1. GİRİŞ

Fark denklemleri ile zamana bağlı çeşitli doğa olaylarının incelenmesinin doğal bir ifadesi olarak karşılaşılmaktadır. Zamana bağlı değişkenlerin kullanıldığı olayların pek çoğu ayrık (kesikli) olduğundan bu tür denklemler önemli matematiksel modelleri oluşturur. Daha da önemlisi, fark denklemleri, diferensiyel denklemler için ayrıklaştırma (discretization) metodlarının incelenmesinde de karşımıza çıkar. Fark denklemleri teorisinde elde edilen pek çok sonuç hemen hemen bunlara karşılık gelen diferensiyel denklemlerin ayrık benzeridir. Bununla birlikte, fark denklemler teorisi karşılık gelen diferensiyel denklemler teorisinden daha zengindir. Örneğin, birinci mertebeden bir diferensiyel denklemin benzeri olan bir fark denklemi “ghost” çözümlere veya kaotik yörüngelere sahip olabilmesine rağmen bu durum ancak yüksek mertebeden diferensiyel denklemler için söz konusudur. Sonuç olarak, fark denklemleri teorisinin ilginç olduğunu ve yakın gelecekte daha fazla öneme sahip olacağını gözlemleyebiliriz. Böylece, fark denklemleri teorisinin uygulamaları, nümerik analiz, kontrol teori, bilgisayar bilimi, ekonomi, biyoloji, sosyoloji, fizyoloji gibi bir çok bilim dalında hızlı bir şekilde artmaktadır.

Son yıllarda fark denklemlerinin çözümlerinin davranışı ve özellikle, salınımlılığı ile ilgili bir çok çalışma yapılmaktadır. Ladas 1990 yılındaki çalışmasında

$$x_{n+1} - x_n + p x_{n-k} = 0\ ; \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{1.1}$$

$p \in \mathbb{R}; k \in \mathbb{Z}$ lineer, otonom fark denkleminin tüm çözümlerinin salınımlılığı için gerek ve yeter şart vermiştir. Erbe ve Zhang 1989 yılındaki çalışmalarında

$$x_{n+1} - x_n + p_n x_{n-k} = 0\ ; \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{1.2}$$

p_n negatif olmayan reel terimli dizi ve $k \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere lineer, otonom olmayan, gecikmeli fark denkleminin bütün çözümlerinin salınımlılığı için yeter şart vermişlerdir. Yine 1989 yılında, Ladas, Philos ve Sficas yukarıdaki otonom olmayan fark denkleminin tüm çözümlerinin salınımlılığı için yeter şart vermişlerdir. Diferensiyel denklemler ile bunların ayrık benzerleri olan fark denklemlerinin çözümlerinin salınımlılıkları arasında ilgi çekici benzerlikler vardır. Ancak, bu her zaman geçerli olmayabilir. Örneğin;

$$x'(t) + p(t)x(t - k) = 0 \tag{1.3}$$

gecikmeli diferensiyel denklemini ele alalım. (1.2) fark denklemi (1.3) diferensiyel denkleminin ayrık benzeridir. $k = 0$ için (1.3) diferensiyel denklemi

$$x(t) = x(t_0)\mathrm{Exp}\left(-\int_{t_0}^{t} p(s)ds\right)$$

şeklinde bir çözüme sahiptir ve bu çözüm hiç bir zaman salınımlı değildir. Fakat (1.2) fark denklemi $k = 0$ için

$$x_n = \left[\prod_{j=n_0}^{n-1} (1 - p_j)\right] x_{n_0}$$

şeklinde bir çözüme sahiptir. Dolayısıyla bu çözüm $\forall j \geq n_0$ için $1 - p_j < 0$ olduğunda salınımlı çözüme sahiptir. Daha sonraki yıllarda, örneğin 1994 yılında Yu, Zhang ve Wang, 2001 yılında Tang ve Zhang çalışmalarında (1.2) fark denkleminin bütün çözümlerinin salınımlılığı için yeni kriterler elde etmişlerdir. Ayrıca, 1993 yılında Yu, Zhang ve Qian, 2000 yılında Yu ve Tang (1.2) fark denkleminde p_n nin salınımlı bir dizi olması durumunda bu denklemin bütün çözümlerinin salınımlılık durumunu incelemişlerdir. Bu çalışmaların tümünün fark denklem sistemleriyle değil, sadece fark denklemleriyle ilgili çalışmalar olduğuna dikkatinizi çekmek isteriz.

Fark denklem sistemlerinin çözümlerinin salınımlılığı ile ilgili olarak literatürde bulabildiğimiz ilk çalışmalardan birisinde Chuanxi, Kuruklis ve Ladas 1990 yılında,

$$x_{n+1} - x_n + Px_{n-k} = 0\ ;\ n = 0, 1, 2, \ldots \tag{1.4}$$

$P \in R^{r\times r}$ ve $k \in Z$ olmak üzere, lineer, otonom, üç terimli fark denklem sisteminin ve

$$x_{n+1} - x_n + Px_{n-k} - Qx_{n-l} = 0\ ;\ n = 0, 1, 2, \ldots \tag{1.5}$$

$P, Q \in R^{r\times r}$ ve $k, l \in N$ olmak üzere (1.5) fark denklem sisteminin tüm çözümlerinin salınımlılık durumunu incelemişlerdir. 1991 yılında Chuanxi, Kuruklis ve Ladas çalışmalarında

$$x_{n+1} - x_n + P_n x_{n-k} + Q_n x_{n-l} = 0\ ;\ n = 0, 1, 2, \ldots \tag{1.6}$$

$P_n, Q_n \in R^{m \times m}$ ve k, l negatif olmayan tamsayılar olmak üzere (1.6) otonom olmayan fark denklem sisteminin tüm çözümlerinin salınımlılık durumlarını incelemişlerdir. Burada (1.6) fark denklem sistemi için elde edilen sonuçlar bu sistemde $m = 1$ olması durumuna yani, karşılık gelen skalar denklemin çözümlerinin salınımlılığı kullanılarak elde edilmiştir. 2000 yılında Agarwal ve Grace çalışmalarında iki bilinmeyen ve iki denklemden oluşan bir fark denklem sisteminin çözümlerinin salınımlılığını incelemişlerdir. Bu çalışmada şartlar P matrisinin bileşenleri yardımıyla verilmiştir. Yine 2000 yılında Agarwal ve Grace bir başka çalışmalarında yüksek mertebeden nötral fark denklem sistemlerinin sınırlı çözümlerinin salınımlı olması için kriterler elde etmişlerdir.

Bizim tezimizde ise, ikinci bölümde fark denklem ve sistemlerinin çözümleri hakkında bilgi verildikten sonra, üçüncü bölümde ikinci ve üçüncü mertebeden lineer, otonom fark denklem sistemlerinin tüm çözümlerinin salınımlı olması için bazı kriterler elde edilmiştir. Dördüncü bölümde ise keyfi mertebeden lineer, otonom fark denklem sistemlerinin salınımlılığı incelenmiştir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde, doktora tezimizde ihtiyaç duyacağımız, bilinen bazı tanım, teorem ve lemmaları vereceğiz. İlk önce fark analizi ve fark denklemleri tanıtılacak ve daha sonra fark denklemleri ve fark denklem sistemlerinin çözümleri hakkında bilgiler verilecektir. Son olarak fark denklemleri ve sistemlerinin salınımlılığı hakkında bilinen bazı tanım ve teoremler hatırlatılacaktır.

2.1. Fark Analizi ve Genel Tanımlar

$n \in \mathbb{N}$ olmak üzere x_n fonksiyonu için kaydırma (öteleme) operatörü

$$Ex_n = x_{n+1}$$

ve ileri fark operatörü

$$\Delta x_n = x_{n+1} - x_n$$

şeklinde tanımlanır (Akın 1998, Goldberg 1958, Elaydi 1999, Agarwal 2000).

$$E^k x_n = x_{n+k}$$

olduğu kolaylıkla görülebilir. $\Delta^k x_n$ i hesaplamak için I özdeşlik operatörü olmak üzere, $\Delta = E - I$ ve $E = \Delta + I$ ifadelerini kullanabiliriz. O zaman,

$$\begin{aligned} \Delta^k x_n &= (E - I)^k x_n \\ &= \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \binom{k}{i} E^{k-i} x_n \\ &= \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \binom{k}{i} x_{n+k-i} \end{aligned}$$

bulunur. Benzer şekilde,

$$E^k x_n = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \Delta^{k-i} x_n$$

olduğu görülür.

Tanım 2.1.1. $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere x_n; $\mathbb{N}$ üzerinde tanımlı reel (veya kompleks) değerli bir fonksiyon olsun.

$$x_n; x_{n+1}; \ldots; x_{n+k} \tag{2.1.1}$$

ifadelerini kapsayan bir bağıntıya (denkleme) k ıncı mertebeden bir fark denklemi denir (Akın 1998, Agarwal 2000). Bir başka ifadeyle, $\mathbb{N}; \mathbb{R}$ sırasıyla doğal sayılar ve reel sayılar kümesi olmak üzere,

$$\begin{aligned} x &: \mathbb{N} \to \mathbb{R} \\ x &: n \to x_n;\ n = 0; 1; 2; \ldots \end{aligned}$$

tanım cümlesi doğal sayılar olan fonksiyonlar fark denklemin çözümü olan fonksiyonlardır (Akın ve Bulgak 1998).

Tanım 2.1.2. Bir fark denkleminin mertebesi, denklemdeki en büyük indis ile en küçük indis arasındaki fark olarak tanımlanır. Örneğin; $x_{n+3} - 3x_{n+2} + 7x_{n+1} = 0$ denklemi ikinci mertebeden bir fark denklemidir (Agarwal 2000).

Tanım 2.1.3. Eğer (2.1.1) fark denklemi,

$$\sum_{i=0}^{k} a_{in} x_{n+i} = b_n \tag{2.1.2}$$

formunda verilirse k ıncı mertebeden olan (2.1.1) fark denklemine **lineerdir** denir.

Eğer en az bir $n \in \mathbb{N}$ için b_n sıfırdan farklı ise, bu durumda (2.1.2) fark denklemine **homogen olmayan**, lineer fark denklemi denir (Akın 1998, Agarwal 2000).

Eğer (2.1.1) fark denklemi,

$$\sum_{i=0}^{k} a_{in} x_{n+i} = 0 \tag{2.1.3}$$

şeklinde verilirse (2.1.3) fark denklemine **homogen**, lineer fark denklemi denir (Akın 1998, Agarwal 2000).

2.2. Lineer Fark Denklemleri Teorisi

Bu kısımda k ıncı mertebeden lineer fark denklemleri hakkında bilinen bir teorem verilecektir. k ıncı mertebeden, homogen olmayan, lineer fark denklemini

$$x_{n+k} + p_{1n} x_{n+k-1} + \dots + p_{kn} x_n = g_n \qquad (2.2.1)$$

formunda yazabiliriz. Burada p_{in} ve g_n, $n \geq n_0$ için tanımlı reel değerli fonksiyonlar ve $\forall n \geq n_0$ için $p_{kn} \neq 0$ dır.

Teorem 2.2.1. Aşağıdaki başlangıç değer problemi bir tek x_n çözümüne sahiptir

$$x_{n+k} + p_{1n} x_{n+k-1} + \dots + p_{kn} x_n = g_n$$

$$x_{n_0} = a_0;\ x_{n_0+1} = a_1; \dots;\ x_{n_0+k-1} = a_{k-1}$$

(Elaydi 1999).

2.3. Lineer Homogen Sabit Katsayılı Fark Denklemlerinin Çözümleri

Bu kısımda k ıncı mertebeden sabit katsayılı, lineer, homogen fark denkleminin çözümleri hakkında bilgi vereceğiz. Şimdi aşağıdaki k ıncı mertebeden fark denklemini ele alalım.

$$x_{n+k} + p_1 x_{n+k-1} + \dots + p_k x_n = 0 \qquad (2.3.1)$$

Burada p_i ler sabit ve $p_k \neq 0$ dır. (2.3.1) denkleminde λ^n i çözüm kabul edip denklemde yerine yazarsak

$$\lambda^k + p_1 \lambda^{k-1} + \dots + p_k = 0 \qquad (2.3.2)$$

denklemi bulunur. Buna (2.3.1) fark denkleminin karakteristik denklemi ve λ lara ise (2.3.2) denkleminin karakteristik kökleri denir. (2.3.1) fark denkleminin çözümü için, karakteristik denklemin köklerine bağlı olarak çözümler bulunur (Elaydi 1999).

2.4. Lineer Fark Denklem Sistemlerinin Çözümleri

Bu kısımda k tane bağımlı değişken ve k tane lineer denklemden oluşan

$$
\begin{aligned}
x_{1(n+1)} &= a_{11}x_{1n} + a_{12}x_{2n} + \dots + a_{1k}x_{kn} \\
x_{2(n+1)} &= a_{21}x_{1n} + a_{22}x_{2n} + \dots + a_{2k}x_{kn} \\
\vdots \quad & \quad \vdots \\
x_{k(n+1)} &= a_{k1}x_{1n} + a_{k2}x_{2n} + \dots + a_{kk}x_{kn}
\end{aligned}
$$

fark denklem sisteminin çözümleri hakkında bilinen tanım ve teoremleri vereceğiz. Bu sistemi $(x_{1n}, x_{2n}, \dots, x_{kn})^T \in R^k$ ve $A \in R^{k \times k}$ singüler olmayan bir matris olmak üzere

$$x_{n+1} = Ax_n \tag{2.4.1}$$

formunda yazabiliriz. (2.4.1) sistemine A matrisi sabit katsayılı olduğundan dolayı otonom sistem denir.

$n_0 \geq 0$, $x_{n_0} = x_0$ başlangıç değeri ile birlikte (2.4.1) sistemine başlangıç değer problemi denir ve bu sistemin çözümü

$$x_{n,n_0,x_0} = A^{n-n_0}x_0 \tag{2.4.2}$$

ile verilir. Burada $A^0 = I$, kxk tipinde birim matristir. $y_{n-n_0} = x_n$ ve $n_0 = 0$ alındığında (2.4.1) sistemi

$$y_{n+1} = Ay_n \, ; \; y_0 = x_{n_0} \tag{2.4.3}$$

olur ve çözümü

$$y_n = A^n y_0 \tag{2.4.4}$$

ile verilir (Elaydi 1999).

Tanım 2.4.1. $A = (a_{ij})$, kxk tipinde bir matris ve I, $k \times k$ tipinde bir birim matris olsun. Bu durumda

$$\det(\lambda I - A) = 0 \tag{2.4.5}$$

karakteristik denkleminin kökleri olan $\lambda \in C^k$ lara A matrisinin özdeğerleri ve

$$(\lambda I - A)\xi = 0 \qquad (2.4.6)$$

denkleminin çözümü olan $\xi \in C^k$ lara $\xi \neq 0$; A matrisinin özdeğerlerine karşılık gelen özvektörleri denir (Akın 2002, Elaydi 1999).

Şimdi

$$x_{n+1} = A_n x_n \qquad (2.4.7)$$

lineer, homogen, otonom olmayan fark denklem sisteminin çözümü ile ilgili bilinen bir teorem verelim. Burada $A_n = (a_{ij})$ bir $k \times k$ tipinde singüler olmayan matris fonksiyonudur ve A_n değişken katsayılı olduğundan (2.4.7) sistemine otonom olmayan sistem denir.

Teorem 2.4.1. Her hangi bir $x_0 \in R^k$ ve $n_0 \in Z^+$ için (2.4.7) sistemi $x_{n_0; n_0; x_0} = x_0$ ile tek bir $x_{n_0; n_0; x_0}$ çözümüne sahiptir ve çözümü

$$x_{n_0; n_0; x_0} = \left[\prod_{i=n_0}^{n-1} A_i \right] x_0 \qquad (2.4.8)$$

dır. Burada

$$\prod_{i=n_0}^{n-1} A_i = \begin{cases} A_{n-1} A_{n-2} \cdots A_{n-n_0} & ; \ n > n_0 \\ I & ; \ n = n_0 \end{cases}$$

ile verilir (Elaydi 1999).

2.5. Fark Denklemlerinin ve Fark Denklem Sistemlerinin Salınımlılığı

Bu kısımda fark denklemlerinin ve fark denklem sistemlerinin salınımlılığı ile ilgili olarak bilinen bazı tanım ve teoremler vereceğiz.

Tanım 2.5.1. Eğer her pozitif N tamsayısı ve $n \geq N$ için $x_n x_{n+1} \leq 0$ ise x_n aşikar olmayan çözümüne sıfır etrafında salınımlıdır denir. Aksi halde x_n çözümüne salınımlı olmayan çözüm denir. Başka bir şekilde ifade edersek, eğer bir x_n çözümü belli bir yerden (n değerinden itibaren) sonra sadece pozitif ya da sadece negatif değilse sıfır etrafında salınımlıdır denir (Agarwal vd 2000, Györi ve Ladas 1991, Elaydi 1999).

Tanım 2.5.2. k ıncı mertebeden bir fark denklem sisteminin bir $\{x_n\}$ çözümü $x_n = [x_n^1, x_n^2, \ldots, x_n^r]^T$ olsun. Eğer her bir $\{x_n^i\}$ bileşeni salınımlı ise $\{x_n\}$ çözümüne salınımlıdır denir. Diğer durumda yani, bir $\{x_n^i\}$ bileşeni belli bir yerden sonra pozitif ya da negatif ise $\{x_n\}$ çözümüne salınımlı olmayan bir çözüm denir. Burada $n = 0, 1, 2, \ldots$ için $x_n \in R^r$ dir (Györi ve Ladas 1991).

Tanım 2.5.3. $n = 0, 1, 2, \ldots$ için $\{x_n\}$ reel terimli bir dizi olsun. $\{x_n\}$ dizisinin $z-$ dönüşümü $Z(x_n)$ ile gösterilir ve

$$Z(x_n) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x_n}{z^n} \tag{2.5.1}$$

serisi ile tanımlıdır. Bu dönüşüm, seri yakınsak olacak biçimde bütün kompleks z değerleri için tanımlıdır. Eğer b ve c pozitif sayılar öyleki $n = 0, 1, 2, \ldots$ için

$$|x_n| \le bc^n \tag{2.5.2}$$

eşitsizliği sağlanırsa, bu durumda her $|z| > c$ için (2.5.1) serisi yakınsaktır ve bu bölgede z değişkenli kompleks analitik fonksiyon olarak tanımlıdır (Györi ve Ladas 1991).

Lemma 2.5.1. $k \in \{1, 2, \ldots\}$ olsun. Bu durumda

$$Z(x_{n+k}) = z^k Z(x_n) - \sum_{n=0}^{k-1} x_n z^{k-n}$$

dir (Györi ve Ladas 1991).

Lemma 2.5.2. $P_1, P_2, \ldots, P_k$; $s \times s$ tipinde reel terimli matrisler olsun ve $\{x_n\}$

$$x_{n+k} + P_1 x_{n+k-1} + \ldots + P_k x_n = 0\ ; \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

denkleminin herhangi bir çözümü olsun. Ayrıca $b = \{\|a_0\|, \ldots, \|a_k\|\}$ ve $c \in [1, \infty)$

olsun ve

$$\|P_1\| c^{-1} + \dots + \|P_k\| c^{-k} \le 1$$

ise, bu durumda

$$\|a_n\| \le bc^n \,; \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

sağlanır (Györi ve Ladas 1991).

Teorem 2.5.1. k ve s pozitif tamsayılar ve $i = 1, 2, \dots, k$ için P_i ler $s \times s$ tipinde reel terimli matrisler olmak üzere aşağıdaki fark denklem sistemini alalım

$$x_{n+k} + P_1 x_{n+k-1} + \dots + P_k x_n = 0 \,; \; n = 0, 1, 2, \dots \tag{2.5.3}$$

Bu durumda aşağıdaki ifadeler birbirine denktir;

(a) (2.5.3) denkleminin her $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ çözümü salınımlıdır,

(b) (2.5.3) ün

$$\det\left(\lambda^k I + \lambda^{k-1} P_1 + \dots + P_k\right) = 0 \tag{2.5.4}$$

karakteristik denklemi pozitif köke sahip değildir. Burada I, $s \times s$ tipinde birim matristir (Györi ve Ladas 1991).

İspat. (a) $\Rightarrow$ (b); Eğer (a) sağlanırsa, bu durumda (2.5.4) ün pozitif bir köke sahip olmadığını göstermeliyiz. (2.5.4) pozitif bir λ_0 köküne sahip olsun. O zaman sıfırdan farklı bir $\xi \in \mathbb{R}^s$ vektörü vardır ve

$$\left(\lambda_0^k I + \lambda_0^{k-1} P_1 + \dots + P_k\right) \xi = 0$$

dır. Bu durumda $x_n = \lambda_0^n \xi$ çözümü (2.5.3) ün salınımlı olmayan bir çözümüdür. Bu da bir çelişkidir. Dolayısıyla, bu durumda ispat tamamlanmış olur.

(b) $\Rightarrow$ (a); (b) ifadesi sağlansın ve kabul edelim ki (2.5.3) salınımlı olmasın. Bu durumda (2.5.3) en az bir bileşeni salınımlı olmayan bir $x_n = [x_n^1, x_n^2, \dots, x_n^s]^T$ çözümüne sahiptir. Genelliği bozmaksızın $\{x_n^1\}$ belli bir yerden itibaren pozitif olsun. (2.5.3) denklemi otonom olduğundan $n \ge 0$ için $x_n^1 > 0$ yazabiliriz. Lemma 2.5.2 den

$b, c \in (0, 1)$ vardır ve $\|x_n\| < bc^n$ dir. Bu durumda $\{x_n\}$ nin $z-$dönüşümü

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x_n}{z^n}$$

$|z| > c$ için vardır. (2.5.3) denklemine $z-$dönüşümünü uygular ve Lemma 2.5.1 i kullanırsak $|z| > c$ için

$$F(z)X(z) = \Psi(z)$$

sağlanır. Burada $P_0 = I$,

$$F(z) = \sum_{i=0}^{k} P_i z^{k-i}$$

ve

$$\Psi(z) = \sum_{i=0}^{k} P_i \sum_{j=0}^{k-i-1} z^{k-i-j} x_j$$

dir. Hipotezden, $z \in (0, 1)$ için $\det(F(z)) \neq 0$ dır. Üstelik, reel $z \to 1$ iken $\det(F(z)) \to 1$ olduğundan $z \in (0, 1)$ için

$$\det(F(z)) > 0$$

dır. $X_1(z)$, $\{x_n^1\}$ bileşeninin $z-$dönüşümü olsun ve M de $\det(F(z))$ nin en büyük sıfırının modülü olsun. Bu durumda Cramer kuralından, $|z| > \max\{c, M\}$ için

$$\det(F(z))X_1(z) = \det(D(z)) \qquad (2.5.5)$$

dir. Burada $D(z)$ elemanları $F(z)$ ve $\Psi(z)$ olan bileşenlere sahiptir. Açık olarak, (2.5.5) deki determinantlar z ye bağlı polinomlardır.

$$X_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n^1 z^{-n}$$

olsun ve $W(z)$, $\rho > 0$ yakınsaklık yarıçapına sahip pozitif katsayılı bir kuvvet serisi olmak üzere $W(z) = X_1(\frac{1}{z})$ alalım. $|z| > \frac{1}{\rho}$ için (2.5.5) denklemi gerçeklenir. Buna denk olarak $0 < |z| < \rho$ için $\det\left[F(\frac{1}{z})\right] W(z) = \det\left[D(\frac{1}{z})\right]$ dir. $\rho < 1$ yakınsaklık yarıçapına sahip pozitif katsayılı bir kuvvet serisi $z = \rho$ da bir singüleriteye sahiptir (analitik devam anlamında). Fakat $\det\left[F(\frac{1}{z})\right] \neq 0$ olduğundan $\det\left[D(\frac{1}{z})\right] = \det\left[F(\frac{1}{z})\right]$; ρ merkezli bir diskte analitiktir ve $|z| < \rho$ diskinin bu kısmında $W(z)$ ile çakışır. Bu çelişki $\rho = 1$ olduğunu ve bu ise $|z| > 0$ için (2.5.5) in gerçeklendiğini gösterir. Fakat bu durumda yeterince büyük n ler için $x_n^1 = 0$ dır. Zira aksi halde, (2.5.5) in sol tarafı $z = 0$ da bir singüleriteye sahip olurdu. Bu zıtlık $\{x_n^1\}$ in salınımlı olmaması ile ortaya çıkmıştır. Dolayısıyla ispat tamamlanır (Györi ve Ladas 1991).

Şimdi, Teorem 2.5.1 kullanılarak elde edilen, birinci mertebeden fark denklemlerinin salınımlılığı için bilinen aşağıdaki teoremleri verelim.

Teorem 2.5.2. $p \in \mathbb{R}$ ve $k \in \mathbb{Z}$ olmak üzere aşağıdaki $(k+1)$ inci mertebeden, otonom fark denklemini alalım.

$$x_{n+1} - x_n + p x_{n-k} = 0 \tag{2.5.6}$$

Bu durumda (2.5.2) fark denkleminin her çözümünün salınımlı olması için gerek ve yeter şart aşağıdaki ifadelerden birinin sağlanmasıdır:

(i) $k = -1$ ise $p \leq -1$;

(ii) $k = 0$ ise $p \geq 1$;

(iii) $k \in \{\ldots, -3, -2\} \bigcup \{1, 2, \ldots\}$ ise $p > \dfrac{k^k}{(k+1)^{k+1}}$

(Ladas 1990, Györi ve Ladas 1991).

Teorem 2.5.3. Aşağıdaki fark denklemini alalım.

$$x_{n+1} - x_n + \sum_{i=1}^{m} p_i x_{n-k_i} = 0. \tag{2.5.6}$$

Eğer $i = 1, 2, \ldots, m$ için ya

$$p_i \in (0, \infty) \text{ ve } k_i \in \{0, 1, 2, \ldots\}$$

veya

$$p_i \in (-\infty, 0) \text{ ve } k_i \in \{\dots, -2, -1\}$$

sağlansın. Bu durumda

$$\sum_{i=1}^{m} p_i \frac{(k_i + 1)^{k_i + 1}}{k_i^{k_i}} > 1$$

sağlanırsa (2.5.6) fark denkleminin her çözümü salınımlıdır (Ladas 1990, Györi ve Ladas 1991).

3. İKİNCİ VE ÜÇÜNCÜ MERTEBEDEN LİNEER OTONOM FARK DENKLEM SİSTEMLERİNİN SALINIMLILIĞI

Chuanxi, Kuruklis ve Ladas 1990 yılında yapmış oldukları çalışmada birinci mertebeden, lineer, otonom fark denklem sistemlerinin tüm çözümlerinin salınımlılık durumunu incelemiş ve bazı kriterler vermişlerdir. Biz ise bu bölümde ikinci ve üçüncü mertebeden, lineer, otonom fark denklem sistemlerinin tüm çözümlerinin salınımlı olması için bazı sonuçlar elde edeceğiz.

3.1. İkinci Mertebeden Fark Denklem Sistemlerinin Salınımlılığı

Δ birinci mertebeden ileri fark operatörü yani, $\Delta x_n = x_{n+1} - x_n$ olsun. Bu kısımda ilk önce

$$\Delta^2 x_n + P x_{n-k} = 0\,; \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{3.1.1}$$

dört terimli, lineer, otonom fark denklem sisteminin tüm çözümlerinin salınımlılığı için P matrislerinin özdeğerlerini kullanarak gerek ve yeter şartlar vereceğiz. Daha sonra ise $P_i \in R^{s\times s}$ matrislerinin logaritmik normlarını kullanarak

$$\Delta^2 x_n + \sum_{i=1}^{m} P_i x_{n-k_i} = 0; \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{3.1.2}$$

ikinci mertebeden, lineer, otonom fark denklem sisteminin tüm çözümlerinin salınımlılığı için yeter şart vereceğiz.

Bu kısımda elde edilen sonuçlar, bir ana fikir olmak üzere, dördüncü bölümde keyfi çift mertebeden fark denklem sistemlerinin çözümlerinin salınımlılığını elde edeceğiz.

Tanım 3.1.1. $P \in R^{s\times s}$ olmak üzere P matrisinin logaritmik normu $\mu(P)$ ile gösterilir ve

$$\mu(P) = \max_{\|\xi\|=1} (P\xi, \xi)$$

şeklinde tanımlanır. Burada $(\ ,\ )$, R^s de bir iç çarpım ve $\|\xi\| = (\xi, \xi)^{\frac{1}{2}}$ dir (Chuanxi vd 1990, Györi ve Ladas 1991).

(3.1.1) fark denklem sisteminin bir çözümü $n \geq -k$ için tanımlı ve $n \geq 0$ için (3.1.1) denklemini sağlayan R^s de bir $\{x_n\}$ dizisidir. $n = 0, 1, 2, \dots$ için $x_n = [x_n^1, x_n^2, \dots, x_n^s]^T$ ile (3.1.1) fark denklem sisteminin bir çözümü $\{x_n\}$ olsun. Eğer herbir $\{x_n^i\}$ bileşeni salınımlı ise $\{x_n\}$ **salınımlı** çözüm aksi halde **salınımlı olmayan** çözümdür (Tanım 2.5.2). Şimdi $k = \max\{0, k_1, k_2, \dots, k_m\}$ ve $l = \max\{2, -k_1, -k_2, \dots, -k_m\}$ olsun. Bu durumda (3.1.2) fark denklem sistemini

$$\Delta^2 x_n + \sum_{j=-k} Q_j x_{n+j} = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots \tag{3.1.3}$$

formunda yazabiliriz. Bu durumda (3.1.3) fark denklem sistemi $(k + l)$ inci mertebeden bir fark denklem sistemidir. Burada eğer $k \geq 0$ ve $l = 2$ ise (3.1.3) fark denklem sistemine **gecikmeli** fark denklem sistemi, $k = 0$ ve $l \geq 3$ ise (3.1.3) fark denklem sistemine **ileri** fark denklem sistemi ve $k \geq 2$ ve $l \geq 3$ ise (3.1.3) fark denklem sistemine **karışık tipten** fark denklem sistemidir.

(3.1.3) fark denklem sisteminin çözümlerinin varlığı ve tekliği için

$$\left.\begin{array}{c} \text{eğer } 0 \leq k \leq 2 \text{ ve } l = 2 \text{ ise } \det(Q_2 + I) \neq 0 \\ \text{eğer } k = 0 \text{ ve } l \geq 3 \text{ ise } \det Q_l \neq 0 \end{array}\right\} \tag{3.1.4}$$

şartı sağlansın. Bu durumda, R^s de $a_{-k}, \dots, a_{l-1}$, $(k + l)$ tane başlangıç şartı verilirse, (3.1.3) fark denklem sistemi

$$x_i = a_i, \quad i = -k, \dots, l - 1$$

başlangıç şartlarını sağlayan, $n = -k, \dots, 0, 1, \dots$ için bir tek $\{x_n\}$ çözümüne sahiptir (Györi ve Ladas 1991).

Teorem 3.1.1. $P \in R^{s \times s}$, $k \in Z$ ve (3.1.4) şartı sağlansın. Bu durumda (3.1.1) dört terimli fark denklem sisteminin tüm çözümlerinin salınımlı olması için gerek ve yeter şart P matrisinin $(-1, 0]$ aralığında özdeğere sahip olmamasıdır.

İspat. (i) $k = 0$ olsun. Bu durumda (3.1.1) fark denklem sistemi

$$x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n + P x_n = 0 \tag{3.1.5}$$

şeklinde olur ve (3.1.5) sisteminin karakteristik denklemi

$$\det\left[\lambda^2 I - 2\lambda I + I + P\right] = 0 \tag{3.1.6}$$

olur. (3.1.6) karakteristik denklemini

$$\begin{aligned} & \det\left[(\lambda - 1)^2 I + P\right] \\ = \; & \det\left[-(\lambda - 1)^2 I - P\right] = 0 \end{aligned}$$

şeklinde yazabiliriz. Eğer $v(\lambda)$ foksiyonunu

$$v(\lambda) = -(\lambda - 1)^2$$

şeklinde alırsak $v(\lambda)$ fonksiyonunun $(0;\infty)$ aralığındaki görüntü kümesi $(-\infty;0]$ aralığıdır. Böylece (3.1.6) denkleminin pozitif kökünün olmaması için gerek ve yeter şart P nin $(-\infty;0]$ aralığında özdeğere sahip olmaması gerekir. Böylece Teorem 2.5.1 gereğince (i) ispatlanır. ■

(ii) $k = -1$ olsun. Bu durumda (3.1.1) fark denklem sistemi

$$x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n + P x_{n+1} = 0 \tag{3.1.7}$$

olur ve (3.1.7) sisteminin karakteristik denklemi

$$\det\left[\lambda^2 I - 2\lambda I + I + P\lambda\right] = 0 \tag{3.1.8}$$

dolayısıyla

$$\det\left(\lambda I - 2I + \frac{1}{\lambda} I + P\right) = 0$$

ve

$$\det\left((\lambda + \frac{1}{\lambda}) I - (2I - P)\right) = 0$$

şeklinde yazarız. Burada, eğer $v(\lambda)$ foksiyonunu

$$v(\lambda) = \lambda + \frac{1}{\lambda}$$

alırsak $v(\lambda)$ fonksiyonu $(0; \infty)$ üzerinde sürekli bir fonksiyondur. Şimdi $\lambda > 0$ için $v(\lambda)$ fonksiyonunun görüntü kümesini bulalım. $v(\lambda)$ fonksiyonunun türevini alırsak

$$v'(\lambda) = 1 - \frac{1}{\lambda^2} = 0$$

olduğundan $\lambda = 1$ için $v'(\lambda) = 0$ olur. Dolayısıyla $\lambda = 1$ değeri $v(\lambda)$ fonksiyonunun kritik noktasıdır. Şimdi $v(\lambda)$ nın ikinci türevini alalım;

$$v''(\lambda) = \frac{2}{\lambda^3}$$

$\lambda = 1$ için $v''(\lambda) > 0$ olduğundan $v(\lambda)$ fonksiyonu $\lambda = 1$ için yerel minimuma sahiptir. Dolayısıyla

$$\min_{\lambda>0} v(\lambda) = 2 \text{ ve } \lim_{\lambda\to 0^+} v(\lambda) = \infty \; ; \; \lim_{\lambda\to\infty} v(\lambda) = \infty$$

dur. Böylece $v(\lambda)$ fonksiyonunun $(0; \infty)$ aralığındaki görüntüsü $[2; \infty)$ aralığıdır. Dolayısıyla (3.1.8) denkleminin pozitif kökünün olmaması için gerek ve yeter şart P nin $(-\infty; 0]$ aralığında özdeğere sahip olmaması gerekir. Yani Teorem 2.5.1 gereğince (ii) doğrudur. ■

(iii) $k = -2$ olsun. Bu durumda (3.1.1) fark denklem sistemi

$$x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n + P x_{n+2} = 0 \tag{3.1.9}$$

şeklini alır ve (3.1.9) sisteminin karakteristik denklemi

$$\det\left[\lambda^2 I - 2\lambda I + I + P\lambda^2\right] = 0 \tag{3.1.10}$$

ve

$$\det\left(I - \frac{2}{\lambda} I + \frac{1}{\lambda^2} I + P\right) = 0$$

ve bu denklemi de

$$\det\left[\left(\frac{2}{\lambda}-\frac{1}{\lambda^{2}}\right)I-(I+P)\right]=0$$

şeklinde yazarız. Eğer $v(\lambda)$ foksiyonunu

$$v(\lambda)=\frac{2}{\lambda}-\frac{1}{\lambda^{2}}$$

alırsak $v(\lambda)$ fonksiyonunun $(0;\infty)$ aralığındaki görüntüsü $(-\infty;1]$ olduğu (ii) deki gibi gösterilebilir. Dolayısıyla (3.1.10) denkleminin pozitif kökünün olmaması için gerek ve yeter şart P nin $(-\infty;0]$ aralığında özdeğere sahip olmaması gerekir. ■

(iv) $k\geq 1$ olsun. Bu durumda (3.1.1) fark denklem sisteminin karakteristik denklemi

$$\det\left[\lambda^{2}I-2\lambda I+I+P\lambda^{-k}\right]=0 \qquad (3.1.11)$$

olur ve bu da

$$\det\left[\lambda^{k+2}I-2\lambda^{k+1}I+\lambda^{k}I+P\right]=0$$

dır. Bu denklemi düzenlersek

$$\det\left[(2\lambda^{k+1}-\lambda^{k+2}-\lambda^{k})I-P\right]=0$$

şeklinde yazarız. Bu denklemde $v(\lambda)$ fonksiyonunu

$$v(\lambda)=2\lambda^{k+1}-\lambda^{k+2}-\lambda^{k}$$

olarak alalım. $v(\lambda)$ fonksiyonunun $(0;\infty)$ aralığındaki görüntüsü $(-\infty;0]$ dır. Böylece (3.1.11) karakteristik denkleminin pozitif kökünün olmaması için gerek ve yeter şart P nin $(-\infty;0]$ aralığında özdeğere sahip olmaması gerekir. Böylece Teorem 2.5.1 gereğince ispat tamamlanır. ■

(v) $k\leq -3$ olsun. Bu durumda yine (3.1.1) sisteminin karakteristik denklemi (3.1.11) da ki gibidir. $v(\lambda)$ fonksiyonunun $(0;\infty)$ aralığındaki görüntüsü $(-\infty;0]$ dır. Böylece (3.1.11) karakteristik denkleminin pozitif kökünün olmaması için gerek ve yeter şart P nin $(-\infty;0]$ aralığında özdeğere sahip olmaması gerekir. Böylece Teorem 2.5.1

den ispat tamamlanır. ■

Şimdi (3.1.1) fark denklem sisteminin bir özel şekli olan (3.1.2) fark denklem sisteminin tüm çözümlerinin salınımlılığı için yeter şart vereceğiz. Buradaki şart, $P_i \in R^{sxs}$ matrislerinin logaritmik normları kullanılarak verilecektir.

Teorem 3.1.2. $i = 1, 2, \dots, m$ için $P_i \in R^{s\times s}$, $k_i \in Z$ ve (3.1.4) şartı sağlansın. Bu durumda aşağıdaki ifade geçerli olursa, (3.1.2) fark denklem sisteminin her çözümü salınımlıdır.

(i_a) $\gamma > 0$ için $\sum_{i=1}^{m} \gamma^{-k_i}\mu(-P_i) < 0$ veya

(i_b) $\gamma \neq 1$ için $\sup_{\gamma\in(0,\infty)} \left[\frac{1}{(\gamma-1)^2}\sum_{i=1}^{m} \gamma^{-k_i}\mu(-P_i)\right] < 1$ ve $\sum_{i=1}^{m} \mu(-P_i) < 0$.

Ispat. (3.1.2) fark denklem sisteminin salınımlı olmadığını kabul edelim. O zaman Teorem 2.5.1 den (3.1.2) fark denklem sisteminin karakteristik denklemi

$$\det\left[(\lambda-1)^2 I + \sum_{i=1}^{m} \lambda^{-k_i}P_i\right] = 0$$

pozitif bir γ köküne sahiptir. Böylece sıfırdan farklı bir $\xi \in R^s$ vektörü vardır ve $\|\xi\| = 1$ olduğunu kabul edebiliriz. Bu durumda

$$\left[(\gamma-1)^2 I + \sum_{i=1}^{m} \gamma^{-k_i}P_i\right]\xi = 0$$

olur. Buradan,

$$(\gamma-1)^2 = \sum_{i=1}^{m} \gamma^{-k_i}(-P_i\xi,\xi)$$

ve

$$(\gamma-1)^2 \leq \sum_{i=1}^{m} \gamma^{-k_i}\mu(-P_i) \qquad (3.1.12)$$

elde ederiz. (3.1.12) eşitsizliğinden Teorem 3.1.2 in (i_a) ifadesi sağlanmaz. Eğer $\gamma \in (0,\infty); \gamma \neq 1$ ise (3.1.12) eşitsizliğinden

$$1 \leq \frac{1}{(\gamma-1)^2}\sum_{i=1}^{m} \gamma^{-k_i}\mu(-P_i)$$

eşitsizliğini elde ederiz ve buradan da

$$1 \le \sup_{\gamma \in (0,1)} \left[\frac{1}{(\gamma - 1)^2} \sum_{i=1}^{m} \gamma^{-k_i - 1} \mu(-P_i) \right]$$

olur. Bu ise Teorem 3.1.2 in (i_b) ifadesinin ilk kısmı ile çelişmektedir. Eğer $\gamma = 1$ ise (3.1.12) eşitsizliğinden

$$0 \le \sum_{i=1}^{m} \mu(-P_i)$$

olur ve Teorem 3.1.2 in (i_b) ifadesinin ikinci kısmı ile çelişmektedir. Böylece ispat tamamlanır. ■

3.2. Üçüncü Mertebeden Fark Denklem Sistemlerinin Salınımlılığı

Bu kısımda ilk önce

$$\Delta^3 x_n + P x_{n-k} = 0\,; \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{3.2.1}$$

üçüncü mertebeden beş terimli, lineer, otonom, fark denklem sisteminin tüm çözümlerinin salınımlılık durumları incelenecek ve bazı sonuçlar elde edilecektir. Burada $P \in R^{s \times s}$, $k \in Z$ dir. Elde edilen sonuçlar P matrislerinin özdeğerleri kullanılarak verilecektir. Daha sonra ise,

$$\Delta^3 x_n + \sum_{i=1}^{m} P_i x_{n-k_i} = 0; \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{3.2.2}$$

üçüncü mertebeden, lineer, otonom fark denklem sisteminin tüm çözümlerinin salınımlılığı için $P_i \in R^{s \times s}$ matrislerinin logaritmik normlarını kullanarak yeter şartlar vereceğiz.

Bu kısımda elde edilen sonuçlar, bir ana fikir olmak üzere, dördüncü bölümde keyfi tek mertebeden fark denklem sistemlerinin çözümlerinin salınımlılığını elde edeceğiz.

(3.2.1) fark denklem sisteminin bir çözümü $n \ge -k$ için tanımlı ve $n \ge 0$ için (3.2.1) denklemini sağlayan R^s de bir $\{x_n\}$ dizisidir. Şimdi $k = \text{maks}\{0, k_1, k_2, \ldots, k_m\}$ ve

$l = \text{maks}\{3, -k_1, -k_2, \ldots, -k_m\}$ olsun. Bu durumda (3.2.2) fark denklem sistemini

$$\Delta^3 x_n + \sum_{j=-k}^{l} Q_j x_{n+j} = 0, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{3.2.3}$$

formunda yazabiliriz. Bu durumda (3.2.3) fark denklem sistemi $(k + l)$ inci mertebeden bir fark denklem sistemidir. Burada eğer $k \geq 0$ ve $l = 3$ ise (3.2.3) fark denklem sistemi **gecikmeli** fark denklem sistemi, $k = 0$ ve $l \geq 4$ ise (3.2.3) fark denklem sistemi **ileri** fark denklem sistemi ve $k \geq 3$ ve $l \geq 4$ ise (3.2.3) fark denklem sistemi **karışık tipten** fark denklem sistemidir.

(3.2.3) fark denklem sisteminin çözümlerinin varlığı ve tekliği için

$$\left.\begin{array}{r} \text{eğer } 0 \leq k \leq 3 \text{ ve } l = 3 \text{ ise } \det(Q_3 + I) \neq 0 \\ \text{eğer } k = 0 \text{ ve } l \geq 4 \text{ ise } \det Q_l \neq 0 \end{array}\right\} \tag{3.2.4}$$

şartı sağlansın. Bu durumda, R^s de $a_{-k}, \ldots, a_{l-1}$, $(k + l)$ tane başlangıç şartı verilirse, (3.2.3) fark denklem sistemi

$$x_i = a_i, \quad i = -k, \ldots, l-1$$

başlangıç şartlarını sağlayan, $n = -k, \ldots, 0, 1, \ldots$ için bir tek $\{x_n\}$ çözümüne sahiptir.

Teorem 3.2.1. $P \in R^{s \times s}$, $k \in Z$ ve (3.2.4) şartı sağlansın. Bu durumda (3.2.1) fark denklem sisteminin tüm çözümlerinin salınımlı olması için gerek ve yeter şart aşağıdaki ifadelerden birinin sağlanmasıdır.

(i) $k = 0$ ise P, $(-1, 1]$ aralığında özdeğere sahip değildir,

(ii) $k = -1$ ise P, $(-1, 1)$ aralığında özdeğere sahip değildir,

(iii) $k = -2$ ise P, $(-1, 1)$ aralığında özdeğere sahip değildir,

(iv) $k = -3$ ise P, $[-1, 1)$ aralığında özdeğere sahip değildir,

(v) $k \geq 1$ ise P, $\left(-\infty, 27\frac{k^k}{(k+3)^{k+3}}\right]$ aralığında özdeğere sahip değildir,

(vi) $k \leq -4$ ise P, $\left[27\frac{k^k}{(k+3)^{k+3}}, \infty\right)$ aralığında özdeğere sahip değildir.

İspat. (i) $k = 0$ olsun. Bu durumda (3.2.1) fark denklem sistemi

$$x_{n+3} - 3x_{n+2} + 3x_{n+1} - x_n + Px_n = 0 \tag{3.2.5}$$

şeklinde olur ve (3.2.5) fark denklem sisteminin karakteristik denklemi

$$\det\left[\lambda^3 I - 3\lambda^2 I + 3\lambda I - I + P\right] = 0 \tag{3.2.6}$$

olur. (3.2.6) karakteristik denklemini

$$\begin{aligned} & \det\left[(\lambda - 1)^3 I + P\right] \\ = \ & \det\left[-(\lambda - 1)^3 I - P\right] = 0 \end{aligned}$$

şeklinde yazabiliriz. Son denklemden, $v(\lambda) = -(\lambda - 1)^3$ alırsak $v(\lambda)$ fonksiyonu $(0, \infty)$ aralığındaki görüntüsü $(-\infty, 1]$ aralığıdır. O halde (3.2.6) karakteristik denkleminin pozitif kökünün olmaması için gerek ve yeter şart P matrisinin $(-\infty, 1]$ aralığında özdeğere sahip olmaması gerekir. Böylece Teorem 2.5.1 uyarınca (i) ispatlanmış olur. ■

(ii) $k = -1$ olsun. Bu durumda (3.2.1) fark denklem sistemi

$$x_{n+3} - 3x_{n+2} + 3x_{n+1} - x_n + Px_{n+1} = 0 \tag{3.2.7}$$

olur ve (3.2.7) fark denklem sisteminin karakteristik denklemi

$$\det\left[\lambda^3 I - 3\lambda^2 I + 3\lambda I - I + P\lambda\right] = 0 \tag{3.2.8}$$

şeklindedir. (3.2.8) karakteristik denklemini

$$\det\left[(\lambda - 1)^3 I + P\lambda\right]$$

$$= \det\left[\frac{-(\lambda-1)^3}{\lambda} I - P\right] = 0$$

şeklinde yazabiliriz. Eğer $v(\lambda) = \frac{-(\lambda-1)^3}{\lambda}$ alırsak, $v(\lambda)$ fonksiyonu $(0, \infty)$ aralığında sürekli bir fonksiyondur. $\lambda > 0$ için $v(\lambda)$ fonksiyonunun görüntü kümesini incelersek; $v(\lambda)$ fonksiyonunun birinci ve ikinci türevi $v'(1) = v''(1) = 0$ olduğu görülür. Dolayısıyla $\lambda = 1$ için $v(\lambda)$ fonksiyonu düğüm noktasına sahiptir ve $v(1) = 0$ dır. Ayrıca

$$\lim_{\lambda \to 0^+} v(\lambda) = \infty \quad \text{ve} \quad \lim_{\lambda \to \infty} v(\lambda) = -\infty$$

olur. Dolayısıyla $v(\lambda)$ fonksiyonunun $(0, \infty)$ aralığındaki görüntüsü $(-\infty, \infty)$ aralığıdır. O halde (3.2.8) karakteristik denkleminin pozitif kökünün olmaması için gerek ve yeter şart P matrisinin reel özdeğere sahip olmaması gerekir. Böylece Teorem 2.5.1 gereğince (ii) ispatlanır. (iii), (iv), (v) ve (vi) benzer şekilde gösterilir. ■

Şimdi (3.2.2) fark denklem sisteminin tüm çözümlerinin salınımlılığı için aşağıdaki kriterleri vereceğiz.

Teorem 3.2.2. $i = 1, 2, \ldots, m$ için $P_i \in \mathbb{R}^{s \times s}$, $k_i \in \mathbb{Z}$ ve (3.2.4) şartı sağlansın. Bu durumda aşağıdaki ifadeler sağlanırsa, (3.2.2) fark denklem sisteminin her çözümü salınımlıdır.

(i_a) $\gamma \geq 1$ için $\sum_{i=1}^{m} \gamma^{-k_i} \mu(-P_i) < 0$ veya

(i_b) $\sup_{\gamma \in (1, \infty)} \left[\frac{1}{(\gamma-1)^3} \sum_{i=1}^{m} \gamma^{-k_i} \mu(-P_i)\right] < 1$ ve $\sum_{i=1}^{m} \mu(-P_i) < 0$;

(iii) $\inf_{\gamma \in (0,1)} \left[\frac{1}{(\gamma-1)^3} \sum_{i=1}^{m} \gamma^{-k_i} \mu(-P_i)\right] > 1.$

İspat. (3.2.1) fark denklem sisteminin salınımlı olmadığını kabul edelim. Bu durumda, Teorem 2.5.1 den (3.2.1) fark denklem sisteminin karakteristik denklemi

$$\det\left[(\lambda-1)^3 I + \sum_{i=1}^{m} \lambda^{-k_i} P_i\right] = 0$$

pozitif bir γ köküne sahiptir. Böylece sıfırdan farklı bir $\xi \in \mathbb{R}^s$ vektörü vardır ve

$\|\lambda\| = 1$ olduğunu kabul edebiliriz. Bu durumda

$$\left[(\gamma - 1)^3 I + \sum_{i=1}^{m} \gamma^{-k_i} P_i\right]\lambda = 0$$

olur. Buradan,

$$(\gamma - 1)^3 = \sum_{i=1}^{m} \gamma^{-k_i} \langle -P_i\lambda, \lambda\rangle$$

ve

$$(\gamma - 1)^3 \le \sum_{i=1}^{m} \gamma^{-k_i} \mu(-P_i) \tag{3.2.9}$$

elde ederiz. Eğer $\gamma \ge 1$ ise, bu durumda (3.2.9) eşitsizliğinden

$$0 \le \sum_{i=1}^{m} \gamma^{-k_i} \mu(-P_i)$$

elde edilir ve (i_a) ifadesi sağlanmaz. Eğer $\gamma > 1$ ise (3.2.9) eşitsizliğinden

$$1 \le \frac{1}{(\gamma - 1)^3} \sum_{i=1}^{m} \gamma^{-k_i} \mu(-P_i)$$

ve buradan da

$$1 \le \sup_{\gamma \in (1,\infty)} \left[\frac{1}{(\gamma - 1)^3} \sum_{i=1}^{m} \gamma^{-k_i} \mu(-P_i)\right]$$

elde edilir ve (i_b) ifadesinin ilk kısmı sağlanmaz. Eğer $\gamma = 1$ ise, bu durumda (3.2.9) eşitsizliğinden

$$0 \le \sum_{i=1}^{m} \mu(-P_i)$$

olur ve bu da (i_b) ifadesinin ikinci kısmı ile çelişir. Eğer $\gamma \in (0,1)$ ise, bu durumda (3.2.9) eşitsizliğinden

$$1 \ge \frac{1}{(\gamma - 1)^3} \sum_{i=1}^{m} \gamma^{-k_i} \mu(-P_i)$$

eşitsizliğini elde ederiz ve buradan da

$$1 \ge \inf_{\gamma \in (0,1)} \left[\frac{1}{(\gamma - 1)^3} \sum_{i=1}^{m} \gamma^{-k_i} \mu(-P_i)\right]$$

olur ve bu ise ifadesi ile çelişmektedir. Böylece ispat tamamlanır. ■

Teorem 3.2.3. $i = 1, 2, \ldots, m$ için $P_i \in R^{s\times s}$, $k_i \in Z$ ve (3.2.4) şartı sağlansın. Ayrıca $i = 1, 2, \ldots, m$ için

$$\mu(-P_i) \leq 0 \text{ ve } k_i \in \{0, 1, 2, \ldots\} \qquad (3.2.10)$$

sağlansın. Bu durumda aşağıdaki ifadelerden birisi sağlanırsa (3.2.2) fark denklem sisteminin her çözümü salınımlıdır;

(i) $\sum_{i=1}^{m} [-\mu(-P_i)] \dfrac{(k_i+3)^{k_i+3}}{k_i^{k_i}} > 3^3$;

(ii) $m \left(\prod_{i=1}^{m} |\mu(-P_i)| \right)^{\frac{1}{m}} \dfrac{(k+3)^{k+3}}{k^k} > 3^3$.

Burada $k = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} k_i$ ve $0^0 = 1$ alınmıştır.

İspat. (3.2.10) sağlansın. $\mu(-P_i) \leq 0$ hipotezinden ve ayrıca ya (i) den veya (ii) den Teorem 3.2.2 in (i_a) ifadesi sağlanır. Dolayısıyla (i) ve (ii) ifadelerinin Teorem 3.2.2 in (ii) ifadesini gerektirdiğini göstermemiz yeterlidir. Şimdi (i) sağlansın. Bu durumda

$$\sup_{\gamma \in (0,1)} \frac{1}{(\gamma - 1)^3 \gamma^{k_i}} = -\frac{1}{3^3} \frac{(k_i+3)^{k_i+3}}{k_i^{k_i}}$$

olduğundan $i = 1, 2, \ldots, m$ için

$$\frac{1}{(\gamma - 1)^3 \gamma^{k_i}} \mu(-P_i) \geq -\mu(-P_i) \frac{1}{3^3} \frac{(k_i+3)^{k_i+3}}{k_i^{k_i}}$$

olur ve $\gamma \in (0, 1)$ için

$$\frac{1}{(\gamma - 1)^3} \sum_{i=1}^{m} \gamma^{-k_i} \mu(-P_i) \geq \frac{1}{3^3} \sum_{i=1}^{m} [-\mu(-P_i)] \frac{(k_i+3)^{k_i+3}}{k_i^{k_i}} > 1 \qquad (3.2.11)$$

sağlanır ve buradan da Teorem 3.2.2 in (ii) ifadesinin sağlandığını görürüz.

Şimdi (ii) sağlansın. Aritmetik ortalama-geometrik ortalama eşitsizliği ve (3.2.11) eşitsizliğini kullanırsak $\gamma \in (0,1)$ için

$$\frac{1}{(\gamma-1)^3}\sum_{i=1}^{m}\gamma^{-k_i-1}(-P_i) = \frac{1}{(1-\gamma)^3}\sum_{i=1}^{m}[-\mu(-P_i)]\gamma^{-k_i} \geq m\left[\prod_{i=1}^{m}[-\mu(-P_i)]\right]^{\frac{1}{m}}\frac{1}{(1-\gamma)^{3+k}}$$

elde ederiz. Ayrıca

$$\inf_{\gamma\in(0,1)}\frac{1}{(1-\gamma)^{3+k}} = \frac{1}{3^3}\frac{(k+3)^{k+3}}{k^k}$$

olduğundan $\gamma \in (0,1)$ için

$$\frac{1}{(\gamma-1)^3}\sum_{i=1}^{m}\gamma^{-k_i-1}(-P_i) \geq m\left[\prod_{i=1}^{m}[-\mu(-P_i)]\right]^{\frac{1}{m}}\frac{1}{3^3}\frac{(k+3)^{k+3}}{k^k} > 1$$

elde ederiz ve Teorem 3.2.2 in (ii) ifadesi sağlanır. Dolayısıyla ispat tamamlanır. ■

4. KEYFİ MERTEBEDEN LİNEER OTONOM FARK DENKLEM SİSTEMLERİNİN SALINIMLILIĞI

Bu bölümde keyfi mertebeden lineer, otonom, fark denklem sistemlerinin tüm çözümlerinin salınımlılık durumları incelenecek ve bazı sonuçlar elde edilecektir. Burada elde edilen sonuçlar P matrislerinin özdeğerleri ve logaritmik normları kullanılarak verilecektir.

Bu bölümün ilk kısmında

$$\Delta^r x_n + P x_{n-k} = 0\,; \quad n = 0, 1, 2, \dots \tag{4.1}$$

r inci mertebeden, lineer, otonom fark denklem sisteminin tüm çözümlerinin salınımlı olması için gerek ve yeter şartlar verilecektir. Burada $P \in R^{s \times s}$, $k \in Z$, $r \in N$, $\Delta x_n = x_{n+1} - x_n$ ve r inci mertebeden ileri fark operatörü

$$\Delta^r x_n = \sum_{i=0}^{r} (-1)^{r-i} \binom{r}{i} x_{n+i}\,; \quad r \geq 1$$

dir. Bu bölümün ikinci kısmında ise,

$$\Delta^r x_n + \sum_{i=1}^{m} P_i x_{n-k_i} = 0\,; \quad n = 0, 1, 2, \dots \tag{4.2}$$

r inci mertebeden, lineer, otonom fark denklem sisteminin tüm çözümlerinin salınımlı olması için yeter şartlar verilecektir. Burada $i = 1, 2, \dots, m$ için $P_i \in R^{s \times s}$, $k_i \in Z$ ve $r \in N$ dir.

(4.1) fark denklem sisteminin bir çözümü $n \geq -k$ için tanımlı ve $n \geq 0$ için (4.1) fark denklem sistemini sağlayan R^s de bir $\{x_n\}$ dizisidir.

Şimdi $k = \max\{0, k_1, k_2, \dots, k_m\}$ ve $l = \max\{r, -k_1, -k_2, \dots, -k_m\}$ olsun. Bu durumda (4.2) fark denklem sistemini

$$\Delta^r x_n + \sum_{j=-k}^{l} Q_j x_{n+j} = 0; \quad n = 0, 1, 2, \dots \tag{4.3}$$

formunda yazabiliriz. Bu durumda (4.3) fark denklem sistemi $(k+l)$ inci mertebeden bir fark denklem sistemidir. Burada eğer $k \geq 0$ ve $l = r$ ise (4.3) fark denklem sistemine **gecikmeli** fark denklem sistemi, $k = 0$ ve $l \geq r+1$ ise (4.3) fark denklem sistemine **ileri** fark denklem sistemi ve $k \geq r$ ve $l \geq r+1$ ise (4.3) fark denklem sistemine **karışık tipten** fark denklem sistemidir.

(4.3) fark denklem sisteminin çözümlerinin varlığı ve tekliği için

$$\left.\begin{array}{c} \text{eğer } 0 \leq k \leq r \text{ ve } l = r \text{ ise } \det(Q_r + I) \neq 0 \\ \text{eğer } k = 0 \text{ ve } l \geq r+1 \text{ ise } \det Q_l \neq 0 \end{array}\right\} \tag{4.4}$$

şartı sağlansın. Bu durumda, R^s de $a_{-k}, \dots, a_{l-1}$, $(k+l)$ tane başlangıç şartı verilirse, (4.3) fark denklem sistemi, (4.4) şartı altında

$$x_i = a_i, \quad i = -k, \dots, l-1$$

başlangıç şartlarını sağlayan, $n = -k, \dots, 0, 1, \dots$ için bir tek $\{x_n\}$ çözümüne sahiptir.

4.1. Salınımlılık Için Gerek ve Yeter Şartlar

Bu kısımda (4.1) fark denklem sisteminin tüm çözümlerinin salınımlı olması için gerek ve yeter şartlar verilecektir. Burada elde edilen sonuçlar k terimleri ve P matrislerinin özdeğerleri kullanılarak verilecektir.

Teorem 4.1.1. $P \in R^{s \times s}$, $k \in Z$, r çift doğal sayı ve (4.4) şartı sağlansın. Bu durumda (4.1) fark denklem sisteminin bütün çözümlerinin salınımlı olması için gerek ve yeter P matrisinin $(-1, 0]$ aralığında özdeğere sahip olmamasıdır.

Ispat. (i) $k = 0$ olsun. Bu durumda (4.1) fark denklem sisteminin karakteristik denklemi;

$$\det[(\lambda - 1)^r + P] = 0 \tag{4.1.1}$$

olur ve bu denklemide

$$\det[-(\lambda - 1)^r - P] = 0$$

şeklinde yazabiliriz. Eğer $v(\lambda) = -(\lambda - 1)^r$ alırsak $v(\lambda)$ fonksiyonu $(0; \infty)$ aralığında sürekli bir fonksiyondur. $\lambda > 0$ için $v(\lambda)$ fonksiyonunun görüntü kümesini inceleyelim.

$$\lim_{\lambda \to 0^+} v(\lambda) = -1; \; v(1) = 0 \quad \text{ve} \quad \lim_{\lambda \to \infty} v(\lambda) = -\infty$$

olduğundan $v(\lambda)$ fonksiyonunun $(0; \infty)$ aralığındaki görüntüsü $(-\infty; 0]$ aralığıdır. O halde (4.1.1) karakteristik denkleminin pozitif kökünün olmaması için gerek ve yeter şart P matrisinin $(-\infty; 0]$ aralığında özdeğere sahip olmaması gerekir. Böylece Teorem 2.5.1 gereğince (i) ispatlanır. ■

(ii) $k \in \{-r+1; -r+2; \dots; -2; -1\}$ olsun. Bu durumda (4.1) fark denklem sisteminin karakteristik denklemi;

$$\det\left[(\lambda - 1)^r + P\lambda^{-k}\right] = 0 \tag{4.1.2}$$

ve

$$\det\left[-\lambda^k(\lambda - 1)^r - P\right] = 0$$

şeklindedir. Eğer $v(\lambda) = -\lambda^k(\lambda - 1)^r$ alırsak, $v(\lambda)$ fonksiyonu $(0; \infty)$ aralığında sürekli bir fonksiyondur. $\lambda > 0$ için $v(\lambda)$ fonksiyonunun görüntü kümesini incelersek

$$v(1) = 0; \quad \lim_{\lambda \to 0^+} v(\lambda) = -\infty \quad \text{ve} \quad \lim_{\lambda \to \infty} v(\lambda) = -\infty$$

olur. Dolayısıyla $v(\lambda)$ fonksiyonunun $(0; \infty)$ aralığındaki görüntüsü $(-\infty; 0]$ aralığıdır. O halde (4.1.2) karakteristik denkleminin pozitif kökünün olmaması için gerek ve yeter şart P matrisinin $(-\infty; 0]$ aralığında özdeğere sahip olmaması gerekir. Böylece Teorem 2.5.1 uyarınca (ii) ispatlanmış olur. ■

(iii) $k = -r$ olsun. Bu durumda (4.1) fark denklem sisteminin karakteristik denklemi (4.1.2) dir. Burada da $v(\lambda) = -\lambda^k(\lambda - 1)^r$ alırsak, $\lambda > 0$ için $v(\lambda)$ fonksiyonunun görüntü kümesini incelersek;

$$v(1) = 0; \quad \lim_{\lambda \to 0^+} v(\lambda) = -1 \quad \text{ve} \quad \lim_{\lambda \to \infty} v(\lambda) = -1$$

olduğundan $v(\lambda)$ fonksiyonunun $(0; \infty)$ aralığındaki görüntüsü $(-1; 0]$ aralığıdır.

O halde (4.1.2) karakteristik denkleminin pozitif kökünün olmaması için gerek ve yeter şart P matrisinin $(-\infty;0]$ aralığında özdeğere sahip olmaması gerekir. Böylece Teorem 2.5.1 den (iii) ispatlanır. ■

(iv) $k \geq 1$ olsun. Bu durumda (4.1) fark denklem sisteminin karakteristik denklemi (4.1.2) dir. $v(\lambda) = -\lambda^k(\lambda - 1)^r$ alıp, $\lambda > 0$ için $v(\lambda)$ fonksiyonunun görüntü kümesini incelersek;

$$v'\left(\frac{k}{k+r}\right) = 0$$

ve

$$v''\left(\frac{k}{k+r}\right) > 0$$

olduğundan $\lambda = \dfrac{k}{k+r}$ noktasında $v\left(\dfrac{k}{k+r}\right) = -r^r\dfrac{k^k}{(k+r)^{k+r}}$ fonksiyonu yerel minimum noktasına sahiptir. Ayrıca

$$v(1) = 0\ ; \quad \lim_{\lambda \to 0^+} v(\lambda) = 0 \text{ ve } \lim_{\lambda \to \infty} v(\lambda) = -\infty$$

olur. Dolayısıyla $v(\lambda)$ fonksiyonunun $(0;\infty)$ aralığındaki görüntüsü $(-\infty;0]$ aralığıdır. O halde (4.1.2) karakteristik denkleminin pozitif kökünün olmaması için gerek ve yeter şart P matrisinin $(-\infty;0]$ aralığında özdeğere sahip olmaması gerekir. Böylece Teorem 2.5.1 gereğince (iv) ispatlanır. ■

(v) $k \leq -r - 1$ olsun. Bu durumda (4.1) fark denklem sisteminin karakteristik denklemi yine (4.1.2) dir. Tekrar $v(\lambda) = -\lambda^k(\lambda - 1)^r$ alıp, $\lambda > 0$ için $v(\lambda)$ fonksiyonunun görüntü kümesini incelersek;

$$v'\left(\frac{k}{k+r}\right) = 0$$

ve

$$v''\left(\frac{k}{k+r}\right) < 0$$

olduğundan $\lambda = \dfrac{k}{k+r}$ noktasında $v\left(\dfrac{k}{k+r}\right) = -r^r\dfrac{k^k}{(k+r)^{k+r}}$ fonksiyonu yerel maksimum noktasına sahiptir. Ayrıca

$$v(1) = 0\ ; \quad \lim_{\lambda \to 0^+} v(\lambda) = -\infty \text{ ve } \lim_{\lambda \to \infty} v(\lambda) = 0$$

olduğundan $v(\lambda)$ fonksiyonunun $(0;\infty)$ aralığındaki görüntüsü $(-\infty;0]$ aralığıdır. O halde (4.1.2) karakteristik denkleminin pozitif kökünün olmaması için gerek ve yeter şart P matrisinin $(-\infty;0]$ aralığında özdeğere sahip olmaması gerekir. Böylece Teorem 2.5.1 gereğince (v) ispatlanır. ■

Teorem 4.1.2. $P \in R^{s\times s}$; $k \in Z$, r tek doğal sayı ve (4.4) şartı sağlansın. Bu durumda (4.1) fark denklem sisteminin tüm çözümlerinin salınımlı olması için gerek ve yeter şart aşağıdaki ifadelerden birinin sağlanmasıdır.

(i) $k = 0$ ise P, $(-\infty;1]$ aralığında özdeğere sahip değildir,

(ii) $k \in \{-r+1; -r+2; \ldots; -2; -1\}$ ise P, $(-\infty;\infty)$ aralığında özdeğere sahip değildir,

(iii) $k = -r$ ise P; $[-1;\infty)$ aralığında özdeğere sahip değildir,

(iv) $k \geq 1$ ise P, $(-\infty; r^r\frac{k^k}{(k+r)^{k+r}}]$ aralığında özdeğere sahip değildir,

(v) $k \leq -r-1$ ise P, $[r^r\frac{k^k}{(k+r)^{k+r}};\infty)$ aralığında özdeğere sahip değildir.

İspat. (i) $k = 0$ olsun. Bu durumda (4.1) fark denklem sisteminin karakteristik denklemi;

$$\det[(\lambda-1)^r + P] = 0$$

ve

$$\det[-(\lambda-1)^r - P] = 0$$

şeklinde yazabiliriz. Eğer $v(\lambda) = -(\lambda-1)^r$ alırsak $v(\lambda)$ fonksiyonu $(0;\infty)$ aralığında sürekli bir fonksiyondur. $\lambda > 0$ için $v(\lambda)$ fonksiyonunun görüntü kümesini inceleyelim.

$$\lim_{\lambda\to 0^+} v(\lambda) = 1 \quad \text{ve} \quad \lim_{\lambda\to\infty} v(\lambda) = -\infty$$

olduğundan $v(\lambda)$ fonksiyonunun $(0;\infty)$ aralığındaki görüntüsü $(-\infty;1]$ aralığıdır. O halde (4.1.1) karakteristik denkleminin pozitif kökünün olmaması için gerek ve yeter şart P matrisinin $(-\infty;1]$ aralığında özdeğere sahip olmaması gerekir. Böylece Teorem 2.5.1 den (i) ispatlanır. ■

(ii) $k \in \{-r+1, -r+2, \dots, -2, -1\}$ olsun. Bu durumda (4.1) fark denklem sisteminin karakteristik denklemi;

$$\det\left[(\lambda - 1)^r + P\lambda^{-k}\right] = 0$$

ve

$$\det\left[-\lambda^k(\lambda - 1)^r - P\right] = 0$$

şeklindedir. Eğer $v(\lambda) = -\lambda^k(\lambda - 1)^r$ alırsak, $v(\lambda)$ fonksiyonu $(0, \infty)$ aralığında sürekli bir fonksiyondur. $\lambda > 0$ için $v(\lambda)$ fonksiyonunun görüntü kümesini incelersek

$$\lim_{\lambda \to 0^+} v(\lambda) = \infty \quad \text{ve} \quad \lim_{\lambda \to \infty} v(\lambda) = -\infty$$

olduğundan $v(\lambda)$ fonksiyonunun $(0, \infty)$ aralığındaki görüntüsü $(-\infty, \infty)$ aralığıdır. O halde (4.1.2) karakteristik denkleminin pozitif kökünün olmaması için gerek ve yeter şart P matrisinin reel özdeğere sahip olmaması gerekir. Böylece Teorem 2.5.1 gereğince (ii) ispatlanır. ■

(iii) $k = -r$ olsun. Bu durumda (4.1) fark denklem sisteminin karakteristik denklemi (4.1.2) dir. Burada da $v(\lambda) = -\lambda^k(\lambda - 1)^r$ alırsak, $\lambda > 0$ için $v(\lambda)$ fonksiyonunun görüntü kümesini incelersek;

$$\lim_{\lambda \to 0^+} v(\lambda) = \infty \quad \text{ve} \quad \lim_{\lambda \to \infty} v(\lambda) = -1$$

olduğundan $v(\lambda)$ fonksiyonunun $(0, \infty)$ aralığındaki görüntüsü $[-1, \infty)$ aralığıdır. O halde (4.1.2) karakteristik denkleminin pozitif kökünün olmaması için gerek ve yeter şart P matrisinin $[-1, \infty)$ aralığında özdeğere sahip olmaması gerekir. Böylece Teorem 2.5.1 gereğince (iii) ispatlanır. ■

(iv) $k \geq 1$ olsun. Bu durumda (4.1) fark denklem sisteminin karakteristik denklemi (4.1.2) dür. $v(\lambda) = -\lambda^k(\lambda - 1)^r$ alırsak, $\lambda > 0$ için $v(\lambda)$ fonksiyonunun görüntü kümesini incelersek;

$$v'\left(\frac{k}{k+r}\right) = 0$$

ve

$$v''\left(\frac{k}{k+r}\right) < 0$$

olduğundan $\lambda = \frac{k}{k+r}$ noktasında $v\left(\frac{k}{k+r}\right) = r^r \frac{k^k}{(k+r)^{k+r}}$ fonksiyonu yerel maksimum noktasına sahiptir. Dolayısıyla

$$\max_{\lambda>0} v(\lambda) = r^r \frac{k^k}{(k+r)^{k+r}}; \quad \lim_{\lambda \to 0^+} v(\lambda) = 0 \text{ ve } \lim_{\lambda \to \infty} v(\lambda) = -\infty$$

olur. Dolayısıyla $v(\lambda)$ fonksiyonunun $(0, \infty)$ aralığındaki görüntüsü $\left(-\infty, r^r \frac{k^k}{(k+r)^{k+r}}\right]$ aralığıdır. O halde (4.1.2) karakteristik denkleminin pozitif kökünün olmaması için gerek ve yeter şart P matrisinin $\left(-\infty, r^r \frac{k^k}{(k+r)^{k+r}}\right]$ aralığında özdeğere sahip olmaması gerekir. Böylece Teorem 2.5.1 uyarınca (iv) ispatlanmış olur. ■

(v) $k \leq -r-1$ olsun. Bu durumda (4.1) fark denklem sisteminin karakteristik denklemi yine (4.1.2) dir. Tekrar $v(\lambda) = -\lambda^k(\lambda-1)^r$ alıp, $\lambda > 0$ için $v(\lambda)$ fonksiyonunun görüntü kümesini incelersek;

$$v'\left(\frac{k}{k+r}\right) = 0$$

ve

$$v''\left(\frac{k}{k+r}\right) > 0$$

olduğundan $\lambda = \frac{k}{k+r}$ noktasında $v\left(\frac{k}{k+r}\right) = r^r \frac{k^k}{(k+r)^{k+r}}$ fonksiyonu yerel minimum noktasına sahiptir. Ayrıca

$$\min_{\lambda>0} v(\lambda) = r^r \frac{k^k}{(k+r)^{k+r}}; \quad \lim_{\lambda \to 0^+} v(\lambda) = \infty \text{ ve } \lim_{\lambda \to \infty} v(\lambda) = 0$$

olduğundan $v(\lambda)$ fonksiyonunun $(0, \infty)$ aralığındaki görüntüsü $\left[r^r \frac{k^k}{(k+r)^{k+r}}, \infty\right)$ aralığıdır. O halde (4.1.2) karakteristik denkleminin pozitif kökünün olmaması için gerek ve yeter şart P matrisinin $\left[r^r \frac{k^k}{(k+r)^{k+r}}, \infty\right)$ aralığında özdeğere sahip olmaması gerekir. Böylece Teorem 2.5.1 gereğince (v) ispatlanır. ■

Uyarı 4.1.1. Teorem 4.1.2 de $r = 1$ alındığında Chuanxi vd. 1990 yılında yapmış oldukları çalışmadaki Teorem 1 elde edilir.

4.2. Salınımlılık İçin Yeter Şartlar

Bu kısımda (4.2) fark denklem sisteminin tüm çözümlerinin salınımlılığı için yeter şartlar vereceğiz. Burada şartları, $i = 1, 2, \ldots, m$ için k_i terimleri ve $P_i \in \mathbb{R}^{s \times s}$ matrislerinin logaritmik normları yardımıyla vereceğiz.

Teorem 4.2.1. $i = 1, 2, \ldots, m$ için $P_i \in \mathbb{R}^{s \times s}$, $k_i \in \mathbb{Z}$, r çift doğal sayı ve (4.4) şartı sağlansın. Bu durumda aşağıdaki ifadeler sağlanırsa, (4.2) fark denklem sisteminin her çözümü salınımlıdır.

(i_a) $\gamma > 0$ için $\sum_{i=1}^{m} \gamma^{-k_i} \mu(-P_i) < 0$ veya

(i_b) $\gamma \neq 1$ için $\sup_{\gamma \in (0,\infty)} \left\{ \dfrac{1}{(\gamma - 1)^r} \sum_{i=1}^{m} \gamma^{-k_i} \mu(-P_i) \right\} < 1$ ve $\sum_{i=1}^{m} \mu(-P_i) < 0$.

İspat. (4.2) fark denklem sisteminin salınımlı olmadığını kabul edelim. Bu durumda, Teorem 2.5.1 den (4.2) fark denklem sisteminin karakteristik denklemi

$$\det \left[(\lambda - 1)^r I + \sum_{i=1}^{m} \lambda^{-k_i} P_i \right] = 0$$

pozitif bir γ köküne sahiptir. Böylece sıfırdan farklı bir $\xi \in \mathbb{R}^r$ vektörü vardır ve $\|\xi\| = 1$ olduğunu kabul edebiliriz. Bu durumda

$$\left[(\gamma - 1)^r I + \sum_{i=1}^{m} \gamma^{-k_i} P_i \right] \xi = 0$$

olur. Buradan,

$$(\gamma - 1)^r = \sum_{i=1}^{m} \gamma^{-k_i} \langle -P_i \xi, \xi \rangle$$

ve

$$(\gamma - 1)^r \leq \sum_{i=1}^{m} \gamma^{-k_i} \mu(-P_i) \qquad (4.2.1)$$

elde ederiz. (4.2.1) eşitsizliğinden (i_a) ifadesi sağlanmaz. Eğer $\gamma \in (0, \infty)$; $\gamma \neq 1$ ise, bu durumda (4.2.1) eşitsizliğinden

$$1 \leq \frac{1}{(\gamma - 1)^r} \sum_{i=1}^{m} \gamma^{-k_i} \mu(-P_i)$$

eşitsizliğini elde ederiz ve buradan da

$$1 \le \sup_{\gamma \in (0,\infty)} \left[\frac{1}{(\gamma - 1)^r} \sum_{i=1}^{m} \gamma^{-k_i} \mu(-P_i) \right]$$

olur. Bu ise Teorem 4.2.1 in (i_b) ifadesinin ilk kısmı ile çelişmektedir. Eğer $\gamma = 1$ ise, bu durumda (4.2.1) eşitsizliğinden

$$0 \le \sum_{i=1}^{m} \mu(-P_i)$$

elde edilir ve bu da Teorem 4.2.1 in (i_b) ifadesinin ikinci kısmı ile çelişmektedir. Böylece ispat tamamlanır. ■

Teorem 4.2.2. $i = 1, 2, \ldots, m$ için $P_i \in R^{s \times s}$, $k_i \in Z$, r tek doğal sayı ve (4.4) şartı sağlansın. Bu durumda aşağıdaki ifadeler sağlanırsa, (4.2) fark denklem sisteminin her çözümü salınımlıdır.

(i_a) $\gamma > 1$ için $\sum_{i=1}^{m} \gamma^{-k_i} \mu(-P_i) < 0$ veya

(i_b) $\sup_{\gamma \in (1,\infty)} \left(\frac{1}{(\gamma-1)^r} \sum_{i=1}^{m} \gamma^{-k_i} \mu(-P_i) \right) < 1$ ve $\sum_{i=1}^{m} \mu(-P_i) < 0$;

(ii) $\inf_{\gamma \in (0,1)} \left(\frac{1}{(\gamma-1)^r} \sum_{i=1}^{m} \gamma^{-k_i} \mu(-P_i) \right) > 1$.

İspat. (4.2) fark denklem sisteminin salınımlı olmadığını kabul edelim. Bu durumda, Teorem 2.5.1 den (4.2) fark denklem sisteminin karakteristik denklemi

$$\det \left[(\lambda - 1)^r I + \sum_{i=1}^{m} \lambda^{-k_i} P_i \right] = 0$$

pozitif bir γ köküne sahiptir. Böylece sıfırdan farklı bir $\xi \in R^s$ vektörü vardır ve $\|\xi\| = 1$ olduğunu kabul edebiliriz. Bu durumda

$$\left[(\gamma - 1)^r I + \sum_{i=1}^{m} \gamma^{-k_i} P_i \right] \xi = 0$$

olur. Buradan,

$$(\gamma - 1)^r = \sum_{i=1}^{m} \gamma^{-k_i}(-P_i\xi;\xi)$$

ve

$$(\gamma - 1)^r \leq \sum_{i=1}^{m} \gamma^{-k_i-1}\mu(-P_i)$$

olur ve (4.2.1) eşitsizliğinden (i_a) ifadesi sağlanmaz. Eğer $\gamma \in (1;\infty)$ ise, bu durumda (4.2.1) eşitsizliğinden

$$1 \leq \frac{1}{(\gamma - 1)^r}\sum_{i=1}^{m} \gamma^{-k_i-1}\mu(-P_i)$$

elde edilir ve buradan da

$$1 \leq \sup_{\gamma\in(1;\infty)}\left[\frac{1}{(\gamma - 1)^r}\sum_{i=1}^{m} \gamma^{-k_i-1}\mu(-P_i)\right]$$

elde edilir ve bu eşitsizlikte (i_b) ifadesinin ilk kısmı ile çelişir. Eğer $\gamma = 1$ ise (4.2.1) eşitsizliğinden

$$0 \leq \sum_{i=1}^{m} \mu(-P_i)$$

elde edilir ve (i_b) ifadesinin ikinci kısmı sağlanmaz. Eğer $\gamma \in (0;1)$ ise, bu durumda (4.2.1) eşitsizliğinden

$$1 \geq \frac{1}{(\gamma - 1)^r}\sum_{i=1}^{m} \gamma^{-k_i-1}\mu(-P_i)$$

eşitsizliğini elde ederiz ve buradan da

$$1 \geq \inf_{\gamma\in(0;1)}\left[\frac{1}{(\gamma - 1)^r}\sum_{i=1}^{m} \gamma^{-k_i-1}\mu(-P_i)\right]$$

olur. Bu ise (ii) ifadesi ile çelişmektedir. Böylece ispat tamamlanır. ■

Teorem 4.2.3. $i = 1;2;\dots;m$ için $P_i \in R^{s\times s}$, $k_i \in Z$, r tek doğal sayı ve (4.4) şartı sağlansın. Ayrıca $i = 1;2;\dots;m$ için

$$\mu(-P_i) \leq 0 \text{ ve } k_i \in \{0;1;2;\dots\} \tag{4.2.2}$$

sağlansın. Bu durumda aşağıdaki ifadelerden birisi sağlanırsa (4.2) fark denklem sisteminin her çözümü salınımlıdır;

(i) $\sum_{i=1}^{m}[-\mu(-P_i)]\dfrac{(k_i+r)^{k_i+r}}{k_i^{k_i}} > r^r;$

(ii) $m\left(\prod_{i=1}^{m}|\mu(-P_i)|\right)^{\frac{1}{m}}\dfrac{(k+r)^{k+r}}{k^k} > r^r.$

Burada $k = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} k_i$ ve $0^0 = 1$ alınmıştır.

İspat. (4.2.2) sağlansın. $\mu(-P_i) \leq 0$ hipotezinden ve ayrıca ya (i) den veya (ii) den Teorem 4.2.2 in (i_a) ifadesi sağlanır. Dolayısıyla (i) ve (ii) ifadelerinin Teorem 4.2.2 in (ii) ifadesini gerektirdiğini göstermemiz yeterlidir. Şimdi (i) sağlansın. Bu durumda

$$\sup_{\gamma\in(0,1)}\frac{1}{(\gamma-1)^r\gamma^{k_i}} = -\frac{1}{r^r}\frac{(k_i+r)^{k_i+r}}{k_i^{k_i}}$$

olduğundan $i = 1, 2, \ldots, m$ için

$$\frac{1}{(\gamma-1)^r\gamma^{k_i}}\mu(-P_i) \geq -\mu(-P_i)\frac{1}{r^r}\frac{(k_i+r)^{k_i+r}}{k_i^{k_i}}$$

olur ve $\gamma \in (0,1)$ için

$$\frac{1}{(\gamma-1)^r}\sum_{i=1}^{m}\gamma^{-k_i}\mu(-P_i) \geq \frac{1}{r^r}\sum_{i=1}^{m}[-\mu(-P_i)]\frac{(k_i+r)^{k_i+r}}{k_i^{k_i}} > 1 \qquad (4.2.3)$$

sağlanır ve buradan da Teorem 4.2.2 nin (ii) ifadesinin sağlandığını görürüz.

Şimdi (ii) sağlansın. Aritmetik ortalama-geometrik ortalama eşitsizliği ve (4.2.3) eşitsizliğini kullanırsak $\gamma \in (0,1)$ için

$$\begin{aligned}\frac{1}{(\gamma-1)^r}\sum_{i=1}^{m}\gamma^{-k_i}\mu(-P_i) &= \frac{1}{(1-\gamma)^r}\sum_{i=1}^{m}[-\mu(-P_i)]\gamma^{-k_i}\\ &\geq m\left[\prod_{i=1}^{m}[-\mu(-P_i)]\right]^{\frac{1}{m}}\frac{1}{(1-\gamma)^r\gamma^k}\end{aligned}$$

elde ederiz. Ayrıca

$$\inf_{\gamma\in(0,1)}\frac{1}{(1-\gamma)^r\gamma^k} = \frac{1}{r^r}\frac{(k+r)^{k+r}}{k^k}$$

olduğundan $\gamma \in (0,1)$ için

$$\frac{1}{(\gamma-1)^r}\sum_{i=1}^{m}\gamma^{-k_i-1}(-P_i) \geq m\left[\prod_{i=1}^{m}[-{}^{1}(-P_i)]\right]^{\frac{1}{m}}\frac{1}{r^r}\frac{(k+r)^{k+r}}{k^k} > 1$$

elde ederiz ve Teorem 4.2.2 nin (ii) ifadesi sağlanır. Dolayısıyla ispat tamamlanır. ■

Tezimizi, otonom olmayan sistemler için salınımlılığı incelemeye başlangıç oluşturabilecek birinci mertebeden iki denklemi inceleyerek tamamlamak istiyoruz.

$$x_{n+1} - x_n + p_n x_{n-k} = 0; \quad n = 0,1,2,\ldots \tag{4.2.4}$$

Burada $k \in \{\ldots,-3,-2\}$ ve p_n reel terimli bir dizidir.

$$x_{n+1} - x_n + \sum_{i=1}^{m} p_{in} x_{n-k_i} = 0; \quad n = 0,1,2,\ldots \tag{4.2.5}$$

Burada $i = 1,2,\ldots,m$ için $k_i \in \{\ldots,-3,-2,-1\}$ ve $p_n \leq 0$ dır.

Lemma 4.2.1. $k \in \{\ldots,-3,-2\}$ olsun. Eğer

$$\limsup_{n\to\infty} p_n = p < \frac{k^k}{(k+1)^{k+1}} \tag{4.2.6}$$

sağlanırsa, bu durumda;

(i) aşağıdaki fark eşitsizliği belli bir yerden sonra pozitif çözüme sahip değildir

$$x_{n+1} - x_n + p_n x_{n-k} \geq 0. \tag{4.2.7}$$

(ii) aşağıdaki fark eşitsizliği belli bir yerden sonra negatif çözüme sahip değildir

$$x_{n+1} - x_n + p_n x_{n-k} \leq 0. \tag{4.2.8}$$

Ispat. (i) Aksini kabul edelim. Yani (4.2.7) eşitsizliği belli bir yerden sonra pozitif çözüme sahiptir. Bu durumda bir $N_1 > 0$ var ve her $n \geq N_1$ için $x_n > 0$ dır.

Ayrıca (4.2.6) eşitsizliğinden bir $N_2 > 0$ var ve her $n \geq N_2$ için $p_n < 0$ dır. $N = \max\{N_1 - k; N_2\}$ olsun. (4.2.6) ve (4.2.7) eşitsizliğini kullanırsak her $n \geq N$ için

$$x_{n+1} - x_n \geq -p_n x_{n-k} \geq 0$$

dır. Dolayısıyla her $n \geq N$ için x_n azalmayandır. Şimdi (4.2.7) eşitsizliğini x_n ile bölersek her $n \geq N$ için

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} - 1 + p_n \frac{x_{n-k}}{x_n} \geq 0$$

olur. Bu eşitsizliğide

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} - 1 + p_n \left\{ \frac{x_{n-k}}{x_{n-k-1}} \frac{x_{n-k-1}}{x_{n-k-2}} \cdots \frac{x_{n+1}}{x_n} \right\} \geq 0 \qquad (4.2.9)$$

şeklinde yazabiliriz. $z_n = \frac{x_{n+1}}{x_n}$ olsun, bu durumda $n \geq N$ için $z_n \geq 1$ dir. (4.2.9) eşitsizliğinden

$$z_n \geq 1 - p_n \left(z_{n-k-1} z_{n-k-2} \cdots z_n\right) \qquad (4.2.10)$$

yazabiliriz. Şimdi $\liminf_{n \to \infty} z_n = q$ alalım. Kolayca görülür ki $q \geq 1$ dir. (4.2.10) eşitsizliğinin her iki tarafından $n \to \infty$ iken lim inf alırsak

$$\begin{aligned} q &\geq 1 + \liminf_{n \to \infty} \{(-p_n) z_{n-k-1} z_{n-k-2} \cdots z_n\} \\ &\geq 1 + \liminf_{n \to \infty} (-p_n) \liminf_{n \to \infty} z_{n-k-1} \cdots \liminf_{n \to \infty} z_n \\ &= 1 - \limsup_{n \to \infty} p_n \liminf_{n \to \infty} z_{n-k-1} \cdots \liminf_{n \to \infty} z_n \\ &= 1 - p q^{-k} \end{aligned}$$

elde ederiz. Buradan da

$$p \geq (1 - q) q^k \qquad (4.2.11)$$

eşitsizliğini elde ederiz. Şimdi f fonksiyonunu $f(q) = (1 - q)q^k$ şeklinde alalım. Kolayca gözükür ki $f'(\frac{k}{k+1}) = 0$ ve $f''(\frac{k}{k+1}) < 0$ dır. Böylece (4.2.11) eşitsizliğinden

$$p \geq f\left(\frac{k}{k+1}\right) = \frac{k^k}{(k+1)^{k+1}}$$

buluruz. Bu da (4.2.6) eşitsizliği ile çelişir. Dolayısıyla ispat tamamlanır. ■

(ii) (i) deki ispat yöntemi kullanılarak (4.2.6) şartı altında, (4.2.8) eşitsizliğinin belli bir yerden sonra negatif çözüme sahip olmadığı gösterilir. ■

Teorem 4.2.4. $k \in \{\ldots, -3, -2\}$ olsun. Eğer (4.2.6) şartı sağlanırsa (4.2.4) fark denkleminin her çözümü salınımlıdır.

Ispat. Lemma 4.2.1 in (i) ve (ii) ifadelerini birleştirirsek, (4.2.6) şartı altında (4.2.4) fark denkleminin her çözümünün salınımlı olduğunu kolayca görürüz. ■

Uyarı 4.2.1. (4.2.4) fark denkleminde $p_n = p$ alınırsa Teorem 2.5.2 elde edilir.

Uyarı 4.2.2. (4.2.4) fark denkleminde $k \in \mathbb{N}$ alınırsa, (4.2.4) fark denkleminin her çözümünün salınımlı olması için yeter şart

$$\liminf_{n \to \infty} p_n > \frac{k^k}{(k+1)^{k+1}}$$

olmasıdır (Erbe ve Zhang 1989).

Lemma 4.2.2. $i = 1, 2, \ldots, m$ için $k_i \in \{\ldots, -3, -2, -1\}$ ve $p_{in} \leq 0$ olsun. Eğer $\limsup_{n \to \infty} p_{in} = p_i$ ve

$$\sum_{i=1}^{m} p_i \frac{(k_i+1)^{k_i+1}}{k_i^{k_i}} > 1 \tag{4.2.12}$$

sağlanırsa, bu durumda;

(i) aşağıdaki fark eşitsizliği belli bir yerden sonra pozitif çözüme sahip değildir

$$x_{n+1} - x_n + \sum_{i=1}^{m} p_{in} x_{n-k_i} \geq 0. \tag{4.2.13}$$

(ii) aşağıdaki fark eşitsizliği belli bir yerden sonra negatif çözüme sahip değildir

$$x_{n+1} - x_n + \sum_{i=1}^{m} p_{in} x_{n-k_i} \leq 0. \tag{4.2.14}$$

Ispat. (i) Aksini kabul edelim. Yani (4.2.13) eşitsizliği belli bir yerden sonra pozitif çözüme sahiptir. Bu durumda bir $N_1 > 0$ var ve her $n \geq N_1$ için $x_n > 0$ dır. Bu durumda (4.2.13) eşitsizliğinden x_n azalmayandır. $N = \max\{N_1, N_1 - k_1, N_1 - k_2, \ldots, N_1 - k_m\}$ ve $z_n = \frac{x_{n+1}}{x_n}$ olsun, bu durumda $n \geq N$ için $z_n \geq 1$ dir. Şimdi (4.2.13) eşitsizliğini x_n ile bölersek

$$z_n \geq 1 - \sum_{i=1} p_{in}\left(z_{n-k_i-1} z_{n-k_i-2} \ldots z_n\right) \tag{4.2.15}$$

yazabiliriz. Şimdi $\liminf_{n\to\infty} z_n = q$ alalım. Kolayca görülür ki $q \geq 1$ dir. (4.2.15) eşitsizliğinin her iki tarafından $n \to \infty$ iken $\liminf$ alırsak

$$\begin{aligned} q &\geq 1 + \sum_{i=1} \liminf_{n\to\infty}(-p_{in}) \liminf_{n\to\infty} z_{n-k_i-1} \ldots \liminf_{n\to\infty} z_n \\ &= 1 - \sum_{i=1} \limsup_{n\to\infty} p_{in} \liminf_{n\to\infty} z_{n-k_i-1} \ldots \liminf_{n\to\infty} z_n \\ &= 1 - \sum_{i=1} p_i q^{-k_i} \end{aligned}$$

elde ederiz. Buradan da

$$\sum_{i=1} p_i q^{-k_i} \geq (1-q)$$

eşitsizliğini ve $q \neq 1$ için

$$\sum_{i=1} p_i \frac{q^{-k_i}}{1-q} \leq 1 \tag{4.2.16}$$

elde ederiz. Şimdi f fonksiyonunu $f(q) = \frac{q^{-k_i}}{1-q}$ şeklinde alalım. Kolayca gözükür ki $f'(\frac{k_i}{k_i+1}) = 0$ ve $f''(\frac{k_i}{k_i+1}) < 0$ dır. Böylece (4.2.16) eşitsizliğinden

$$\begin{aligned} \sum_{i=1} p_i \frac{(k_i+1)^{k_i+1}}{k_i^{k_i}} &= \sum_{i=1} p_i f\left(\frac{k_i}{k_i+1}\right) \\ &\leq \sum_{i=1} p_i \frac{q^{-k_i}}{1-q} \end{aligned}$$

buluruz. Bu da (4.2.12) eşitsizliği ile çelişir. Dolayısıyla ispat tamamlanır. ■

(ii) (i) deki ispat yöntemi kullanılarak (4.2.12) şartı altında, (4.2.14) eşitsizliğinin belli bir yerden sonra negatif çözüme sahip olmadığı gösterilir. ■

Teorem 4.2.5. $i = 1, 2, \ldots, m$ için $k_i \in \{\ldots, -3, -2, -1\}$ olsun. Eğer (4.2.12) şartı sağlanırsa (4.2.5) fark denkleminin her çözümü salınımlıdır.

Ispat. Lemma 4.2.2 nin (i) ve (ii) ifadelerini birleştirirsek, (4.2.12) şartı altında (4.2.5) fark denkleminin her çözümünün salınımlı olduğunu kolayca görürüz. ■

Uyarı 4.2.3. (4.2.5) fark denkleminde $i = 1, 2, \ldots, m$ için $p_{in} = p_i$ alınırsa Teorem 2.5.3 elde edilir.

Uyarı 4.2.4. (4.2.5) fark denkleminde $k \in \mathbb{N}$ alınırsa, (4.2.5) fark denkleminin her çözümünün salınımlı olması için yeter şart

$$\sum_{i=1} (\liminf_{n \to \infty} p_{in}) \frac{(k_i + 1)^{k_i + 1}}{k_i^{k_i}} > 1$$

olmasıdır (Ladas 1990).

KAYNAKLAR

Agarwal, R. P. and Patricia, Y. J. W. 1997. Advanced topics in difference equations. Kluwer Academic Publishers, Boston.

Agarwal, R. P. 2000. Difference equations and inequalities. Marcel Dekker, Newyork.

Agarwal, R. P. , Grace, S. R. and O'Regan, D. 2000. Oscillation theory for difference and functional differential equations. Kluwer Academic Publishers, Boston.

Agarwal, R. P. , Grace, S. R. 2000. The oscillation of systems of difference equations. Applied Mathematics Letters, 13; 1-7.

Akın, Ö. 1998. Nümerik analiz. Ankara Üniversitesi Basımevi, Ankara.

Akın, Ö. 1998. ve Bulgak, H. 1998. Lineer fark denklemleri ve kararlılık teorisi. Selçuk Üniversitesi Rektörlüğü Basımevi, Konya.

Akın, Ö. 1998. 2002. Uygulamalı lineer cebir. (Çeviri) Palme Yayıncılık, Ankara.

Chuanxi, Q. , Kuruklis, S. A. and Ladas, G. 1990. Oscillations of linear autonomous systems of difference equations. Applicable Analysis, 36; 51-63.

Chuanxi, Q. , Kuruklis, S. A. and Ladas, G. 1991. Oscillations of systems of difference equations with variable coefficients. Journal of Mathematical and Physical Sciences, 25 (1); 1-12.

Elaydi, S. 1999. An introduction to difference equations. Springer-Verlag, Newyork.

Erbe, L. H. and Zhang, B. G. 1989. Oscillation of discrete analogues of delay equations. Differential and Integral Equations, 2; 300-309.

Goldberg, S. 1958. Introduction to difference equations. Newyork.

Györi, I. and Ladas, G. 1991. Oscillation theory of delay differential equations. Clarendon press. ,Oxford.

Kelley, W. C. and Peterson, A. C. 1991. Difference equations an introduction with applications. Academic Press. , San Diego.

Ladas, G. , Philos, Ch. G. and Sficas, Y. G. 1989. Sharp condition for the oscillation of delay difference equations. Journal of Applied Mathematics and Simulation, 2; 101-112.

Ladas, G. 1990. Explicit conditions for the oscillation of difference equations. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 153; 276-287.

Lakshmikantham, V. and Trigiante, D. 1988. Theory of di¤erence equations; Nümerical methods and applications. Academic Press. , San Diego.

Tang, X. H. and Zhang, R. Y. 2001. New oscillation criteria for delay di¤erence equations. Computers and Mathematics With Applications, 42; 1319-1330.

Yu, J. S. , Zhang, B. G. and Qian, X. Z. 1993. Oscillations of delay di¤erence equations with oscillating coe¢cients. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 177; 432-444.

Yu, J. S. , Zhang, B. G. and Wang, Z. C. 1994. Oscillation of delay di¤erence equations. Applicable Analysis, 53; 117-124.

Yu, J. S. and Tang, X. H. 2000. Su¢cient conditions for the oscillation of linear delay di¤erence equations with oscillating coe¢cients. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 250; 735-742.

ÖZGEÇMİŞ

1972 yılında Erzincan'da doğdu. İlk, orta ve lise öğrenimini Erzincan'da tamamladı. 1995 yılında Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik bölümünden mezun oldu. Aynı yıl Afyon Kocatepe Üniversitesi Matematik bölümüne araştırma görevlisi olarak atandı. Yüksek lisansını 1998 yılında Afyon Kocatepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsünde tamamladı. Halen Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik programında Prof. Dr. Ömer AKIN yönetiminde doktora öğrenimini sürdürmekte ve aynı enstitüde araştırma görevlisi olarak çalışmaktadır.