ANKARA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

AKTÜERYAL MODELLEMEDE MELEZ BULANIK REGRESYON ANALİZİ

Furkan BAŞER

İSTATİSTİK ANABİLİM DALI

ANKARA
2007

Prof. Dr. Ayşen APAYDIN danışmanlığında, Furkan BAŞER tarafından hazırlanan "**Aktüeryal Modellemede Melez Bulanık Regresyon Analizi**" adlı tez çalışması 29/08/2007 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği ile Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü İstatistik Anabilim Dalı'nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Başkan: Prof. Dr. Ömer L. GEBİZLİOĞLU
İstatistik Anabilim Dalı

Üye : Prof. Dr. Ayşen APAYDIN
İstatistik Anabilim Dalı

Üye : Yrd. Doç Dr. Fatih TANK
Kırıkkale Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi,
İstatistik Bölümü

Yukarıdaki sonucu onaylarım.

Prof.Dr.Ülkü MEHMETOĞLU

Enstitü Müdürü

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

AKTÜERYAL MODELLEMEDE MELEZ BULANIK REGRESYON ANALİZİ

Ankara Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
İstatistik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Ayşen APAYDIN

Hesap döneminin sonunda, sigorta şirketinin portföyünde bulunan poliçeler kapsamı içinde meydana gelmiş birtakım hasarlar söz konusu olmakta; ancak bu hasarların varlığı ve maliyeti konusunda sigorta şirketinin herhangi bir bilgisi bulunmamaktadır. Primlerin ödenmesi sürecinde bir çok alternatif olmasına rağmen genellikle prim ödeme süreci hasarların ödeme sürecinden çok önce biter. Bu aşamada sigorta şirketinin gerçekleşmesini beklediği risklere ait hasarları ödemek için belli karşılıklar tutması ve bunları finansal tablolarına da yansıtması gerekmektedir. Karşılıklardaki hatanın büyüklüğü iflas riskinin gerçekleşmesine kadar götürecek sonuçlar doğuracaktır. Bu nedenle; problemi genellikle istatistiksel bakış açısıyla ele alan aktüeryal literatürde, hasar karşılıklarının tahmini klasik bir konu halini almıştır.

Hasar karşılıklarının tespit edilebilmesi için istatistiksel analizlere dayalı birçok deterministik yöntem kullanılmaktadır. Fakat sigorta ortamının değişken ve belirsiz yapısı; hesaplamalarda, geniş bir veri tabanı kullanılmasına olanak vermemektedir ve bu da istatistiksel yöntemlerin güvenilirliğinde önemli düzeyde kayba yol açmaktadır. Bu nedenle, birçok aktüeryal ve finansal problemin doğasında var olan belirsizlik durumunda; uygun ve güvenilir veriler elde olmadığı zaman daha gerçeğe yakın sonuçlar elde etmek için bulanık küme teorisi etkili bir araç haline gelmektedir.

Bu çalışmada, sigorta şirketinin ayırması gereken hasar karşılığı tutarının belirlenmesi için en küçük kareler regresyonunu kullanan London Chain Ladder yöntemine alternatif olarak melez bulanık en küçük kareler regresyon analizi uygulanacaktır.

2007, 70 sayfa

Anahtar Kelimeler: Muallak hasar karşılığı, IBNR rezervleri, bulanık sayılar, melez bulanık regresyon analizi.

ABSTRACT

Master Thesis

HYBRID FUZZY REGRESSION ANALYSIS IN ACTUARIAL MODELING

Ankara University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Statistics

Supervisor: Prof. Dr. Ayşen APAYDIN

At the end of the accounting period, some claims which have occurred in coverage of policies that exist in insurance company's portfolio have been observed but, insurance company does not have any information about these claims' presence and cost. Although there are lots of alternatives in process of settling premiums, the settlement of premiums are generally completed before the settlement of claims. Therefore, it is necessary for the insurer to make certain provisions and record these provisions to financial accounts to compensate the claims of expected risks. Measure of error in provisions will increase the risk of bankruptcy. This is why the estimation of claim provisions is a classic topic in actuarial literature, which usually focuses on the problem from a statistical point of view.

Various deterministic methods based on statistical analyses are used to set claim provisions. However, the mutant and uncertain behaviour of insurance environments does not let use of a wide data-base when calculating claim reserves and this involves a considerable loss in reliability of statistical methods. Therefore, in a state of uncertainty that exist in the nature of many actuarial and financial problems, when convenient and reliable data is not held, the use of fuzzy set theory becomes very attractive to get more actual results.

In this study, in order to determine claim reserves, hybrid fuzzy least squares regression analysis will be applied instead of the London Chain Ladder Method which uses ordinary least squares regression.

2007, 70 pages

Key Words: Outstanding claim reserve, IBNR reserves, fuzzy numbers, hybrid fuzzy regression analysis.

TEŞEKKÜR

Tezin hazırlanması sırasında bilgi ve deneyimleri ile desteğini esirgemeyen, bilime ve bilgiye bakış açısı ile kendime örnek aldığım danışman hocam Sayın Prof. Dr. Ayşen APAYDIN (Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi)'a en içten teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca, beni bugünlere getiren, her konuda bana destek veren, mutluluk kaynağım değerli aileme sonsuz minnettarım.

Furkan BAŞER
Ankara, Ağustos 2007

İÇİNDEKİLER

ŞEKİLLER DİZİNİ

ÇİZELGELER DİZİNİ

1. GİRİŞ VE ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR

1.1 Giriş

İstatistiksel anlamda, iki değişken arasındaki ilişki, bunların değerlerinin karşılıklı değişmeleri arasında bir bağlılık şeklinde anlaşılır. (X) değişkeninin değerleri değişirken, buna bağlı olarak (Y) değişkenin değerleri de değişiyorsa, bu iki değişken arasındaki neden-sonuç ilişkisinin matematiksel bir fonksiyonla ifade edilmesi regresyon analizinin konusunu oluşturmaktadır. Regresyon analizi, belirsizlikler içeren veri setini kullanarak model oluşturmayı ve tüm kitle için bir tahmin denklemi elde etmeyi amaçlar.

Gerçekte, veri bazen kesin ve doğru olarak kaydedilemeyebilir. Örneğin, bir akarsudaki su seviyesi dalgalanmadan dolayı veya bir odadaki sıcaklık da benzer bir nedenden dolayı kesin olarak ölçülemeyebilir. Bu nedenle, bulanık bir veri gözlendiğinde istatistiksel modellemede, bulanık kümeler teorisinden faydalanılması uygun ve elverişli bir araçtır. Su seviyesini açıklamak için en uygun yol; su seviyesinin örneğin, 30 metre civarında olduğunu söylemektir. Buradaki “30 metre civarında” ifadesi bir bulanık sayı şeklinde ele alınmalıdır. Veri üzerinde yapılacak aşırı sadeleştirme, oluşturulacak regresyon modelinde bilgi kaybına yol açacaktır. Ayrıca bazı gözlemler, (“şöyle böyle”, “iyi” ve “mükemmel” gibi) sadece sözel bir ifade ile açıklanabilir. Bulanık küme teorisi; her bir veri için, bulanık üyelik fonksiyonlarından yararlanılarak oluşturulan sözel değişkenleri modellemek için bir yöntem sağlar.

Rasgelelik ve bulanıklık, regresyon analizinde ortaya çıkan iki çeşit belirsizlik durumudur. Regresyon modelinde; hem rasgelelik hem de bulanıklık, bir belirsizlik olarak anlam ifade eder. Bulanık regresyon ile basit regresyon arasındaki esas fark; bulanık regresyonda, bulanıklığa bağlı belirsizlik durumundaki veri modellenir ve hatalar bulanık değişkenler şeklinde ele alınırken; basit regresyonda, rasgeleliğe bağlı belirsizlik durumundaki veri modellenir ve hatalar rasgele artıklar şeklinde ele alınır. Hem rasgelelikten hem de bulanıklıktan kaynaklanan belirsizliği bir regresyon modelinde birleştirmek için melez bulanık en küçük kareler regresyon analizi ileri sürülmüştür. Bu yöntem, regresyon model tahminlerini geliştirmek için, ağırlıklı bulanık aritmetiği ve en küçük kareler uygunluk kriterini kullanarak, bulanık veriye, kesin (crisp) veriye ve bunların birleşimine uygun bir model oluşturulmasına olanak verir.

Sigorta muhasebesi ile standart muhasebe arasındaki en belirgin farklılık karşılık hesaplarında bulunmaktadır. Sigorta faaliyetlerinin finansal tablolara yansıtılmasında teknik kar-zarar bünyesinde yer alan karşılıklar, gerçekleşmemiş veya henüz bilinmeyen yükümlülükler için sigorta şirketlerinin muhtemel sorumluluklarını belirleyen kalemlerdir. Karşılıkların azami yakınlıkta hesaplanması ve bu doğrulukta finansal tablolara yansıması şirketlerin hem finansal güvenlikleri hem de kar-zarar beklentileri için büyük önem taşır.

Hesap döneminin sonunda, sigorta şirketinin portföyünde bulunan poliçeler kapsamı içinde, meydana gelmiş birtakım hasarlar söz konusu olmakta; ancak bu hasarların varlığı ve maliyeti konusunda sigorta şirketinin herhangi bir bilgisi bulunmamaktadır. Sigorta şirketi, meydana gelmiş ancak kendisine bildirilmemiş olan hasarlar için dönem sonunda belli bir karşılık ayırmaktadır. Bu karşılık, sorumluluk sigortaları gibi sonuçları uzun vadede belirlenen işlerin muhasebeleştirilmesinde oldukça önemli bir kavramdır.

Sorumluluk sigortaları diğer sigorta türlerinden farklı olarak oldukça uzun bir dönemde tazminat ödeme fonksiyonunu gerçekleştiren poliçe tipleridir. Zaten bu özelliklerinden dolayıdır ki, "uzun vadeli riske tabi" poliçeler olarak da kabul edilirler. Bir üçüncü şahıslara karşı mali mesuliyet veya ürün mali mesuliyet sigorta poliçesinde tazminat ödeme fonksiyonu iki yıllık zaman aşımına tabiyken, işveren mali mesuliyet sigorta poliçelerinde zaman aşımı süresi iş hukukuna bağlı olarak on yıllık bir süreye ulaşmaktadır. Takdir edilmelidir ki on yıl, ekonomisi ciddi dalgalanmalara tabi olmayan, dengeli ekonomilerde bile oldukça uzun bir süredir ve mutlaka risk azaltıcı ve kontrole yönelik önlemler alınmasını gerektirir.

Yıllık bazda poliçelerin tanzim edilip prim tahsilatı yapılan ancak, tazminat ödemesine yıllar sonra konu olabilecek olan sorumluluk sigortalarında hasar tiplerinin iyi belirlenip rezervlerin de bu tiplere göre ayrılması gerekmektedir. Ödenen hasar ve muallak hasarlarla birlikte "gerçekleşmiş ancak henüz bildirimi yapılmamış" (IBNR – **I**ncurred **B**ut **N**ot **R**eported) ve "gerçekleşmiş ancak bildirimi yetersiz veya eksik yapılmış" (IBNER – **I**ncurred **B**ut **N**ot **E**nough **R**eported) hasarlar da bulunmaktadır. Bu nedenle rezervlerle "uğranan hasar oranlarının" oluşturulmasında ve özellikle fiyatlandırmada bu tip hasarların ağırlığı da göz önüne alınmalıdır. Özellikle uzun vadeli zaman aşımına tabi işveren sorumluluk sigortalarında IBNR ve IBNER riski oldukça yüksektir.

Karşılıklar geçmiş verilerden geleceğe yönelik projeksiyonlar ve tahminler yapmak sureti ile ayrılırlar. Projeksiyon ve tahminlerin artık gelecek olmadığı yani gerçekleştiği durumlarda;

- Beklenen ve beklenmeyen olayların gerçekleşmesi
- Hasar tutarlarının beklenen değerlerde veya beklenen değerlerden fazla olması
- Hasarların beklenen süreçte veya beklenen sürenin ötesinde meydana gelmesi
- Hasar beklentilerinin yanlış hesaplanmış olması

gibi durumlar ayrılan karşılıkların yeterli olmaması yani şirketin ayırdığı rezervlerden değil de başka kaynaklardan gerçekleşen hasarları karşılaması sonucunu doğurur.

Başta enflasyon olmak üzere ekonomik etkiler, sigorta şirketindeki üretimin niteliği ve kapasitesi, mevzuat, sosyal ve politik etkenler, şirketin risk kabul politikaları, poliçe ve ürün özellikleri gibi belirsizliği artıracak yönde gelişen birçok iç ve dış faktörün etkisi ile hasar karşılık hesaplamaları daha karmaşık ve uzmanlık düzeyinde analiz gerektiren bir olgu haline gelmektedir. Bu nedenle, önemli ölçüde öznel yargılar gerektiren, bilginin yetersiz ve belirsiz olduğu problemlerin modellenmesinde bulanık küme teorisi uygun ve elverişli bir araç haline gelmektedir (Shapiro 2004).

Bu çalışmada, sigorta şirketinin ayırması gereken hasar karşılığı tutarının belirlenmesi için kesin veriler üzerinden geleneksel en küçük kareler regresyonunu kullanan London Chain Ladder yöntemine alternatif olarak melez bulanık en küçük kareler doğrusal regresyon çözümlemesi kullanılacaktır.

Çalışmanın İkinci Bölümünde; bulanık teori, bulanık kümeler ve temel kavramlar ele alınarak çeşitli üyelik fonksiyon tipleri ile tanımlanan bulanık sayılar ile aritmetik işlemler ayrıntılı bir şekilde incelenecektir.

Üçüncü Bölümde, bulanık regresyon çözümlemesinin, geleneksel regresyon yöntemlerinden farklılıkları ve avantajları üzerinde durulacak, farklı optimal kriterler ile bulanık regresyon çözümlemesi genel olarak incelenecektir.

Çalışmanın Dördüncü Bölümüne ağırlıklı bulanık aritmetik işlemlerinin tanımlaması ile başlanılacak, daha sonra ağırlıklı bulanık aritmetiğe dayalı olan melez bulanık en küçük kareler doğrusal regresyonu incelenecektir. Asimetrik üçgensel bulanık değişkenleri kullanan iki değişkenli regresyon modelinde üç kısım melez bulanık regresyon katsayılarını (merkez, sol genişlik ve sağ genişlik) elde etmek için üç küme normal denklemler sistemi formüle edilecek ve yöntem çoklu melez bulanık regresyon çözümlemesi için özetlenecektir. Ayrıca, melez bulanık regresyon modelinin güvenilirliğini değerlendirmek amacıyla bazı ölçütler tanımlanacaktır.

Beşinci Bölümde, sigorta hasar karşılıklarına ilişkin bazı temel kavramlar verilecek, sigorta şirketinin hasar karşılığı ayırma amaçları üzerinde durulacak ve hasar karşılığı hesaplamalarında kullanılan yöntemlerden Chain Ladder ve London Chain Ladder yöntemi irdelenecektir.

Çalışmanın özgün kısmını oluşturan Altıncı Bölümde ise hasar karşılığı hesaplamalarında belirsizliği artıran faktörler verilecek ve melez bulanık en küçük kareler doğrusal regresyon çözümlemesine ilişkin metodolooji ele alınacaktır. Uygulama kısmında melez bulanık regresyon ve diğer yöntemlerden elde edilen sonuçlar karşılaştırılacaktır.

1.2 Önceki Çalışmalar

Bulanık küme kavramı, 1960'ların ortasında California Berkeley Üniversitesinden Lotfi A.Zadeh'in**,** klasik sistem kuramının matematiksel yöntemlerinin gerçek dünyadaki özellikle insanları içeren kısmen karmaşık sistemlerle uğraşırken yetersiz kalmasından doğmuştur ve Zadeh 1965'de bulanık kümeler çalışmasını yayımlamıştır. Bu çalışmada bulanık küme teorisi ve bulanık mantıkla olan bağıntısını açıklamıştır. Zadeh, niteliklerin ikili üyelik fonksiyonu ile ifade edildiği klasik kümeler yerine, dereceli üyelik fonksiyonu ile ifade edildiği bulanık kümeler tanımlamasını önermiştir.

Hasar karşılıklarının gerçeğe yakın bir şekilde belirlenebilmesi sigorta şirketinin finansal istikrarı için çok önemlidir. Bu doğrultuda, hasar rezervlerinin ayrılması sürecinde sigortanın istatistiksel yapısından doğan öncelikler,

- İflas riskinin en aza indirgenmesi
- Yükümlülükleri karşılayacak fonun tespiti
- Ayrılan fonun hasarların gerçekleşme beklentisindeki sapma nedeni ile yetersiz kalması durumunda farklı kaynakların hazır edilmesi

biçiminde sıralanabilir (Yaman 2005).

Karşılıklardaki hatanın büyüklüğü iflas riskinin gerçekleşmesine kadar götürecek sonuçlar doğuracaktır. Bu nedenle, problemi genellikle istatistiksel bakış açısıyla ele alan aktüeryal literatürde, hasar karşılıklarının tahmini klasik bir konu halini almıştır. Ayrılacak rezerv tahmini hesaplamaları için kullanılan yöntemler iki başlık altında incelenebilir: ilki deterministik bakış açısını benimseyen klasik yöntemler, ikincisi ise klasik yöntemlerden daha kapsamlı tahminler veren stokastik yöntemler olarak ele alınabilir.

Klasik yöntemler sonucunda tek bir kesin (crisp) rezerv miktarına ilişkin tahmin değeri elde edilir. Van Eeghen (1981), Taylor (1986) ve Lyons (1984)'ın çalışmalarında bu yöntemler geniş bir yer bulmuştur.

Taylor *et al.* (2003)’e göre stokastik yöntemler 1970’lerden bu yana kullanılmaktadır. Bunlar klasik yöntemlerden daha karmaşık ve kapsamlıdır çünkü England and Verrall (2002)’e göre stokastik yöntemler, rezervler için sadece kesin bir değeri değil değişkenliği de sağlamaktadır. Bu yöntemlerin temelinde bulunan hipotez, hasar miktarının değişiminin rasgele olması ve hasar karşılıklarının, dağılım fonksiyonu ile tanımlanan bir rasgele değişken yardımıyla belirlenmesidir.

Fakat, gerçekte stokastik yöntemler önemli ölçüde gözlem ve deneyim gerektirmektedir. Straub (1997), çalışmasında; bulunulan zamandan çok uzak olan gözlemler, gerçekçi olmayan çıkarımlara ulaşılmasına neden olabileceğini vurgulamıştır. Veri sayısı yetersiz ve veriler üzerinde belirsizlik hakim olduğunda bulanık regresyon gibi bulanık küme teorisi temelindeki çözümlemeler, uygun bir alternatif olarak kullanılmaktadır. Örneğin, Watada (1992) ve Tseng *et al.* (2001), zaman serisi analizinde bulanık küme teorisini ve bulanık regresyonu alternatif bir yaklaşım olarak ele almıştır.

Bulanık regresyonun, geleneksel regresyon tekniklerine göre diğer bir avantajı ise belirlenen katsayılar yardımıyla elde edilen tahminlerin; aritmetik işlemleri karmaşık olan rasgele değişkenler ile değil, aritmetik işlemlerde daha kullanışlı olan bulanık sayılar ile ele alınmasıdır. Bu nedenle, Ramenazi and Duckstein (1992), Fedrizzi *et al.* (1993), Profillidis *et al.* (1999), Lee and Chen (2001), Yen and Goshray (1999) ve Andrés and Terceño (2003b)’in makalelerinde olduğu gibi bir çok ekonomik ve finansal problemlerin analizinde bulanık regresyonun kullanımı önerilmektedir.

Aktüeryal alanda, bulanık küme teorisi önemli ölçüde öznel yargılar gerektiren; bilginin yetersiz ve belirsiz olduğu problemlerin modellenmesinde kullanılmaktadır. Aktüerya biliminde bulanık küme teorisi uygulamalarına temel teşkil edecek bazı araştırmalar Ostaszewski (1993), Derrig and Ostaszewski (1998), Yakoubov and Haberman (1998), Andrés and Terceño (2003a) ve Shapiro (2004) tarafından yapılmıştır. Aktüerya analizi, esasında istatistiksel yöntemlere dayalı olmasına rağmen; Brockett and Xia (1995)’nın çalışmalarında belirtildiği gibi, bulanık küme teorisi, istatistik teorisinin yararlı bir tamamlayıcısı olduğu düşünülmektedir.

2. BULANIK KÜME TEORİSİ VE BULANIK SAYILAR

Bulanık mantık, insanların düşüncelerindeki bulanıklıklardan bahseden, Aristo mantığına karşı geliştirilen ve uygulamada ortaya çıkan olayların hangi oranlarda gerçekleştiğini belirlemeye çalışan bir çoklu mantık sistemidir. Başlıca yardımı belirsiz bilgiyi temsil edebilme yeteneğidir. Bulanık teori, uygun ve güvenilir veriler elde olmadığı zaman pratiklik sağlar.

Bulanık mantığın ardındaki temel fikir, bir önermenin doğruluğunun, önermelerle, kesin doğru ve kesin yanlış arasındaki sonsuz sayıda doğruluk değerlerini içeren bir kümedeki değerler, ya da sayısal olarak [0, 1] gerçel sayı aralığıyla ilişkilendiren bir fonksiyon olarak kabulüdür. Bu, Zadeh'in bulanık kümeler üzerindeki ilk çalışmasının bir sonucudur. Bulanık mantık yaklaşık akıl yürütmenin mantığıdır. Sözel olarak değişik sıfat dereceleri ile ifade edilen (ya da sayısal olarak [0, 1] gerçel sayı aralığında yer alan) doğruluk değerlerine sahip oluşu ve geçerliliği kesin değil, fakat yaklaşık olan çıkarım kurallarına sahip oluşu ayırt edici özellikleridir.

Bulanık mantığın geçerli olduğu durumlardan ilki, incelenen olayın çok karmaşık olması ve bununla ilgili yeterli bilginin bulunmaması durumunda kişilerin görüş ve değer yargılarına yer verilmesi, ikincisi ise insan kavrayış ve yargısına gerek duyan hallerdir. İnsan düşüncesinde sayısal olmasa bile belirsizlik, yararlı bir bilgi kaynağıdır. Bu tür bilgi kaynaklarının, olayların incelenmesinde özgün bir biçimde kullanılmasına bulanık mantık ilkeleri yardımcı olmaktadır (Baykal ve Beyan 2004).

2.1 Bulanık Kümeler ve Temel Kavramlar

Kümeler, temel matematik ve mantık kavramlarının esaslarını teşkil etmektedir. İncelenen bir olayın veya verilen bir problemin sonucunda ulaşılabilmesi mümkün olabilirlikler topluluğuna küme ve bu kümeyi oluşturan nesnelere ise kümenin elemanları adı verilmektedir. Üzerinde çalışılan kümelerin her birini alt küme olarak kabul eden ve en geniş küme olan evrensel kümedeki nesnelerin ortak özelliklerine göre bir araya getirilmesi işlemi geleneksel küme yaklaşımı olarak değerlendirilir. Geleneksel küme teorisinde kesin sınırlı küme kavramı kullanılır. Bu kavram bir nesnenin, bir kümenin elemanı olması ya da olmaması gibi iki seçenekli bir mantığa dayanmaktadır.

Bir çeşit çok değerli küme kuramı olan bulanık küme kuramı, belirsizliğin bir çeşit formülleştirilmesidir. Fakat işlemleri, diğer küme kuramlarından farklılıklar gösterir. Kümedeki her bir birey, klasik çift değerli küme kuramlarında olduğu gibi üye ya da üye değil olarak değil, bir dereceye kadar üye olarak görülür.

Bulanık kümelerde üyelik dereceleri arasındaki geçiş yumuşak ve sürekli bir şekilde olmaktadır. Öğeler bulanık kümeye kısmi derecede aittir. Bulanık kümelerde; klasik kümelerdeki karakteristik fonksiyon, $\mu_A : X \to \{0,1\}$, yerini üyelik fonksiyonuna bırakır. Bu da; $\mu_A : X \to [0,1]$ biçiminde gösterilir.

Bulanık küme değişik üyelik derecesinde öğeleri olan bir topluluktur. Klasik küme teorisindeki siyah-beyaz ikili üyelik kavramını kısmi üyelik kavramına genelleştirir. Burada “0” değeri üye olmamayı, “1” değeri tam üye olmayı belirtirken (0, 1) aralığındaki değerlerde kısmi üyelik kavramına karşılık gelir (Baykal ve Beyan 2004).

Bulanık küme, bir nesne ve bu nesnenin ilgili kümeye üyelik derecesini gösteren $A = \{(x, \mu_A(x)) \mid x \in X\}$ şeklindeki sıralı çiftlerle ifade edilir. Eğer X kümesi, $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ şeklinde kesikli bir küme ise, bir bulanık A kümesi, $A = \{\sum \mu_A(x_i)/x_i\}$ olarak gösterilir.

Bulanık kümenin sürekli olması durumunda gösterim; $A = \{\int \mu_A(x_i)/x_i\}$ biçiminde olacaktır.

Bu notasyonlarda bölüm işareti, bölme işlemini değil x_i küme öğesine, $\mu_A(x_i)$ üyelik derecesinin karşılık geldiğini göstermektedir. $\sum$ ve $\int$ işaretleri de küme öğelerinin topluluğunu ifade etmektedir.

Tanım 2.1 Destek Kümesi

Bulanık bir kümenin sıfırdan büyük üyelik derecelerine sahip elemanlarının oluşturduğu kümeye destek kümesi denir ve matematiksel olarak,

$$Destek(A) = \{x \in X,\ \mu_A(x) > 0\}$$

biçiminde ifade edilir.

Tanım 2.2 α – Kesim (Kesme, Seviye) Kümesi

A bulanık kümesinin, üyelik dereceleri α'ya eşit veya büyük elemanlarından oluşturulan klasik kümeye α – kesim kümesi denir. A bulanık kümesine ilişkin α - kesim kümesi,

$$A_\alpha = \{x |\ \mu_A(x) \geq \alpha\}, \quad x \in X$$

biçiminde gösterilir.

Tanım 2.3 Yükseklik

A bulanık kümesinin yüksekliği, üyelik fonksiyonunda en büyük üyelik derecesine sahip olan değerdir.

Yükseklik matematiksel olarak,

$$Yük(A) = \sup(\mu_A(x)) \ , \ \forall x \in X$$

biçiminde ifade edilir.

Tanım 2.4 Normallik

A bulanık kümesinin yüksekliği 1 ise bu kümeye normaldir denir. Diğer bir ifade ile $\sup(\mu_A(x)) = 1$ ise A bulanık kümesi normaldir. Aksi halde "altnormaldir" (subnormal) denir. Verilen bir bulanık küme boş değilse ($A \neq \phi$) tüm elemanlar yüksekliğe bölünerek normalleştirilir.

Tanım 2.5 Dışbükeylik

Klasik kümeler için tanımlanan dışbükeylik, bulanık kümeler içinde yapılabilir ve klasik kümeler için geçerli olan birçok özellik korunur. A bulanık kümesi için,

$$\mu_A[\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2] \geq enk[\mu_A(x_1),\ \mu_A(x_2)]$$

koşulunu sağlayan üyelik fonksiyonu dışbükeydir (Lai and Hwang 1992).

2.2 Bulanık Sayılar ve Bulanık Aritmetik

Bulanık sayılar; dışbükey, normalleştirilmiş, sınırlı-sürekli üyelik fonksiyonuna sahip olan ve gerçel sayılarda tanımlanmış bir bulanık küme olarak ifade edilir. Bulanık sayı normal ve dışbükey olmalıdır. Bulanık kümeler üyelik fonksiyonlarıyla tanımlandıkları için bulanık sayılar da kendi üyelik fonksiyonları ile aynı kavramdırlar. Bu nedenle üyelik fonksiyonu çeşidi kadar bulanık sayı çeşidi vardır.

Tanım 2.6 Aralık Kavramı

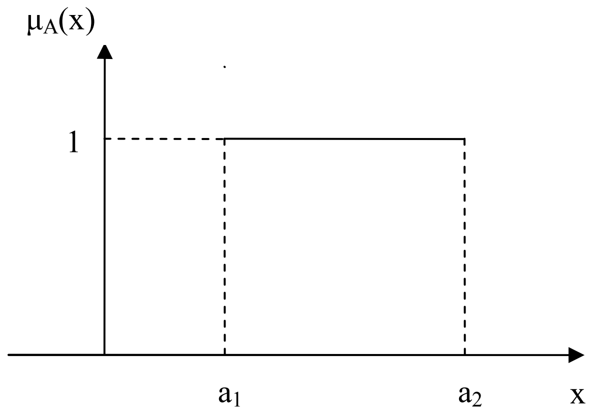
Aralıklar gerçel sayıların özel alt kümeleridir. Tanım olarak; $a_1, a_2 \in R$ olmak üzere $(a_1 \leq a_2)$ gibi herhangi iki sayı arasındaki tüm gerçel sayılardan oluşan R'nin tüm alt kümelerine aralık denir. a_1 sayısına aralığın alt ucu, a_2 sayısına da aralığın üst ucu denilmektedir.

Üyelik fonksiyonları ile sadece bulanık sayıları ve kümeleri değil Şekil 2.1'de görüldüğü gibi, $a \in R$ olan bir a gerçel sayısı ya da bir sayı aralığı da tanımlanabilir.

$a_1, a_2 \in R$ olmak üzere $[a_1, a_2]$ şeklindeki bir aralığın üyelik fonksiyonu;

$$\alpha = \mu_A(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x < a_1 \ veya \ x > a_2 \\ 1 & , \quad a_1 \leq x \leq a_2 \end{cases} \tag{2.1}$$

biçimindedir (Baykal ve Beyan 2004).



Şekil 2.1 Aralık sayı

Tanım 2.7 Bulanık Aralık

Bulanık bir kümenin bir elemanının değeri kesin olmayan fakat sınırlandırılmış bir şekilde; iki uç noktası a_1, a_2 olan bulanık aralık [a_1, a_2] şeklinde gösterilir. Burada a, kümenin elemanı olarak kabul edilirse $a_1 \leq a \leq a_2$ olacağı açıktır. Bu aralık güven aralığı olarak da ifade edilebilir.

Bulanık sayı aralığı, klasik aralık kavramından genelleştirilebilir. Aralık işlemleri de bulanık sayılara uygulanabilir. Bulanık sayı çıktısı bulanık küme biçiminde olduğundan, sonuç üyelik fonksiyonu olarak ifade edilir.

Bulanık sayıların özel türü olan üçgensel, yamuksal bulanık sayılar uygulamada sıklıkla kullanılmaktadır.

Tanım 2.8 Üçgensel Bulanık Sayı

m_a merkez, $c_{a,L}$ sol genişlik, $c_{a,R}$ sağ genişlik olmak üzere $\tilde{A}$ üçgensel bulanık sayısı $\tilde{A} = (m_a,\ c_{a,L},\ c_{a,R})$ şeklinde tanımlanır. Şekil 2.2 ile gösterilen üçgensel bir bulanık sayının üyelik fonksiyonu;

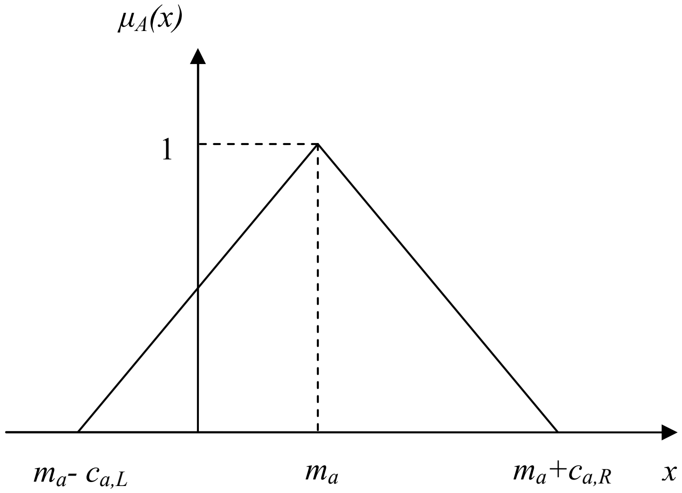
$$\alpha = \mu_A(x) = \begin{cases} 1 - \dfrac{m_a - x}{c_{a,L}} \quad, & m_a - c_{a,L} < x \leq m_a \\ 1 - \dfrac{x - m_a}{c_{a,R}} \quad, & m_a < x \leq m_a + c_{a,R} \\ 0 \quad, & x > m_a + c_{a,R}\ veya\ x < m_a - c_{a,L} \end{cases} \tag{2.2}$$

biçimindedir. $\mu_A(m_a) = 1$ olmak üzere m_a değerine üçgensel bulanık sayının merkezi denir.

Güven aralığı α-kesimi için tanımlandığında üçgensel bulanık sayı,

$$A_\alpha = \left[A^1(\alpha), A^2(\alpha)\right] = \left[m_a - c_{a,L}(1-\alpha),\ m_a + c_{a,R}(1-\alpha)\right]$$

olarak ifade edilir.



Şekil 2.2 Üçgensel bulanık sayı

$c_{a,L}= c_{a,R} = c_a$ olduğunda, üçgensel bulanık sayı simetrik üçgensel bulanık sayı olarak adlandırılır. $\widetilde{A}=(m_a,\ c_a)$ simetrik üçgensel bulanık sayısının üyelik fonksiyonu ve α-kesim kümesi,

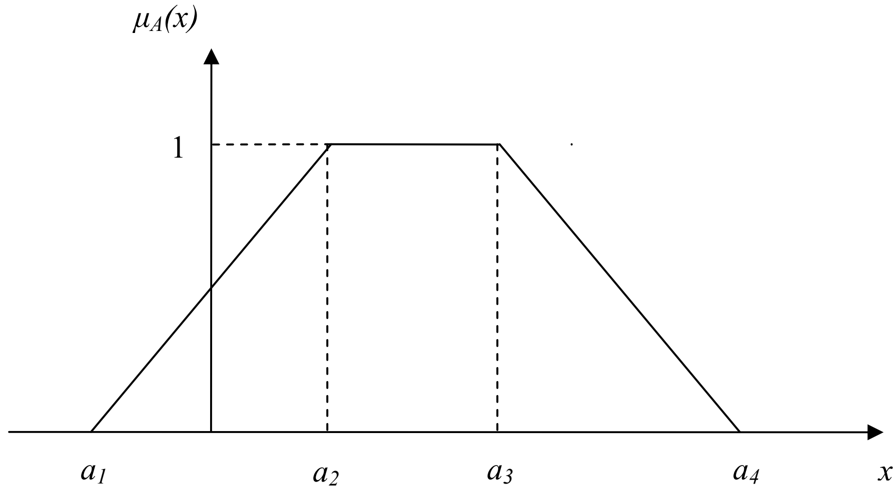
$$\alpha = \mu_A(x) = \begin{cases} 1 - \dfrac{|m_a - x|}{c_a}, & m_a - c_a \le x \le m_a + c_a \\ 0, & x > m_a + c_a \ veya\ x < m_a - c_a \end{cases} \tag{2.3}$$

$$A_\alpha = \left[A^1(\alpha), A^2(\alpha)\right] = \left[m_a - c_a(1-\alpha),\ m_a + c_a(1-\alpha)\right]$$

olarak tanımlanır (Kaufmann and Gupta 1991).

Tanım 2.9 Yamuksal Bulanık Sayı

Yamuksal bulanık sayı dört parametre ile tanımlanır. Bulanık küme desteğinin alt ve üst sınır değerleri olan a_1 ve a_4, üyelik derecesinin sıfır olduğu noktaları; a_2 ve a_3 ise üyelik derecesinin bire eşit olduğu noktaları göstermektedir. Yamuksal bir bulanık sayı Şekil 2.3'de gösterilmiştir.



Şekil 2.3 Yamuksal bulanık sayı

Üçgensel bulanık sayılar, yamuksal bulanık sayıların özel bir halidir. Şekilden de anlaşılacağı gibi a_2 ve a_3 değerlerinin birbirine eşit olduğu durumda yamuksal bulanık sayı üçgensel bulanık sayıya dönüşmektedir.

Yamuksal bulanık sayı;

$$\alpha = \mu_A(x) = \begin{cases} 0 & , \ x \le a_1 \ veya \ x \ge a_4 \\ \dfrac{x - a_1}{a_2 - a_1} & , \ a_1 \le x \le a_2 \\ 1 & , \ a_2 \le x \le a_3 \\ \dfrac{a_4 - x}{a_4 - a_3} & , \ a_3 \le x \le a_4 \end{cases} \qquad (2.4)$$

şeklindeki üyelik fonksiyonu ile ifade edilir.

Güven aralığı α-kesimi için tanımlandığında yamuksal bulanık sayı,

$$A_\alpha = \left[A^1(\alpha), A^2(\alpha)\right] = \left[a_1 + (a_2 - a_1)\alpha,\ a_4 - (a_4 - a_3)\alpha\right]$$

olarak gösterilir.

Geleneksel sayılarda olduğu gibi, bulanık sayılarda da toplama, çıkarma, çarpma ve bölme gibi temel cebirsel işlemler kolaylıkla uygulanabilir. Bulanık sayılarla yapılan aritmetik işlemler için α – kesim yöntemi yaygın olarak kullanılmaktadır. İki bulanık sayı *A* ve *B*'ye uygulanan aritmetik işlemler yeni bir bulanık sayı ile sonuçlanır.

A ve *B* bulanık sayılarının α – kesimleri, $A_\alpha = [a_1^\alpha, a_2^\alpha]$ ve $B_\alpha = [b_1^\alpha, b_2^\alpha]$ olmak üzere toplama, çıkarma, çarpma, ve bölme işlemleri sırasıyla,

a) Toplama:

$$A_\alpha(+)B_\alpha = \left[a_1^\alpha, a_2^\alpha\right](+)\left[b_1^\alpha, b_2^\alpha\right] = \left[a_1^\alpha + b_1^\alpha, a_2^\alpha + b_2^\alpha\right] \tag{2.5}$$

b) Çıkarma:

$$A_\alpha(-)B_\alpha = \left[a_1^\alpha, a_2^\alpha\right](-)\left[b_1^\alpha, b_2^\alpha\right] = \left[a_1^\alpha - b_2^\alpha, a_2^\alpha - b_1^\alpha\right] \tag{2.6}$$

c) Çarpma:

$$A_\alpha(\cdot)B_\alpha = \left[a_1^\alpha, a_2^\alpha\right](\cdot)\left[b_1^\alpha, b_2^\alpha\right] = \left[a_1^\alpha \cdot b_1^\alpha, a_2^\alpha \cdot b_2^\alpha\right] \tag{2.7}$$

d) Bölme:

$$A_\alpha(:)B_\alpha = \left[a_1^\alpha, a_2^\alpha\right](:)\left[b_1^\alpha, b_2^\alpha\right] = \left[a_1^\alpha : b_2^\alpha, a_2^\alpha : b_1^\alpha\right] \tag{2.8}$$

biçiminde ifade edilir (Kaufmann and Gupta 1991).

Aralık sayılar olarak ifade edilen sayılar için temel cebirsel işlemler ise,

$$[a,b]+[c,d]=[a+c,b+d]$$
$$[a,b]-[c,d]=[a-d,b-c]$$
$$[a,b]*[c,d]=[\min(a*c,a*d,b*c,b*d),\max(a*c,a*d,b*c,b*d)]$$
$$[a,b]:[c,d]=[\min(a:c,a:d,b:c,b:d),\max(a:c,a:d,b:c,b:d)]$$

olarak elde edilir.

Üçgensel bulanık sayılar ile aritmetik işlemlerde bir takım önemli özellikler bulunmaktadır. Simetrik üçgensel bulanık sayılar arasındaki bazı aritmetik işlem sonuçları yine simetrik üçgensel bulanık sayı olur. Örneğin, $\widetilde{A}=(m_a,\ c_a)$ bulanık sayısının k gibi bir sabit ile çarpılması sonucunda $\widetilde{B}=k\widetilde{A}$ için $\widetilde{B}=(m_b,c_b)=(km_a,|k|c_a)$ elde edilir. Aynı şekilde iki simetrik üçgensel bulanık sayının toplamı da,

$$\widetilde{C}=\widetilde{A}+\widetilde{B} \text{ için } \widetilde{C}=(m_c,c_c)=(m_{a,}c_a)+(m_b,c_b)=(m_a+m_b,c_a+c_b) \tag{2.9}$$

biçiminde simetrik üçgensel bulanık sayıdır.

Fakat simetrik üçgensel bulanık sayılar ile doğrusal olmayan işlemler sonucunda elde edilen değer, bir simetrik üçgensel bulanık sayı olmayabilir. Ancak bu işlemlerin sonuçları simetrik üçgensel bulanık sayılara yakınsatılabilir. Örneğin, iki simetrik üçgensel bulanık sayının çarpımı, yaklaşık bir simetrik üçgensel bulanık sayı olarak;

$\widetilde{A}=(m_a,c_a)$ ve $\widetilde{B}=(m_b,c_b)$ olmak üzere

$$\widetilde{C}=\widetilde{A}.\widetilde{B} \text{ için } \widetilde{C}\approx(m_c,c_c)=(m_am_b,\ m_ac_b+m_bc_a) \tag{2.10}$$

biçiminde elde edilebilir (Dubois and Parade 1993).

3. BULANIK REGRESYON ÇÖZÜMLEMESİ

Değişkenler arasındaki ilişkileri modellemede kullanılan regresyon çözümlemesi, çok sayıda bilim dalı için temel araçlardan biridir. Bununla birlikte regresyon çözümlemesi, modelin istatistiksel özellikleri hakkında bazı varsayımlar gerektirmektedir. Regresyonun gerektirdiği şartların sağlanamadığı ve belirsizliğin hakim olduğu durumlarda bulanık regresyon etkili bir araç haline gelmektedir.

Regresyon çözümlemesinde sıklıkla kullanılan fonksiyon biçimi olan doğrusal model,

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_{i1} + \ldots + \beta_i X_{ik} + \varepsilon_i \quad , \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

biçiminde tanımlanır.

Burada, Y_i ve X_{ij} (j = 1,2,…,k) sırasıyla gözlenen bağımlı ve bağımsız değişkenleri; β_j ise j.nci bağımsız değişkene ilişkin katsayıyı göstermektedir. Regresyon çözümlemesinde, tüm kitle yerine, kitleden rasgele olarak seçilen n sayıda gözlem için β_j katsayı tahminleri elde edilir. Katsayı tahminlerinin elde edilmesinde literatürde birçok yöntem var olmasına rağmen bunların içinden en küçük kareler yöntemi daha geniş bir kullanım alanı bulmuştur. Bunun esas nedeni, tahminlerin yansız ve minimum varyanslı olması gibi teorik temellerinin var olmasıdır (Kao and Chyu 2003).

Geleneksel regresyon analizinde, gözlemlerin bazı olasılık dağılımlarına (genellikle normal dağılım) sahip olduğu varsayımı yapılır. Fakat uygulamada, bulanık gözlemlerin var olduğu durumlarda, olasılık dağılımlarının kullanılması uygun olmamaktadır.

İlk olarak Tanaka *et al.* (1982) tarafından önerilen bulanık doğrusal regresyon çözümlemesi, bulanık doğrusal bir sistemi regresyon modeli olarak kullanarak, bulanık ya da deterministik veri kümeleri için doğrusal programlama problemi yardımıyla bulanık parametrelere ilişkin tahminler hesaplamaktadır. Bulunduğumuz zamana kadar, çalışma alanına diğer katkılar Celminš (1987), Diamond (1988), Tanaka (1987), Tanaka and Ishibuchi (1991), Savic and Pedrycz (1991) ve Ishibuchi (1992) tarafından farklı optimal kriterler kullanılarak yapılmıştır.

Bu bölümde, minimum bulanıklık kriteri ve maksimum uyum kriteri ile bulanık regresyon çözümlemesine ilişkin yöntemler verilecektir.

3.1 Minimum Bulanıklık Kriteri İle Bulanık Regresyon Çözümlemesi

Bulanık regresyonda, gözlem değerleri ile tahmin değerleri arasındaki sapmalar, sistem bulanıklığından veya regresyon katsayılarının bulanıklığından kaynaklandığı varsayılmaktadır (Tanaka *et al.* 1982). Bulanık regresyon çözümlemesinde amaç, spesifik uygunluk kriterleri kullanılarak gözlenen tüm bulanık verilere uyan bir regresyon modeli bulmaktır. Kullanılan uygunluk kriterlerine bağlı olarak, farklı bulanık regresyon modelleri elde edilmektedir.

Bir bulanık model olarak ilk doğrusal regresyon çözümlemesi Tanaka *et al.* (1982) tarafından önerilmiştir. Bu yöntemde regresyon katsayıları, üyelik dereceleri ile aralık sayılar olarak tanımlanabilen bulanık sayılar şeklinde ele alınmıştır. Regresyon modelindeki her bir katsayı bir bulanık sayı olduğundan dolayı, tahmin edilen bağımlı değişken $\hat{Y}$'da bir bulanık sayı olacaktır. Bir bağımsız değişken (X) ile bulanık regresyon çözümlemesi, iki değişkenli regresyon modeli olarak;

$$\hat{Y} = \widetilde{A}_0 + \widetilde{A}_1 X \tag{3.1}$$

biçiminde tanımlanır. Burada $\widetilde{A}_0$ bulanık sabit katsayısı ve $\widetilde{A}_1$ ise bulanık eğim katsayısıdır. Her bir bulanık parametre $\widetilde{A}_i = (m_i, c_i)$, merkezi m_i ve yarı genişliği c_i olan simetrik üçgensel üyelik fonksiyonları ile tanımlanmaktadır. Bu yöntemde diğer üyelik fonksiyon tipleri de rahatlıkla kullanılabilmektedir.

Veri kümesi ile modelin uyuşma derecesini gösteren h değeri karar verici tarafından belirlenmektedir. Bu yaklaşımda amaç belirli kısıtlar altında, tahmin edilen $\hat{Y}$ bulanık çıktısının minimum genişliğe sahip olacak şekilde belirlenmesidir. Bulanık veya kesin değerlerden oluşabilecek bağımlı değişkene ilişkin her bir veri, Şekil 3.1'de görüldüğü gibi h derecesinde tahmin değeri $\hat{Y}$ aralığı içine düşmelidir.

Regresyon modelinin toplam bulanıklığının minimum olması amacı doğrultusunda, $\widetilde{A}_i = (m_i, c_i)$ bulanık katsayılarını belirlenmesi için Tanaka *et al.* (1982) tarafından,

$$Min \quad S = nc_0 + c_1 \sum_{i=1}^{n} |X_i| \tag{3.2}$$

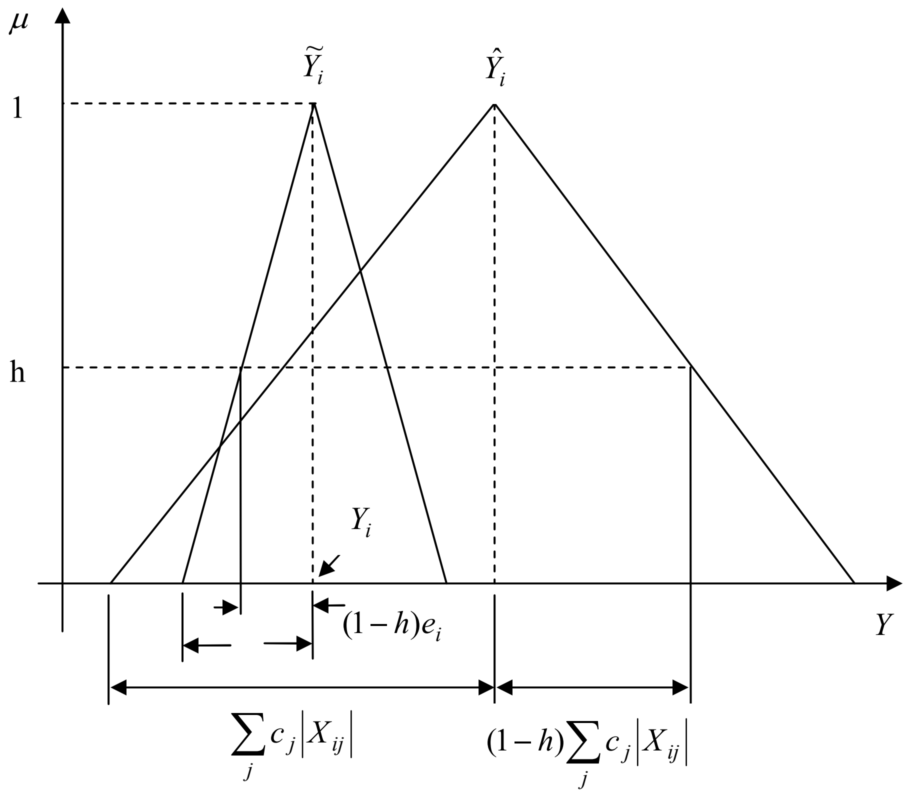
$$\sum_{j=0}^{1} m_j X_{ij} + (1-h) \sum_{j=0}^{1} c_j |X_{ij}| \geq Y_i + (1-h) e_i, \quad i = 1,2, \ldots, n \tag{3.3}$$

$$\sum_{j=0}^{1} m_j X_{ij} - (1-h) \sum_{j=0}^{1} c_j |X_{ij}| \leq Y_i - (1-h) e_i, \quad i = 1,2, \ldots, n \tag{3.4}$$

$$c_0 \geq 0, \; c_1 \geq 0$$

biçiminde bir doğrusal programlama problemi formüle edilmiştir. Burada S amaç fonksiyonu, regresyon modelinin toplam bulanıklığını göstermek üzere oluşturulmuştur. (3.3) ve (3.4) kısıtları; merkezi Y_i, genişliği e_i olan gözlenen bulanık bağımlı değişkene ilişkin veriler yardımıyla çözülebilir. Eğer gözlenen veriler kesin sayılardan oluşuyor ise e değeri sıfır olacaktır. Bundan dolayı, klasik kesin sayılar, bulanık sayıların özel bir durumu olarak değerlendirilebilmektedir.

Bu yöntemdeki temel eksiklik, en küçük kareler uygunluk kriterinin kullanılmamasından kaynaklanmaktadır. Bu bağlamda, en küçük kareler prensibinin bulanık regresyon ile bütünleştirilmesi, bazı teorik temellerin oluşturulmasında önem arz etmektedir. (Chang and Ayyub 2001)



Şekil 3.1 $\hat{Y}_i$ 'nin bulanık $\widetilde{Y}_i$ verilerine uyum derecesi

3.2 Bulanık En Küçük Kareler Regresyon Çözümlemesi

Bu kesimde, bulanık regresyon çözümlemesine en küçük kareler yaklaşımının gelişimi üzerinde durulacaktır. Bu yöntem Celminš (1987), Diamond (1988), Savic and Pedrycz (1991) tarafından farklı yönleri ile incelenmiştir. Celminš (1987) bulanık veri ile model arasındaki bağdaşma derecesini tanımlamış ve bunu bir model uyum kriteri olarak kullanmıştır. Diamond (1988) bulanık en küçük kareler yöntemini geliştirmiştir. Savic and Pedrycz (1991) minimum bulanıklık kriteri ile en küçük kareler uygunluk kriterini bütünleştirerek bir kombine yaklaşım ileri sürmüştür. Bu kısımda bulanık en küçük kareler regresyon çözümlemesi için Celminš (1987), Savic and Pedrycz (1991) tarafından geliştirilen yöntemler özetlenecektir.

3.2.1 Maksimum uyum kriteri ile bulanık en küçük kareler regresyon çözümlemesi

Celminš (1987), bulanık en küçük kareler regresyonu için veri ve model tahmini arasındaki uyum ölçüsüne dayanan bir yaklaşım önermiştir. $\mu_{\widetilde{A}}(x)$ ve $\mu_{\widetilde{B}}(x)$ sırasıyla $\widetilde{A}$ ve $\widetilde{B}$ bulanık sayılarının üyelik fonksiyonları olmak üzere, $\widetilde{A}$ ve $\widetilde{B}$ için uyum ölçüsü $\gamma(\widetilde{A},\widetilde{B})$ biçiminde gösterilsin. Eğer $\mu_{\widetilde{A}}(x)$ ve $\mu_{\widetilde{B}}(x)$ normalleştirilmiş üçgensel üyelik fonksiyonları ise Şekil 3.2'de gösterildiği gibi $\gamma(\widetilde{A},\widetilde{B})$,

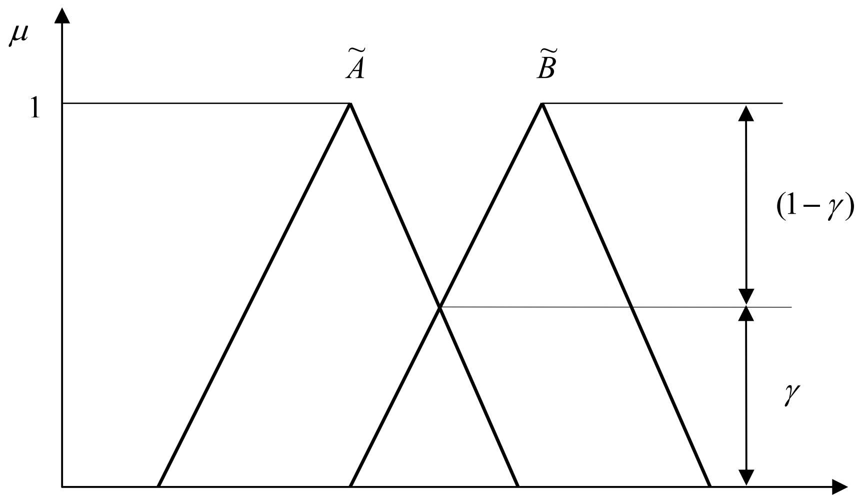
$$\gamma(\widetilde{A},\widetilde{B}) = \underset{x}{maks}\ \min\left\{\mu_{\widetilde{A}}(x),\ \mu_{\widetilde{B}}(x)\right\} \tag{3.5}$$

biçiminde açıklanır. Burada $\gamma \in [0,1]$ olacaktır ve Şekil 3.3'de gösterildiği gibi eğer iki bulanık sayı örtüşmüyorsa $\gamma = 0$, eğer iki bulanık sayının merkezleri çakışıyorsa $\gamma = 1$ değerini alacaktır. Burada uyum ölçüsü olarak belirlenen γ değeri, bir önceki kısımda tanımlanan, minimum bulanıklık kriterinde kullanılan, h derecesi ile aynı amaçla kullanılmaktadır.

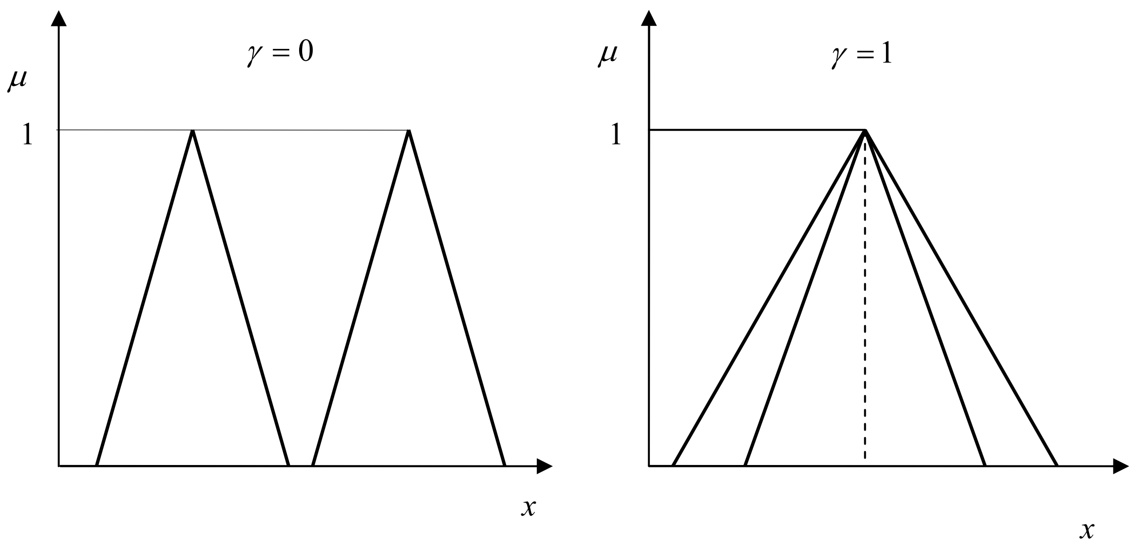
Bu yaklaşıma göre amaç, veri ve model arasında maksimum genel (bütünsel) uyum derecesine sahip bir modelin belirlenmesidir. γ_i veri seti ve tahmin denklemi arasındaki uyum derecesini göstermek üzere; genel uyum ölçüsü, γ_i'nin 1'den sapmalarının kareleri toplamına eşit olacaktır. Burada amaç,

$$W = \sum_{i=1}^{m} (1-\gamma_i)^2 \tag{3.6}$$

biçiminde belirlenen W fonksiyonunun enküçüklenmesidir (Chang and Ayyub 2001).



Şekil 3.2 $\widetilde{A}$ ve $\widetilde{B}$ bulanık sayıları arasında tanımlanan γ uyum ölçüsü



Şekil 3.3 $\gamma = 0$ ve $\gamma = 1$ için $\widetilde{A}$ ve $\widetilde{B}$ bulanık sayılarının gösterimi

Bu yaklaşıma göre, maksimum uyum kriterini kullanarak bulanık en küçük kareler regresyonu için model,

$$
\begin{aligned}
\hat{Y} &= \widetilde{A}_0 + \widetilde{A}_1 X \\
&= m_0 + m_1 X \pm \sqrt{c_0^2 + 2c_{01}X + c_1^2 X^2}
\end{aligned}
\tag{3.7}
$$

biçiminde oluşturulur.

(3.7) denkleminin ilk kısmı olan $m_0 + m_1 X$, bulanık regresyon modelinin merkez doğrusunu göstermektedir. m_0 ve m_1 katsayıları ağırlıklı en küçük kareler regresyonu yardımıyla elde edilir. (3.7) denkleminin ikinci kısmı $\pm\sqrt{c_0^2 + 2c_{01}X + c_1^2 X^2}$ bulanık regresyon modelinin alt ve üst sınırlarını göstermektedir. c_0 ve c_1 ise $\widetilde{A}_0$ ve $\widetilde{A}_1$ bulanık katsayılarının genişliklerini ifade etmektedir. Celminš (1987)'e göre c_{01}, $\widetilde{A}_0$ ve $\widetilde{A}_1$ arasındaki bulanık uyumluluk olarak tanımlanmıştır ve klasik parametreler arasındaki kovaryansa karşılık gelmektedir. İteratif hesaplamalar sonucunda c_0, c_1, ve c_{01}, (3.7) denkleminden [0, 1] aralığı içerisinde elde edilir.

3.2.2 Minimum bulanıklık kriteri ile bulanık en küçük kareler regresyon çözümlemesi

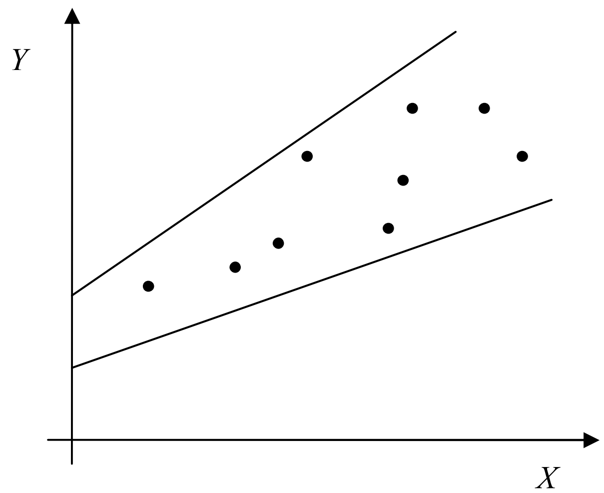
Savic and Pedrycz (1991), en küçük kareler prensibi ve minimumu bulanıklık kriterini birleştirerek bulanık regresyon çözümlemesi için bir yöntem geliştirmiştir. Yöntem birbirini takip eden iki adımdan oluşmaktadır. İlk adımda, geleneksel en küçük kareler regresyonu kullanılarak bulanık regresyon katsayılarının merkez değerleri elde edilmekte, ikinci adımda ise minimum bulanıklık kriteri ile bulanık regresyon katsayılarının genişlikleri elde edilmektedir.

İlk adımda, her bir bulanık gözlem, merkezi ile birer kesin değer olarak işlem görür ve geleneksel en küçük kareler regresyon çözümlemesi uygulanarak verilere uygun bir regresyon doğrusu elde edilir. Bu adım sonucunda elde edilen katsayı tahminleri bulanık regresyon katsayılarının merkez değerleri olarak kullanılır.

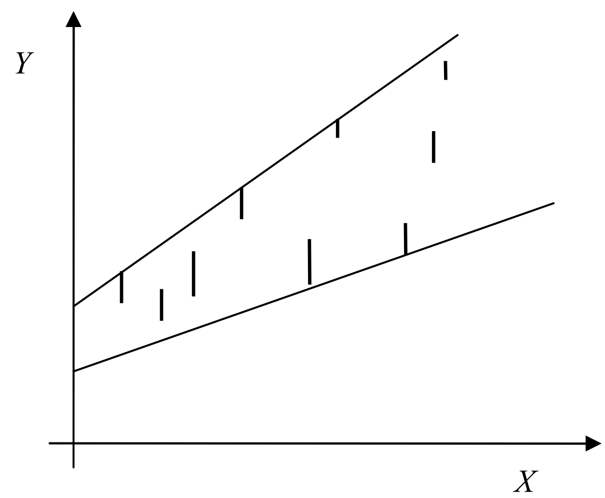
İkinci adımda, bulanık regresyon katsayılarının genişlikleri (3.3) – (3.5) denklemleri yardımıyla minimum bulanıklık yönteminde olduğu gibi elde edilir (Chang and Ayyub 2001).

3.3 Aralık Regresyonu

Bu yönteme göre, bulanık veriler ve bulanık regresyon katsayıları aralık sayılar olarak ele alınır. Bulanık regresyon katsayıları, tüm bulanık çıktıların bir bulanık regresyon modelinin sınırları içerisinde yer alması düşüncesi ile belirlenir. Kesin (crisp) *X* ve kesin (crisp) *Y* için aralık regresyon modeli Şekil 3.4 ile, kesin (crisp) *X* ve bulanık *Y* için aralık regresyon modeli Şekil 3.5 ile gösterilmiştir.



Şekil 3.4 Kesin (crisp) *X* ve kesin (crisp) *Y* için aralık regresyon modeli



Şekil 3.5 Kesin (crisp) *X* ve bulanık *Y* için aralık regresyon modeli

$\hat{Y} = \widetilde{A}_0 + \widetilde{A}_1 X$ doğrusal modeli için $\widetilde{A}_0 = (m_0, c_0)$ ve $\widetilde{A}_1 = (m_1, c_1)$ bulanık regresyon katsayılarını elde etmek amacıyla,

$$\min \quad nc_0 + c_1 \sum_{i=1}^{n} X_i \tag{3.8}$$

$$(m_0 - c_0) + (m_1 - c_1) X_i \leq Y_{i,L} \qquad i = 1,2,...,n \tag{3.9}$$

$$(m_0 + c_0) + (m_1 + c_1) X_i \geq Y_{i,L} \qquad i = 1,2,...,n \tag{3.10}$$

$$c_0 \geq 0, \;\; c_1 \geq 0$$

biçiminde tanımlanan doğrusal programlama problemi çözülür. Burada $Y_{i,L}$ ve $Y_{i,U}$ her bir bulanık gözlem için sırasıyla alt ve üst sınırları göstermektedir. (3.8) ile belirlenen amaç fonksiyonu, regresyon modelindeki toplam bulanık genişliğin enküçüklenmesidir. (3.9) ve (3.10) kısıtları gözlenen tüm bulanık verileri bulanık regresyon modeli içerisinde sınırlandırmak üzere kullanılmaktadır (Slowiński 1998).

4. MELEZ BULANIK EN KÜÇÜK KARELER DOĞRUSAL REGRESYON ÇÖZÜMLEMESİ

Melez bulanık en küçük kareler doğrusal regresyon çözümlemesi, bulanık veriye ilişkin model tahminlerini geliştirmek üzere Chang (2001) tarafından ileri sürülmüştür. Bu yöntem, hem rasgelelikten hem de bulanıklıktan kaynaklanan belirsizliği bir regresyon modelinde birleştirmek amacıyla; ağırlıklı bulanık aritmetiği ve en küçük kareler uygunluk kriterini kullanarak, bulanık veriye, kesin (crisp) veriye ve bunların birleşimine uygun bir model oluşturulmasına olanak verir.

Bu bölümde, ağırlıklı bulanık aritmetik tanımlaması kullanılarak, regresyon tahmin ve gözlem değerleri arasındaki hata kareler toplamına ilişkin formül ve melez bulanık en küçük kareler doğrusal regresyon çözümlemesi için bulanık katsayı tahminleri verilecektir. İlk olarak, iki değişkenli regresyon modeli için bulanık katsayı tahminleri elde edilecek daha sonra bu sonuç çoklu regresyon modeli için özetlenecektir.

4.1 Ağırlıklı Bulanık Aritmetik

Regresyon analizinde, fazla veri çok sayıda aritmetik işlem gerektirir. Bulanıklık ve çok sayıda aritmetik işlem olması durumunda geleneksel bulanık aritmetik kullanıldığı zaman, genişlikler gerçekçi olmayan bir büyük sayı anlamına gelebilir. Geleneksel bulanık aritmetikteki bu sakıncaları ortadan kaldırmak için ağırlıklı bulanık aritmetik tanımlaması önerilmiştir.

Ağırlıklı bulanık aritmetik, bulanık küme işlemlerini kesin reel sayı işlemlerine dönüştürmek için bulanıklığı ortadan kaldırma (defuzzification) kavramını kullanır. Kesin sayı işlemleri sonuçları, bulanık aritmetik işlemlerinin ortalama değeri şeklinde yorumlanabilir. Bunun aksine bulanık aritmetiğin geleneksel tanımlaması, bulanık aritmetik işlemlerde muhtemel tüm değerleri bir bulanık küme şeklinde tasarlar (Chang 2001).

Bu kesimde, ağırlıklı bulanık aritmetik tanımlamasına göre bulanık aritmetik işlemleri için formüller verilecektir. Üyelik fonksiyonlarının integrasyonunu kullanabilmek için bulanık sayılar normalleştirilmiş asimetrik üçgensel üyelik fonksiyonu şeklinde ele alınacaktır. Bulanık sayılar normal değil ise sayılar maksimum üyelik değerine göre normalleştirilmelidir.

m_a merkez, $c_{a,L}$ sol genişlik, $c_{a,R}$ sağ genişlik olmak üzere $\tilde{A}$ asimetrik üçgensel bulanık sayısı $\tilde{A} = (m_a, \quad c_{a,L}, \quad c_{a,R})$ şeklinde tanımlansın. Diğer bulanık sayıda $\tilde{B} = (m_b, \quad c_{b,L}, \quad c_{b,R})$ şeklinde gösterilsin. μ üyelik derecesinde $\tilde{A}$ ve $\tilde{B}$ aralıkları,

$$\mu_{\tilde{A}} = [\mu_{A_L} \; , \mu_{A_R}] = [m_a - (1-\mu)c_{a,L} \, , \; m_a + (1-\mu)c_{a,R}] \tag{4.1}$$

$$\mu_{\tilde{B}} = [\mu_{B_L} \; , \mu_{B_R}] = [m_b - (1-\mu)c_{b,L} \, , \; m_b + (1-\mu)c_{b,R}] \tag{4.2}$$

biçiminde tanımlanır.

Tanım 4.1 Ağırlıklı Bulanık Toplama

Ağırlıklı bulanık aritmetik tanımına göre, $\tilde{A}$ ve $\tilde{B}$ için ağırlıklı bulanık toplam,

$$\tilde{A} + \tilde{B} = \frac{\left[\int_{\mu} (\mu_{A_L} + \mu_{B_L})\,\mu\, d\mu\right]_L + \left[\int_{\mu} (\mu_{A_R} + \mu_{B_R})\; \mu\; d\mu\right]_R}{\int \mu\, d\mu} \tag{4.3}$$

biçimindedir. Burada payda,

$$\int \mu \; d\mu = 2\int_0^1 \mu \; d\mu = 2\left[\frac{1}{2}\mu^2\right]_0^1 = 2.\left(\frac{1}{2}\right) = 1$$

biçiminde hesaplanabilir (Chang 2001).

$\mu_{A_L}, \mu_{A_R}, \mu_{B_L}$ ve μ_{B_R} değerleri (4.3) eşitliğinde yerlerine konulursa;

$$\left[\int_\mu \left(\mu_{A_L} + \mu_{B_L}\right)\mu\, d\mu\right]_L = \int_0^1 \left\{\left[m_a - (1-\mu)c_{a,L}\right] + \left[m_b - (1-\mu)c_{b,L}\right]\right\}\mu\, d\mu$$
$$= \int_0^1 \left[(m_a + m_b) - (1-\mu)\left(c_{a,L} + c_{b,L}\right)\right]\mu\, d\mu$$
$$= \frac{1}{2}(m_a + m_b) - \frac{1}{6}\left(c_{a,L} + c_{b,L}\right) \tag{4.4a}$$

$$\left[\int_\mu \left(\mu_{A_R} + \mu_{B_R}\right)\mu\, d\mu\right]_R = \int_0^1 \left\{\left[m_a + (1-\mu)c_{a,R}\right] + \left[m_b + (1-\mu)c_{b,R}\right]\right\}\mu\, d\mu$$
$$= \int_0^1 \left[(m_a + m_b) + (1-\mu)\left(c_{a,R} + c_{b,R}\right)\right]\mu\, d\mu$$
$$= \frac{1}{2}(m_a + m_b) + \frac{1}{6}\left(c_{a,R} + c_{b,R}\right) \tag{4.4b}$$

olarak elde edilir.

(4.4a) ve (4.4b) eşitliklerinin toplamından

$$\widetilde{A} + \widetilde{B} = (m_a + m_b) + \frac{1}{6}\left[(c_{a,R} + c_{b,R}) - (c_{a,L} + c_{b,L})\right] \tag{4.5}$$

olarak bulunur.

Eğer her iki $\tilde{A}$ ve $\tilde{B}$ bulanık sayısı simetrik üçgensel bir bulanık sayı ise $c_{a,L} = c_{a,R} = c_a$ ve $c_{b,L} = c_{b,R} = c_b$ olacağından toplam,

$$\widetilde{A} + \widetilde{B} = m_a + m_b \tag{4.6}$$

biçiminde elde edilir (Chang 2001).

Ağırlıklı bulanık çıkarma, çarpma ve bölme benzer şekilde aşağıdaki gibi elde edilebilir.

Tanım 4.2 Ağırlıklı Bulanık Çıkarma

$\widetilde{A}$ ve $\widetilde{B}$ iki üçgensel bulanık sayı olmak üzere ağılıklı bulanık çıkarma,

$$\widetilde{A} - \widetilde{B} = (m_a - m_b) + \frac{1}{6}\left[(c_{a,R} - c_{b,R}) - (c_{a,L} - c_{b,L})\right] \tag{4.7}$$

$$\widetilde{A} - \widetilde{B} = m_a - m_b, \quad \text{simetrik } \widetilde{A} \text{ ve } \widetilde{B} \text{ için} \tag{4.8}$$

biçiminde ifade edilir.

Tanım 4.3 Ağırlıklı Bulanık Çarpma

$\widetilde{A}$ ve $\widetilde{B}$ iki üçgensel bulanık sayı olmak üzere ağılıklı bulanık çarpma,

$$\widetilde{A}.(\widetilde{B}) = m_a.m_b + \frac{1}{6}\left[(m_b.c_{a,R} + m_a.c_{b,R}) - (m_b.c_{a,L} + m_a.c_{b,L}\right] + \frac{1}{12}(c_{a,L}.c_{b,L} + c_{a,R}.c_{b,R}) \tag{4.9}$$

$$\widetilde{A}.\widetilde{B} = m_a.m_b + \frac{1}{6}(c_a c_b), \quad \text{simetrik } \widetilde{A} \text{ ve } \widetilde{B} \text{ için} \tag{4.10}$$

biçiminde ifade edilir.

Tanım 4.4 Ağırlıklı Bulanık Bölme

$\widetilde{A}$ ve $\widetilde{B}$ iki üçgensel bulanık sayı olmak üzere ağırlıklı bulanık bölme ise benzer olarak,

$$\widetilde{A} / \widetilde{B} = \int_0^1 \frac{\left[m_a - (1-\mu)c_{a,L}\right]}{\left[m_b - (1-\mu)c_{b,L}\right]}\mu\, d\mu + \int_0^1 \frac{\left[m_a + (1-\mu)c_{a,R}\right]}{\left[m_a + (1-\mu)c_{b,R}\right]}\mu\, d\mu \;, \qquad 0 \notin \widetilde{B} \tag{4.11}$$

eşitliğinden elde edilir.

(4.5)-(4.11) eşitliklerinde; tüm bulanık sayılar, kesin (crisp) hale geldiği zaman ağırlıklı bulanık aritmetik, klasik aritmetik ile aynı sonuçları vermektedir (Chang 2001).

4.2 İki Değişkenli Melez Bulanık Regresyon Modeli

Asimetrik üçgensel üyelik fonksiyonları ile tanımlanan bulanık sayılar için iki değişkenli regresyon modeli,

$$\hat{Y}_i = \widetilde{A}_o + \widetilde{A}_1 X_i = (a_o,\, c_{o,L},\, c_{o,R}) + (a_1,\, c_{1,L},\, c_{1,R})\, X_i \tag{4.12}$$

biçiminde gösterilir.

Her bir tahmin değeri,

$$\hat{Y}_i = (a_o + a_1\, X_i,\, c_{o,L} + c_{1,L}\, X_i,\, c_{o,R} + c_{1,R}\, X_i)\ , \qquad i = 1, 2, \ldots, n \tag{4.13}$$

biçiminde asimetrik üçgensel bulanık sayı olarak ifade edilir.

Benzer olarak her bir gözlem değeri $\widetilde{Y}_i = (Y_i,\ \ e_{i,L},\ \ e_{i,R})$ için, Şekil 4.1 de görüldüğü gibi $\mu_{\hat{Y}_{i,L}}$ ve $\mu_{\hat{Y}_{i,R}}$, μ üyelik derecesinde $\hat{Y}_i$ tahmin değerleri için sağ ve sol sınırdır (Chang 2001). Bununla birlikte; $\mu_{\widetilde{Y}_{i,L}}$ ve $\mu_{\widetilde{Y}_{i,R}}$ ise μ üyelik derecesinde $\widetilde{Y}_i$ gözlem değerleri için sağ ve sol sınırlardır. O halde, $\mu_{\hat{Y}_{i,L}}$, $\mu_{\hat{Y}_{i,R}}$, $\mu_{\widetilde{Y}_{i,L}}$ ve $\mu_{\widetilde{Y}_{i,R}}$;

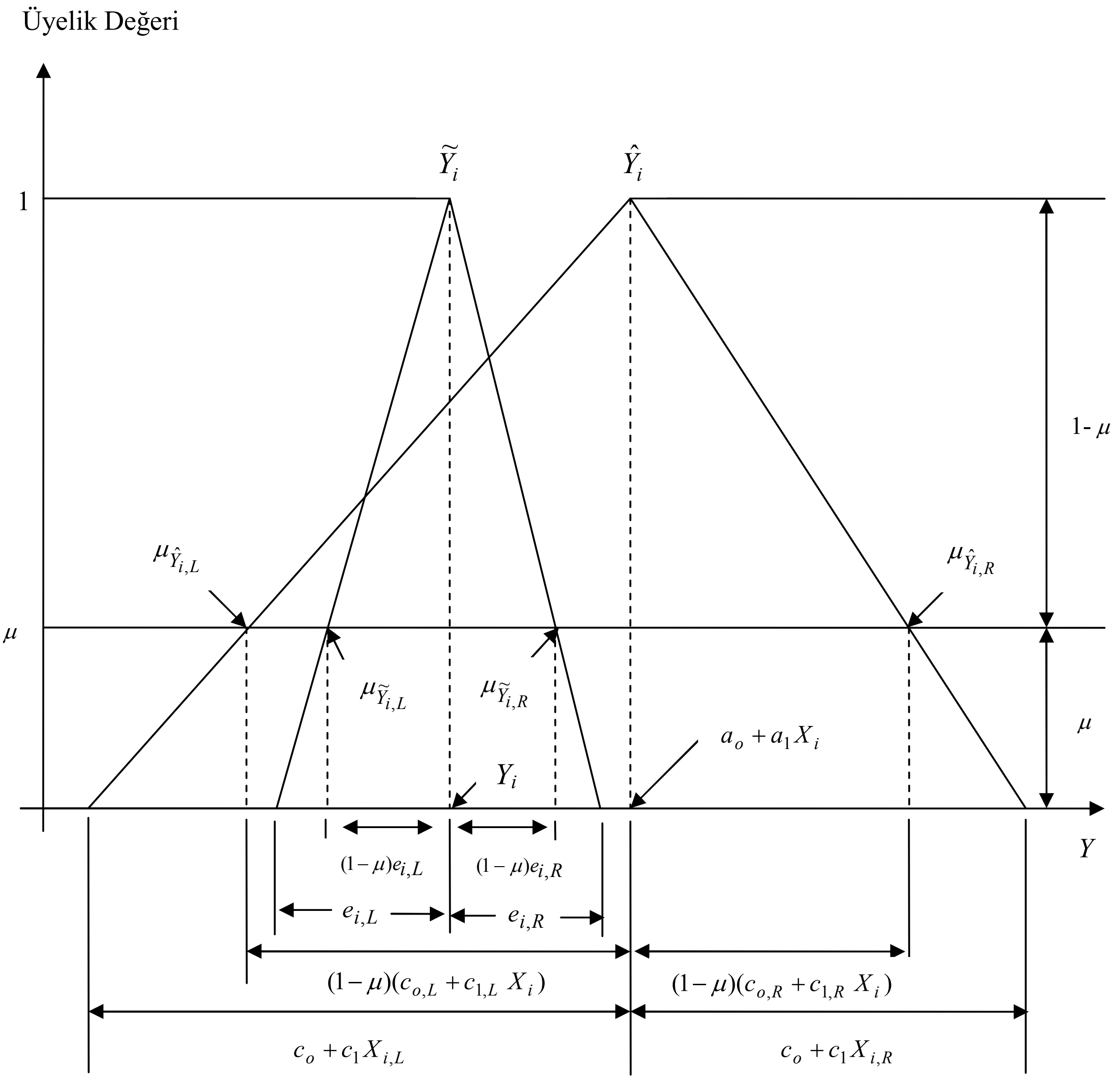
$$\begin{aligned}\mu_{\hat{Y}_{i,L}} &= [a_o - (1-\mu)\, c_{o,L}] \ + \ [a_1 - (1-\mu)\, c_{1,L}]\, X_i \\ &= (a_o + a_1\, X_i) - (1-\mu)(c_{o,L} + c_{1,L}\, X_i)\end{aligned} \tag{4.14a}$$

$$\begin{aligned}\mu_{\hat{Y}_{i,R}} &= [a_o + (1-\mu)\, c_{o,R}] + \ [a_1 + (1-\mu)\ c_{1,R}]\ X_i \\ &= (a_o + a_1\, X_i) + (1-\mu)(c_{o,R} + c_{1,R}\, X_i)\end{aligned} \tag{4.14b}$$

$$\mu_{\tilde{Y}_{i,L}} = Y_i - (1-\mu)\, e_{i,L} \tag{4.15a}$$

$$\mu_{\tilde{Y}_{i,R}} = Y_i + (1-\mu)\, e_{i,R} \tag{4.15b}$$

olarak elde edilir.



Şekil 4.1 Gözlem değeri $\tilde{Y}_i$ ve tahmin değeri $\hat{Y}_i$ arasında belirlenen hata

Ağırlıklı bulanık aritmetik tanımını kullanarak, $\hat{Y}_i$ tahmin değerleri ve $\tilde{Y}_i$ gözlem değerleri arasındaki hata kareler toplamı,

$$\sum (hata)^2 = \sum_{i=1}^{n} (\hat{Y}_i - \tilde{Y}_i)^2$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{\left[\int_0^1 (\mu_{\hat{Y}_{i,L}} - \mu_{\tilde{Y}_{i,L}})^2 \mu \, d\mu\right]_L + \left[\int_0^1 (\mu_{\hat{Y}_{i,R}} - \mu_{\tilde{Y}_{i,R}})^2 \mu \, d\mu\right]_R}{\int \mu \, d\mu} \tag{4.16}$$

biçiminde ifade edilir.

Burada,

$$\left[\int_0^1 (\mu_{\hat{Y}_{i,L}} - \mu_{\tilde{Y}_{i,L}})^2 \mu \, d\mu\right]_L = \int_0^1 \left\{\left[(a_o + a_1 X_i) - (1-\mu)(c_{o,L} + c_{1,L} X_i)\right] - \left[Y_i - (1-\mu) e_{i,L}\right]\right\}^2 \mu \, d\mu$$

$$= \int_0^1 \left[(a_o + a_1 X_i - Y_i) - (1-\mu)(c_{o,L} + c_{1,L} X_i - e_{i,L}\right]^2 \mu \, d\mu$$

$$= \int_0^1 \left[(a_o + a_1 X_i - Y_i)^2 \mu - 2\mu(1-\mu)(a_o + a_1 X_i - Y_i)(c_{o,L} + c_{1,L} X_i - e_{i,L}) + \mu(1-\mu)^2 (c_{o,L} + c_{1,L} X_i - e_{i,L})^2\right] d\mu$$

$$= \frac{1}{2}(a_o + a_1 X_i - Y_i)^2 - \frac{1}{3}(a_o + a_1 X_i - Y_i)(c_{o,L} + c_{1,L} X_i - e_{i,L}) + \frac{1}{12}(c_{o,L} + c_{1,L} X_i - e_{i,L})^2$$

ve

$$\left[\int_0^1 (\mu_{\hat{Y}_{i,R}} - \mu_{\tilde{Y}_{i,R}})^2 \mu \, d\mu\right]_R = \int_0^1 \left\{\left[(a_o + a_1 X_i) + (1-\mu)(c_{o,R} + c_{1,R} X_i)\right] - \left[Y_i + (1-\mu) e_{i,R}\right]\right\}^2 \mu \, d\mu$$

$$= \int_0^1 \left[(a_o + a_1 X_i - Y_i) + (1-\mu)(c_{o,R} + c_{1,R} X_i - e_{i,R}\right]^2 \mu \, d\mu$$

$$= \int_0^1 \left[(a_o + a_1 X_i - Y_i)^2 \mu + 2\mu(1-\mu)(a_o + a_1 X_i - Y_i)(c_{o,R} + c_{1,R} X_i - e_{i,R}) + \mu(1-\mu)^2 (c_{o,R} + c_{1,R} X_i - e_{i,R})^2\right] d\mu$$

$$= \frac{1}{2}(a_o + a_1 X_i - Y_i)^2 + \frac{1}{3}(a_o + a_1 X_i - Y_i)(c_{o,R} + c_{1,R} X_i - e_{i,R}) + \frac{1}{12}(c_{o,R} + c_{1,R} X_i - e_{i,R})^2$$

olarak elde edilir.

(4.16) eşitliğinde paydada bulunan üyelik fonksiyonun integrali, normal üçgensel üyelik fonksiyonları kullanıldığı için 1' e eşittir. Böylece hata kareler toplamı,

$$\sum (hata)^2 = \sum_{i=1}^{n} (\hat{Y}_i - \tilde{Y}_i)^2$$

$$= \sum \Big\{ (a_o + a_1 X_i - \mathrm{Y}_i)^2 + \frac{1}{3}(a_o + a_1 X_i - \mathrm{Y}_i)\big[(c_{o,R} + c_{1,R} X_i - e_{i,R}) - (c_{o,L} + c_{1,L} X_i - e_{i,L})\big]$$

$$+ \frac{1}{12}\big[(c_{o,L} + c_{1,L} X_i - e_{i,L})^2 + (c_{o,R} + c_{1,R} X_i - e_{i,R})^2\big]\Big\} \tag{4.17}$$

olarak elde edilir.

En küçük kareler prensibine göre amaç fonksiyonu, hata kareler toplamının yani,

$$F = \sum_{i=1}^{n} \Big\{ (a_o + a_1 X_i - Y_i)^2 + \frac{1}{3}(a_o + a_1 X_i - Y_i)\big[(c_{o,R} + c_{1,R} X_i - e_{i,R}) - (c_{o,L} + c_{1,L} X_i - e_{i,L})\big]$$

$$+ \frac{1}{12}\big[(c_{o,L} + c_{1,L} X_i - e_{i,L})^2 + (c_{o,R} + c_{1,R} X_i - e_{i,R})^2\big]\Big\} \tag{4.18}$$

biçiminde belirlenen F fonksiyonunun enküçüklenmesidir (Chang 2001).

(4.18) eşitliği, altı bilinmeyene $\left(a_0,\ a_1,\ c_{0,L},\ c_{0,R},\ c_{1,L},\ c_{1,R}\right)$ sahiptir. Bilinmeyen regresyon katsayılarını elde etmek amacıyla F fonksiyonu her bir bilinmeyen $\left(a_0,\ a_1,\ c_{0,L},\ c_{0,R},\ c_{1,L},\ c_{1,R}\right)$ için türev alınıp çözülürse aşağıdaki denklem sistemleri elde edilir:

$$\frac{\partial F}{\partial a_o} = 2\sum_{i=1}^{n} (a_o + a_1 X_i - Y_i) + \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{n}\big[(c_{o,R} + c_{1,R} X_i - e_{i,R}) - (c_{o,L} + c_{1,L} X_i - e_{i,L})\big] = 0, \tag{4.19a}$$

$$\frac{\partial F}{\partial a_1} = 2\sum_{i=1}^{n} (a_o + a_1 X_i - \mathrm{Y}_i) X_i + \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{n}\big[(c_{o,R} + c_{1,R} X_i - e_{i,R}) - (c_{o,L} + c_{1,L} X_i - e_{i,L})\big] X_i = 0, \tag{4.19b}$$

$$\frac{\partial F}{\partial c_{o,R}} = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^{n} (a_o + a_1 X_i - Y_i) + 2 \left(\frac{1}{12}\right) \sum_{i=1}^{n} (c_{o,R} + c_{1,R} X_i - e_{i,R}) = 0, \tag{4.19c}$$

$$\frac{\partial F}{\partial c_{1,R}} = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^{n} (a_o + a_1 X_i - Y_i) X_i + 2 \left(\frac{1}{12}\right) \sum_{i=1}^{n} (c_{o,R} + c_{1,R} X_i - e_{i,R}) X_i = 0, \tag{4.19d}$$

$$\frac{\partial F}{\partial c_{o,L}} = -\frac{1}{3} \sum_{i=1}^{n} (a_o + a_1 X_i - Y_i) + 2 \left(\frac{1}{12}\right) \sum_{i=1}^{n} (c_{o,L} + c_{1,L} X_i - e_{i,L}) = 0, \tag{4.19e}$$

$$\frac{\partial F}{\partial c_{1,L}} = -\frac{1}{3} \sum_{i=1}^{n} (a_o + a_1 X_i - Y_i) X_i + 2 \left(\frac{1}{12}\right) \sum_{i=1}^{n} (c_{o,L} + c_{1,L} X_i - e_{i,L}) X_i = 0, \tag{4.19f}$$

Denklemler yeniden düzenlenirse, aşağıdaki normal denklem sistemi elde edilir:

$$\begin{aligned} &2 n a_o + 2 a_1 \sum X_i + \frac{1}{3} n\, c_{o,R} + \frac{1}{3} c_{1,R} \sum X_i - \frac{1}{3} n\, c_{o,L} - \frac{1}{3} c_{1,L} \sum X_i \\ &= 2 \sum \mathrm{Y}_i + \frac{1}{3}\left(\sum e_{i,R} - \sum e_{i,L}\right) \end{aligned} \tag{4.20a}$$

$$\begin{aligned} &2 a_o \sum X_i + 2 a_1 \sum X_i^2 + \frac{1}{3} c_{o,R} \sum X_i + \frac{1}{3} c_{1,R} \sum X_i^2 - \frac{1}{3} c_{o,L} \sum X_i - \frac{1}{3} c_{1,L} \sum X_i^2 \\ &= 2 \sum X_i Y_i + \frac{1}{3} \sum e_{i,R} X_i - \frac{1}{3} \sum e_{i,L} X_i \end{aligned} \tag{4.20b}$$

$$\frac{1}{3} n\, a_o + \frac{1}{3} a_1 \sum X_i + \frac{1}{6} n\, c_{o,R} + \frac{1}{6} c_{1,R} \sum X_i = \frac{1}{3} \sum Y_i + \frac{1}{6} \sum e_{i,R} \tag{4.20c}$$

$$\frac{1}{3} a_o \sum X_i + \frac{1}{3} a_1 \sum X_i^2 + \frac{1}{6} c_{o,R} \sum X_i + \frac{1}{6} c_{1,R} \sum X_i^2 = \frac{1}{3} \sum X_i \mathrm{Y}_i + \frac{1}{6} \sum e_{i,R} X_i \tag{4.20d}$$

$$-\frac{1}{3} n\, a_o - \frac{1}{3} a_1 \sum X_i + \frac{1}{6} n\, c_{o,L} + \frac{1}{6} c_{1,L} \sum X_i = -\frac{1}{3} \sum Y_i + \frac{1}{6} \sum e_{i,L} \tag{4.20e}$$

$$-\frac{1}{3} a_o \sum X_i - \frac{1}{3} a_1 \sum X_i^2 + \frac{1}{6} c_{o,L} \sum X_i + \frac{1}{6} c_{1,L} \sum X_i^2 = -\frac{1}{3} \sum X_i Y_i + \frac{1}{6} \sum e_{i,L} X_i \tag{4.20f}$$

(4.20a)-(4.20f) eşitlikleri ile gösterilen 6*6'lık eşanlı denklemler, denk satırlı doğrusal sistem elde etmek amacıyla matrisler için satır operasyonları yapılarak sadeleştirilebilir. Matris işlemleri ve düzenlemelerden sonra (4.20a)-(4.20f) denklemleri aşağıdaki şekilde üç küme eşanlı denklem sistemlerine sadeleştirilebilir.

$$\begin{aligned} n a_o + a_1 \sum X_i &= \sum Y_i \\ a_o \sum X_i + a_1 \sum X_i^2 &= \sum X_i Y_i \end{aligned} \qquad a_0 \text{ ve } a_1 \text{ için çözülebilir.} \tag{4.21}$$

$$\begin{aligned} n c_{o,L} + c_{1,L} \sum X_i &= \sum e_{i,L} \\ c_{o,L} \sum X_i + c_{1,L} \sum X_i^2 &= \sum e_{i,L} X_i \end{aligned} \qquad c_{0,L} \text{ ve } c_{1L} \text{ için çözülebilir.} \tag{4.22}$$

$$\begin{aligned} n c_{o,R} + c_{1,R} \sum X_i &= \sum e_{i,R} \\ c_{o,R} \sum X_i + c_{1,R} \sum X_i^2 &= \sum e_{i,R} X_i \end{aligned} \qquad c_{0,R} \text{ ve } c_{1,R} \text{ için çözülebilir.} \tag{4.23}$$

Eğer regresyon modelinde simetrik üçgensel bulanık sayılar kullanılsaydı, bulanık regresyon katsayı tahminleri için hesaplamalar iki küme 2*2'lik eşanlı denklem sistemine indirgenebilirdi (Chang 2001).

4.3 Çoklu Melez Bulanık Regresyon Modeli

İki değişkenli regresyon modeli ilişkin katsayı tahminleri için hesaplamalar çoklu regresyon modeli için genişletilebilir. Çoklu melez doğrusal modelde; bağımlı değişken, iki veya daha fazla bağımsız değişken ile

$$\widetilde{Y}_i = (a_o, c_{o,L}, c_{o,R}) + (a_1, c_{1,L}, c_{1,R})X_\imath + (a_2, c_{2,L}, c_{2,R})X_2 + \ldots + (a_p, c_{p,L}, c_{p,R})X_p \tag{4.24}$$

ifadesinde görüldüğü gibi ilişkilendirilir.

Burada;

p	: Bağımsız değişken sayısı
X_p	: p.nci bağımsız değişken
$\left(a_p, \quad c_{p,L}, \quad c_{p,R}\right)$	: p.nci bağımsız değişkene ilişkin bulanık katsayı
$\left(a_0, \quad c_{0,L}, \quad c_{o,R}\right)$	: Sabit terim

olarak tanımlanmaktadır.

Çoklu regresyon çözümlemesinde normal denklemler; bulanık katsayılara ilişkin merkezler, sol genişlikler ve sağ genişlikler için normal denklemler şeklinde üç kısımda açıklanacaktır. Melez çoklu regresyon modeli için normal denklemler sistemi, basit çoklu regresyon modeline benzer biçimde tanımlanır.

$\left(X_{1.i}, \quad X_{2.i} \quad ,..., \quad X_{p.i} : \left(Y_i, \quad e_{i,l}, \quad e_{i,R}\right), \; i = 1 \,,..., \, n \;\right)$ veri seti olmak üzere bulanık katsayıların merkezi için normal denklemler:

$$
\begin{aligned}
& n\,a_o + \left(\sum_{i=1}^{n} X_{1,i}\right) a_1 + \left(\sum_{i=1}^{n} X_{2,i}\right) a_2 + \cdots + \left(\sum_{i=1}^{n} X_{p,i}\right) a_p = \sum_{i=1}^{n} Y_i, \\
& \left(\sum_{i=1}^{n} X_{1,i}\right) a_o + \left(\sum_{i=1}^{n} X_{1,i}^2\right) a_1 + \left(\sum_{i=1}^{n} X_{1,i}\, X_{2,i}\right) a_2 + \cdots + \left(\sum_{i=1}^{n} X_{1,i}\, X_{p,i}\right) a_p = \sum_{i=1}^{n} (X_{1,i}\, Y_i), \\
& \quad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\
& \left(\sum_{i=1}^{n} X_{p,i}\right) a_o + \left(\sum_{i=1}^{n} X_{p,i}\, X_{1,i}\right) a_1 + \left(\sum_{i=1}^{n} X_{p,i}\, X_{2,i}\right) a_2 + \cdots + \left(\sum_{i=1}^{n} X_{p,i}^2\right) a_p = \sum_{i=1}^{n} (X_{p,i}\, Y_i).
\end{aligned}
$$

Sol genişlikler için normal denklemler:

$$
\begin{aligned}
&n\,c_{o,L} + \left(\sum_{i=1}^{n} X_{1,i}\right)c_{1,L} + \left(\sum_{i=1}^{n} X_{2,i}\right)c_{2,L} + \cdots + \left(\sum_{i=1}^{n} X_{p,i}\right)c_{p,L} = \sum_{i=1}^{n} e_{i,L}\\
&\left(\sum_{i=1}^{n} X_{1,i}\right)c_{o,L} + \left(\sum_{i=1}^{n} X_{1,i}^{2}\right)c_{1,L} + \left(\sum_{i=1}^{n} X_{1,i}\,X_{2,i}\right)c_{2,L} + \cdots + \left(\sum_{i=1}^{n} X_{1,i}\,X_{p,i}\right)c_{p,L} = \sum_{i=1}^{n} (X_{1,i}\,e_{i,L}),\\
&\quad\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots\\
&\left(\sum_{i=1}^{n} X_{p,i}\right)c_{o,L} + \left(\sum_{i=1}^{n} X_{p,i}\,X_{1,i}\right)c_{1,L} + \left(\sum_{i=1}^{n} X_{p,i}\,X_{2,i}\right)c_{2,L} + \cdots + \left(\sum_{i=1}^{n} X_{p,i}^{2}\right)c_{p,L} = \sum_{i=1}^{n} (X_{p,i}\,e_{i,L}).
\end{aligned}
$$

Sağ genişlikler için normal denklemler:

$$
\begin{aligned}
&n\,c_{o,R} + \left(\sum_{i=1}^{n} X_{1,i}\right)c_{1,R} + \left(\sum_{i=1}^{n} X_{2,i}\right)c_{2,R} + \cdots + \left(\sum_{i=1}^{n} X_{p,i}\right)c_{p,R} = \sum_{i=1}^{n} e_{i,R},\\
&\left(\sum_{i=1}^{n} X_{1,i}\right)c_{o,R} + \left(\sum_{i=1}^{n} X_{1,i}^{2}\right)c_{1,R} + \left(\sum_{i=1}^{n} X_{1,i}\,X_{2,i}\right)c_{2,R} + \cdots + \left(\sum_{i=1}^{n} X_{1,i}\,X_{p,i}\right)c_{p,R} = \sum_{i=1}^{n} (X_{1,i}\,e_{i,R}),\\
&\quad\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots\\
&\left(\sum_{i=1}^{n} X_{p,i}\right)c_{o,R} + \left(\sum_{i=1}^{n} X_{p,i}\,X_{1,i}\right)c_{1,R} + \left(\sum_{i=1}^{n} X_{p,i}\,X_{2,i}\right)c_{2,R} + \cdots + \left(\sum_{i=1}^{n} X_{p,i}^{2}\right)c_{p,R} = \sum_{i=1}^{n} (X_{p,i}\,e_{i,R}).
\end{aligned}
$$

biçiminde elde edilir.

Üç kümedeki her bir denklem basit regresyon formülasyonu ile aynı olmasından dolayı çoklu melez bulanık en küçük kareler regresyonu için geleneksel regresyon programlarının kullanılması mümkün olmaktadır. Ayrıca, bulanık regresyon katsayılarının merkezleri, gözlenen bulanık verilerin merkezleri kullanılarak elde edilir. Bundan dolayı; merkez katsayı tahminleri, basit regresyon çözümlemesi sonucunda elde edilecek katsayı tahminleri ile aynı olacaktır. Bulanık regresyon katsayılarının sağ ve sol genişlikleri ise bulanık verilerin genişlikleri kullanılarak geleneksel regresyon programları ile kolaylıkla elde edilebilir (Chang 2001).

4.4 Melez Bulanık Regresyon Modeli İçin Güvenilirlik Ölçütleri

Melez bulanık regresyon modeline ilişkin bulanık katsayı tahminleri belirlendikten sonra melez regresyon denkleminin güvenilirliğini değerlendirmek amacıyla bazı ölçütler kullanılabilir. $\widetilde{Y}$ bulanık değişkenine ilişkin ortalama, $\overline{\widetilde{Y}}$, (4.1) ile verilen ağırlıklı bulanık toplam tanımına göre kesin bir sayı olarak elde edilir. Standart sapma $S_{\widetilde{y}}$ ise;

$$S_{\widetilde{y}} = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (\widetilde{Y}_i - \overline{\widetilde{Y}})^2} \tag{4.25}$$

eşitliğinden elde edilir. $S_{\widetilde{y}}$ değeri, bağımlı değişkene ilişkin verilerin yayılımı hakkında bilgi verecektir. (4.12) ile verilen iki değişkenli melez bulanık regresyon modeli için bağımlı değişkene ilişkin standart sapma,

$$S_{\widetilde{y}} = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} \left[\left(Y_i - \overline{\widetilde{Y}} \right)^2 + \frac{1}{3} \overline{\widetilde{Y}} \left(e_{i,R} - e_{i,L} \right) + \frac{1}{12} \left[\left(e_{i,R} \right)^2 + \left(e_{i,L} \right)^2 \right] \right]}$$

eşitliği kullanılarak hesaplanabilir (Chang 2001).

Tanım 4.5 Melez Korelasyon Katsayısı

Melez korelasyon katsayısı (HR),

$$HR = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} \left(\hat{Y}_i - \overline{\widetilde{Y}} \right)^2}{\sum_{i=1}^{n} \left(\widetilde{Y}_i - \overline{\widetilde{Y}} \right)^2}} \tag{4.26}$$

biçiminde tanımlanır.

(HR) değeri melez regresyon modelinin doğrusal bir fonksiyon biçimi ile verilere uyumunu değerlendirmek amacıyla kullanılır. (4.12) ile verilen iki değişkenli melez bulanık regresyon modeli için melez korelasyon katsayısı,

$$HR=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}\left\{\left(a_0+a_1X_i-\overline{\overline{\tilde{Y}}}\right)^2+\frac{1}{3}\overline{\overline{\tilde{Y}}}\left[\left(c_{0,R}+c_{1,R}X_i\right)-\left(c_{0,L}+c_{1,L}X_i\right)\right]+\frac{1}{12}\left[\left(c_{0,R}+c_{1,R}X_i\right)^2+\left(c_{0,L}+c_{1,L}X_i\right)^2\right]\right\}}{\sum_{i=1}^{n}\left\{\left(Y_i-\overline{\overline{\tilde{Y}}}\right)^2+\frac{1}{3}\overline{\overline{\tilde{Y}}}\left(e_{i,R}-e_{i,L}\right)+\frac{1}{12}\left[(e_{i,R})^2+(e_{i,L})^2\right]\right\}}}$$

ile hesaplanır.

Tanım 4.6 Tahminlerin Melez Standart Hatası

Tahminlerin melez standart hatası (HS_e)

$$HS_e=\sqrt{\frac{1}{n-p-1}\sum_{i=1}^{n}\left(\hat{Y}_i-\tilde{Y}_i\right)^2} \tag{4.27}$$

biçiminde tanımlanır ve bulanık gözlemlerin melez regresyon modeline uyumunu değerlendirmek amacıyla kullanılır. (4.12) ile verilen iki değişkenli melez bulanık regresyon modeli için melez standart hata,

$$HS_e=\sqrt{\frac{1}{n-p-1}}\left\{\sum_{i=1}^{n}\left(a_0+a_1X_i-Y_i\right)^2+\frac{1}{3}\sum_{i=1}^{n}\left(a_0+a_1X_i-Y_i\right)\left[\left(c_{0,R}+c_{1,R}X_i-e_{i,R}\right)\right.\right.$$
$$\left.\left.-\left(c_{0,L}+c_{1,L}X_i-e_{i,L}\right)\right]+\frac{1}{12}\sum_{i=1}^{n}\left[\left(c_{0,R}+c_{1,R}X_i-e_{i,R}\right)^2+\left(c_{0,L}+c_{1,L}X_i-e_{i,L}\right)^2\right]\right\}^{1/2}$$

biçiminde hesaplanır. HS_e değeri sıfır ile $S_{\tilde{Y}}$ arasında değişir. HS_e değeri küçüldükçe, bulanık gözlemlerin modele uyumu artar ve modelden gerçek değere daha yakın tahminler elde edilebilir. HS_e değeri $S_{\tilde{Y}}$'ye yaklaştıkça bulanık gözlemlerin modele uyumu azalır ve bu durumda diğer regresyon modellerine ihtiyaç duyulabilir (Chang 2001).

5. SİGORTA HASAR KARŞILIKLARI

Sigorta şirketleri müşterilerine yani poliçe sahiplerine, mevcut veya gelecekte ortaya çıkabilecek talepleri için ödeme taahhüdünde bulunurlar ve müşteriler de bu taahhütlerin zamanında ve düzgün şekilde karşılanmasını beklerler. Ancak sigortacılık temelde bir risk işi olduğu için, önceden öngörülemeyen risklerin ortaya çıkması durumunda şirketlerin kaynakları yükümlülüklerini karşılamada yetersiz kalabilmektedir. İşte bu nedenle, poliçe sahiplerinin menfaatlerini korumak amacıyla, sigorta şirketlerinin mali yapılarının yeterince güçlü olması gerekmektedir. (Acar 2005)

Hesap döneminin sonunda, sigorta şirketinin portföyünde bulunan poliçeler kapsamı içinde, meydana gelmiş birtakım hasarlar söz konusu olmakta; ancak bu hasarların varlığı ve maliyeti konusunda sigorta şirketinin herhangi bir bilgisi bulunmamaktadır. Primlerin ödenmesi sürecinde bir sürü alternatifler olmasına rağmen genellikle prim ödeme süreci hasarların ödeme sürecinden çok önce biter. Bu aşamada sigorta şirketinin gerçekleşmesini beklediği risklere ait hasarları ödemek için belli karşılıklar tutması ve bunları finansal tablolarına da yansıtması gerekmektedir.

Sigorta şirketlerinin, henüz ödenmemiş hasarlar ile meydana gelmiş ancak sigorta ve reasürans şirketinin bilgisi dahilinde olmayan hasarlar için ayrılması gereken karşılıklar, şirket bilançosunun pasif bölümünde yer alır ve şirketin gideri olarak işlem görür. Bu durumda sigorta şirketi, geçmiş yıllardaki deneyimlerine dayanarak, belli bir miktarı Muallak Hasar Karşılığı (Outstanding Claim Reserve) olarak ayırmaktadır. (Mutlu 2005)

Muallak Hasar Karşılığı, sigorta şirketi tarafından dönem sonu itibariyle henüz tasfiye edilmemiş, ancak eldeki bilgilere göre ödenmesi olası hasar miktarını, yaklaşık olarak yansıtacak şekilde ayrılmış karşılıktır. Sigortacılık tekniğinde muallak hasar karşılığı ile ilgili olan bir başka kavram ise "gerçekleşmiş ancak henüz bildirimi yapılmamış" (IBNR – **I**ncurred **B**ut **N**ot **R**eported) ve "gerçekleşmiş ancak bildirimi yetersiz veya eksik yapılmış" (IBNER – **I**ncurred **B**ut **N**ot **E**nough **R**eported) hasarlardır. Bu hasarlar bir mali yıl içerisinde gerçekleşmesine karşın ihbarı yapılmamış veya eksik yapılmış olan hasarlardır.

Tüm dünyadaki aktüerler hasar karşılıklarının güvenilir ve doğru tespiti için yöntemler geliştirmek üzere senelerdir çalışmaktadırlar. Hasarların hesaplanmasında, uygun karşılıkların belirlenmesinde kullanılabilecek birçok yöntem üretilmiştir. Yöntemlerin bazıları sıkça kullanılırken bazılarını sektörde nadiren görmek mümkün olmaktadır. Yöntemlerin çeşitliliğinin aksine karşılık tespitinde değişmez bir gerçek vardır ki o da ileri derecede matematiksel ve istatistiki uygulamaların gerekliliğidir. England and Verrall (2002) çalışmalarında belirttiği gibi, aktüeryal literatürde son yıllarda çok ilgi çeken hasar karşılığı ayırma yöntemleri; sadece en iyi tahminin değil aynı zamanda stokastik bakış açısından potansiyel zarar beklentisinin de belirlenmesi konularına yoğunlaşmıştır.

5.1 Hasar Karşılıklarının Hesaplanması

Hasar karşılıkları, sigorta şirketinin finansal istikrarı için çok önemli bir kavramdır. Bazı hasarların sigorta süresinin bitiminden çok seneler sonra dahi ihbar edilebilmesi ve şirkete bir yükümlülük olarak yansıması, hasarların ödeme zamanlarındaki sosyo-ekonomik koşulların poliçenin üretildiği koşullardan çok farklı olabilmesi şirketlerin hasarlar için ayırdıkları karşılıkların hesaplamasında çok dikkatli olmaları gerekliliğini doğurmuştur. (Yaman 2005)

Aktüeryal literatürde, hasar karşılıklarının tespit edilebilmesi için istatistiksel analizlere dayalı Chain Ladder, London Chain Ladder, London Pivot, Cape-Cod vb. birçok deterministik yöntem kullanılmaktadır. Tüm bu klasik yöntemlerin ortak özelliği eldeki verileri üçgen bir tablo bünyesinde gruplamaktır.

Bu kesimde, kesin gözlemler ile rezerv tahmini hesaplamaları için kullanılan klasik yöntemlerden, regresyon çözümlemesi yaklaşımına dayanan Chain Ladder ve London Chain Ladder yöntemi üzerinde durulacaktır.

5.1.1 Veri Üçgenleri

Hasar karşılıkları hesabı için Çizelge 5.1 ile verilen ve periyot izlenmesi açısından ayrıntılı bilgi içeren Birikimli Hasar Tutarları Üçgeninden yararlanılır. Veri üçgeninde satırlar hasarların gerçekleşme yılını, sütunlar ise hasarların gerçekleşme yılını takip eden ve sigorta şirketine bildirildiği yıla kadar geçen gelişme periyodunu göstermektedir.

Tablonun üst üçgeni, sigorta şirketinin önceki yıllarda ödenen birikimli hasar tutarlarını; alt üçgeni (boş kalan kısmı) ise gelecekte ödenmesi ve tahmin edilmesi gereken hasar tutarlarını verir.

Çizelge 5.1 Birikimli hasar tutarları üçgeni

	Gelişme Süreci (yıl)						
Hasar Gerçekleşme Yılı	**0**	**1**	**…**	***j***	**…**	***n*-1**	***n***
0	$Z_{0,0}$	$Z_{0,1}$	$\cdots$	$Z_{0,j}$	$\cdots$	$Z_{0,n-1}$	$Z_{0,n}$
1	$Z_{1,0}$	$Z_{1,1}$	$\cdots$	$Z_{1,j}$	$\cdots$	$Z_{1,n-1}$	
⋮	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$			
i	$Z_{i,0}$	$Z_{i,1}$	$\cdots$	$Z_{i,j}$			
⋮	$\vdots$	$\vdots$					
***n*-1**	$Z_{n-1,0}$	$Z_{n-1,1}$					
n	$Z_{n,0}$						

Çizelge 5.1 ile verilen birikimli hasar tutarları üçgeninde,

i : Hasarın gerçekleştiği baz alınan periyot (yıl), ($i = 0,1,\ldots,n$)

j : Hasarın gerçekleşme yılını izleyen, bildirim zamanına kadar geçen gelişme süreci ($j = 0,1,\ldots,n$)

$Z_{i,j}$: *i.* nci periyotta meydana gelmiş ve *j* periyot sonra bildirilmiş birikimli hasar tutarı

olarak ifade edilmektedir (Hossack *et al.* 1999).

Veri üçgenlerini kullanan hasar karşılığı ayırma yöntemlerinde mutlaka dikey, yatay, diyagonal veya bunların kombinasyonu şeklinde bir model bulunması gerekmektedir. Hücrelerin belli bir modeli göstermediği veri üçgenlerinde genellikle Chain Ladder yöntemi kullanılır.

5.1.2 Chain Ladder yöntemi

Chain Ladder yöntemine göre; her bir hücre arasındaki ilişkiyi gözlemleyebilmek için i.nci yılda meydana gelmiş ve j yıl sonra gözlenen birikimli hasar tutarı ile j+1 yıl sonra gözlenen birikimli hasar tutarı birbirine oranlanarak,

$$m_{i,j} = \frac{Z_{i,j+1}}{Z_{i,j}} \qquad i = 0,1,\ldots,n \quad , \quad j = 0,1,\ldots,n-1 \tag{5.1}$$

biçiminde bağlantı oranları (link ratios) elde edilir. Veri üçgeninde boş kalan gözeler, bağlantı oranları kullanılarak elde edilen ortalama değişim çarpanları yardımıyla tahmin edilir. Bu çarpanlar bağlantı oranlarının ortalaması şeklinde hesaplanacağı gibi j ve j+1 gelişme periyodu için sütunlardaki toplam hasarı bularak, birbirine oranlamak biçiminde

$$m_j = \frac{Z_{0,j+1} + Z_{1,j+1} + \ldots + Z_{n-j-1,j+1}}{Z_{0,j} + Z_{1,j} + \ldots + Z_{n-j-1,j}} = \frac{\sum_{i=0}^{n-j-1} Z_{i,j+1}}{\sum_{i=0}^{n-j-1} Z_{i,j}} \quad , \quad j = 0,1,\ldots,n\text{-}1 \tag{5.2}$$

eşitliğinde görüldüğü gibi hesaplanabilir. i yılında gerçekleşmiş hasarlar için ödenecek son hasar tutarının tahmini $\hat{Z}_{i,n}$,

$$\hat{Z}_{i,n} = Z_{i,n-i} \prod_{j=n-i}^{n-1} m_j \quad , \quad i = 0,1,\ldots,n \tag{5.3}$$

eşitliği kullanılarak tahmin edilir.

i yılında gerçekleşmiş hasarlar için ayrılması gereken rezerv miktarı ise,

$$\hat{R}_i = \hat{Z}_{i,n} - Z_{i,n-i} \tag{5.4}$$

eşitliği ile bulunur. Sonuç olarak toplam rezerv miktarı,

$$\begin{aligned} \hat{R} = \sum_{i=1}^{n} \hat{Z}_{i,n} - \sum_{i=1}^{n} Z_{i,n-i} &= \hat{R}_1 + \hat{R}_2 + \ldots + \hat{R}_n \\ &= \sum_{i=1}^{n} \hat{R}_i \end{aligned} \tag{5.5}$$

biçiminde elde edilir (Straub 1997).

Chain Ladder yöntemi uygulama kolaylığından ve anlaşılabilirliğinden dolayı en çok tercih edilen yöntemdir. Ancak bu yöntemin bazı dezavantajları vardır. Bunlar aşağıdaki gibi verilebilir.

- Sadece çarpanlardan oluşan bir yöntemdir. Eğer bir önceki gelişme yılına ilişkin hasar tutarı sıfır ise tahmini edilecek tutar da sıfır olacak, önceki değer çok küçük ya da çok büyük olduğunda ise tahmini hasar tutarı da benzer şekilde gelişecektir.

- Bağlantı oranlarının, belli bir dengeyi yakaladığı durumlarda doğru sonuç vermektedir. Yöntem ödeme sürecindeki gecikmelere karşı zayıftır (Yaman 2005).

5.1.3 London Chain Ladder yöntemi

Benjamin and Eagles (1986); Chain Ladder yöntemi üzerinde istatistiksel genişletmeler yaparak, birikimli hasar tutarları üzerinden en küçük kareler regresyonunun kullanımına dayanan London Chain Ladder yöntemini önermiştir.

London Chain Ladder yöntemine göre; *i*.nci yılda meydana gelmiş ve *j* yıl sonra gözlenen birikimli hasar tutarı ile *j*+1 yıl sonra gözlenen birikimli hasar tutarı arasında doğrusal bir ilişkinin bulunduğu yaklaşımı ile oluşturulacak basit doğrusal regresyon modeli:

$$Z_{i,j+1} = b_j + c_j Z_{i,j} + \varepsilon_I \tag{5.6}$$

biçiminde gösterilir. Rezerv hesaplamalarında sıklıkla kullanılan bir yöntem olan Chain Ladder yöntemi, sabit katsayısı olmayan regresyon modeli için ($b_j = 0$) London Chain Ladder yönteminin özel bir durumudur.

Regresyon modelindeki $\hat{b}_j$ ve $\hat{c}_j$ katsayı tahminleri, birikimli hasar tutarları üçgeninden faydalanılarak, $\{(Z_{i,j+1}; Z_{i,j})\}_{i \geq j}$ gözlem çiftleri yardımıyla,

$$\begin{aligned} n.b_j + \left(\sum Z_{i,j}\right).c_j &= \sum Z_{i,j+1} \\ \left(\sum Z_{i,j}\right).b_j + \left(\sum Z_{i,j}{}^2\right).c_j &= \sum \left(Z_{i,j}.Z_{i,j+1}\right) \end{aligned} \tag{5.7}$$

biçiminde verilen normal denklem sistemi çözülerek elde edilir.

i yılında gerçekleşmiş hasarlar için ödenecek son hasar tutarının tahmini $\hat{Z}_{i,n}$,

$$\hat{Z}_{i,n} = \hat{b}_{n-1} + \hat{c}_{n-1}\left\{ \ldots \hat{b}_{i+2} + \hat{c}_{i+2}\left[\hat{b}_{i+1} + \hat{c}_{i+1}\left(\hat{b}_{i} + \hat{c}_{i} Z_{i,i} \right) \right] \right\} \tag{5.8}$$

biçiminde elde edilir.

i.nci yılda meydana gelmiş hasarlar için ayrılması gereken rezerv miktarı, tahmin edilen birikimli son hasar tutarı tahmini ile bildirilen birikimli hasar tutarı arasındaki farka eşit olacaktır. O halde i yılı için rezerv miktarı,

$$\hat{R}_i = \hat{Z}_{i,n} - Z_{i,n-i} \tag{5.9}$$

eşitliği ile belirlenir. Sonuç olarak, toplam rezerv miktarı,

$$\hat{R} = \sum_{i=1}^{n} \hat{R}_i \tag{5.10}$$

biçiminde elde edilir (Benjamin and Eagles 1986).

6. SİGORTA HASAR KARŞILIKLARININ TAHMİNİNDE MELEZ BULANIK REGRESYON ÇÖZÜMLEMESİ

6.1 Giriş

Hasar karşılıkları çeşitli istatistiksel yöntemler doğrultusunda hesaplansa da, gerçek dünyadaki etkenler ve hesaplama aşamasındaki belirsizliği artıran faktörlerin varlığı oluşturulan model üzerinden gerçekten çok uzak tahminler elde edilmesine yol açabilmektedir. Bu nedenle, birçok aktüeryal ve finansal problemin doğasında var olan belirsizlik durumunda; uygun ve güvenilir veriler elde olmadığı zaman daha gerçeğe yakın sonuçlar elde etmek için bulanık küme teorisi etkili bir araç haline gelmektedir.

Hesaplama aşamasındaki belirsizliği artıran faktörler aşağıdaki sıra ile incelenebilir (Lyons 1984).

i. **Hasar Ödeme Süreci:** Hasar ödeme sürecinin istikrarı hesaplamalarda çoğunlukla kullanılan bir varsayımdır. Ancak uygulamada bu varsayım nadiren gerçekleşir ve

- Hasarların gerçekleşme zamanlaması
- Hasar değerlendirmesine yönelik masraflar
- Ödeme modelindeki değişiklikler
- Hasar şiddeti
- Hasar frekansı
- Kısmi ödeme opsiyonları ve kısmi ödeme modellerindeki değişiklik
- Özel ödemeler
- Sıfır hasarlar ve hasar önlemeye yönelik adımlar
- Yüksek hasarlar

biçimindeki faktörler belirsizliği artıracak yönde gelişir.

ii. **İşin Niteliği ve Kapsamı:** Zaman içinde, sigorta şirketinin portföyünün niteliği ve kapsamında belirsizliği artıracak yönde gelişen faktörler hasar karşılıkları hesaplamalarında dikkatli olunması gereğini doğurur. Bu faktörler,

- Portföy hacmindeki değişiklik
- Portföy bünyesindeki faaliyetlerin birleşimindeki değişiklik
- Poliçe şartlarındaki değişiklik

olarak sıralanabilir.

iii. **Veri Özellikleri:** Eldeki veriler bazı nedenlerden dolayı hesaplamalarda kullanılmayacak kadar yetersiz ve hatalı olabilir. Bu nedenler ise

- Bilgisayar sistemi
- Verilerin toplanabilirliği
- Toplanan verilerin güvenilirliği
- Operasyonel işlerdeki birikme
- Verilerin heterojenliği

biçiminde sıralanabilir.

iv. **Dış Etkenler:** Bu etkenler sigortacının kontrolü dışında gelişen etkenlerdir. Rezerv hesaplamalarında belirsizliği artıracak en önemli dış faktörler enflasyon ve yatırım gelirlerindeki belirsizliktir.

Dış etkenlerin birçoğunu istatistiksel olarak ölçmek ve değerlendirmek mümkün olamamaktadır. Bu durumda karşılık hesaplamalarında dış etkenler genellikle ayrı bir emniyet marjı olarak yer alır. Bazı etkenleri ise istatistik teorisi ile açıklamak mümkün olduğu halde eldeki verilerin yetersizliği istatistiki hesaplamayı güç hale getirmektedir. Hesaplamalarda belirsizliğe yol açan dış etkenler,

- Mevzuat değişiklikleri
- Sosyal çevre
- İklim
- Para birimi hareketleri

biçiminde sıralanabilir.

v. **Reasürans Anlaşmaları:** Reasürans anlaşmaları göz önüne alındığında, sigorta şirketinin kendi içerisinde ve reasürans şirketleri açısından belirsizliği artıracak faktörler,

- Sigorta Şirketi
- Net sorumlulukların hesaplanması
- Katatstrofik reasüranslar ve büyük hasarlar

- Reasürans Şirketleri
- Reasürans şirketi tarafından derlenen verilerin güvenilirliği
- Hasar ödemelerindeki gecikmeler
- Değerleme yöntemlerindeki farklılık

biçiminde verilebilir (Lyons 1984).

İlk kez Andrés and Terceño (2003a) çalışmasında, gerçekleşmiş fakat sigorta şirketine bildirilmemiş olan hasarlar için ayrılması gereken karşılıkların hesaplanmasında bulanık küme teorisini ve Tanaka ve Ishibuchi (1992)'de önerilen bulanık regresyon çözümlemesini kullanmıştır.

Bu bölümde hasar karşılıklarının tahmini için önerilen melez bulanık regresyon modeli ele alınacak, daha sonra her bir modelde bağımlı değişkene ilişkin gözlemlerin, bir simetrik üçgensel bulanık sayı olarak modelde yer alması amacıyla verilerin bulanıklaştırılması (fuzzification) üzerinde durulacaktır.

6.2 Sigorta Hasar Karşılıklarının Tahmini İçin Önerilen Melez Bulanık Regresyon Modeli

Ayrılacak rezerv tahmini için Benjamin and Eagles (1986) tarafından önerilen ve geleneksel en küçük kareler regresyonunu kullanan London Chain Ladder (LCL) yönteminin, melez bulanık en küçük kareler regresyon çözümlemesi kullanılarak genişletilmesi, Çizelge 5.1 ile verilen veri üçgeni ile sağlanan kısıtlı bilginin daha etkin kullanılmasına olanak verecektir. Ayrıca hasar karşılığı tahmini için oluşturulacak bulanık regresyon modelindeki bulanık katsayıların en küçük kareler uygunluk kriteri kullanılarak tahmin edilmesi, tahmin edicilerde aranan yansızlık ve minimum varyanslılık gibi teorik temellerin sağlanabilmesi açısından önem arz etmektedir.

Bu doğrultuda, *i*.nci yılda meydana gelmiş ve *j* yıl sonra gözlenen birikimli hasar tutarı ile *j*+1 yıl sonra gözlenen birikimli hasar tutarı arasında

$$\widetilde{Z}_{i,j+1} = \widetilde{b}_j + \widetilde{c}_j Z_{i,j} \tag{6.1}$$

biçiminde bir bulanık doğrusal ilişkinin bulunduğu varsayımı altında; melez bulanık regresyon çözümlemesi yardımıyla tahmin edilecek $\widetilde{b}_j = (b_{jC}, b_{jR})$ ve $\widetilde{c}_j = (c_{jC}, c_{jR})$ simetrik üçgensel bulanık regresyon katsayıları için, $\widetilde{Z}_{i,j+1}$,

$$\begin{aligned} \widetilde{Z}_{i,j+1} &= (Z_{(i,j+1)C}, Z_{(i,j+1)R}) = (b_{jC}, b_{jR}) + (c_{jC}, c_{jR}) Z_{i,j} \\ &= (b_{jC} + c_{jC} Z_{i,j}, b_{jR} + c_{jR} Z_{i,j}) \end{aligned} \tag{6.2}$$

biçiminde gösterilebilir. Burada,

b_{jC} : $\widetilde{b}_j$ bulanık katsayısının merkezi

b_{jR} : $\widetilde{b}_j$ bulanık katsayısının sağ ve sol genişliği

c_{jC} : $\tilde{c}_j$ bulanık katsayısının merkezi

c_{jR} : $\tilde{c}_j$ bulanık katsayısının sağ ve sol genişliği

$Z_{(i,j+1)C}$: $\tilde{Z}_{i,\,j+1}$ bulanık hasar tutarının merkezi

$Z_{(i,j+1)R}$: $\tilde{Z}_{i,\,j+1}$ bulanık hasar tutarının sağ ve sol genişliği

olarak tanımlanır.

$\tilde{b}_j$ ve $\tilde{c}_j$ katsayılarının tahminleri sırasıyla $\hat{\tilde{b}}_j = (\hat{b}_{jC}, \hat{b}_{jR})$ ve $\hat{\tilde{c}}_j = (\hat{c}_{jC}, \hat{c}_{jR})$ olmak üzere, (4.21) – (4.23) eşitlikleri ile verilen normal denklem sistemlerinin $\hat{\tilde{b}}_j$ ve $\hat{\tilde{c}}_j$ simetrik üçgensel bulanık katsayıları için yeniden düzenlenmesiyle, bulanık katsayıların merkezi ve genişlikleri için normal denklemler:

$$\left.\begin{aligned} n.b_{jC} + \left(\sum Z_{i,j}\right).c_{jC} &= \sum Z_{(i,j+1)C} \\ \left(\sum Z_{i,j}\right).b_{jC} + \left(\sum Z_{i,j}{}^2\right).c_{jC} &= \sum\left(Z_{i,j}.Z_{(i,j+1)C}\right) \end{aligned}\right\} \quad b_{jC} \text{ ve } c_{jC} \text{ için çözülebilir.}$$

$$\left.\begin{aligned} n.b_{jR} + \left(\sum Z_{i,j}\right).c_{jR} &= \sum Z_{(i,j+1)R} \\ \left(\sum Z_{i,j}\right).b_{jR} + \left(\sum Z_{i,j}{}^2\right).c_{jR} &= \sum\left(Z_{i,j}.Z_{(i,j+1)R}\right) \end{aligned}\right\} \quad b_{jR} \text{ ve } c_{jR} \text{ için çözülebilir.} \tag{6.3}$$

biçiminde elde edilir. Burada,

$\hat{b}_{jC}$: $\hat{\tilde{b}}_j$ bulanık katsayı tahmininin merkezi

$\hat{b}_{jR}$: $\hat{\tilde{b}}_j$ bulanık katsayı tahmininin sağ ve sol genişliği

$\hat{c}_{jC}$: $\hat{\tilde{c}}_j$ bulanık katsayı tahmininin merkezi

$\hat{c}_{jR}$: $\hat{\tilde{c}}_j$ bulanık katsayı tahmininin sağ ve sol genişliği

olarak tanımlanır.

(6.3) eşitliği ile verilen bulanık katsayı tahminlerinin merkez değerlerine ilişkin normal denklem sistemi, (5.7) eşitliği ile London Chain Ladder yöntemi için verilen normal denklem sistemi ile aynı olduğu görülmektedir. Bunun sonucunda, London Chain Ladder yöntemi ile her bir gelişme periyodu için oluşturulacak regresyon modellerine ilişkin katsayılar, melez bulanık regresyon modellerine ilişkin bulanık katsayıların merkez değerleri ile tamamen aynı olacaktır.

i yılında gerçekleşmiş hasarlar için ödenecek son hasar tutarının tahmini $\hat{\tilde{Z}}_{i,n}$, (5.8) ile verilen eşitliğe benzer bir biçimde fakat bulanık aritmetik kullanılarak,

$$\hat{\tilde{Z}}_{i,n} = \hat{\tilde{b}}_{n-1} + \hat{\tilde{c}}_{n-1}\left\{ \ldots \hat{\tilde{b}}_{i+2} + \hat{\tilde{c}}_{i+2}\left[\hat{\tilde{b}}_{i+1} + \hat{\tilde{c}}_{i+1}\left(\hat{\tilde{b}}_{i} + \hat{\tilde{c}}_{i} Z_{i,i} \right)\right]\right\} \tag{6.4}$$

yardımıyla elde edilir.

Burada, $\hat{\tilde{Z}}_{i,n}$'in simetrik üçgensel bulanık sayı olamayacağı açıktır. Fakat iki simetrik üçgensel bulanık sayının çarpımının, (2.10)'daki eşitlik kullanılarak yaklaşık simetrik üçgensel bir bulanık sayı olarak elde edilebileceği düşüncesiyle $\hat{\tilde{Z}}_{(i,n)} \approx (\hat{Z}_{(i,n)C}, \hat{Z}_{(i,n)R})$ olarak belirlenir. Burada,

$\hat{Z}_{(i,n)C}$: $\hat{\tilde{Z}}_{i,n}$ bulanık hasar tutarı tahmininin merkezi
$\hat{Z}_{(i,n)R}$: $\hat{\tilde{Z}}_{i,n}$ bulanık hasar tutarı tahmininin sağ ve sol genişliği

olarak tanımlanır.

O halde, *i*.nci yılda meydana gelmiş hasarlar için ayrılması gereken bulanık rezerv miktarı, $\hat{\tilde{R}}_i = \left(\hat{R}_{iC}, \hat{R}_{iR}\right)$ için,

$$\hat{\tilde{R}}_i = \hat{\tilde{Z}}_{i,n} - Z_{i,n-i} = (\hat{Z}_{(i,n)C} - Z_{i,n-i}, \hat{Z}_{(i,n)R}) \tag{6.5}$$

olarak elde edilir. Burada,

$\hat{R}_{iC}$: *i*.nci yıl için $\hat{\tilde{R}}_i$ bulanık rezerv miktarının merkezi

$\hat{R}_{iR}$: *i*.nci yıl için $\hat{\tilde{R}}_i$ bulanık rezerv miktarının sağ ve sol genişliği

olarak tanımlanır.

Sonuç olarak, toplam bulanık hasar karşılığı, her bir yıl için hesaplanan bulanık rezerv miktarlarının toplamına eşit olur. Yani $\hat{\tilde{R}} = (\hat{R}_C, \hat{R}_R)$,

$$\hat{\tilde{R}} = \sum_{i=1}^{n} \hat{\tilde{R}}_i = (\sum_{i=1}^{n} \hat{R}_{iC}, \sum_{i=1}^{n} \hat{R}_{iR}) \tag{6.6}$$

biçiminde elde edilir.

6.3 Gözlemlerin Bulanıklaştırılması

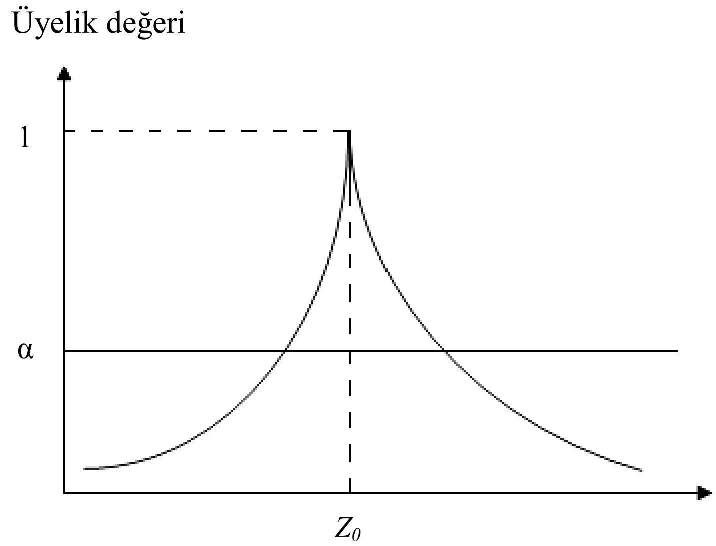
Melez bulanık regresyon modeli göz önüne alındığında, bağımlı değişkene ilişkin her bir gözlemin bulanıklaştırılarak (fuzzification), bir bulanık değer olarak modelde yer alması amacıyla; bağımlı değişkenin aldığı değerlere karşılık gelen üyelik fonksiyonu, güven aralıkları tanımından yola çıkarak belirlenir.

Bağımlı değişkenin Z_0 gibi bir özel değeri için (1- γ)100% güven aralığı,

$$\left[\hat{Z}_o - t_{\gamma/2} S_{Z_o - \hat{Z}_o} \; , \; \hat{Z}_o + t_{\gamma/2} S_{Z_o - \hat{Z}_o} \right] \tag{6.7}$$

biçiminde tanımlanır.

(6.7) ile verilen güven aralığı γ'nın bir fonksiyonu olarak ele alınabilir. Bu durumda, α üyelik derecesini göstermek üzere, γ = α alınarak, $0.01 \leq \alpha \leq 1$ için (n-2) serbestlik dereceli t dağılımının tablo değerleri kullanılarak, Y_0 için üyelik fonksiyonu Şekil 6.1'de gösterildiği gibi elde edilmiş olur. α-kesim değeri arttıkça Z_0 için oluşturulan bulanık aralık daralacak, α=1 için bulanıklık ortadan kalkarak Z_0'ın kesin değerine karşılık gelecektir (Buckley 2004).



Şekil 6.1 Bağımlı değişkenin Z_0 gibi bir değeri için üyelik fonksiyonu

6.4 Uygulama

Bu kesimde, beş yıllık gelişme süreci için verilen birikimli hasar tutarları üçgeni kapsamında, sigorta şirketinin ayırması gereken bulanık rezerv miktarının belirlenmesinde, kesim (6.2)'de önerilen melez bulanık doğrusal regresyon modeli ile elde edilen tahmini bulanık rezerv miktarı, kesim (5.1.2) ve kesim (5.1.3)'de verilen London Chain Ladder ve Chain Ladder yöntemlerinden elde edilen sonuçlar ile karşılaştırılacaktır. Çizelge 6.1 ile sunulan veri üçgeni, Straub (1997) çalışmasından alınmıştır.

Hasar karşılığı tahmininde, her bir gelişme periyodu için (6.1) eşitliği ile verilen iki değişkenli melez bulanık doğrusal regresyon modelinin ayrı ayrı belirlenmesi ile birlikte her bir modelde yer alan bağımlı değişkene ilişkin gözlemler, $\alpha = 0.5$ kesimi için bulanıklaştırılacak ve birer bulanık aralık olarak modelde yer alacaktır. Melez bulanık regresyon modelindeki bulanık regresyon katsayılarının merkezi ve genişlikleri, SPSS paket programı kullanılarak elde edilecektir.

Çizelge 6.1 Beş yıllık gelişme süreci için birikimli hasar tutarları üçgeni

	Gelişme Süreci (yıl)					
Hasar Gerçekleşme Yılı	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
0	125	211	340	490	613	613
1	140	232	374	449	539	
2	150	258	392	549		
3	150	252	413			
4	125	213				
5	130					

Sigorta şirketinin önceki yıllarda ödediği birikimli hasar tutarları kullanılarak gelecekte ödenmesi ve tahmin edilmesi gereken hasar tutarları melez bulanık regresyon modeli yardımıyla belirlenmesi ile birlikte Çizelge 6.1 ile verilen veri üçgeninde bulunan boş gözeler doldurulmuş olur. Bunun sonucunda, her yıla ait bulunan fark değerlerinin toplamı sigorta şirketinin ayırması gereken hasar karşılığı tutarını verecektir.

Örneğin, *i*.nci yıl meydana gelmiş ve aynı yıl ($j = 0$) ödenen hasar tutarı ile 1 yıl sonra gözlenen birikimli hasar tutarı arasında $\widetilde{Z}_{i,1} = \widetilde{b}_0 + \widetilde{c}_0 Z_{i,0}$ biçiminde bir bulanık doğrusal ilişkinin bulunduğu varsayımı altında, melez bulanık en küçük kareler doğrusal regresyon çözümlemesi kullanılarak bulanık katsayı tahminleri, (6.2) ile verilen eşitlikte $j = 0$ alınarak,

$$\begin{aligned}\widetilde{Z}_{i,1} &= (Z_{(i,1)C}, Z_{(i,1)R}) = (b_{0C}, b_{0R}) + (c_{0C}, c_{0R}) Z_{i,0} \\ &= (b_{0C} + c_{0C} Z_{i,0}, b_{0R} + c_{0R} Z_{i,0})\end{aligned} \qquad (6.8)$$

regresyon denklemi yardımıyla elde edilir.

(6.8) ile verilen melez bulanık regresyon modelinde katsayı tahminleri için (6.3) ile verilen normal denklem sistemlerinde $j = 0$ için,

$$\begin{aligned}& n.b_{0C} + \left(\sum Z_{i,0}\right).c_{0C} = \sum Z_{(i,1)C} \\ & \left(\sum Z_{i,0}\right).b_{0C} + \left(\sum Z_{i,0}^{\ 2}\right).c_{0C} = \sum \left(Z_{i,0}.Z_{(i,1)C}\right)\end{aligned} \qquad b_{0C} \text{ ve } c_{0C} \text{ için çözülebilir}$$

$$\begin{aligned}& n.b_{0R} + \left(\sum Z_{i,0}\right).c_{0R} = \sum Z_{(i,1)R} \\ & \left(\sum Z_{i,0}\right).b_{0R} + \left(\sum Z_{i,0}^{\ 2}\right).c_{0R} = \sum \left(Z_{i,0}.Z_{(i,1)R}\right)\end{aligned} \qquad b_{0R} \text{ ve } c_{0R} \text{ için çözülebilir}$$

biçiminde oluşturulan iki küme eşanlı normal denklem sistemleri çözülür.

Belirlenen regresyon katsayı tahminleri sonucunda; *i*.nci yıl meydana gelmiş ve aynı yıl (*j*=0) ödenen hasar tutarı ile 1 yıl sonra gözlenen birikimli hasar tutarı için melez bulanık regresyon modeli μ=0.0 kesimi için

$$\hat{\tilde{Z}}_{i,1} = (-1.619,\ 3.980) + (1.702,\ -0.003)Z_{i,0} \tag{6.9}$$

biçiminde elde edilir. Ayrıca, her μ kesimi için genişlikler simetrik üçgensel üyelik fonksiyonlarına göre hesaplanılabilir. Örneğin, μ = 0.7 kesimi için (6.9) ile verilen melez bulanık regresyon modelinde katsayılara ilişkin genişlikler,

$(1-\mu)b_{0R} =$ (1-0.7) 3.980 = 1.194

$(1-\mu)c_{0R} =$ (1-0.7) (-0.003) = -0.0009

olarak belirlenir.

O halde (6.9) ile verilen μ=0.0 kesimi için melez bulanık regresyon modeli, μ = 0.7 kesimi için yeniden düzenlendiğinde,

$$\hat{\tilde{Z}}_{i,1} = (-1.619,\ 1.194) + (1.702,\ -0.0009)Z_{i,0} \tag{6.10}$$

olarak elde edilir.

Her bir gelişme periyoduna ilişkin diğer melez bulanık regresyon modelleri de μ = 0.0, 0.1, 0.2, … , 0.9, 1.0 kesimleri için aynı şekilde elde edildiğinde Çizelge 6.2 ile verilen sonuçlara ulaşılmıştır.

Çizelge 6.2 µ = (0.0 – 1.0) için melez regresyon modelleri ve bulanık rezerv miktarı

µ = 0.0	**Regresyon Modeli**		**Ayrılacak Rezerv Miktarı**	
Gelişme Süreci (Yıl) *j*	$\hat{\tilde{b}}_j$	$\hat{\tilde{c}}_j$	**Hasar Gerçekleşme Yılı (*i*)**	$\hat{\tilde{R}}_i$
0	(-1.619, 3.980)	(1.702, -0.003)	**0**	0
1	(61.398, 20.924)	(1,336, -0.026)	**1**	0
2	(189.894, 131,559)	(0.830, -0.133)	**2**	(129.29, 20.33)
3	(-44.743, 14.845)	(1.317, 0.01)	**3**	(243.80, 121.09)
4	(0, 0)	(1, 0)	**4**	(370.53, 149.11)
			5	(463.23, 152.68)
			$\hat{\tilde{R}}$	**(1206.85, 443.21)**

µ = 0.1	**Regresyon Modeli**		**Ayrılacak Rezerv Miktarı**	
Gelişme Süreci (Yıl) *j*	$\hat{\tilde{b}}_j$	$\hat{\tilde{c}}_j$	**Hasar Gerçekleşme Yılı (*i*)**	$\hat{\tilde{R}}_i$
0	(-1.619, 3.582)	(1.702, -0.0027)	**0**	0
1	(61.398, 18.832)	(1,336, -0.0234)	**1**	0
2	(189.894, 118.403)	(0.830, -0.1197)	**2**	(129.29, 18.30)
3	(-44.743, 13.360)	(1.317, 0.009)	**3**	(243.80, 108.98)
4	(0, 0)	(1, 0)	**4**	(370.53, 134.20)
			5	(463.23, 137.41)
			$\hat{\tilde{R}}$	**(1206.85, 398.89)**

µ = 0.2	**Regresyon Modeli**		**Ayrılacak Rezerv Miktarı**	
Gelişme Süreci (Yıl) *j*	$\hat{\tilde{b}}_j$	$\hat{\tilde{c}}_j$	**Hasar Gerçekleşme Yılı (*i*)**	$\hat{\tilde{R}}_i$
0	(-1.619, 3.184)	(1.702, -0.0024)	**0**	0
1	(61.398, 16.739)	(1,336, -0.0208)	**1**	0
2	(189.894, 105.247)	(0.830, -0.1064)	**2**	(129.29, 16.26)
3	(-44.743, 11.876)	(1.317, 0.008)	**3**	(243.80, 96.87)
4	(0, 0)	(1, 0)	**4**	(370.53, 119.29)
			5	(463.23, 122.14)
			$\hat{\tilde{R}}$	**(1206.85, 354.56)**

Çizelge 6.2 (Devam)

μ = 0.3	**Regresyon Modeli**		**Ayrılacak Rezerv Miktarı**	
Gelişme Süreci (Yıl) j	$\hat{\tilde{b}}_j$	$\hat{\tilde{c}}_j$	**Hasar Gerçekleşme Yılı (i)**	$\hat{\tilde{R}}_i$
0	(-1.619, 2.786)	(1.702, -0.0021)	**0**	0
1	(61.398, 14.647)	(1,336, -0.0182)	**1**	0
2	(189.894, 92.091)	(0.830, -0.0931)	**2**	(129.29, 14.23)
3	(-44.743, 10.391)	(1.317, 0.007)	**3**	(243.80, 84.76)
4	(0, 0)	(1, 0)	**4**	(370.53, 104.38)
			5	(463.23, 106.88)
			$\hat{\tilde{R}}$	**(1206.85, 310.25)**

μ = 0.4	**Regresyon Modeli**		**Ayrılacak Rezerv Miktarı**	
Gelişme Süreci (Yıl) j	$\hat{\tilde{b}}_j$	$\hat{\tilde{c}}_j$	**Hasar Gerçekleşme Yılı (i)**	$\hat{\tilde{R}}_i$
0	(-1.619, 2.388)	(1.702, -0.0018)	**0**	0
1	(61.398, 12.554)	(1,336, -0.0156)	**1**	0
2	(189.894, 78.935)	(0.830, -0.0798)	**2**	(129.29, 12.20)
3	(-44.743, 8.907)	(1.317, 0.006)	**3**	(243.80, 72.65)
4	(0, 0)	(1, 0)	**4**	(370.53, 89.47)
			5	(463.23, 91.61)
			$\hat{\tilde{R}}$	**(1206.85, 265.93)**

μ = 0.5	**Regresyon Modeli**		**Ayrılacak Rezerv Miktarı**	
Gelişme Süreci (Yıl) j	$\hat{\tilde{b}}_j$	$\hat{\tilde{c}}_j$	**Hasar Gerçekleşme Yılı (i)**	$\hat{\tilde{R}}_i$
0	(-1.619, 1.99)	(1.702, -0.0015)	**0**	0
1	(61.398, 10.462)	(1,336, -0.013)	**1**	0
2	(189.894, 65.779)	(0.830, -0.0665)	**2**	(129.29, 10.16)
3	(-44.743, 7.422)	(1.317, 0.005)	**3**	(243.80, 60.54)
4	(0, 0)	(1, 0)	**4**	(370.53, 74.56)
			5	(463.23, 76.34)
			$\hat{\tilde{R}}$	**(1206.85, 221.60)**

Çizelge 6.2 (Devam)

μ = 0.6	Regresyon Modeli		Ayrılacak Rezerv Miktarı	
Gelişme Süreci (Yıl) *j*	$\hat{\tilde{b}}_j$	$\hat{\tilde{c}}_j$	**Hasar Gerçekleşme Yılı (*i*)**	$\hat{\tilde{R}}_i$
0	(-1.619, 1.592)	(1.702, -0.0012)	**0**	0
1	(61.398, 8.370)	(1,336, -0.0104)	**1**	0
2	(189.894, 52.624)	(0.830, -0.0532)	**2**	(129.29, 8.13)
3	(-44.743, 5.938)	(1.317, 0.004)	**3**	(243.80, 48.44)
4	(0, 0)	(1, 0)	**4**	(370.53, 59.64)
			5	(463.23, 61.07)
			$\hat{\tilde{R}}$	**(1206.85, 177.28)**

μ = 0.7	Regresyon Modeli		Ayrılacak Rezerv Miktarı	
Gelişme Süreci (Yıl) *j*	$\hat{\tilde{b}}_j$	$\hat{\tilde{c}}_j$	**Hasar Gerçekleşme Yılı (*i*)**	$\hat{\tilde{R}}_i$
0	(-1.619, 1.194)	(1.702, -0.0009)	**0**	0
1	(61.398, 6.277)	(1,336, -0.0078)	**1**	0
2	(189.894, 39.468)	(0.830, -0.0399)	**2**	(129.29, 6.10)
3	(-44.743, 4.453)	(1.317, 0.003)	**3**	(243.80, 36.33)
4	(0, 0)	(1, 0)	**4**	(370.53, 44.73)
			5	(463.23, 45.80)
			$\hat{\tilde{R}}$	**(1206.85, 132.96)**

μ = 0.8	Regresyon Modeli		Ayrılacak Rezerv Miktarı	
Gelişme Süreci (Yıl) *j*	$\hat{\tilde{b}}_j$	$\hat{\tilde{c}}_j$	**Hasar Gerçekleşme Yılı (*i*)**	$\hat{\tilde{R}}_i$
0	(-1.619, 0.796)	(1.702, -0.0006)	**0**	0
1	(61.398, 4.185)	(1,336, -0.0052)	**1**	0
2	(189.894, 26.312)	(0.830, -0.0266)	**2**	(129.29, 4.07)
3	(-44.743, 2.970)	(1.317, 0.002)	**3**	(243.80, 24.22)
4	(0, 0)	(1, 0)	**4**	(370.53, 29.82)
			5	(463.23, 30.53)
			$\hat{\tilde{R}}$	**(1206.85, 88.64)**

Çizelge 6.2 (Devam)

μ = 0.9	**Regresyon Modeli**		**Ayrılacak Rezerv Miktarı**	
Gelişme Süreci (Yıl) *j*	$\hat{\tilde{b}}_j$	$\hat{\tilde{c}}_j$	**Hasar Gerçekleşme Yılı (*i*)**	$\hat{\tilde{R}}_i$
0	(-1.619, 0.398)	(1.702, -0.0003)	**0**	0
1	(61.398, 2.092)	(1,336, -0.0026)	**1**	0
2	(189.894, 13.156)	(0.830, -0.0133)	**2**	(129.29, 2.03)
3	(-44.743, 1.484)	(1.317, 0.001)	**3**	(243.80, 12.11)
4	(0, 0)	(1, 0)	**4**	(370.53, 14.91)
			5	(463.23, 15.27)
			$\hat{\tilde{R}}$	**(1206.85, 44.32)**

μ = 1.0	**Regresyon Modeli**		**Ayrılacak Rezerv Miktarı**	
Gelişme Süreci (Yıl) *j*	$\hat{\tilde{b}}_j$	$\hat{\tilde{c}}_j$	**Hasar Gerçekleşme Yılı (*i*)**	$\hat{\tilde{R}}_i$
0	(-1.619, 0)	(1.702, 0)	**0**	0
1	(61.398, 0)	(1,336, 0)	**1**	0
2	(189.894, 0)	(0.830, 0)	**2**	(129.29, 0)
3	(-44.743, 0)	(1.317, 0)	**3**	(243.80, 0)
4	(0, 0)	(1, 0)	**4**	(370.53, 0)
			5	(463.23, 0)
			$\hat{\tilde{R}}$	**(1206.85, 0)**

Çizelge 6.2'de görüldüğü gibi μ = 0.0 kesimi için bulanık rezerv miktarı, (1206.85, 443.21) olarak bulunmuştur. Bu değer, sigorta şirketinin bilançosunun pasif kısmına yazması gereken IBNR için bulunan muallak hasar karşılığının tahmini bulanık değeridir. Burada 1206.85 değeri bulanık rezerv miktarının merkezini, 443.21 ise bulanık rezerv miktarının sol ve sağ genişliğini göstermektedir.

Çizelge 6.3 Farklı μ- kesimleri için bulanık rezerv miktarı

μ - Kesim	$\hat{\tilde{R}}$
0.0	(1206.85, 443.21)
0.1	(1206.85, 398.89)
0.2	(1206.85, 354.56)
0.3	(1206.85, 310.25)
0.4	(1206.85, 265.93)
0.5	(1206.85, 221.60)
0.6	(1206.85, 177.28)
0.7	(1206.85, 132.96)
0.8	(1206.85, 88.64)
0.9	(1206.85, 44.32)
1.0	(1206.85, 0)

Sigorta ortamında ve hesaplamalarda belirsizliği artıracak yönde gelişen birçok iç ve dış faktörün etkisinin nispi olarak azalması durumunda μ kesim değeri arttırılarak, Çizelge 6.3'de görüldüğü gibi daha dar bir bulanık rezerv miktarı üzerinden karşılık ayrılabilir. Örneğin μ=0.7 kesimi için hasar karşılığı miktarı (1206.85, 132.96) olarak bulunmuştur. μ kesim, 1.0 değerini aldığında ise melez bulanık regresyon katsayı tahminleri kesin sayılardan oluştuğu için hasar karşılığı miktarı da (1206.85, 0) olarak belirlenmiştir.

Çizelge 6.4 London Chain Ladder yöntemi ile rezerv miktarı

	Regresyon Modeli		**Ayrılacak Rezerv Miktarı**	
Gelişme Süreci (Yıl) *j*	$\hat{b}_j$	$\hat{c}_j$	**Hasar Gerçekleşme Yılı (*i*)**	$\hat{R}_i$
0	-1.619	1.702	**0**	0
1	61.398	1,336	**1**	0
2	189.894	0.830	**2**	129.29
3	-44.743	1.317	**3**	243.80
4	0	1	**4**	370.53
			5	463.23
			$\hat{R}$	**1206.85**

Çizelge 6.1 ile verilen birikimli hasar tutarları üçgeninden yararlanarak, kesin sayılar üzerinden geleneksel en küçük kareler regresyon modelini kullanan London Chain Ladder yöntemi ile her bir gelişme periyoduna ilişkin modeller ve rezerv miktarına ilişkin sonuçlar Çizelge 6.4 ile verilmiştir. London Chain Ladder yöntemine göre ayrılacak rezerv miktarı 1206.85 olarak bulunmuştur. Bu sonuç Çizelge 6.3 ile verilen, μ = 1.0 için elde edilen tahmini bulanık rezerv miktarı ile tamamen aynıdır.

Aynı veriler üzerinden Chain Ladder yöntemine ilişkin bağlantı oranları hesaplandığında, *i* yılı için ayrılacak rezerv miktarı $\hat{R}_i$ ve toplam rezerv miktarı $\hat{R}$ Çizelge 6.3'de görüldüğü gibi elde edilmiştir.

Çizelge 6.5 Chain Ladder yöntemi ile rezerv miktarı

Gelişme Süreci (Yıl) *j*	**Bağlantı Oranları m_j**	**Ayrılacak Rezerv Miktarı**	
		Hasar Gerçekleşme Yılı (*i*)	$\hat{R}_i$
0	1.690	**0**	0
1	1.594	**1**	0
2	1.345	**2**	124.62
3	1.227	**3**	268.58
4	1	**4**	347.32
		5	447.94
		$\hat{R}$	**1188.46**

Chain Ladder yöntemine göre tahmini rezerv miktarı 1188.46 olarak bulunmuştur. Fakat bu yöntemde hesaplanan bağlantı oranlarının, belli bir dengeyi yakalayamaması durumunda bulunan rezerv tahmininin, her zaman güvenilir olmayabileceği gerçeği göz ardı edilmemelidir.

7. SONUÇ VE TARTIŞMA

Problem çözümlerinde sistemler, gerçekliğin bir kısmının modellemesi olarak kurulurlar. Bütün sistem modelleri karmaşıklık, güvenilirlik, belirsizlik arasındaki ilişki ile değerlendirilir. Gerçek dünya her zaman için idealleştirilmiş dünyadan sapmalar gösterir. Matematik modeller ne kadar ayrıntılı olursa olsun gerçeği yansıtmazlar. Gerçek dünya karmaşıktır. Bu karmaşıklık genel olarak belirsizlik, kesin düşünceden yoksunluk ve karar verilemeyişten kaynaklanmaktadır.

Bilimde belirsizliği istenilmeyen bir durum olarak gören ve mümkün bütün durumlarda kaçınılması gerektiğinde ısrar eden geleneksel anlayıştan, belirsizlikle yaşamayı kabul eden ve bilimde bundan kaçınılmasının mümkün olmadığını iddia eden alternatif bakış açısına doğru bir geçiş vardır. Belirsizlik sadece kaçınılması mümkün olmayan bir durum değil aynı zamanda büyük bir yarar sağlayan ve üzerinde çalışılması gereken bir alandır. Her tehdit, risk ve belirsizlik aynı zamanda bir fırsat ve seçme şansına dönüştürülebilir.

Sistem modellemelerinde belirsizliğin artmasına izin vermek, karmaşıklığı azaltırken; güvenilirliği arttırmaktadır. En uygun davranış tarzı her bir modelleme problemi için optimum düzeyde belirsizliğe izin veren yöntemler geliştirmektir.

Bu çalışmada, sigorta şirketinin ayırması gereken hasar karşılığı tutarının belirlenmesi için geleneksel en küçük kareler regresyonunu kullanan London Chain Ladder yöntemine alternatif olarak melez bulanık en küçük kareler regresyon çözümlemesi kullanılmıştır. Çizelge 6.2, 6.3, 6.4 ve 6.5 ile verilen uygulamalar sonucunda, melez bulanık regresyon çözümlemesi ile elde edilen tahmini bulanık rezerv miktarı, kesin gözlemler ile rezerv tahmini hesaplamaları için kullanılan klasik yöntemlerden, regresyon çözümlemesi yaklaşımına dayanan Chain Ladder ve London Chain Ladder yöntemlerinden elde edilen sonuçlar ile karşılaştırılmıştır. Bu sonuçlara dayalı olarak, önerilen yöntem aşağıdaki önemli noktalara ulaşılmasını sağlar.

1. Klasik yöntemler ile tahmin edilen tek bir kesin rezerv miktarının tam gerçeği yansıtmayabileceği ve finansal tablolardaki ihtiyacı gideremeyebileceği durumu göz önünde bulundurulursa, bir bulanık aralık olarak belirlenen hasar karşılıkları tutarı, yükümlülüklerin tespiti için bir avantaj sağlayacaktır.

2. Melez bulanık regresyon modeli ile rezerv tahmini için önerilen yöntem ile verilerin bulanıklığı azaldığında, melez regresyon denklemine ilişkin katsayılar basit regresyon sonuçlarına yaklaşmaktadır. Tüm veriler kesin sayı olduğunda ise melez regresyon, basit regresyon ile aynı sonuçlara ulaşmaktadır. Bu nedenle, elde edilen bulanık hasar karşılığı tutarının merkezinde bulunan değer, London Chain Ladder yöntemi ile bulunan kesin değer ile aynı olacaktır.

3. Sigorta ortamında ve hesaplamalarda belirsizliği artıracak yönde gelişen birçok iç ve dış faktörün etkisinin nispi olarak azalması durumunda, hasar tutarları üçgeninde her bir gelişme periyodu için oluşturulan melez bulanık regresyon modellerinde, $0 \leq \mu \leq 1$ için μ kesim değeri arttırıldığında simetrik veya asimetrik üçgensel bulanık regresyon katsayılarına ilişkin genişlikler daralacağından; Çizelge 6.3'de de görüldüğü gibi daha dar bir bulanık rezerv miktarı üzerinden karşılık ayrılabilecektir.

4. Melez bulanık en küçük kareler regresyon çözümlemesi ve melez güvenilirlik analizi, bulanık sayılar için regresyon çözümlemesinde tam bir metodoloji oluşturmaktadır.

5. Klasik regresyon çözümlemesi için kullanılan mevcut istatistiksel paket programlar, melez bulanık regresyon modelinde bulanık katsayıların merkez ve genişliklerinin belirlenmesinde de kullanılabilmektedir.

6. Melez bulanık regresyon aşağıdaki kısıtlamalara sahiptir.

   (a) Yöntem sadece normalleştirilmiş üçgensel bulanık sayılar için uygulanabilir. Verilerin tümünün normalleştirilmiş üçgensel üyelik fonksiyonuna sahip olduğu varsayılır.

   (b) Karma üyelik fonksiyonuna sahip bulanık veriler ile melez bulanık regresyon çözümlemesi uygulanamaz. Sonuç olarak yöntemin, farklı üyelik fonksiyonları ve karma üyelik fonksiyonları için daha ileri araştırmalara ihtiyacı vardır.

KAYNAKLAR

Acar, O. 2005. Avrupa Birliği'nde Yükümlülük Karşılama Yeterliliği: Solvency II. Sigorta Araştırmaları Dergisi, 1, 3-22

Andrés, J.de, Terceño, A. 2003a. Applications of fuzzy regression in actuarial analysis. Journal of Risk and Insurance 70 (4), 665–699.

Andrés, J.de, Terceño, A. 2003b. Estimating a term structure of interest rates for fuzzy financial pricing by using fuzzy regression methods. Fuzzy Sets and Systems 139 (2), 313–331.

Baykal, N., Beyan, T. 2004. Bulanık Mantık İlke Ve Temelleri. Bıçaklar Kitabevi, 473, Ankara.

Benjamin, S., Eagles, L.M. 1986. Reserves in Lloyd's and the London market. Journal of the Institute of Actuaries, 113 (2), 197–257.

Brockett, P.L., Xia, X. 1995. Operations research in insurance: A review. Transactions of Society of Actuaries, 47, 7–87.

Buckley, J.J. 2004. Fuzzy Probability and Statistics. Springer-Verlag, pp. 171-179, New York

Celminš, A. 1987. Least squares model fitting to fuzzy vector data. Fuzzy Sets and Systems, 22, 245-269.

Chang, Y.-H. O. 2001. Hybrid Fuzzy Least-Squares Regression Analysis and Its Reliability Measures. Fuzzy Sets and Systems, 119(2), 225-246.

Chang, Y.-H. O., Ayyub, B. M. 2001. Fuzzy Regression Methods – A Comparative Assessment. Fuzzy Sets and Systems, 119, 187-203.

Derrig, R.A., Ostaszewski, K. 1998. Fuzzy sets methodologies in Actuarial Science. In: Practical Applications of Fuzzy Technologies. Kluwer, pp. 531–556, Heidelberg.

Diamond P. 1988. Fuzzy Least Squares. Information Sciences, 46, 141- 157.

Dubois, D., Prade, H., 1993. Fuzzy numbers: An overview. In: Fuzzy Sets for Intelligent Systems. Morgan Kaufmann Publishers, pp.113–148, San Mateo.

England, P.D., Verrall, R.J. 2002. Stochastic claims reserving in general insurance. Institute of Actuaries, London. Web Sitesi. http://www.actuaries.org.uk/files/ pdf/sessional/sm0201.pdf Erişim Tarihi: 10.06.2007.

Fedrizzi, M., Ostasiewicz, W. 1993. Towards fuzzy modelling in economics. Fuzzy Sets and Systems 54, 259–268.

Hossack, I.B., Pollard, J.H., Zehnwirth, B. 1999. Introductory Statistics with Applications in General Insurance. Cambridge University Press, pp. 206-241, USA

Ishibuchi H. 1992. Fuzzy regression analysis. Japan. J. Fuzzy Theory and Systems, 4, 137-148.

Kao, C., Chyu C.-L. 2003. Least-squares estimates in fuzzy regression analysis. European Journal of Operational Research, 148, 426–435.

Kaufmann, A., Gupta, M.M. (1991). Introduction to fuzzy arithmetic. Van Nostrand Reinhold, 361, New-York

Lai, Y.J., Hwang, C.L. 1992. Fuzzy Mathematical Programming. Springer – Verlag, 301, Germany.

Lee, H.T., Chen, S.H. 2001. Fuzzy regression model with fuzzy input and output data for manpower forecasting. Fuzzy Sets and Systems 119, 205–213.

Lyons, G.E. 1984. Outstanding Claims Reserves. Institute of Actuaries, London. Web Sitesi.http://www.actuaries.org.uk/files/pdf/library/SIAS-1984/claims.pdf Erişim Tarihi: 10.06.2007.

Mutlu, S. 2005. Hasar Karşılıkları ve IBNR. Sigorta Araştırmaları Dergisi, 1, 61-68

Ostaszewski, K. 1993. An Investigation into Possible Applications of Fuzzy Sets Methods in Actuarial Science. Society of Actuaries, Schaumburg, USA.

Profillidis, V.A., Papadopoulos, B.K., Botzoris, G.N. 1999. Similarities in fuzzy regression models and application on transportation. Fuzzy Economic Review 4 (1), 83–98.

Ramenazi, R., Duckstein, L. 1992. Fuzzy regression analysis of the effect of university research on regional technologies. In: Fuzzy Regression Analysis. Physica-Verlag, pp. 237–263, Heidelberg.

Savic D., Pedrycz W. 1991. Evaluation of fuzzy regression models. Fuzzy Sets and Systems, 39, 51-63.

Shapiro, A.F. 2004. Fuzzy logic in insurance. Insurance: Mathematics and Economics 35, 399–424.

Slowiński, R. (ed.) 1998. Fuzzy Sets in Decision Analysis, Operational Research and Statistics. Kluwer Academic Publishers. 101 Philip Drive, Assinippi Park, 453 p., Norwell, Massashusetts 02061.

Straub, E. 1997. Non-life Insurance Mathematics. Springer, pp.89-130, Berlin.

Tanaka H, Uegima S, Asai K. 1982. Linear regression analysis with fuzzy model. IEEE Trans Systems Man and Cybernetics, 903-907.

Tanaka H. 1987. Fuzzy data analysis by possibilistic linear models. Fuzzy Sets and Systems, 24, 363–375.

Tanaka H., Ishibuchi H. 1991. Identification of possibilistic linear systems by quadratic membership functions of fuzzy parameters. Fuzzy Sets and Systems, 41,145-160

Tanaka, H., Ishibuchi, H. 1992. A possibilistic regression analysis based on linear programming. In: Fuzzy Regression Analysis. Physica-Verlag, pp. 47–60, Heidelberg.

Taylor, G.C. 1986. Claims Reserving in Non-Life Insurance. North-Holland, Amsterdam.

Taylor, G., McGuire, G., Greenfield, A. 2003. Loss Reserving: Past, Present and Future. Centre for Actuarial Studies of the University of Melbourne, Melbourne.

Tseng, F.-M., Tzeng, G.-H., Yu, H.-C., Yuan, B.J.-C. 2001. Fuzzy ARIMA model for forecasting the foreign exchange market. Fuzzy Sets and Systems, 118, 9–19.

Van Eeghen, J. 1981. Loss Reserving methods, Surveys on Actuarial Studies. 1. Nationale-Nederlanden, Rotterdam.

Watada, J. 1992. Fuzzy time-series analysis and forecasting of sales volume. In: Fuzzy Regression Analysis. Physica-Verlag, pp. 211–227, Heidelberg.

Yakoubov, Y.H., Haberman, S. 1998. Review of actuarial applications of fuzzy set theory. Actuarial Research Paper n. 105. Department of Actuarial Science and Statistics of the City University, London.

Yaman, C. 2005. Hasar Karşılıkları ve Karşılık Ayırma Yöntemleri. TSRŞB I. Ulusal Sigorta Sempozyumu Kitabı, 539-554.

Yen, K.K., Goshray, S. 1999. Application of Fuzzy Regression Models to Predict Exchange Rates for Composite Currencies. In: Ribeiro, R.A.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Furkan BAŞER
Doğum Yeri : Ankara
Doğum Tarihi : 27.04.1982
Medeni Hali : Bekar
Yabancı Dili : İngilizce

Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl)

Lise : Batıkent Yabancı Dil Ağırlıklı Lisesi - 2000
Lisans : Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi İstatistik Bölümü – 2004
Yüksek Lisans: Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü İstatistik Anabilim Dalı - 2007

Çalıştığı Kurum ve Yıl

Gazi Üniversitesi T.T.E.F. Bilgisayar Uygulamaları Eğitimi Bölümü – 2006

Yayınları

Başer, F., Apaydın, A. 2007. Sigorta Hasar Karşılıkları Hesaplamalarına Bulanık Regresyon Yaklaşımı. 5. İstatistik Kongresi 20 – 24 Mayıs, Belek / Antalya