ÖZET

Doktora Tezi

SİMPLEKTİK DİFERENSİYEL GEOMETRİ ÜZERİNE

Erhan ATA

Ankara Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. H. Hilmi HACISALİHOĞLU

Bu doktora tezi dört bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm giriş kısmına ayrılmıştır.

İkinci bölümde, çalışma için gerekli kavramlar verilerek bazı orijinal sonuçlar elde edilmiştir.

Üçüncü bölümde, hemen hemen kuaterniyon manifoldlarla ilgili kısa bilgiler verilerek kuaterniyon Kähler manifoldlarda eğrilikler incelenmiştir.

Dördüncü bölümde ise üçüncü bölümde incelenen eğrilikler; hemen hemen bölünmüş kuaterniyon manifoldları ve bölünmüş kuaterniyon Kähler manifoldları üzerinde incelenmiştir.

2004, 118 sayfa

ANAHTAR KELİMELER: Simplektik vektör uzayı, Lagrange altuzayı, Hermityen metrik, Kähler vektör uzayı, simplektik manifold, kuaterniyon Kähler manifoldu, Riemann eğrilik tensörü, Riemann-Christoffel eğrilik tensörü, Ricci tensörü, bölünmüş kuaterniyon Kähler manifold.

ABSTRACT

Ph. D. Thesis

ON SYMPLECTIC DIFFERENTIAL GEOMETRY

Erhan ATA

Ankara University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. H. Hilmi HACISALİHOĞLU

This thesis consists of four chapters. The first chapter has been devoted to the introduction.

In the second chapter, some main concepts for this study have been given and some original results have been obtained.

In the third chapter, some basic concepts concerning almost quaternion Kähler manifolds have been recalled and the curvatures have been dealt with on the Kähler manifolds.

In the last chapter, the curvatures obtained in the third chapter have been considered on almost split quaternion manifolds and split quaternion Kähler manifolds.

2004, 118 pages

Key Words: Symplectic vector space, Lagrange subspace, Hermitian metric, Kähler vector space, symplectic manifold, quaternion Kähler manifold, Riemannian curvature tensor, Riemann-Christoffel curvature tensor, Ricci tensor, split quaternion Kähler manifold.

TEŞEKKÜR

Bu çalışma konusunu bana veren ve araştırmalarımın her aşamasında en yakın ilgi ve önerileriyle beni yönlendiren danışman hocam, Sayın Prof. Dr. H. Hilmi HACISALİH-OĞLU (Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi)' na, çalışmalarım boyunca hep yanımda olan Sayın Prof. Dr. Yusuf YAYLI (Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi)' ya ve sorularıyla beni yönlendiren Sayın Prof. Dr. Baki KARLIĞA (Gazi Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi)' ya teşekkürlerimi sunarım.

Çalışmalarım esnasında bana her türlü anlayışı gösteren sevgili eşim Perihan ATA' ya sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Erhan ATA
Ankara, Nisan 2004

İÇİNDEKİLER

SİMGELER DİZİNİ

Ω	V vektör uzayı üzerinde simplektik yapı
(V,Ω)	simplektik vektör uzayı
$Sp_n(K)$	standart simplektik grup
$W^{\perp}$	$W \subset V$ nın Ω ya göre ortogonal tümleyeni
$radW = W \cap W^{\perp}$	W nın radikali
$W^{red} = W / radW$	W dan elde edilen simplektik uzay
$L = L^{\perp} \subset V$	Lagrange altuzayı
G_L	izotropi grubu
J	kompleks yapı
$J = J(V,\Omega)$	Ω uyumulu pozitif kompleks yapı
h	Hermityen metrik
(V,Ω,J)	Kähler vektör uzayı
M	diferensiyellenebilir reel manifold
$T_M(p)$	$p \in M$ noktasındaki tanjant uzay
(M,Ω)	simplektik manifold
Q	Reel kuaterniyonlar halkası
$\{F,G,H\}$	V bundle'ının kanonik bazı
(M,V)	hemen hemen kuaterniyon manifold
(M,V,g)	kuaterniyon Kähler manifold
(V,g)	kuaterniyon Kähler yapı
D	Riemann konneksiyonu
R	Riemann eğrilik tensörü
S	Ricci tensörü
K	Riemann-Christoffel eğrilik tensörü
H'	split kuaterniyonlar halkası
M_2^n	n-boyutlu 2 indeksli Lorentz manifoldu

ŞEKİLLER DİZİNİ

1. GİRİŞ

İki yüzyıl önce Simplektik Geometri ismi yoktu. Eğer büyük bir sözlüğe bakılırsa simplektik kelimesi için muhtemelen balığın başındaki bir kemik ismi olduğu görülür. Simplektik kelimesi ilk olarak Weyl tarafından Yunanca "kompleks" anlamında simplektik grubu belirtmek için kullanılmıştır. Klasik mekanik için bir dil sağlayan simplektik geometri, son zamanlarda büyük gelişmeler sayesinde bağımsız ve zengin bir teori olmuştur.

Matematikte ve Teorik Fizikte önemli rol oynayan Hamilton ve Kähler manifoldlarının temeli Simplektik Geometri'de yer almaktadır.

Bu doktora tezinde, Kähler manifoldlarının temelini teşkil eden simplektik vektör uzayı ile ilgili temel bilgiler verilerek, kuaterniyon Kähler manifoldları ve bölünmüş kuaterniyon Kähler manifoldlarında eğrilikler incelenmiştir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

2.1. Simplektik Vektör Uzayı

Tanım 2.1.1. $\mathbb{R}$ reel sayılar cismi üzaerinde bir vektör uzayı V olsun. $\Omega : V \times V \to \mathbb{R}$ bilineer dönüşümü her $u, v \in V$ için $\Omega(u, v) = -\Omega(u, v)$ ise Ω ya anti-simetrik bilineer dönüşüm (veya alterne bilineer dönüşüm) denir (Hacısalihoğlu 1997).

Teorem 2.1.1. V reel vektör uzayı üzerinde anti-simetrik bilineer bir dönüşüm Ω olsun. Bu durumda aşağıdaki şartları sağlayan V nin bir $u_1, ..., u_k, e_1, ..., e_n, f_1, ..., f_n$ bazı vardır:

$$\begin{aligned}
\Omega(u_i, v) &= 0; \ \forall v \in V \\
\Omega(e_i, e_j) &= \Omega(f_i, f_j) = 0; \ \ 1 \leq i, j \leq n \\
\Omega(e_i, f_j) &= \delta_{ij}
\end{aligned}$$

(Cannas da Silva 2000).

İspat. Bu ispatı tümevarımla Gram-Schmidt yönteminin bir anti simetrik versiyonu olarak yapacağız. Bunun için önce bir

$$U = \{u \in V : \Omega(u, v) = 0; \ \forall v \in V\}$$

cümlesini alalım. Bu durumda $U \subset V$ bir altuzaydır. U nun bir bazını $u_1, u_2, ..., u_k$ olarak seçelim. $U \oplus W = V$ olsun ve keyfi bir $e_1(\neq 0) \in W$ alalım. Bu durumda $\Omega(e_1, f_1) \neq 0$ olacak şekilde bir $f_1 \in W$ vardır. Aksi taktirde, $W \subset U$ olurdu. Kabul edelim ki $\Omega(e_1, f_1) = 1$ olsun ve $W_1 = Sp\{e_1, f_1\}$ diyelim. Bu durumda

$$W_1^{\Omega} = \{w \in W : \Omega(w, v) = 0 \ \ \forall v \in W_1\}$$

cümlesini seçelim. İddia ediyoruz ki $W_1 \cap W_1^{\Omega} = \{0\}$ dır. Gerçekten, herhangi bir $\alpha \in W_1 \cap W_1^{\Omega}$ alalım. Buna göre $\alpha = ae_1 + bf_1 \quad (a, b \in \mathbb{R})$ şeklinde yazılabilir. Aynı zamanda $\alpha \in W_1^{\Omega}$ olduğundan W_1^{Ω} nın tanımından $\Omega(\alpha, e_1) = \Omega(\alpha, f_1) = 0$

olmalıdır. Buradan

$$\begin{aligned}\Omega(\alpha, e_1) = 0 \quad &\Rightarrow \Omega(ae_1 + bf_1, e_1) = 0 \\ &\Rightarrow a\Omega(e_1, e_1) + b(\Omega f_1, e_1) = 0 \\ &\Rightarrow b = 0\end{aligned}$$

bulunur. Benzer şekilde

$$\begin{aligned}\Omega(\alpha, f_1) = 0 \quad &\Rightarrow \Omega(ae_1 + bf_1, f_1) = 0 \\ &\Rightarrow a\Omega(e_1, f_1) + b(\Omega f_1, f_1) = 0 \\ &\Rightarrow a = 0\end{aligned}$$

olur. O halde $\alpha = ae_1 + bf_1$ olmasından dolayı $\alpha = 0$ elde edilir. Bu da $W_1 \cap W_1^\Omega = \{0\}$ olduğunun ispatını tamamlar.

Ayrıca $W_1 \oplus W_1^\Omega = W$ dır. Gerçekten, herhangi bir $v \in W$ alalım ve $\Omega(v, e_1) = c$, $\Omega(v, f_1) = d$ olsun. Bu durumda

$$v = (-cf_1 + de_1) + (v + cf_1 - de_1)$$

biçiminde yazabiliriz. Burada birinci bileşenin W_1 de ve ikinci bileşenin de W_1^Ω da olduğunu göstermek için $\Omega(-cf_1 + de_1, v + cf_1 - de_1) = 0$ olduğunu görmeliyiz. Gerçekten Ω anti-simetrik bilineer dönüşüm olduğundan

$$\begin{aligned}\Omega(-cf_1 + de_1, v + cf_1 - de_1) &= -c\Omega(f_1, v) - c^2\Omega(f_1, f_1) + cd\Omega(f_1, e_1) \\ &\quad +d\Omega(e_1, v) + dc\Omega(e_1, f_1) - d^2\Omega(e_1, e_1)\end{aligned}$$

hipotezini gözönüne alırsak $\Omega(-cf_1 + de_1, v + cf_1 - de_1) = 0$ elde edilir. Şimdi $e_2 (\neq 0) \in W_1^\Omega$ alalım. O zaman $\Omega(e_2, f_2) \neq 0$ olacak şekilde bir $f_2 \in W_1^\Omega$ vardır. Kabul edelim ki $\Omega(e_2, f_2) = 1$ olsun ve $W_2 = Sp\{e_2, f_2\}$ diyelim. Böyle devam edersek sonuçta

$$V = U \oplus W_1 \oplus W_2 \oplus ... \oplus W_n$$

elde ederiz. W_i altuzaylarının baz vektörleri $\Omega(e_i, f_i) = 1$ olacak şekildeki e_i, f_i

vektörlerinden oluşur.

Sonuç 2.1.1.

1) Teorem 2.1.1 deki baz tek değildir. Böyle bir baza **kanonik baz** adı verilir.

2) $rank\Omega = 2n$, $boyV = m = 2n + k$ dır.

3) Ω anti-simetrik bilineer dönüşümünü matris notasyonunda

$$\Omega(u,v) = u^t . \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_n \\ 0 & -I_n & 0 \end{bmatrix}_{(2n+k)\times(2n+k)} .v$$

şeklinde yazabiliriz (Cannas da Silva 2000), burada I_n, n. mertebeden birim matristir.

Tanım 2.1.2. $\mathbb{R}$ üzerinde $m-$boyutlu bir vektör uzayı V ve $\Omega : V \times V \to \mathbb{R}$ anti-simetrik bilineer dönüşüm olsun. V nin duali V^* olmak üzere

$$\begin{array}{llllll} \overset{\wedge}{\Omega}: & V & \to & V^* & & \\ & v & \to & \overset{\wedge}{\Omega}(v): & V & \to \mathbb{R} \\ & & & & u & \to (\overset{\wedge}{\Omega}(v))(u) = \Omega(v,u) \end{array}$$

şeklinde tanımlı $\overset{\wedge}{\Omega}$ dönüşümünün çekirdeği U dur. Gerçekten Ω bilineer bir dönüşüm olduğundan $\forall u, v \in V$ için $(\overset{\wedge}{\Omega}(v))(u) = \Omega(v,u)$ eşitliğinden $\overset{\wedge}{\Omega}$ bir lineer dönüşüm olur. Şimdi $\overset{\wedge}{\Omega}$ nın çekirdeğinin U olduğunu gösterelim. Çek$\overset{\wedge}{\Omega} = \{u \in V : \overset{\wedge}{\Omega}(u) = 0\}$ olduğunu biliyoruz. Her $v \in V$ için

$$(\overset{\wedge}{\Omega}(u))(v) = 0(v) \Rightarrow \Omega(u,v) = 0$$

olur. U cümlesinin tanımından Çek$\overset{\wedge}{\Omega} = U$ elde ederiz.
Eğer $\overset{\wedge}{\Omega}$ bijektif yani $U = \{0\}$ ise, Ω ya V üzerinde bir **simplektik yapı (simplektik form)** ve (V, Ω) ikilisine de **simplektik vektör uzayı** adı verilir (Cannas da Silva 2000).

Sonuç 2.1.2. (V, Ω) simplektik vektör uzayında,

1) $boyU = k = 0$ olduğundan $boyV = 2n$ çift bir sayıdır.

2) Teorem 2.1.2 den bir (V, Ω) simplektik uzayının aşağıdaki özellikleri sağlayan bir $e_1, e_2, ..., e_n, e_{n+1}, ..., e_{2n}$ bazı vardır:

$$\Omega(e_i, e_j) = \Omega(e_{n+i}, e_{n+j}) = 0 \text{ ve } \Omega(e_i, e_{n+j}) = \delta_{ij}, \quad 1 \leq i, j \leq n.$$

Böyle bir baza (V, Ω) nın "**kanonik simplektik bazı**" adı verilir. Bu baza karşılık gelen **Ω simplektik formunun matrisi**

$$J = \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{bmatrix}$$

şeklindedir.

3) Ω, bilineer, anti-simetrik ve non-dejenere özeliğine sahiptir (Cannas da Silva 2000).

Örnek 2.1.1. $2n-$boyutlu V reel vektör uzayının kanonik simplektik bazı $\{e_1, e_2, ..., e_n,$ $e_{n+1}, ..., e_{2n}\}$ ve V nin duali olan V^* uzayının da bu baza dual bazı $\{e_1^*, e_2^*, ..., e_n^*,$ $e_{n+1}^*, ..., e_{2n}^*\}$ olsun. Bu durumda

$$\Omega : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}, \; \Omega = \sum_{i=1}^{n} e_i^* \wedge e_{n+i}^*$$

şeklinde tanımlı dönüşüm V üzerinde bir simplektik formdur.

Gerçekten, öncelikle Ω dönüşümünün bilineer ve alterne olduğu açıktır. Şimdi non-dejenere olduğunu gösterelim.

$v \in V$ olmak üzere

$$v = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i + \sum_{i=1}^{n} y_i e_{n+i}$$

biçiminde yazabiliriz. Acaba her $w \in V$ için $\Omega(v, w) = 0 \Rightarrow v = 0$ olur mu? Bunu görmek için

$$\begin{aligned} w &= e_1 \Rightarrow \Omega(v, e_1) = 0 \Rightarrow y_1 = 0 \\ w &= e_2 \Rightarrow \Omega(v, e_2) = 0 \Rightarrow y_2 = 0 \end{aligned}$$

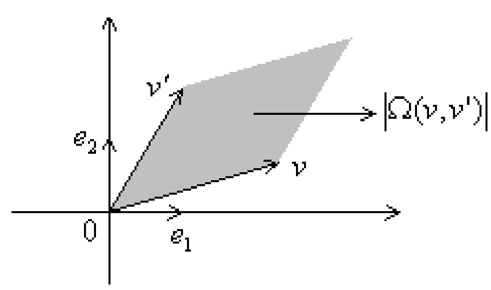
$$\begin{aligned}
& \ldots \\
w &= e_n \Rightarrow \Omega(v, e_n) = 0 \Rightarrow y_n = 0 \\
w &= e_{n+1} \Rightarrow \Omega(v, e_{n+1}) = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \\
& \ldots \\
w &= e_{2n} \Rightarrow \Omega(v, e_{2n}) = 0 \Rightarrow x_n = 0
\end{aligned}$$

olacağından $v = 0$ elde edilir.

Örnek 2.1.2. $V = \mathbb{R}^2$ alırsak, $\Omega : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ simplektik formu, $\forall v, v' \in \mathbb{R}^2$ için $v = xe_1 + ye_2$ ve $v' = x'e_1 + y'e_2$ olmak üzere

$$\Omega(v, v') = xy' - x'y = \begin{vmatrix} x & y \\ x' & y' \end{vmatrix}$$

olur. O halde $|\Omega(v, v')|$ sayısı, aşağıdaki şekildeki gibi v ve v' vektörleri üzerine kurulan paralelkenarın alanını verir.



Şekil 2.1. Paralelkenarın alanı

Tanım 2.1.3. (V, Ω) simplektik uzay olsun. Her $v, w \in V$ için $\Omega(v, w) = 0$ ise v ile w ya **Ω-ortogonal, anti-ortogonal** veya kısaca **ortogonaldir** denir ve $v \perp w$ biçimde gösterilir (Berndt 2000).

Eğer $(K, +, \cdot)$ bir cisim olmak üzere $V = K^{2n}$ alınırsa (K^{2n}, Ω) ikilisine **standart simplektik uzay** denir.

Örnek 2.1.3. $k \in \mathbb{N}$ için K cismi üzerinde $(2n + k)$ boyutlu bir U vektör uzayı vardır öyle ki

$$\hat{\Omega}: U \times U \to K$$

dönüşümü anti-simetrik, bilineer ve $rank\ \hat{\Omega} = 2n$ olsun. $\hat{\Omega}$ nın **sıfırlayanı (annihilatörü)**

$$U_0 = \{u \in U : \hat{\Omega}\ (u, w) = 0;\ \forall w \in U\}$$

ve $rank\, U_0 = k$ dır. $\hat{\Omega}$ nın $U\,/U_0$ üzerine kısıtlaması ile Ω simplektik formunu elde ederiz. Böylece (V, Ω) simplektik uzayına, $(U, \hat{\Omega})$ uzayının **indirgenmişi** denir.

2.2. Simplektik Dönüşüm ve Simplektik Grup

Tanım 2.2.1. (V_1, Ω_1) ve (V_2, Ω_2) iki simplektik uzay ve

$$\phi : V_1 \to V_2$$

bir lineer dönüşüm olsun.

Her $v, w \in V_1$ için $\Omega_2(\phi(v), \phi(w)) = \Omega_1(v, w) \Leftrightarrow \phi$ bir simplektik dönüşümdür. Bu durumda ϕ bire-bir dir. Gerçekten, her $v \in V_1$ için $\phi(v) = 0$ ise $v = 0$ olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned} \Omega_2(\phi(v), \phi(v)) = \Omega_1(v, v) \quad &\Rightarrow 0 = \Omega_1(v, v) \\ &\Rightarrow v = 0 \text{ (non-dejenere olduğu için)} \end{aligned}$$

dır. Eğer $V = V_1 = V_2$ alırsak, o zaman $\phi : V \to V$ bir lineer izomorfizm olur ki, buna **simplektomorfizm** denir.

$$S_p(V) = \{\phi \,|\, \phi : V \to V,\ \text{otomorfizm}\}$$

simplektomorfizmlerin cümlesi bir grup ve hatta bir Lie grubudur (Berndt 2000).

Eğer özel olarak $V = K^{2n}$ ve Ω simplektik kanonik formu alırsak, **standart simplektik grubu** elde ederiz ki, bu grup $Sp_n(K)$, $Sp(n, K)$, $Sp_{2n}(K)$ veya $Sp(2n, K)$ biçimlerinde gösterilir ve $Sp(2n, K) \subset GL(2n, K)$ dır.

Eğer $M \in Sp_n(K)$ ise M matrisi Ω simplektik formu altında invaryant kalır; yani her $v, v' \in K^{2n}$ için $\Omega(Mv, Mv') = \Omega(v, v')$ dır. Buradan

$$\begin{aligned} (Mv)^t J(Mv') = v^t Jv' &\Rightarrow v^t M^t JMv' = v^t Jv' \\ &\Rightarrow M^t JM = J \end{aligned}$$

olur. Ayrıca

$$\begin{aligned} J = M^t JM &\Rightarrow \det J = \det(M^t JM); \;\; \det J = 1 \\ &\Rightarrow 1 = \det M^t \det M \\ &\Rightarrow \det M = \mp 1 \end{aligned}$$

elde ederiz.

Önerme 2.2.1. Eğer $M, N \in Sp_n(K)$ ise $M^{-1}, M^t, MN \in Sp_n(K)$ ve üstelik $J \in Sp_n(K)$ dır (Berndt 2000).

İspat. Bu önermenin ispatı değişik bir yolla yapılmıştır. $M \in Sp_n(K)$ olsun. $M^{-1} \in Sp_n(K)$ olduğunu gösterelim:

$$\begin{aligned} M^t JM = J &\Rightarrow (M^t)^{-1}[M^t JM]M^{-1} = (M^t)^{-1} JM^{-1} \\ &\Rightarrow J = (M^t)^{-1} JM^{-1} \\ &\Rightarrow J = (M^{-1})^t JM^{-1}; \;\; (M^{-1})^t = (M^t)^{-1} \\ &\Rightarrow M^{-1} \in Sp_n(K) \end{aligned}$$

dır. Şimdi de $M^t \in Sp_n(K)$ olduğunu gösterelim. $M^{-1} \in Sp_n(K)$ olduğundan

$$J = (M^{-1})^t JM^{-1}$$

yazabiliriz. Buradan

$$\begin{aligned} J = (M^{-1})^t J M^{-1} \quad & \Rightarrow J^{-1} = [(M^t)^{-1} J M^{-1}]^{-1}\,; \;\; J^{-1} = -J \\ & \Rightarrow J = MJM^t\,; \;\; M = (M^t)^t \\ & \Rightarrow J = (M^t)^t J M^t \\ & \Rightarrow M^t \in Sp_n(K) \end{aligned}$$

olur. Şimdi de $MN \in Sp_n(K)$ olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned} M &\in Sp_n(K) \Rightarrow J = M^t J M \\ N &\in Sp_n(K) \Rightarrow J = N^t J N \end{aligned}$$

dir. Biz $J = (MN)^t JMN$ olduğunu göstermeliyiz. Bunun için,

$$\begin{aligned} (MN)^t JMN &= N^t M^t JMN \\ &= N^t (M^t JM) N \\ &= N^t J N \\ &= J \end{aligned}$$

bulunur. $J \in Sp_n(K)$ olduğunu gösterelim:

Bunun için önce J^t ve $J^2 = J.J$ matrislerini hesaplayalım. $J = \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{bmatrix}$ olduğunu biliyoruz. Buradan

$$J = \begin{bmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{bmatrix} = -J$$

ve

$$J^2 = J.J = \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -I_n & 0 \\ 0 & -I_n \end{bmatrix} = -I_{2n}$$

bulunur.

$$J^t.JJ = (-J)(-I_{2n}) = J \Rightarrow J \in Sp_n(K)$$

elde edilir ■

Önerme 2.2.2. $A, B, C, D \in K_n$ olmak üzere $M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \in Sp_n(K)$ olması için gerek ve yeter koşul $A^tC = C^tA$, $B^tD = D^tB$ ve $A^tD - C^tB = I_n$ olmasıdır (Berndt 2000 ve Vaisman 1997).

İspat. $M \in Sp_n(K)$ olduğundan $M^tJM = J$ dir. Ayrıca

$$M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \Rightarrow M^t = \begin{bmatrix} A^t & C^t \\ B^t & D^t \end{bmatrix}$$

olacağından

$$\begin{aligned} M^tJM &= J \Leftrightarrow \begin{bmatrix} A^t & C^t \\ B^t & D^t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{bmatrix} \\ &\Leftrightarrow -C^tA + A^tC = 0, \ -C^tB + A^tD = I_n, \ -D^tB + B^tD = 0 \\ &\Leftrightarrow A^tC = C^tA, \ B^tD = D^tB \text{ ve } A^tD - C^tB = I_n \end{aligned}$$

elde ederiz. ■

O halde simplektik matrislerin cümlesini

$$Sp_n(K) = \left\{ M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \in K_{2n}^{2n} : A^tC = C^tA, \ B^tD = D^tB \text{ ve } A^tD - C^tB = I_n \right\}$$

biçiminde de ifade edebiliriz.

Önerme 2.2.3. J, U_V ve T_S matrislerinin herbiri $Sp_n(K)$ matris grubunu üretirler (Gillemin ve Sternberg 1984).

İspat. Bu önermenin ispatı değişik bir yolla yapılmıştır. $Sp_n(K)$ bir grup olduğundan kapalılık özeliği vardır. Yani herhangi iki simplektik matrisin çarpımı yine bir simplektik matristir.

A) İlk olarak $T_S = \begin{bmatrix} I & S \\ 0 & I \end{bmatrix}$, $S^t = S$ matrisinin $Sp_n(K)$ grubunu ürettiğini gösterelim.

Bunun için $M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \in Sp_n(K)$ alalım. $U_{V'} = \begin{bmatrix} V' & 0 \\ 0 & V'^* \end{bmatrix}$, $V'^* = [(V')^t]^{-1}$ olmak üzere

$$\begin{aligned} U_V.M.U_{V'} &= \begin{bmatrix} V & 0 \\ 0 & V^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V' & 0 \\ 0 & V'^* \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} VAV' & VBV^* \\ V^*CV' & V^*DV'^* \end{bmatrix} \end{aligned}$$

olur. Böylece A matrisini VAV' matrisine dönüştürmüş olduk. Bu dönüşümde tanım ve değer uzaylarındaki bazlar değiştirilmektedir. Eğer V ve V' matrislerini uygun olarak seçersek elemanları yalnızca 0 ve 1 olan diagonal formda $VAV' = \begin{bmatrix} I_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ biçiminde bir matris elde edebiliriz. Ayrıca bu kabul genelliği bozmaz. C matrisini $C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix}$ biçiminde aynı boyutlu blok matrisler cinsinden yazarsak M bir simplektik matris olduğundan $A^tC - C^tA = 0$ olacaktır. Buradan

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & 0 \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix}, \ c_{11}^t = c_{11}$$

olur. Ayrıca burada $|c_{22}| \neq 0$ olmak zorundadır. Aksi takdirde

$$M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc|c} I_1 & 0 & \\ 0 & 0 & B \\ \hline c_{11} & 0 & \\ c_{12} & 0 & D \end{array}\right]$$

olacağından $\det M = 0$ olur ki bu mümkün değildir.

Şimdi de $M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$ matrisini soldan $T_{\lambda I} = \begin{bmatrix} I & \lambda I \\ 0 & I \end{bmatrix}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ matrisi ile çarpalım. Bu durumda

$$\begin{bmatrix} I & \lambda I \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A+\lambda C & B+\lambda D \\ C & D \end{bmatrix} \Rightarrow A' = A+\lambda C$$

olur. Böylece A matrisi A' matrisine dönüşür.

$$A' = A+\lambda C = \begin{bmatrix} I_1+\lambda c_{11} & 0 \\ \lambda c_{21} & \lambda c_{22} \end{bmatrix}$$

olduğundan uygun bir λ seçimiyle $|A'| \neq 0$ olduğu kolayca görülebilir. O halde uygun dönüşümler yardımıyla A dan A' nü elde edebiliriz. $|A'| \neq 0$ olduğundan genel durumda $|A| \neq 0$ almak genelliği bozmaz. Hatta genel durumda $A = I$ alınabilir. Buradan

$$M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & B \\ C & D \end{bmatrix}$$

olur ve $A^tC - C^tA = 0$ olduğundan $C^t = C$ bulunur. Elde edilen bu matris bir simplektik matris olduğundan $A^tD - C^tB = I$ eşitliğini sağlayacaktır. $A = I$ ve $C = 0$ için $D = I$ olur. Ayrıca $B^tD - D^tB = 0$ eşitliğinden $B^t = B$ elde edilir. Sonuç olarak $\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$ matrisi $\begin{bmatrix} I & B \\ 0 & I \end{bmatrix}$, $B^t = B$ formuna getirilmiş olur. Eğer B yerine S matrisini alırsak $\begin{bmatrix} I & S \\ 0 & I \end{bmatrix}$, $S^t = S$ elde ederiz ki bu ulaşmak istediğimiz matristir.

B) Şimdi de $U_V = \begin{bmatrix} V & 0 \\ 0 & V^* \end{bmatrix}$, $V^* = (V^t)^{-1}$ matrisinin $Sp_n(K)$ yı ürettiğini gösterelim.

$$\begin{bmatrix} I & S \\ 0 & I \end{bmatrix}, \; S^t = S \Rightarrow \begin{bmatrix} I & S^{-1} \\ 0 & I \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} I & 0 \\ -S & I \end{bmatrix} \in Sp_n(K)$$

dır. Buradan

$$\begin{bmatrix} I & S^{-1} \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ -S & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & S^{-1} \\ 0 & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & S^{-1} \\ -S & 0 \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad \begin{bmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{bmatrix} \in Sp_n(K)$$

olduğundan

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & S^{-1} \\ -S & 0 \end{bmatrix} &= -\begin{bmatrix} S & 0 \\ 0 & S^{-1} \end{bmatrix}, \quad S^t = S \\
&= -\begin{bmatrix} S & 0 \\ 0 & (S^t)^{-1} \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} S & 0 \\ 0 & S^* \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

olur. O halde $S = V$ alırsak $\begin{bmatrix} V & 0 \\ 0 & V^* \end{bmatrix}$, $V^* = (V^t)^{-1}$ matrisini elde ederiz.

C) Benzer şekilde $J = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{bmatrix}$ matrisinin de $Sp_n(K)$ yı ürettiği kolayca gösterilebilir. ■

Tüm bunların bir sonucu olarak $J^{-1} = J^t = -J$ olduğundan $Sp_n(K)$ nın elemanları ortogonal ve antisimetriktir.

Önerme 2.2.4. $M \in Sp_n(K)$ ve M nin karakteristik değeri λ olsun. Bu durumda $\dfrac{1}{\lambda}$ da M nin bir karakteristik değeridir (Berndt 2000 ve Vaisman 1987).

İspat. Bu ispatı değişik bir yolla yapabiliriz. λ, M nin karakteristik değeri olduğundan $\det(M - \lambda I_{2n}) = 0$ dır.

$$\begin{aligned}
(M - \lambda I_{2n})^t = M^t - \lambda I_{2n} \quad &\Rightarrow \det[(M - \lambda I_{2n})^t] = \det(M - \lambda I_{2n}) \\
&\Rightarrow \det(M^t - \lambda I_{2n}) = 0 \\
&\Rightarrow \det[J^{-1}(M^t - \lambda I_{2n})J] = 0 \\
&\Rightarrow \det[J^{-1}(M^t J) - \lambda I_{2n}] = 0
\end{aligned}$$

elde edilir. $M^t J M = J$ olduğunu biliyoruz. Buradan $M^t J = J M^{-1}$ dir. O halde

$$\begin{aligned}
\det[J^{-1}(M^t J) - \lambda I_{2n}] = 0 \quad &\Rightarrow \det(M^{-1} - \lambda I_{2n}) = 0 \\
&\Rightarrow \det(M^{-1} - \lambda M^{-1} M) = 0 \\
&\Rightarrow \det[M^{-1}(I_{2n} - \lambda M)] = 0 \\
&\Rightarrow \det M^{-1}. \det(I_{2n} - \lambda M) = 0
\end{aligned}$$

ve $\det M^{-1} = \mp 1$ olduğundan

$$\begin{aligned}\det(I_{2n} - \lambda M) = 0 \quad &\Rightarrow \det[(-\lambda)(M - \frac{1}{\lambda} I_{2n})] = 0 \\ &\Rightarrow (-\lambda)^{2n} \det(M - \frac{1}{\lambda} I_{2n}) = 0 \\ &\Rightarrow \det(M - \frac{1}{\lambda} I_{2n}) = 0\end{aligned}$$

olur. Böylece $\frac{1}{\lambda}$ da M nin bir diğer karakteristik değeridir. ■

Benzer şekilde $-\lambda$ nın da M nin bir başka krakteristik değeri olduğu kolayca gösterilebilir.

Önerme 2.2.5. $M \in Sp_n(K)$ matrisinin λ karakteristik değeri kompleks ise $\overline{\lambda}$, $1/\lambda$, $1/\overline{\lambda}$ sayıları da M nin karakteristik değerleridir (Berndt 2000 ve Vaisman 1987).

2.3. Simplektik Altuzaylar

(V, Ω) simplektik uzay, $W \subset V$ altuzay ve $boyV = 2n$, $boyW = k$ olsun. Ayrıca $\Omega|_M : W \times W \to K$ dönüşümünün rankı $2l$ olsun.

$$W^{\perp} = \{v \in V : \Omega(v, w) = 0;\ \forall w \in W\}$$

cümlesine W nın **anti-ortogonal, $\boldsymbol{\Omega}-$ortogonal** veya kısaca **ortogonal uzayı** denir (Berndt 2000 ve Vaisman 1987).

$boyW = k$ olduğundan $boyW^{\perp} = 2n - k$ dır.Gerçekten bu durum, Ω kanonik simplektik formu alınarak kolayca görülebilir. Buradan

$$boyV = boyW + boyW^{\perp}$$

elde edilir.

Şimdi simplektik vektör uzayına ait olan W **nın radikali**nden bahsedeceğiz. Bunun için biraz hazırlık yapalım.

$$\begin{aligned} i: \quad V \times \Lambda^q V^* &\rightarrow \Lambda^{q-1} V^* \\ (v, \Omega) &\rightarrow i(v, \Omega) = i(v)\Omega \end{aligned}$$

olup her $v_1, v_2, ..., v_{q-1} \in V$ için $(i(v)\Omega)(v_1, v_2, ..., v_{q-1}) = \Omega(v, v_1, ..., v_{q-1})$ olduğunu biliyoruz. Eğer $q = 2$ alırsak her $w \in V$ için $(i(v)\Omega)(w) = \Omega(v, w)$ olur. Böylece W nın radikali

$$\begin{aligned} radW &= \{w \in W : i(w)\Omega|_W = 0\} \\ &= \{w \in W : \Omega|_W(w, w') = 0; \;\; \forall w' \in W\} \end{aligned}$$

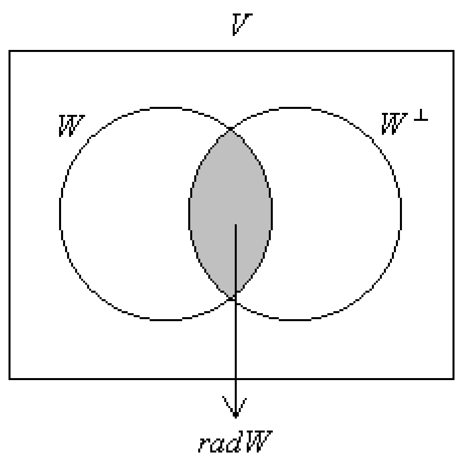
biçiminde tanımlanır (Berndt 2000 ve Vaisman 1987) $rank\Omega|_W = 2l$ olarak aldığımızda $boy(radW) = k - 2l$ olur. Benzer şekilde

$$radW^{\perp} = \{w' \in W^{\perp} : \Omega|_{W^{\perp}}(w', w'') = 0; \;\; \forall w'' \in W^{\perp}\}$$

dir.

Şimdi $radW = radW^{\perp}$ olduğunu gösterelim.

$w \in radW \Leftrightarrow \forall w' \in W$ için $\Omega|_W(w, w') = 0$ dır. $W^{\perp}$ in tanımından $w \in W^{\perp}$ olmak zorundadır. Dolayısıyla $\forall w'' \in W^{\perp}$ için $w \in W^{\perp}$ olduğundan $\Omega|_{W^{\perp}}(w, w'') = 0$ dır. Buradan da $w \in radW^{\perp}$ elde edilir. Yine $radW = W \cap W^{\perp}$ olduğu kolayca görülebilir. Bu durum



Şekil 2.2. W uzayının radikali

şeklinde gösterilebilir. O halde

$$\begin{aligned} boy(W + W^{\perp}) &= boyW + boyW^{\perp} - boy(radW) \\ &= k + 2n - k - (k - 2l) \\ &= 2n + 2l - k \end{aligned}$$

olduğundan $V \neq W + W^{\perp}$ ve $V \neq W \oplus W^{\perp}$ dir.

$\Omega-$ ortogonal uzayları için aşağıdaki özeliklerin sağlandığı kolayca görülebilir.

Önerme 2.3.1. (V, Ω) bir simplektik uzay ve W, W' herhangi iki altuzay olsun. Bu durumda aşağıdaki özelikler vardır:
(i) $W' \subset W \Rightarrow W^{\perp} \subset (W')^{\perp}$
(ii) $(W^{\perp})^{\perp} = W$
(iii) $(W + W')^{\perp} = W^{\perp} \cap (W')^{\perp}$
(iv) $(W \cap W')^{\perp} = W^{\perp} + (W')^{\perp}$ (Berndt 2000).

W altuzayı tarafından elde edilen ilk uzay $W^{\perp}$, ikinci uzay $radW$ idi. W tarafından elde edilen üçüncü uzay ise $W^{U} = W + W^{\perp}$ biçiminde tanımlanır.

$$\dim W^{U} = \dim(W + W^{\perp})$$

$$= \quad 2n + 2l - k$$

olduğunu biliyoruz.

W dan daha fazla uzaylar elde edebiliriz. Özel olarak

$$W^{red} = W/radW$$

bölüm uzayı W dan elde edilen bir simplektik uzaydır. Bu uzayın elemanlarını daha yakından tanıyalım.

$$i(w)\Omega|_W : W \overset{lineer}{\longrightarrow} K$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} radW &= \{w \in W : i(w)\Omega|_W = 0\} \subset W \\ &= \{w \in W : \Omega|_W(w, w') = 0;\ \forall w' \in W\} \subset W \\ &= \text{Çek}\,[i(w)\Omega|_W] \subset W \end{aligned}$$

olur.

$radW$ bir alt vektör uzayıdır. Gerçekten öncelikle $radW \neq \emptyset$ dir. Çünkü her $w' \in W$ için $\Omega|_W(0, w') = 0$ olduğundan $0 \in radW$ dır.
(1) $\forall w_1, w_2 \in radW \Rightarrow w_1 + w_2 \in radW$ olur mu?

$\forall w' \in W$ için $\Omega|_W(w_1, w') = 0$ ve $\Omega|_W(w_2, w') = 0$ olup Ω bilineer olduğundan

$$\Omega|_W(w_1 + w_2, w') = 0 \Rightarrow w_1 + w_2 \in radW.$$

(2) $\forall w \in radW$ ve $\forall c \in K$ için $cw \in radW$ olur mu?

$$\begin{aligned} w \in radW \ &\Rightarrow \forall w' \in W \text{ için } \Omega|_W(w, w') = 0 \\ &\Rightarrow c\Omega|_W(w, w') = 0;\ \Omega \text{ bilineer olduğundan} \\ &\Rightarrow \Omega|_W(cw, w') = 0 \\ &\Rightarrow cw \in radW. \end{aligned}$$

O halde $radW$ bir alt vektör uzayıdır.

$\forall w_1, w_2 \in W$ için

$$\begin{aligned} \forall w' \in W \text{ için } \Omega|_W(w_1, w') = \Omega|_W(w_2, w') \quad &\Leftrightarrow w_2 - w_1 \in radW \\ &\Leftrightarrow w_1 \equiv w_2[\mathrm{mod}(radW)] \end{aligned}$$

ile verilsin. Bu bağıntı bir denklik bağıntısıdır ve W daki elemanları denklik sınıflarına ayırır. W daki tüm denklik sınıflarının cümlesini $W^{red} = W/radW$ ile gösteriyoruz.

$$\begin{aligned} boyW^{red} &= boy(W/radW) \\ &= boyW - boy(radW) \\ &= k - (k - 2l) \\ &= 2l \end{aligned}$$

olur. Herhangi bir $U \subset V$ altuzayı için $W = radW \oplus U$ ise $(U, \Omega|_U)$ bir simplektik uzaydır ve W^{red} uzayına izomorftur. Aynı zamanda U, $radW$ uzayına $\Omega-$ ortogonal olduğundan $W = radW \oplus U$ ifadesi $W = radW \perp U$ biçiminde de yazılabilir.

W dan elde edilen bir başka uzay

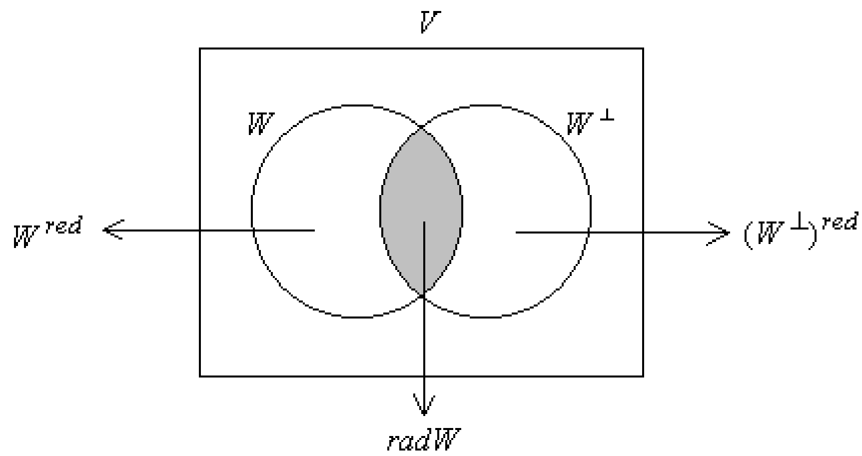
$$(W^{\perp})^{red} = W^{\perp}/radW^{\perp}$$

dır. Buradaki $(W^{\perp})^{red}$ bölüm uzayı da bir simplektik uzaydır.

$$\begin{aligned} boy(W^{\perp})^{red} &= boy(W^{\perp}/radW^{\perp}) \\ &= boyW^{\perp} - boy(radW^{\perp}) \\ &= 2n - k - (k - 2l) \\ &= 2(n - k + l) \end{aligned}$$

olur. Herhangi bir $U' \subset V$ altuzayı için $W^{\perp} = radW^{\perp} \oplus U'$ ise $(U', \Omega|_{U'})$ bir simplektik uzaydır ve $(W^{\perp})^{red}$ uzayına izomorftur. Aynı zamanda $u' \in U'$ olmak üzere $\forall w \in radW^{\perp}$ için $radW^{\perp}$ in tanımından $\Omega(u', w) = 0$ olduğundan U' uzayı $radW^{\perp}$

uzayına $\Omega-$ ortogonaldir. O halde $W^{\perp} = radW^{\perp} \oplus U'$ ifadesi $W^{\perp} = radW^{\perp} \perp U'$ biçiminde de yazılabilir. Bu elde edilen uzayları şekildeki gibi gösterebiliriz.



Şekil 2.3. Simplektik altuzaylar

Bir (V, Ω) simplektik uzayının en önemli simplektik altuzayları aşağıda verilmiştir.

Tanım 2.3.1.

1) Bir $Q \subset V$ altuzayı için $\Omega|_Q = 0$ ise Q ya V nin bir izotropik altuzayı denir.

2) Bir $W \subset V$ altuzayı için $\Omega|_W$ non-degenere ise W ya V nin bir simplektik altuzayı denir.

3) Bir $W \subset V$ altuzayı için $\Omega|_{W^{\perp}} = 0$ ise W ya V nin bir koizotropik altuzayı denir.

4) Bir $L \subset V$ altuzayı için $\Omega|_L = 0$ ve $\Omega|_{L^{\perp}} = 0$ ise L ye V nin bir Lagrange altuzayı denir (Berndt 2000 ve Vaisman 2000).

Önce Lagrange altuzaylarını tartışacağız. Üstelik altuzayların boyut ve rankının yalnızca iki simplektik invaryant olduğunu göstereceğiz.

2-boyutlu simplektik uzay P olsun. Yani, $P = Sp\{e, e_*\}$, $\Omega(e,e) = \Omega(e_*, e_*) = 0$ ve $\Omega(e, e_*) = 1$ alalım. Bu durumda P ye bir hiperbolik düzlem, (e, e_*) ikilisine ise bir hiperbolik çift denir. Böylece hiperbolik düzlemlerin ortogonal toplamına bir hiperbolik uzay denir (Berndt 2000).

$$H_{2r} = P_1 \perp P_2 \perp ... \perp P_r$$

bir hiperbolik uzaydır. Şimdi iddia ediyoruz ki, simplektik bir uzay her zaman hiperbolik düzlemlerin bir ortogonal toplamı şeklinde yazılabilir. Yani, simplektik uzay bir hiperbolik düzlemdir.

Gerçekten, (V, Ω) bir simplektik uzay, $boyV = 2n$ ve Ω kanonik simplektik form olsun. V nin simplektik bazını $\{e_1, e_2, ..., e_n, e_{n+1}, ..., e_{2n}\}$ alalım. Eğer

$$\begin{aligned} P_1 &= Sp\{e_1, e_{n+1}\} \\ P_2 &= Sp\{e_2, e_{n+2}\} \\ &\dots\dots\dots \\ P_n &= Sp\{e_n, e_{2n}\} \end{aligned}$$

şeklinde tanımlarsak Ω kanonik simplektik form olduğundan P_i $(1 \leq i \leq n)$ ler hiperbolik düzlem ve (e_i, e_{n+i}) ikilileri de hiperbolik çift olur. Ayrıca $P_i \perp P_j$ $(i \neq j)$ dir. O halde

$$V = P_1 \perp P_2 \perp ... \perp P_n$$

biçiminde yazılabilir.

Aşağıdaki teorem, simplektik dönüşüm kavramının, simplektik formun U ya kısıtlanmasıyla uyumlu olan U altuzaylarının bir dönüşümüne genişletilebileceğini göstermektedir.

Teorem 2.3.1. (V, Ω) bir simplektik uzay ve $U = radU \perp W$ olacak şekilde U ve W iki altuzay olsun. $radU$ nun bir bazını $\{e_1, e_2, ..., e_r\}$ alalım. Bu durumda V de öyle $e_{*1}, e_{*2}, ..., e_{*r}$ elemanları vardır ki, $P_i = Sp\{e_i, e_{*i}\}$ hiperbolik düzlemleri için $P_i \perp P_j$ $(i \neq j)$ ve $P_i \perp W$, $1 \leq i \leq r$ dır. Buradan
(i) $\overline{U} = P_1 \perp P_2 \perp ... \perp P_r \perp W \subset V$ ve $U \subset \overline{U}$ olacak biçimde simplektiktir.
(ii) V' bir simplektik uzay olmak üzere $\phi : U \to V'$ simplektik dönüşümü bir $\overline{\phi} : \overline{U} \to V'$ simpletik dönüşümüne genişletilebilir.

İspat.
(i) İspatı r üzerinde tümevarım uygulayarak yapacağız.

Öncelikle $r = 1$ için doğru mudur? Bu durumda $\overline{U} = P_1 \perp W$ olur. Bu ise açık olarak bir simplektik uzaydır.

Şimdi $r - 1$ için doğru olsun. Yani, $U_0 \subset V$ altuzayı için $U_0 = radU_0 \perp W$ olacak biçimde $radU_0$ ın bazını $\{e_1, e_2, ..., e_{r-1}\}$ alalım. Bu durumda

$$\overline{U} = P_1 \perp P_2 \perp ... \perp P_{r-1} \perp W$$

simplektik uzaydır. Bir $e_r \in U_0^{\perp}$ vardır öyle ki $e_r \notin radU_0 = radU_0^{\perp}$ dir. Öyle bir $a \in U_0^{\perp}$ vardır ki $\Omega(e_r, a) \neq 0$ olur. Ayrıca e_r ve a tarafından gerilen düzlem $U_0^{\perp}$ içindedir. a yerine (e_r, e_{*r}) bir hiperbolik çift olacak biçimde e_{*r} alınabilir.

$P_r = Sp\{e_r, e_{*r}\}$ diyelim. $P_r \subset U_0^{\perp}$ olur Buradan $P_r \perp W$ dır. Ayrıca tümevarım hipotezi uyarınca U_0 dan elde edilen hiperboik düzlemler birbirlerine ve W ya diktirler. $P_r \perp U_0$ olduğundan

$$\overline{U} = P_1 \perp P_2 \perp ... \perp P_r \perp W$$

elde edilir ki, bu ispatı tamamlar.

(ii) ϕ simplektik dönüşümü,

$$\begin{aligned} \phi : \; & U \;\to\; V' \\ & e_i \;\to\; \phi(e_i) = e_i' \end{aligned}$$

ve $\phi(w) = w'$ olacak biçimde verilsin. (i) uyarınca, $U = radU \perp W$ olmak üzere $radU$ nun bazının $\{e_1, e_2, ..., e_r\}$ olduğunu biliyoruz. Bu durumda V de öyle $e_{*1}, e_{*2}, ..., e_{*r}$ elemanları bulunabilir ki $P_i = Sp\{e_i, e_{*i}\}$ hiperbolik düzlemleri için

$$\overline{U} = P_1 \perp P_2 \perp ... \perp P_r \perp W$$

olduğunu biliyoruz. ϕ, 1:1 bir lineer dönüşüm olduğundan $\phi(U) = U'$ olmak üzere $radU' = Sp\{e_1', e_2', ..., e_r'\}$ olur. Buradan $U' = radU' \perp W'$ olacak biçimde (i) den $P_i' = Sp\{e_i', e_{*i}'\}$ olmak üzere $e_{*i}' \in V'$ elemanları vardır, öyle ki $P_i' \perp P_j'$ $(i \neq j)$ ve $P_i' \perp W'$ $(1 \leq i \leq r)$ dir. O halde $\overline{\phi}(e_{*i}) = e_{*i}'$ kuralı ϕ nin istenilen genişletmesidir. ■

Sonuç 2.3.1. V ve V' izomorf simplektik uzaylar, $U \subset V$ bir altuzay ve $\phi : U \to V'$ bir simplektik dönüşüm olsun. Bu durumda ϕ dönüşümü bir $\overline{\phi} : V \to V'$ izomorfizmine genişletilebilir.

İspat. Teorem 4.1 den ϕ, bir $\overline{U} \to V'$ simplektik dönüşümüne genişletilebilir. Eğer özel olarak $V = U \perp U^{\perp}$ alırsak, U bir simplektik uzay olduğundan hiperbolik düzlemlerin ortogonal toplamı şeklinde yazılabilir. Buradan $V = P_1 \perp P_2 \perp ... \perp P_r \perp U^{\perp}$ elde edilir ki Teorem 4.1 den $\overline{\phi} : V \to V'$ dönüşümü de bir simplektik dönüşüm olur. ■

Simplektik altuzayların yanısıra Lagrange altuzayları da çok önemlidir. Şimdi bu konuyla ilgili bir özet verelim.

(V, Ω) bir simplektik uzay, $W \subset V$ bir altuzay ve $boyV = 2n$, $boyW = k$ olsun. Bu durumda

$$W \text{ izotropiktir } \Leftrightarrow \Omega|_W = 0$$

dır. Burada

$$\begin{array}{rccl} \Omega|_W : & W \times W & \longrightarrow & K \\ & (w, w') & \longrightarrow & \Omega|_W(w, w') = 0 \end{array}$$

ve $radW = \{w \in W : \Omega|_W(w, w') = 0, \ \forall w' \in W\}$ olduğundan $\Omega|_W = 0$ $\Rightarrow W = radW$ dır. Ayrıca $radW = W \cap W^{\perp}$ olduğundan

$$\begin{aligned} radW = W \cap W^{\perp} & \Rightarrow W \subset W^{\perp} \\ & \Rightarrow boyW \leq boyW^{\perp} \\ & \Rightarrow k \leq 2n - k \\ & \Rightarrow k \leq n \end{aligned}$$

olur. Diğer yandan

$$
\begin{aligned}
W \text{ koizotropiktir } &\Leftrightarrow \Omega|_{W^\perp} = 0 \\
&\Rightarrow W^\perp = radW = radW^\perp \\
&\Rightarrow W^\perp = W \cap W^\perp \\
&\Rightarrow W^\perp \subset W \\
&\Rightarrow boyW^\perp \leq boyW \\
&\Rightarrow 2n - k \leq k \\
&\Rightarrow n \leq k
\end{aligned}
$$

ve

$$
\begin{aligned}
W \text{ Lagrangedir } &\Leftrightarrow \Omega|_W = 0 \text{ ve } \Omega|_{W^\perp} = 0 \\
&\Rightarrow W \subset W^\perp \text{ ve } W^\perp \subset W \\
&\Rightarrow W = W^\perp \\
&\Rightarrow 2n - k = k \\
&\Rightarrow n = k
\end{aligned}
$$

olur. Sonuç olarak bir L Lagrange altuzayı maksimal izotropik altuzay olarak tanımlanabilir.

Önerme 2.3.2. (V, Ω) bir simplektik uzay ve W, V nin koizotropik altuzayı, yani $\Omega|_{W^\perp} = 0$ olsun. L, V de bir Lagrange altuzayı olmak üzere $L \cap W$ nın görüntüsü W^{red} indirgenmiş uzayı üzerine izdüşüm altında bir Lagrange altuzayıdır.

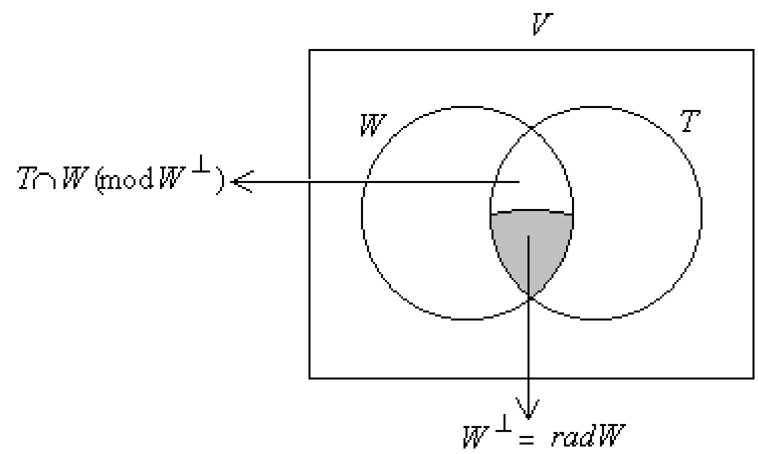
İspat. W bir koizotropik altuzay olduğundan $W^\perp \subset W$ dır. Yani, W^{red} uzayı mevcuttur. Herhangi bir $T \subset V$ altuzayı için W^{red} uzayında $T \cap W$ nın $\phi : V \to V$ simplektik dönüşümü altındaki görüntüsünü $T \cap W \pmod{W^\perp}$ ile tanımlayalım. W^{red} uzayında

$$[T \cap W \pmod{W^\perp}]^\perp = T^\perp \cap W \pmod{W^\perp}$$

olur. Eğer T yerine L Lagrange uzayını alırsak $L^\perp = L$ olduğundan

$$
\begin{aligned}
[L \cap W \pmod{W^\perp}]^\perp &= L^\perp \cap W \pmod{W^\perp} \\
&= L \cap W \pmod{W^\perp}
\end{aligned}
$$

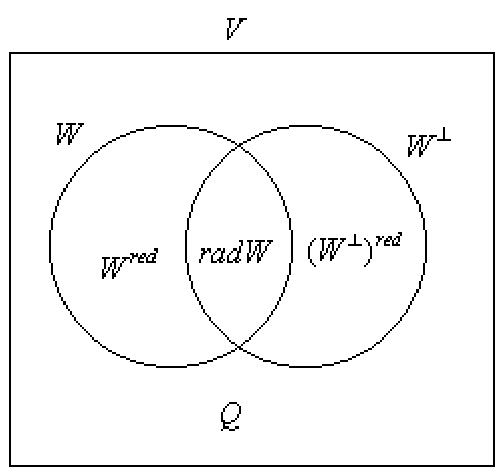
elde ederiz. Bu bize $L \cap W$ altuzayının W^{red} altuzayı üzerindeki görüntüsünün de bir Lagrange altuzayı olduğunu gösterir. ■



Şekil 2.4. Koizotropik ve simplektik altuzaylar

Teorem 2.3.2. (V, Ω) bir simplektik uzay olsun. Bir $W \subset V$ altuzayı için $W^{\sigma} = radW \oplus Q$ olacak biçimde öyle bir $Q \subset V$ izotropik altuzayı vardır ki (bu altuzay tek değildir) Q, V nin bir simplektik altuzayıdır ve $V = W^{\sigma} \oplus W^{red} \oplus (W^{\perp})^{red}$ gerçeklenir.

İspat.



Şekil 2.5. İzotropik ve simplektik altuzaylar

Açık olarak $radW \subset [W^{red} \oplus (W^{\perp})^{red}]^{\perp}$ dir. Bir $Q' \subset V$ altuzayı için $radW \oplus Q' =$

$[W^{red} \oplus (W^{\perp})^{red}]^{\perp}$ yazabiliriz. Buradaki Q' altuzayı $W^U = W + W^{\perp}$ uzayına ilavedir.

$$boy(radW) = k - 2l, \quad boyW^{red} = 2l$$

ve

$$\begin{aligned} boy(W^{\perp})^{red} &= (2n - k) - (k - 2l) \\ &= 2n - 2k + 2l \end{aligned}$$

olduğunu biliyoruz. Buradan

$$\begin{aligned} boy[W^{red} \oplus (W^{\perp})^{red}] &= boyW^{red} + boy(W^{\perp})^{red} \\ &= 2l + 2n - 2k + 2l \\ &= 2n - 2k + 4l \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} boy[W^{red} \oplus (W^{\perp})^{red}]^{\perp} &= 2n - boy[W^{red} \oplus (W^{\perp})^{red}] \\ &= 2n - (2n - 2k + 4l) \\ &= 2k - 4l \end{aligned}$$

olur. O halde

$$\begin{aligned} radW \oplus Q' = [W^{red} \oplus (W^{\perp})^{red}]^{\perp} &\Rightarrow boy[radW \oplus Q'] = boy\{W^{red} \oplus (W^{\perp})^{red}]^{\perp}\} \\ &\Rightarrow k - 2l + boyQ' = 2k - 4l \\ &\Rightarrow boyQ' = k - 2l \end{aligned}$$

bulunur. Böylece $boyQ' = boy(radW)$ elde ederiz.

$$\begin{aligned} \Omega^b : \; V &\longrightarrow V^* \\ v &\longrightarrow (\Omega^b(v))(v') = \Omega(v, v') \end{aligned}$$

izomorfizmi altında

$$radW \approx (V \backslash W^U)^* \approx Q'^*$$

yazabiliriz. O halde $\{a_1, a_2, ..., a_{k-2l}\}$ cümlesi $radW$ nin bir bazı ise $\{\Omega^b(a_1), \Omega^b(a_2), ..., \Omega^b(a_{k-2l})\}$ cümlesi de Q'^* ın bir bazı olur. Şimdi $\{q'_1, q'_2, ..., q'_{k-2l}\}$ cümlesi Q' nün dual bazı olsun. Yani

$$(\Omega^b(a_t))(q'_s) = \Omega(a_t, q'_s) = \delta_{ts} \ ; \quad (s, t = 1, 2, ..., k-2l)$$

dir. Şimdi $q_t = q'_t + \lambda_t^s a_s$ dönüşümünü düşünelim. Bu durumda

$$\begin{aligned}
\Omega(q_t, q_s) &= \Omega(q'_t + \lambda_t^k a_k, q'_s + \lambda_s^p a_p) \\
&= \Omega(q'_t, q'_s) + \lambda_s^p \Omega(q'_t, a_p) + \lambda_t^k \Omega(a_k, q'_s) + \lambda_t^k \lambda_s^p \Omega(a_k, a_p) \\
&= \Omega(q'_t, q'_s) + \lambda_s^t + \lambda_t^s
\end{aligned}$$

olur. Burada λ_s^t sabit sayılarını $\Omega(q_t, q_s) = 0$ olacak biçimde alabiliriz. Böylece

$$Q = Sp\{q_1, q_2, ..., q_{k-2l}\}$$

altuzayı izotropik altuzay olur. Sonuç olarak eğer $L \subset V$ bir Lagrange altuzayı ise $V = L \oplus L^\perp$ yazabiliriz. ■

Tanım 2.3.2. V bir simplektik uzay olsun. V nin bir

$$\{e_1, ..., e_{k-2l}, e_{k-2l+1}, ..., e_{k-l}, e_{k-l+1}, ..., e_k, e_{k+1}, ..., e_n,$$
$$e_{*1}, ..., e_{*(k-2l)}, e_{*(k-2l+1)}, ..., e_{*(k-l)}, e_{*(k-l+1)}, ..., e_{*k}, e_{*(k+1)}, ..., e_{*n}\}$$

bazına $W \subset V$ altuzayına uyumludur denir. Eğer

(i) $radW = Sp\{e_1, ..., e_{k-2l}\}$, $Q = Sp\{e_{*1}, ..., e_{*(k-2l)}\}$ (Q, izotropik altuzay)

(ii) $W^{red} = Sp\{e_{k-2l+1}, ..., e_{k-l}, e_{*(k-2l+1)}, ..., e_{*(k-l)}\}$ ve

$(W^\perp)^{red} = Sp\{e_{k-l+1}, ..., e_n, e_{*(k-l+1)}, ..., e_{*n}\}$ oluyor ise, böyle bir bazın varlığı açıktır (Berndt 2000).

Sonuç 2.3.2. W_1 ve W_2, (V, Ω) simplektik uzayının aynı k boyutlu ve $2l$ ranklı altuzayları olsun. Bu durumda $\sigma(W_1) = W_2$ olacak biçimde bir $\sigma : V \to V$ otomorfizmi vardır.

İspat. W_1 ve W_2 altuzaylarıyla uyumlu V de iki baz alalım. σ otomorfizmini W_1 ve W_2 nin birinin bazından diğerinin bazına gidecek biçimde tanımlarsak ispat tamamlanır. ■

Sonuç 2.3.2 göstermektedir ki, boyut ve rank, bir simplektik altuzayın iki bağımsız simplektik invaryantlarıdır.

Tanım 2.3.3. $\mathcal{L}(V) = \{L \subset V : L^{\perp} = L\}$ Lagrange altuzaylarının cümlesidir. Sonuç 2.3.2 den $\forall L_1, L_2 \in \mathcal{L}(V)$ için $\phi(L_1) = L_2$ olacak biçimde bir $\phi \in Sp(V)$ olduğundan $Sp(V)$, $\mathcal{L}(V)$ cümlesi üzerinde geçişmelidir. Bu ise $\mathcal{L}(V)$ nin homogen uzay yapısına sahip olduğunu gösterir (Berndt 2000 ve Vaisman 1987).

$L \in \mathcal{L}(V)$ nin izotropi grubu G_L ile gösterilir. Yani,

$$G_L = \{\phi \in Sp(V) : \phi(L) = L,\ L \in \mathcal{L}(V)\}$$

dir. $\{(e_i, e_{*i}) : 1 \leq i \leq n\}$ cümlesi V simplektik uzayının L altuzayı ile uyumlu bir bazı olsun. Bu durumda $L = Sp\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ dir.

$$V \cong K^{2n},\ Sp(V) \cong Sp_n(K) \text{ ve } L \cong L_0 = Sp\{e_1^0, e_2^0, ..., e_n^0\}$$

alınırsa

$$\begin{array}{rccc} \phi : & V & \longrightarrow & V \\ & e_i & \longrightarrow & \phi(e_i) = e_j \end{array}$$

simplektik dönüşümüne karşılık gelen matris $\begin{bmatrix} A & B \\ 0 & D \end{bmatrix}$ şeklinde olur. Daha önce simplektik matrislerin özeliğinden $A^tC - C^tA = 0$, $B^tD - D^tB = 0$ ve $A^tD - C^tB = I$

olduğunu biliyoruz. O halde

$$G_{L_0} = \left\{ \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & A^* \end{bmatrix} : B^t A^* - (A^*)^t B = 0,\ A^* = (A^t)^{-1} \right\}$$

bulunur. Buradan $\mathcal{L}(V)$ Lagrange altuzaylarının cümlesi ile $Sp_n(K)$ daki G_{L_0} matrislerinin cümlesi arasında $1:1$ ve örten

$$\begin{aligned} G_{L_0} &\longleftrightarrow \mathcal{L}(V) \\ M &\longleftrightarrow L_0 = M(L_0) \end{aligned}$$

şeklinde bir dönüşüm vardır.

Benzer şekilde bir simplektik uzayın ilginç altuzaylarının başka bir ailesini de tanımlayabiliriz.

Verilen bir $L \subset V$ Lagrange altuzayı için L ye geçişli olan tüm L' Lagrange altuzaylarının cümlesi

$$\mathcal{T}(L) = \{L' \in \mathcal{L}(V) : V = L \oplus L',\ \phi(L) = L \text{ ve } \phi(L') = L'\}$$

olsun. $\phi(L) = L$ olduğundan ϕ ye karşılık gelen matrisin $\begin{bmatrix} A & B \\ 0 & A^* \end{bmatrix}$ olduğunu biliyoruz. Ayrıca $L = Sp\{e_i\}$, $L' = Sp\{e_{*i}\}$, $1 \le i \le n$ ve $V = L \oplus L'$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \phi(L') = L' \quad &\Rightarrow \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & A^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ e'_* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ e'_* \end{bmatrix} \\ &\Rightarrow B = 0 \end{aligned}$$

dır. O halde L ve L' ile belirtilen $G_{L,L'} \subset G_L \subset Sp(V)$ izotropi grubu doğal olarak $GL_n(K) = GL(2n, K)$ ya izomorfik olan $\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & A^* \end{bmatrix}$, $A^* = (A^t)^{-1}$ matrislerinin grubu ile özdeş yapılabilir.

2.4. Reel Simplektik Uzayların Kompleks Yapıları

Tanım 2.4.1. V bir reel vektör uzayı olsun. Bir $J : V \to V$ lineer endomorfizmi için $J^2 = -I$ ise, J ye V üzerinde bir kompleks yapı denir. Burada $I : V \to V$ özdeşlik dönüşümüdr.

Tanım 2.4.2. V, üzerinde bir J kompleks yapı tanımlı olan reel bir vektör uzayı olsun. Bu durumda $J : V \to V$, $J^2 = -I$ dır.
Eğer özel olarak her $x \in V$ için

$$J(x) = \sqrt{-1}\,x = ix$$

olarak tanımlarsak o zaman herhangi bir $\lambda = a + ib \in \mathbb{C}$ için

$$\begin{aligned} \cdot :\ \ \mathbb{C} \times V &\to V \\ (\lambda, x) &\to \lambda \cdot x = (a + ib) \cdot x \\ & = ax + ib \\ & = ax + bJ(x) \end{aligned}$$

yazabiliriz. Böylece V reel vektör uzayını bir kompleks vektör uzayı olarak görebiliriz. Dolayısıyla V reel vektör uzayı çift boyutlu bir vektör uzayı olmak zorundadır (bir kompleks vektör uzayı, reel sayılar cismi üzerinde çift boyutludur).

V reel vektör uzayının komplekleştirilmesini $V_{\mathbb{C}}$ ile gösterelim. Dolayısıyla

$$V_{\mathbb{C}} = \{x + iy : x, y \in V\}$$

şeklindedir. Bu cümle, toplama ve skalarla çarpma işlemleriyle birlikte $\mathbb{C}$ üzerinde bir vektör uzayı olur.

Her $x \in V$ için $x + i0 \in V_{\mathbb{C}}$ olduğundan $V \subset V_{\mathbb{C}}$ dir.

V üzerinde tanımlı J kompleks yapısını $V_{\mathbb{C}}$ uzayına şöyle genişletebiliriz:

$$\begin{array}{rlcl} J_{\mathbb{C}}: & V_{\mathbb{C}} & \rightarrow & V_{\mathbb{C}} \\ & x+iy & \rightarrow & J_{\mathbb{C}}(x+iy)=J(x)+iJ(y) \end{array}$$

dönüşümü kompleks bir lineer endomorfizm olup $J_{\mathbb{C}}^2=-I$ olduğundan $V_{\mathbb{C}}$ üzerinde bir kompleks yapıdır.

Şimdi de V nin bazını $V_{\mathbb{C}}$ nın bazına genişletelim. $boyV=2n$ olsun. Bu durumda $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n\in V$ olacak biçimde V nin $\{\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n,J(\alpha_1),J(\alpha_2),...,J(\alpha_n)\}$ şeklinde bir bazı vardır. $z_k=\frac{1}{2}\left(\alpha_k-iJ(\alpha_k)\right)$ diyelim. O halde $\overline{z_k}=\frac{1}{2}\left(\alpha_k-iJ(\alpha_k)\right)$, $1\leq k\leq n$ olur. Dolayısıyla $\{z_1,z_2,...,z_n,\overline{z_1},\overline{z_2},...,\overline{z_n}\}$, $V_{\mathbb{C}}$ uzayının bir bazıdır.

$J_{\mathbb{C}}(z_k)=iz_k$ ve $J_{\mathbb{C}}(\overline{z_k})=-i\,\overline{z_k}$ olduğundan i ve $-i$ sayıları $J_{\mathbb{C}}$ lineer endomorfizminin eigen değerleridir. Buradan

$$V_{\mathbb{C}}^{+}=\{z\in V_{\mathbb{C}}:J_{\mathbb{C}}(z)=iz\} \text{ ve } V_{\mathbb{C}}^{-}=\{z\in V_{\mathbb{C}}:J_{\mathbb{C}}(z)=-iz\}$$

cümlelerini tanımlayabiliriz. O halde $V_{\mathbb{C}}=V_{\mathbb{C}}^{+}\oplus V_{\mathbb{C}}^{-}$ elde ederiz. Herhangi bir $z\in V_{\mathbb{C}}$ sayısı

$$z=\frac{1}{2}\left(z-iJ_{\mathbb{C}}(z)\right)+\frac{1}{2}\left(z+iJ_{\mathbb{C}}(z)\right)$$

şeklinde yazılabilir. Burada

$$\frac{1}{2}\left(z-iJ_{\mathbb{C}}(z)\right)\in V_{\mathbb{C}}^{+} \text{ ve } \frac{1}{2}\left(z+iJ_{\mathbb{C}}(z)\right)\in V_{\mathbb{C}}^{-}$$

olur. Eğer $z=\frac{1}{2}\left(x-iJ(x)\right)$ yazarsak

$$V_{\mathbb{C}}^{+}=\{x-iJ(x):x\in V\} \text{ ve } V_{\mathbb{C}}^{-}=\{x+iJ(x):x\in V\}$$

oldukları kolayca görülebilir.

Benzer düşünceler V nin V^* dual uzayı için de geçerlidir (Berndt 2000).

Örnek 2.4.1. Özel olarak $V = \mathbb{R}^2$ alalım ve $\mathbb{R}^2$ yi kompleksleştirelim. $\mathbb{R}^2$ nin standart bazı $\{e_1, e_2\}$ olmak üzere

$$\begin{aligned} J: \ \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ e_1 &\rightarrow J(e_1) = e_2 \\ e_2 &\rightarrow J(e_2) = -e_1 \end{aligned}$$

şeklinde bir lineer otomorfizm tanımlayalım.

$$\begin{aligned} J^2(e_1) &= J(J(e_1)) = J(e_2) = -e_1 \Rightarrow J^2 = -I \\ J^2(e_2) &= J(J(e_2)) = J(-e_1) = -e_2 \Rightarrow J^2 = -I \end{aligned}$$

olduğundan J, $\mathbb{R}^2$ üzerinde bir kompleks yapıdır.

Böylece $(\mathbb{R}^2, J)$ ikilisi bir kompleks vektör uzayı olarak görülebilir. Bu durumda $\mathbb{R}^2$ nin bazı $\{e_1, J(e_1)\}$ veya $\{e_2, J(e_2)\}$ olarak alınabilir.

$\mathbb{R}^2$ nin kompleksleştirilmesini $\mathbb{R}^2_{\mathbb{C}}$ ile gösterelim. Bu nedenle

$$\mathbb{R}^2_{\mathbb{C}} = \{x + iy : x, y \in \mathbb{R}^2\}$$

olur. $\mathbb{R}^2$ üzerindeki J kompleks yapısını $\mathbb{R}^2_{\mathbb{C}}$ üzerine genişletelim.

$$\begin{aligned} J_{\mathbb{C}}: \ \mathbb{R}^2_{\mathbb{C}} &\rightarrow \mathbb{R}^2_{\mathbb{C}} \\ x + iy &\rightarrow J_{\mathbb{C}}(x + iy) = J(x) + iJ(y) \end{aligned}$$

şeklinde tanımlı dönüşüm, bir kompleks endomorfizm olup $J^2_{\mathbb{C}} = -I$ olduğundan $\mathbb{R}^2_{\mathbb{C}}$ üzerinde bir kompleks yapıdır.

$\mathbb{R}^2$ nin bir bazının $\{e_1, J(e_1)\}$ olduğunu biliyoruz. Şimdi bu bazı $\mathbb{R}^2_{\mathbb{C}}$ nin bazına genişletelim. Bunun için önce $z_1 = \frac{1}{2}(e_1 - iJ(e_1))$ diyelim. O halde $\overline{z_1} = \frac{1}{2}(e_1 + iJ(e_1))$ olur. Buradan

$$\left\{ z_1 = \frac{1}{2}(e_1 - ie_2), \ \overline{z_1} = \frac{1}{2}(e_1 + ie_2) \right\}$$

$\mathbb{R}^2_{\mathbb{C}}$ nin bir bazıdır. $J_{\mathbb{C}}(z_1) = iz_1$ ve $J_{\mathbb{C}}(\overline{z_1}) = -i\,\overline{z_1}$ olduğundan i ve $-i$, $J_{\mathbb{C}}$ lineer endomorfizminin eigen değerleridir. Bu eigen değerlere karşılık gelen eigen uzayları tanımlayalım:

$$\begin{aligned}
(\mathbb{R}^2_{\mathbb{C}})^+ &= \{z \in \mathbb{R}^2_{\mathbb{C}} : J_{\mathbb{C}}(z) = iz\} = \{z - iJ_{\mathbb{C}}(z) : z \in \mathbb{R}^2_{\mathbb{C}}\}, \\
(\mathbb{R}^2_{\mathbb{C}})^- &= \{z \in \mathbb{R}^2_{\mathbb{C}} : J_{\mathbb{C}}(z) = -iz\} = \{z + iJ_{\mathbb{C}}(z) : z \in \mathbb{R}^2_{\mathbb{C}}\}
\end{aligned}$$

olur. Eğer $z = \dfrac{1}{2}(e_1 - iJ(e_1))$ yazarsak, bu durumda

$$\begin{aligned}
(\mathbb{R}^2_{\mathbb{C}})^+ &= Sp\{e_1 - iJ(e_1) : e_1 \in \mathbb{R}^2\} = \{x - iJ(x) : x \in \mathbb{R}^2\}, \\
(\mathbb{R}^2_{\mathbb{C}})^- &= Sp\{e_1 + iJ(e_1) : e_1 \in \mathbb{R}^2\} = \{x + iJ(x) : x \in \mathbb{R}^2\}
\end{aligned}$$

elde ederiz. Buradan $\overline{(\mathbb{R}^2_{\mathbb{C}})^+} = (\mathbb{R}^2_{\mathbb{C}})^-$ olup her $z \in \mathbb{R}^2_{\mathbb{C}}$ için

$$z = \frac{1}{2}(z - iJ_{\mathbb{C}}(z)) + \frac{1}{2}(z + iJ_{\mathbb{C}}(z))$$

yazabiliriz. O halde sonuç olarak

$$\mathbb{R}^2_{\mathbb{C}} = (\mathbb{R}^2_{\mathbb{C}})^+ \oplus (\mathbb{R}^2_{\mathbb{C}})^-$$

elde edilir.

Tanım 2.4.3. (V, Ω) bir reel simplektik vektör uzayı ve J, V üzerinde bir kompleks yapı olsun. Eğer her $u, v \in V$ için

$$\Omega(J(u), J(v)) = \Omega(u, v)$$

ise, bu durumda J ile Ω uyumludur denir (Berndt 2000 ve Vaisman 1987).

Şimdi J ile Ω uyumulu bir yapı olsun. Her $u, v \in V$ için

$$g(u, v) = \Omega(u, J(v))$$

olarak tanımlayalım. Bu durumda g, simetrik, bilineer ve non-dejeneredir. Gerçekten

$$\begin{aligned} g(u,v) &= \Omega(u,Jv) \\ &= u^t J(Jv) \\ &= u^t J^2 v \\ &= -u^t v \end{aligned}$$

olup

$$J = \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow J^2 = -I$$

dır. Dolayısıyla $g(u,v) = -<u,v>$ olduğundan g, simetrik ve bilineerdir. Ayrıca Ω non-dejenere olduğundan g de non-dejeneredir ve şu özeliklere sahiptir:
(i) $g(J(u),v) = \Omega(J(u),J(v)) = \Omega(u,v)$,
(ii) $g(J(u),J(v)) = \Omega(J(u),J(J(v))) = \Omega(J(u),-v) = \Omega(v,J(u)) = g(v,u)$.

Tanım 2.4.4. (V,Ω) bir simplektik vektör uzayı olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} g: \ V\times V &\rightarrow \mathbb{R} \\ (u,v) &\rightarrow g(u,v) = \Omega(u,J(v)) \end{aligned}$$

simetrik, bilineer ve non-dejenere dönüşümüne Ω ile uyumlu Pseudo Hermityen metrik denir.

Eğer her $u \in V$ için $g(u,u) \geq 0$ ise, g ye Hermityen metrik ve bu durumda J ye pozitif uyumlu kompleks yapı denir (Berndt 2000 ve Vaisman 1987).

Teorem 2.4.1. Her (V,Ω) reel simplektik vektör uzayında pozitif uyumlu kompleks bir J yapısı ve g Hermityen yapısı vardır.

İspat. *boy*$V = 2n$ ve V nin simplektik bazı $\{e_1,...,e_n,e_{*1},...,e_{*n}\}$ olmak üzere

$$\Omega(e_i,e_j) = \Omega(e_{*i},e_{*j}) = 0, \ 1 \leq i,j \leq n$$

ve

$$\Omega(e_i, e_{*j}) = \delta_{ij}$$

gerçeklensin. Şimdi

$$\begin{aligned} J: \ V &\rightarrow V \\ e_i &\rightarrow J(e_i) = e_{*i} \\ e_{*i} &\rightarrow J(e_{*i}) = -e_i \end{aligned}$$

şeklinde bir J lineer endomorfizmi tanımlayalım. Burada $J^2 = -I$ dır, yani bir kompleks yapıdır. Ayrıca her $u, v \in V$ için

$$g(u, v) = \Omega(u, J(v))$$

diyelim. Yukarıda tanımlanan J ile g, simetrik, bilineer ve pozitif tanımlıdır. Gerçekten, g nin bilineerliği kolayca görülebilir. Burada simetrik ve pozitif tanımlılığını gösterelim.

Simetri özelliği: Her $u, v \in V$ için

$$u = \sum_{j=1}^{n} a_j e_j + \sum_{j=1}^{n} b_j e_{*j} \text{ ve } v = \sum_{k=1}^{n} c_k e_k + \sum_{k=1}^{n} d_k e_{*k}$$

şeklinde yazabiliriz. Buradan

$$\begin{aligned} J(u) &= \sum_{j=1}^{n} a_j J(e_j) + \sum_{j=1}^{n} b_j J(e_{*j}) \\ &= \sum_{j=1}^{n} a_j e_{*j} - \sum_{j=1}^{n} b_j e_j \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} J(v) &= \sum_{k=1}^{n} c_k J(e_k) + \sum_{k=1}^{n} d_k J(e_{*k}) \\ &= \sum_{k=1}^{n} c_k e_{*k} - \sum_{k=1}^{n} d_k e_k \end{aligned}$$

olur. Dolayısıyla

$$
\begin{aligned}
g(u,v) &= \Omega(u, J(u)) \\
&= \Omega\left(\sum_{j=1}^{n} a_j e_j + \sum_{j=1}^{n} b_j e_{*j}, \sum_{k=1}^{n} c_k e_{*k} - \sum_{k=1}^{n} d_k e_k\right) \\
&= \Omega\left(\sum_{j=1}^{n} a_j e_j, \sum_{k=1}^{n} c_k e_{*k}\right) - \Omega\left(\sum_{j=1}^{n} b_j e_{*j}, \sum_{k=1}^{n} d_k e_k\right) \\
&= \sum_{j,k=1}^{n} a_j c_k \Omega(e_j, e_{*k}) - \sum_{j,k=1}^{n} b_j d_k \Omega(e_k, e_{*j}) \\
&= \sum_{j,k=1}^{n} a_j c_k \delta_{jk} + \sum_{j,k=1}^{n} b_j d_k \delta_{kj} \\
&= \sum_{j=1}^{n} (a_j c_j + b_j d_j) \qquad (2.4.1)
\end{aligned}
$$

elde edilir. Şimdi de $g(v,u)$ nun değerini hesaplayaım.

$$
\begin{aligned}
g(v,u) &= \Omega(v, J(u)) \\
&= \Omega\left(\sum_{k=1}^{n} c_k e_k + \sum_{k=1}^{n} d_k e_{*k}, \sum_{j=1}^{n} a_j e_{*j} - \sum_{j=1}^{n} b_j e_j\right) \\
&= \Omega\left(\sum_{k=1}^{n} c_k e_k, \sum_{j=1}^{n} a_j e_{*j}\right) - \Omega\left(\sum_{k=1}^{n} d_k e_{*k}, \sum_{j=1}^{n} b_j e_j\right) \\
&= \sum_{j,k=1}^{n} c_k a_j \Omega(e_k, e_{*j}) - \sum_{j,k=1}^{n} d_k b_j \Omega(e_{*k}, e_j) \\
&= \sum_{j,k=1}^{n} c_k a_j \delta_{jk} + \sum_{j,k=1}^{n} d_k b_j \delta_{jk} \\
&= \sum_{j=1}^{n} (a_j c_j + b_j d_j) \qquad (2.4.2)
\end{aligned}
$$

bulunur. (2.4.1) ve (2.4.2) den $g(u,v) = g(v,u)$ olur. O halde g simetriktir.

Pozitif Tanımlılık:

$$
\begin{aligned}
g(u,u) &= \Omega(u, J(u)) \\
&= \Omega\left(\sum_{j=1}^{n} a_j e_j + \sum_{j=1}^{n} b_j e_{*j}, \sum_{k=1}^{n} a_k e_{*k} - \sum_{k=1}^{n} b_k e_k\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \Omega\left(\sum_{j=1}^{n} a_j e_j, \sum_{k=1}^{n} a_k e_{*k}\right) - \Omega\left(\sum_{j=1}^{n} b_j e_{*j}, \sum_{k=1}^{n} b_k e_k\right) \\
&= \sum_{j,k=1}^{n} a_j a_k \Omega(e_j, e_{*k}) - \sum_{j,k=1}^{n} b_j b_k \Omega(e_{*j}, e_k) \\
&= \sum_{j,k=1}^{n} a_j a_k \delta_{jk} + \sum_{j,k=1}^{n} b_j b_k \delta_{jk} \\
&= \sum_{j=1}^{n} (a_j^2 + b_j^2) \\
&\geq 0
\end{aligned}
$$

olacağından g pozitif tanımlıdır. ■

Örnek 2.4.2. $V = \mathbb{R}^2$ için Örnek 2.4.1 de tanımlanan J kompleks yapısını ele alalım. Üstelik

$$
\begin{aligned}
g: \ \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R} \\
(u, v) &\rightarrow g(u, v) = \Omega(u, J(v))
\end{aligned}
$$

dönüşümünü tanımlayalım. Bu durumda g, simetrik, bilineer ve pozitif tanımlı olur. Yani g, $\mathbb{R}^2$ üzerinde bir Öklid metriğidir.

Tanım 2.4.5. (V, Ω) bir simplektik vektör uzayı olsun. J, V üzerinde bir pozitif uyumlu kompleks yapı ise, (V, Ω, J) üçlüsüne bir Kähler vektör uzay denir. Bu durumda g ye de Kähler metriği denir (Berndt 2000).

Örnek 2.4.3. $\mathbb{R}^2$ nin Ω kanonik simplektik formu ile birlikte bir simplektik vektör uzayı olduğunu biliyoruz. Örnek 2.4.1 de tanımlanan pozitif J kompleks yapısıyla birlikte $(\mathbb{R}^2, \Omega, J)$ üçlüsü bir Kähler vektör uzayı olur.

Şimdi V üzerinde her $u, v \in V$ için

$$
g(u, v) = \Omega(u, J(v))
$$

şeklinde tanımlı g metriğini $V_{\mathbb{C}}$ üzerinde bir $g_{\mathbb{C}}$ metriğine genişletelim. Bunun için önce

$$
g_{\mathbb{C}} : V_{\mathbb{C}} \times V_{\mathbb{C}} \rightarrow \mathbb{C}
$$

dnüşümünü, her $u, v \in V$ için

$$g_{\mathbb{C}}(iu, v) = ig(u, v) \text{ ve } g_{\mathbb{C}}(u, iv) = -ig(u, v)$$

şeklinde tanımlayalım. Böylece $g_{\mathbb{C}}$, $V_{\mathbb{C}}$ üzerinde bir Hermityen metri olur (gerçekten, $g_{\mathbb{C}}$ Hermityen metrik olma özeliklerini sağlar).

$g_{\mathbb{C}}$ nin $V_{\mathbb{C}}^{+}$ ye kısıtlanması:

$$\begin{aligned}
g_{\mathbb{C}}(v - iJ(v), w - iJ(w)) &= g_{\mathbb{C}}(v, w) - g_{\mathbb{C}}(v, iJ(w)) - g_{\mathbb{C}}(iJ(v), w) + g_{\mathbb{C}}(iJ(v), iJ(w)) \\
&= g_{\mathbb{C}}(v, w) + ig_{\mathbb{C}}(v, J(w)) - ig_{\mathbb{C}}(J(v), w) + g_{\mathbb{C}}(J(v), J(w)) \\
&= g(v, w) + ig_{\mathbb{C}}(J(w), v) - ig_{\mathbb{C}}(J(v), w) + g(v, w) \\
&= 2g(v, w) - 2i\Omega(v, w) \\
&= 2\left(g(v, w) - i\Omega(v, w)\right)
\end{aligned}$$

bulunur. Her $u, w \in V$ için

$$h(u, w) = g(v, w) - i\Omega(v, w)$$

yazarsak $V_{\mathbb{C}}$ üzerinde Hermityen metriğini elde ederiz. burada $g(v, w)$ reel kısım ve $\Omega(v, w)$ ise imajiner kısımdır. Gerçekten, her $u, w \in V$ için $v = (x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_n)$ ve $w = (x_1', ..., x_n', y_1', ..., y_n')$ şeklinde olup

$$v = (x_1 + iy_1, ..., x_n + iy_n) \in V_{\mathbb{C}}^{+} \text{ ve } w = (x_1' + iy_1', ..., x_n' + iy_n') \in V_{\mathbb{C}}^{+}$$

olur. Yukarıdaki h Hermityen metriğinde bunları yerine yazarsak

$$h(v, w) = v\overline{w}$$

eşitliğinin sağlandığını görürüz.

Önerme 2.4.1.

$$\begin{array}{ccc} V & \rightarrow & V_{\mathbb{C}}^{+} \\ x & \rightarrow & \frac{1}{2}\left(x - iJ(x)\right) \end{array}$$

dönüşümü (V, J, h) ve $(V_{\mathbb{C}}, g_{\mathbb{C}})$ uzaylarının bir izomorfizmini verir.

Gerçekten bu sonuç,

$$g_{\mathbb{C}}(x - iJ(x)), y - iJ(y)) = 2\{g(x, y) - i\Omega(x, y)\}$$

eşitliğinden kolayca elde edilir. Genel olarak yukarıdaki izomorfizm, V nin elemanlarının reel ve kompleks formunu verir.

$\{e_i\}$, $1 \leq i \leq n$, (V, J, h) nın bir kompleks ortomormal bazı olsun. Bu durumda $h(e_i, e_j) = \delta_{ij}$ olur.

$$h(u, w) = g(u, w) - i\Omega(v, w)$$

eşitliğinden

$$\begin{aligned} \delta_{ij} &= h(e_i, e_j) \\ &= g(e_i, e_j) - i\Omega(e_i, e_j) \\ &= g(e_i, e_j) \end{aligned}$$

bulunur. $g(e_i, e_j) = g(J(e_i), J(e_j))$ olduğundan

$$g(e_i, e_j) = g(J(e_i), J(e_j)) = \delta_{ij}$$

elde edilir. Ayrıca

$$g(e_i, J(e_j)) = g(J(e_j), e_i) = \Omega(e_j, e_i) = 0$$

olacağından $\{e_i, J(e_i) = e_{i*}\}$ $(1 \leq i \leq n)$ cümlesi V üzerinde hem simplektik hem de $g-$ortonomal bazdır.

Tersine, eğer $\{e_i, J(e_i)\}$, hem $g-$ortonormal hem de simplektik ise, $\{e_i\}$ bir

$h-$ ortonormal bazdır.

(V, J, h) ile $(V_{\mathbb{C}}^{+}, g_{\mathbb{C}})$ arasındaki lineer izomorfizm ve (V, J, h) nın $\{e_i\}$ konpleks ortonormal bazına karşılık $V_{\mathbb{C}}$ de $\varepsilon_i = \frac{1}{2}(e_i - iJ(e_i))$ ile verilen bir kompleks baz vardır.

Tanım 2.4.6. Hem $g-$ortonormal ve hem de simplektik olan $\{e_i, J(e_i)\}$ bazına (V, Ω, J) nin bir reel birim bazı denir. Karşılık gelen $\left\{\varepsilon_i = \frac{1}{2}(e_i - iJ(e_i))\right\}$ bazına ise $(V_{\mathbb{C}}^{+}, g_{\mathbb{C}})$ nin kompleks birim bazı adı verilir (Berndt 2000).

(V, Ω, J) uzayı hem g metriğini hem de Ω simplektik formunu koruyan lineer dönüşümlerden oluşan otomorfizmlerin özel grubuna sahiptir. Bu otomorfizmler aynı zamanda birim bazı, birim baza götürmeleriyle de karakterize edilirler. Böyle dönüşümlere üniter dönüşümler denir. Üniter dönüşümler bir grup oluştururlar. Bu gruba üniter grup denir ve $U(V, J)$ ile gösterilir. Benzer şekilde üniter grup, (V, J) nin h metriğini koruyan kompleks lineer dönüşümlerin grubu veya $V_{\mathbb{C}}$ nin $g_{\mathbb{C}}$ metriğini koruyan lineer dönüşümlerin grubudur.

Şimdi $\{z_i\}$, $1 \leq i \leq n$, kompleks koordinatlarıyla $\mathbb{C}^n$ uzayı ile (V, J, h) ve $(V_{\mathbb{C}}, g_{\mathbb{C}})$ yi izomorf yapmamıza imkan veren bir birim baz seçelim.

$$g(e_i, e_j) = g(J(e_i), J(e_j)) = \delta_{ij} \text{ ve } g(e_i, J(e_j)) = 0$$

olduğundan h, $\sum_{i=1}^{n} z_i \overline{z_i}$ kanonik Hermityen metrik olur. Bu durumda $U(V, J)$, $U(n)$ üniter matrislerin grubu ile özdeş olur. Diğer taraftan, (V, g) Öklidyen vektör uzayı için g yi koruyan lineer otomorfizmlerin $O(V, g)$ otogonal grubuna sahibiz. $g-$ ortonormal baz sayesinde $O(V, g)$ ile $O(2n)$ ortogonal matris grubunu özdeşleyebiliriz.

Teorem 2.4.2. (V, Ω) bir reel simplektik uzay ve J pozitif uyumlu kompleks yapı olsun. Bu durumda

$$U(V, J) = Sp(V) \cap O(V, g)$$

dir.

Eğer özel olarak $\{x_1, ..., x_n, x_{1*}, ..., x_{n*}\}$ koordinatlarıyla $V = \mathbb{R}^{2n}$ alırsak, Ω kanonik simplektik formu için $g = \sum_{i=1}^{n} ((x_i)^2 + (x_{i*})^2)$ ve kompleks yapı $z_k = x_k + ix_{k*}$ kompleks koordinatlarıyla tanımlanır. Bu durumda

$$U(n) = Sp(n, \mathbb{R}) \cap O(2n)$$

olur.

2.5. Simplektik Manifoldlar

Simplektik geometri, simplektik cebirin genelleştirilmesinden doğmaktadır. Manifoldlar üzerinde simplektik geometriden simplektik manifoldların geometrisini değil; tam olarak manifoldlar üzerinde farklı geometrik yapıların çalışmasını anlıyoruz. Burada simplektik vektör bundle temel rol oynamaktadır.

Tanım 2.5.1. M diferensiyellenebilir $p-$ boyutlu reel bir manifold olsun. Bir $\Omega \in \Omega^2(M)$ için aşağıdaki özelikler sağlanıyorsa Ω ya M üzerinde bir simplektik form, (M, Ω) ikilisine de bir simplektik manifold denir:
(i) $d\Omega = 0$ (Ω formu kapalıdır)
(ii) Her $m \in M$ noktasındaki $T_M(m)$ tanjant uzayı üzerinde $x \in T_M(m)$ olmak üzere her $y \in T_M(m)$ için $\Omega_m(x, y) = 0 \Rightarrow x = 0$ dır (non-dejenere özelliği) (Berndt 2000 ve Vaisman 1987).

Bu durumda her bir $m \in M$ için $T_M(m)$ bir simplektik uzay olur. Böylece $boyM = p$ için $p = 2n$, yani çift olmak zorundadır.

Şunu da hemen belirtelim ki, her çift boyutlu manifoldbir simplektik yapıya sahip değildir.

Örnek 2.5.1. $M = \mathbb{R}^{2n}$ alalım. $\mathbb{R}^{2n}$ deki $\{x_1, x_2, ..., y_1, y_2, ..., y_n\}$ koordinat fonksiyonları verilsin. Bu durumda

$$\Omega_0 = \sum_{i=1}^{n} dx_i \wedge dy_i$$

$2-$ formu, simplektik $2-$ formdur. Böylece

$$\left\{\frac{\partial}{\partial x_1}|_p, \frac{\partial}{\partial x_2}|_p, ..., \frac{\partial}{\partial x_n}|_p, \frac{\partial}{\partial y_1}|_p, \frac{\partial}{\partial y_2}|_p, ..., \frac{\partial}{\partial y_n}|_p\right\}$$

cümlesi $T_M(p)$ nin bir simplektik bazıdır.

Örnek 2.5.2. $M = S^2$ alalım. Burada S^2 yi $\mathbb{R}^3$ deki birim vektörlerin cümlesi olarak almakayız. S^2 ye p noktasında teğet olan vektörler p ye dik olan vektörlerle özdeşleştirilebilirler. Böylece S^2 üzerindeki standart simplektik form

$$\Omega_p(u, v) =< p, u \times v >; \ u, v \in T_{S^2}(p) \cong \{p\}^{\perp} \text{ için}$$

biçimindedir.

S^2 iki boyutlu bir manifold olduğundan $d\,\Omega = 0$, yani Ω formu kapalıdır. Ayrıca Ω non-dejeneredir. Çünkü $u \in T_{S^2}(p)$ olmak üzere her $v \in T_{S^2}(p)$ için

$$\begin{aligned} \Omega_p(u, v) = 0 \ &\Rightarrow < p, u \times v >= 0, \ \forall v \in T_{S^2}(p) \\ &\Rightarrow u \times v \\ &\Rightarrow u = 0 \end{aligned}$$

olur.

Tanım 2.5.2. (M, Ω) ve (M', Ω') iki simplektik manifold olsun. $F : M \to M'$ diferensiyellenebilir dönüşümü için $F^*\Omega' = \Omega$ ise, F ye bir simplektik dönüşüm denir. Burada F^*, F nin ek dönüşümüdür (Vaisman 1987, Berndt 2000).

Şimdi bu tanımı biraz daha açalım.

$F : M \to M'$, $F(m) = m'$ için m ve m' noktalarındaki tanjant uzaylar, sırasıyla, $T_M(m)$ ve $T_{M'}(m')$ olmak üzere

$$\begin{aligned} F_{*m} : \ T_M(m) \ &\longrightarrow \ T_{M'}(m') \\ x_m \ &\longrightarrow \ F_{*m}(x_m) = x'_{m'} \\ y_m \ &\longrightarrow \ F_{*m}(y_m) = y'_{m'} \end{aligned}$$

olsun. Bu durumda

$$\begin{array}{rlcl} F^*: & \Omega^2(M') & \longrightarrow & \Omega^2(M) \\ & \Omega' & \longrightarrow & F^*\Omega' = \Omega \end{array}$$

olur. Ayrıca

$$\begin{array}{rlcl} \Omega_m: & T_M(m) \times T_M(m) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x_m, y_m) & \longrightarrow & \Omega_m(x_m, y_m) \end{array}$$

ve

$$\begin{array}{rlcl} \Omega'_{m'}: & T_{M'}(m') \times T_{M'}(m') & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x'_{m'}, y'_{m'}) & \longrightarrow & \Omega_{m'}(x'_{m'}, y'_{m'}) \end{array}$$

olduğundan

$$\begin{aligned} F^*\Omega' = \Omega \quad & \Rightarrow (F^*)_m(\Omega'_{m'}) = \Omega_m \\ & \Rightarrow [(F^*)_m(\Omega'_{m'})](x_m, y_m) = \Omega_m(x_m, y_m) \\ & \Rightarrow \Omega'_{m'}(F_{*m}(x_m), F_{*m}(y_m)) = \Omega_m(x_m, y_m) \end{aligned}$$

elde edilir.

Eğer F bir simplektik diffeomorfizm ise F^{-1} de bir simplektik dönüşümdür ve bu durumda F ye bir simplektomorfizm denir.

M den M ye giden tüm simplektomorfizmlerin grubu $Sp(M)$ ile gösterilir. Buna göre

$$Sp(M) = \{F \mid F : M \to M \text{ difeomorfizm, } F^*\Omega = \Omega\}$$

olur.

2.6. Kähler Manifoldları

Tanım 2.6.1. M bir reel diferensiyellenebilir manifold olsun. Her $x \in M$ için

$$J_x : T_M(x) \to T_M(x), \; J^2 = -I$$

lineer endomorfizmine M üzerinde bir **hemen hemen kompleks yapı** denir (Yano ve Kon 1984).

Tanım 2.6.2. Üzerinde hemen hemen kompleks yapı bulunan bir reel diferensiyellenebilir manifolda **hemen hemen kompleks manifold** denir (Yano ve Kon 1984).

Her hemen hemen kompleks manifold çift boyutludur (Yano ve Kon 1984).

Önerme 2.6.1. Her kompleks M manifoldu üzerinde bir hemen hemen kompleks yapı vardır (Yano ve Kon 1984).

İspat. $p \in M$ noktasının bir U komşuluğunda bir kompleks lokal koordinat sistemi $(z_1, z_2, ..., z_n)$ olsun. $z_j = x_j + iy_j$, $1 \leq j \leq n$ diyelim. Bu durumda

$$T_M(p) = Sp\left\{\frac{\partial}{\partial z_j}|_p\right\} \text{ ve } \frac{\partial}{\partial z_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} + i\frac{\partial}{\partial y_j}, \ 1 \leq j \leq n$$

gerçeklenir. $J_p : T_M(p) \to T_M(p)$ dönüşümünü

$$Jp\left(\frac{\partial}{\partial x_j}|_p\right) = \frac{\partial}{\partial y_j}|_p \text{ ve } J_p\left(\frac{\partial}{\partial y_j}|_p\right) = -\frac{\partial}{\partial x_j}|_p$$

şeklinde tanımlarsak, $J^2 = -I$ elde ederiz ki bu bize M üzerinde hemen hemen kompleks yapıyı verir. ■

Tanım 2.6.3. (M, Ω) bir simplektik manifold olsun. Eğer J, M üzerinde pozitif uyumlu bir kompleks yapı ise (M, Ω, J) üçlüsüne **hemen hemen Kähler manifoldu** denir. Bu durumda g Hermityen metriğine **Kähler metriği** denir (Cannas da Silva 2000). Eğer M, üzerinde Kähler metriği tanımlı bir kompleks manifold ise M ye **Kähler manifoldu** adı verilir.

2.7. Reel Kuaterniyonlar ve Bölünmüş Kuaterniyonlar

Tanım 2.7.1. Bir reel kuaterniyon $q = a_0 + a_1\overrightarrow{e_1} + a_2\overrightarrow{e_2} + a_3\overrightarrow{e_3}$; $a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$ biçiminde ifade edilir. Burada
(i) $(\overrightarrow{e_1})^2 = (\overrightarrow{e_2})^2 = (\overrightarrow{e_3})^2 = -1$
(ii) $\overrightarrow{e_1} \wedge \overrightarrow{e_2} = -\overrightarrow{e_2} \wedge \overrightarrow{e_1} = \overrightarrow{e_3}$, $\overrightarrow{e_2} \wedge \overrightarrow{e_3} = --\overrightarrow{e_3} \wedge \overrightarrow{e_2} = \overrightarrow{e_1}$, $\overrightarrow{e_3} \wedge \overrightarrow{e_1} = -\overrightarrow{e_1} \wedge \overrightarrow{e_3} = \overrightarrow{e_2}$
dir.

Bir reel kuaterniyonu, **skalar kısmı** $S_q = a_0$ ve **vektörel kısmı** $\overrightarrow{V_q} = a_1\overrightarrow{e_1} + a_2\overrightarrow{e_2} +$

$a_3\overrightarrow{e_3}$ olmak üzere iki kısma ayırabiliriz. Böylece q reel kuaterniyonu $q = S_q + \overrightarrow{V_q}$ şeklinde yazılabilir.

Tüm rel kuaterniyonların cümlesini Q ile gösterelim. $q_1 = S_{q_1} + \overrightarrow{V_{q_1}}$, $q_2 = S_{q_2} + \overrightarrow{V_{q_2}}$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \oplus : \quad Q \times Q &\rightarrow Q \\ (q_1, q_2) &\rightarrow q_1 \oplus q_2 = S_{q_1} + S_{q_2} + \overrightarrow{V_{q_1}} + \overrightarrow{V_{q_2}} \\ &\qquad\qquad\; = S_{q_1+q_2} + \overrightarrow{V_{q_1+q_2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \odot : \quad \mathbb{R} \times Q &\rightarrow Q \\ (\lambda, q) &\rightarrow \lambda \odot q = \lambda \odot \left(S_q + \overrightarrow{V_q}\right) \\ &\qquad\qquad = \lambda S_q + \lambda \overrightarrow{V_q} \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan toplama ve skalarla çarpma işlemleriyle birlikte Q reel kuaterniyonlar cümlesi reel sayılar cismi üzerinde $4-$boyutlu bir vektör uzayıdır (Hacısalihoğlu 1983).

Tanım 2.7.2. $H' = \{q = a_0 1 + a_1\overrightarrow{e_1} + a_2\overrightarrow{e_2} + a_3\overrightarrow{e_3} : a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}\}$ cümlesini ele alalım. Burada $\{1, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}\}$ birimlerinin çarpımı aşağıdaki tabloda verilmiştir:

$\cdot$	1	$\overrightarrow{e_1}$	$\overrightarrow{e_2}$	$\overrightarrow{e_3}$
1	1	$\overrightarrow{e_1}$	$\overrightarrow{e_2}$	$\overrightarrow{e_3}$
$\overrightarrow{e_1}$	$\overrightarrow{e_1}$	-1	$\overrightarrow{e_3}$	$-\overrightarrow{e_2}$
$\overrightarrow{e_2}$	$\overrightarrow{e_2}$	$-\overrightarrow{e_3}$	1	$-\overrightarrow{e_1}$
$\overrightarrow{e_3}$	$\overrightarrow{e_3}$	$\overrightarrow{e_2}$	$\overrightarrow{e_1}$	1

H' nün her bir elemanına bir **bölünmüş kuaterniyon** adı verilir (Inoguchi 1998). Burada a_0, a_1, a_2, a_3 reel sayılarına q bölünmüş kuaterniyonunun bileşeni denir. Bundan sonraki bölümlerde bir bölünmüş kuaterniyon için $q = a_0 + a_1\overrightarrow{e_1} + a_2\overrightarrow{e_2} + a_3\overrightarrow{e_3}$ gösterimi kullanılacaktır. $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}$ birimleri $3-$boyutlu reel vektör uzayının bir dik koordinat sisteminin baz vektörleri olarak alınabilir. Dolayısıyla bir $q = a_0 + a_1\overrightarrow{e_1} + a_2\overrightarrow{e_2} + a_3\overrightarrow{e_3}$ bölünmüş kuaterniyonu S_q ile gösterilen skalar kısım ve $\overrightarrow{V_q}$ ile gösterilen vektörel kısım olmak üzere iki kısma ayrılır ve

$$q = S_q + \overrightarrow{V_q}$$

biçiminde yazılır, burada

$$S_q = a_0, \;\; \overrightarrow{V_q} = a_1 \overrightarrow{e_1} + a_2 \overrightarrow{e_2} + a_3 \overrightarrow{e_3}$$

dır.

$q = a_0 + a_1 \overrightarrow{e_1} + a_2 \overrightarrow{e_2} + a_3 \overrightarrow{e_3}$ ve $p = b_0 + b_1 \overrightarrow{e_1} + b_2 \overrightarrow{e_2} + b_3 \overrightarrow{e_3}$ bölünmüş kuaterniyonlarının toplamı

$$\begin{aligned} q + p &= (S_q + S_p) + (\overrightarrow{V_q} + \overrightarrow{V_p}) \\ &= (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)\overrightarrow{e_1} + (a_2 + b_2)\overrightarrow{e_2} + (a_3 + b_3)\overrightarrow{e_3} \end{aligned}$$

olarak tanımlanır.

$\lambda \in \mathbb{R}$ ve $q = a_0 + a_1 \overrightarrow{e_1} + a_2 \overrightarrow{e_2} + a_3 \overrightarrow{e_3}$ olmak üzere $\lambda\, q$ dır işlemi

$$\lambda\, q = (\lambda a_0) + (\lambda a_1)\overrightarrow{e_1} + (\lambda a_2)\overrightarrow{e_2} + (\lambda a_3)\overrightarrow{e_3}$$

şeklinde tanımlanır.

Bu iki işlem ile birlikte H' cümlesi reel sayılar cismi üzerinde $4-$boyutlu bir vektör uzayıdır.

Ayrıca $q = a_0 + a_1 \overrightarrow{e_1} + a_2 \overrightarrow{e_2} + a_3 \overrightarrow{e_3}$ ve $p = b_0 + b_1 \overrightarrow{e_1} + b_2 \overrightarrow{e_2} + b_3 \overrightarrow{e_3}$ bölünmüş kuaterniyonlarının çarpımı:

$$\begin{aligned} \times : \;\; H' \times H' &\rightarrow H' \\ (q, p) &\rightarrow q \times p = qp \end{aligned}$$

biçiminde bir işlem olup

$$\begin{aligned} qp &= (a_0b_0 - a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3) + (a_1b_0 + a_0b_1 - a_2b_3 + a_3b_2)\overrightarrow{e_1} \\ &\quad +(a_0b_2 + a_2b_0 - a_1b_3 + a_3b_1)\overrightarrow{e_2} + (a_0b_3 + a_3b_0 - a_2b_1 + a_1b_2)\overrightarrow{e_3} \end{aligned}$$

veya

$$qp = S_qS_p + g\left(\overrightarrow{V_q}, \overrightarrow{V_p}\right) + S_q\overrightarrow{V_p} + S_p\overrightarrow{V_q} + \overrightarrow{V_q} \wedge \overrightarrow{V_p}$$

olarak tanımlanır. Burada

$$\begin{aligned} g: \quad \operatorname{Im} H' \times \operatorname{Im} H' &\to \mathbb{R} \\ \left(\overrightarrow{V_q}, \overrightarrow{V_p}\right) &\to g\left(\overrightarrow{V_q}, \overrightarrow{V_p}\right) = -a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \wedge: \quad \operatorname{Im} H' \times \operatorname{Im} H' &\to \operatorname{Im} H' \\ \left(\overrightarrow{V_q}, \overrightarrow{V_p}\right) &\to \overrightarrow{V_q} \wedge \overrightarrow{V_p} = \begin{vmatrix} -\overrightarrow{e_1} & \overrightarrow{e_2} & \overrightarrow{e_3} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \\ &= -\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}\overrightarrow{e_1} - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}\overrightarrow{e_2} \\ &\quad + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\overrightarrow{e_3} \\ &= (a_3b_2 - a_2b_3)\overrightarrow{e_1} + (a_3b_1 - a_1b_3)\overrightarrow{e_2} \\ &\quad +(a_1b_2 - a_2b_1)\overrightarrow{e_3} \end{aligned}$$

dır. $\operatorname{Im} H' = \{a_1\overrightarrow{e_1} + a_2\overrightarrow{e_2} + a_3\overrightarrow{e_3} : a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}\}$ dir. Bu çarpma işlemiyle birlikte H' ye **bölünmüş kuaterniyon cebiri** denir.

3. KUATERNİYON KÄHLER MANİFOLDLARI

3.1. Hemen Hemen Kuaterniyon Manifoldlar

Hemen hemen kuaterniyon manifoldlara değinmeden önce bir giriş yapılması bakımından Q reel kuaterniyonlar halkası olmak üzere

$$Q^n = \{(q_1, q_2, ..., q_n) \,|\, q_i \in Q,\, 1 \leq i \leq n \text{ ve } \mathbb{R}^{4n} = \{(x_1, x_2, ..., x_{4n}) \,|\, x_i \in \mathbb{R},\, 1 \leq i \leq 4n\}$$

cümleleri arasında aşağıdaki gibi bire-bir bir eşleme kuracağız.

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R}^{4n} & \rightarrow & Q^n \\ (x_1, x_2, ..., x_{4n}) & \rightarrow & (x_1, ..., x_n) + (x_{n+1}, ..., x_{2n})\overrightarrow{e_1} + (x_{2n+1}, ..., x_{3n})\overrightarrow{e_2} \\ & & +(x_{3n+1}, ..., x_{4n})\overrightarrow{e_3} \\ & & = (x_1 + x_{n+1}\overrightarrow{e_1} + x_{2n+1}\overrightarrow{e_2} + x_{3n+1}\overrightarrow{e_3}, ..., x_n + x_{2n}\overrightarrow{e_1} \\ & & +x_{3n}\overrightarrow{e_2} + x_{4n}\overrightarrow{e_3}) \\ & & = (q_1, q_2, ..., q_\alpha, ..., q_n). \end{array}$$

Burada $\alpha = (1, 2, ..., n)$ olmak üzere

$$(x_1, ..., x_n) + (x_{n+1}, ..., x_{2n})\overrightarrow{e_1} + (x_{2n+1}, ..., x_{3n})\overrightarrow{e_2} + (x_{3n+1}, ..., x_{4n})\overrightarrow{e_3}$$

resmini

$$q_\alpha = x_\alpha + x_{n+\alpha}\overrightarrow{e_1} + x_{2n+\alpha}\overrightarrow{e_2} + x_{3n+\alpha}\overrightarrow{e_3}$$

biçiminde göstereceğiz. Bu eşleme ile $\mathbb{R}^{4n}$ ve Q^n uzaylarından herhangibirine ait olan bir vektör, diğer uzayda da bir vektör olarak görülebilir. Aslında böyle bir eşleme yardımıyla şu lineer dönüşümleri tanımlamış oluyoruz:

$$\left.\begin{array}{rlll} F_0: & \mathbb{R}^{4n} & \to & \mathbb{R}^{4n} \\ & x & \to & F_0(x) = \overrightarrow{e_1}x, \\ G_0: & \mathbb{R}^{4n} & \to & \mathbb{R}^{4n} \\ & x & \to & G_0(x) = \overrightarrow{e_2}x, \\ H_0: & \mathbb{R}^{4n} & \to & \mathbb{R}^{4n} \\ & x & \to & H_0(x) = \overrightarrow{e_3}x. \end{array}\right\} \quad (3.1.1)$$

Burada $x \in \mathbb{R}^{4n}$ yerine Q^n deki karşılığı olan q_α alınarak $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}$ ler cinsinden eşlemede verildiği gibi ifade edilecektir. Ayrıca F_0, G_0 ve H_0 lineer dönüşümleri aşağıdaki özelikleri sağlarlar:

$$\begin{aligned} F_0^2 &= G_0^2 = H_0^2 = -I \text{ (burada } I, \text{ özdeşlik dönüşümüdür)} \\ F_0G_0 &= -G_0F_0 = H_0,\ G_0H_0 = -H_0G_0 = F_0,\ H_0F_0 = -F_0H_0 = G_0 \end{aligned}$$

(Doğanaksoy 1983).

Tanım 3.1.1. $\{F_0, G_0, H_0\}$ lineer dönüşümlerinin cümlesine $\mathbb{R}^{4n}$ de **standart kuaterniyon yapı** denir (Doğanaksoy 1983).

Tanım 3.1.2. $(\mathbb{R}^{4n}, +)$ in bir Abel grubu olduğunu biliyoruz. Skalarla çarpma işlemi şöyle verilsin: $q = a + b\overrightarrow{e_1} + c\overrightarrow{e_2} + d\overrightarrow{e_3} \in Q$ ve $x \in \mathbb{R}^{4n}$, $x = (x_1, x_2, ..., x_{4n})$ olmak üzere

$$\begin{array}{rllll} \cdot: & Q \times \mathbb{R}^{4n} & \to & \mathbb{R}^{4n} & \\ & (q, x) & \to & q \cdot x & = (a + b\overrightarrow{e_1} + c\overrightarrow{e_2} + d\overrightarrow{e_3}) \cdot x \\ & & & & = ax + b\overrightarrow{e_1}x + c\overrightarrow{e_2}x + d\overrightarrow{e_3}x \end{array}$$

ve (3.1.1) den

$$= ax + bF_0(x) + cG_0(x) + dH_0(x)$$

olur. Tanımlanan bu işlemle birlikte $\mathbb{R}^{4n}$, Q kuaterniyonlar halkası üzerinde bir modül olur. Biz bu yapıya $\mathbb{R}^{4n}$ **nin kuaterniyonik vektör uzayı yapısı** diyeceğiz. Sonuç olarak $\mathbb{R}^{4n}$, $n-$boyutlu bir kuaterniyonik vektör uzayıdır (Doğanaksoy 1983).

Önerme 3.1.1. $\mathbb{R}^{4n}$, $\{F_0, G_0, H_0\}$ standart kuaterniyon yapısı ile bir kuaterniyonik vektör uzayı olsun. $\{q_1, q_2, ..., q_n\}$, $\mathbb{R}^{4n}$ nin bir kuaterniyonik bazı ise q_i $(1 \leq i \leq n)$ lere $\mathbb{R}^{4n}$ reel vektör uzayında karşılık gelen vektörler x_i $(1 \leq i \leq n)$ ler olmak üzere $\{x_1, ..., x_n, F_0(x_1), ..., F_0(x_n), G_0(x_1), ..., G_0(x_n), H_0(x_1), ..., H_0(x_n)\}$ cümlesi de $\mathbb{R}^{4n}$ nin bir reel bazıdır.

İspat. Herhangi bir $y \in \mathbb{R}^{4n}$ elemanı $\{q_1, q_2, ..., q_n\}$ kuaterniyonik bazı cinsinden tek türlü yazılabilir.

$$y = \sum_{\alpha=1}^{n} p_\alpha q_\alpha; \;\; p_\alpha = a_\alpha + b_\alpha \overrightarrow{e_1} + c_\alpha \overrightarrow{e_2} + d_\alpha \overrightarrow{e_3}$$

olur. buradan

$$\begin{aligned} y &= \sum_{\alpha=1}^{n} (a_\alpha + b_\alpha \overrightarrow{e_1} + c_\alpha \overrightarrow{e_2} + d_\alpha \overrightarrow{e_3}) x_\alpha \\ &= \sum_{\alpha=1}^{n} (a_\alpha x_\alpha + b_\alpha F_0(x_\alpha) + c_\alpha G_0(x_\alpha) + d_\alpha H_0(x_\alpha)) \end{aligned}$$

bulunur. $a_\alpha, b_\alpha, c_\alpha, d_\alpha \in \mathbb{R}$ olacak biçimde $y \in \mathbb{R}^{4n}$ tek türlü yazılabileceğinden $\{x_1, ..., x_n, F_0(x_1), ..., F_0(x_n), G_0(x_1), ..., G_0(x_n), H_0(x_1), ..., H_0(x_n)\}$ cümlesi reel vektör uzayı olarak $\mathbb{R}^{4n}$ uzayını gerer, ayrıca $boy\mathbb{R}^{4n} = 4n$ olduğundan bu cümle aynı zamanda lineer bağımsızdır. O halde $\mathbb{R}^{4n}$ nin bir bazı olur. ∎

Örnek 3.1.1. $\{q_1 = (1, 0, ..., 0), q_2 = (0, 1, ..., 0), ..., q_n = (0, 0, ..., 1)\}$ cümlesi $\mathbb{R}^{4n}$ kuaterniyonik vektör uzayının standart kuaterniyonik bazıdır.

q_i $(1 \leq i \leq n)$ lere $\mathbb{R}^{4n}$ reel vektör uzayında karşılık gelen vektörler x_i ler olmak üzere

$$x_1 = (1, 0, ..., 0, 0, ..., 0), x_2 = (0, 1, ..., 0, 0, ..., 0), ..., x_n = (0, 0, ..., 1, 0, ..., 0)$$

olur. Buna göre $\mathbb{R}^{4n}$ nin reel bazının

$$\{x_1, ..., x_n, F_0(x_1), ..., F_0(x_n), G_0(x_1), ..., G_0(x_n), H_0(x_1), ..., H_0(x_n)\}$$

olduğunu gösterelim.

$x_1, x_2, ..., x_n \in \mathbb{R}^{4n}$ vektörlerine Q^n de karşılık gelen vektörler

$$\begin{aligned}
x_1 &\leftrightarrow (1,0,...,0) + (0,0,...,0)\overrightarrow{e_1} + (0,0,...,0)\overrightarrow{e_2} + (0,0,...,0)\overrightarrow{e_3} \\
x_2 &\leftrightarrow (0,1,...,0) + (0,0,...,0)\overrightarrow{e_1} + (0,0,...,0)\overrightarrow{e_2} + (0,0,...,0)\overrightarrow{e_3} \\
& \quad ... \\
x_n &\leftrightarrow (0,0,...,1) + (0,0,...,0)\overrightarrow{e_1} + (0,0,...,0)\overrightarrow{e_2} + (0,0,...,0)\overrightarrow{e_3}
\end{aligned}$$

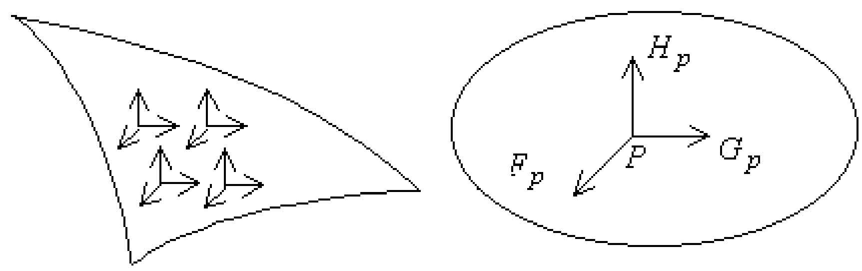
şeklindedir. Buradan

$$\begin{aligned}
F_0(x_1) &= \overrightarrow{e_1}x_1 + (0,0,...,0,1,0,...,0,0,0,...,0,0,0,...,0) \\
F_0(x_2) &= \overrightarrow{e_1}x_2 + (0,0,...,0,0,1,...,0,0,0,...,0,0,0,...,0) \\
& \quad ... \\
F_0(x_n) &= \overrightarrow{e_1}x_n + (0,0,...,0,0,0,...,1,0,0,...,0,0,0,...,0) \\
G_0(x_1) &= \overrightarrow{e_2}x_1 + (0,0,...,0,0,0,...,0,1,0,...,0,0,0,...,0) \\
G_0(x_2) &= \overrightarrow{e_2}x_2 + (0,0,...,0,0,0,...,0,0,1,...,0,0,0,...,0) \\
& \quad ... \\
G_0(x_n) &= \overrightarrow{e_2}x_n + (0,0,...,0,0,0,...,0,0,0,...,1,0,0,...,0) \\
H_0(x_1) &= \overrightarrow{e_3}x_1 + (0,0,...,0,0,0,...,0,0,0,...,0,1,0,...,0) \\
H_0(x_2) &= \overrightarrow{e_3}x_2 + (0,0,...,0,0,0,...,0,0,0,...,0,0,1,...,0) \\
& \quad ... \\
H_0(x_n) &= \overrightarrow{e_3}x_n + (0,0,...,0,1,0,...,0,0,0,...,0,0,0,...,1)
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece $\{x_1, ..., x_n, F_0(x_1), ..., F_0(x_n), G_0(x_1), ..., G_0(x_n), H_0(x_1), ..., H_0(x_n)\}$ cümlesinin lineer bağımsız ve germe aksiyomlarını sağladığı kolayca görülebileceğinden $\mathbb{R}^{4n}$ reel vektör uzayının bazı olur.

Tanım 3.1.3. M diferensiyellenebilir reel bir manifold olsun. M nin her noktasında aşağıdaki şartları sağlayan $(1,1)-$tipli F, G, H tensörlerinden oluşan $3-$boyutlu V bundle'ına M üzerinde bir **hemen hemen kuaterniyon yapı** denir. $p \in M$ noktasındaki tanjant uzay $T_M(p)$ olmak üzere

$$V = \left\{ \bigcup_p \{F_p, G_p, H_p\} \mid p \in M \right\}$$



Şekil 3.1. Hemen hemen kuaterniyon yapı

$$\begin{array}{rlcl} F_p : & T_M(p) & \rightarrow & T_M(p) \\ & x & \rightarrow & F_p(x) = ix, \\ G_p : & T_M(p) & \rightarrow & T_M(p) \\ & x & \rightarrow & G_p(x) = jx, \\ H_p : & T_M(p) & \rightarrow & T_M(p) \\ & x & \rightarrow & H_p(x) = kx. \end{array}$$

dir. Burada $F^2 = G^2 = H^2 = -I$, $FG = -GF = H$, $GH = -HG = F$ ve $HF = -FH = G$ özelikleri sağlanır (Doğanaksoy 1983; Yano ve Kon 1984).

Tanım 3.1.4. $\{F, G, H\}$ bazına V bundle'ının **kanonik bazı** denir (Doğanaksoy 1983).

Tanım 3.1.5. Üzerinde hemen hemen kuaterniyon yapı bulunduran diferensiyellenebilir M manifolduna bir **hemen hemen kuaterniyon manifold** denir ve (M, V) ile gösterilir (Doğanaksoy 1983).

Önerme 3.1.2. M, $4n-$boyutlu diferensiyellenebilir reel bir manifold olsun. Bu durumda (M, V) hemen hemen kuaterniyon manifoldu $n-$boyutludur.

İspat. (M, V) bir hemen hemen kuaterniyon manifold olsun. M üzerindeki hemen

hemen kuaterniyon V yapısı her $x \in M$ noktasındaki $T_m(x)$ uzayında aşağıdaki gibi bir kuaterniyonik vektör uzayı yapısı tanımlar.

V bundle'ının $T_M(x)$ deki lokal bazı $\{F, G, H\}$ olsun. Bu durumda $4n-$boyutlu $T_M(x)$ uzayını aşağıdaki gibi kuaterniyonik vektör uzayına çevirebiliriz.

Öncelikle $(T_M(x), +)$ bir Abel grubudur ve ayrıca $q = a + bi + cj + dk \in Q$ olmak üzere

$$\begin{array}{llll} \cdot : & Q \times T_M(x) & \rightarrow & T_M(x) \\ & (q, x) & \rightarrow & q \cdot x & = (a + bi + cj + dk) \cdot x \\ & & & & = ax + bF(x) + cG(x) + dH(x) \end{array}$$

ile verilen skalarla çarpma işlemiyle $T_M(x)$ bir kuaterniyonik vektör uzayı olur.

Lemma 3.1.1. Diferensiyellenebilir reel M manifoldunun boyutu $4m$ $(m \geq 1)$ olmak üzere (M, V) bir hemen hemen kuaterniyon manifold olsun. M nin bir U koordinat komşuluğunda V nin kanonik lokal bazı $\{F, G, H\}$ ise $x \in U$ için $T_M(x)$ in bir kuaterniyonik $\{x_1, x_2, ..., x_m\}$ bazı olmak üzere q_i lere $T_M(x)$ reel vektör uzayında karşılık gelen vektörler x_i ler olsun. Bu durumda $\{x_1, ..., x_m, F(x_1), ..., F(x_m), G(x_1), ..., G(x_m), H(x_1), ..., H(x_m)\}$ cümlesi, $T_M(x)$ in bir reel bazıdır.

İspat. $T_M(x)$ uzayını $m-$boyutlu bir kuaterniyonik vektör uzayı yapısına dönüştürebiliriz. $\{x_1, x_2, ..., x_m\}$, $T_M(x)$ in bir kuaterniyonik bazı olduğundan her $y \in T_M(x)$ için $\{x_1, x_2, ..., x_m\}$ bazı cinsinden tek türlü yazabiliriz. O halde

$$\begin{aligned} y &= \sum_{\alpha=1}^{n} q_\alpha x_\alpha; \;\; q_\alpha = a_a + b_\alpha i + c_\alpha j + d_\alpha k, \;\; a_a, b_\alpha, c_\alpha, d_\alpha \in \mathbb{R} \\ &= \sum_{\alpha=1}^{n} (a_a + b_\alpha i + c_\alpha j + d_\alpha k) x_\alpha \\ &= \sum_{\alpha=1}^{n} (a_a x_\alpha + b_\alpha F_0(x_\alpha) + c_\alpha G_0(x_\alpha) + d_\alpha H_0(x_\alpha)) \end{aligned}$$

olur. Bu yazılış $a_a, b_\alpha, c_\alpha, d_\alpha \in \mathbb{R}$ olacak biçimde tek türlü olduğundan $\{x_1, ..., x_m, F(x_1), ..., F(x_m), G(x_1), ..., G(x_m), H(x_1), ..., H(x_m)\}$ cümlesi reel vektör uzayı olarak $T_M(x)$ uzayını gerer. $boyM = 4m$ olduğundan bu cümle $T_M(x)$ in bir reel bazıdır. ■

M manifoldu reel olarak $4n-$boyutlu olduğundan her $x \in M$ için $T_M(x)$ tanjant uzayı da $4n-$boyutludur. Bu durumda $\mathbb{R}^{4n}$ nin kuaterniyonik boyutu n olduğundan $T_M(x)$ in de kuaterniyonik boyutu n dir. Dolayısıyla M manifoldu kuaterniyonik olarak n boyutlu olur.

Tanım 3.1.6. (M, V) bir hemen hemen kuaterniyon manifold ve M nin bir U koordinat komşuluğunda V nin bir kanonik lokal bazı $\{F, G, H\}$ olsun. Eğer her bir U koordinat komşuluğundaki bir koordinat sistemine göre

$$F = \begin{bmatrix} 0 & -I & 0 & 0 \\ I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -I \\ 0 & 0 & I & 0 \end{bmatrix}, \ G = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \\ I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -I & 0 & 0 \end{bmatrix}, \ H = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -I \\ 0 & 0 & -I & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \\ I & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(burada I, $m \times m-$tipinde birim matris ve F, G, H ise $4m \times 4m-$tipinde matrislerdir) şeklinde bileşenlere sahip $\{F, G, H\}$ varsa, bu durumda V hemen hemen kuaterniyon yapısına integrallenebilirdir denir (Doğanaksoy 1983; Yano ve Kon 1984).

Önerme 3.1.3. Herhangi bir hemen hemen kuaterniyon (M, V) manifoldunda bir g Riemann metriği vardır öyleki, V nin bir ϕ cross-section'ı için

$$g(\phi(X), Y) + g(x, \phi(Y)) = 0; \ \forall X, Y \in \chi(M)$$

sağlanır.

İspat. g', M üzerinde bir Riemann metriği olsun. M üzerindeki bir g tensör alanını aşağıdaki gibi tanımlayalım.

Her $X, Y \in \chi(M)$ için

$$g(X, Y) = g'(X, Y) + g'(F(X), F(Y)) + g'(G(X), G(Y)) + g'(H(X), H(Y))$$

olsun. Burada $\{F, G, H\}$, M nin bir U koordinat komşuluğunda V nin bir kanonik lokal bazıdır. g' bir Riemann metriği olduğundan g nin de bir Riemann metriği olduğu kolayca gösterilebilir.

Şimdi V nin bir ϕ cross-section'ı için $g(\phi(X), Y) + g(X, \phi(Y)) = 0$ sağlandığını göstermeliyiz.

ϕ, V nin bir cross-section'ı olduğundan her $X, Y \in \chi(M)$ için

$$\phi(X) = a_1F(X) + a_2G(X) + a_3H(X) \text{ ve } \phi(Y) = b_1F(Y) + b_2G(Y) + b_3H(Y)$$

tek türlü yazılabilir. g bir Riemann metriği olduğundan

$$\begin{aligned} g(\phi(X), Y) + g(X, \phi(Y) &= g(a_1F(X) + a_2G(X) + a_3H(X), Y) \\ &\quad +g(X, b_1F(Y) + b_2G(Y) + b_3H(Y) \\ &= a_1g(F(X), Y) + a_2g(G(X), Y) + a_3g(H(X), Y) \\ &\quad +b_1g(X, F(Y)) + b_2g(X, G(Y)) \\ &\quad +b_3g(H(Y), X) \qquad (3.1.2) \end{aligned}$$

olur. Ayrıca

$$\begin{aligned} g(F(X), Y) + g(X, F(Y)) &= g'(F(X), Y) + g'(F^2(X), F(Y)) + g'(GF(X), G(Y)) \\ &\quad +g'(HF(X), H(Y)) + g'(X, F(Y)) + g'(F(X), F^2(Y)) \\ &\quad +g'(G(X), GF(Y)) + g'(H(X), HF(Y)) \\ &= g'(F(X), Y) + g'(-X, F(Y)) + g'(-H(X), G(Y)) \\ &\quad +g'(G(X), H(Y)) + g'(X, F(Y)) + g'(F(X), -Y) \\ &\quad +g'(G(X), -H(Y)) + g'(H(X), G(Y)) \\ &= g'(F(X), Y) - g'(X, F(Y)) - g'(H(X), G(Y)) \\ &\quad +g'(G(X), H(Y)) + g'(X, F(Y)) - g'(F(X), Y) \\ &\quad -g'(G(X), H(Y)) + g'(H(X), G(Y)) \\ &= 0 \end{aligned}$$

ve benzer şekilde

$$g(G(X),Y)+g(X,G(Y))=0$$

ve

$$g(H(X),Y)+g(X,H(Y))=0$$

olduğundan (3.1.2) eşitliği uyarınca

$$g((a-b_1)F(X),Y)+g((a_2-b_2)G(X),Y)+g((a_3-b_3)H(X),Y)=0$$

yazabiliriz. $\phi(X)=a_1F(X)+a_2G(X)+a_3H(X)$ yazılışı tek türlü olduğundan sonuç olarak

$$g(\phi(X),Y)+g(X,\phi(Y)=0$$

elde edilir. ■

Tanım 3.1.7. (M,V) bir hemen hemen kuaterniyon manifold ve g ise Önerme 3.1.3 deki gibi tanımlı bir Riemann metriği olsun. Bu durumda (V,g) ikilisine bir **hemen hemen kuaterniyon metrik yapı** ve (M,V,g) üçlüsüne de bir **hemen hemen kuaterniyon metrik manifold** denir (Doğanaksoy 1983; Yano ve Kon 1984).

3.2. Kuaterniyon Kähler Manifoldları

Tanım 3.2.1. Eğer V nin her ϕ cross-section'ı (lokal veya global) için $D_X\phi$ de V nin bir cross-section'ı ise (M,V,g) (veya kısaca M) ye bir **kuaterniyon Kähler manifoldu** denir ve (V,g) ikilisine de bir **kuaterniyon Kähler yapı** adı verilir (Doğanaksoy 1983; Yano ve Kon 1984).

Burada X, $\chi(M)$ nin keyfi bir elemanı ve D, (M,V,g) nin Riemann konneksiyonudur.

Önerme 3.2.1. (M,V) bir hemen hemen kuaterniyon manifold ve $\{F,G,H\}$ ile $\{F',G',H'\}$, sırasıyla, M nin U ve U' koordinat komşuluklarının kesişiminde V nin birer kanonik lokal bazları olsun. Bu durumda $U\cap U'$ de tanımlı S_{ij} $(i,j=1,2,3)$ fonksiyonları için

$$F' = S_{11}F+S_{12}G+S_{13}H,$$

$$\begin{aligned} G' &= S_{21}F + S_{22}G + S_{23}H, \\ H' &= S_{31}F + S_{32}G + S_{33}H \end{aligned}$$

olur. Burada S_{ij} katsayıları $3-$boyutlu $SO(3)$ ortogonal grubunun bir $S_{U,U'} = [S_{ij}]$ elemanı şeklindedir.

İspat. $\{F, G, H\}$ ve $\{F', G', H'\}$, V nin kanonik lokal bazları olduğundan birini diğeri cinsinden yazabiliriz. Böylece

$$\begin{aligned} F' &= S_{11}F + S_{12}G + S_{13}H, \\ G' &= S_{21}F + S_{22}G + S_{23}H, \\ H' &= S_{31}F + S_{32}G + S_{33}H \end{aligned}$$

olur. Tanım 3.2.1 den $(F')^2 = (G')^2 = (H')^2 = -I$ ve $F'G' = -G'F' = H'$, $G'H' = -H'G' = F'$, $H'F' = -F'H' = G'$ olduğunu biliyoruz. O halde

$$\begin{aligned} -I &= F'F' \Rightarrow -I = -(S_{11}^2 + S_{12}^2 + S_{13}^2)I \\ -I &= G'G' \Rightarrow -I = -(S_{21}^2 + S_{22}^2 + S_{23}^2)I \\ -I &= F'F' \Rightarrow -I = -(S_{31}^2 + S_{32}^2 + S_{33}^2)I \end{aligned}$$

olduğundan $S_{11}^2 + S_{12}^2 + S_{13}^2 = S_{21}^2 + S_{22}^2 + S_{23}^2 = S_{31}^2 + S_{32}^2 + S_{33}^2 = 1$ dir. Ayrıca

$$\begin{aligned} G'H' = F' \Rightarrow\ & -(S_{11}S_{31} + S_{22}S_{32} + S_{23}S_{33})I + (S_{22}S_{33} - S_{23}S_{22})F \\ & +(S_{23}S_{31} - S_{21}S_{33})G + (S_{21}S_{32} - S_{22}S_{31})H \\ & = S_{11}F + S_{12}G + S_{13}H \end{aligned}$$

olup buradan

$$\begin{aligned} & S_{21}S_{31} + S_{22}S_{32} + S_{23}S_{33} = 0,\ \ S_{22}S_{33} - S_{23}S_{22} = S_{11} \\ & S_{23}S_{31} - S_{21}S_{33} = S_{12},\ \ S_{21}S_{32} - S_{22}S_{31} = S_{13} \end{aligned}$$

olur. Benzer şekilde $H'F' = G'$ ve $F'G' = H'$ den benzer ifadeler elde edilir. Sonuç olarak $[S_{ij}] \in SO(3)$ olduğu görülür. ■

Teorem 3.2.1. Bir (M, V, g) hemen hemen kuaterniyon metrik manifoldu için aşağıdakiler denktir:

(i) (M, V, g) bir kuaterniyon Kähler manifoldudur.

(ii) Eğer M nin bir U koordinat komşuluğunda V nin bir kanonik lokal bazı $\{F, G, H\}$ ise, bu durumda her $X \in \chi(M)$ için

$$\begin{aligned} D_X F &= r(X)G - q(X)H, \\ D_X G &= -r(X)F + p(X)H, \\ D_X H &= q(X)F - p(X)G \end{aligned}$$

olur. Burada p, q ve r, U da tanımlı belirli lokal $1-$formlardır.

İspat. $(i) \Rightarrow (ii)$. (M, V, g) bir kuaterniyon Kähler manifoldu olsun. D, (M, V, g) nin bir Riemann konneksiyonu olduğundan M nin bir U koordinat komşuluğunda V nin bir $\{F, G, H\}$ kanonik lokal bazı için $D_X\phi$, V nin bir cross-section'ı olduğundan

$$\begin{aligned} D_X F &= a_{11}F + a_{12}G + a_{13}H, \\ D_X G &= a_{21}F + a_{22}G + a_{23}H, \\ D_X H &= a_{31}F + a_{32}G + a_{33}H \end{aligned} \tag{3.2.1}$$

yazabiliriz. Burada a_{ij} $(i, j = 1, 2, 3)$ ler U da tanımlı lokal $1-$formlardır.

$$\begin{aligned} G.H = F \quad \Rightarrow D_X F &= D_X(G.H) \\ &= (D_X G).H + G.(D_X H) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} a_{11}F + a_{12}G + a_{13}H &= (a_{21}F + a_{22}G + a_{23}H)H \\ &\quad + G(a_{31}F + a_{32}G + a_{33}H) \\ &= -(a_{22} + a_{32}) + (a_{33} - a_{23})F - a_{21}G - a_{31}H \end{aligned}$$

olduğundan

$$a_{23} = -a_{32},\ a_{11} = a_{22} + a_{33},\ a_{12} = -a_{21} \text{ ve } a_{13} = -a_{31}$$

olur. Böylece (3.2.1) sistemi

$$\begin{aligned} D_X F &= (a_{22} + a_{33})F + a_{12}G - a_{31}H, \\ D_X G &= -a_{12}F + a_{22}G + a_{23}H, \\ D_X H &= -a_{13}F + a_{32}G + a_{33}H \end{aligned}$$

şekline gelir.

$$\begin{aligned} G = H.F \quad \Rightarrow D_X G \quad &= D_X(H.F) \\ &= (D_X H).F + G.(D_X F) \end{aligned}$$

eşitliğinden

$$a_{22} = a_{22} + a_{33} \Rightarrow a_{33} = 0 \text{ ve } a_{23} = -a_{32}$$

olur. Böylece

$$\begin{aligned} D_X F &= a_{22}F + a_{12}G - a_{31}H, \\ D_X G &= -a_{12}F + a_{22}G + a_{23}H, \\ D_X H &= a_{31}F - a_{23}G \end{aligned}$$

gerçeklenir. Son olarak,

$$\begin{aligned} H = FG \Rightarrow D_X H \quad &= D_X(FG) \\ &= (D_X F).G + F.(D_X G) \end{aligned}$$

olduğundan $a_{22} = 0$ elde edilir. $p(X) = a_{23}$, $q(X) = a_{13}$ ve $r(X) = a_{12}$ yazarsak, (ii) deki sistemi buluruz.

$(ii) \Rightarrow (i)$. Kabul edelim ki (ii) sağlansın ve $\phi = aF+bG+cH$, V bundle'nın bir cross-section'ı olsun. Burada a, b ve c, U üzerinde lokal olarak tanımlı fonksiyonlardır. Bu durumda

$$\begin{aligned} D_X\phi &= D_X(aF + bG + cH) \\ &= aD_X F + X(a)F + bD_X G + X(b)G + cD_X H + X(c)H \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= X(a)F + X(b)G + X(c)H + aD_XF + bD_XG + cD_XH \\
&= X(a)F + X(b)G + X(c)H + a(r(X)G - q(X)H) \\
&\quad +b(-r(X)F + p(X)H) + c(q(X)F - p(X)G) \\
&= (X(a) - br(X) + cq(X))F + (X(b) + ar(X) - cp(X))G \\
&\quad +(X(c) - aq(X) + bp(X)H
\end{aligned}$$

yazabiliriz. Böylece $D_X\phi$; F, G, ve H nın lineer birleşimi olarak yazılmış olur. Yani $D_X\phi$, V nin bir cross-section'ıdır. Bu ise (M, V, g) nin bir kuaterniyon Kähler manifoldu olduğunu gösterir. ■

Tanım 3.2.2. (M, V, g) hemen hemen kuaterniyon metrik manifoldunun bir U koordinat komşuluğunda V bundle'ının bir kanonik lokal bazı $\{F, G, H\}$ olsun. F, G ve H nın herbiri g ye göre hemen hemen Hermityendir. Yani Φ, Ψ, θ lokal $2-$formları için

$$\Phi(X,Y) = g(F(X),Y),\ \ \Psi(X,Y) = g(G(X),Y) \text{ ve } \theta(X,Y) = g(H(X),Y)$$

şeklinde tanımlanır. Ayrıca U da W $4-$formunu

$$W = \Phi \wedge \Phi + \Psi \wedge \Psi + \theta \wedge \theta$$

ile; $(2,2)-$tipli $\wedge$ tensör alanını da

$$\wedge\ = F \otimes F + G \otimes G + H \otimes H$$

ile tanımlarız (Doğanaksoy 1983; Yano ve Kon 1984).

Önerme 3.2.2. W $4-$formu ve $(2,2)-$tipli $\wedge$ tensör alanı M üzerinde global olarak tanımlanır.

İspat. $\{F, G, H\}$ ve $\{F', G', H'\}$, sırasıyla, U ve U' koordinat komşuluklarının kesişiminde V nin kanonik lokal bazları olsun. Önermenin ispatı için $U \cap U'$ de

$$\Phi' \wedge \Phi' + \Psi' \wedge \Psi' + \theta' \wedge \theta' = \Phi \wedge \Phi + \Psi \wedge \Psi + \theta \wedge \theta$$

ve

$$F' \otimes F' + G' \otimes G' + H' \otimes H' = F \otimes F + G \otimes G + H \otimes H$$

eşitliklerinin doğruluğunu göstermeliyiz. İlkini görmek için $U \cap U'$ de Φ', Ψ', θ' yü Φ, Ψ, θ cinsinden hesaplayacağız.

$\Phi'(X,Y) = g(F(X),Y)$, $\Psi'(X,Y) = g(G(X),Y)$, $\theta'(X,Y) = g(H(X),Y)$ ve $\{F,G,H\}$ ile $\{F',G',H'\}$ arasında aşağıdaki gibi bir ilişki olduğunu biliyoruz:

$$\begin{aligned}
F' &= S_{11}F + S_{12}G + S_{13}H, \\
G' &= S_{21}F + S_{22}G + S_{23}H, \\
H' &= S_{31}F + S_{32}G + S_{33}H.
\end{aligned}$$

Burada $(S_{ij}) \in SO(3)$, $1 \leq i,j \leq 3$. Buradan

$$\begin{aligned}
\Phi'(X,Y) &= g(F'(X),Y) \\
&= g(S_{11}F(X) + S_{12}G(X) + S_{13}H(X),Y) \\
&= S_{11}g(F(X),Y) + S_{12}g(G(X),Y) + S_{13}g(H(X),Y) \\
&= S_{11}\Phi(X,Y) + S_{12}\Psi(X,Y) + S_{13}\theta(X,Y)
\end{aligned}$$

dir. O halde

$$\Phi' = S_{11}\Phi + S_{12}\Psi + S_{13}\theta$$

bulunur. Benzer şekilde Ψ' ve θ' nü de, sırasıyla,

$$\Psi' = S_{21}\Phi + S_{22}\Psi + S_{23}\theta \text{ ve } \theta' = S_{31}\Phi + S_{32}\Psi + S_{33}\theta$$

şeklinde yazabiliriz. O halde

$$
\begin{aligned}
\Phi' \wedge \Phi' + \Psi' \wedge \Psi' + \theta' \wedge \theta' &= (S_{11}\Phi + S_{12}\Psi + S_{13}\theta) \wedge (S_{11}\Phi + S_{12}\Psi + S_{13}\theta) \\
&+ (S_{21}\Phi + S_{22}\Psi + S_{23}\theta) \wedge (S_{21}\Phi + S_{22}\Psi + S_{23}\theta) \\
&+ (S_{31}\Phi + S_{32}\Psi + S_{33}\theta) \wedge (S_{31}\Phi + S_{32}\Psi + S_{33}\theta) \\
&= (S_{11}^2 + S_{21}^2 + S_{31}^2)\Phi \wedge \Phi + (S_{12}^2 + S_{22}^2 + S_{32}^2)\Psi \wedge \Psi \\
&+ (S_{13}^2 + S_{23}^2 + S_{33}^2)\theta \wedge \theta + 2(S_{11}S_{12} + S_{21}S_{22} \\
&+ S_{31}S_{32})\theta \wedge \Psi + 2(S_{11}S_{13} + S_{21}S_{23} + S_{31}S_{33})\Phi \wedge \theta \\
&+ 2(S_{12}S_{13} + S_{22}S_{23} + S_{32}S_{33})\Psi \wedge \theta
\end{aligned}
$$

olur. $(S_{ij}) \in SO(3)$ olmasından dolayı

$$
\Phi' \wedge \Phi' + \Psi' \wedge \Psi' + \theta' \wedge \theta' = \Phi \wedge \Phi + \Psi \wedge \Psi + \theta \wedge \theta
$$

elde ederiz.

Şimdi de ikinci eşitliğin doğruluğunu gösterelim. Bunun için

$$
\begin{aligned}
F' \otimes F' + G' \otimes G' + H' \otimes H' &= (S_{11}F + S_{12}G + S_{13}H) \otimes (S_{11}F + S_{12}G + S_{13}H) \\
&+ (S_{21}F + S_{22}G + S_{23}H) \otimes (S_{21}F + S_{22}G + S_{23}H) \\
&+ (S_{31}F + S_{32}G + S_{33}H) \otimes (S_{31}F + S_{32}G + S_{33}H) \\
&= (S_{11}^2 + S_{21}^2 + S_{31}^2)F \otimes F + (S_{12}^2 + S_{22}^2 + S_{32}^2)G \otimes G \\
&+ (S_{13}^2 + S_{23}^2 + S_{33}^2)H \otimes H \\
&+ (S_{11}S_{12} + S_{21}S_{22} + S_{31}S_{32})(F \otimes G + G \otimes F) \\
&+ (S_{11}S_{13} + S_{21}S_{23} + S_{31}S_{33})(F \otimes H + H \otimes F) \\
&+ (S_{12}S_{13} + S_{22}S_{23} + S_{32}S_{33})(G \otimes H + H \otimes G)
\end{aligned}
$$

bulunur ve $(S_{ij}) \in SO(3)$ olduğundan

$$
F' \otimes F' + G' \otimes G' + H' \otimes H' = F \otimes F + G \otimes G + H \otimes H
$$

gerçeklenir. ■

Teorem 3.2.2. Bir hemen hemen kuaterniyon metrik manifoldunun kuaterniyon Kähler manifoldu olması için gerek ve yeter koşul her $X \in \chi(M)$ için

$$D_X W = 0 \text{ ve } D_X \wedge = 0$$

olmasıdır.

İspat. (M, V, g) bir kuaterniyon Kähler manifold ve $\{F, G, H\}$ bir U koordinat komşuluğunda V bundle'ının kanonik lokal bazı olsun. O zaman

$$\begin{aligned} D_X F &= r(X)G - q(X)H \\ D_X G &= -r(X)F - p(X)H \\ D_X H &= q(X)F - p(X)G \end{aligned}$$

sağlanır. Önce her $X \in \chi(M)$ için $D_X \Phi$ yi hesaplayalım. Her $A, B \in \chi(M)$ için

$$\begin{aligned} (D_X \Phi)(A, B) &= D_X\{\Phi(A, B)\} - \Phi(D_X A, B) - \Phi(A, D_X B) \\ &= D_X\{g(FA, B)\} - g(F(D_X A), B) - g(FA, D_X B) \\ &= g(D_X(FA), B) + g(FA, D_X B) - g(F(D_X A), B) \\ &\quad -g(FA, D_X B) \\ &= g((D_X F)A + FD_X A, B) + g(FA, D_X B) - g(F(D_X A), B) \\ &\quad -g(FA, D_X B) \\ &= g((D_X F)A, B) \\ &= g(r(X)G - q(X)H)A, B) \\ &\quad r(X)g(GA, B) - q(X)g(HA, B) \\ &= r(X)\Psi(A, B) - q(X)\theta(A, B) \end{aligned}$$

olduğundan

$$D_X \Phi = r(X)\Psi - q(X)\theta$$

elde edilir. Benzer şekilde

$$D_X\Psi = -r(X)\Phi + p(X)\theta \text{ ve } D_X\theta = q(X)\Phi - p(X)\Psi$$

olduğu görülebilir. Burada p, q ve r, lokal $1-$formlardır.

Şimdi her $X \in \chi(M)$ için D_XW ifadesini hesaplayalım.

$$\begin{aligned}
D_XW &= D_X(\Phi\wedge\Phi + \Psi\wedge\Psi + \theta\wedge\theta) \\
&= D_X(\Phi\wedge\Phi) + D_X(\Psi\wedge\Psi) + D_X(\theta\wedge\theta) \\
&= (D_X\Phi)\wedge\Phi + \Phi\wedge(D_X\Phi) + (D_X\Psi)\wedge\Psi + \Psi\wedge(D_X\Psi) \\
&\quad +(D_X\theta)\wedge\theta + \theta\wedge(D_X\theta) \\
&= (r(X)\Psi - q(X)\theta)\wedge\Phi + \Phi\wedge(r(X)\Psi - q(X)\theta) \\
&\quad +(-r(X)\Phi + p(X)\theta)\wedge\Psi + \Psi\wedge(-r(X)\Phi + p(X)\theta) \\
&\quad +(q(X)\Phi - p(X)\Psi)\wedge\theta + \theta\wedge(q(X)\Phi - p(X)\Psi) \\
&= r(X)(\Psi\wedge\Phi) - q(X)(\theta\wedge\Phi) + r(X)(\Phi\wedge\Psi) - q(X)(\Phi\wedge\theta) \\
&\quad -r(X)(\Phi\wedge\Psi) + p(X)(\theta\wedge\Psi) - r(X)(\Psi\wedge\Phi) + p(X)(\Psi\wedge\theta) \\
&\quad +q(X)(\Phi\wedge\theta) - p(X)(\Psi\wedge\theta) + q(X)(\theta\wedge\Phi) - p(X)(\theta\wedge\Psi) \\
&= 0
\end{aligned}$$

bulunur.

Şimdi de $D_X\wedge = 0$ eşitliğini ispatlayalım.

$$\begin{aligned}
D_X\wedge &= D_X(F\otimes F + G\otimes G + H\otimes H) \\
&= D_X(F\otimes F) + D_X(G\otimes G) + D_X(H\otimes H) \\
&= D_XF\otimes F + F\otimes D_XF + D_XG\otimes G + G\otimes D_XG \\
&\quad +D_XH\otimes H + H\otimes D_XH \\
&= (r(X)G - q(X)H)\otimes F + F\otimes(r(X)G - q(X)H) \\
&\quad +(-r(X)F + p(X)H)\otimes G + G\otimes(-r(X)F + p(X)H) \\
&\quad +(q(X)F - p(X)G)\otimes H + H\otimes(q(X)F - p(X)G)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= r(X)(G\otimes F)-q(X)(H\otimes F)+r(X)(F\otimes G)-q(X)(F\otimes H)\\
&\quad -r(X)(F\otimes G)+p(X)(H\otimes G)-r(X)(G\otimes F)+p(X)(G\otimes H)\\
&\quad +q(X)(F\otimes H)-p(X)(G\otimes H)+q(X)(H\otimes F)-p(X)(H\otimes G)\\
&= 0
\end{aligned}
$$

olur. O halde $D_X\wedge=0$ elde edilir.

Teoremin tersten ispatını yapmak için $D_XW=0$ ve $D_X\wedge=0$ $(\forall X\in\chi(M))$ olduğunu kabul ederek (M,V,g) hemen hemen kuaterniyon metrik manifoldunun bir kuaterniyon Kähler manifoldu olduğunu gösterelim.

Öncelikle $D_X\wedge=0$ olduğunu kabul edelim. $boyM=n$ olsun. Bu durumda M üzerinde tanımlı olan $(1,1)$ tipli tensörlerin uzayının boyutu n^2 dir. $\{F,G,H\}$, V nin bir bazı olduğundan dolayı $(1,1)$ tipli tensörlerin uzayının sıralı bir bazı $\{F,G,H,B_1,B_2,...,B_k\}$ olacak biçimde $B_1,B_2,...,B_k$ $(k=n^2-3)$ elemanlarını seçebiliriz. D_X, $(1,1)$ tipli tesör cebrinin endomorfizmlerini koruduğundan dolayı (Doğanaksoy 1983) $a_{ij},b_{ij}\in\mathbb{R}$ için

$$
\begin{aligned}
D_XF &= a_{11}F+a_{12}G+a_{13}H+b_{11}B_1+b_{12}B_2+...+b_{1k}B_k\\
D_XG &= a_{21}F+a_{22}G+a_{23}H+b_{21}B_1+b_{22}B_2+...+b_{2k}B_k\\
D_XH &= a_{31}F+a_{32}G+a_{33}H+b_{31}B_1+b_{32}B_2+...+b_{3k}B_k
\end{aligned}
$$

yazabiliriz. Ayrıca

$$
\begin{aligned}
F^2=-I &\Rightarrow D_XF^2=D_X(-I)\\
&\Rightarrow (D_XF)F+F(D_XF)=0
\end{aligned}
$$

olur. Benzer şekilde $(D_XG)G+G(D_XG)=0$ ve $(D_XH)H+H(D_XH)=0$ bulunabilir. Yine

$$
\begin{aligned}
H=FG\Rightarrow D_XH &= D_X(FG)\\
&=(D_XF)G+F(D_XG)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
F = GH \Rightarrow D_X F &= D_X(GH) \\
&= (D_X G)H + G(D_X H) \\
G = HF \Rightarrow D_X G &= D_X(HF) \\
&= (D_X H)F + H(D_X F)
\end{aligned}
$$

elde edilir. Hipotezden $D_X \wedge = 0$ olduğundan

$$
\begin{aligned}
D_X \wedge &= (D_X F) \otimes F + F \otimes (D_X F) + (D_X G) \otimes G + G \otimes (D_X G) \\
&\quad +(D_X H) \otimes H + H \otimes (D_X H) \\
&= a_{11} F \otimes F + a_{12} G \otimes F + a_{13} H \otimes F + \sum_{i=1}^{k} b_{1i} B_i \otimes F \\
&\quad + a_{11} F \otimes F + a_{12} F \otimes G + a_{13} F \otimes H + \sum_{i=1}^{k} b_{1i} F \otimes B_i \\
&\quad + a_{21} F \otimes G + a_{22} G \otimes G + a_{23} H \otimes G + \sum_{i=1}^{k} b_{2i} B_i \otimes G \\
&\quad + a_{21} G \otimes F + a_{22} G \otimes G + a_{23} G \otimes H + \sum_{i=1}^{k} b_{2i} G \otimes B_i \\
&\quad + a_{31} F \otimes H + a_{32} G \otimes H + a_{33} H \otimes H + \sum_{i=1}^{k} b_{3i} B_i \otimes H \\
&\quad + a_{31} H \otimes F + a_{32} H \otimes G + a_{33} H \otimes H + \sum_{i=1}^{k} b_{3i} H \otimes B_i \\
&= 0
\end{aligned}
$$

yazabiliriz. Buradan

$$
\begin{aligned}
a_{11} &= a_{22} = a_{33} = 0,\ b_{ij} = 0\ (1 \leq i \leq 3,\ 1 \leq j \leq n^2 - 3) \\
a_{12} &= -a_{21},\ a_{13} = -a_{31} \text{ ve } a_{23} = -a_{32}
\end{aligned}
$$

elde edilir ki bu (M, V, g) nin bir kuaterniyon Kähler manifoldu olduğunu gösterir.

Şimdi de $D_X W = 0$ olduğunu kabul edelim. Buradan

$$
D_X W = D_X(\Phi \wedge \Phi + \Psi \wedge \Psi + \theta \wedge \theta)
$$

$$
\begin{aligned}
&= D_X(\Phi \wedge \Phi) + D_X(\Psi \wedge \Psi) + D_X(\theta \wedge \theta) \\
&= 0
\end{aligned}
$$

olur. Bu ifade açılır ve yukarıdaki eşitlikler yerlerine yazılırsa M nin bir kuaterniyon Kähler manifoldu olduğu kolayca görülebilir. ■

Lemma 3.2.1. (M, V, g) bir hemen hemen metrik manifold olsun. Bir U koordinat komşuluğunda bir koordinat sistemi $\{x_h\}$, $1 \leq h \leq 4m$ olmak üzere V bundle'ının bir bazı $\{F, G, H\}$ olsun. (U, x_h) koordinat komşuluğunda F, G, H ve g nin bileşenlerini, sırasıyla, F_i^h, G_i^h, H_i^h ve g_{ih} ile gösterelim ve $F_{ih} = \sum_{t=1}^{4m} F_i^t g_{th}$, $F^{ih} = \sum_{t=1}^{4m} g^{it} F_t^h$ olsun. Burada $(g^{ij}) = (g_{ij})^{-1}$ dir. Bu durumda

$$
\left.
\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{4m} F_i^\alpha G_\beta^i = -\sum_{i=1}^{4m} G_i^\alpha F_\beta^i = H_\beta^\alpha, \\
&\sum_{i=1}^{4m} G_i^\alpha H_\beta^i = -\sum_{i=1}^{4m} H_i^\alpha G_\beta^i = F_\beta^\alpha, \\
&\sum_{i=1}^{4m} H_i^\alpha F_\beta^i = -\sum_{i=1}^{4m} F_i^\alpha H_\beta^i = G_\beta^\alpha
\end{aligned}
\right\} \tag{3.2.2}
$$

$$
\sum_{t=1}^{4m} F_t^t = \sum_{t=1}^{4m} G_t^t = \sum_{t=1}^{4m} G_t^t = 0 \tag{3.2.3}
$$

$$
\sum_{t=1}^{4m} F_t^\beta F_\alpha^t = \sum_{t=1}^{4m} G_t^\beta G_\alpha^t = \sum_{t=1}^{4m} H_t^\beta H_\alpha^t = -\delta_\alpha^\beta \tag{3.2.4}
$$

$$
F_{\alpha\beta} = -F_{\beta\alpha},\ G_{\alpha\beta} = -G_{\beta\alpha},\ H_{\alpha\beta} = -H_{\beta\alpha} \tag{3.2.5}
$$

$$
F^{\alpha\beta} = -F^{\beta\alpha},\ G^{\alpha\beta} = -G^{\beta\alpha},\ H^{\alpha\beta} = -H^{\beta\alpha} \tag{3.2.6}
$$

$$
g_{\alpha\beta} = \sum_{i,j=1}^{m} g_{ij} F_\alpha^i F_\beta^j = \sum_{i,j=1}^{m} g_{ij} G_\alpha^i G_\beta^j = \sum_{i,j=1}^{m} g_{ij} H_\alpha^i H_\beta^j \tag{3.2.7}
$$

eşitlikleri gerçeklenir ve F_{ih}, G_{ih}, H_{ih}, sırasıyla, Φ, Ψ, θ lokal $2-$formlarının bileşenleridir.

İspat. İspat boyunca $4m$ $(m \geq 1)$ boyutlu hemen hemen kuaterniyon M manifoldunun bir U koordinat komşuluğunda $\phi : U \to \mathbb{R}^{4m}$, $\phi(x_1, x_2, ..., x_{4m})$ olmak üzere V bundle'ının bir kanonik lokal bazı $\{F, G, H\}$ alınmaktadır.

U komşuluğunda $\chi(M)$ nin bir bazı $\left\{ \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial}{\partial x_{4m}} \right\}$ dir. $\frac{\partial}{\partial x_i} = \partial_i$ diyelim. Bu durumda

$$\begin{aligned} F: \ \chi(M) & \rightarrow \quad \chi(M) \\ \partial_i & \rightarrow \ F(\partial_i) = \sum_{j=1}^{4m} F_i^j \partial_j \end{aligned}$$

veya $F_i = F_i^j \partial_j$ olur. Benzer şekilde G ve H içinde benzer ifadeler yazılabilir. $FG = H$ olduğunu biliyoruz. Buradan

$$\begin{aligned} (FG)(\partial_i) = H(\partial_i) & \Rightarrow F(G(\partial_i)) = H(\partial_i) \\ & \Rightarrow F(G_i^j \partial_j) = H(\partial_i) \\ & \Rightarrow G_i^j F(\partial_j) = H(\partial_i) \\ & \Rightarrow G_i^j F_j^k \partial_k = H_i^k \partial_k \\ & \Rightarrow G_i^j F_j^k = H_i^k \end{aligned}$$

veya

$$H_i^k = \sum_{j=1}^{4m} G_i^j F_j^k$$

olur. Böylece (3.2.2) nin ilk denklemi elde edilir. Benzer şekilde (3.2.2) nin diğer denklemleri de bulunabilir.

(3.2.2) denklemlerinde $\alpha = \beta$ alınarak (3.2.3) denklemi bulunabilir. Gerçekten,

$$F_\beta^\alpha = \sum_{i=1}^{4m} G_i^\alpha H_\beta^i = -\sum_{i=1}^{4m} H_i^\alpha G_\beta^i$$

ifadesinde $\alpha = \beta$ alınırsa, bu durumda

$$\begin{aligned} F_\alpha^\alpha = \sum_{i=1}^{4m} G_i^\alpha H_\alpha^i = -\sum_{i=1}^{4m} H_i^\alpha G_\alpha^i \Rightarrow \sum_{\alpha=1}^{4m} F_\alpha^\alpha & = \sum_{\alpha=1}^{4m} \left(\sum_{i=1}^{4m} G_i^\alpha H_\alpha^i \right) \\ & = \sum_{i=1}^{4m} \left(\sum_{\alpha=1}^{4m} H_\alpha^i G_i^\alpha \right) \\ & = \sum_{\alpha=1}^{4m} \left(\sum_{i=1}^{4m} H_i^\alpha G_\alpha^i \right) \\ & = \sum_{\alpha=1}^{4m} (-F_\alpha^\alpha) \end{aligned}$$

olduğundan $\sum_{\alpha=1}^{4m} F_\alpha^\alpha = 0$ elde edilir. Benzer şekilde (3.2.3) ün diğer eşitlikleri de bulunabilir.

(3.2.4) deki eşitlikleri bulabilmek için $F^2 = G^2 = H^2 = -I$ özdeşliğini kullanacağız. Bu durumda

$$\begin{aligned} F^2 = -I \ &\Rightarrow F^2(\partial_i) = -I^2(\partial_i) \\ &\Rightarrow F(F(\partial_i)) = -\delta_i^k \partial_k \\ &\Rightarrow F(F_i^j \partial_j) = -\delta_i^k \partial_k \\ &\Rightarrow F_i^j F(\partial_j) = -\delta_i^k \partial_k \\ &\Rightarrow F_i^j F_j^k \partial_k = -\delta_i^k \partial_k \\ &\Rightarrow F_i^j F_j^k = -\delta_i^k \end{aligned}$$

elde edilir. Benzer düşünceler (3.2.4) deki diğer eşitliklere de uygulanabilir.

(3.2.5) deki eşitliklerin doğrulunu göstermek için

$$\begin{aligned} g(F(X),Y) + g(X,F(Y)) &= 0, \ g(G(X),Y) + g(X,G(Y)) = 0, \\ g(H(X),Y) + g(X,H(Y)) &= 0 \end{aligned}$$

denklemlerini kullanmalıyız. Böylece

$$\begin{aligned} g(F(\partial_i),\partial_j) + g(\partial_i, F(\partial_j)) = 0 \ &\Rightarrow g(F_i^k \partial_k, \partial_j) + g(\partial_i, F_j^k \partial_k) = 0 \\ &\Rightarrow F_i^k g(\partial_k, \partial_j) + F_j^k g(\partial_i, \partial_k) = 0 \\ &\Rightarrow F_i^k g_{kj} + F_j^k g_{ik} = 0 \\ &\Rightarrow F_{ij} + F_{ji} = 0 \\ &\Rightarrow F_{ij} = -F_{ji} \end{aligned}$$

bulunur. (3.2.5) deki diğer eşitlikler de ispatlanabilir. Ayrıca (3.2.6) daki eşitlikler de (3.2.5) den kolayca elde edilir.

Son olarak, (3.2.7) eşitliklerini bulabilmek için

$$\begin{aligned} &g(X,Y) = g(F(X),F(Y)), \quad g(X,Y) = g(G(X),G(Y)), \\ &g(X,Y) = g(H(X),H(Y)) \end{aligned}$$

eşitliklerini kullanacağız. Bunun için

$$\begin{aligned}
g(\partial_i, \partial_j) &= g(F(\partial_i), F(\partial_j)) \\
&= g(F_i^k a_k, F_j^h a_h) \\
&= F_i^k F_j^h g(a_k, a_h) \\
&= F_i^k F_j^h g_{kh}
\end{aligned}$$

olduğundan

$$g_{ij} = \sum_{k,h=1}^{4m} g_{kh} F_i^k F_j^h$$

elde edilir. Benzer şekilde (3.2.7) nin diğer eşitlikleri de kolayca görülebilir. ■

Lemma 3.2.2. $M = (M, V, g)$ bir kuaterniyon Kähler manifoldu, V nin kanonik lokal bazı $\{F, G, H\}$ ve M nin Riemann Curvature tensörü R olsun. Bu durumda her $X, Y \in \chi(M)$ için

$$\begin{aligned}
(R(X,Y)F) &= C(X,Y)G - B(X,Y)H = R(X,Y)F - FR(X,Y) \\
&= [R(X,Y), G] \\
(R(X,Y)G) &= -C(X,Y)F - A(X,Y)H = [R(X,Y), G] \\
(R(X,Y)H) &= B(X,Y)F - A(X,Y)G = [R(X,Y), H]
\end{aligned}$$

olur. Burada $A = dp + q \wedge r$, $B = dq + r \wedge p$, $C = dr + p \wedge q$ dur.

İspat. İlk olarak, birinci eşitliği ispatlayalım. Her $Z \in \chi(M)$ için

$$(R(X,Y)F)(Z) = (D_X D_Y F - D_Y D_X F - D_{[X,Y]} F)(Z)$$

olup Teorem 3.2.1 in (ii) şıkkındaki eşitlikleri kullanarak

$$\begin{aligned}
(R(X,Y)F)(Z) &= \{D_X(r(Y)G - q(Y)H) - D_Y(r(X)G - q(X)H) \\
&\quad -r([X,Y])G + q([X,Y])H\}(Z) \\
&= \{D_X(r(Y)G) - D_X(q(Y)H) - D_Y(r(X)G) + D_Y(q(X)H)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
& -r([X,Y])G + q([X,Y])H\,\}(Z) \\
= \ & \{X(r(Y))G + r(Y)D_X G - X(q(Y))H - q(Y)D_X H \\
& -Y(r(X)G - r(X)D_Y G + Y(q(X))H + q(X)D_Y H \\
& -r([X,Y])G + q([X,Y])H\,\}(Z) \\
= \ & \{X(r(Y))G + r(Y)\left(-r(X)F + p(X)H\right) - X(q(Y))H \\
& -q(Y)\left(q(X)F - p(X)G\right) - Y(r(X))G \\
& -r(X)\left(-r(Y)F + p(Y)H\right) + Y(q(X))H + q(X)\left(q(Y)F - p(Y)G\right) \\
& -r([X,Y])G + q([X,Y])H\,\}(Z) \\
= \ & \{X(r(Y))G - r(Y)r(X)F + r(Y)p(X)H - X(q(Y))H \\
& -q(Y)q(X)F + q(Y)p(X)G - Y(r(X))G + r(X)r(Y)F \\
& -r(X)p(Y)H + Y(q(X))H + q(X)q(Y)F - q(X)p(Y)G \\
& -r([X,Y])G + q([X,Y])H\,\}(Z) \\
= \ & \left(X(r(Y)) - Y(r(X)) - r([X,Y]) + p(X)q(Y) - q(X)p(Y)\right)(GZ) \\
& -\left(X(q(Y)) - Y(q(X)) - q([X,Y]) + r(X)p(Y) - r(Y)p(X)\right)(HZ)
\end{aligned}
$$

bulunur. Burada

$$
\begin{aligned}
dr(X,Y) &= X(r(Y)) - Y(r(X)) - r([X,Y]), \\
dq(X,Y) &= X(q(Y)) - Y(q(X)) - q([X,Y])
\end{aligned}
$$

olduğundan

$$
\begin{aligned}
(R(X,Y)F)(Z) &= \left(dr(X,Y) + (p \wedge q)(X,Y)\right)G(Z) \\
&\quad - \left(dq(X,Y) + r \wedge p)(X,Y)\right)H(Z) \\
&= C(X,Y)G(Z) - B(X,Y)H(Z)
\end{aligned}
$$

olur. Buradan

$$
(R(X,Y)F) = C(X,Y)G - B(X,Y)H
$$

elde edilir. Şimdi de

$$(R(X,Y)F)=R(X,Y)F-FR(X,Y)=[R(X,Y),F]$$

eşitliğini gösterelim. Her $Z\in\chi(M)$ için

$$\begin{aligned}
R(X,Y)(FZ) &= D_XD_Y(FZ)-D_YD_X(FZ)-D_{[X,Y]}(FZ)\\
&= D_X\left((D_YF)Z+F(D_YZ)\right)-D_Y\left((D_XF)Z+F(D_XZ)\right)\\
&\quad -D_{[X,Y]}F-FD_{[X,Y]}Z\\
&= D_X((D_YF)Z)+D_X(F(D_YZ))-D_Y((D_XF)Z)\\
&\quad -D_Y(F(D_XZ))-(D_{[X,Y]}F)Z-FD_{[X,Y]}Z\\
&= D_X(D_YF)Z+(D_YF)(D_XZ)+(D_XF)(D_YZ)+FD_XD_YZ\\
&\quad -D_Y(D_XF)Z-(D_XF)(D_YZ)-(D_YF)(D_XZ)-FD_YD_XZ\\
&\quad -(D_{[X,Y]}F)Z-FD_{[X,Y]}Z\\
&= D_X(D_YF)Z-D_Y(D_XF)Z-(D_{[X,Y]}F)Z\\
&\quad +F\left(D_XD_YZ-D_YD_XZ-D_{[X,Y]}Z\right)\\
&= (R(X,Y)F)Z+F(R(X,Y)Z)
\end{aligned}$$

olur ve buradan

$$(R(X,Y)F)Z=R(X,Y)(FZ)-F(R(X,Y)Z)$$

olup dolayısıyla

$$\begin{aligned}
(R(X,Y)F) &= R(X,Y)F-FR(X,Y)\\
&= [R(X,Y),F]
\end{aligned}$$

elde edilir. Benzer şekilde diğer iki denklem de bulunabilir. ■

Lemma 3.2.3. $M=(M,V,g)$ bir kuaterniyon Kähler manifold, V nin kanonik lokal bazı $\{F,G,H\}$ ve M nin Riemann curvature tensörü R olsun. Bu durumda her

$X, Y, Z \in \chi(M)$ için

$$\begin{aligned}
g(R(X,Y)FZ, FW) - g(R(X,Y)Z, W) &= C(X,Y)g(Z, HW) + B(X,Y)g(Z, GW) \\
g(R(X,Y)GZ, GW) - g(R(X,Y)Z, W) &= A(X,Y)g(Z, FW) + C(X,Y)g(Z, HW) \\
g(R(X,Y)HZ, HW) - g(R(X,Y)Z, W) &= B(X,Y)g(Z, GW) + A(X,Y)g(Z, FW)
\end{aligned}$$

olur.

İspat. Lemma 3.2.2 den

$$R(X,Y)(FZ) = (R(X,Y)F)(Z) + F(R(X,Y)(Z))$$

olduğunu biliyoruz. Buradan

$$\begin{aligned}
g(R(X,Y)FZ, FW) - g(R(X,Y)Z, W) &= g(R(X,Y)F)(Z) + F(R(X,Y)Z, FW) \\
&\quad - g(R(X,Y)Z, W) \\
&= g\left(R(X,Y)F)(Z), FW\right) \\
&\quad + g\left(F(R(X,Y)Z), FW\right) \\
&\quad - g(R(X,Y)Z, W)
\end{aligned}$$

olur. $R(X,Y)F = C(X,Y)G - B(X,Y)H$ eşitliğini yerine yazarsak

$$\begin{aligned}
g(R(X,Y)FZ, FW) - g(R(X,Y)Z, W) &= g\left(C(X,Y)GZ - B(X,Y)HZ, FW\right) \\
&\quad + g\left(F(R(X,Y)Z), FW\right) - g\left(R(X,Y)Z, W\right)
\end{aligned}$$

bulunur. Ayrıca $g(FX, FY) = g(X, Y)$ den $g\left(F(R(X,Y)Z), FW\right) = g\left(R(X,Y)Z, W\right)$ olacağından

$$\begin{aligned}
g(R(X,Y)FZ, FW) - g(R(X,Y)Z, W) &= C(X,Y)g(GZ, FW) - B(X,Y)g(HZ, FW) \\
&= -C(X,Y)g(Z, GFW) + B(X,Y)g(Z, HFW) \\
&= C(X,Y)g(Z, HW) + B(X,Y)g(Z, GW)
\end{aligned}$$

elde edilir. Diğer iki eşitlik benzer yöntemle gösterilebilir. ■

Lemma 3.2.4. $M = (M, V, g)$, $4m-$boyutlu bir kuaterniyon Kähler manifold, V nin bir kanonik lokal bazı $\{F, G, H\}$ ve M nin Riemann curvature tensörü R olsun. $\{e_i\}$, $1 \leq i \leq m$, M nin bir ortonormal bazı olmak üzere her $X, Y \in \chi(M)$ için

$$\begin{aligned}
A(X,Y) &= \frac{1}{2m}\sum_{i=1}^{4m} g(R(X,Y)e_i, Fe_i), \\
B(X,Y) &= \frac{1}{2m}\sum_{i=1}^{4m} g(R(X,Y)e_i, Ge_i), \\
C(X,Y) &= \frac{1}{2m}\sum_{i=1}^{4m} g(R(X,Y)e_i, He_i)
\end{aligned}$$

dir.

İspat. Lemma 3.2.3 ün ikinci denkleminde $Z = e_i$, $W = e_i$ alırsak

$$g(R(X,Y)Ge_i, Ge_i) - g(R(X,Y)e_i, e_i) = A(X,Y)g(e_i, Fe_i) + C(X,Y)g(e_i, He_i)$$

olur. $Fe_i = F(e_i) = \sum\limits_{k=1}^{4m} F_i^k e_k$, $Ge_i = \sum\limits_{k=1}^{4m} G_i^k e_k$, $He_i = \sum\limits_{k=1}^{4m} H_i^k e_k$ değerlerini yerlerine yazarsak

$$\begin{aligned}
g\left(R(X,Y)\sum_{k=1}^{4m} G_i^k e_k, \sum_{s=1}^{4m} G_i^s e_s\right) - g(R(X,Y)e_i, e_i) &= A(X,Y)g\left(e_i, \sum_{k=1}^{4m} F_i^k e_k\right) \\
&\quad + C(X,Y)g\left(e_i, \sum_{k=1}^{4m} H_i^k e_k\right)
\end{aligned}$$

olup buradan

$$\begin{aligned}
\sum_{k,s=1}^{4m} G_i^k G_i^s g(R(X,Y)e_k, e_s) - g(R(X,Y)e_i, e_i) &= \sum_{k=1}^{4m} F_i^k g_{ik} A(X,Y) \\
&\quad + \sum_{k=1}^{4m} H_i^k g_{ik} C(X,Y)
\end{aligned}$$

bulunur. Bu eşitliğin her iki tarafını $F^{ih} = \sum_{t=1}^{4m} g^{it} F_t^h$ ile çarpalım. Bu durumda

$$\begin{aligned} &\sum_{k,s,t=1}^{4m} G_i^k G_i^s g^{it} F_t^h g(R(X,Y)e_k, e_s) - \sum_{t=1}^{4m} g^{it} F_t^h g(R(X,Y)e_i, e_i) \\ = &\sum_{k,t=1}^{4m} F_i^k g_{ik} g^{it} F_t^h A(X,Y) + \sum_{k,t=1}^{4m} H_i^k g_{ik} g^{it} F_t^h C(X,Y) \end{aligned}$$

olur. $Fg^{-1} = -g^{-1}F$ olduğundan

$$\begin{aligned} &-\sum_{k,s,t=1}^{4m} G_i^k G_i^s F_t^h g^{it} g(R(X,Y)e_k, e_s) - \sum_{t=1}^{4m} g^{it} F_t^h g(R(X,Y)e_i, e_i) \\ = &\sum_{k,t=1}^{4m} F_i^k F_t^h g_{ik} g^{it} A(X,Y) + \sum_{k,t=1}^{4m} H_i^k g_{ik} g^{it} F_t^h C(X,Y) \end{aligned}$$

ve (3.2.2) den

$$\begin{aligned} &\sum_{k,s=1}^{4m} G_i^k H_t^s g(R(X,Y)e_k, e_s) - \sum_{t=1}^{4m} g^{it} F_t^h g(R(X,Y)e_i, e_i) \\ = &\sum_{k,t=1}^{4m} (-\delta_t^k) g_{ik} g^{it} A(X,Y) + \sum_{k,t=1}^{4m} \delta_t^k G_t^k g_{ik} g^{it} C(X,Y) \end{aligned}$$

olur. Buradan

$$\begin{aligned} &\sum_{k=1}^{4m} F_h^k g^{it} g(R(X,Y)e_k, e_i) - \sum_{t=1}^{4m} g^{it} F_t^h g(R(X,Y)e_i, e_i) \\ = &-\sum_{k=1}^{4m} A(X,Y) + \sum_{k=1}^{4m} G_k^k C(X,Y) \end{aligned}$$

ve de

$$\sum_{i=1}^{4m} F_h^i g^{ii} g(R(X,Y)e_i, e_i) + \sum_{i=1}^{4m} F_i^h g^{ii} g(R(X,Y)e_i, e_i) = 4mA(X,Y)$$

bulunur. Bu son eşitlikten

$$A(X,Y) = \frac{1}{2m} \sum_{i=1}^{4m} g\left(R(X,Y)e_i, Fe_i\right)$$

elde edilir. Benzer şekilde diğer eşitliklerde ispatlanabilir. ■

Lemma 3.2.5. (M,V,g), $4m-$boyutlu bir kuaterniyon Kähler manifoldu,

R_{kji}^h Riemann curvature tensörünün bileşenleri ve $K_{kjih}=\sum\limits_{t=1}^{4m} R_{kji}^t g_{th}$ Riemann Cristoffel curvature tensörünün bileşenleri olsun. Bu durumda

(i)

$$\left.\begin{array}{l}\sum\limits_{t=1}^{4m} R_{kjt}^h F_i^t-\sum\limits_{s=1}^{4m} R_{kji}^s F_s^h=C_{kj}G_i^h-B_{kj}H_i^h\\ \sum\limits_{t=1}^{4m} R_{kjt}^h G_i^t-\sum\limits_{s=1}^{4m} R_{kji}^s G_s^h=-C_{kj}F_i^h+A_{kj}H_i^h\\ \sum\limits_{t=1}^{4m} R_{kjt}^h H_i^t-\sum\limits_{s=1}^{4m} R_{kji}^s H_s^h=B_{kj}F_i^h-A_{kj}H_i^h\end{array}\right\} \tag{3.2.8}$$

olur. Burada

$$A=\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{4m} A_{ij}dx_i\wedge dx_j,\ B=\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{4m} B_{ij}dx_i\wedge dx_j,\ C=\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{4m} B_{ij}dx_i\wedge dx_j$$

dir.

(ii)

$$\left.\begin{array}{l}-\sum\limits_{t,s=1}^{4m}(K_{kjts}^h F_i^t F_h^s)+K_{kjih}=C_{kj}H_{ih}+B_{kj}G_{ih}\\ -\sum\limits_{t,s=1}^{4m}(K_{kjts}^h G_i^t G_h^s)+K_{kjih}=A_{kj}F_{ih}+C_{kj}H_{ih}\\ -\sum\limits_{t,s=1}^{4m}(K_{kjts}^h G_i^t G_h^s)+K_{kjih}=B_{kj}G_{ih}+A_{kj}F_{ih}.\end{array}\right\} \tag{3.2.9}$$

(iii)

$$\left.\begin{array}{l}A_{kj}=\frac{1}{2m}\sum\limits_{i,h}^{4m} K_{kjih}F^{ih}=-\frac{1}{m}\sum\limits_{i,h}^{4m} K_{kihj}F^{ih}\\ B_{kj}=\frac{1}{2m}\sum\limits_{i,h}^{4m} K_{kjih}G^{ih}=-\frac{1}{m}\sum\limits_{i,h}^{4m} K_{kihj}G^{ih}\\ A_{kj}=\frac{1}{2m}\sum\limits_{i,h}^{4m} K_{kjih}H^{ih}=-\frac{1}{m}\sum\limits_{i,h}^{4m} K_{kihj}H^{ih}.\end{array}\right\} \tag{3.2.10}$$

İspat. (i) (M,V,g) bir kuaterniyon Kähler manifoldu olduğundan Teorem 3.2.1 in (ii) şıkkını kullanabiliriz. Buna göre $\left([D_{\partial_k},D_{\partial_j}]F\right)(\partial_i)$ ifadesini hesaplayalım.

$$\begin{aligned}\left([D_{\partial_k},D_{\partial_j}]F\right)(\partial_i) &= \left(D_{\partial_k}(D_{\partial_j}F),D_{\partial_j}(D_{\partial_k}F)\right)(\partial_i)\\ &= D_{\partial_k}\left((D_{\partial_j}F)\partial_i\right)-(D_{\partial_j}F)(D_{\partial_k}\partial_i)-D_{\partial_j}\left((D_{\partial_k}F)\partial_i\right)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
& +(D_{\partial_k}F)(D_{\partial_j}\partial_i) \\
= \; & D_{\partial_k}\left(D_{\partial_j}(F\partial_i) - F(D_{\partial_j}\partial_i)\right) - D_{\partial_j}\left(D_{\partial_k}(F\partial_i) - F(D_{\partial_k}\partial_i)\right) \\
& -(D_{\partial_j}F)(D_{\partial_k}\partial_i) + (D_{\partial_k}F)(D_{\partial_j}\partial_i) \\
= \; & D_{\partial_k}\left(D_{\partial_j}(F\partial_i)\right) - D_{\partial_k}\left(F(D_{\partial_j}\partial_i)\right) - D_{\partial_j}\left(D_{\partial_k}(F\partial_i)\right) \\
& +D_{\partial_j}\left(F(D_{\partial_k}\partial_i)\right) - (D_{\partial_j}F)(D_{\partial_k}\partial_i) + (D_{\partial_k}F)(D_{\partial_j}\partial_i) \\
= \; & D_{\partial_k}\left(D_{\partial_j}(F\partial_i)\right) - D_{\partial_j}\left(D_{\partial_k}(F\partial_i)\right) - D_{\partial_k}\left(F(D_{\partial_j}\partial_i)\right) \\
& +D_{\partial_j}\left(F(D_{\partial_k}\partial_i)\right) - (D_{\partial_j}F)(D_{\partial_k}\partial_i) + (D_{\partial_k}F)(D_{\partial_j}\partial_i) \\
= \; & [D_{\partial_k}, D_{\partial_j}](F\partial_i) - (D_{\partial_k}F)(D_{\partial_j}\partial_i) - FD_{\partial_k}(D_{\partial_j}\partial_i) \\
& +(D_{\partial_j}F)(D_{\partial_k}\partial_i) + FD_{\partial_j}(D_{\partial_k}\partial_i) - (D_{\partial_j}F)(D_{\partial_k}\partial_i) \\
& +(D_{\partial_k}F)(D_{\partial_j}\partial_i) \\
= \; & [D_{\partial_k}, D_{\partial_j}](F\partial_i) - F\left([D_{\partial_k}, D_{\partial_j}](\partial_i)\right) \\
= \; & R(\partial_k, \partial_j)F(\partial_i) - F\left(R(\partial_k, \partial_j)\partial_i\right)
\end{aligned}
$$

olduğundan

$$
\left([D_{\partial_k}, D_{\partial_j}]F\right)(\partial_i) = \sum_{h,t=1}^{4m} (R^h_{kjt}F^t_i - R^t_{kji}F^h_t)\partial_h \tag{3.2.11}
$$

elde edilir. Dğer taraftan

$$
\begin{aligned}
\left([D_{\partial_k}, D_{\partial_j}]F\right)\partial_i \; = \; & \left(D_{\partial_k}(D_{\partial_j}F), D_{\partial_j}(D_{\partial_k}F)\right)\partial_i \\
= \; & \left(D_{\partial_k}(r_jG - q_jH) - D_{\partial_j}(r_kG - q_kH)\right)\partial_i \\
= \; & (\frac{\partial r_j}{\partial x_k}G + r_jD_{\partial_k}G - \frac{\partial q_j}{\partial x_k}H - q_jD_{\partial_k}H - \frac{\partial r_k}{\partial x_j}G \\
& -r_kD_{\partial_J}G + \frac{\partial q_k}{\partial x_j}H + q_kD_{\partial_J}H\,)\partial_i \\
= \; & (\frac{\partial r_j}{\partial x_k}G + r_j(-r_kF + p_kH) - \frac{\partial q_j}{\partial x_k}H - q_j(q_kF - p_kG) \\
& -\frac{\partial r_k}{\partial x_j}G - r_k(-r_jF + p_jH) + \frac{\partial q_k}{\partial x_j}H + q_k(q_jF - p)G)\partial_i \\
= \; & (\frac{\partial r_j}{\partial x_k}G - r_jr_kF + r_jp_kH - \frac{\partial q_j}{\partial x_k}H - q_jq_kF + q_jp_kG \\
& -\frac{\partial r_k}{\partial x_j}G + r_kr_jF - r_kp_jH + \frac{\partial q_k}{\partial x_j}H + q_kq_jF - q_kp_jG)\partial_i \\
= \; & ((\frac{\partial r_j}{\partial x_k} - \frac{\partial r_k}{\partial x_j} + p_kq_j - p_jq_k)G - (\frac{\partial q_j}{\partial x_k} - \frac{\partial q_k}{\partial x_j} + p_jr_k - p_kr)_jH\,)\partial_i
\end{aligned}
$$

ve böylece

$$\left([D_{\partial_k}, D_{\partial_j}]F\right)\partial_i = \sum_{h=1}^{4m}(C_{kj}G_i^h - B_{kj}H_i^h)\partial_h$$

bulunur. Bu son eşitlikle (3.2.11) denklemi birlikte gözönüne alındığında (3.2.8) in ilk denklemi elde edilir. Benzer şekilde (3.2.8) in diğer denklemleri de bulunabilir.

(ii) (3.2.9) un ilk denklemini bulabilmek için (3.2.8) in ilk denkleminin her iki tarafını $F_{hu} = \sum\limits_{\alpha=1}^{4m} F_h^\alpha g_{\alpha u}$ ile çarpalım. Bu durumda

$$\sum_{h=1}^{4m}\left(\sum_{t=1}^{4m} R_{kjt}^h F_i^t - \sum_{s=1}^{4m} R_{kji}^s F_s^h\right)\left(\sum_{\alpha=1}^{4m} F_h^\alpha g_{\alpha u}\right) = \sum_{t,h=1}^{4m}\left(C_{kj}G_i^h - B_{kj}H_i^h\right)F_h^t g_{tu}$$

olup buradan

$$\sum_{h,t,\alpha=1}^{4m} R_{kjt}^h F_i^t F_h^\alpha g_{\alpha u} - \sum_{s,\alpha,h=1}^{4m} R_{kji}^s F_s^h F_h^\alpha g_{\alpha u} = \sum_{t,h=1}^{4m}\left(C_{kj}G_i^h - B_{kj}H_i^h\right)F_h^t g_{tu}$$

olduğundan (3.2.2) ve (3.2.4) uyarınca

$$\sum_{t,\alpha=1}^{4m} K_{kjt\alpha}F_i^t F_u^\alpha + K_{kjiu} = C_{kj}H_{iu} + B_{kj}G_{iu}$$

elde edilir. Benzer şekilde (3.2.9) un diğer denklemleri de ispatlanabilir.

(iii) (3.2.10) un ilk denklemini bulabilmek için (3.2.9) un ikinci denkleminin her iki tarafını $F_{ih} = \sum\limits_{t=1}^{4m} g^{it}F_t^h$ ile çarpalım. Böylece

$$\begin{aligned}&\sum_{i,h=1}^{4m}\left(\left(-\sum_{t,s=1}^{4m} K_{kjts}G_i^t G_h^s\right) + K_{kjih}\right)\left(\sum_{u=1}^{4m} g^{iu}F_u^h\right)\\ =\ &\sum_{i,h,s=1}^{4m}\left(A_{kj}F_{ih}\sum_{s=1}^{4m} g^{is}F_s^h + C_{kj}G_{ih}\sum_{s=1}^{4m} g^{is}F_s^h\right)\end{aligned}$$

bulunur. Buradan işleme devam edilirse

$$2\sum_{i,h=1}^{4m} K_{kjih}F^{ih} = 4mA_{kj} \Rightarrow A_{kj} = \frac{1}{2m}\sum_{i,h=1}^{4m} K_{kjih}F^{ih}$$

olur. Dğer taraftan

$$\begin{aligned}\sum_{t,s=1}^{4m} K_{ktsh}F^{ts} &= \frac{1}{2}\sum_{t,s=1}^{4m}(K_{ktsh}-K_{ksth})F^{ts}\\ &= \frac{1}{2}\sum_{t,s=1}^{4m}(K_{ktsh}+K_{skth})F^{ts}\\ &= -\frac{1}{2}\sum_{t,s=1}^{4m}K_{ktsh}F^{ts}\\ &= -mA_{kh}\end{aligned}$$

olacağından

$$A_{kh} = -\frac{1}{m}\sum_{t,s=1}^{4m}K_{ktsh}F^{ts}$$

elde edilir. Benzer düşünce ile (3.2.10) un diğer iki denklemi de gösterilebilir. ■

Lemma 3.2.6. (M,V,g) bir kuaterniyon Kähler manifoldu, V nin kanonik lokal bazı $\{F,G,H\}$ ve M nin Ricci tensörü S olsun. Bu durumda $X,Y\in\chi(M)$ için

$$\left.\begin{aligned}S(X,Y) &= -mA(X,FY)-B(X,GY)-C(X,HY)\\ S(X,Y) &= -A(X,FY)-mB(X,GY)-C(X,HY)\\ S(X,Y) &= -A(X,FY)-B(X,GY)-mC(X,HY)\end{aligned}\right\}\qquad(3.2.12)$$

olur. Eğer $m=1$ ise,

$$S(X,Y) = -A(X,FY)-B(X,GY)-C(X,HY)\qquad(3.2.13)$$

ve $m>1$ ise,

$$S(X,Y) = -(m+2)A(X,FY) = -(m+2)B(X,GY) = -(m+2)C(X,HY)\qquad(3.2.14)$$

gerçeklenir.

İspat. Ricci tensörünün tanımından

$$S(X,Y)=\sum_{i=1}^{4m} g(R(e_i,X)Y,e_i) \tag{3.2.15}$$

olduğunu biliyoruz. Lemma 3.2.3 ün ilk denkleminde $X\to e_i$, $Y\to X$, $Z\to Y$ ve $W\to e_i$ yazılırsa,

$$g(R(e_i,X)FY,Fe_i)-g(R(e_i,X)Y,e_i)=C(e_i,X)g(Y,He_i)+B(e_i,X)g(Y,Ge_i)$$

olup buradan

$$g(R(e_i,x)Y,e_i)=g(R(e_i,X)FY,Fe_i)-C(e_i,X)g(Y,He_i)-B(e_i,X)g(Y,Ge_i)$$

bulunur. Bunu (3.2.15) denkleminde yerine yarasak,

$$\begin{aligned}
S(X,Y) &= \sum_{i=1}^{4m} g(R(e_i,X)FY,Fe_i)-\sum_{i=1}^{4m} B(e_i,X)g(Y,Ge_i)-\sum_{i=1}^{4m} C(e_i,X)g(Y,He_i)\\
&= \sum_{i=1}^{4m} g(R(X,e_i)Fe_i,FY)-\sum_{i=1}^{4m} B(e_i,X)g(Y,Ge_i)-\sum_{i=1}^{4m} C(e_i,X)g(Y,He_i)
\end{aligned}$$

olur. Ayrıca

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{4m} g(R(X,e_i)Fe_i,Y) &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{4m}[g(R(X,e_i)Fe_i,Y)-g(R(X,Fe_i)e_i,Y)]\\
&= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{4m}[g(R(X,e_i)Fe_i,Y)+g(R(Fe_i,X)e_i,Y)]\\
&= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{4m} g(R(Fe_i,e_i)X,Y)\\
&= -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{4m} g(R(X,Y)e_i,Fe_i)
\end{aligned}$$

olacağından Lemma 3.2.4 uyarınca

$$\sum_{i=1}^{4m} g(R(X,e_i)Fe_i,Y)=-mA(X,Y)$$

olur. Bu son eşitlite $Y \to FY$ alınırsa, sonuç olarak (3.2.12) nin ilk denklemi bulunur. Benzer şekilde (3.2.12) nin diğer iki denklemi de kolayca görülebilir. Eğer $m = 1$ alınır ve bu üç denklem taraf tarafa toplanırsa, bu durumda (3.2.13) elde edilir. Şimdi lemmanın son eşitliklerini gösterelim. Lemmada verilen (3.2.12) nin birinci ve ikinci denklemi ile birinci ve üçüncü denklemini taraf tarafa çıkarırsak

$$0 = (1-m)A(X,FY) - (1-m)C(X,HY)$$

ve

$$0 = (1-m)A(X,FY) - (1-m)B(X,GY)$$

olur ve $m > 1$ olduğundan

$$A(X,FY) = B(X,GY) = C(X,HY)$$

bulunur. O halde buradan da (3.2.14) eşitliği elde edilir. ■

Lemma 3.2.7. $M = (M,V,g)$ bir kuaterniyon Kähler manifoldu, V nin kanonik lokal bazı $\{F,G,H\}$ ve M nin Riemann curvature tensörü R, Ricci tensörü S olmak üzere $m > 1$ ve her $X,Y,Z \in \chi(M)$ için

$$\begin{aligned}
g(R(X,Y)FZ,FW) - g(R(X,Y)Z,W) &= \frac{1}{m+2}[g(Z,HW)S(X,HY) \\
&\quad +g(Z,GW)S(X,GY)] \\
g(R(X,Y)GZ,GW) - g(R(X,Y)Z,W) &= \frac{1}{m+2}[g(Z,FW)S(X,FY) \\
&\quad +g(Z,HW)S(X,HY)] \\
g(R(X,Y)HZ,HW) - g(R(X,Y)Z,W) &= \frac{1}{m+2}[g(Z,GW)S(X,GY) \\
&\quad +g(Z,FW)S(X,FY)]
\end{aligned}$$

gerçeklenir.

İspat. Lemma 3.2.3 ün ilk denkleminden

$$\begin{aligned} g(R(X,Y)FZ,FW) - g(R(X,Y)Z,W) &= C(X,Y)g(Z,HW) \\ &+B(X,Y)g(Z,HW) \end{aligned} \tag{3.2.16}$$

yazabiliriz. (3.2.14) ten

$$S(X,Y) = -(m+2)C(X,HY) \Rightarrow C(X,Y) = \frac{1}{m+2}S(X,HY)$$

ve benzer şekilde

$$B(X,Y) = \frac{1}{m+2}S(X,GY)$$

olur. Bunları (3.2.16) denkleminde yerlerine yazarsak,

$$\begin{aligned} g(R(X,Y)FZ,FW) - g(R(X,Y)Z,W) &= \frac{1}{m+2}[g(Z,HW)S(X,HY) \\ &+g(Z,HW)S(X,GY)] \end{aligned}$$

elde edilir. Benzer şekilde diğer denklemler de bulunabilir. ■

Lemma 3.2.8. $M = (M,V,g)$ bir kuaterniyon Kähler manifoldu, V nin kanonik lokal bazı $\{F,G,H\}$ ve M nin Ricci tensörü S olmak üzere $X,Y \in \chi(M)$ için

$$S(FX,FY) = S(X,Y),\ S(GX,GY) = S(X,Y),\ S(HX,HY) = S(X,Y) \tag{3.2.17}$$

$$\begin{aligned} &S(FX,Y) + S(X,FY) = 0,\ S(GX,Y) + S(X,GY) = 0, \\ &S(HX,Y) + S(X,HY) = 0, \end{aligned} \tag{3.2.18}$$

olur.

İspat. (3.2.14) ten

$$\begin{aligned} S(FX,FY) &= -(m+2)A(FX,F^2Y) \\ &= -(m+2)A(FX,-Y) \\ &= (m+2)A(FX,Y) \end{aligned} \tag{3.2.19}$$

olup A anti-simetrik olduğundan

$$A(FX,Y) = -A(Y,FX)$$

yazabiliriz. Buradan

$$\begin{aligned} A(FX,Y) &= A(-Y,FX) \\ &= A(F^2Y,FX) \\ &= A(FY,X) \end{aligned}$$

bulunur. Bunu (3.2.19) denkleminde yerine yazarsak

$$\begin{aligned} S(FX,FY) &= (m+2)A(FY,X) \\ &= -(m+2)A(X,FY) \\ &= S(X,Y) \end{aligned}$$

elde edilir. Benzer şekilde (3.2.17) nin diğer eşitlikleri de gösterilebilir.

Şimdi (3.2.18) deki eşitlikleri gösterelim. Bunun için $S(FX,FY) = S(X,Y)$ eşitliğinde $X \to FY$ yazarsak

$$\begin{aligned} S(F^2X,FY) = S(FX,Y) &\Rightarrow S(-X,FY) = S(FX,Y) \\ &\Rightarrow -S(X,FY) = S(FX,Y) \\ &\Rightarrow S(FX,Y) + S(X,FY) = 0 \end{aligned}$$

bulunur. Yine benzer işlemler yapılarak (3.2.18) deki diğer ifadeler de kolayca görülebilir. ■

Lemma 3.2.9. $M = (M,V,g)$ bir kuaterniyon Kähler manifoldu, V nin kanonik lokal bazı $\{F,G,H\}$ ve M nin Ricci tensörü S ve Riemann konneksiyonu D olmak üzere $X,Y,Z \in \chi(M)$ için

$$(D_XS)(Y,FZ) + (D_XS)(Z,FY) = 0$$

ve $m > 1$ için

$$(D_XS)(Y,Z) + (D_XS)(FZ,FY) = 0$$

dır.

İspat. Öncelikle

$$\begin{aligned}(D_XS)(Y,FZ) + (D_XS)(Z,FY) &= D_X\left(S(Y,FZ)\right) - S(D_XY,FZ) - S(Y,D_X(FZ)) \\ &\quad + D_X\left(s(Z,FY)\right) - S(D_XZ,FY) - S(Z,D_{X(}FY))\end{aligned}$$

olduğundan (3.2.18) uyarınca

$$\begin{aligned}(D_XS)(Y,FZ) + (D_XS)(Z,FY) &= D_X\left(S(Y,FZ)\right) - S(D_XY,FZ) \\ &\quad - S\left(Y,(D_XF)Z + F(D_XZ)\right) - D_X\left(S(Y,FZ)\right) \\ &\quad - S(D_XZ,FY) - S\left(Z,(D_XF)Y + FD_XY\right)\end{aligned}$$

olup Teorem 3.2.1'i de dikkate alacak olursak

$$\begin{aligned}(D_XS)(Y,FZ) + (D_XS)(Z,FY) &= S(D_XY,FZ) - S\left(Y,(r(X) - q(X)H)Z\right) \\ &\quad - S(Y,F(D_XZ)) - S(D_XZ,FY) \\ &\quad - S\left(Z,(r(X)G - q(X)H)Y\right) - S(Z,F(D_XY)) \\ &= S(D_XY,FZ) - r(X)S(Y,GZ) + q(X)S(Y,HZ) \\ &\quad - S(Y,F(D_XZ)) - S(D_XZ,FY) - r(X)S(Z,HY) \\ &\quad - S(Z,F(D_XY)) \\ &= 0\end{aligned}$$

elde edilir. Lemmadaki diğer eşitlik te benzer yolla gösterilebilir. ■

Lemma 3.2.10. Lemma 3.2.5 in notasyon ve kabulleri altında (U,x_h) da $\{x_h\}$ koordinat sistemine göre Ricci tensörünün bileşenleri R_{ij} ve $boyM = 4m$, $m \geq 1$ olsun. Bu durumda

(i) Eğer $m > 1$ ise,

$$-\frac{1}{m+2}R_{kh} = \sum_{s=1}^{4m} A_{ks}F^{sh} = \sum_{s=1}^{4m} B_{ks}G^{sh} = \sum_{s=1}^{4m} C_{ks}H^{sh} \tag{3.2.20}$$

ve eğer $m = 1$ ise

$$R_{kh} = -\sum_{s=1}^{4m}(A_{ks}F_h^s + B_{ks}F_h^s + C_{ks}F_h^s) \tag{3.2.21}$$

olur.

(ii) Eğer $m > 1$ ise,

$$\left.\begin{aligned} A_{kh} &= \frac{1}{m+2}\sum_{s=1}^{4m} R_{ks}F_h^s \\ B_{kh} &= \frac{1}{m+2}\sum_{s=1}^{4m} R_{ks}G_h^s \\ A_{kh} &= \frac{1}{m+2}\sum_{s=1}^{4m} R_{ks}H_h^s \end{aligned}\right\} \tag{3.2.22}$$

dir.

(iii)

$$R_{kj} = \sum_{t,s=1}^{4m} R_{ts}F_k^tF_j^s = \sum_{t,s=1}^{4m} R_{ts}G_k^tG_j^s = \sum_{t,s=1}^{4m} R_{ts}H_k^tH_s^t \tag{3.2.23}$$

gerçeklenir.

İspat. (3.2.9) un ilk denkleminin her iki tarafını g^{ji} ile çarparsak

$$\begin{aligned} \sum_{i,j=1}^{4m}\left(-\sum_{t,s=1}^{4m} K_{kjts}F^{jt}F_h^s + R_{kh}\right) &= \sum_{i,j=1}^{4m}(C_{kj}H_{ih}g^{ji} + B_{kj}G_{ih}g^{ji}) \\ &= \sum_{i,j=1}^{4m}(C_{kj}H_i^m g_{mh}g^{ji} + B_{kj}G_i^m g_{mh}g^{ji}) \end{aligned}$$

bulunur. (3.2.10) dan

$$m\sum_{s=1}^{4m} A_{ks}F_h^s + R_{kh} = -\sum_{j=1}^{4m}(C_{kj}H_h^jB_{kj}G_h^j)$$

olacağından

$$R_{kh} = \sum_{s=1}^{4m}(-mA_{ks}F_h^s - B_{ks}G_h^s - C_{ks}H_h^s)$$

elde edilir. Yine benzer hesaplamalarla

$$R_{kh} = \sum_{s=1}^{4m}(-A_{ks}F_h^s - mB_{ks}G_h^s - C_{ks}H_h^s)$$

ve

$$R_{kh} = \sum_{s=1}^{4m}(-A_{ks}F_h^s - B_{ks}G_h^s - mC_{ks}H_h^s)$$

eşitlikleri de elde edilebilir. Bu son üç denklemde $m = 1$ alınırsa (3.2.21) bulunur. Ayrıca bu son üç denklemde birinci ile ikinci ve birinci ile üçüncü taraf tarafa çıkarılırsa

$$0 = \sum_{s=1}^{4m} [(-m+1)A_{ks}F_h^s - (1-m)B_{ks}G_h^s]$$

ve

$$0 = \sum_{s=1}^{4m} [(-m+1)A_{ks}F_h^s - (1-m)C_{ks}H_h^s]$$

bulunur. Eğer $m > 1$ ise

$$\sum_{s=1}^{4m} A_{ks}F^{sh} = \sum_{s=1}^{4m} B_{ks}G^{sh} = \sum_{s=1}^{4m} C_{ks}H^{sh}$$

olup dolayısıyla (3.2.20) elde edilir.

(ii) Eğer $m > 1$ ise

$$A_{kh} = \sum_{s=1}^{4m} A_{ks}\delta_h^s = -\sum_{s=1}^{4m} A_{ks}F_t^sF_h^t = \frac{1}{m+2}\sum_{t=1}^{4m} R_{kt}F_h^t$$

olur. Benzer şekilde (3.2.22) nin eşitlikleri de elde edilebilir. ■

Lemma 3.2.11. Lemma 3.2.10 un notasyon ve kabulleri altında aşağıdakiler gerçeklenir:

(i)

$$\left.\begin{aligned} dA + q \wedge C - r \wedge B = 0 \\ dB + r \wedge A - p \wedge C = 0 \\ dC + p \wedge B - q \wedge A = 0. \end{aligned}\right\} \tag{3.2.24}$$

(ii) Eğer $boyM > 4$ ise,

$$D_{\partial_k} R_{ji} = \sum_{t,s=1}^{4m} (D_{\partial_k} R_{ts}) F_j^t F_i^s. \tag{3.2.25}$$

İspat. (i) Lemma 3.2.2 den $A = dp + q \wedge r$, $B = dq + r \wedge p$ ve $C = dr + p \wedge q$ olduğunu biliyoruz. Buradan

$$\begin{aligned} dA &= d(dp) + d(q \wedge r) \\ &= d^2 p + dq \wedge r + q \wedge dr \\ &= dq \wedge r + q \wedge dr \end{aligned}$$

ve $dq = B - r \wedge p$ ve $dr = C - p \wedge q$ bulunur. O halde

$$\begin{aligned} dA = dq \wedge r + q \wedge dr \; &\Rightarrow dA - dq \wedge r - q \wedge dr = 0 \\ &\Rightarrow dA - (B - r \wedge p) \wedge r - q \wedge (C - p \wedge q) = 0 \\ &\Rightarrow dA - B \wedge r - q \wedge C = 0 \end{aligned}$$

olur. Benzer şekilde (3.2.24) ün ikinci ve üçüncü denklemleri de bulunabilir.

(ii) (3.2.23) ten

$$\begin{aligned} D_{\partial_k} R_{ji} &= D_{\partial_k} \left(\sum_{t,s=1}^{4m} R_{ts} F_j^t F_i^s \right) = \sum_{t,s=1}^{4m} D_{\partial_k} (R_{ts} F_j^t F_i^s) \\ &= \sum_{t,s=1}^{4m} \left[(D_{\partial_k} R_{ts}) F_j^t F_i^s + R_{ts} \left((D_{\partial_k} F_j^t) F_i^s + F_j^t (D_{\partial_k} F_i^s) \right) \right] \\ &= \sum_{t,s=1}^{4m} (D_{\partial_k} R_{ts}) F_j^t F_i^s \end{aligned}$$

elde edilir. Bu ise (3.2.25) i verir. ■

Teorem 3.2.3. Boyutu 8 veya daha büyük olan herhangi bir kuaterniyon Kähler manifoldunun Ricci tensörü paraleldir.

İspat. Eğer $boyM = 4m$ ise, bu durumda $m > 1$ için

$$\sum_{s=1}^{4m}(D_{\partial_k}R_{js})F_i^s = \sum_{s=1}^{4m}[D_{\partial_k}(R_{js}F_i^s) - R_{js}(D_{\partial_k}F_i^s)]$$

olur. Teorem 3.2.1 den

$$\sum_{s=1}^{4m}(D_{\partial_k}R_{js})F_i^s = \sum_{s=1}^{4m}[D_{\partial_k}(R_{js}F_i^s) - R_{js}(r_kG_i^s - q_kH_i^s)]$$

olup (3.2.22) uyarınca

$$\sum_{s=1}^{4m}(D_{\partial_k}R_{js})F_i^s = D_{\partial_k}((m+2)A_{ji}) - \sum_{s=1}^{4m}R_{js}(r_kG_i^s - q_kH_i^s)$$

elde edilir. Burada $k \to i$, $j \to k$ ve $i \to j$ alırsak

$$\sum_{s=1}^{4m}(D_{\partial_k}R_{ks})F_j^s = D_{\partial_i}((m+2)A_{kj}) - \sum_{s=1}^{4m}R_{ks}(r_iG_j^s - q_{ki}H_j^s)$$

olur ve (3.2.20) den

$$\begin{aligned}\sum_{s=1}^{4m}\left[(D_{\partial_k}R_{is})F_i^s + (D_{\partial_j}R_{is})F_k^s + (D_{\partial_j}R_{ks})F_j^s\right] &= (m+2)\left(\frac{\partial A_{ji}}{\partial x_k} + \frac{\partial A_{ik}}{\partial x_j} + \frac{\partial A_{kj}}{\partial x_i}\right) \\ &\quad -(m+2)(r_kB_{ji} - q_kC_{ji} + r_jB_{ik} \\ &\quad -q_jC_{ik} + r_iB_{kj} - q_iC_{kj})\end{aligned}$$

bulunur. Eğer (3.2.24) ün ilk denklemi gözönüne alınırsa

$$\sum_{s=1}^{4m}\left[(D_{\partial_k}R_{js})F_i^s + (D_{\partial_j}R_{is})F_k^s + (D_{\partial_j}R_{ks})F_j^s\right] = 0$$

dır. Bu son denklemin her iki tarafı F_h^i ile çarpılırsa

$$\sum_{s=1}^{4m}(D_{\partial_k}R_{js})F_i^sF_h^i+\sum_{s=1}^{4m}\left[(D_{\partial_j}R_{is})F_k^sF_h^i+(D_{\partial_j}R_{ks})F_j^sF_h^i\right]=0$$

olacaktır. Şimdi (3.2.25) den

$$\begin{aligned}&-D_{\partial_k}R_{jh}+\sum_{i,s=1}^{4m}(D_{\partial_j}R_{is})F_k^sF_h^i+\sum_{i,s=1}^{4m}(D_{\partial_i}R_{ks})F_j^sF_h^i=0\\&\Rightarrow -D_{\partial_k}R_{jh}+D_{\partial_j}R_{kh}+\sum_{i,s=1}^{4m}(D_{\partial_i}R_{ks})F_j^sF_h^i=0\\&\Rightarrow D_{\partial_j}R_{kh}-D_{\partial_k}R_{jh}=-\sum_{i,s=1}^{4m}(D_{\partial_i}R_{ks})F_j^sF_h^i\end{aligned}$$

bulunur. Burada $i\to t$, $j\to h$ ve $h\to j$ alırsak

$$D_{\partial_j}R_{kh}-D_{\partial_k}R_{jh}=-\sum_{s,t=1}^{4m}(D_{\partial_t}R_{ks})F_h^sF_j^t$$

olur. Ayrıca (3.2.25) e benzer şekilde

$$D_{\partial_t}R_{ks}=\sum_{a,b=1}^{4m}(D_{\partial_t}R_{ba})G_k^bG_s^t$$

olduğu gösterilebilir. Böylece

$$\begin{aligned}D_{\partial_j}R_{kh}-D_{\partial_k}R_{jh}&=-\sum_{a,b,s,t=1}^{4m}(D_{\partial_t}R_{ba})G_k^bG_s^aF_h^tF_j^s\\&=-\sum_{a,b,s,t=1}^{4m}(D_{\partial_t}R_{ba})G_b^cH_k^bF_j^a\\&=-\sum_{a,b,c=1}^{4m}(D_{\partial_c}R_{ba})H_h^cF_k^bG_j^a\end{aligned}$$

veya

$$\sum_{a,b,c=1}^{4m}(D_{\partial_c}R_{ba})F_k^cG_j^bH_i^a = \sum_{a,b,c=1}^{4m}(D_{\partial_c}R_{ba})G_k^cHF_i^a = \sum_{a,b,c=1}^{4m}(D_{\partial_c}R_{ba})H_k^cF_j^bG_i^a \tag{3.2.26}$$

olur. (3.2.26) denkleminin her iki tarafını $H_r^kF_q^jG_p^i$ ile çarparsak

$$\sum_{\substack{a,b,c,\\ i,j,k=1}}^{4m}(D_{\partial_c}R_{ba})F_k^cG_j^bH_i^aH_r^kF_q^jG_p^i = \sum_{\substack{a,b,c,\\ i,j,k=1}}^{4m}(D_{\partial_c}R_{ba})G_k^cH_j^bF_i^aH_r^kF_q^jG_p^i$$

olup buradan işleme devam edilirse

$$-\sum_{a,b,c=1}^{4m}(D_{\partial_c}R_{ba})G_r^cH_q^bF_p^a = \sum_{a,b,c=1}^{4m}(D_{\partial_c}R_{ba})F_r^cG_q^bH_p^a \tag{3.2.27}$$

olur. (3.2.26) ve (3.2.27) denklemlerinin karşılaştırılmasıyla

$$\sum_{a,b,c=1}^{4m}(D_{\partial_c}R_{ba})F_k^cG_j^bH_i^a = 0$$

olduğu görülür ki buradan

$$D_{\partial_c}R_{ba} = 0$$

elde edilir. Bu da ispatı tamamlar. ■

Teorem 3.2.4. $M = (M, V, g)$ kuaterniyon Kähler manifoldu sıfırdan farklı sabit Riemann eğriliğine sahipse, bu durumda M dört boyutludur.

İspat. c sabit eğrilikli bir uzay için

$$R_{ijk}^h = c(\delta_k^hg_{ij} - \delta_j^hg_{ik}) \text{ ve } K_{kjil} = c(g_{kl}g_{ij} - g_{jl}g_{ki}) \tag{3.2.28}$$

olğunu biliyoruz (bkz. Doğanaksoy 1983). (3.2.28) deki ikinci denklemin her iki tarafını $F_t^i F_s^l$ ile çarparsak

$$\sum_{i,l=1}^{4m} K_{kjil} F_t^i F_s^l = c \sum_{i,l=1}^{4m} (g_{kl} g_{ij} F_t^i F_s^l - g_{jl} g_{ki} F_t^i F_s^l)$$

olur ve Lemma 3.2.1 den

$$\sum_{i,l=1}^{4m} K_{kjil} F_t^i F_s^l = c(F_{ks} F_{jt} - F_{js} F_{kt} \tag{3.2.29}$$

bulunur. Şimdi (3.2.28) deki ikinci denklemi (3.2.10) da yerine yazarsak

$$\begin{aligned}
A_{kj} &= \frac{1}{2m} \sum_{i,l=1}^{4m} K_{kjil} F^{il} = \frac{c}{2m} \sum_{i,l=1}^{4m} (g_{kl} g_{ji} - g_{jl} g_{ki}) F^{il} \\
&= \frac{c}{2m} \sum_{i,l,t=1}^{4m} (g_{kl} g_{ji} g^{it} F_t^l - g_{jl} g_{ki} g^{it} F_t^l) \\
&= \frac{c}{2m} \sum_{t,l=1}^{4m} (g_{kl} \delta_j^t F_t^l - g_{jl} \delta_k^t F_t^l) \\
&= \frac{c}{2m} (F_{jk} - F_{kj}) \\
&= -\frac{c}{m} F_{kj}
\end{aligned}$$

bulunur. Burada $boy M = 4m$ dir. Benzer hesaplamalarla

$$B_{kj} = -\frac{c}{m} G_{kj} \text{ ve } C_{kj} = -\frac{c}{m} H_{kj} \tag{3.2.30}$$

elde edilir. Şimdi de (3.2.28) deki ikinci denklemi, (3.2.29) u ve (3.2.30) u (3.2.9) da yerine yazacak olursak

$$-c(F_{kh} F_{ji} - F_{jh} F_{ki}) + c(g_{kh} g_{ji} - g_{jh} g_{ki}) = -\frac{c}{m} (H_{kj} H_{ih} + G_{kj} G_{ih})$$

olur. Bu denklemin her iki tarafını g^{ji} ile çarparsak

$$
\begin{aligned}
& -c\sum_{i,j,s,t=1}^{4m}(F_k^s g_{sh}F_j^t g_{ji}g^{ji} - F_j^s g_{sh}F_k^t g_{ti}g^{ji}) + c\sum_{i,j=1}^{4m}(g_{kh}g_{ji}g^{ji} - g_{jh}g_{ki}g^{ji}) \\
= \; & -\frac{c}{m}\sum_{i,j,s,t=1}^{4m}(H_k^s H_i^t g_{sj}g_{th}g^{ij} + G_k^s G_i^t g_{sj}g_{th}g^{ji})
\end{aligned}
$$

olup buradan

$$
\begin{aligned}
& -c\textstyle\sum_{s,t=1}^{4m}(F_k^s F_t^t g_{sh} - F_t^s F_k^t g_{sh}) + c(4mg_{kh} - g_{kh}) = -\frac{c}{m}(H_k^s H_s^t g_{th} + G_k^s G_s^t g_{th}) \\
& \Rightarrow -cg_{kh} + 4cmg_{kh} - cg_{kh} = \frac{2c}{m}g_{kh} \\
& \Rightarrow \frac{c}{m}(m-1)(2m+1)g_{kh} = 0
\end{aligned}
$$

bulunur. Eğer $c \neq 0$ ise, $m = 1$ elde ederiz. Yani $boy M = 4m = 4$ boyutlu olur. ■

4. BÖLÜNMÜŞ KUATERNİYON KÄHLER MANİFOLDLARI

4.1. Hemen Hemen Bölünmüş Kuaterniyon Manifoldlar

Hemen Hemen bölünmüş kuaterniyon manifoldlara değinmeden önce bir giriş olarak H' bölünmüş kuaterniyonlar halkası olmak üzere

$$(H')^n = \{(q_1, q_2, ..., q_n) \,|\, q_i \in H',\ 1 \leq i \leq n\}$$

ve

$$E_2^{4n} = \{X = (x_1, x_2, ..., x_{4n}) \,|\, x_i \in \mathbb{R},\ < X, X >= -x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 + ... + x_{4n}^2,\ 1 \leq i \leq 4n\}$$

cümleleri arasında aşağıdaki gibi bire-bir bir eşleme kuracağız.

$$\begin{array}{ccl} E_2^{4n} & \to & (H')^n \\ (x_1, x_2, ..., x_{4n}) & \to & (x_1, ..., x_n) + (x_{n+1}, ..., x_{2n})\overrightarrow{e_1} + (x_{2n+1}, ..., x_{3n})\overrightarrow{e_2} \\ & & +(x_{3n+1}, ..., x_{4n})\overrightarrow{e_3} \end{array}$$

Burada $\alpha = (1, 2, ..., n)$ olmak üzere

$$(x_1, ..., x_n) + (x_{n+1}, ..., x_{2n})\overrightarrow{e_1} + (x_{2n+1}, ..., x_{3n})\overrightarrow{e_2} + (x_{3n+1}, ..., x_{4n})\overrightarrow{e_3}$$

resmini

$$q_\alpha = x_\alpha + x_{n+\alpha}\overrightarrow{e_1} + x_{2n+\alpha}\overrightarrow{e_2} + x_{3n+\alpha}\overrightarrow{e_3}$$

biçiminde göstereceğiz. Bu eşleme ile E_2^{4n} ve $(H')^n$ uzaylarından herhangi bir tanesindeki bir vektör, diğer uzayda da bir vektör olarak görülebilir. Bu eşleme ile E_2^{4n} de aşağıdaki şekilde F_0, G_0, H_0 lineer dönüşümlerini şu şekilde tanımlarız:

$$\left.\begin{array}{ll} F_0: \ E_2^{4n} & \to E_2^{4n} \\ \quad x & \to F_0(x) = \overrightarrow{e_1}x, \\ G_0: \ E_2^{4n} & \to E_2^{4n} \\ \quad x & \to G_0(x) = \overrightarrow{e_2}x, \\ H_0: \ E_2^{4n} & \to E_2^{4n} \\ \quad x & \to H_0(x) = \overrightarrow{e_3}x. \end{array}\right\} \tag{4.1.1}$$

Burada $x \in E_2^{4n}$ yerine $(H')^n$ deki karşılığı olan q_α alınarak $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}$ ler cindinden eşlemede verildiği gibi ifade edilecektir. Buna göre, F_0, G_0, H_0 lineer dönüşümleri aşağıdaki özellikleri sağlarlar:

$$\begin{aligned} F_0(q_\alpha) &= \overrightarrow{e_1}q_\alpha \\ &= \overrightarrow{e_1}(x_\alpha + x_{n+\alpha}\overrightarrow{e_1} + x_{2n+\alpha}\overrightarrow{e_2} + x_{3n+\alpha}\overrightarrow{e_3}) \\ &= -x_{n+\alpha} + x_\alpha\overrightarrow{e_1} - x_{3n+\alpha}\overrightarrow{e_2} + x_{2n+\alpha}\overrightarrow{e_3} \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} F_0^2(q_\alpha) &= F_0(F_0(q_\alpha)) \\ &= F_0(-x_{n+\alpha} + x_\alpha\overrightarrow{e_1} - x_{3n+\alpha}\overrightarrow{e_2} + x_{2n+\alpha}\overrightarrow{e_3}) \\ &= -x_\alpha - x_{n+\alpha}\overrightarrow{e_1} - x_{2n+\alpha}\overrightarrow{e_2} - x_{3n+\alpha}\overrightarrow{e_3} \\ &= -q_\alpha \end{aligned}$$

olduğundan

$$F_0^2 = -I$$

olur. Ayrıca

$$\begin{aligned} G_0(q_\alpha) &= \overrightarrow{e_2}q_\alpha \\ &= \overrightarrow{e_2}(x_\alpha + x_{n+\alpha}\overrightarrow{e_1} + x_{2n+\alpha}\overrightarrow{e_2} + x_{3n+\alpha}\overrightarrow{e_3}) \\ &= x_{2n+\alpha} - x_{3n+\alpha}\overrightarrow{e_1} - x_\alpha\overrightarrow{e_2} - x_{n+\alpha}\overrightarrow{e_3} \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} G_0^2(q_\alpha) &= x_\alpha + x_{n+\alpha}\overrightarrow{e_1} + x_{2n+\alpha}\overrightarrow{e_2} + x_{3n+\alpha}\overrightarrow{e_3} \\ &= q_\alpha \end{aligned}$$

olduğundan

$$G_0^2 = I$$

olur. Şimdi de

$$\begin{aligned} H_0(q_\alpha) &= \overrightarrow{e_3}q_\alpha \\ &= \overrightarrow{e_3}(x_\alpha + x_{n+\alpha}\overrightarrow{e_1} + x_{2n+\alpha}\overrightarrow{e_2} + x_{3n+\alpha}\overrightarrow{e_3}) \\ &= x_{3n+\alpha} + x_{2n+\alpha}\overrightarrow{e_1} + x_{n+\alpha}\overrightarrow{e_2} + x_\alpha\overrightarrow{e_3} \end{aligned}$$

ve buradan

$$H_0^2(q_\alpha) = x_\alpha + x_{n+\alpha}\overrightarrow{e_1} + x_{2n+\alpha}\overrightarrow{e_2} + x_{3n+\alpha}\overrightarrow{e_3} = q_\alpha$$

olduğundan

$$H_0^2 = I$$

elde edilir. Ayrıca

$$\begin{aligned} (F_0G_0)(q_\alpha) &= F_0(G_0(q_\alpha)) \\ &= F_0(x_{2n+\alpha} - x_{3n+\alpha}\overrightarrow{e_1} - x_\alpha\overrightarrow{e_2} - x_{n+\alpha}\overrightarrow{e_3}) \\ &= x_{3n+\alpha} + x_{2n+\alpha}\overrightarrow{e_1} + x_{n+\alpha}\overrightarrow{e_2} + x_\alpha\overrightarrow{e_3} \\ &= H_0(q_\alpha) \end{aligned}$$

eşitliğinden

$$F_0G_0 = H_0$$

ve

$$\begin{aligned} (G_0F_0)(q_\alpha) &= G_0(F_0(q_\alpha)) \\ &= G_0(-x_{n+\alpha} + x_\alpha\overrightarrow{e_1} - x_{3n+\alpha}\overrightarrow{e_2} + x_{2n+\alpha}\overrightarrow{e_3}) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= -x_{3n+\alpha} - x_{2n+\alpha}\overrightarrow{e_1} - x_{n+\alpha}\overrightarrow{e_2} - x_\alpha\overrightarrow{e_3} \\
&= -H_0(q_\alpha)
\end{aligned}
$$

eşitliğinden ise

$$G_0F_0 = -H_0$$

elde edilir. Benzer şekilde

$$-G_0H_0 = H_0G_0 = F_0 \text{ ve } H_0F_0 = -F_0H_0 = G_0$$

olduğunu görmek kolaydır. Bulunan bu eşitlikleri topluca yazacak olursak

$$
\begin{aligned}
F_0^2 &= -I,\ G_0^2 = H_0^2 = I,\ F_0G_0 = -G_0F_0 = H_0, \\
-G_0H_0 &= H_0G_0 = F_0,\ H_0F_0 = -F_0H_0 = G_0
\end{aligned}
$$

olur.

Tanım 4.1.1. $\{F_0, G_0, H_0\}$ lineer dönüşümlerin cümlesine, E_2^{4n} uzayında **standart kuaterniyon yapı** denir.

Tanım 4.1.2. $(E_2^{4n}, +)$ nin bir Abel grubu olduğunu biliyoruz. Skalarla çarpma işlemi şöyle verilsin: $q = a + b\overrightarrow{e_1} + c\overrightarrow{e_2} + d\overrightarrow{e_3} \in H'$ olmak üzere

$$
\begin{aligned}
\cdot :\ H' \times E_2^{4n} &\to E_2^{4n} \\
(q, x) &\to q \cdot x = (a + b\overrightarrow{e_1} + c\overrightarrow{e_2} + d\overrightarrow{e_3}) \cdot x \\
&\qquad = ax + b\overrightarrow{e_1}x + c\overrightarrow{e_2}x + d\overrightarrow{e_3}x
\end{aligned}
$$

ve (4.1.1) den

$$= ax + bF_0(x) + cG_0(x) + dH_0(x)$$

olur. Tanımlanan bu işlemlerle birlikte E_2^{4n}, H' kuaterniyonlar halkası üzerinde bir modül olur. Biz bu yapıya E_2^{4n} nin **bölünmüş kuaterniyonik vektör uzayı yapısı** diyeceğiz.

Sonuç olarak E_2^{4n}, $n-$boyutlu bir kuaterniyonik vektör uzayıdır (Doğanaksoy 1983).

Önerme 4.1.1. E_2^{4n}, $\{F_0, G_0, H_0\}$ standart kuaterniyon yapısı ile bir bölünmüş kuaterniyonik vektör uzayı olsun. $\{q_1, q_2, ..., q_n\}$, E_2^{4n} nin bir kuaterniyonik bazı ise q_i $(1 \leq i \leq n)$ lere $\mathbb{R}^{4n}$ de karşılık gelen vektörler x_i $(1 \leq i \leq n)$ ler olmak üzere $\{x_1, ..., x_n, F_0(x_1), ..., F_0(x_n), G_0(x_1), ..., G_0(x_n), H_0(x_1), ..., H_0(x_n)\}$ de E_2^{4n} nin bir reel bazı olur.

İspat. Herhangi $y \in E_2^{4n}$ elemanı $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ bölünmüş kuaterniyonik bazı cinsinden tek türlü yazılabilir. Buradan $q_\alpha = a_\alpha + b_\alpha \overrightarrow{e_1} + c_\alpha \overrightarrow{e_2} + d_\alpha \overrightarrow{e_3}$ olmak üzere

$$\begin{aligned} y &= \sum_{\alpha=1}^{n} p_\alpha q_\alpha \\ &= \sum_{\alpha=1}^{4m} (a_\alpha + b_\alpha \overrightarrow{e_1} + c_\alpha \overrightarrow{e_2} + d_\alpha \overrightarrow{e_3}) x_\alpha \\ &= \sum_{\alpha=1}^{4m} (a_\alpha x_\alpha + b_\alpha F_0(x_\alpha) + c_\alpha G_0(x_\alpha) + d_\alpha H_0(x_\alpha)) \end{aligned}$$

olur. $a_\alpha, b_\alpha, c_\alpha, d_\alpha \in \mathbb{R}$ olacak biçimde $y \in E_2^{4n}$ tek türlü yazılabileceğinden $\{x_1, ..., x_n,$ $F_0(x_1), ..., F_0(x_n), G_0(x_1), ..., G_0(x_n), H_0(x_1), ..., H_0(x_n)\}$ cümlesi reel vektör uzayı olarak E_2^{4n} nin bir bazıdır. ■

Tanım 4.1.3. M_2^n bir Lorentz manifoldu ve M_2^n üzerinde aşağıdaki şartları sağlayan $(1,1)-$tipli tensörlerden oluşan $3-$boyutlu bundle V olsun. M_2^n nin herhangi bir U koordinat komşuluğunda V nin aşağıdaki şartları sağlayan bir $\{F, G, H\}$ lokal bazı vardır öyle ki,

$$\begin{aligned} F^2 &= -I,\ G^2 = H^2 = I,\ FG = -GF = H, \\ -GH &= HG = F,\ HF = -FH = G \end{aligned}$$

dir. Burada I, M_2^n deki $(1,1)-$tipli özdeşlik dönüşümüdür.

Tanım 4.1.1. $\{F, G, H\}$ bazına U komşuluğunda V bundle'ının **kanonik lokal bazı** denir. Bu durumda V, M_2^n üzerinde bir **hemen hemen bölünmüş kuaterniyon yapı** olur.

Tanım 4.1.5. Üzerinde hemen hemen bölünmüş kuaterniyon yapı bulunduran diferensiyellenebilir M_2^n Lorentz manifolduna bir **hemen hemen bölünmüş kuater-**

niyon manifold denir ve (M_2^n, V) ile gösterilir.

Önerme 4.1.2. *M, $4n-$boyutlu diferensiyellenebilir reel bir Lorentz manifoldu olsun. Bu durumda (M,V) hemen hemen bölünmüş kuaterniyon manifoldu $n-$boyutludur.*

İspat. (M,V) bir hemen hemen bölünmüş kuaterniyon manifold olsun. M üzerindeki hemen hemen bölünmüş kuaterniyon V yapısı, her bir $x \in M$ noktasındaki $T_M(x)$ uzayında aşağıdaki gibi bir kuaterniyonik vektör uzayı yapısı tanımlar.

V bundle'ının $T_M(x)$ deki lokal bazı $\{F,G,H\}$ olsun. Bu durumda $4n-$boyutlu $T_M(x)$ uzayını şu şekilde bir bölünmüş kuaterniyonik vektör uzayına çevirebiliriz:

Öncelikle $(T_M(x),+)$ bir Abel grubudur. Skalarla çarpma işlemi ise

$$\begin{array}{rlcll} \cdot : & H' \times T_M(x) & \rightarrow & T_M(x)\,; & q = a + b\overrightarrow{e_1} + c\overrightarrow{e_2} + d\overrightarrow{e_3} \\ & (q,x) & \rightarrow & q \cdot x & = (a + b\overrightarrow{e_1} + c\overrightarrow{e_2} + d\overrightarrow{e_3}) \cdot x \\ & & & & = ax + bF(x) + cG(x) + dH(x) \end{array}$$

şeklinde tanımlanmak üzere $T_M(x)$ bu skalarla çarpma işlemiyle birlikte bir bölünmüş kuaterniyonik vektör uzayı olur.

$T_M(x)$ in reel boyutu $4n$ olduğundan bölünmüş kuaterniyonik boyutu da n olmak zorundadır. ■

Lemma 4.1.1. Diferensiyellenebilir reel bir Lorentz M manifoldunun boyutu $4m$ $(m \geq 1)$ olmak üzere (M,V) bir hemen hemen bölünmüş kuaterniyon manifold olsun. M nin bir U koordinat komşuluğunda V nin kanonik lokal bazı $\{F,G,H\}$ ise $x \in U$ için $T_M(x)$ in bir bölünmüş kuaterniyonik bazı $\{q_1, q_2, ..., q_m\}$ olmak üzere q_i lere $T_M(x)$ reel vektör uzayında karşılık gelen vektörler x_i ler olmak üzere $\{x_1, ..., x_m, F(x_1), ..., F(x_m), G(x_1), ..., G(x_m), H(x_1), ..., H(x_m)\}$ cümlesi $T_M(x)$ in bir reel bazıdır.

İspat. $T_M(x)$ uzayını $m-$boyutlu bir bölünmüş kuaterniyonik vektör uzayı yapısına dönüştürebiliriz. $\{q_1, q_2, ..., q_m\}$, $T_M(x)$ in bir bölünmüş kuaterniyonik bazı olduğundan herhangi bir $y \in T_M(x)$ elemanını $\{q_1, q_2, ..., q_m\}$ bazı cinsinden tek türlü yazabiliriz. O halde $q_\alpha = a_\alpha + b_\alpha \overrightarrow{e_1} + c_\alpha \overrightarrow{e_2} + d_\alpha \overrightarrow{e_3}$ olmak üzere

$$\begin{aligned} y &= \sum_{\alpha=1}^{4m} p_\alpha q_\alpha \\ &= \sum_{\alpha=1}^{4m} (a_\alpha + b_\alpha \overrightarrow{e_1} + c_\alpha \overrightarrow{e_2} + d_\alpha \overrightarrow{e_3}) x_\alpha \\ &= \sum_{\alpha=1}^{4m} (a_\alpha x_\alpha + b_\alpha F(x_\alpha) + c_\alpha G(x_\alpha) + d_\alpha H(x_\alpha)) \end{aligned}$$

olur. Bu yazılış $a_\alpha, b_\alpha, c_\alpha, d_\alpha \in \mathbb{R}$ olacak biçimde tek türlü olduğundan $\{x_1, ..., x_n, F_0(x_1),$ $..., F_0(x_n), G_0(x_1), ..., G_0(x_n), H_0(x_1), ..., H_0(x_n)\}$ cümlesi reel vektör uzayı olarak $T_M(x)$ uzayını gerer. $boyM = 4m$ olduğundan bu cümle $T_M(x)$ in bir reel bazıdır. ■

Tanım 4.1.6. (M_2^{4n}, V) bir hemen hemen bölünmüş kuaterniyon manifold ve M_2^{4n} nin bir U koordinat komşuluğunda V nin bir kanonik lokal bazı $\{F, G, H\}$ olsun. Eğer her bir U koordinat komşulundaki bir koordinat sistemine göre

$$F = \begin{bmatrix} 0 & -I & 0 & 0 \\ I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -I \\ 0 & 0 & I & 0 \end{bmatrix}_{4n\times 4n}, \quad G = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \\ I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -I & 0 & 0 \end{bmatrix}_{4n\times 4n}, \quad H = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -I \\ 0 & 0 & -I & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \\ I & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{4n\times 4n}$$

şeklinde bileşenlere sahip $\{F, G, H\}$ varsa, V bundle'ına integrallenebilirdir denir. Burada I, $n \times n-$tipinde birim matristir.

Önerme 4.1.3. Herhangi bir (M, V) hemen hemen bölünmüş kuaterniyon manifoldunda bir g metrik tensörü vardır öyle ki, V nin bir ϕ cross-section'ı için

$$g(\phi(X), Y) + g(X, \phi(Y)) = 0; \ \forall X, Y \in \chi(M)$$

dır.

İspat. g', M üzerinde bir metrik tensör olsun. M yarı-Riemann manifoldu üzerinde bir g tensör alanını aşağıdaki gibi tanımlayalım:

Her $X, Y \in \chi(M)$ için

$$\begin{aligned} g(X,Y) &= g'(X,Y) + g'(F(X),F(Y)) + g'(G(X),G(Y)) \qquad (4.1.1) \\ &\quad + g'(H(X),H(Y)) \end{aligned}$$

olsun. Burada $\{F, G, H\}$, M nin bir U koordinat komşuluğunda V nin bir kanonik lokal bazıdır. g' bir metrik tensör olduğundan g nin de bir metrik tensör olduğu kolayca gösterilebilir.

Şimdi V nin herhangi bir ϕ cross-section'ı için

$$g(\phi(X), Y) + g(X, \phi(Y)) = 0$$

eşitliğinin sağlandığını gösterelim. V nin bir ϕ cross-section'ı $\{F, G, H\}$ nın lineer birleşimi olarak tek türlü yazılabileceğinden

$$\begin{aligned} \phi(X) &= a_1F(X) + a_2G(X) + a_3H(X) \text{ ve} \\ \phi(Y) &= b_1F(Y) + b_2G(Y) + b_3H(Y);\ a_i, b_i \in \mathbb{R},\ 1 \leq i \leq 3 \end{aligned}$$

olur. g nin (4.1.1) deki tanımını kullanarak

$$\begin{aligned} g(F(X), Y) + g(X, F(Y)) &= 0, \\ g(G(X), Y) + g(X, G(Y)) &= 0, \\ g(H(X), Y) + g(X, H(Y)) &= 0 \end{aligned}$$

eşitlikleri kolayca görülebilir. Buradan

$$\begin{aligned} g(\phi(X), Y) + g(X, \phi(Y)) &= g(a_1F(X) + a_2G(X) + a_3H(X), Y) \\ &\quad + g(X, b_1F(Y) + b_2G(Y) + b_3H(Y)) \\ &= a_1g(F(X), Y) + a_3g(G(X), Y) + a_3g(H(X), Y) \\ &\quad + b_1(X, F(Y)) + b_2(X, G(Y)) + b_3(X, H(Y)) \\ &= (a_1 - b_1)g(F(X), Y) + (a_2 - b_2)g(G(X), Y) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+(a_3-b_3)g(H(X),Y)\\
=\;& g((a_1-b_1)F(X),Y)+g((a_2-b_2)G(X),Y)\\
&+g((a_3-b_3)H(X),Y)
\end{aligned}
$$

olur. $\phi(X)=a_1F(X)+a_2G(X)+a_3H(X)$ yazılışı tek türlü olduğundan

$$g(\phi(X),Y)+g(X,\phi(Y))=0$$

elde edilir. ■

Tanım 4.1.7. (M,V) bir hemen hemen bölünmüş kuaterniyon manifold olsun ve g ise Önerme 4.1.3 deki gibi tanımlı bir metrik tensör olsun. Bu durumda (V,g) ikilisine bir **hemen hemen bölünmüş kuaterniyon metrik yapı** ve (M,V,g) üçlüsüne de bir **hemen hemen bölünmüş kuaterniyon metrik manifold** denir.

4.2. Bölünmüş Kuaterniyon Kähler Manifoldları

Tanım 4.2.1. Eğer V nin her ϕ cross-section'ı (lokal veya global) için $D_X\phi$ de V nin bir cross-section'ı ise (M,V,g) (veya kısaca M) ye bir **bölünmüş kuaterniyon Kähler manifold** ve (V,g) ikilisine de bir **bölünmüş kuaterniyon Kähler yapı** denir.

Burada X, $\chi(M)$ nin keyfi bir elemanı ve D, (M,V,g) nin Levi-Civita konneksiyonudur.

Teorem 4.2.1. Bir (M,V,g) hemen hemen bölünmüş kuaterniyon metrik manifoldu için aşağıdakiler denktir:
(i) (M,V,g) bir bölünmüş kuaterniyon Kähler manifolddur.
(ii) Eğer M nin bir U koordinat komşuluğunda V nin b,r kanonik lokal bazı $\{F,G,H\}$ ise her $X\in\chi(M)$ için

$$
\begin{aligned}
D_XF &= r(X)G+q(X)H\\
D_XG &= r(X)F+p(X)H\\
D_XH &= q(X)F-p(X)G
\end{aligned}
$$

olur. Burada p, q ve r, U tanımlı belirli lokal $1-$formlardır.

İspat. $(i) \Rightarrow (ii)$. (M, V, g) bir bölünmüş kuaterniyon Kähler manifoldu olsun. Bu durumda V nin her ϕ cross-section'ı için $D_X\phi$ de V nin bir cross-section'ıdır. O halde her $X \in \chi(M)$ için

$$\left.\begin{aligned} D_X F &= a_{11}F + a_{12}G + a_{13}H \\ D_X G &= a_{21}F + a_{22}G + a_{23}H \\ D_X H &= a_{31}F + a_{32}G + a_{33}H \end{aligned}\right\} \tag{4.2.1}$$

yazabiliriz. Burada a_{ij} $(1 \leq i, j \leq 3)$ ler U da tanımlı lokal $1-$formlardır.

$$\begin{aligned} F = -GH \quad &\Rightarrow D_X F = D_X(-GH) \\ &\Rightarrow D_X F = -\left((D_X G)H + G(D_X H)\right) \\ &\Rightarrow a_{11}F + a_{12}G + a_{13}H = (-a_{13} - a_{23}) + (a_{22} + a_{33})F + a_{21}G + a_{31}H \end{aligned}$$

olacaktır. Buradan $a_{13} = -a_{23}$, $a_{11} = a_{22} + a_{33}$, $a_{12} = a_{21}$ ve $a_{13} = a_{31}$ olur. Böylece (4.2.1) sistemi

$$\begin{aligned} D_X F &= (a_{22} + a_{33})F + a_{12}G + a_{31}H \\ D_X G &= a_{12}F + a_{22}G + a_{23}H \\ D_X H &= a_{13}F + a_{32}G + a_{33}H \end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir. Ayrıca

$$\begin{aligned} G = HF \quad &\Rightarrow D_X G = D_X(HF) \\ &\Rightarrow D_X G = (D_X H)F + H(D_X F) \\ &\Rightarrow a_{12}F + a_{22}G + a_{23}H = (a_{31} - a_{13}) + a_{12}F + (a_{22} + 2a_{33})G - a_{32}H \end{aligned}$$

olduğundan $a_{31} = a_{13}$, $a_{12} = a_{21}$, $a_{33} = 0$ ve $a_{23} = -a_{32}$ elde edilir. Buna göre (4.2.1) sistemi

$$\begin{aligned} D_X F &= a_{22}F + a_{12}G + a_{31}H \\ D_X G &= a_{12}F + a_{22}G + a_{23}H \end{aligned}$$

$$D_X H = a_{31}F - a_{23}G$$

şekline dönüşür. Son olarak

$$\begin{aligned} H = FG \ &\Rightarrow D_X H = D_X(FG) \\ &\Rightarrow D_X H = (D_X F)G + F(D_X G) \\ &\Rightarrow a_{31}F - a_{23}G = a_{22} + a_{31}F - a_{23}G + a_{22}H \end{aligned}$$

olup burada $a_{22} = 0$ bulunur. Dolayısıyla (4.2.1) sistemi

$$\begin{aligned} D_X F &= a_{12}G + a_{31}H \\ D_X G &= a_{12}F + a_{23}H \\ D_X H &= a_{31}F - a_{23}G \end{aligned}$$

olur. Bu son sistemde $p(X) = a_{23}$, $q(X) = a_{13} = a_{31}$ ve $r(X) = a_{12}$ dersek

$$\begin{aligned} D_X F &= r(X)G + q(X)H \\ D_X G &= r(X)F + p(X)H \\ D_X H &= q(X)F - p(X)G \end{aligned}$$

elde edilir.

$(ii) \Rightarrow (i)$. Kabul edelim ki (ii) sağlansın ve ϕ, V nin bir cross-section'ı olsun. Bu durumda $D_X\phi$ nin de V nin bir cross-section'ı olduğunu göstermeliyiz.

ϕ, V nin cross-section'ı olduğundan her $a, b, c \in \mathbb{R}$ için $\phi = aF + bG + cH$ yazabiliriz. Her $X \in \chi(M)$ için

$$\begin{aligned} D_X\phi &= D_X(aF + bG + cH) \\ &= X(a)F + aD_X F + X(b)G + bD_X G + X(c)H + cD_X H \\ &= X(a)F + a(r(X)G + q(X)H) + X(b)G + b(r(X)F + p(X)H) \\ &\quad + X(c)H + c(q(X)F - p(X)G) \\ &= (X(a) + br(X) + cq(X))F + (ar(X) + X(b) - cp(X))G \end{aligned}$$

$$+(aq(X)+bp(X)+X(c))$$

bulunur. Böylece $D_X\phi$, F,G,H nın lineer birleşimi olarak yazılmış olur. O halde $D_X\phi$, V nin bir cross-section'ıdır. ■

Tanım 4.2.2 (M,V,g) hemen hemen bölünmüş kuaterniyon metrik manifoldunun bir U koordinat komşuluğunda V bundle'ının kanonik lokal bazı $\{F,G,H\}$ olsun. Φ,Ψ,θ lokal $2-$formlarını

$$\Phi(X,Y)=g(FX,Y),\ \Psi(X,Y)=g(GX,Y) \text{ ve } \theta(X,Y)=g(HX,Y)$$

şeklinde tanımlayalım. Buna göre U da W $4-$formu

$$W=\Phi\wedge\Phi+\Psi\wedge\Psi+\theta\wedge\theta$$

şeklinde ve $(2,2)-$tipli $\wedge$ tensör alanını ise

$$\wedge=F\otimes F+G\otimes G+H\otimes H$$

ile tanımlarız.

Teorem 4.2.2. Bir hemen hemen bölünmüş kuaterniyon metrik manifoldunun bölünmüş kuaterniyon Kähler manifoldu olması için gerek ve yeter koşul her $X\in\chi(M)$ için

$$D_XW=0 \text{ ve } D_X\wedge=0$$

olmasıdır.

İspat. (M,V,g) bir bölünmüş kuaterniyon Kähler manifold ve $\{F,G,H\}$ bir U koordinat komşuluğunda V bundle'ının bir kanonik lokal bazı olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} D_XF &= r(X)G+q(X)H \\ D_XG &= r(X)F+p(X)H \\ D_XH &= q(X)F-p(X)G \end{aligned}$$

olur. İlk önce her $X \in \chi(M)$ için $D_X\Phi$ yi hesaplayalım. Her $A, B \in \chi(M)$ için

$$\begin{aligned}
(D_X\Phi)(A,B) &= D_X\{\Phi(A,B)\} - \Phi(D_XA,B) - \Phi(A,D_XB) \\
&= D_X\{g(FA,B)\} - g(F(D_XA),B) - g(FA,D_XB) \\
&= g\left(r(X)G + q(X)H)A,B\right) \\
&= r(X)g(GA,B) + q(X)g(HA,B) \\
&= r(X)\Psi(A,B) + q(X)\theta(A,B)
\end{aligned}$$

olduğundan

$$D_X\Phi = r(X)\Psi - q(X)\theta$$

elde edilir. Benzer şekilde

$$D_X\Psi = r(X)\Phi + q(X)\theta \text{ ve } D_X\theta = q(X)\Phi - p(X)\Psi$$

olduğu görülebilir. Burada p, q ve r, lokal $1-$formlardır.

Şimdi D_XW ifadesini hesaplayalım.

$$\begin{aligned}
D_XW &= D_X(\Phi\wedge\Phi + \Psi\wedge\Psi + \theta\wedge\theta) \\
&= D_X(\Phi\wedge\Phi) + D_X(\Psi\wedge\Psi) + D_X(\theta\wedge\theta) \\
&= (D_X\Phi)\wedge\Phi + \Phi\wedge(D_X\Phi) + (D_X\Psi)\wedge\Psi + \Psi\wedge(D_X\Psi) \\
&\quad +(D_X\theta)\wedge\theta + \theta\wedge(D_X\theta) \\
&= (r(X)\Psi + q(X)\theta)\wedge\Phi + \Phi\wedge(r(X)\Psi + q(X)\theta) \\
&\quad +(r(X)\Phi + p(X)\theta)\wedge\Psi + \Psi\wedge(r(X)\Phi + p(X)\theta) \\
&\quad +(q(X)\Phi - p(X)\Psi)\wedge\theta + \theta\wedge(q(X)\Phi - p(X)\Psi) \\
&= r(X)(\Psi\wedge\Phi) + q(X)(\theta\wedge\Phi) + r(X)(\Phi\wedge\Psi) + q(X)(\Phi\wedge\theta) \\
&\quad +r(X)(\Phi\wedge\Psi) + p(X)(\theta\wedge\Psi) + r(X)(\Psi\wedge\Phi) + p(X)(\Psi\wedge\theta) \\
&\quad +q(X)(\Phi\wedge\theta) - p(X)(\Psi\wedge\theta) + q(X)(\theta\wedge\Phi) - p(X)(\theta\wedge\Psi) \\
&= 0
\end{aligned}$$

elde edilir. Yine benzer şekilde

$$\begin{aligned}
D_X\wedge &= D_X(F\otimes F+G\otimes G+H\otimes H)\\
&= D_X(F\otimes F)+D_X(G\otimes G)+D_X(H\otimes H)\\
&= D_XF\otimes F+F\otimes D_XF+D_XG\otimes G+G\otimes D_XG\\
&\quad +D_XH\otimes H+H\otimes D_XH
\end{aligned}$$

olur. Buradan gerekli eşitlikler yerlerine yazılırsa

$$D_X\wedge=0$$

bulunur. Teoremin tersten ispatını yapmak için $D_XW=0$ ve $D_X\wedge=0$ $(\forall X\in\chi(M))$ olduğunu kabul edip (M,V,g) hemen hemen bölünmüş kuaterniyon metrik manifoldunun bir bölünmüş kuaterniyon Kähler manifoldu olduğunu gösterelim.

İlk önce $D_X\wedge=0$ olduğunu kabul edelim. $boyM=n$ olsun. Bu durumda M üzerinde tanımlı olan $(1,1)$ tipli tensörlerin uzayının boyutu n^2 dir. $\{F,G,H\}$, V nin bir bazı olduğundan dolayı $(1,1)$ tipli tensörlerin uzayının sıralı bir bazı $\{F,G,H,B_1,B_2,...,B_k\}$ olacak biçimde $B_1,B_2,...,B_k$ $(k=n^2-3)$ elemanlarını seçebiliriz. D_X, $(1,1)$ tipli tensör cebrinin endomorfizmlerini koruduğundan dolayı $a_{ij},b_{ij}\in\mathbb{R}$ için

$$\begin{aligned}
D_XF &= a_{11}F+a_{12}G+a_{13}H+b_{11}B_1+b_{12}B_2+...+b_{1k}B_k\\
D_XG &= a_{21}F+a_{22}G+a_{23}H+b_{21}B_1+b_{22}B_2+...+b_{2k}B_k\\
D_XH &= a_{31}F+a_{32}G+a_{33}H+b_{31}B_1+b_{32}B_2+...+b_{3k}B_k
\end{aligned}$$

yazabiliriz. Ayrıca

$$\begin{aligned}
F^2=-I &\Rightarrow D_XF^2=D_X(-I)\\
&\Rightarrow (D_XF)F+F(D_XF)=0
\end{aligned}$$

olur. Benzer şekilde $(D_XG)G+G(D_XG)=0$ ve $(D_XH)H+H(D_XH)=0$ bulunabilir. Yine

$$\begin{aligned} H = FG \Rightarrow D_X H &= D_X(FG) \\ &= (D_X F)G + F(D_X G) \\ G = HF \Rightarrow D_X G &= D_X(HF) \\ &= (D_X H)F + H(D_X F) \\ F = -GH \Rightarrow D_X F &= D_X(-GH) \\ &= -[(D_X G)H + G(D_X H) \end{aligned}$$

elde edilir. Hipotezden $D_X \wedge = 0$ olduğundan

$$\begin{aligned} D_X \wedge &= (D_X F) \otimes F + F \otimes (D_X F) + (D_X G) \otimes G + G \otimes (D_X G) \\ &\quad +(D_X H) \otimes H + H \otimes (D_X H) \\ &= 0 \end{aligned}$$

yazabiliriz. Eğer yukarıdaki eşitlikler burada yerlerine yazılırsa

$$a_{31} = a_{13},\ a_{12} = a_{21},\ a_{33} = a_{22} = 0,\ a_{23} = -a_{32} \text{ ve}$$

$$b_{ij} = 0\ (1 \leq i \leq 3,\ 1 \leq j \leq n^2 - 3)$$

elde edilir ki bu (M, V, g) nin bir bölünmüş kuaterniyon Kähler manifoldu olduğunu gösterir.

Şimdi de $D_X W = 0$ olduğunu kabul edelim. Buradan

$$\begin{aligned} D_X W &= D_X(\Phi \wedge \Phi + \Psi \wedge \Psi + \theta \wedge \theta) \\ &= D_X(\Phi \wedge \Phi) + D_X(\Psi \wedge \Psi) + D_X(\theta \wedge \theta) \\ &= 0 \end{aligned}$$

olur. Bu ifadede yukarıda elde edilen eşitlikler yerlerine yazılırsa (M, V, g) nin bir bölünmüş kuaterniyon Kähler manifoldu olduğu görülür. ■

Lemma 4.2.1. (M, V, g) bir bölünmüş kuaterniyon Kähler manifoldu olsun. Bir

U koordinat komşuluğundaki bir koordinat sistemi $\{x_h\}$, $1 \leq h \leq 4m$, olmak üzere V bundle'ının bir bazı $\{F, G, H\}$ olsun. (U, x_h) koordinat komşuluğunda F, G, H ve g nin bileşenlerini, sırasıyla, F_i^h, G_i^h, H_i^h ve g_{ih} ile gösterelim ve $F_{ih} = \sum_{t=1}^{4m} F_i^t g_{th}$, $F^{ih} = \sum_{t=1}^{4m} g^{it} F_t^h$ olsun. Burada $(g^{ij}) = (g_{ij})^{-1}$ dir. Bu durumda

$$\left.\begin{aligned} \sum_{i=1}^{4m} F_i^\alpha G_\beta^i &= -\sum_{i=1}^{4m} G_i^\alpha F_\beta^i = H_\beta^\alpha, \\ \sum_{i=1}^{4m} G_i^\alpha H_\beta^i &= -\sum_{i=1}^{4m} H_i^\alpha G_\beta^i = F_\beta^\alpha, \\ \sum_{i=1}^{4m} H_i^\alpha F_\beta^i &= -\sum_{i=1}^{4m} F_i^\alpha H_\beta^i = G_\beta^\alpha \end{aligned}\right\} \tag{4.2.2}$$

$$\sum_{t=1}^{4m} F_t^t = \sum_{t=1}^{4m} G_t^t = \sum_{t=1}^{4m} G_t^t = 0 \tag{4.2.3}$$

$$\sum_{t=1}^{4m} F_t^\beta F_\alpha^t = \sum_{t=1}^{4m} G_t^\beta G_\alpha^t = \sum_{t=1}^{4m} H_t^\beta H_\alpha^t = -\delta_\alpha^\beta \tag{4.2.4}$$

$$F_{\alpha\beta} = -F_{\beta\alpha},\ G_{\alpha\beta} = -G_{\beta\alpha},\ H_{\alpha\beta} = -H_{\beta\alpha} \tag{4.2.5}$$

$$F^{\alpha\beta} = -F^{\beta\alpha},\ G^{\alpha\beta} = -G^{\beta\alpha},\ H^{\alpha\beta} = -H^{\beta\alpha} \tag{4.2.6}$$

$$g_{\alpha\beta} = \sum_{i,j=1}^{m} g_{ij} F_\alpha^i F_\beta^j = \sum_{i,j=1}^{m} g_{ij} G_\alpha^i G_\beta^j = \sum_{i,j=1}^{m} g_{ij} H_\alpha^i H_\beta^j \tag{4.2.7}$$

eşitlikleri gerçeklenir ve F_{ih}, G_{ih}, H_{ih}, sırasıyla, Φ, Ψ, θ lokal 2−formlarının bileşenleridir.

İspat. U komşuluğunda $\chi(M)$ nin bir bazı $\{\partial_1, \partial_2, ..., \partial_{4m}\}$ olsun. Bu durumda $F(\partial_i) = \sum_{j=1}^{4m} F_i^j \partial_j$ olup $F_i = F_i^j \partial_j$ bulunur. Benzer şekilde G ve H için de benzer ifadeler yazılabilir. $FG = H$ olduğunu biliyoruz. Buradan

$$\begin{aligned} (FG)(\partial_i) = H(\partial_i) \quad &\Rightarrow F(G(\partial_i)) = H(\partial_i) \\ &\Rightarrow F(G_i^j \partial_j) = H(\partial_i) \\ &\Rightarrow G_i^j F_j^k \partial_k = H_i^k \partial_k \\ &\Rightarrow G_i^j F_j^k = H_i^k \end{aligned}$$

veya

$$H_i^k = \sum_{j=1}^{4m} G_i^j F_j^k$$

olur. Benzer şekilde (4.2.2) nin diğer denklemleri de bulunabilir. (4.2.2) denklemlerinde $\alpha = \beta$ alınarak (4.2.3) denklemleri kolayca bulunabilir. (4.2.4) deki eşitlikleri elde edebilmek için $F^2 = -I$, $G^2 = H^2 = I$ eşitliklerini kullanacağız. Bu durumda

$$\begin{aligned} F^2 = -I \quad & \Rightarrow F^2(\partial_i) = -I^2(\partial_i) \\ & \Rightarrow F_i^j F_j^k = -\delta_i^k \end{aligned}$$

elde edilir. Benzer düşünceler (4.2.4) deki diğer eşitliklere de uygulanabilir. (4.2.5) deki eşitlikleri elde etmek için

$$\begin{aligned} g(F(X),Y) + g(X,F(Y)) &= 0, \ g(G(X),Y) + g(X,G(Y)) = 0, \\ g(H(X),Y) + g(X,H(Y)) &= 0 \end{aligned}$$

eşitliklerini kullanmalıyız. Böylece

$$\begin{aligned} g(F(\partial_i),\partial_j) + g(\partial_i, F(\partial_j) = 0 \quad & \Rightarrow g(F_i^k \partial_k, \partial_j) + g(\partial_i, F_j^k \partial_k) = 0 \\ & \Rightarrow F_{ij} + F_{ji} = 0 \\ & \Rightarrow F_{ij} = -F_{ji} \end{aligned}$$

bulunur. (4.2.5) deki diğer eşitlikler de ispatlanabilir. Ayrıca (4.2.6) daki eşitlikler de (4.2.5) den kolayca elde edilir.
Son olarak (4.2.7) deki eşitlikleri bulabilmek için

$$\begin{aligned} & g(X,Y) = g(F(X),F(Y)), \quad g(X,Y) = g(G(X),G(Y)), \\ & g(X,Y) = g(H(X),H(Y)) \end{aligned}$$

eşitliklerini kullanacağız. Buradan

$$\begin{aligned} g(\partial_i,\partial_j) &= g(F(\partial_i),F(\partial_j)) \\ &= F_i^k F_j^h g(a_k, a_h) \\ &= F_i^k F_j^h g_{kh} \end{aligned}$$

olduğundan

$$g_{ij} = \sum_{k,h=1}^{4m} g_{kh} F_i^k F_j^h$$

elde edilir. Benzer şekilde (4.2.7) nin diğer eşitlikleri de kolayca görülebilir. ■

Lemma 4.2.2. $M = (M, V, g)$ bir bölünmüş kuaterniyon Kähler manifoldu, V nin kanonik lokal bazı $\{F, G, H\}$ ve M nin Riemann curvature tensörü R olsun. Bu durumda her $X, Y \in \chi(M)$ için

$$\begin{aligned}
(R(X,Y)F) &= C(X,Y)G + B(X,Y)H = R(X,Y)F - FR(X,Y) \\
&= [R(X,Y), F] \\
(R(X,Y)G) &= C(X,Y)F + A(X,Y)H = [R(X,Y), G] \\
(R(X,Y)H) &= B(X,Y)F - A(X,Y)G = [R(X,Y), H]
\end{aligned}$$

olur. Burada $A = dp + q \wedge r$, $B = dq - r \wedge p$, $C = dr - p \wedge q$ dur.

İspat. İlk olarak, birinci denklemi ispatlayalım. Her $Z \in \chi(M)$ için

$$(R(X,Y)F)(Z) = (D_X D_Y F - D_Y D_X F - D_{[X,Y]} F)(Z)$$

olup Teorem 4.2.1 in (ii) şıkkındaki eşitlikleri kullanarak

$$\begin{aligned}
(R(X,Y)F)(Z) &= \{D_X(r(Y)G + q(Y)H) - D_Y(r(X)G + q(X)H) \\
&\quad -r([X,Y])G - q([X,Y])H\}(Z) \\
&= \{D_X(r(Y)G) + D_X(q(Y)H) - D_Y(r(X)G) - D_Y(q(X)H) \\
&\quad -r([X,Y])G - q([X,Y])H\}(Z) \\
&= \{X(r(Y))G + r(Y)D_X G + X(q(Y))H + q(Y)D_X H \\
&\quad -Y(r(X))G - r(X)D_Y G - Y(q(X))H - q(X)D_Y H \\
&\quad -r([X,Y])G - q([X,Y])H\}(Z) \\
&= \{X(r(Y))G + r(Y)\,(r(X)F + p(X)H) + X(q(Y))H \\
&\quad +q(Y)\,(q(X)F - p(X)G) - Y(r(X))G
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
& -r(X)\,(r(Y)F+p(Y)H)-Y(q(X))H-q(X)\,(q(Y)F-p(Y)G) \\
& -r([X,Y])G-q([X,Y])H\,\}(Z) \\
= \;& (X(r(Y))-Y(r(X))-r([X,Y])-(p(X)q(Y)-q(X)p(Y)))\,(GZ) \\
& +(X(q(Y))-Y(q(X))-(r(X)p(Y)-r(Y)p(X)))\,(HZ)
\end{aligned}
$$

bulunur. Burada

$$
\begin{aligned}
dr(X,Y) &= X(r(Y))-Y(r(X))-r([X,Y]), \\
dq(X,Y) &= X(q(Y))-Y(q(X))-q([X,Y])
\end{aligned}
$$

olduğundan

$$
\begin{aligned}
(R(X,Y)F)(Z) &= (dr(X,Y)-(p\wedge q)(X,Y))\,GZ \\
&\quad +(dq(X,Y)-(r\wedge p)(X,Y))\,HZ \\
&= C(X,Y)GZ+B(X,Y)HZ
\end{aligned}
$$

ve buradan

$$R(X,Y)F=C(X,Y)G+B(X,Y)H$$

elde edilir. Şimdi de

$$(R(X,Y)F)=R(X,Y)F-FR(X,Y)=[R(X,Y),F]$$

eşitliğini gösterelim. Her $Z\in\chi(M)$ için

$$
\begin{aligned}
R(X,Y)(FZ) &= D_XD_Y(FZ)-D_YD_X(FZ)-D_{[X,Y]}(FZ) \\
&= D_X((D_YF)Z+F(D_YZ))-D_Y((D_XF)Z+F(D_XZ)) \\
&\quad -(D_{[X,Y]}F)Z-FD_{[X,Y]}Z \\
&= D_X(D_YF)Z+(D_YF)(D_XZ)+(D_XF)(D_YZ)+FD_XD_YZ \\
&\quad -D_Y(D_XF)Z-(D_XF)(D_YZ)-(D_YF)(D_XZ)-FD_YD_XZ \\
&\quad -(D_{[X,Y]}F)Z-FD_{[X,Y]}Z
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= D_X(D_Y F)Z - D_Y(D_X F)Z - (D_{[X,Y]}F)Z \\
&\quad +F\left(D_X D_Y Z - D_Y D_X Z - D_{[X,Y]}Z\right) \\
&= (R(X,Y)F)Z + F(R(X,Y)Z)
\end{aligned}
$$

olur ve buradan

$$(R(X,Y)F)Z = R(X,Y)(FZ) - F(R(X,Y)Z)$$

olup dolayısıyla

$$
\begin{aligned}
(R(X,Y)F) &= R(X,Y)F - FR(X,Y) \\
&= [R(X,Y), F]
\end{aligned}
$$

elde edilir. Benzer şekilde diğer iki denklem de bulunabilir. ■

Lemma 4.2.3. $M = (M, V, g)$ bir bölünmüş kuaterniyon Kähler manifold, V nin kanonik lokal bazı $\{F, G, H\}$ ve M nin yarı-Riemann curvature tensörü R olsun. Bu durumda her $X, Y, Z \in \chi(M)$ için

$$
\begin{aligned}
g(R(X,Y)FZ, FW) - g(R(X,Y)Z, W) &= C(X,Y)g(Z, HW) - B(X,Y)g(Z, GW) \\
g(R(X,Y)GZ, GW) - g(R(X,Y)Z, W) &= -C(X,Y)g(Z, HW) - A(X,Y)g(Z, FW) \\
g(R(X,Y)HZ, HW) - g(R(X,Y)Z, W) &= B(X,Y)g(Z, GW) - A(X,Y)g(Z, FW)
\end{aligned}
$$

olur.

İspat. Lemma 4.2.2 den

$$R(X,Y)(FZ) = (R(X,Y)F)(Z) + F(R(X,Y)(Z))$$

olduğunu biliyoruz. Buradan

$$
\begin{aligned}
g(R(X,Y)FZ, FW) - g(R(X,Y)Z, W) &= g((R(X,Y)F)Z + F(R(X,Y)Z, FW) \\
&\quad -g(R(X,Y)Z, W)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= g\left((R(X,Y)F)Z, FW\right) \\
&\quad -g\left(F(R(X,Y)Z), FW\right) \\
&\quad -g(R(X,Y)Z,W) \\
&= g\left((R(X,Y)F)Z, FW\right)
\end{aligned}
$$

olur. Ayrıca Lemma 4.2.2 den

$$R(X,Y)F = C(X,Y)G + B(X,Y)H$$

eşitliğini yerine yazarsak

$$
\begin{aligned}
g(R(X,Y)FZ,FW) - g(R(X,Y)Z,W) &= g\left((C(X,Y)G + B(X,Y)H)Z, FW\right) \\
&= C(X,Y)g(GZ,FW) + B(X,Y)g(HZ,FW) \\
&= C(X,Y)g(Z,HW) - B(X,Y)g(Z,GW)
\end{aligned}
$$

elde edilir. Diğer eşitlikler de gösterilebilir. ■

Lemma 4.2.4. $M = (M,V,g)$, $4m-$boyutlu bir bölünmüş kuaterniyon Kähler manifold, V nin bir kanonik lokal bazı $\{F,G,H\}$ ve M yarı-Riemann manifoldunun Riemann curvature tensörü R olsun. $\{e_i\}$, $1 \le i \le m$, M nin bir ortonormal bazı olmak üzere her $X,Y \in \chi(M)$ için

$$
\begin{aligned}
A(X,Y) &= \frac{1}{2m}\sum_{i=1}^{4m} \varepsilon_i g(R(X,Y)e_i, Fe_i), \\
B(X,Y) &= \frac{1}{2m}\sum_{i=1}^{4m} \varepsilon_i g(R(X,Y)e_i, Ge_i), \\
C(X,Y) &= \frac{1}{2m}\sum_{i=1}^{4m} \varepsilon_i g(R(X,Y)e_i, He_i)
\end{aligned}
$$

dir.

İspat. Lemma 4.2.3 ün ikinci denkleminde $Z = e_i$, $W = e_i$ alırsak

$$g(R(X,Y)Ge_i, Ge_i) - g(R(X,Y)e_i, e_i) = -C(X,Y)g(e_i, He_i) - A(X,Y)g(e_i, Fe_i)$$

olur. $Fe_i = \sum\limits_{k=1}^{4m} F_i^k e_k$, $Ge_i = \sum\limits_{k=1}^{4m} G_i^k e_k$ ve $He_i = \sum\limits_{k=1}^{4m} H_i^k e_k$ değerlerini yerlerine yazarsak

$$
\begin{aligned}
g\left(R(X,Y)\sum_{k=1}^{4m} G_i^k e_k, \sum_{k=1}^{4m} G_i^k e_s\right) - g(R(X,Y)e_i, e_i) &= -C(X,Y)g\left(e_i, \sum_{k=1}^{4m} H_i^k e_k\right) \\
&\quad -A(X,Y)g\left(e_i, \sum_{k=1}^{4m} F_i^k e_k\right)
\end{aligned}
$$

olup buradan

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{4m} G_i^k G_i^k g(R(X,Y)e_k, e_k) - g(R(X,Y)e_i, e_i) &= -\sum_{k=1}^{4m} \varepsilon_i H_i^k \delta_{ik} C(X,Y) \\
&\quad -\sum_{k=1}^{4m} \varepsilon_i F_i^k \delta_{ik} A(X,Y)
\end{aligned}
$$

bulunur. Bu eşitliğin her iki tarafını $F^{ih} = \sum\limits_{t=1}^{4m} g^{it} F_t^h$ ile çarpalım. Bu durumda

$$
\begin{aligned}
&\sum_{k,t=1}^{4m} G_i^k G_i^k g^{it} F_t^h g(R(X,Y)e_k, e_k) - \sum_{t=1}^{4m} g^{it} F_t^h g(R(X,Y)e_i, e_i) \\
= &-\sum_{k,t=1}^{4m} \varepsilon_i H_i^k \delta_{ik} g^{it} F_t^h C(X,Y) - \sum_{k,t=1}^{4m} \varepsilon_i F_i^k \delta_{ik} g^{it} F_t^h A(X,Y)
\end{aligned}
$$

olur. Buradan

$$
\begin{aligned}
&-\sum_{k,t=1}^{4m} G_i^k G_i^k F_t^h g^{it} g(R(X,Y)e_k, e_k) - \sum_{t=1}^{4m} g^{it} F_t^h g(R(X,Y)e_i, e_i) \\
= &-\sum_{i=1}^{4m} G_i^h C(X,Y) - \sum_{i=1}^{4m} \delta_i^h A(X,Y) \\
\Rightarrow &-\sum_{k=1}^{4m} G_i^k H_i^h g^{ik} g(R(X,Y)e_k, e_k) - \sum_{t=1}^{4m} g^{it} F_t^h g(R(X,Y)e_i, e_i) = -4mA(X,Y) \\
\Rightarrow &\sum_{i=1}^{4m} F_i^h g^{ii} g(R(X,Y)e_i, e_i) - \sum_{i=1}^{4m} g^{ii} F_i^h g(R(X,Y)e_i, e_i) = -4mA(X,Y) \\
\Rightarrow &-2\sum_{i=1}^{4m} \varepsilon_i g(R(X,Y)e_i, Fe_i) = -4mA(X,Y)
\end{aligned}
$$

$$\Rightarrow \quad A(X,Y)=\frac{1}{2m}\sum_{i=1}^{4m}\varepsilon_i g\left(R(X,Y)e_i, Fe_i\right)$$

elde edilir. Benzer şekilde diğer denklemler de bulunabilir. ∎

Lemma 4.2.5. (M,V,g) bir bölünmüş kuaterniyon Kähler manifoldu, V nin kanonik lokal bazı $\{F,G,H\}$ ve M yarı-Riemann manifoldunun Ricci tensörü S olsun. Bu durumda her $X,Y\in\chi(M)$ için

$$\begin{aligned}
S(X,Y)&=-2mA(X,FY)+B(X,GY)-C(X,HY)\\
S(X,Y)&=A(X,FY)-2mB(X,GY)+C(X,HY)\\
S(X,Y)&=A(X,FY)-B(X,GY)-2mC(X,HY)
\end{aligned}$$

olur. Eğer $m=1$ ise

$$S(X,Y)=-\frac{2}{3}\left(B(X,GY)+C(X,HY)\right)$$

gerçeklenir.

İspat. Ricci tensörünün tanımından

$$S(X,Y)=\sum_{i=1}^{4m}\varepsilon_i g(R(X,Y)e_i,e_i)$$

olduğunu biliyoruz (bkz. O'Neill). Lemma 4.2.3 ün ilk denkleminde $Z=e_i$ ve $W=e_i$ yazılırsa,

$$g(R(X,Y)Fe_i,Fe_i)-g(R(X,Y)e_i,e_i)=C(X,Y)g(e_i,He_i)-B(X,Y)g(e_i,Ge_i)$$

olup buradan

$$g(R(X,Y)e_i,e_i)=g(R(X,Y)Fe_i,Fe_i)-C(X,Y)g(e_i,He_i)+B(X,Y)g(e_i,Ge_i)$$

bulunur. Dolayısıyla,

$$
\begin{aligned}
S(X,Y) &= \sum_{i=1}^{4m} \varepsilon_i g(R(X,Y)e_i, e_i) \\
&= \sum_{i=1}^{4m} \varepsilon_i g(R(X,Y)Fe_i, Fe_i) - \sum_{i=1}^{4m} \varepsilon_i C(X,Y) g(e_i, He_i) \\
&\quad + \sum_{i=1}^{4m} \varepsilon_i B(X,Y) g(e_i, Ge_i)
\end{aligned}
$$

olur. Ayrıca Lemma 4.2.4 ten

$$
\begin{aligned}
A(X,FY) &= \frac{1}{2m} \sum_{i=1}^{4m} \varepsilon_i g(R(X,FY)e_i, Fe_i) \\
&= -\frac{1}{2m} \sum_{i=1}^{4m} \varepsilon_i g(R(X,Y)Fe_i, Fe_i)
\end{aligned}
$$

ve dolayısıyla

$$
-2mA(X,FY) = \sum_{i=1}^{4m} \varepsilon_i g(R(X,Y)Fe_i, Fe_i)
$$

olduğundan

$$
S(X,Y) = -2mA(X,Y) + B(X,GY) - C(X,HY)
$$

elde edilir.

Eğer $m = 1$ alınırsa bu üç denklemi taraf tarafa toplayarak

$$
S(X,Y) = -\frac{2}{3}\left(B(X,GY) + C(X,HY)\right)
$$

elde edilir. ■

Lemma 4.2.6. Lemma 4.2.2 nin notasyon ve kabulleri altında

$$
\begin{aligned}
dA + r \wedge B - q \wedge C = 0 \\
dB + p \wedge C - r \wedge A = 0 \\
dC + p \wedge B - q \wedge A = 0.
\end{aligned}
$$

gerçeklenir.

İspat. Lemma 4.2.2 den $A = dp + q \wedge r$, $B = dq - r \wedge p$ ve $C = dr - p \wedge q$ olduğunu biliyoruz. Buradan

$$\begin{aligned} dA &= d^2 p + dq \wedge r + q \wedge dr \\ &= dq \wedge r + q \wedge dr \end{aligned}$$

ve ayrıca $dq = B + r \wedge p$ ve $dr = C + p \wedge q$ olduğundan

$$\begin{aligned} dA &= (B - r \wedge p) \wedge r + q \wedge (C + p \wedge q) = 0 \\ &= B \wedge r + q \wedge C \end{aligned}$$

veya

$$dA + r \wedge B - q \wedge C = 0$$

bulunur. Benzer şekilde diğer eşitlikler de gösterilebilir. ■

KAYNAKLAR

Ata, E. 1998. Metrik, Konneksiyon ve Eğrilik, Yüksek Lisans Tezi. Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara.

Berndt, R. 2000. An Introduction to Symplectic Geometry. American Mathematical Society, Providence, Rhode Island.

Cannas da Silva, A. 2000. Lectures on Symplectic Geometry, Berkeley.

Claude, C. 1946. Theory of Lie Groups. Princeton University Press, USA.

Dillen, F. J. E. and Verstraelen, L. C. A. 2000. Handbook of ,differential Geometry. Elsevier Science B. V., The Netherlands.

Doğanaksoy, A. 1983. Quaternion Kähler Manifolds. Yüksek Lisans Tezi. Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Ankara.

Guillemin, V. and Sternberg, S. 1984. Symplectic Techniques in Physics. Cambridge University Press.

Hacısalihoğlu, H. H. 1997. Hareket Geometrisi ve Kuaterniyonlar Teorisi. Gazi Üniversitesi Basın Yayın Y. O. Basımevi, Tukey.

Hacısalihoğlu, H. H. 1997. Lineer Cebir. Ertem Matbaası, Turkey.

Hacısalihoğlu, H. H. 2000. Diferensiyel Geometri. Ertem Matbaası, Turkey.

Inoguchi, J. 1998. Timelike Surfaces of Constant Mean Curvature in Minkowski 3-Space. Tokyo J. Math., 21, no.1, 140-152.

Kula, L. 2003. Bölünmüş Kuaterniyonlar ve Geometrik Uygulamaları. Doktora Tezi. Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara.

O'Neill, B. 1983. Semi Riemannian Geometry. Academic Press, New York.

Poor, W. A. 1981. Differential Geometry Structures. McGraw-Hill Book Company.

Vaisman, I. 1987. Symplectic Geometry and Secondary Characteristic Classes. Michigan Printed in The USA.

Ward, J. P. 1997. Quaternions and Cayley Numbers. Kluwer Academic Publishers.

Yano, K. and Kon, M. 1984. Structures on Manifolds. World Scientific Publishing.

ÖZGEÇMİŞ

1971 yılında Muş'ta doğdu. İlk, orta ve lise öğrenimini İstanbul'da tamamladı. Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü'nden 1995 yılında Matematikçi ünvanıyla mezun oldu. 1996 yılında Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü'ne Araştırma Görevlisi olarak atandı. 1998 yılında Yüksek Lisans öğrenimini Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda tamamlayarak aynı yıl yine bu enstitüde Doktora öğrenimine başlayan Erhan ATA evli ve iki çocuk babasıdır.