rho X_t + e_t) X_{t-1}}{\sum_{t=2}^{n} X_{t-1}^2} \\ (\hat{\rho}_n - \rho) &= \frac{\sum_{t=2}^{n} X_{t-1} e_t}{\sum_{t=2}^{n} X_{t-1}^2} \end{aligned} \tag{3.3}$$

olmaktadır, $\hat{\rho}_n$ en küçük kareler tahmin edicisinin tutarlı bir tahmin edicisi olması ve asimptotik dağılımı elde edilebilmesi için, $\sum_{t=1}^{n} e_t X_{t-1}$ ve $\sum_{t=2}^{n} X_{t-1}^2$ istatistiklerinin yakınsama hızlarının belirlenmesi gerekir (Box 1994).

Serinin durağan olması durumunda yani $|\rho| < 1$ ise $\sqrt{n}(\hat{\rho}_n - \rho)$ nin limit dağılımı normaldir (Dickey and Fuller 1979). Çünkü

$$\sum_{t=1}^{n} e_t X_{t-1} = O_P(\sqrt{n})$$

ve

$$\sum_{t=2}^{n} X_{t-1}^2 = O_P(n)$$

dir.

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{t=2}^{n} X_{t-1}e_t \xrightarrow{D} N(0,1-p^2) \tag{3.4}$$

olmaktadır. Yukarıdaki (3.3) denklemi pay ve paydası $\frac{1}{n}$ ile çarpılır ve gerekli düzenleme yapılırsa Buradan, $n \to \infty$ için,

$$\begin{aligned}
\hat{\rho}_n &= \rho + \frac{1}{\sqrt{n}}\frac{\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{t=1}^{n} e_t X_{t-1}}{\frac{1}{n}\sum_{t=2}^{n} X_{t-1}^2} \\
\hat{\rho}_n - \rho &= \frac{1}{\sqrt{n}}\frac{\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{t=1}^{n} e_t X_{t-1}}{\frac{1}{n}\sum_{t=2}^{n} X_{t-1}^2}
\end{aligned} \tag{3.5}$$

dir. Yani bu ifade $O_p(1)$ dir. Dolayısıyla $\sqrt{n}(\hat{\rho}^n - \rho)$ istatistiğinin asimtotik dağılımı ortalaması sıfır, varyansı $1-\rho^2$ olan normal dağılımdır. Yani asimtotik dağılım $\sqrt{n}(\hat{\rho}_n - \rho) \xrightarrow{D} N(0,1-\rho^2)$ şeklindedir. Eğer (3.1) serisi durağan değilse $(\rho = 1)$ (3.5) deki denklemin pay ve paydası

$$\begin{aligned}
&\sum_{t=2}^{n} e_t X_{t-1} = O_p(n) \Rightarrow \frac{1}{n}\sum_{t=2}^{n} e_t X_{t-1} = O_p(1) \\
&ve \\
&\sum_{t=2}^{n} X^2{}_{t-1} = O_p(n^2) \Rightarrow \frac{1}{n^2}\sum_{t=2}^{n} X^2{}_{t-1} = O_p(1)
\end{aligned} \tag{3.6}$$

şeklinde olmaktadır. Yine (3.5) değerinin pay ve paydası bu defa $\frac{1}{n^2}$ ile çarpılır ve gerekli düzenleme yapılırsa

$$
\begin{aligned}
\hat{\rho}_n - \rho &= \frac{\frac{1}{n^2}\sum_{t=2}^{n} e_t X_{t-1}}{\frac{1}{n^2}\sum_{t=2}^{n} X_{t-1}^2} \\
&= \frac{1}{n}\frac{\frac{1}{n}\sum_{t=2}^{n} e_t X_{t-1}}{\frac{1}{n^2}\sum_{t=2}^{n} X_{t-1}^2}
\end{aligned}
\tag{3.7}
$$

haline dönüşmektedir ve

$$
\frac{1}{n}\frac{\frac{1}{n}\sum_{t=2}^{n} e_t X_{t-1}}{\frac{1}{n^2}\sum_{t=2}^{n} X_{t-1}^2} \tag{3.8}
$$

ifadesi sınırlıdır. Dolayısyla $\rho = 1$ olması durumunda

$$
n(\hat{\rho}_n - 1) = \frac{\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} e_t X_{t-1}}{\frac{1}{n^2}\sum_{t=2}^{n} X_{t-1}^2} = O_p(1) \tag{3.9}
$$

istatistiği elde edilmektedir. Dickey ve Fuller (1979) da yukarıdaki istatistiğin limit dağılımı

$$
n(\hat{\rho} - 1) \xrightarrow{D} \frac{0,5(T^2 - 1)}{\Gamma} \tag{3.10}
$$

şeklinde vermişlerdir. Ayrıca bu dağılım için tablolar oluşturulmuş ve bu tablolar serinin birim köklü olup olmadığının test edilmesinde kullanılmaktadır. Eğer $|\rho| > 1$ise $|\rho|^n (\rho^2 - \rho)^{-1}(\hat{\rho} - \rho)$ nin limit dağılımı Cauchy' dir (Dickey and Fuller 1979).

Durağan olmayan zaman serileri için $H_0 : \rho = 1$ hipotezinin testinde kullanılan t istatistiğinin dağılımı negatif olarak sola çarpıktır. Bunun sonucu olarak sol uçtaki kritik değerler, geleneksel student t dağılımından daha küçük olabilmektedir. Bunun dağılımı standart t dağılımı olmadığında limit dağılımı aşağıdaki üç ayrı model için

1) $X_t = \rho X_{t-1} + e_t$ modeli için $n(\hat{\rho} - 1)$ veya $\hat{\tau}$

2) $(X_t - \mu) = \rho(X_{t-1} - \mu) + e_t$ modeli için $n(\hat{\rho}_\mu - 1)$ veya $\hat{\tau}_\mu$

3) $(X_t - \alpha_0 - \alpha_1 t) = \rho(X_{t-1} - \alpha_0 - \alpha_1 t) + e_t$ modeli için $n(\hat{\rho}_\tau - 1)$ veya $\hat{\tau}_\tau$

sırasıyla $\tau, \tau_\mu, \tau_\tau$ olmaktadır (Enders 1995).

Ortalaması sıfır olarak alınan $X_t = \rho X_{t-1} + e_t$ modelinde kullanılan τ istatistiği

$$\hat{\tau} = \frac{(\hat{\rho} - 1)(\sum_{t=2}^{n} X_{t-1}^2)^{1/2}}{S_e}$$
$$S_e^2 = \frac{\sum_{t=2}^{n} (X_t - \hat{\rho} X_{t-1})^2}{(n-2)} \tag{3.11}$$

olarak verilmektedir (Dickey and Fuller 1979).

Serinin ortalaması sıfırdan farklı olduğu durumda yani seri sabit terim içeriyorsa $(X_t - \mu) = \rho(X_{t-1} - \mu) + e_t$ modeline göre ρ nun en küçük kareler tahmin edicisi

$$\hat{\rho}_\mu = \frac{\sum_{t=2}^{n} (X_{t-1} - \bar{X}_{(1)})(X_t - \bar{X}_{(0)})}{\sum_{t=2}^{n} (X_{t-1} - \bar{X}_{(1)})^2} \tag{3.12}$$

olarak hesaplanmaktadır. Burada i=0,1 için $X_{(i)} = (n-1)^{-1}\sum_{t=1}^{n} X_t$ şeklindedir. Benzer şekilde $\hat{\tau}_\mu$ istatistiği

$$\hat{\tau}_\mu = \frac{\sum_{t=2}^{n} (X_{t-1} - \overline{X}_{(1)})^2 (\hat{\rho} - 1)}{S_e} \tag{3.13}$$

olmaktadır (Fuller and Dickey 1979). Bunların da limit dağılımları sırasıyla ρ_μ ve τ_μ olmak üzere tablolar Fuller (1976) da verilmektedir (Dickey and Fuller 1979).

Tablolar incelendiğinde $\tau_\tau < \tau_\mu < \tau$ ilişkisi görülmektedir. Burada "<" daha güçlü anlamında kullanılmaktadır. Yani τ, τ_μ'ye göre ve τ_μ de τ_τ ya göre daha güçlüdür (Dickey *et al.* 1986).

Serinin durağan olup olmadığını test etmek için yani $H_0 : \rho = 1$ hipotezinin test edilmesi istendiğinde hesaplanan $\hat{\tau}$ veya $n(\hat{\rho}_\tau - 1)$ istatistiğinin değeri kritik değerlerden küçük ise yokluk hipotezi reddedilmektedir. Yani X_t serisi durağan olmaktadır.

AR (1) seriler için kısaca özetlemek gerekirse,

A) Model : $\left(X_t - \mu\right) = \rho\left(X_{t-1} - \mu\right) + e_t$

B) $H_0 : \rho = 1$ hipotezinin test edilmesi

i) $\rho = 1$ ise μ modelden düşer ve öngörüler ortalamaya yaklaşmaz.

ii) Test istatistiğinin aldığı değeri hesaplayabilmek için, her iki taraftan da X_{t-1} çıkarılır. Yani model $X_t - X_{t-1} = \left(\rho - 1\right) X_{t-1} + e_t$ şeklinde yazılır. Buradan $D_t = X_t - X_{t-1}$ birinci dereceden farklar hesaplanır.

iii) D_t'lerin 1 ve X_{t-1} üzerine regresyonu yapılır ve bu regresyon modelinde X_{t-1}'in katsayısının 0 olduğunu test etmek için duruma göre $n\left(\hat{\rho}-1\right)$ istatistiğinin kritik değeri ile karşılaştırılır.

iv) Durum yüksek dereceden modeller içinde geçerlidir.

C) Trendden arındırma

i) $D_t = X_t - X_{t-1}$ değişkeninin X_{t-1} üzerine regresyonu yapılır. (α_0 yok)

ii) $D_t = X_t - X_{t-1}$ değişkeninin X_{t-1} üzerine regresyonu yapılır. (α_0 dahil)

iii) $D_t = X_t - X_{t-1}$ değişkeninin X_{t-1}, 1 ve t üzerine regresyonu yapılır.

Her üç regresyon modeli içinde duruma göre $n\left(\hat{\rho}-1\right)$ istatistiğinin kritik değeri ile karşılaştırılır.

D) Yüksek Dereceden Modeller

i) Model: $(X_t - \mu) = \alpha_1(X_{t-1} - \mu) + \alpha_2(X_{t-2} - \mu) + \cdots + \alpha_p(X_{t-p} - \mu) + e_t$

ii) Karakteristik denklem: $m^p - \alpha_1 m^{p-1} - \alpha_2 m^{p-2} - \cdots - \alpha_p = 0$

iii) Eğer $m = 1$ ise $1 - \alpha_1 - \alpha_2 - \cdots - \alpha_p = 0$ dır ve μ modelden çıkar.

iv) Birim kök testi yapmak için $D_t = X_t - X_{t-1}$ ve $D_{t-1}, D_{t-2}, ..., D_{t-p}$ farklar hesaplanır.

v) D_t değişkeni $1, X_{t-1}, D_{t-1}, D_{t-2}, ..., D_{t-p-1}$ üzerine regresyonu yapılır ve X_{t-1}'in katsayısının $(1 - \alpha_1 - \alpha_2 - \cdots - \alpha_p)$ sıfır olup olmadığı $n\left(\hat{\rho}-1\right)$, (veya $\hat{\tau}$), türü dağılımların kritik değerleri ile karşılaştırılır.

3.3 Geliştirilmiş Dickey-Fuller Testi

Verilen herhangi bir $AR(p)$ serisinin $AR(1)$ olarak modellenmesi hata terimlerinde otokorelasyonlara sebep olacaktır. Dolayısıyla, verilen herhangi bir serinin durağanlığını araştırmak için DF testinin kullanılması başlangıçta geçersiz olacaktır. Çünkü e_t lerin beyaz gürültü süreci olması varsayımı bozulmaktadır. Fakat verilen bir birim köklü herhangi bir $X_t \sim AR(p)$ serisi için de DF testi uygulanmaktadır. Bu durumda da verilen bir X_t serisinin,

$$\nabla X_t = \alpha_1 X_{t-1} + \sum_{j=1}^{p} \beta_j \nabla X_{t-j} + e_t \tag{3.14}$$

şeklinde yazılması durumunda $H_0 : \{X_t \text{ serisi birim köklüdür}\}$ yokluk hipotezi $H_0 : \alpha_1 = 0$ hipotezinin test edilmesi ile aynı olacaktır. Bunun için X_t'nin X_{t-1}, $\nabla X_{t-1}, ..., \nabla X_{t-p}$ üzerine regresyonunun yapılması durumunda X_{t-1}'in katsayısının en küçük kareler tahmin edicisinin aldığı değer hesaplanır ve

$$\hat{\tau} = \frac{\hat{\alpha}_1}{S_{\hat{\alpha}_1}} \tag{3.15}$$

test istatistiği (veya τ_μ, τ_t) kullanılır.

Kısaca özetlemek gerekirse, zaman serisinin gecikmeli değerlerini kullanarak artıklar arasındaki otokorelasyonu ortadan kaldıran bir test olan Geliştirilmiş Dickey-Fuller testinin uygulaması Dickey-Fuller testiyle aynıdır. Bu testi uygularken dikkat edilmesi gereken en önemli nokta uygun gecikme katsayısının belirlenmesidir. Uygun gecikme katsayısı belirlenirken Akaike Bilgi Kriteri (AIC) veya Schwarz Bayesian Kriteri (SBC) kriterlerinden yararlanılmaktadır. AIC veya SBC istatistiklerinden biri için en küçük AIC (veya SBC) değeri en uygun model olarak kullanılmaktadır (Fuller 1976).

3.4 Phillips-Perron Testi (PP)

Dickey-Fuller test yöntemine bir seçenek yaklaşım da Phillips ve Perron (1988)'dan gelmiştir. Geliştirilmiş Dickey-Fuller istatistiği, hata terimi e_t'nin aynı ve bağımsız dağılması varsayımına dayalıdır fakat Phillips ve Perron (1988) bu istatistiği, e_t terimi bağımlı ve değişen varyanslı iken incelemişlerdir. Böylesine genel koşullar altında e_t için veri üretme süreci sonlu dereceden ARIMA (p,d,q) modelleri gibi geniş kapsamlı seçeneklere sahip olabilmektedir. Phillips ve Perron (1988), aşağıda gösterilen iki regresyon modelini ele almışlardır.

$$\begin{aligned} x_t &= \hat{\mu} + \hat{\alpha} x_{t-1} + u_t \\ x_t &= \tilde{\mu} + \tilde{\beta}(t-(1/2)n) + \tilde{\alpha} x_{t-1} + \tilde{u}_t \end{aligned} \tag{3.16}$$

(3.16) numaralı denklemlerdeki $\left(\hat{\mu},\hat{\alpha}\right)$ ve $\left(\tilde{\mu},\tilde{\beta},\tilde{\alpha}\right)$ parametrelerin bilinen en küçük kareler tahmin edicileridir.. Buradan $(k \times k)$ istatistikleri,

$$\begin{aligned} t_\mu &= \left(\hat{\alpha}-\alpha\right)\left\{\sum\left(x_{t-1}-\overline{x}_{t-1}\right)^2\right\}^{1/2} / \hat{S} \\ t_t &= \left(\hat{\alpha}-\alpha\right) / \left(\tilde{S}^2 C_3\right)^{1/2} \end{aligned} \tag{3.17}$$

şeklinde bulunmaktadır. Burada $\hat{S}$, trendi bulunmayan regresyon modelinin; $\tilde{S}$ ise trend terimi içeren regresyon modeline ilişkin standart hata olmaktadır. Ayrıca C_3, $(X'X)^{-1}$ matrisinin üçüncü ana köşegen öğesi olmaktadır. X_t zaman serisi, rasgele yürüyüş sürecinden üretildiği düşünüldüğünde $\alpha = 1$ olmaktadır.

Öte yandan, n örneklem büyüklüğü olmak üzere $\overline{X}_{t-1} = n^{-1}\sum X_{t-1}$'dir. Dolayısıyla Phillips-Perron Testi'nin işlemi, Dickey-Fuller istatistiklerini hesaplamayı ve sonra hata terimlerini takiben ARIMA(p,d,q) sürecinden gelen ek parametreler (additional nuisance parameters) üzerindeki limit dağılımının bağımlılığını yok etmek için τ_μ ve τ_t

istatistiklerini bazı parametrik olmayan düzeltmeleri kullanmayı içerir. Bu düzeltmelere karşılık gelen gösterimler sırasıyla $Z\left(\tau_\mu\right)$ ve $Z\left(\tau_t\right)$ şeklindedir.

$\beta_1 = 0$ ile $\Delta X_t = \beta_0 + \beta_1 t + \gamma X_{t-1} + e_t$ entegrasyon modeli için, Phillips ve Perron (1988),

$$Z\left(\tau_\mu\right) = (\hat{S}/\hat{S}T_m)t_\mu - 0.5(\hat{S}^2 n_m - \hat{S}^2)n\left\{S^2 n_m \sum_2^n (X_t - \overline{X}_{t-1})^2\right\}^{-1/2} \tag{3.18}$$

denklemini tanımlamaktadır. Burada n, örneklem genişliği ve m tahmin edilen otokorelasyon sayısı olmaktadır. Ayrıca,

$$\overline{X}_{t-1} = \left(n-1\right)^{-1} \sum_2^n X_{t-1}$$

S^2, artıkların örneklem varyansı, τ_μ, $\Delta X_t = \beta_0 + \beta_1 t + \gamma X_{t-1} + e_t$ regresyon modelindeki γ ile ilgili t istatistiği ve $\hat{S}^2 n_m$ ise,

$$\hat{S}^2 n_m = n^{-1} \sum_{t=1}^n e_t^2 + 2n^{-1} \sum_{s=1}^m W_{sm} \sum_{t=s+1}^n \hat{e}_t \hat{e}_{t-s} \tag{3.19}$$

şeklinde tahmin edilen olarak tanımlanmaktadır. Newey ve West (1987), $\hat{S}^2 n_m$ teriminin özelliklerini ve (3.19) numaralı eşitliğin nasıl elde edildiğini ayrıntılı bir şekilde göstermişlerdir. Bu nedenle, $\hat{S}^2 n_m$ terimine Newey ve West düzeltmesi de denmektedir. (3.19) numaralı denklemdeki e_t terimi $\Delta X_t = \beta_0 + \beta_1 t + \gamma X_{t-1} + e_t$ modelindeki artıklardır ve W_{sm},

$$W_{sm} = \left[1 - s/\left(m+1\right)\right] \qquad \text{s=1,2,...,m} \tag{3.20}$$

olmaktadır ve $S^2 n_m$ varyansının tahminin pozitif olmasını sağlar.

$\Delta X_t = \beta_0 + \beta_1 t + \gamma X_{t-1} + e_t$ denkleminde $\beta_1 \neq 0$ iken, buna karşılık gelen istatistik,

$$Z(\tau_t) = (\bar{S}/\bar{S}n_m)t_t - (\bar{S}^2 n_m - \bar{S}^2)n^3 \left\{4\bar{S}n_m[3D_{xx}]^{1/2}\right\}^{-1} \tag{3.21}$$

olmaktadır. Burada $\bar{S}$ ve $\bar{S}n_m$ yukarıdaki tanımlarla aynıdır, fakat tek fark, $\Delta X_t = \beta_0 + \beta_1 t + \gamma X_{t-1} + e_t$ denkleminde $\beta_1 \neq 0$ olmasıdır. D_{xx} modeldeki bağımsız değişkenlerin çapraz çarpım matrisinin determinantıdır ve

$$\begin{aligned} D_{xx} &= [n^2(n^2-1)/12]\sum X_{t-1}^2 - n(\sum tX_{t-1})^2 - n(n+1)\sum tX_{t-1}\sum X_{t-1} \\ &\quad -[n(n+1)(2n+1)/6](\sum X_{t-1})^2 \end{aligned} \tag{3.22}$$

dır. Phillips-Perron istatistikleri Dickey-Fuller ve Geliştirilmiş Dickey-Fuller istatistikleriyle aynı limit dağılımına sahip olmakta ve Dickey-Fuller tabloları Phillips-Perron istatistikleri için de kullanılabilmektedir (Kadılar 2000).

3.5 DHF ve HEGY Testi

Mevsimsel serilerde birim kökün varlığı birçok iktisadi probleme sebep olmaktadır. Bu sebeple, seride mevsimsel birim kökün varlığının sınanması önemlidir. Bu konuda pratikte çok kullanılan iki yöntem DHF (Dickey, Hazsa ve Fuller) ve HEGY (Hylleberg, Engle, Granger ve Yoo) yöntemleridir. DHF testini kısaca açıklamaya çalışalım. d mevsimsellik derecesini göstermek üzere, mevsimsel otoregresif zaman serisi modeli kısaca,

$$X_t = \alpha_d X_{t-d} + e_t \qquad t = 1,2,... \tag{3.23}$$

şeklinde yazılabilir. Burada, $H_0 : \alpha_d = 1$ ise seri mevsimsel birim köklüdür. Bu yokluk hipotezini test için, Dickey *et al.* (1984) koşullu en küçük kareler tahmin edicileri önermişlerdir. α_d 'nin koşullu en küçük kareler tahmin edicisi,

$$\tilde{\alpha}_d = \frac{2\sum_{t=1}^{n} X_t X_{t-d}}{\sum_{t=1}^{n}(X_t^2 + X_{t-d}^2)} \tag{3.24}$$

olarak önerilmiştir. Bu hipotezi test etmek için, standart birim kök testinde olduğu gibi aşağıda verilen t-türü istatistik kullanılmaktadır. Bu test istatistiğinin tablo değerleri Dickey *et al.* (1984) de verilmiştir. Burada,

$$\hat{\tau}_d = 2^{1/2}\left[\left\{\sum_{t=1}^{n}(X_t^2 + X_{t-d}^2)\right\}^{-1} S^2\right]^{-1/2}(\hat{\alpha}_d - 1) \tag{3.25}$$

olup

$$S^2 = (2n-1)^{-1}\sum_{t=1}^{n}\left[(X_t - \hat{\alpha}_d X_{t-d}) + (X_{t-d} - \hat{\alpha}_d X_t)^2\right] \tag{3.26}$$

dir (Dickey *et al.* 1984).

Diğer bir metot ise Hylleberg *et al.* (1990)' nun önerdiği ve uygulamada HEGY testi olarak bilinen yöntemdir. Bu yöntem

$$X_{4t} = (1-B^4)X_t = \pi_1 X_{1,t-1} + \pi_2 X_{2,t-1} + \pi_3 X_{3,t-2} + \pi_3 X_{3,t-1} + e_t \tag{3.27}$$

şeklinde bir yardımcı regresyon çözümlemesine ihtiyaç duymaktadır (Hylleberg *et al.* 1990). Burada; $X_{1t} = (1+B+B^2+B^3)X_t$, $\theta = 1/4, 1/2, 3/4$ frekanslarındaki birim köklerden arındırılmış bileşen; $X_{2t} = -(1-B+B^2-B^3)X_t$, $\theta = 0, 1/4, 3/4$ frekanslarındaki birim köklerden arındırılmış bileşen; $X_{3t} = -(1-B^2)X_t$ de $\theta = 0, 1/2$ frekanslarındaki birim köklerden arındırılmış bileşenlerdir (Hylleberg *et al.* 1990).

Regresyon denklemine açıklayıcı değişken olarak katılan bu bileşenler, birim kökün frekansının belirlenmesine yardımcı olmaktadır. Yani, regresyon denklemindeki X_{1t} değişkeninin katsayısı için $H_0 : \pi_1 = 0$ hipotezinin $H_a : \pi_1 < 0$ alternatifine karşı red edilememesi serinin 0 frekansta birim köklü olduğu anlamına gelmektedir. Benzer şekilde, $H_0 : \pi_2 = 0$ hipotezi $H_a : \pi_2 < 0$ alternatifine karşı red edilemez ise seri $1/2$ frekansta birim köke sahiptir. Kompleks kökler için, π_3 ve π_4 parametrelerinin her ikisinin de sıfıra eşit olup olmadığı test edilmelidir. $H_0 : \pi_2 = 0$ ve $H_0 : \pi_3 = \pi_4 = 0$ hipotezlerinin red edilememesi serinin mevsimsel birim köklü olduğunu göstermektedir (Hylleberg *et al.* 1990).

Regresyon denklemine, bağımlı değişken $(1-B^4)X_t$ 'nin gecikmeli değerlerinin katılması, dağılım üzerinde herhangi bir etki yaratmamaktadır. Ayrıca, regresyon denklemine sabit terim (intercept), mevsimsel kukla (seasonal dummy) değişken ve trend gibi deterministik terimler de eklenebilmektedir. Regresyon denklemi trend, sabit terim ve kukla değişken içerdiğinde dağılımın kritik değerleri değişmektedir (Hylleberg *et al.* 1990).

Mevsimsel zaman serilerinde öncelik, uygun fark almanın ve uygun dönüşümün belirlenmesidir. Otokorelasyon ve kısmi otokorelasyon grafiklerinden model derecesi belirlenebilir. Otokorelasyon fonksiyonu bazı durumlarda periyodik olarak artan yada azalan bir davranış gösterir.

4. KOİNTEGRASYON ANALİZİ

4.1 Kointegrasyon Kavramına Genel Bakış

Ekonominin çeşitli alanlarındaki uygulamalarda durağan olmayan zaman serileri arasındaki ilişkileri çözümlemek için kullanılan kointegrasyon analizi bir yöntem olarak literatürde yer almaktadır.

Kointegrasyon metodu zaman serilerinin durağan olmamaları durumunda regresyon sonuçlarının hatalı olabileceği düşüncesiyle bir çözüm getirmek amacıyla geliştirilmiştir. Bu gibi durumlarda zaten "t oranları ve diğer istatistiklerle regresyon modelini değerlendirmenin hatalı sonuçlar doğuracağı" görüşü oldukça yaygındır (Köse 1998).

Zaman serisi verileri kullanılarak yapılan ekonometrik analizlerde karşılaşılan önemli sorunlardan biri de durağan olmayan değişkenlerin modelde sahte regresyona sebep olmalarıdır. Durağanlığı sağlamak için yapılan fark alma işlemi seride geçmiş dönemlere ait şokların etkisinin yanında, uzun dönemli ilişkilerinde ortadan kalkmasına neden olmaktadır. Kointegrasyon analizi, iktisadi değişkenlere ait serilerin durağan olmadığı durumlarda bu serilerin doğrusal birleşiminin durağan olabileceği ve bunun ekonometrik olarak belirlenebileceğini göstermektedir. Ekonomide uzun dönem denge ilişkisinin varlığının saptanmasında ve test edilmesinde kullanılır (Ertek 1996).

Bu kavramla ilgili olarak üç önemli nokta karşımıza çıkmaktadır. Bunlar;

1. Kointegrasyon durağan olmayan değişkenlerin doğrusal kombinasyonu ile ilgilenmektedir.

2. Bütün değişkenler aynı dereceden bütünleşik olmalıdır. Bu koşul aynı dereceden bütünleşik olan bütün değişkenlerin kointegre olacağı anlamına gelmemektedir.

3. Kointegrasyonu gerçekleştiren vektör sayısı modelde yer alan değişkenlerin sayısının en fazla bir eksiği (n-1) ile belirlenmektedir.

Değişkenler arasındaki kointegrasyon ilişkisinin varlığının saptanabilmesi için birçok yöntem ve test geliştirilmiştir. Bu çalışmada Engle-Granger ve Johansen testlerine yer verilecektir.

Sonuç olarak, kointegrasyon kısaca ekonomi ile ilgili seriler arasındaki uzun dönemli ilişkinin varlığının istatistiksel olarak gösterimidir.

4.2 Kointegrasyon Tanımı

Kointegrasyon analizi, aynı sırada bütünleşik zaman serileri arasında uzun dönemli bir ilişki olup olmadığını ortaya çıkarmak için geliştirilmiş bir yöntemdir. Bu yöntem, düzey değerlerinde durağan olmayan, ancak aynı derece farkları alındığında durağan hale gelen serilerin, orjinal değerlerinin analizde kullanılmasına imkan vermektedir. Fark alma işlemi sadece serinin taşıdığı kısa dönemli ilişkilerinde ortadan kalkmasına neden olmaktadır. Dolayısıyla fark alma işlemiyle durağanlaştırılmış seriler arasındaki regresyon analizleri, uzun döneme ait bilgilerin fark alma işlemi sırasında kaybolması nedeniyle herhangi bir uzun dönem ilişkisi vermeyecektir. Bu nedenle kointegrasyon yöntemi fark alma yoluyla değişkenler arasında kısa ve uzun dönemli bilgilerin kaybolmaması açısından avantaj sağlayan bir yöntemdir. Ayrıca, her bir eşbütünleşik serinin hata düzeltme modelinin kurulabilmesi, uzun ve kısa dönem ilişkileri ayırt etme imkanı sağlamaktadır.

Zaman serisi değişkenlerinin kointegrasyon özellikleri, modelin tanımlama aşamasında uygulamalı çalışmaların yapılmasının ve bazı ekonomik hipotezlerin test edilmesini sağlar. Zaman serilerinde kointegrasyonun istatiksel gösterimi, uzun dönem denge ilişkilerinin teorik gösterimine karşılık gelir. İthalat, ihracat, enflasyon, faiz oranı, fiyat, ücret ve kamu harcamaları gibi değişkenler, uzun dönem denge ilişkilerinin araştırılabileceği ekonomik değişkenlerden birkaçıdır.

4.3 Kointegrasyon Analizinde Kullanılan Testler

Ekonomik değişkenler arasındaki ilişkileri incelemek amacıyla, durağan olmayan zaman serileri kullanılarak yapılan çalışmalarda kointegrasyon analizi bir çözüm yöntemi olarak karşımıza çıkmaktadır. Literatürde kointegrasyon analizine ilişkin çeşitli testler ve bu testlerin dayandığı çeşitli tahmin yöntemleri bulunmaktadır. Bunları iki grupta incelemek mümkündür. Birinci grupta yer alanlar, tek denklemli modele, ikinci gruptakiler ise bir denklemler sistemine dayanmaktadır. Tek denklemli modelde kointegrasyon ilişkisinin tahmini, en küçük kareler yöntemine dayanmaktadır. Burada kointegrasyonun varlığının tespit edilebilmesi için kullanılan çok sayıda test bulunmaktadır. Eğer kointegrasyonu gerçekleştiren birden fazla vektör mevcut ise bu durumda çok değişkenli yöntemler geçerli olmaktadır. Tek denkleme dayalı kointegrasyon analizi, yöntem olarak Engle Granger tarafından geliştirilmiş, daha sonrada Johansen tarafından çoklu kointegre vektörleri tahmin etmek amacıyla (VAR modelde) en çok olabilirlik yöntemine dayanan bir yöntem geliştirilmiştir.

4.4 Kointegrasyon Vektörünün Tahmini ve Engle-Granger Testi

Tek değişkenli zaman serileri kendi geçmiş değerlerinin bir fonksiyonu olarak karşımıza çıkmaktadır. Fakat herhangi bir zaman serisi kendi geçmiş değerleri ile birlikte başka değişkenler ve geçmiş değerlerine de bağlıdır. Bu tip zaman serileri çok değişkenli zaman serileri olarak adlandırılır. Çok değişkenli zaman serilerinde temel amaçlardan biri o serinin bileşenleri arasındaki ilişkinin belirlenmesidir. Tek değişkenli zaman serilerinde olduğu gibi durağanlık en temel kavramlardan biridir. Bazı durumlarda çok değişkenli bir seri durağan olmamasına rağmen, herhangi bir lineer dönüşüm ile durağan hale gelebilir. O zaman, bu seriye kointegrasyonludur denmektedir. Çok değişkenli serilere en iyi örnek Vektör Otoregresif Seriler (VAR) verilebilir. Birinci dereceden bir vektör otoregresif zaman serisi $\underset{\sim}{e}_t \sim WN(0,V)$ olmak üzere

$$\underset{\sim}{X}_t = A\underset{\sim}{X}_{t-1} + e_t \qquad t = 1, 2, ..., n \tag{4.1}$$

şeklinde verilmektedir. Burada V beyaz gürültü serisinin varyans-kovaryans matrisini, A'da modelin parametre matrisini göstermektedir.

Durağan olmayan herhangi bir $\underset{\sim}{X}_t = (X_1, X_2, ..., X_n)'$ serisi için öyle bir $\underset{\sim}{\beta}$ vektörü varsa, öyle ki $\underset{\sim}{\beta}'\underset{\sim}{X}_t$ durağan oluyorsa, $\underset{\sim}{X}_t$ serisine kointegrasyonludur denir ve $\underset{\sim}{\beta}'$ vektörüne (veya matrisine) de kointegrasyon vektörü denir. Kointegrasyon vektörü bir parametre vektörüdür ve bu parametre vektörünün tahmin edilmesi gerekir. Ancak kointegrasyon vektörü tek değildir. Onun için birbirlerinden lineer bağımsız kointegrasyon vektörlerinin sayısı (varsa) önemlidir.

Örneğin bir VAR(1) modeli;

$$\underset{\sim}{X}_t = A\underset{\sim}{X}_{t-1} + e_t \qquad t = 1, 2, ..., n \tag{4.2}$$

verilmiş olsun. Eğer bu seri durağan değilse, durağan hale getirmek için ilk akla gelen birinci dereceden fark almaktır. Yani her iki taraftan da $\underset{\sim}{X}_{t-1}$ çıkarılırsa modelimiz

$$\nabla X_t = \underset{\sim}{X}_t - \underset{\sim}{X}_{t-1} = (A - I)\underset{\sim}{X}_{t-1} + e_t$$

olarak elde edilir. Eğer $\pi = (A - I)$ denirse model

$$\nabla\underset{\sim}{X}_t = \pi\underset{\sim}{X}_{t-1} - e_t$$

şeklinde yazılır. Buradaki π matrisi $(k \times k)$ boyutunda rankı r olan bir matristir. Yani $rank(\pi) = r$ olsun. Buna göre;

i) Eğer $r = k$ ise seri durağandır.

ii) Eğer $r = 0$ ise seri durağan değildir. Ayrıca serinin hiçbir lineer birleşimi de durağan değildir. Yani sistem kointegrasyonlu değildir.

iii) Eğer $0 < r < k$ ise öyle $\underset{\sim}{\alpha}$ ve $\underset{\sim}{\beta}$ vektörleri vardır ki, $\pi = \underset{\sim}{\alpha}\underset{\sim}{\beta}'$ şeklinde yazılır.

Öyle ki, $\underset{\sim}{Z}_t = \underset{\sim}{\beta}' \underset{\sim}{X}_t$ durağandır. Diğer taraftan $\underset{\sim}{\alpha}$ vektörüne dik herhangi bir vektör $\underset{\sim}{\alpha}_1$ olmak üzere $W_t = \underset{\sim}{\alpha}_1' \underset{\sim}{X}_t$ birim köklüdür. Dolayısıyla durağan olmayan herhangi bir seri, durağan ve durağan olmayan serilerin bir birleşimi şeklinde yazılabilmektedir. İki boyutlu birinci dereceden durağan olmayan bir vektör otoregresif zaman serisi, U_t durağan olmayan (birim köklü) bir seriyi ve S_t de durağan bir seriyi göstermek üzere;

$$\begin{aligned} \underset{\sim}{X}_{1,t} &= a_{11} U_t + a_{12} S_t \\ \underset{\sim}{X}_{2,t} &= a_{21} U_t + a_{22} S_t \end{aligned} \tag{4.3}$$

şeklinde yazılabilir. Verilen eşitlikler göz önüne alındığında $\underset{\sim}{X}_{1,t}$'yi $\frac{a_{21}}{a_{11}}$ ile çarpıp, $\underset{\sim}{X}_{2,t}$ eşitliğinden çıkarttığımızda;

$$\underset{\sim}{X}_{2,t} - \frac{a_{21}}{a_{11}} \underset{\sim}{X}_t = \left(a_{22} - \frac{a_{21}}{a_{11}} a_{12} \right) S_t \tag{4.4}$$

olup, S_t durağan olduğundan dolayı herhangi bir sabit reel sayı ile çarpılması durağanlığı etkilemez. Dolayısı ile $\underset{\sim}{X}_{2,t} - \frac{a_{21}}{a_{11}} \underset{\sim}{X}_{1,t}$ serisi durağandır. Burada kointegrasyon vektörünü tahmin etmek için $\frac{a_{21}}{a_{11}}$ oranının tahmin edilmesi yeterlidir. $\underset{\sim}{X}_{2,t}$ serisinin $\underset{\sim}{X}_{1,t}$ üzerine regresyonu yapıldığında elde edilen artıklar serisine benzemektedir. Yani, $\underset{\sim}{X}_{2,t} = \beta \underset{\sim}{X}_{1,t} + e_t$, $t = 1, 2, 3, \ldots, n$ regresyon denkleminden elde edilen artıkları serisi durağan ise seri kointegrasyonludur. Bu tahmin edicinin, asimptotik özellikleri Engle ve Granger (1987) ve Stock ve Watson (1993) tarafından incelenmiştir. Bu metod literatürde Engle ve Granger metodu olarak bilinmektedir. $\underset{\sim}{X}_{2,t}$ serisinin $\underset{\sim}{X}_{1,t}$ üzerine regresyonundan β nın en küçük kareler tahmin edicisi,

$$\hat{\beta}_n = \frac{\sum_{t=1}^{n} \underset{\sim}{X}_{2,t} \underset{\sim}{X}_{1,t}}{\sum_{t=1}^{n} \underset{\sim}{X}_{1,t}^2}$$

olmak üzere,

$$\frac{1}{n^2} \sum_{t=1}^{n} \underset{\sim}{X}_{2,t} \underset{\sim}{X}_{1,t} = a_{21} a_{11} \sum_{t=1}^{n} U_t^2 + O_P(1/\sqrt{n})$$

ve

$$\frac{1}{n^2} \sum_{t=1}^{n} \underset{\sim}{X}_{1,t}^2 = a_{11}^2 \sum_{t=1}^{n} U_t^2 + O_P(1/\sqrt{n})$$

dir. Buradan da,

$$\hat{\beta}_n = \frac{\sum_{t=1}^{n} \underset{\sim}{X}_{2,t} \underset{\sim}{X}_{1,t}}{\sum_{t=1}^{n} \underset{\sim}{X}_{1,t}^2} = \frac{a_{21}}{a_{11}} + O_P(1/\sqrt{n})$$

elde edilir. Eğer $O_P(1/\sqrt{n})$ terimi ihmal edilirse,

$$Z_t = X_{2,t} - \hat{\beta}_n \underset{\sim}{X}_{1,t} = (a_{21} U_t + a_{22} S_t) - \frac{a_{21}}{a_{11}} (a_{11} U_t + a_{12} S_t) = CS_t \tag{4.5}$$

durağan serisi elde edilmektedir (Akdi 2003).

Yani regresyon, kointegrasyon vektörünü bulmaktadır ve bu vektör, $(-\hat{\beta}_n, 1)'$ dir. Diğer taraftan Engel ve Granger, verilen herhangi bir serinin kointegrasyonlu olup olmadığını sınamak için Durbin-Watson test istatistiğine dayalı bir test de geliştirmişlerdir. Fakat bu test Genişletilmiş Dickey-Fuller (Augmented Dickey Fuller) testine yakın sonuçlar vermektedir. Verilen herhangi iki serinin kanonik formu,

$$
\begin{aligned}
Z_{1,t} &= Z_{1,t-1} + \eta_{1,t} \\
Z_{2,t} &= \rho Z_{2,t-1} + \eta_{2,t}
\end{aligned} \tag{4.6}
$$

şeklinde olmak üzere, $\rho = 1$ ise seri iki birim köklü bir zaman serisi olup hiçbir kointegrasyon ilişkisi yoktur. Dolayısı ile elde edilen artıklar serisinin birim köklü olup olmadığını Genişletilmiş Dickey Fuller metodu ile sınandığında eğer artıklar serisi birim köklü ise seri kointegrasyonlu değildir. Birim kök hipotezi red edilirse seri kointegrasyonludur ve kointegrasyon vektörü $(-\hat{\beta}_n, 1)'$ dir.

4.5 Johansen Yöntemi ve Testi

Kointegrasyon vektörünün tahmin edilmesi ve serinin kointegrasyonlu olup olmadığının sınanması konusundaki çalışmalardan biride Johansen (1988) ın önerdiği koşullu en çok olabilirlik yöntemidir. Johansen (1988), tarafından önerilen yaklaşımın kullanılmasının iki tane nedeni vardır.

i) İlgilenilen değişkenler için kointegrasyon vektörlerinin sayısını belirlemek.

ii) Kointegrasyon vektörünün ve ilgili parametrelerinin en çok olabilirlik tahminlerini elde etmek.

Johansen metodunda, serinin kointegrasyonlu olup olmadığının sınanması için parametre matrisinin özdeğerlerinden yararlanılır. Birinci dereceden bir vektör ototregresif zaman serisi,

$$
X_t = AX_{t-1} + e_t \qquad t = 1, 2, 3, \ldots, n \tag{4.7}
$$

olarak verilmiş olsun. Burada A matrisi k boyutlu parametre matrisi olmak üzere, e_t'ler varyans kovaryans matrisi V olan beyaz gürültü sürecini göstermektedir. Yani,

$$
E(\underset{\sim}{e}_t) = \underset{\sim}{0}, E(\underset{\sim}{e}_t \underset{\sim}{e}_t') = V \text{ ve } E(\underset{\sim}{e}_t \underset{\sim}{e}_{t+h}') = 0
$$

dır. Modelin her iki tarafından $\underset{\sim}{X}_{t-1}$ çıkartılırsa, $\pi = A - I$ olmak üzere, $\nabla \underset{\sim}{X}_t = \pi \underset{\sim}{X}_{t-1} + \underset{\sim}{e}_t$ modeline ulaşılır. Yukarıda bahsedildiği gibi, π matrisinin rankı sıfır ise, seri kointegrasyonlu değildir. $\pi = \underset{\sim}{\alpha}\underset{\sim}{\beta}'$ denklemi için B singuler olmayan herhangi bir matris olmak üzere, $\pi = \underset{\sim}{\alpha} B B^{-1} \underset{\sim}{\beta}'$ şeklinde de yazılabileceğinden dolayı sonsuz çoklukta $\underset{\sim}{\alpha}$ veya $\underset{\sim}{\beta}$ vektör veya matrisleri bulunur. Dolayısıyla, Johansen metodunda $\underset{\sim}{\beta}$ vektörünün tahmini yerine π matrisinin rankı üzerine testler oluşturulmaktadır. Kısaca, A veya π parametre matrisinin tahmin edilmesi gerekir. $\underset{\sim}{X}_0 = \underset{\sim}{0}$ varsayımı altında, π parametre matrisinin en çok olabilirlik tahmin edicisinin aldığı değer bulunur. Bunun için $\underset{\sim}{e}_t$ lerin normal dağıldığını varsayarsak, $|V|$, V matrisinin determinantını göstermek üzere, olabilirlik fonksiyonu,

$$\ell = \frac{1}{(2\pi)^{nk/2} |V|^{n/2}} \exp\left[-\frac{1}{2} \sum_{t=1}^{n} \left(\nabla \underset{\sim}{X}_t \underset{\sim}{X}'_{t-1} \right)' V^{-1} \left(\nabla \underset{\sim}{X}_t - \Pi \underset{\sim}{X}_{t-1} \right) \right] \tag{4.8}$$

olarak yazılır. π nin en çok olabilirlik tahmin edicisi,

$$\hat{\pi} = \left[\sum_{t=1}^{n} \nabla \underset{\sim}{X}_t \underset{\sim}{X}'_{t-1} \right] \left[\sum_{t=1}^{n} \nabla \underset{\sim}{X}_{t-1} \underset{\sim}{X}'_{t-1} \right]^{-1} = S_{01} S_{11}^{-1} \tag{4.9}$$

olarak bulunur. V matrisinin en çok olabilirlik tahmin edicisi ise,

$$\hat{V}_n = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n} \left(\nabla \underset{\sim}{X}_t - \hat{\pi} \underset{\sim}{X}_{t-1} \right) \left(\nabla \underset{\sim}{X}_t - \hat{\pi} \underset{\sim}{X}_{t-1} \right)' = S_{00} - \hat{\pi} S_{11} \hat{\pi}' \tag{4.10}$$

dir. Diğer taraftan, $H_0 : \pi = \underset{\sim}{\alpha}\underset{\sim}{\beta}'$ yokluk hipotezi test edilmek istenmektedir. Burada Π matrisi $k \times k$ boyutunda rankı r olan bir matris olmak üzere $\underset{\sim}{\alpha}$ ve $\underset{\sim}{\beta}$ matrisleri $k \times r$ boyutunda matrislerdir. Buradan H_0 yokluk hipotezi altında, olabilirlik fonksiyonu,

$$\ell(\underset{\sim}{\alpha},\underset{\sim}{\beta})=\frac{1}{(2\pi)^{nk/2}\left|V\right|^{n/2}}\exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{t=1}^{n}\left(\nabla\underset{\sim}{X}_t-\underset{\sim}{\alpha}\underset{\sim}{\beta}'\underset{\sim}{X}'_{t-1}\right)'V^{-1}\left(\nabla\underset{\sim}{X}_t-\underset{\sim}{\alpha}\underset{\sim}{\beta}'\underset{\sim}{X}_{t-1}\right)\right\} \tag{4.11}$$

Burada ise maksimizasyon işlemi iki adımda yapılır. Önce $\underset{\sim}{\beta}'$ sabit tutularak $\underset{\sim}{\alpha}$ nın en çok olabilirlik tahmin edicisi bulunur. Bunun için, $\nabla\underset{\sim}{X}_t=\underset{\sim}{\alpha}\underset{\sim}{\beta}'\underset{\sim}{X}_{t-1}+\underset{\sim}{e}_t$ regresyon denkleminden faydalanılır;

$$\begin{aligned}\hat{\underset{\sim}{\alpha}}' &= \left[\sum_{t=1}^{n}\underset{\sim}{\beta}'\underset{\sim}{X}_{t-1}\underset{\sim}{X}'_{t-1}\underset{\sim}{\beta}\right]^{-1}\left[\sum_{t=1}^{n}\underset{\sim}{\beta}'(\underset{\sim}{X}_{t-1}\nabla\underset{\sim}{X}'_t)\right] \\ &= \left[\underset{\sim}{\beta}'S_{11}\underset{\sim}{\beta}\right]\left[\underset{\sim}{\beta}'S_{10}\right]\end{aligned} \tag{4.12}$$

bulunur ki buradan da olabilirlik fonksiyonu $\underset{\sim}{\beta}$ ve V nin bir fonksiyonudur. Bu değerin olabilirlik fonksiyonunda yerine konulması ile $\underset{\sim}{\beta}$ nın en çok olabilirlik tahmin edicisi bulunur. Bunun için ise, $Y=\nabla\underset{\sim}{X}_t-\underset{\sim}{\alpha}\underset{\sim}{\beta}'\underset{\sim}{X}_{t-1}$ olmak üzere,

$$\begin{aligned}\exp\left[-\frac{n}{2}trace(X(X'X)^{-1}X')\right] &= \exp\left[-\frac{n}{2}trace((X'X)^{-1}X'X)\right] \\ &= \exp\left[-\frac{nk}{2}\right]\end{aligned}$$

olduğu hatırlanırsa olabilirlik fonksiyonu,

$$\ell=\frac{1}{(2\pi)^{nk/2}\left|\hat{V}(\underset{\sim}{\beta})\right|^{n/2}}\exp\left[-\frac{nk}{2}\right] \tag{4.13}$$

şekline dönüşür. Dolayısı ile, olabilirlik fonksiyonunun maksimize edilmesi, $\left|\hat{V}(\underset{\sim}{\beta})\right|^{n/2}$ minimize edilmesine dönüşür. Yani, problem,

$$\min_{\underset{\sim}{\beta}}\left|\hat{V}(\underset{\sim}{\beta})\right|=\min_{\underset{\sim}{\beta}}\left|S_{00}-S_{01}\underset{\sim}{\beta}(\underset{\sim}{\beta}'S_{11}\underset{\sim}{\beta})^{-1}\underset{\sim}{\beta}'S_{10}\right| \tag{4.14}$$

haline dönüşür. π matrisinin rankının r olması demek, r tane birbirinden lineer bağımsız kointegrasyon ilişkisi var demektir (geriye kalan $k-r$ tane de birim köklü lineer birleşim vardır). Dolayısı ile $H_0 : r \leq r_0$ hipotezi, en fazla r_0 tane birbirinden lineer bağımsız kointegrasyon ilişkisi vardır yokluk hipotezinin $H_a : r > r_0$ alternatif hipotezine karşı test edilmesi gerekir. Bunun için olabilirlik oranın test istatistiği, λ_i ler π matrisinin özdeğerlerini göstermek üzere,

$$LR = \frac{\max\limits_{H_0} \ell(\underset{\sim}{\alpha}, \underset{\sim}{\beta})}{\min\limits_{H_0 \cup H_a} \ell(\underset{\sim}{\alpha}, \underset{\sim}{\beta})} = \frac{\left|\hat{V}_a\right|^{n/2}}{\left|\hat{V}_0\right|^{n/2}}$$
$$= \left[\frac{\prod\limits_{i=0}^{k} (1-\hat{\lambda}_i)}{\prod\limits_{i=0}^{r_0} (1-\hat{\lambda}_i)}\right]^{n/2} = \left[\prod_{i=r_0+1}^{k} (1-\hat{\lambda}_i)\right]^{n/2} \tag{4.15}$$

şeklindedir. Dolayısı ile,

$$\lambda_{trace} = -n \sum_{i=r_0+1}^{k} \ln(1-\hat{\lambda}_i) \tag{4.16}$$

test istatistiğinin aldığı değer kritik değerden büyük ise $H_0 : r \leq r_0$ veya $H_0 : r = r_0$ yokluk hipotezi reddedilir. Burada,

$$\lambda_{r_0+1} > \lambda_{r_0+2} > \ldots > \lambda_p$$

olacak şekilde $k - r_0$ tane kanonik korelasyon kullanılmaktadır (Johansen 1988).

5. UYGULAMALAR

5.1 Amaç

Ekonomi, genel olarak "sonsuz olan ihtiyaçlarla kıt olan kaynaklar arasında en uygun dengeyi kurma bilimidir" (Özelmas 1981). Borsa Bileşik Endeksi, Altın Fiyatları ve Döviz Kuru ekonominin finans ve yatırım araçlarıdır. Bir ülkenin politik ve siyasi istikrarı, ülkedeki üretim hacmi (mal ve hizmet toplamı), sektörlerdeki verimlilik oranı, ülkedeki enflasyon ve faiz oranları, Döviz ve Altın fiyatları, uluslararası etkileşimler, Amerika Federal Merkez Bankasının (FED) kararları, Uluslararası Para Fonu (IMF), Dünya Bankasının tutumu ve kararları, uluslararası çaptaki diğer ülke borsalarının trendi, petrol fiyatları Borsa Bileşik Endeksini etkileyen temel hususlardır.

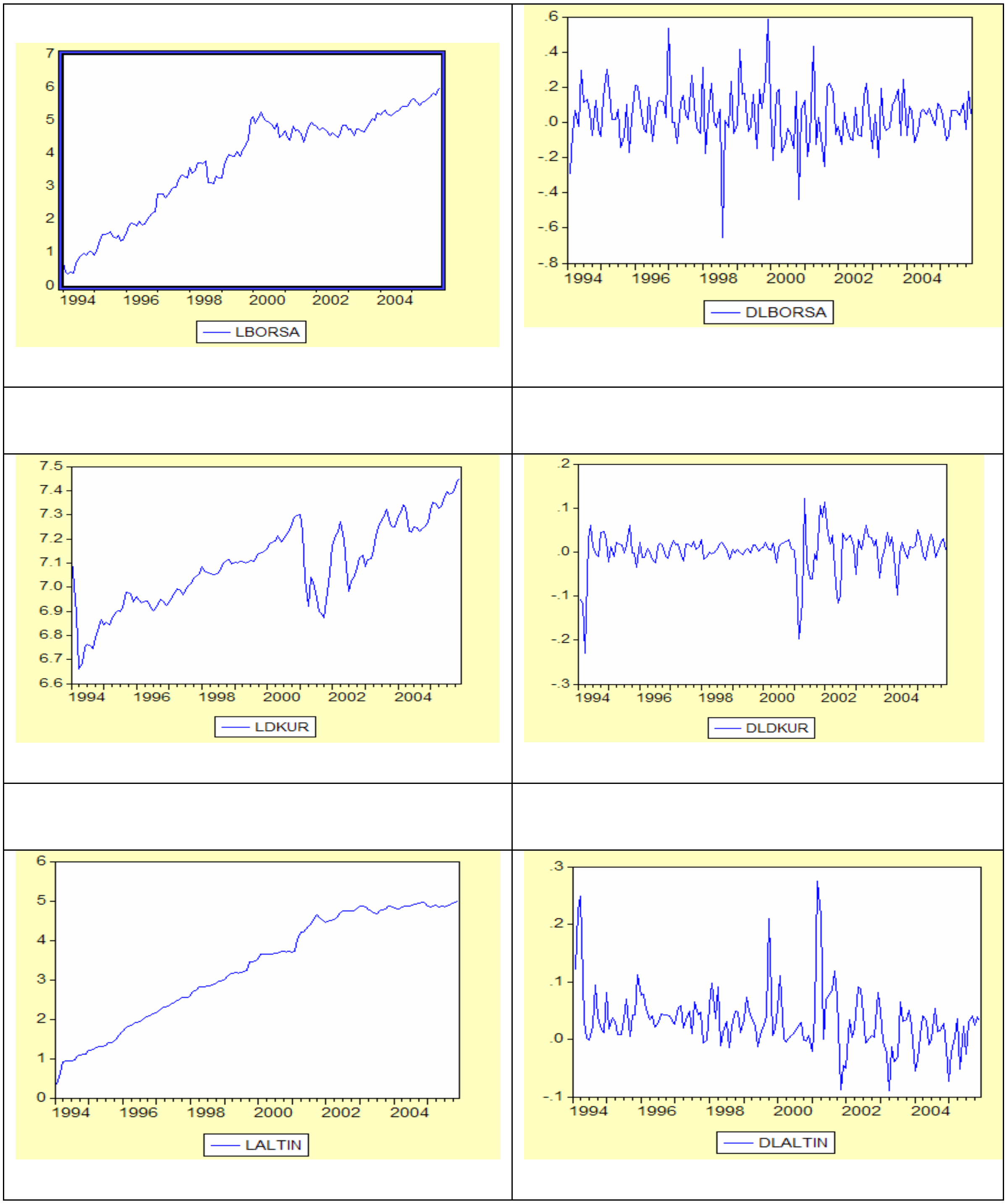
Borsa Bileşik Endeksi, Altın Fiyatları ve Döviz Kuru değişkenleri arasındaki ilişki; Döviz kuru temel olarak bir ülkenin üretimi ve ihracatı ile ilgilidir. Talep arttıkça fiyat yükselir. İhracat arttıkça döviz kuru azalır. Döviz kurları artış trendinde ise borsa düşüşe geçer. Yatırım ve saklama aracı olarak parasal sistemde önemli bir rol oynayan Altın için de talep arttıkça fiyatlar yükselir. Bir ülkenin politik ve siyasi istikrarı altın fiyatları üzerinde etkilidir. Ülke politik ve siyasi açıdan güçlü, güvenilir ve problemsiz bir yapıda ise altın fiyatlarının dip-tepe farklılığı çok yüksek değildir. Eğer ülke politik ve siyasi açıdan istikrarsız bir yapıda ise altın güvenilir ve kolay saklanabilir bir yatırım olarak görülür ve altına olan talep artar. Altına olan talebin artması altın fiyatlarını yükseltir. Altın fiyatları yükseldiğinde de borsa olumsuz yönde etkilenir. Yatırım aracı olarak döviz ve altın "ikame" malı gibidir. (İkame: birinin diğerinin yerine geçmesi, kullanılması) Genellikle döviz ve altın birlikte yükselir. Bu yükseliş borsaya düşüş olarak yansır şeklinde genel bir tanı vardır.

Bu tanımların ışığı altında borsa bileşik endeksi, altın fiyatları ve döviz kuru değişkenleri arasında uzun dönem bir ilişki olup olmadığı araştırılacaktır.

Bu çalışmada, borsa bileşik endeksi, altın fiyatları ve döviz kuru serileri 1994:01–2005:12 dönemleri için ele alınacaktır. Analizlere geçmeden önce verilerin logaritmaları alınmış olup bu seriler arasında uzun dönem bir ilişki (kointegrasyon) olup olmadığı araştırılacaktır.

Logaritması alınmış serilerin düzey ve birinci dereceden fark grafikleri Şekil 1'de verilmektedir. Grafiklerde LBORSA (X_t) borsa bileşik endeksi serisinin, LDKUR (Z_t) döviz kuru serisinin, LALTIN (Y_t) altın fiyatları serisinin logaritmalarını, DLBORSA (∇X_t), DLDKUR (∇Z_t) ve DLALTIN (∇Y_t) serileri ise sırasıyla borsa bileşik endeksi, döviz kuru ve altın fiyatları serilerinin birinci dereceden farklarını temsil etmektedir.

Serilerin zaman serisi grafikleri Şekil 5.1' de gösterilmiştir. Serilerin birinci farkının grafiği incelendiğinde bu değişkenlerin zaman içinde artma eğilimi göstermediği görülmektedir. Bu nedenle birim kök testi yapılırken sabit içeren ve trendin olmadığı denklem türü daha uygun olabilir.



Şekil 5.1 (1994:01-2005:12 dönemleri) Logaritması alınmış serilerin düzey ve birinci derece fark grafikleri

Seriler arasında uzun dönem bir ilişkinin araştırılabilmesi için önce serilerin aynı dereceden bütünleşik (birim kök içerip içermediği) olup olmadığına bakılması gerekmektedir. Ancak birim kök testi yapılmadan önce her bir seri için uygun bir modelin belirlenmesi gerekmektedir. Bunun için verilerin aylık olması sebebiyle maksimum gecikme sayısı 12 olmak üzere birinci gecikmeden başlayarak 12'ye kadar, her bir gecikme için Akaike Bilgi Kriteri (AIC) ve Schwartz Bayesian Kriteri (SBC) istatistiğinin aldığı değerler hesaplanmıştır. Hesaplanan değerler içinde en küçük AIC istatistik değeri en uygun model derecesinin seçiminde kullanılmıştır.

Çizelge 5.1 Borsa bileşik endeksi serisinin gecikme sayılarına göre Eviews programında hesaplanan AIC ve SBC Değerleri

Gecikme sayıları	**AIC**	**SBC**
0	2,927765	2,949605
1	0,943546*	0,987225*
2	0,957623	1,023142
3	0,972735	1,060093
4	0,985065	1,094262
5	1,00013	1,131166
6	1,015183	1,168059
7	1,027562	1,202277
8	1,042563	1,239118
9	1,057713	1,276107
10	1,071157	1,311391
11	1,083416	1,345489
12	1,09854	1,382453

Borsa bileşik endeksi serisi (X_t) için Çizelge 5.1' deki değerlere bakıldığında AIC istatistiği en küçük değerini AR(1) de almaktadır. Dolayısı ile bu modeli uygun model olarak seçebiliriz. Yani modeli, $X_t = \alpha_0 + \alpha_1 X_{t-1} + e_t$ şeklinde yazabiliriz. Buradan parametrelerin tahmin değerleri Eviews programında; $\hat{\alpha}_0 = 0,173$, $\hat{\alpha}_1 = 0,934$ olarak hesaplanmıştır.

Çizelge 5.2 Altın fiyatları serisinin gecikme sayılarına göre Eviews programında hesaplanan AIC ve SBC Değerleri

Gecikme sayıları	**AIC**	**SBC**
0	3,255757	3,277596
1	-3,22067	-3,176991
2	-3,331131	-3,265613*
3	-3,335856*	-3,248499
4	-3,320716	-3,211519
5	-3,306093	-3,175056
6	-3,293836	-3,14096
7	-3,281781	-3,107065
8	-3,2732	-3,076645
9	-3,265846	-3,047452
10	-3,252045	-3,011811
11	-3,237317	-2,975244
12	-3,222166	-2,938253

Altın fiyatları serisi (Y_t) için Çizelge 5.2' deki değerlere bakıldığında AIC istatistiği en küçük değerini AR(3) te almaktadır. Dolayısı ile bu modeli uygun model olarak seçebiliriz. Yani modeli, $Y_t = \alpha_0 + \alpha_1 Y_{t-1} + \alpha_2 Y_{t-2} + \alpha_3 Y_{t-3} + e_t$ şeklinde yazabiliriz. Buradan parametrelerin tahmin değerleri Eviews programında; $\hat{\alpha}_0 = 0,047$, $\hat{\alpha}_1 = 1,421$, $\hat{\alpha}_2 = -0,602$ $\hat{\alpha}_3 = 0,174$ olarak hesaplanmıştır.

Çizelge 5.3 Döviz kuru serisinin gecikme sayılarına göre Eviews programında hesaplanan AIC ve SBC Değerleri

Gecikme sayıları	**AIC**	**SBC**
0	-0,918911	-0,897072
1	-3,615604	-3,571925
2	-3,765239	-3,699721
3	-3,788478*	-3,701121*
4	-3,774369	-3,665172
5	-3,759218	-3,628181
6	-3,773883	-3,621007
7	-3,764024	-3,589309
8	-3,756334	-3,559779
9	-3,761524	-3,54313
10	-3,750863	-3,510629
11	-3,758782	-3,496709
12	-3,746147	-3,462235

Döviz kuru serisi (Z_t) için Çizelge 5.3' deki değerlere bakıldığında AIC istatistiği en küçük değerini AR(3) te almaktadır. Dolayısı ile bu modeli uygun model olarak seçebiliriz. Yani modeli, $Z_t = \alpha_0 + \alpha_1 Z_{t-1} + \alpha_2 Z_{t-2} + \alpha_3 Z_{t-3} + e_t$ şeklinde yazabiliriz. Buradan parametrelerin tahmin değerleri Eviews programında; $\widehat{\alpha}_0 = 0,061$, $\widehat{\alpha}_1 = 1,414$ $\widehat{\alpha}_2 = -0,593$ $\widehat{\alpha}_3 = 0,147$ olarak hesaplanmıştır.

Çizelge 5.4 Üç serinin (Borsa, Altın, Döviz Kuru) gecikme sayılarına göre Eviews programında hesaplanan AIC ve SBC Değerleri

Gecikme sayıları	**AIC**	**SBC**
0	4.449.209	4.449.209
1	-6.380.141	-6.380.141
2	-6.516995*	-6.516995*
3	-6.446.000	-6.446.000
4	-6.346.803	-6.346.803
5	-6.250.568	-6.250.568
6	-6.191.326	-6.191.326
7	-6.104.164	-6.104.164
8	-6.015.358	-6.015.358
9	-5.903.767	-5.903.767
10	-5.792.300	-5.792.300
11	-5.727.823	-5.727.823
12	-5.626.638	-5.626.638

Bu üç seri için ortak model, Çizelge 5.4' deki değerlere bakıldığında AIC istatistiği en küçük değerini VAR(2) de almaktadır. Dolayısı ile bu modeli uygun model olarak seçebiliriz. Yani modeli, $\underset{\sim}{W}_t = A_1\underset{\sim}{W}_{t-1} + A_2\underset{\sim}{W}_{t-2} + \underset{\sim}{e}_t$ şeklinde yazabiliriz. Eviews programında VAR(2) modelinin çıktısı Çizelge 5.5' de verilmiştir.

Çizelge 5.5 Eviews Programında VAR(2) Modelinin Çıktısı

Örneklem (düzeltilmiş): 1994:03 2005:12

Eklenen gözlem sayısı: 142

[...] t istatistikleri, (...) standart hatalar

	LBORSA	LDKUR	LALTIN
LBORSA(-1)	0.962505	0.006048	-0.011587
	(0.08560)	(0.00874)	(0.01055)
	[11.2442]	[0.69193]	[-1.09791]
LBORSA(-2)	-0.026204	-0.005794	0.008600
	(0.08626)	(0.00881)	(0.01063)
	[-0.30379]	[-0.65775]	[0.80869]
LDKUR(-1)	0.894720	1.174993	-0.102502
	(1.03205)	(0.10539)	(0.12724)
	[0.86694]	[11.1494]	[-0.80557]
LDKUR(-2)	-0.810281	-0.326421	0.215025
	(0.99554)	(0.10166)	(0.12274)
	[-0.81391]	[-3.21094]	[1.75186]
LALTIN(-1)	0.988155	-0.138093	1.277172
	(0.87743)	(0.08960)	(0.10818)
	[1.12620]	[-1.54126]	[11.8062]
LALTIN(-2)	-0.983196	0.153199	-0.295838
	(0.87312)	(0.08916)	(0.10765)
	[-1.12607]	[1.71829]	[-2.74822]
C	-0.479924	1.029712	-0.704845
	(2.15890)	(0.22045)	(0.26617)
	[-0.22230]	[4.67087]	[-2.64809]

Akaike Bilgi Kriteri -6,506195

Modellerde belirlendikten sonra birim kök testine geçilebilir. Bunun için serilere Dickey-Fuller (ADF) ve Phillips Perron (PP) testleri uygulanmıştır. Test işlemi yapılırken sabit içeren model dikkate alınmıştır. Değişkenlerin düzeylerine ve birinci derece farklarına ilişkin ADF ve PP birim kök testlerinin sonuçları Çizelge 5.6 ve Çizelge 5.7' de yer almaktadır. Hipotezler,

H_0: Seri durağan değildir (Birim kök vardır),

H_1: Seri durağandır (Birim kök yoktur.)

şeklindedir.

Çizelge 5.6 ADF birim kök testi sonuçları

1994:01-2005:12 dönemleri		Geliştirilmiş Dickey- Fuller				
Değişkenler	τ_μ (%5 tablo değeri)	ADF	Sonuç	τ_t (%5 tablo değeri)	ADF	Sonuç
X_t	-2,883576	-2,130763	Birim kök	-3,441777	-2,111707	Birim kök
∇X_t		-11,86189	Durağan		-11,83971	Durağan
Y_t		-2,351370	Birim kök		-0,701274	Birim kök
∇Y_t		-7,551087	Durağan		-8,345852	Durağan
Z_t		-1,590675	Birim kök		-2,906049	Birim kök
∇Z_t		-5,240565	Durağan		-5,221695	Durağan

τ_{μ} ve τ_{t} sırası ile sabit ve sabitle trendin olduğu denklemlerin tahmininden elde edilen Dickey Fuller istatistikleridir. Çizelge 5.6' de değişkenlerin düzeylerine ilişkin Dickey-Fuller birim kök testi sonucu yüzde beş hata payı ile (H_0: Birim kök vardır, H_1: Birim kök yoktur) yokluk hipotezinin rededilemediği (örneğin; borsa bileşik endeksi serisi için $t_h = -2,130763 > t_t = -2,883576$ olup) görülmektedir. Dolayısıyla Çizelge 5.6 incelendiğinde her üç serinin de düzeyde durağan olmadığı anlaşılmaktadır. Bu nedenle serilerin birinci derece farkları alınarak test işlemi tekrar yapılmıştır. Farklarına ilişkin Dickey- Fuller birim kök testi sonucu yüzde beş hata payı ile (H_0: Birim kök vardır, H_1: Birim kök yoktur) yokluk hipotezinin red edildiği (örneğin; borsa bileşik endeksi serisi için $t_t = -2,883576 > t_h = -11,86189$ olup) görülmektedir.

Aynı işlemler Phillips Perron testi için yapıldığında Çizelge 5.7' deki sonuçlar elde edilmiştir.

Çizelge 5.7 PP birim kök testi sonuçları

1994:01-2005:12 dönemleri		Phillips Peron				
Değişkenler	$Z(\tau_\mu)$ (%5 tablo değeri)	PP	Sonuç	$Z(\tau_t)$ (%5 tablo değeri)	PP	Sonuç
X_t	-2,883576	-2,168198	Birim kök	-3,441777	-2,147144	Birim kök
∇X_t		-11,86220	Durağan		-11,83981	Durağan
Y_t		-2,226261	Birim kök		-1,410501	Birim kök
∇Y_t		-7,201827	Durağan		-7,345637	Durağan
Z_t		-1,432074	Birim kök		-3,348700	Birim kök
∇Z_t		-7,559509	Durağan		-7,504356	Durağan

$Z(\tau_\mu)$ ve $Z(\tau_t)$ sırası ile sabit ve sabitle trendin olduğu denklemlerin tahmininden elde edilen Phillips Peron istatistikleridir. Çizelge 5.7' de değişkenlerin düzeylerine ilişkin Phillips Peron birim kök testi sonucu yüzde beş hata payı ile (H_0: Birim kök vardır, H_1: Birim kök yoktur) yokluk hipotezinin reddedilemediği (örneğin; borsa bileşik endeksi serisi için $t_h = -2,168198 > t_t = -2,883576$ olup) görülmektedir. Dolayısıyla Çizelge 5.7 incelendiğinde her üç serinin de düzeyde durağan olmadığı anlaşılmaktadır. Bu nedenle serilerin birinci derece farkları alınarak test işlemi tekrar yapılmıştır. Farklarına ilişkin Phillips Peron birim kök testi sonucu yüzde beş hata payı ile (H_0: Birim kök vardır, H_1:

Birim kök yoktur) yokluk hipotezinin red edildiği (örneğin; borsa bileşik endeksi serisi için $t_t = -2,883576 > t_h = -11,86220$ olup) görülmektedir.

ADF ve PP test sonuçlarına göre birinci derece farkı alınmış, borsa bileşik endeksi (X_t), altın fiyatları (Y_t) ve döviz kuru (Z_t) serilerinin durağan olduğu görülmektedir. Bu durumda, her üç seride, birinci dereceden bütünleşik olup I(1) şeklinde gösterilir. Dolayısıyla bu üç seri aynı dereceden bütünleşik olduğu için aralarında uzun dönem bir ilişki (kointegrasyon) olup olmadığını araştırmak mümkündür.

İlk olarak Çizelge 5.4' de üç seri için bulunulan iki gecikme sayısı dikkate alınarak Eviews programında Johansen kointegrasyon testi gerçekleştirilmiş ve Çizelge 5.8' deki sonuçlar elde edilmiş ve bu sonuçlar Çizelge 5.9' de özetlenmiştir.

Çizelge 5.8 Eviews Programında Johansen Kointegrasyon Testi Çıktısı

Örneklem (düzeltilmiş): 1994:04 2005:12
Eklenen gözlem sayısı: 141
Lineer deterministik trend
Seriler: LBORSA, LDKUR , LALTIN
Gecikme aralığı (birinci farklar): [1,2]

Hypothesized No. of CE(s)	Eigenvalue	Trace Statistic	5 Percent Critical Value	1 Percent Critical Value
None	0.090983	28.52509	29.68	35.65
At most 1	0.075004	15.07487	15.41	20.04
At most 2 *	0.028533	4.081734	3.76	6.65

*(**) denotes rejection of the hypothesis at the 5%(1%) level
Trace test indicates no cointegration at both 5% and 1% levels

Hypothesized No. of CE(s)	Eigenvalue	Max-Eigen Statistic	5 Percent Critical Value	1 Percent Critical Value
None	0.090983	13.45022	20.97	25.52
At most 1	0.075004	10.99314	14.07	18.63
At most 2 *	0.028533	4.081734	3.76	6.65

*(**) denotes rejection of the hypothesis at the 5%(1%) level
Max-eigenvalue test indicates no cointegration at both 5% and 1% levels

Çizelge 5.8 Eviews Programında Johansen Kointegrasyon Testi Çıktısı (devam)

Unrestricted Cointegrating Coefficients (normalized by b'*S11*b=I):

LBORSA	LDKUR	LALTIN
0.142382	-10.74500	0.902504
-0.137234	1.339801	-0.930341
1.023697	1.638545	-0.121294

Unrestricted Adjustment Coefficients (alpha):

D(LBORSA)	-0.029151	-0.021486	-0.059610
D(LDKUR)	0.011088	-0.002820	-0.001297
D(LALTIN)	-0.006054	0.011213	-0.000810

1 Cointegrating Equation(s): Log likelihood 472.9156

Normalized cointegrating coefficients (std.err. in parentheses)

LBORSA	LDKUR	LALTIN
1.000000	-75.46585	6.338594
	(21.0811)	(2.49410)

Adjustment coefficients (std.err. in parentheses)

D(LBORSA)	-0.004151
	(0.00461)
D(LDKUR)	0.001579
	(0.00046)
D(LALTIN)	-0.000862
	(0.00056)

2 Cointegrating Equation(s): Log likelihood 478.4121

Normalized cointegrating coefficients (std.err. in parentheses)

LBORSA	LDKUR	LALTIN
1.000000	0.000000	6.844680
		(2.05862)
0.000000	1.000000	0.006706
		(0.03589)

Adjustment coefficients (std.err. in parentheses)

D(LBORSA)	-0.001202	0.284436
	(0.00639)	(0.34970)
D(LDKUR)	0.001966	-0.122917
	(0.00064)	(0.03495)
D(LALTIN)	-0.002401	0.080070
	(0.00076)	(0.04135)

Çizelge 5.9 Johansen Kointegrasyon Testi sonuçları

Özdeğer	İz İstatistiği	%5 Kritik Değer	%1 Kritik Değer
0.090983	28.52509	29.68	35.65
0.075004	15.07487	15.41	20.04
0.028533	4.081734	3.76	6.65
Özdeğer	Maksimum Özdeğer İstatistiği	%5 Kritik Değer	%1 Kritik Değer
0.090983	13.45022	20.97	25.52
0.075004	10.99314	14.07	18.63
0.028533	4.081734	3.76	6.65

Çizelge 5.9 (Eviews Programında Johansen Kointegrasyon testinin özetlenmiş çizelgesi) incelendiğinde; Bu analizi gerçekleştirmek için $\underset{\sim}{X}_t = (X_t, Y_t, Z_t)'$ şeklindeki üç değişken ve bunlara karşılık gelen özdeğerler $\lambda_1 = 0.090983$, $\lambda_2 = 0.075004$ ve $\lambda_3 = 0.028533$ olup

$H_0 : r = 0$, $H_1 : r \geq 1$

en az bir kointegrasyon ilişkisi vardır alternatif hipotezine karşı kointegrasyon ilişkisi yoktur yokluk hipotezi testi sonuçları, Johansen iz istatistiğinin değeri;

$$\lambda_{tr} = -n\sum_{i=1}^{3} \ln(1-\lambda_i) = 28,52509$$

olup, bu değer (28,52509) sırasıyla %5 ve %1 anlam düzeyinde (29,68) (35,65) kritik değerlerinden daha küçüktür. Böylece kointegrasyon ilişkisi yoktur yokluk hipotezi reddedilemez. Dolayısıyla gerek iz (trace) gerekse maksimum özdeğer (eigen) değerleri hem %5 hem de %1 anlamlılık düzeyinde borsa bileşik endeksi, döviz kuru ve altın fiyatları değişkenlerinin arasında uzun dönem bir ilişkinin (kointegrasyonun) olmadığını göstermektedir.

Engle ve Granger metodunda ise serilerin kointegrasyonlu olup olmadığını sınamak için artıklar serisinin durağan olup olmadığının sınanması gerekmektedir. Eğer artıklar serisi durağan ise seri kointegrasyonludur. Seriler X_t - Z_t ve X_t - Y_t şeklinde ikili olarak ele alınmıştır. X_t - Z_t serilerinde öncelikle X_t serisinin Z_t serisi üzerine regresyonu yapıldığında regresyon denklemi; $X_t = 4,2714 - 0,2414 Z_t$ olarak hesaplanmıştır. Bu iki serinin artıkları durağan ise seriler arasında uzun dönem bir ilişki vardır yani eşbütünleşiktir denilir.

Çizelge 5.10 Artıklar serisinin Engle ve Granger Testi sonuçları

	0.01	0.05	ADF
τ_μ (E-G)	-3,476472	-2,881685	-2,113683
τ_μ (D-F)			-2,130735

Çizelge 5.10 incelendiğinde; X_t - Z_t serilerinin artıklar serisi %1 ve %5 anlam düzeylerinde durağan olmayıp birim kök içermesinden dolayı aralarında kointegrasyon ilişkisi bulunamadı. Yani, serilerin her ikisi de birim köklü seriler olduğundan dolayı ileriki yıllar için bir öngörü yapmak olanaklı değildir.

X_t - Y_t serileri içinde bu işlem tekrarlanarak regresyon yapıldığında regresyon denklemi; $X_t = 2,782015 - 0,067072Y_t$ olarak hesaplanmıştır. Bu iki serinin artıkları durağan ise seriler arasında uzun dönem bir ilişki vardır yani kointegrasyonludur denilir.

Çizelge 5.11 Artıklar serisinin Engle ve Granger Testi sonuçları

<table>
<tr><th></th><th>0.01</th><th>0.05</th><th>ADF</th></tr>
<tr><td>τ_μ (E-G)</td><td rowspan="2">-3,476472</td><td rowspan="2">-2,881685</td><td>-2,095630</td></tr>
<tr><td>τ_μ (D-F)</td><td>-2,355137</td></tr>
</table>

Çizelge 5.11 incelendiğinde; X_t - Y_t serilerinin artıklar serisi %1 ve %5 anlam düzeylerinde durağan olmayıp birim kök içermesinden dolayı aralarında kointegrasyon (kointegrasyon) ilişkisi bulunamadı. Yani, serilerin her ikisi de birim köklü seriler olduğundan dolayı ileriki yıllar için bir öngörü yapmak olanaklı değildir.

Bu çalışmada, 1994:01–2005:12 dönemleri aylık Borsa Bileşik Endeksi, Döviz Kuru ve Altın Fiyat verileri kullanılarak bu veriler arasında uzun dönemli bir ilişkinin olup olmadığı araştırılmıştır. Öncelikle serilerin modelinin belirlenmesi için Akaike Bilgi Kriterinden yararlanılmış olup üç seri VAR(2) olarak modellendirilmişlerdir. Daha sonra birim kök testine geçilmiştir. Birim kök testi sonucunda her üç serinin de birim kök içerdiği gösterilmiş ve bu serilerin birim köklerinin ortadan kaldırılması için birinci dereceden farkları alınarak seriler durağan hale getirilmiştir. Her üç seride aynı dereceden bütünleşik (bir birim köke sahip) olmaları nedeniyle seriler arasında kointegrasyon olup olmadığı araştırılmıştır. Bu kapsamda Johansen ve Engle-Granger test yöntemleri kullanılmış olup her iki test sonucunda da seriler arasında uzun dönem bir ilişki (kointegrasyon) olmadığı bulunmuştur.

Sonuç olarak döviz ve altın birlikte yükselir veya düşer, bu yükseliş borsaya düşüş olarak veya bu düşüş borsaya yükseliş olarak yansır şeklinde genel bir beklenti olmasına rağmen, bu çalışmada değişkenler arasında uzun süreli bir ilişki (kointegrasyon) bulunamadı. Ancak bu hiçbir şekilde bu değişkenler arasında bir ilişki olmadığı anlamına gelmez.

6. SONUÇ

Kointegrasyon Analizine ait çalışmalar günümüzde de devam etmektedir. Bu konu hakkında bugüne kadar yapılmış olan çalışmalar, teorinin genellikle farklı boyutlarını ele almıştır. Bu çalışmada ise, temel zaman serisi kavramlarından başlanarak birim kök ve kointegrasyon analizi kısaca özetlenmeye çalışılmıştır.

Birim kök analizi, değişkenlere ait zaman serilerinin yapısı hakkında bilgi vermektedir. Bu nedenle hem teorik olarak hem de uygulamada birim kök kavramı ve bu analize ait yaygın olarak kullanılan Geliştirilmiş Dickey-Fuller testine yer verilmiştir. Modellerin Akaike Bilgi Kriteri ve Schwarz Bilgi Kriteri değerleri elde edilip en küçük Akaike Bilgi Kriteri değerine göre uygun gecikme sayıları belirlenerek, modeller önerilmiş ve serilere birim kök testi uygulanmıştır. Çalışmada kointegrasyon kavramı açıklandıktan sonra uzun dönem ilişkisinin tahmin edilmesinde kullanılan Johansen ve Engle-Granger kointegrasyon test yöntemleri incelenmiştir.

KAYNAKLAR

Akçağlayan, A. 2006. Tüketim Dalgalanmaları ve Cari İşlemler Dengesi: Türkiye Deneyimi, 1987-2003

Akdi, Y. 2003. Zaman Serileri Analizi, Bıçaklar Kitabevi, Ankara.

Akdi, Y., Türe, H. 2006. Mevsimsel Eşbütünleşme: Tüketim ve GSYİH., Ankara.

Brockwell, P. J. and Davis, R. A. 1987. Time Series: Theory and Methods, Springer-Verlang.

Box, G.E, Jenkins, G.M. and Reinsel, G.C.1994. Time Series Analysis; Forecasting and Control, Holden-Day, San Fransisco.

Dickey, D.A. and Fuller, W.A. 1979. “Distribution of the Estimators for Autoregressive Time Series with a Unit Root,” Journal of the American Statistical Association, 74, p. 427–431.

Dickey, D.A. and Fuller, W.A. 1981. Likelihood Ratio Statistics For Autoregressive Time Series With A Unit Root. Econometrica, 49, 1057-1059, Issue.

Dickey, D.A., D.P. Hazsa and Fuller, W.A. 1984. Testing for Unit Roots in Seasonal Time Serise, Journal of American Statistical Association,Vol.79, 355-367.

Dickey, D. A., Bell, W. R. and Miller, R. B. 1986. "Unit Roots in Time Series Models: Tests and Implications," American Statistician 40, 12-26.

Dickey, D. A., Jansen, D. W., and Thornton, D.L. 2002. “A Primer on Cointegration with an Application to Money and Income. Review of Federal Reserve Bank of St. Louis, 73, 58-78.

Enders, W. 1995. Applied Econometric Time Series, John Wiley and Sons, Canada.

Engle, R.F. and Granger C.W.J. 1987. Cointegration and Error Correction; Representation Estimation and Testing, Econometrice, 55, 251-276.

Ertek, T.1996. Ekonometriye Giriş, İkinci baskı, İstanbul.

Evans, G.B.A. 1981. “Testing For Unit Roots : 1”, Econometrica.49, 763-764.

Farnum, R.N. and Staton, L.W. 1989. Quantative Forecasting Methods, 57-85, Boston.

Fuller, W.A. 1976. Introduction to Statistical Time Series, John Wiley and Sons.

Fuller, W. A. 1996. “Introduction of Statistical Time Series” Wiley, New York, NY

Holden, D. and Perman, R. 1994. Unit Roots and Cointegration for the Economist, Cointegration For the Applied Economist, The Mac-Millan Press Ltd. 3, 50-51, London.

Hylleberg, S., R.F. Engle, C.W.J. Granger and Yoo, B.S. 1990. Seasonal Integration and Cointegration, Journal of Econometrics, 44, 215-238.

Hylleberg, S. 1992. “Modelling Seasonality” Oxford University Pres. New York.

İnan, E.A. 2002. Kur Rejimi Tercihi ve Türkiye.

Johansen, S. 1988. Statistical Analysis of Cointegration Vectors. Journal of Economics Dynamics and Control. 12, 231-254.

Johansen, S. and Julesıus, K. 1990. Maximum Likelihood Estimation and Inference on Cointegration With Applications to Demand For Money. Oxford Bulletin of Economics and Statistics., 52, 169-210.

Johansen, S. 1991. Estimation and Hypothesis Testing of Cointegration Vectors in Gaussian Vector Auto Regressive Models, Econometrica, 59,1551-1580.

Kadılar, C. 2000. Uygulamalı Çok Değişkenli Zaman Serileri Analizi, Bizim Büro Basımevi, Ankara.

Kasman, A. 2003. Türkiye’ de Reel Döviz Kuru Oynaklığı ve Bunun İhracat Üzerine Etkisi: Sektörel Bir Analiz.

Kayım, H. 1985. İstatistiksel Ön Tahmin Yöntemleri, 15–16, Ankara.

Kennedy, P. 1998. “A Guide To Econometrics”, Blackwell Publishers, 103, USA

Kılıçbay, A. 1983. Uygulamalı Ekonometri. Filiz Kitabevi, 5–9, İstanbul.

Köse, N.1998. “Vektör Otoregresif Modeller Üzerine Bir İnceleme” Yayımlanmamış Doktora Tezi, Ankara.

Kutlar, A. 2000. Ekonometrik Zaman Serileri “Teori ve Uygulama”.

Metin, K. 1993. “Türk Ekonomisinin Uzun Dönem Enflasyon Analizi:Bir Ampirik Yaklaşım”, Ekonomik Yaklaşım.4(8); 97-115.

Nelson,C.R. and Plosser C.I. 1982. “Trends and Random Walks in Macroeconomic Time Series: Some Evidence and Implications”, Journal of Monetary Economics, 10,139–162.

Özmen, A. 1986. Zaman Serisi analizinde Box-Jenkins Yöntemi ve Banka Mevduat Tahmininde Uygulama Denemesi,Eskişehir; Anadolu.Üniv. Yayını.

Perron, P. 1989. The Great Crash, The Oil Price Schock And The Unit Root Hypothesis, Econometrica, 57, 1361–1401.

Phillips, P. and Perron, P. 1998. Testing for a Unit Root in Time Series Regression, Biometrical, 75, 335–346.

Serper, Ö. 1993. Uygulamalı İstatistik, Fizik Kitabevi, 279-284, İstanbul.

Stock, J.H. 1987. Asymptotic Properties of Least Squares Estimators of Cointegration Vectors, Econometrica, 55, 1035-1056.

Stock, J.H. and Watson M.W. 1993. A Simple Estimator of Cointegrating Vector in Higher Order Integrated Systems, Econometrica, 61, 783–820.

Şengül, S. ve Tuncer, İ. 2006. Türkiye' de Enerji Tüketimi ve Ekonomik Büyüme: 1996-2000.

Thomas, R.L. 1997. Modern Econometrics, Addison-Wesley, Longman Ltd., 410-411, England.

Wei, W. S. 1990. Time Series Analysis, Univariate and Multivariate Methods. Redwood City, California: Addison Wesley.

Yıldırım, O. 2003. Döviz Çerçevesinde Satınalma Gücü Paritesinin Zaman Serisi Analizi ve Türkiye Ekonomisi Uygulaması.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı	:	Yudum BALKAYA
Doğum Yeri	:	Alaca
Doğum Tarihi	:	15.07.1979
Medeni Hali	:	Bekar
Yabancı Dili	:	İngilizce

Eğitim Durumu

Lise	:	Ankara Lisesi (1996)
Lisans	:	Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi İstatistik Bölümü (2001)
Yüksek Lisans	:	Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü İstatistik Anabilim Dalı (2006)