ANKARA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DOKTORA TEZİ

İSTİSNAİ LIE GRUPLARININ SELF HOMOTOPI GRUPLARININ DEMETI

Beyhan KUTSAL

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ANKARA
2005

ÖZET

Doktora Tezi

İSTİSNAİ LIE GRUPLARININ
SELF HOMOTOPİ GRUPLARININ DEMETİ

Beyhan KUTSAL

Ankara Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Sabahattin BALCI

Bu tez altı bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm giriş kısmına ayrılmıştır.

İkinci bölümde, bazı temel kavramlar, ilgili teoremler ve sonuçlar verilmiştir.

Üçüncü bölümde, homotopi ve demet teorisi hakkında temel kavramlar verilerek bir örnek olarak esas grupların demeti verilmiştir.

Dördüncü bölümde, manifoldlar ve Lie grupları takdim edilerek istisnai Lie grupları oktonyonlar yardımıyla inşa edilmiştir.

Beşinci bölüm Lie grupları üzerinde demetlere ayrılmış ve kompakt irtibatlı Lie gruplarının esas grupların demeti inşa edilmiştir

Son bölümde, istisnai irtibatlı Lie gruplarının self homotopik tasvirlerinin gruplarının demeti inşa edilmiş ve bazı karakterizasyonlar verilmiştir.

2005, 85 sayfa

ANAHTAR KELİMELER : Esas grup, self homotopi grubu, Lie grubu, istisnai Lie grubu, demet

ABSTRACT

Ph. D. Thesis

THE SHEAF OF SELF HOMOTOPY GROUPS
OF EXCEPTIONAL LİE GROUPS

Beyhan KUTSAL

Ankara University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Sabahattin BALCI

This thesis consists of six chapters. The first chapter has been devoted to the introduction.

In the second chapter, some basic concepts, related theorems and results have been given.

In the third chapter, homotopy and sheaf theory have been introduced and as an example, the sheaf of the fundamental groups has been given.

In the fourth chapter, defining manifolds and Lie groups, exceptional Lie groups have been submitted by means of octanions.

Fifth chapter has been devoted to the sheaves constructed over Lie groups. Specifically, the sheaf of the fundamental groups of compact connected Lie groups has been introduced.

In the final chapter, the sheaf of the groups of self homotopic maps of exceptional connected Lie groups has been constructed and some characterizations have been given.

2005, 85 pages

Key Words: Fundamental group, self homotopy group, Lie group, exceptional Lie group, sheaf.

TEŞEKKÜR

Bana bu konuyu veren, çalışmamın her aşamasında yakın ilgi ve yardımlarını esirgemeyen, beni yönlendiren, bilgilendiren danışman hocam, Sayın Prof. Dr. Sabahattin BALCI (Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi)'ya, çalışmamın gelişmesi için emek veren Sayın Prof. Dr. H. Hilmi HACISALİHOĞLU (Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi)'na ve Sayın Prof. Dr. Cemil YILDIZ (Gazi Üniversitesi Fen Fakültesi Dekanlığı)'a, tüm çalışma seminerlerimizde bulunan ve yardımlarını esirgemeyen Sayın Yrd. Doç. Dr. Erdal GÜNER (Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi)'e ve Sayın Doç. Dr. Ayhan ŞERBETÇİ (Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi)'ye, doktora çalışmalarıma katılmam için izin veren Sayın M. Ali ÇELEBİ (Çankaya Milli Piyango Anadolu Lisesi Müdürü)'ye, Sayın Mihan BULUTTEKİN (Fethiye Kemal Mumcu Anadolu Lisesi Müdürü)'e aileme ve emeği geçen herkese en derin saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

Beyhan KUTSAL

Ankara, Mayıs 2005

İÇİNDEKİLER

SİMGELER DİZİNİ

(X,x)	Noktalı topolojik uzay
$[\alpha]_x$	x noktasındaki α eğrisinin homotopi sınıfı
$\pi_1(X,x)$	X topolojik uzayının x noktasındaki esas grubu
(S,π)	S Demeti
S_x	S demetinin x noktası üzerindeki sapı
s	Kesit
$\Gamma(W,S)$	S demetinin W üzerindeki kesitlerinin cümlesi
g	G Lie grubunun Lie cebiri
$f \sim g$	f tasvirinin g tasvirine homotopluğu
$f \sim g$ rel.X_0	f tasvirinin X_0 a nazaran g tasvirine homotopluğu
hom $[X,X]$	$f : X \to X$ sürekli tasvirlerin homotopi kümesi
S^1	Birim çember
$\{(\psi_\alpha,U_\alpha)\}_{\alpha\in A}$	(ψ_α,U_α) haritalarının koleksiyonu
U(n)	Üniter grup
SU(n)	Özel üniter grup
O(n)	Ortogonal grup
SO(n)	Özel ortogonal grup
Sp(n)	Simpletik grup
H	Kuaterniyonlar cümlesi
O	Oktonyonlar cümlesi
R	Reel sayılar cümlesi
Z	Tamsayılar cümlesi

ŞEKİLLER DİZİNİ

ÇİZELGE DİZİNİ

1. GİRİŞ

Topolojik problemlerin çözümünde cebirsel araçların kullanılması bu problemlerin çözümünü oldukça kolaylaştırmaktır. Bir topolojik uzay üzerinde inşa edilen demetler yatay olarak topolojik ve düşey olarak da cebirsel yapıya sahip olan son derece ilginç uzaylardır. Demetler yardımıyla taban uzayın birçok topolojik ve analitik özellikleri belirlenebilmektedir. Cebirsel geometri ve çok değişkenli kompleks fonksiyonlar teorisinde de demetlerin geniş uygulamaları vardır.

Lie grupları, diferensiyel denklem sistemlerinin integrasyonu ile ilgili çalışmalarda Norveç'li matematikçi Sophus Lie (1842-1899) tarafından geliştirilmiştir. Lie grupları teorisi, matematiğin diferensiyel geometri, analiz, topoloji ve cebir gibi birçok dalında uygulamalara sahiptir. J. F. Adams, R. Bott, H. Samelson, H. Toda, ve M. Mimura Lie gruplarının homotopi gruplarını incelemişler (Mimura and Toda 1970, Kachi and Mimura 1999) ayrıca oktonyonlar kullanılarak inşa edilen G_2, F_4 , E_6 , E_7 ve E_8, istisnai irtibatlı Lie gruplarını hesaplamışlardır (Baez 2002). Homotopi gruplarından yararlanarak bir cebirsel demet inşası ilk defa Balcı (1982) tarafından yapılmış, daha sonra Yıldız (1982) tarafından H-grupların demeti, ve nihayet Güner (1996) tarafından n-boyutlu homotopi grupların demeti inşa edilmiştir.

Bu tez altı bölümden oluşmaktadır. İlk dört bölümde çalışmamızın anlaşılabilmesi için gerekli olan temel kavramlar incelenmiştir. Beşinci bölümde, S. Balcı tarafından ortaya konulan bir topolojik uzayın esas gruplarının demetinin oluşturulmasında kullanılan metotlar kullanılarak, Lie gruplarının homotopi gruplarının demetleri incelenmiştir. Bu kısımda Çitil (2003)'in doktora tezinden yararlanılmıştır.

Altıncı bölüm tezin orjinal kısmıdır. Bu bölümde istisnai irtibatlı Lie gruplarının self homotopi gruplarının demetleri kavramı literatüre kazandırılmıştır. Bu bölüm iki kesimden oluşmaktadır. Birinci kesimde X istisnai irtibatlı bir Lie grubu olmak üzere, X in self tasvirlerinin homotopi grubu tanıtılmış ve X üzerinde ''istisnai irtibatlı Lie gruplarının self homotopi gruplarının demeti'' inşa edilmiştir. Daha sonra bu demetin kesitleri ve sapları arasındaki ilişkiler incelenmiştir. İkinci kesimde istisnai irtibatlı Lie grupları ve sürekli tasvirleri kategorisinden istisnai irtibatlı Lie gruplarının self homotopi gruplarının demetleri ve demet homomorfizmleri kategorisine bir kovaryant funktorun varlığı elde edilmiştir. Böylece, istisnai irtibatlı Lie grupları üzerindeki topolojik problemlerin bunların üzerinde inşa edilen demetlerin bazı cebirsel özellikleri karşılık tutularak daha kolay çözüm bulunabilmesine imkan sağlanmıştır.

2. BAZI TOPOLOJİK ve CEBİRSEL KAVRAMLAR

2.1. Topolojik Kavramlar

Tarif 2.1.1. X ($\neq\emptyset$) bir cümle ve τ, X in herhangi altcümlelerinden oluşan bir aile olsun. Aşağıdaki şartlar sağlandığı taktirde τ ya X üzerinde bir **topoloji** ve (X, τ) ikilisine veya kısaca X e de bir **topolojik uzay** denir.

$A_i \in \tau$ ler, $i \in I$, τ nun herhangi elemanlarını göstermek üzere,

(i) X, $\emptyset \in \tau$

(ii) $\bigcap_{i=1}^{n} A_i \in \tau$

(iii) $\bigcup_{i\in I} A_i \in \tau$

Yani Ø ve X in kendisi τ ya ait olmak üzere τ sonlu arakesit ve keyfi birleşim işlemlerine göre kapalı ise, τ ya X üzerinde bir topoloji, (X, τ) ikilisine veya kısaca X e bir topolojik uzay denir.

τ ya ait herhangi bir elemana veya bunların keyfi birleşimlerine X topolojik uzayının **açık cümleleri** denir.

Tarif 2.1.2. X bir topolojik uzay olsun. Şayet X kendisinden ve boştan farklı ayrık açık iki cümlenin birleşimi olarak yazılamıyor ise, bu taktirde X topolojik uzayına **irtibatlıdır** denir.

Tarif 2.1.3. X bir topolojik uzay ve $p \in X$ herhangi bir nokta olsun. p yi ihtiva eden irtibatlı cümlelerin birleşimi olan en geniş irtibatlı cümleye, p tarafından belirtilen X in **bileşeni** denir.

Tarif 2.1.4. (X, τ) bir topolojik uzay, $x_0 \in X$ olsun. x_0 noktasını eleman kabul eden X in her U açık altcümlesine x_0 noktasının bir **açık civarı** denir.

Tarif 2.1.5. X bir topolojik uzay olsun. $x_0 \in X$ herhangi bir nokta ve U (x_0) herhangi bir civar olmak üzere, U (x_0) civarı x_0 ın irtibatlı bir civarını ihtiva ediyorsa, X topolojik uzayına **lokal irtibatlıdır** denir.

Tarif 2.1.6. X bir topolojik uzay ve R, X in açık cümlelerinin bir koleksiyonu olsun**.** Şayet X e ait her açık cümle R koleksiyonuna ait açık cümlelerin bir birleşimi olarak yazılabiliyorsa, bu taktirde R ye X in bir **tabanıdır** denir.

Tarif 2.1.7. X bir topolojik uzay olsun. X in altcümlelerinin bir $(A_i)_{i\in I}$ ailesi verilsin. Bu takdirde,

(1) $\bigcup_{i\in I} A_i = X$ ise, bu takdirde $(A_i)_{i\in I}$ ailesine X uzayının bir **örtüsü** denir.

(2) Her $i\in I$ için A_i cümleleri X in açık altcümleleri ise, bu taktirde $(A_i)_{i\in I}$ ailesine X uzayının bir **açık örtüsü** denir.

(3) $J \subset I$ bir sonlu indeks cümlesi olmak üzere, X uzayının (A_j)$_{j\in J}$ ailesine X uzayının bir **sonlu örtüsüdür** denir.

(4) (A_i)$_{i\in I}$ ailesinin bir alt ailesi X topolojik uzayını örterse, bu alt aileye X in bir **alt örtüsüdür** denir.

Tarif 2.1.8. X bir topolojik uzay olsun. Şayet X topolojik uzayının her (A_i)$_{i\in I}$ açık örtüsünün sonlu bir alt örtüsü varsa, bu taktirde X topolojik uzayına **kompakttır** denir.

Kompaktlık, lokal kompaktlığı gerektirir, fakat ne irtibatlılık lokal irtibatlılığı ne de lokal irtibatlık irtibatlılığı gerektirmez.

Tarif 2.1.9. X, Y iki topolojik uzay, $x_0 \in X$, $y_0 \in Y$ herhangi noktalar ve $f : X \rightarrow Y$ bir tasvir olsun. Şayet $y_0 = f(x_0)$ noktasının herbir V (y_0) civarı için, $f (U) \subset V$ olacak biçimde x_0 noktasının bir U (x_0) civarı bulunabiliyorsa, bu taktirde f tasvirine $\mathbf{x_0 \in X}$

noktasında süreklidir denir. Şayet f, X in herbir noktasında sürekli ise, bu taktirde f tasvirine **X de süreklidir** denir.

Teorem 2.1.1. Bir tasvirin sürekli olması için gerek ve yeter şart her açık cümlenin ters resminin açık olmasıdır (Uluçay 1972).

Teorem 2.1.2. A, B $\subset$ X iki kapalı altcümle ve X = A$\cup$B olsun. f : A$\rightarrow$Y ve g:B$\rightarrow$Y, $f|_{A\cap B} = g|_{A\cap B}$ olacak şekilde sürekli tasvirler ise, bu taktirde $h|_A = f$, $h|_B = g$ şartlarını sağlayan bir h : X $\rightarrow$ Y tasviri süreklidir (Uluçay 1978).

Teorem 2.1.3. X, Y iki topolojik uzay, X irtibatlı ve f : X $\rightarrow$ Y üzerine sürekli bir tasvir olsun. Bu takdirde Y irtibatlıdır (Uluçay 1972).

Tarif 2.1.10. X veY iki topolojik uzay ve f:X$\rightarrow$Y sürekli bir tasvir olsun. Bu taktirde f^{-1} tasviri var ve sürekli ise, f ye X den Y ye bir **topolojik tasvir** (homeomorfizm) denir. f bir topolojik tasvir olduğu taktirde X ile Y topolojik uzaylarına da **topolojik olarak eşdeğerdirler** (homeomorfiktirler) denir

Teorem 2.1.4. f : X $\rightarrow$ Y bir topolojik tasvir olsun. Bu taktirde f açık cümleleri açık cümlelere, kapalı cümleleri kapalı cümlelere tasvir eder (Uluçay 1972).

Tarif 2.1.11. X bir topolojik uzay ve $x_0 \in X$ keyfi sabit bir nokta olsun. Bu taktirde (X, x_0) çiftine bir **noktalı toplojik uzay** denir.

Tarif 2.1.12. (X, x_0) ve (Y, y_0) iki noktalı topolojik uzay olsun. f (x_0) = y_0 olacak şekilde tarifli bir f : (X, x_0) $\rightarrow$ (Y,y_0) tasvirine **taban noktalarını koruyor** denir.

Tarif 2.1.13. X bir topolojik uzay, I = [0,1] $\subset$ R birim kapalı aralık, I daki topoloji R nin rölatif topolojisi, yani x, y$\in$I için d (x, y) =| x-y | metriği ile tespit edilen topoloji olsun.f : I $\rightarrow$ X sürekli tasvirine X de bir **eğri** veya **yay** denir f (0) noktasına eğrinin başlangıç noktası ve f (1) noktasına da bitim noktası denir. Başlangıç ve bitim noktası çakışan eğriye **kapalı eğri** denir. Eğer $f : I \to X$ sabit tasvir ise, yani f (I), X de bir tek noktadan ibaret ise, bu taktirde f(I) eğrisine **sıfır eğri** denir.

Tarif 2.1.14. X bir topolojik uzay olsun. Herhangi $x, y \in X$ noktaları için bu iki noktayı birbirine bağlayan X de bir α eğrisi varsa, bu taktirde X topolojik uzayına **eğrisel irtibatlı bir topolojik uzay** denir.

Teorem 2.1.5. Eğrisel irtibatlı bir topolojik uzay irtibatlıdır.

İspat. X eğrisel irtibatlı bir uzay ve $x_0 \in X$ keyfi sabit bir nokta olsun. Bu durumda her $x \in X$ için x de bir f_x eğrisi vardır öyle ki $f_x (0) = x_0$ ve $f_x (1) = x$ dir. f_x in X deki değer cümlesi $f_x (I)$ olmak üzere, $f_x (I)$ Teorem 2.1.4. den irtibatlıdır. Diğer taraftan herhangi $x, y \in X$ için $x_0 \in f_x (I) \cap f_y (I)$ olduğundan $\bigcup_{x \in X} f_x(I) = X$ irtibatlıdır. Bu teoremin karşıtı genelde doğru değildir

Teorem 2.1.6. Eğrisel irtibatlı bir uzayın sürekli bir tasvir altındaki görüntüsü de eğrisel irtibatlıdır (Yıldız 1999).

Sonuç 2.1.1. Eğrisel irtibatlı olma özeliği topolojik bir özeliktir (Yıldız 1999).

Tarif 2.1.15. X bir topolojik uzay, $f, g : I \to X$ iki eğri ve $f (1) = g (0)$ olsun. Bu taktirde

$$h (t) = \begin{cases} f(2t) & ,0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ g(2t-1) & ,\frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

şeklinde tarif edilen $h : I \to X$ tasviri sürekli olup X de bir eğridir. Bu eğriye f ve g eğrilerinin çarpımı denir.

Teorem 2.1.7. X bir topolojik uzay ve $(A_i)_{i\in I}$, X de eğrisel irtibatlı cümlelerden oluşan bir aile öyle ki $\bigcap_{i\in I} A_i \neq \emptyset$ olsun. Bu taktirde $B = \bigcup_{i\in I} A_i$ cümlesi eğrisel irtibatlıdır.

İspat. a, b∈B herhangi iki nokta olsun. Bu durumda $a\in A_{i_0}$ ve $b\in A_{j_0}$ olacak şekilde i_0, $j_0\in I$ vardır. $\bigcap_{i\in I} A_i \neq \emptyset$ olduğundan bir $x\in \bigcap_{i\in I} A_i$ vardır öyle ki her i∈I için $x\in A_i$ dir. O halde $x\in A_{i_0}$ ve $x\in A_{j_0}$ dır. A_{i_0} ve A_{j_0} eğrisel irtibatlı olduğundan a noktasını x noktasına birleştiren $f : [0, 1] \rightarrow A_{i_0} \subset B$ eğrisi ve aynı şekilde x noktasını b noktasına birleştiren $g : [0, 1] \rightarrow A_{j_0} \subset B$ eğrisi vardır. Bu durumda

$$h(t)=\begin{cases} f(2t) & ,0 \le t \le \dfrac{1}{2} \\ g(2t-1) & ,\dfrac{1}{2} \le t \le 1 \end{cases}$$

şeklinde tarif edilen $h : [0, 1] \rightarrow B$ eğrisi a noktasını b noktasına birleştiren bir eğridir. O halde B eğrisel irtibatlı bir cümledir

Teorem 2.1.8. X bir topolojik uzay olmak üzere X üzerinde bir $R \subset X \times X$ bağıntısı,
"(x, y)∈R veya x R y ⇔ X de x'i y'ye birleştiren bir eğri var olmasıdır."
şeklinde tarif edilsin. Bu taktirde R bağıntısı X üzerinde bir eşdeğerlik bağıntısıdır ve X in bir parçalanışını oluşturur (Yıldız 1999).

Tarif 2.1.16. X bir topolojik uzay ve x∈X olsun. x noktasının her komşuluğu x noktasının eğrisel irtibatlı bir komşuluğunu kapsıyor ise, yani x noktasının eğrisel irtibatlı cümlelerden oluşan bir komşuluklar (lokal) tabanı varsa, X'e **x noktasında lokal eğrisel irtibatlı topolojik uzay** denir. Eğer X topolojik uzayı her noktasında lokal eğrisel irtibatlı ise, bu taktirde X'e **lokal eğrisel irtibatlı uzay** denir

Teorem 2.1.9. Bir X topolojik uzayı irtibatlı ve lokal eğrisel irtibatlı ise, bu taktirde X eğrisel irtibatlıdır.

İspat. $a \in X$ ve A, a noktasının bir eğri ile birleştirilebilen X in bütün noktalarının cümlesi olsun. $a \in A$ olduğundan $A \neq \emptyset$ dır. Eğer A cümlesinin hem açık hem de kapalı olduğunu gösterirsek, X in irtibatlı olmasından $A = X$ olur.

$b \in A$ olsun. $b \in X$ ve X lokal eğrisel irtibatlı olduğundan b nin X de eğrisel irtibatlı bir U komşuluğu vardır. Bu durumda herhangi bir $z \in U$ noktası bir eğri ile b noktasına birleştirilebilir. b noktası da A da bir eğri ile a noktasına birleştirilebildiğinden z noktası a noktasına birleştirilebilirdir. O halde $U \subset A$ dır. Böylece A açıktır.

$b \in \overline{A}$ olsun. $b \in X$ ve X lokal eğrisel irtibatlı olduğundan b nin X de eğrisel irtibatlı bir U komşuluğu vardır. Bu durumda $U \cap A \neq \emptyset$ dır. $z \in U \cap A$ alalım. b noktası z ye bir eğri ile birleştirilebilir ve z de a ya bir eğri ile birleştirilebilirdir. Dolayısıyla b, a ya bir eğri ile birleştirilebilir. O halde $b \in A$ dır. Bu ise $\overline{A} \subset A$ demektir. $A \subset \overline{A}$ olduğundan $A = \overline{A}$ elde edilir. Dolayısıyla A kapalıdır.

Sonuç olarak $A = X$ olup X eğrisel irtibatlı bir uzaydır (Yıldız 1999)

Tarif 2.1.17. Elemanlarına nesne adı verilen, yani cümle ve üzerinde tarifli fonksiyonlardan oluşan bir sisteme **kategori** adı verilir. Nesneleri belirten cümleler bir ek yapıya sahip olabilirler. Cümleler üzerinde tarifli fonksiyonlar ise bu ek yapıyı korurlar. Yani kategori,
(a) bir nesne sınıfıdır.
(b) Her X, Y sıralı nesne çifti için hom (X, Y) ile gösterilen bir tasvir cümlesi tarif edilmiştir öyle ki herbir tasvire **morfizm** denir.
(c) Morfizmler için bir komposizyon kaidesi tarif edilmiştir öyle ki her X, Y, Z nesne üçlüsü için $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ tasvirler olmak üzere $g\,f = g \circ f$ ye f ve g nin komposizyonu denir.

(a), (b), (c) aşağıdaki şartları sağlar:
(i) Asosyatiflik: $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$, $h : Z \to W$ tasvirler olmak üzere,

$$h\,(\,g\,f\,) = (\,h\,g\,)\,f.$$

(ii) Özdeşlik: Her Y nesnesi için $1_Y : Y \rightarrow Y$ morfizmi vardır öyle ki $f : X \rightarrow Y$, $h : Y \rightarrow Z$ tasvirler olmak üzere $1_Y\, f = f$ ve $h\, 1_Y = h$ dir. 1_Y morfizmine özdeş morfizm denir. Kategorinin her bir Y nesnesi için özdeş morfizm birtektir.

Tarif 2.1.18. X, Y nesneleri eşdeğerdirler denir, şayet $\exists\, f \in hom(X, Y)$, $g \in hom(Y, X)$ morfizmleri varsa $\ni g\, f = 1_X$, $f\, g = 1_Y$. Bu taktirde f ve g nin herbirine bir **eşdeğerlik denir** ve $X \approx Y$ yazılır.

Lemma 2.1.1. Şayet $f : X \rightarrow Y$ tasvirinin sol ve sağ inversleri varsa, bunlar eşittirler ve f bir eşdeğerliktir (Balcı 1978).

Tarif 2.1.19. M ve N iki kategori olsun. $F : M \rightarrow N$ tasvirine bir **funktor** veya **kovaryant funktor** denir, şayet M ye ait herbir X nesnesine N de bir $F(X)$ nesnesi, M de herbir $f : X \rightarrow Y$ morfizmine ise N de $F(f) : F(X) \rightarrow F(Y)$ morfizmi karşılık geliyor öyle ki,

(i) $Y = X$ ve 1_X özdeş tasvir ise, $F(1_X) = 1_{F(X)}$.

(ii) $f : X \rightarrow Y$, $g : Y \rightarrow Z$ ise $F(g\, f) = F(g)\, F(f)$.

Şayet (ii) özeliği yerine $F(g\, f) = F(f)\, F(g)$ özeliği sağlanıyorsa, bu takdirde F ye **kontravaryant funktor** denir.

2.2. Cebirsel Kavramlar

Tarif 2.2.1. (G,o) bir matematik sistem olsun. Şayet aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa (G,o) çiftine bir **grup** denir.

(i) ‘‘o’’ işlemi G üzerinde asosyatiftir, yani, her $a, b, c \in G$ için $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$ dir.

(ii) Bir $e \in G$ elemanı vardır, öyle ki her $a \in G$ için $e \circ a = a \circ e = a$ dır. Tarif olarak $e \in G$ ye özdeş eleman denir.

(iii) Her $a \in G$ için bir $a^{-1} \in G$ vardır öyle ki $a o a^{-1} = a^{-1} o a = e$ dır.Tarif olarak a^{-1}elemanına a nın tersi (inversi) denir.

Tarif 2.2.2. G bir grup olsun. ϕ, G den G ye bir izomorfizm ise, bu taktirde ϕ ye **otomorfizm** adı verilir.

Tarif 2.2.3. G bir grup ve H, G nin boş olmayan bir altcümlesi olsun. Şayet H, G deki ikili işleme göre bir grup ise, bu taktirde H ya G nin **altgrubu** denir.

Tarif 2.2.4. G bir grup ve H, G nin bir altgrubu olsun. Şayet her $a \in G$ için $a H = H a$ oluyorsa, bu taktirde H ya G nin **normal altgrubu** denir.

Tarif 2.2.5. Aşikar altgruplardan başka hiçbir normal altgrubu olmayan bir gruba **basit grup** denir.

Tarif 2.2.6. E sonlu boyutlu bir reel vektör uzayı olsun ve R ile reel sayılar cismini gösterelim. Aşağıdaki aksiyomları sağlayan bir $< , > : E \times E \to R$ dönüşümüne E üzerinde bir **iç çarpım** denir.

(i) Pozitif tariflilik aksiyomu:

$\forall \alpha \in E$ için, $< \alpha, \alpha > \geq 0$, $< \alpha, \alpha > = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0$.

(ii) Simetri aksiyomu:

$\forall \alpha, \beta \in E$ için, $< \alpha, \beta > = < \beta, \alpha >$.

(iii) Bilineerlik aksiyomu:

$\forall \alpha_1, \alpha_2, \beta \in E$, $\forall a, b \in R$ için, $< a\, \alpha_1 + b\, \alpha_2, \beta > = a < \alpha_1, \beta > + b < \alpha_2, \beta >$.

Üzerinde Öklid anlamında iç çarpım tarifli olan sonlu boyutlu reel vektör uzayına Öklid uzayı denir. Bundan böyle, aksi söylenmedikçe, E ile Öklid uzayını göstereceğiz. Şimdi Öklid uzayında bilinen bazı metrik kavramları hatırlatalım:

Bir $\alpha \in E$ vektörünün boyu $\| \alpha \|$ ile gösterilir ve

$$\| \alpha \| = \sqrt{< \alpha, \alpha >}$$

olarak tarif edilir. α ve β vektörlerinin karşılık geldikleri noktalar arasındaki uzaklık $d (\alpha, \beta)$ ile gösterilir ve

$$d (\alpha, \beta) := \| \alpha - \beta \|$$

olarak tarif edilir.λ_i, $\mu_i \in R$, i=1,2,...,n olmak üzere sıralı n-lilerin vektör uzayını R^n ile gösterelim. $\alpha = (\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n)$ ve $\beta = (\mu_1, \mu_2, ..., \mu_n)$ olmak üzere,

$$< \alpha, \beta > = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mu_i$$

ile tarif edilen dönüşüm bir iç çarpımdır. Bu iç çarpıma Öklid anlamındaki **standart iç** çarpım denir. Tarif edilen bu iç çarpım kullanılarak oluşan topolojiye de R^n nin alışılmış topolojisi denir.

Tarif 2.2.7. V ve W, *F* cismi üzerinde iki vektör uzayı ve $A : V \to W$ bir dönüşüm olsun. $\forall \alpha, \beta \in V$, $\forall a, b \in F$ için,

$$A(a\,\alpha + b\,\beta) = a\,A(\alpha) + b\,A(\beta)$$

özeliği sağlanıyor ise, bu taktirde A **dönüşümüne lineerdir** denir.

Tarif 2.2.8. E bir iç çarpım uzayı ve $\sigma : E \to E$ lineer dönüşüm olsun. $\forall \alpha, \beta \in E$ için,

$$< \sigma (\alpha), \sigma (\beta) > = < \alpha, \beta >$$

ise σ ye **ortogonal dönüşüm** denir. Ortogonal dönüşümler birebir ve örtendir. Bu dönüşümlere karşılık gelen matrislere de **ortogonal matrisler** denir. A ortogonal dönüşüme karşılık gelen matris ise det A = ±1 dır. Gerçekten,

$$A^t = A^{-1} \Rightarrow A^t A = I$$

$$\Rightarrow \det (A^t A) = \det (I)$$

$$\Rightarrow \det (A^t) \det A = 1$$

$$\Rightarrow (\det A)^2 = 1$$

$$\Rightarrow \det A = \pm 1$$

$O(E) = \{ \sigma | \sigma$ ortogonal dönüşüm $\}$ cümlesi bileşke işlemi altında bir gruptur. Bu gruba **ortogonal grup** denir.

$$\sigma \in O(E) \Rightarrow \langle \sigma(\sigma(\alpha)), \sigma(\sigma(\alpha)) \rangle = \langle \sigma(\alpha), \sigma(\alpha) \rangle$$

$$\Rightarrow \langle \sigma^2(\alpha), \sigma^2(\alpha) \rangle = \langle \alpha, \alpha \rangle$$

$$\Rightarrow \langle \sigma^2(\alpha) - \alpha, \sigma^2(\alpha) - \alpha \rangle = 0$$

$$\Rightarrow \sigma^2(\alpha) - \alpha = 0$$

$$\Rightarrow (\sigma^2 - I)(\alpha) = 0$$

$$\Rightarrow \sigma^2 - I = 0$$

$$\Rightarrow \sigma^2 = I.$$

olduğundan σ ortogonal dönüşümünün mertebesi 2 dir.

Teorem 2.2.1. İç çarpımı koruyan lineer dönüşümlerin cümlesini $O(E)$ ile gösterelim. Bileşke işlemi altında $O(E)$ bir gruptur. Bu gruba **ortogonal grup** denir.

İspat. $O(E) = \{ f \mid f : E \to E$ lineer, $\forall x, y \in E, \langle f(x), f(y) \rangle = \langle x, y \rangle \}$ olmak üzere, $O(E)$ üzerindeki işlemi $(f \circ g)(x) = (fg)(x) = f(g(x))$ olarak tarif edelim.

(i) $\langle (f \circ g)(x), (f \circ g)(y) \rangle = \langle f(g(x)), f(g(y)) \rangle$
$= \langle g(x), g(y) \rangle = \langle x, y \rangle$

dir. Yani bu işlem $O(E)$ de $O(E) \times O(E) \to O(E)$ şeklinde bir iç işlemdir.

(ii) Birim eleman: $I : E \rightarrow E$, E üzerindeki endomorfizm olduğundan her elemanı kendisine dönüştürür, yani $I(x) = x$ dir. O halde $< I(x), I(y) > = < x, y >$ dir. Böylece $I = 1_E \in O(E)$ birim elemandır.

(iii) İnvers eleman: $\forall x, y \in E$ için, $< f^{-1} (x), f^{-1} (y) > = < x, y >$ olduğunu göstermeliyiz : $f \in O(E)$ herhangi bir eleman olsun. Açık olarak $f^{-1} : E \rightarrow E$ mevcuttur. $f^{-1} (x) = a, x = f (a)$, $f^{-1} (y) =b$, $y = f (b)$ diyelim.

$$< f (a), f (b) > = < a, b > = < f^{-1} (x), f^{-1} (y) >$$

$$= < f (f^{-1} (x)), f (f^{-1} (y)) >$$

$$= < (f \circ f^{-1}) (x), (f \circ f^{-1}) (y) >$$

$$= < I(x), I(y) > = < x, y >.$$

O halde,

$$< f^{-1} (x), f^{-1} (y) > = < x, y >.$$

dir. Bu ise $f^{-1} \in O(E)$ demektir.

(iv) Birleşme özeliği : f, g, h : $E \rightarrow E$ lineer, $\forall x, y \in E$ için,

$$< ((f g) h) (x) , ((f g) h) (y) > = < (f (g h)) (x), (f (g h)) (y) >$$

$$= < x, y >$$

olduğunu göstermeliyiz:

$$< ((f g) h) (x), ((f g) h) (y) > = < (f g) (h (x)), (f g) (h (y)) >$$

$$= < h (x), h (y) > = < x, y >.$$

$$< (f(gh))(x), (f(gh))(y) > = < f((gh)(x)), f((gh)(y)) >$$

$$= < (gh)(x), (gh)(y) >$$

$$= < g(h(x)), g(h(y)) >$$

$$= < h(x), h(y) > = < x, y >.$$

dir. O halde O(E) cümlesi bileşke işlemine göre bir gruptur. Bu gruba E nin **ortogonal dönüşüm grubu** denir. O(E) deki lineer dönüşümlere karşılık gelen matrislerin cümlesi de matris çarpımı işlemine göre gruptur. Bu iki grup izomorftur. O(E) ye izomorf olan ortogonal matrislerin grubuna da **ortogonal matris grubu** denir.

3. HOMOTOPİ ve DEMET KAVRAMI

Bu bölümde cebirsel topolojinin iki önemli kavramı olan homotopi ve demet birlikte ele alınarak ileriki bölümlerde teşkil edilecek olan cebirsel yapılı demetlerin alt yapısı oluşturulacaktır.

3.1. Tasvirlerin Homotopisi

Tarif 3.1.1. X ve Y iki topolojik uzay ve f, g : $X \to Y$ sürekli iki tasvir olsun. $\forall x \in X$ için

$$F(x, 0) = f(x),\ F(x, 1) = g(x)$$

şartlarını sağlayan bir $F = F(x, t) : X \times J \to Y$ sürekli tasviri varsa, bu taktirde f tasviri g tasvirine **homotoptur** denir ve $f \sim g$ yazılır. F tasvirine ise f den g ye bir **homotopi** denir (Uluçay 1978).

Şayet Y = X alınırsa, bu taktirde F tasvirine **self- homotopi**, f ve g ye de **self-homotopiktirler** denir.

Teorem 3.1.1. " ~ " homotopi bağıntısı bir eşdeğerlik bağıntısıdır.

İspat. (i) " ~ " bağıntısı yansımalıdır. Gerçekten $F(x, t) : X \times J \to Y$ tasviri,

$$F(x, t) = f(x)$$

şeklinde tarif edilirse, bu taktirde $F(x, 0) = f(x)$, $F(x, 1) = f(x)$ ve $F(x, t)$ süreklidir. Dolayısıyla $f \sim f$ dir.

(ii) " ~ " bağıntısı simetriktir. Gerçekten $f \sim g$ ise $F(x, 0) = f$, $F(x, 1) = g$ olacak şekilde sürekli bir $F(x, t) : X \times J \to Y$ tasviri vardır. Bu taktirde

$$G(x, t) : X \times J \to Y,$$
$$G(x, t) = F(x, 1-t)$$

şeklinde tarif edilirse G tasviri süreklidir ve

$$G(x,0) = F(x,1) = g$$
$$G(x,1) = F(x,0) = f$$

dir. Bu ise $g \sim f$ demektir.

(iii) " $\sim$ " bağıntısı geçişmelidir, yani $f \sim g$ ve $g \sim h$ ise $f \sim h$ dır. Gerçekten $f \sim g$ ise $F(x,0) = f$, $F(x,1) = g$ olacak şekilde sürekli bir $F(x,t) : X \times J \to Y$ tasviri ve $g \sim h$ ise $G(x,0) = g$, $G(x,1) = h$ olacak şekilde sürekli bir $G(x,t) : X \times J \to Y$ tasviri vardır. Şimdi $H(x,t) : X \times J \to Y$ tasvirini

$$H(x,t) = \begin{cases} F(x,2t) & , \quad 0 \le t \le 1/2 \\ G(x,2t-1) & , \quad 1/2 \le t \le 1 \end{cases}$$

şeklinde tarif edersek, Teorem 2.1.3. den dolayı $H(x,t)$ sürekli olup,

$$H(x,0) = F(x,0) = f$$
$$H(x,1) = G(x,1) = h$$

dır. Dolayısıyla $f \sim h$ dır.

Böylece, X topolojik uzayından Y topolojik uzayına bütün $f : X \to Y$ sürekli tasvirlerinin cümlesi " $\sim$ " homotopi bağıntısı altında ayrık eşdeğerlik sınıflarına parçalanmış olmaktadır.

Tarif 3.1.2. X, Y iki topolojik uzay, $X_0 \subset X$ herhangi bir altcümle ve $f, g : X \to Y$ her $x_0 \in X_0$ için, $f(x_0) = g(x_0)$ şartını sağlayan sürekli iki tasvir olsun. Şayet aşağıdaki şartları sağlayan bir $F = F(x,t) : X \times J \to Y$ sürekli tasviri mevcutsa, bu taktirde f tasviri **X_0 a nazaran g ye homotoptur** denir ve $f \sim g$ rel. X_0 şeklinde gösterilir.

(i) Her $x \in X$ için $F(x,0) = f(x)$, $F(x,1) = g(x)$

(ii) Her $x_0 \in X_0$ için $F(x_0,t) = f(x_0) = g(x_0)$

$X_0 = \varnothing$ ise sadece $f \sim g$ yazılır. Dolayısıyla, adi homotopi, rölatif homotopinin özel bir halidir. Ayrıca gösterilebilir ki, " $\sim$ rel. X_0" bağıntısı da bir eşdeğerlik bağıntısıdır

Tarif 3.1.3. Rölatif homotopi bağıntısı da bir eşdeğerlik bağıntısı olduğundan X topolojik uzayından Y topolojik uzayına bütün $f : X \rightarrow Y$ sürekli tasvirlerinin cümlesi "$\sim$ rel X_0'' bağıntısı altında ayrık eşdeğerlik sınıflarına ayrılır. Bu eşdeğerlik sınıflarına **homotopi sınıfları** denir ve bütün homotopi sınıflarının cümlesi

$$[X : Y] = \{ [f] \mid f : X \rightarrow Y \text{ sürekli} \}$$

ile gösterilir.

Tarif 3.1.4. X, Y iki topolojik uzay $f, g : X \rightarrow Y$ sürekli iki tasvir ve $f \sim g$ olsun. Şayet g sabit tasvir ise, bu taktirde f bir **sabite homotoptur** denir.

Tarif 3.1.5. Şayet $1_X : X \rightarrow X$ özdeş tasviri bir sabite homotop ise, bu taktirde X topolojik uzayına **büzülebilirdir** (bir noktaya deforme edilebilirdir) denir.

Teorem 3.1.2. Şayet Y büzülebilir bir uzay ve X herhangi bir topolojik uzay ise, bu takdirde $f : X \rightarrow Y$ sürekli tasviri bir sabite homotoptur (Balcı 1978).

Teorem 3.1.3. X, Y, Z topolojik uzaylar olmak üzere $f, g : X \rightarrow Y$ sürekli tasvirler ve $f \sim g$ olsun. $h:Y\rightarrow Z$ sürekli bir tasvir ise $hf, hg:X\rightarrow Z$ tasvirleri süreklidir ve $hf \sim hg$ dir (Balcı 1978).

Teorem 3.1.4. X, Y, Z topolojik uzaylar olmak üzere, $f : X \rightarrow Y$, $g, h : Y \rightarrow Z$ sürekli tasvirler ve $g \sim h$ olsun. Bu taktirde $g f$, $h f : X \rightarrow Z$ tasvirleri süreklidir ve $g f \sim h f$ dir.

İspat. Açık olarak $g f$ ve $h f$ sürekli olduklarından $g f \sim h f$ olduğunu gösterirsek ispat tamamlanmış olur. Halbuki $g \sim h$ olduğundan $F (y, 0) = g (y)$, $F (y, 1) = h (y)$ olacak şekilde bir $F = F (x, t) : Y \times J \rightarrow Z$ sürekli tasviri vardır.

Şimdi $G = G(x, t) : X \times J \to Z$ tasvirini $x \in X$ olmak üzere,

$$G(x, t) = F(f(x), t)$$

olarak tarif edelim. F ve f sürekli olduğundan $G = F \circ f$ süreklidir. Üstelik

$$G(x, 0) = F(f(x), 0) = g\,f$$
$$G(x, 1) = F(f(x), 1) = h\,f$$

dir. Dolayısıyla $g\,f \sim h\,f$ dir.

Tarif 3.1.6. X,Y iki topolojik uzay ve $f : X \to Y$ sürekli bir tasvir olsun. $f\,g \sim 1_Y$ ve $g\,f \sim 1_X$ şartlarını sağlayan sürekli bir $g : Y \to X$ tasviri mevcut ise, bu taktirde f tasvirine **homotopi eşdeğerlilik** denir. Bu taktirde X ve Y topolojik uzaylarına **homotopik eşdeğer uzaylar** denir ve $X \sim Y$ sembolü ile gösterilir.

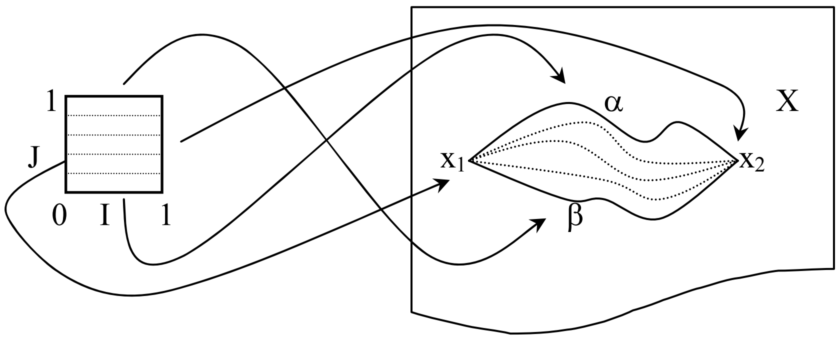
3.2. Eğrilerin Homotopisi

Tarif 3.2.1. α ve β, X topolojik uzayında iki eğri olsun. Eğer α dan β ya sürekli bir deformasyonla geçilebiliyorsa bu iki eğriye **homotoptur** denir ve $\alpha \sim \beta$ şeklinde gösterilir.

Bir başka ifade ile : $\alpha, \beta : [0, 1] \to X$ iki eğri olsun. $F(x, 0) = \alpha(x)$, $F(x, 1) = \beta(x)$, $t \in [0, 1]$ için $F_t(x) = \alpha_t(x)$ olacak şekilde bir $F = F(x, t) : I \times J \to X$ sürekli tasviri varsa, bu taktirde $\alpha \sim \beta$ dır (Uluçay 1978).

Tarif 3.2.2. $\alpha, \beta : [0, 1] \to X$ iki eğri, $\alpha(0) = \beta(0) = x_1$ ve $\alpha(1) = \beta(1) = x_2$ olsun. Bir $F = F(x, t) : I \times J \to X$ sürekli tasviri, $F(x, 0) = \alpha(x)$, $F(x, 1) = \beta(x)$, $F(0, t) = x_1$, $F(1, t) = x_2$ olacak şekilde tarif edilirse, F, α dan β ya sürekli bir deformasyon denir.

Bu deformasyon birinci düşey ekseni x_1 ve ikinci düşey ekseni de x_2 ye dönüştürmektedir (Şekil 3.1.).



Şekil 3.1. Rölatif homotopi

Tarif 3.2.3. Bir $\alpha : I \to X$ eğrisinin **tersi** (inversi) diye her $x \in I$ için

$$\alpha^{-1}(x) = \alpha(1-x)$$

şeklinde tarifli $\alpha^{-1} : I \to X$ sürekli tasvirine denir.

Teorem 3.2.1. X bir topolojik uzay ve α, β, γ, δ X de eğriler olsun. Eğer $\alpha \sim \gamma$, $\beta \sim \delta$ ve $\alpha\,\beta$ çarpımı tarifli ise bu taktirde $\gamma\,\delta$ çarpımı tariflidir ve $\alpha\,\beta \sim \gamma\,\delta$ rel.(0, 1) dir (Uluçay 1978).

Teorem 3.2.2. α bir eğri, β bir sıfır eğri ve $\alpha\,\beta$ tarifli olsun. Bu takdirde $\alpha\,\beta \sim \alpha$ dır.

Aynı şekilde γ bir sıfır eğri ve $\gamma\,\alpha$ tarifli ise bu takdirde $\gamma\,\alpha \sim \alpha$ dir (Uluçay 1978).

Teorem 3.2.3. $\alpha \sim \beta$ ise bu taktirde $\alpha^{-1} \sim \beta^{-1}$ rel.(0,1) dir.

İspat. $\alpha \sim \beta$ ise $F(x, 0) = \alpha(x)$, $F(x, 1) = \beta(x)$ ve $F(0, t) = \alpha(0) = \beta(0)$, $F(1, t) = \alpha(1) = \beta(1)$ olacak şekilde $F = F(x, t) : I \times J \to Y$ sürekli tasviri vardır. Şimdi bir $G(x, t) : I \times J \to Y$ tasvirini,

$$G(x, t) = F(1-x, t)$$

şeklinde tarif edersek, G sürekli olur. Diğer taraftan

$$G(x, 0) = F(1-x, 0) = \alpha(1-x) = \alpha^{-1}$$

$$G(x, 1) = F(1-x, 1) = \beta(1-x) = \beta^{-1}$$

$$G(0,t) = F(1,t) = \alpha(1) = \beta(1) = \alpha^{-1}(0) = \beta^{-1}(0)$$
$$G(1,t) = F(0,t) = \alpha(0) = \beta(0) = \alpha^{-1}(1) = \beta^{-1}(1)$$

dir. Bundan dolayı $\alpha^{-1} \sim \beta^{-1}$ rel.(0,1).

Teorem 3.2.4. α, β ve γ, $\alpha\beta$ ve $\beta\gamma$ tarifli olacak şekilde X de eğriler olsunlar. Bu taktirde $(\alpha\beta)\gamma$, $\alpha(\beta\gamma)$ tariflidir ve $(\alpha\beta)\gamma \sim \alpha(\beta\gamma)$ rel.(0, 1) (Uluçay 1978).

Teorem 3.2.5. α, X topolojik uzayında herhangi bir eğri ise $\alpha\alpha^{-1}$ ve $\alpha^{-1}\alpha$ sıfır eğriye homotoptur.

İspat. $F : I \times J \rightarrow X$ tasvirini şu şekilde tarif edelim:

$$F(x,t) = \begin{cases} \alpha(2x(1-t)) & , \quad 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ \alpha(2(1-x)(1-t)) & , \quad \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Bu taktirde, F süreklidir ve üstelik;

$$F(x,0) = \begin{cases} \alpha(2x) & , \quad 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ \alpha(2-2x) & , \quad \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

$$F(x,1) = \begin{cases} \alpha(0) & , \quad 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ \alpha(0) & , \quad \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

dir. Dolayısıyla

$$F(x,0) = \alpha\alpha^{-1}, \quad F(x,1) = \alpha(0)$$
$$F(0,t) = \alpha(0), \quad F(1,t) = \alpha(0)$$

dır. Böylece $\alpha\alpha^{-1} \sim \alpha(0)$ rel.(0, 1) dir. Aynı şekilde gösterilebilir ki $\alpha^{-1}\, \alpha$, resmi $\alpha(1)$ olan sıfır eğriye homotoptur. Gerçekten

$$G = G(x, t) : I \times J \to X$$

tasvirini aşağıdaki şekilde tarif edersek,

$$G(x,t) = \begin{cases} \alpha(1-2x(1-t)) & , 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ \alpha((2x-1)(1-t)) & , \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

bu taktirde,

$$G(x,0) = \begin{cases} \alpha(1-2x) & , 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ \alpha(2x-1) & , \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

$$G(x,1) = \begin{cases} \alpha(1) & , 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ \alpha(0) & , \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

dir. Dolayısıyla,

$$G(x, 0) = \alpha^{-1}\alpha,\ G(x, 1) = \alpha(1)$$
$$G(0, t) = \alpha(1) = G(1, t)$$

dir. O halde $\alpha^{-1}\,\alpha$ resmi $\alpha(1)$ olan sıfır eğriye homotoptur.

Teorem 3.2.6. α, β X topolojik uzayında $\alpha\,\beta^{-1}$ tarifli ve kapalı olacak şekilde iki eğri olsun. Bu takdirde $\alpha\,\beta^{-1}$ in sıfır eğriye homotop olması için gerek ve yeter şart $\alpha \sim \beta$ olmasıdır. (Balcı 1978).

3.3. Esas Grup (1-Boyutlu Homotopi Grubu)

Bu kısımda, $I \subset R$ birim kapalı aralığının bir X topolojik uzayına sürekli tasvirlerini ele alarak, X in bir x_0 sabit noktasında homotopi sınıflarını teşkil ederek bunların esas grup denilen bir grup meydana getirdiklerini göstereceğiz. X bir topolojik uzay ve $x_0 \in X$ keyfi sabit bir nokta olsun. X de x_0 da başlayan ve x_0 da biten bütün kapalı eğrilerin cümlesini göz önüne alalım. x_0 noktasına, eğriler için taban nokta, eğrilere ise x_0 da eğriler denir. α, x_0 da bir eğri ise α ya homotop x_0 daki bütün eğrilerin homotopi sınıfını

$$[\,\alpha\,] = \{\,\gamma : \gamma \sim \alpha \text{ rel.}(\,0, 1\,)\,\}$$

ile bu homotopi sınıflarının cümlesini de $\pi_1\,(\,X, x_0\,)$ ile gösterelim. $[\,\alpha\,]$, $[\,\beta\,]$ gibi herhangi iki homotopi sınıfının çarpımı

$$[\,\alpha\,]\,[\,\beta\,] = [\,\alpha\,\beta\,]$$

ile tarif edilir. Bu şekilde tarif edilen çarpım eşdeğerlik sınıflarının temsilci elemanlarına bağlı değildir. Gerçekten $\alpha \sim \gamma$ ve $\beta \sim \delta$ ise $\alpha\,\beta \sim \gamma\,\delta$ olduğundan,

$$[\,\gamma\,]\,[\,\delta\,] = [\,\gamma\,\delta\,] = [\,\alpha\,\beta\,] = [\,\alpha\,]\,[\,\beta\,]$$

dir. Bundan dolayı $[\,\alpha\,]\,[\,\beta\,]$ çarpımı $[\,\alpha\,]$ ve $[\,\beta\,]$ tarafından bir tek olarak tarif edildiğinden, çarpım anlamlıdır.Şimdi x_0 da bütün kapalı eğrileri göz önüne alalım. Homotopi bağıntısı bu eğrilerin cümlesini ayrık homotopi sınıflarına ayırır. Yukarıda tarif edilen çarpım operasyonu ile homotopi sınıflarının cümlesi bir grup teşkil eder:

(i) Çarpma işlemi kapalıdır. Çünkü $[\,\alpha\,]$, $[\,\beta\,] \in \pi_1\,(\,X, x_0\,)$ da herhangi iki eleman ise $[\,\alpha\,]\,[\,\beta\,] = [\,\alpha\beta\,]$ olup, $\alpha\,\beta$ da x_0 da bir kapalı eğri olduğundan $[\,\alpha\,\beta\,] \in \pi_1\,(\,X, x_0\,)$ dır.

(ii) Çarpma işlemi birleşmelidir. Çünkü $[\,\alpha\,]$, $[\,\beta\,]$, $[\,\gamma\,] \in \pi_1\,(\,X, x_0\,)$ ise

$(\,\alpha\,\beta)\,\gamma \sim \alpha\,(\,\beta\,\gamma\,)$ olduğundan

$$([\alpha] [\beta]) [\gamma] = [\alpha] ([\beta] [\gamma])$$

dır.

(iii) Özdeş eleman vardır. Çünkü $[\alpha] \in \pi_1 (X, x_0)$ için x_0 da sıfır eğrilerin homotopi sınıfı [1] olarak gözönüne alınırsa,

$$[\alpha] [1] = [\alpha 1] = [\alpha]$$
$$[1] [\alpha] = [1 \alpha] = [\alpha]$$

olduğundan $[1] \in \pi_1 (X, x_0)$ özdeş elemanıdır.

(iv) Her $[\alpha] \in \pi_1 (X, x_0)$ elemanının tersi $[\alpha]^{-1} = [\alpha^{-1}]$ dir.

$$[\alpha] [\alpha^{-1}] = [\alpha \alpha^{-1}] = [1]$$
$$[\alpha^{-1}] [\alpha] = [\alpha^{-1} \alpha] = [1]$$

dır.

Dolayısıyla, x_0 daki kapalı eğrilerin bütün homotopi sınıflarının cümlesi tarif edilen çarpma işlemi ile birlikte bir gruptur. Bu gruba x_0 da **Esas grup** (1-boyutlu homotopi grubu) denir ve $\pi_1 (X, x_0)$ ile gösterilir.Bu notasyondaki 1 indeksi R-Öklid uzayının bir parçası olan I = [0, 1] birim kapalı aralığının boyutunu ifade etmektedir (Balcı 1982).

Teorem 3.3.1. X eğrisel irtibatlı bir topolojik uzay ve $x_0, x_1 \in X$ herhangi iki nokta olsun. Bu takdirde $\pi_1 (X, x_0) \cong \pi_1 (X, x_1)$ dir, yani eğrisel irtibatlı topolojik uzaylarda esas grup taban noktasına tabi değildir (Balcı 1982).

Teorem 3.3.2. (X_0, x_0) ve (X_1, x_1) uzaylarının çarpımının esas grubu, esas gurplarının direkt çarpımına(toplamına) izomorftur. Yani,

$$\pi_1 (X_0 \times X_1, x_0 \times x_1) \cong \pi_1 (X_0, x_0) \otimes \pi_1 (X_1, x_1)$$

dir. (Balcı 1982).

Teorem 3.3.3. X_0, X_1 iki topolojik uzay, $x_0 \in X_0$ herhangi bir sabit nokta ve $f : X_0 \rightarrow X_1$ sürekli bir tasvir olsun. Bu takdirde bir $f^* : \pi_1 (X_0, x_0) \rightarrow \pi_1 (X_1, x_1 = f (x_0))$ homomorfizmi vardır.

İspat. α, β $x_0 \in X_0$ da iki kapalı eğri olsun. Bu takdirde $\gamma = f \circ \alpha$, $\delta = f \circ \beta$ $x_1 = f (x_0) \in X_1$ de kapalı eğrilerdir. Şayet $\alpha \sim \beta$ ise bir $F = F (x, t) : I \times J \rightarrow X_0$ sürekli tasviri vardır öyle ki

$$F (x, 0) = \alpha (x), F (x, 1) = \beta (x),$$

$$F (0, t) = \alpha (0) = \beta (0) = x_0 , F (1, t) = \alpha (1) = \beta (1) = x_1$$

dır. Şimdi bir $G (x, t) : I \times J \rightarrow X$ tasvirini

$$G (x, t) = f \circ F$$

şeklinde tarif edelim. Açık olarak G sürekli olup bir homotopidir. Dolayısıyla $\alpha \sim \beta$ ise $f \circ \alpha = \gamma \sim f \circ \beta = \delta$ dır. O halde bir

$$\phi : \pi_1 (X_0, x_0) \rightarrow \pi_1 (X_1, x_1 = f (x_0))$$

tasvirini

$$\phi ([\alpha]) = [f \circ \alpha]$$

şeklinde tarif edersek kolaylıkla gösterilebilir ki ϕ bir homomorfizmdir (Balcı 1982).

Dolayısıyla aşağıdaki teoremi verebiliriz.

Teorem 3.3.4. Noktalı topolojik uzaylar ve sürekli tasvirleri kategorisinden, gruplar ve homomorfizmleri kategorisine bir funktor (kovaryant funktor) vardır öyle ki bu funktor her (X_0,x_0) noktalı topolojik uzayına $\pi_1(X_0,x_0)$ esas grubunu, her bir $f : (X_0,x_0) \rightarrow (X_1, x_1)$ sürekli tasvirine de, $\pi_1 (f) = f^* : \pi_1 (X_0, x_0) \rightarrow \pi_1 (X_1, x_1 = f (x_0))$ homomorfizmini karşılık tutar.

Burada π_1 e **esas grup funktoru** denir. (Balcı 1982).

Teorem 3.3.5. (X_0,x_0), (X_1,x_1) noktalı topolojik uzayları ve $f, g : (X_0, x_0) \rightarrow (X_1, x_1)$ sürekli tasvirleri verilmiş olsun. Şayet f~g ise bu takdirde $f^* = g^*$dır.

İspat. $\alpha : I \rightarrow X_0,$ x_0 da bir kapalı eğri olsun. Bu takdirde $f\,\alpha$, $g\,\alpha : I \rightarrow X_1$ tasvirleri X_1 de birer kapalı eğridir. Şİmdi $f \sim g$ ise $f\,\alpha \sim g\,\alpha$ rel.(0,1) olduğunu gösterelim:
$f \sim g$ ise öyle bir $F = F (x, t) : X_0 \times J \rightarrow X_1$ sürekli tasviri vardır öyle ki;

$$F (x, 0) = f,\quad F (x, 1) = g$$

$$F (x_0, t) = f (x_0) = g (x_0) = x_1$$

dir. Şimdi

$$G = G (x, t) : I \times J \rightarrow X_1$$

tasvirini

$$G (x, t) = F (\alpha (x), t)$$

olarak tarif edelim. Dolayısıyla G sürekli olup

$$G (x, 0) = F (\alpha (x), 0) = (f \alpha) (x)$$
$$G (x, 1) = F (\alpha (x), 1) = (g \alpha) (x)$$

$$G (0, t) = F (\alpha (0), t) = F (x_0, t) = f (x_0) = g (x_0) = x_1$$

$$G (1, t) = F (\alpha (1), t) = F (x_0, t) = x_1$$

dir. O halde $f\,\alpha \sim g\,\alpha$ rel.(0, 1) dır. Buradan $f\,\alpha \in [g\,\alpha]$ ve $[f\,\alpha] = [g\,\alpha]$ dır. Dolayısıyla $f^*([\alpha]) = g^* ([\alpha])$ ve $f^* = g^*$ dır.

Teorem 3.3.6. (X_0, x_0), (X_1,x_1), (X_2,x_2) noktalı topolojik uzayları ve $f : (X_0,x_0)\rightarrow(X_1,x_1)$, $g : (X_1,x_1)\rightarrow(X_2,x_2)$ sürekli tasvirleri verilmiş olsun bu takdirde $(g f)^* = g^* f^*$ dır.

İspat. Açık olarak $gf:(X_0,x_0)\rightarrow(X_2,x_2)$ olup $(gf)^*:\pi_1(X_0,X_0)\rightarrow\pi_1(X_2,x_2)$ dir. Göstereceğiz ki $\pi_1(gf) = \pi_1(g) \text{ o } \pi_1(f)$ dir:Şimdi $\alpha : I \rightarrow X_0$, $x_0 \in X_0$ da bir kapalı eğri olsun.
$(g f)\alpha$, $g(f\alpha) : I \rightarrow X_2$ sürekli tasvirleri X_2 de kapalı olup, $(g f)\alpha \sim g(f\alpha)$ rel.$(0, 1)$ dir. Gerçekten

$$F = F(x,t) : I \times J \rightarrow X_2$$

tasviri

$$F(x, t) = \begin{cases} (gf)(\alpha(x)) & , 0 \le x \le 1-t \\ g(f\alpha(x)) & , 1-t \le x \le 1 \end{cases}$$

olarak tarif edilirse görülebilir ki

$$(g f)\alpha \sim g(f\alpha) \text{ rel.}(0, 1)$$

dir. Dolayısıyla

$$[(g f)\alpha] = [g(f(\alpha))]$$

yazılabilir. Bu ise

$$(g f)^*([\alpha]) = g^*([f\alpha]) = g^*(f^*[\alpha])$$

olduğundan

$$(g f)^* = g^* f^*$$

dir.

Teorem 3.3.7. X_0, X_1 topolojik uzayları verilmiş olsun. Kabul edelim ki
(i) $x_0 \in X_0$ sabit bir nokta ise $f(x_0) = x_1$ ve $g(x_1) = x_0$
(ii) $g f \sim 1_{X_0}$ rel.x_0
(iii) $f g \sim 1_{X_1}$ rel.x_1
şartlarını sağlayan $f : X_0 \rightarrow X_1$ ve $g : X_1 \rightarrow X_0$ sürekli tasvirleri mevcut olsun. Bu taktirde $\pi_1(X_0, x_0) \cong \pi_1(X_1, x_1 = f(x_0))$, yani f^* bir izomorfizmdir.

İspat: Biliyoruz ki $f : (X_0, x_0) \rightarrow (X_1, x_1)$, $g: (X_1,x_1) \rightarrow (X_0,x_0)$, $g f:(X_0,x_0) \rightarrow (X_0,x_0)$, $f g : (X_1,x_1) \rightarrow (X_1,x_1)$ sürekli tasvirler iseler f^*, g^*, $(g f)^*$, $(f g)^*$ birer homomorfizmdir.

$$(g f)^* = g^* f^* \text{ ve } (f g)^* = f^* g^*$$

olduğundan

$$(g\ f)^* = 1_{\pi_1(X_0, x_0)}$$

$$(f\ g)^* = 1_{\pi_1(X_1, x_1)}$$

yazılabilir. Zira $\alpha : I \to X_0$, $x_0 \in X_0$ da bir eğri olsun. Bu taktirde $(g\ f)\alpha$ da x_0 da bir eğridir ve $(g\ f)\ \alpha \sim \alpha$ dır. Çünkü $g\ f \sim 1_{X_0}$ rel. x_0 ise

$$G : X_0 \text{ x } J \to X_0$$

sürekli ve

$$G (x , 0) = g\ f,\ G (x, 1) = 1_{X_0},\ G (x, t) = x_0$$

dır. Şimdi bir

$$F = F(x, t) = I \text{ x } J \to X_0 \text{ tasvirini}$$

$$F (x ,t) = \begin{cases} G (\alpha (x), t) & , 0 \leq x \leq 1\text{-}t \\ \alpha (x) & , 1\text{-}t \leq x \leq 1 \end{cases}$$

şeklinde tarif edelim bu taktirde F sürekli olup,

$$F (x, 0) = (g\ f)\ \alpha,\ \ F (x, 1) = \alpha$$

$$F (0, t) = y_0 = (g\ f) (\alpha (0)) = \alpha (0) = F (1, t) = y = (g\ f) (\alpha (1)) = \alpha (1)$$

dır. Dolayısıyla $(g\ f)\ \alpha \sim \alpha$ dır. Diğer taraftan her $[\alpha] \in \pi_1(X_0, x_0)$ için

$$(g\ f)^* ([\alpha]) = [(g\ f) (\alpha)]$$

olup

$$(g\ f)^* ([\alpha]) = [\alpha]$$

dır. Dolayısıyla

$$(g\ f)^* = g^*\ f^* = 1_{\pi_1(X_0, x_0)}$$

dir. Benzer şekilde $(f g)^* = f^* g^* = 1_{\pi_1(X_1, x_1)}$ dir.

Şimdi f^*ın bir izomorfizm olduğunu gösterelim :

(i) f^* birebirdir. Çünkü $[\alpha]\in\pi_1(X_0,x_0)$ herhangi bir eleman olmak üzere, $f^*([\alpha]) = [\beta]$ dersek,

$$g^* (f^*([\alpha])) = g^* ([\beta]) = [\alpha]$$

dır. Dolayısıyla $[\alpha_1], [\alpha_2]\in\pi_1(X_0, x_0)$ herhangi iki eleman ve $f^*([\alpha_1]) = f^*([\alpha_2])$ ise

$$g^* (f^*([\alpha_1])) = g^* (f^*([\alpha_2])) \text{ ise } [\alpha_1] = [\alpha_2]$$

olduğundan f^* birebirdir.

(ii) f^* üzerinedir. Gerçekten $[\beta]\in\pi_1(X_1, x_1)$ herhangi bir eleman olsun. Bu taktirde $x_1\in X_1$ olmak üzere $\beta : I \to X_1$, bir kapalı eğridir ve $g (x_1) = x_0$ olduğundan $g \beta$, x_0 da

bir kapalı eğridir. Buradan $g \beta = \alpha$ kabul edilirse

$$f^*([\alpha]) = f^*([g \beta]) = f^*(g^*([\beta])) = (f^* g^*)([\beta]) = [\beta]$$

olduğundan f^* üzerinedir. O halde f^* bir izomorfizmdir. Aynı şekilde g^* ın da bir izomorfizm olduğu gösterilebilir. Esasen $(f^*)^{-1} = g^*$ dır. Şimdi, bu teoremin bir özel hali olarak aşağıdaki teoremi ifade edebiliriz.

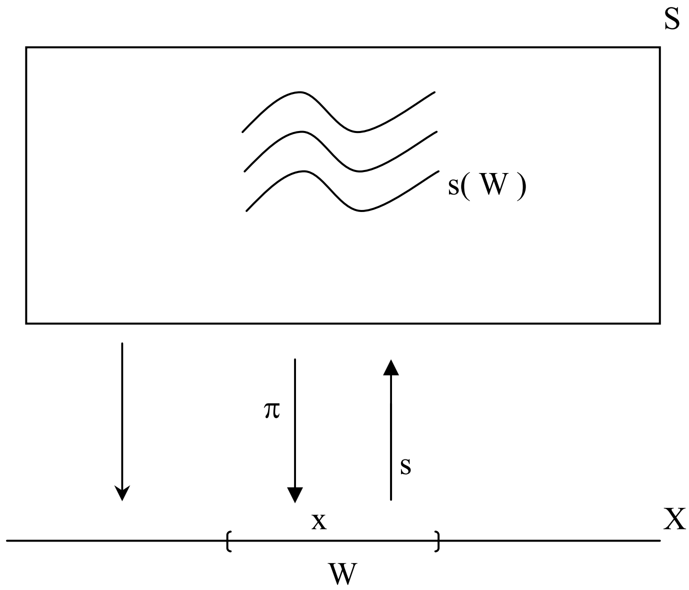
Teorem 3.3.8. (X_0, x_0), (X_1, x_1) noktalı topolojik uzaylar ve $f : (X_0, x_0) \to (X_1, x_1)$ bir homeomorfizm ise, bu takdirde $f^*: \pi_1(X_0, x_0) \to \pi_1(X_1, x_1)$ bir izomorfizmdir (Balcı 1982).

3.4. Demet Kavramı

Tarif 3.4.1. X, S iki topolojik uzay olsun. Eğer bir π $:S \rightarrow X$ tasviri bir lokal topolojik tasvir ise, bu taktirde (S, π) çiftine veya kısaca S’ ye X üzerinde bir **demet** denir.

Tarif 3.4.2. $\forall x \in X$ için $S_x = \pi^{-1}(x)$’ e x üzerinde (S, π) nin veya sadece S nin **sapı** denir.

Tarif 3.4.3. (S, π), X üzerinde bir demet, $W \subset X$ açık bir cümle, $s : W \rightarrow S$ sürekli bir tasvir öyle ki $\pi \circ s = 1_W$ olsun. Bu takdirde s ye S nin W üzerindeki bir **kesiti** denir. S nin W üzerindeki bütün kesitlerinin cümlesi $\Gamma(W, S)$ ile gösterilir (Grauret ve Fritzsche 1976).



Şekil 3.2. X üzerinde S demeti

Teorem 3.4.1. (S, π), X üzerinde bir demet, $W \subset X$ açık bir cümle ve $s \in \Gamma(W, S)$ olsun. Bu takdirde $\pi : s (W) \rightarrow W$ topolojiktir ve $s = (\pi| s(W))^{-1}$.

İspat. Her $x \in W$ için $\pi \circ s = 1_w$ olduğu göz önüne alınırsa,

$$(s \circ (\pi|s(W)) \circ s(x) = s(x)$$

$$s \circ (\pi|s(W) = 1$$

$$s = (\pi|s(W))^{-1}.$$

Teorem 3.4.2. (S, π), X üzerinde bir demet, $W \subset X$ bir açık cümle ve $s : W \to S$ sürekli bir tasvir öyle ki $\pi \circ s = 1_W$ olsun. $s \in \Gamma(W, S)$ olabilmesi için gerek ve yeter şart s(W) nin S de açık olmasıdır.

İspat. $s \in \Gamma(W, S)$ olsun. Farz edelim ki s süreklidir. $\sigma_0 \in s(W)$ herhangi bir nokta olsun. Bu noktanın bir iç nokta olduğunu göstereceğiz: $x_0 = \pi(\sigma_0)$, $s(x_0) = \sigma_0$ olsun. (S, π) bir demet olduğundan, $V(x_0) \subset W$, $U(\sigma_0) \subset S$ açık civarları vardır öyle ki $\pi|_U : U \to V \cap W$ topolojiktir.

s sürekli olduğundan dolayı da $s(V') \subset U$ olacak şekilde $V'(x_0) \subset V$ vardır. Buradan, $(\pi|_U) \circ (s|_{V'}) = (\pi \circ s)|_{V'} = 1_{V'}$ dir. Fakat, $(\pi|_U)^{-1}(V') = s(V') \subset s(W)$, σ_0 nın bir açık civarıdır. Yani, σ_0, $s(W)$ nin bir iç noktasıdır.

Karşıt olarak, $s(W)$, S de açık olsun. Göstereceğiz ki $s \in \Gamma(W, S)$ sürekli bir tasvirdir. Hipotezden $\pi \circ s = 1_W$ olup dolayısıyla, $(\pi|_{s(W)})^{-1} = s$ dir. Dolayısıyla, s süreklidir.

Teorem 3.4.3. (S, π), X üzerinde bir demet, $V \subset X$ bir açık cümle ve $\sigma \in S$ olsun. Bu taktirde $\sigma \in s(V)$ şartını sağlayan bir $s \in \Gamma(V,S)$ kesiti vardır Yani demetin her noktasından bir kesit geçer.

İspat. $x = \pi(\sigma)$ olsun. $U(\sigma) \subset S$ ve $V(x) \subset X$ açık civarlar olmak üzere $\pi|_U : U \to V$ topolojiktir. Bu durumda, V ve $s = (\pi|_U)^{-1}$ istenen şartları yerine getirir.

Teorem 3.4.4. (S,π), X üzerinde bir demet ve $W \subset X$ bir açık cümle olsun. Şayet s_1, $s_2 \in \Gamma(W, S)$ kesitleri bir $x \in W$ noktasında eşit yani, $s_1(x) = s_2(x)$ ise, bu takdirde s_1, s_2 kesitleri bir $V(x) \subset W$ açık civarında eşittirler.

İspat. Kabul edelim ki $\sigma = s_1(x) = s_2 (x)$ olsun. Bu takdirde $U = s_1 (W_1) \cap s_2 (W_2)$, σ nın açık bir civarıdır ve $\pi|_U : U \to V = \pi (U) \subset W$ tasviri topolojiktir. Dolayısıyla $s_1|_V = (\pi|_U)^{-1} = s_2|_V$ dir.

Tarif 3.4.4. (S_1, π_1), (S_2, π_2) X üzerinde iki demet olsun.

(i) $\pi_2 \text{ o } \varphi = \pi_1$ özeliğini sağlayan $\varphi : S_1 \to S_2$ tasvirine **sapları muhafaza ediyor** denir.

(ii) Sapları muhafaza eden sürekli bir $\varphi : S_1 \to S_2$ tasvirine **demet morfizmi** denir.

(iii) Sapları muhafaza eden topolojik bir $\varphi : S_1 \to S_2$ tasvirine **demet izomorfizmi** denir.

(iv) $\varphi : S_1 \to S_2$ demet morfizmine **açık tasvir** denir, şayet S_1 de herhangi bir açık cümlenin φ altındaki resmi S_2 de bir açık ise (Balcı 1981).

Teorem 3.4.5. (S_1, π_1), (S_2, π_2) X üzerinde iki demet ve $\varphi : S_1 \to S_2$ sapları muhafaza eden bir tasvir olsun. Bu takdirde aşağıdaki ifadeler denktirler:

(i) φ bir demet morfizmidir.

(ii) Herbir $W \subset X$ açık cümlesi ve herbir $s \in \Gamma(W, S_1)$ kesiti için, $\varphi o s \in \Gamma(W, S_2)$.

(iii) Herbir $\sigma \in S_1$ için bir $W \subset X$ açık cümlesi ve bir $s \in \Gamma(W, S_1)$ kesiti vardır öyle ki $\sigma \in s (W)$ ve $\varphi \text{ o } s \in \Gamma(W, S_2)$.

İspat. (i)$\Rightarrow$(ii): φ bir demet morfizmi ise süreklidir. $W \subset X$ açık ve $s \in \Gamma(W, S_1)$ ise, bu takdirde $\varphi \text{ o } s$ de süreklidir. Üstelik , $\pi_2 \text{ o } (\varphi \text{ o } s) = (\pi_2 \text{ o } \varphi) \text{ o } s = \pi_1 \text{ o } s = 1_W$ dir. O halde $\varphi \text{ o } s \in \Gamma(W, S_2)$.

(ii)$\Rightarrow$(iii): $\sigma \in S_1$ ise, bu takdirde bir $W \subset X$ açık cümlesi ve bir $s \in \Gamma(W, S_1)$ vardır öyle ki $\sigma \in s (W)$, (ii) deki şartlar sağlandığından dolayı, $\varphi \text{ o } s \in \Gamma(W, S_2)$.

(iii)$\Rightarrow$(i): (iii) deki şartlar altında, $s : W \to s (W)$ topolojiktir.O halde,

$$\varphi|s (W) = (\varphi \text{ o } s) \text{ o } s^{-1} : s (W) \to S_2$$

süreklidir ve dolayısıyla φ, σ da süreklidir.

3.5. Esas Grupların Demeti

Bu kısımda demetlere bir örnek olarak daha önce S. Balcı (1982) tarafından teşkil edilen esas grupların demetini takdim edip bazı karakterizasyonlar vereceğiz.

X lokal eğrisel irtibatlı bir topolojik uzay olmak üzere, her $x\in X$ noktasına bu noktadaki $H_x = \pi_1(X,x)$ esas grubu karşılık tutarak, esas grupların ayrık birleşimlerinin cümlesini

$$H = \bigvee_{x\in X} H_x$$

ile gösterelim. H, X üzerinde bir cümledir ve her $\sigma_x = [\alpha]_x \in H_x$ için $\varphi(\sigma_x) = \varphi([\alpha]_x) = x$ ile tarif edilen $\varphi : H\to X$ tabii tasviri üzerinedir.

Şimdi H cümlesi üzerinde, φ tasvirini lokal topolojik kılan ve her $H_x = \pi_1(X,x)$ üzerinde diskret topoloji oluşturan bir tabii topoloji inşa edelim:
$x\in X$ keyfi sabit bir nokta olsun. X lokal eğrisel irtibatlı olduğundan her $x\in X$ için x noktasının eğrisel irtibatlı bir açık civarı vardır. Bu civarı $W = W(x)$ ile gösterelim. Açıktır ki W nin tespiti için $x\in X$ noktasının tespiti kafidir.

Ayrıca, W eğrisel irtibatlı olduğundan her $y\in W$ için başlangıç noktası x, bitim noktası y olan W de bir γ eğrisi daima vardır. Diğer taraftan, x deki α kapalı eğrisi için $(\gamma^{-1}\alpha)\,\gamma$ da y de bir kapalı eğridir. Eğer $\alpha_1 \sim \alpha_2$ ise

$$(\gamma^{-1}\alpha_1)\, \gamma \sim (\gamma^{-1}\alpha_2)\, \gamma \text{ ve } [(\gamma^{-1}\alpha_1)\, \gamma]_y = [(\gamma^{-1}\alpha_2)\, \gamma]_y$$

dir. O halde, $W=W(x)$ için x deki kapalı eğrilerden faydalanarak, bir $s : W\to H$ tasvirini her $y\in W$ için α, x de bir kapalı eğri olmak üzere,

$$s(y) = [(\gamma^{-1}\alpha)\, \gamma]_y \in \pi_1(X, y) \subset H$$

şeklinde tarif edebiliriz. Açıktır ki, bu şekilde tarifi yapılan s tek anlamlıdır ve aşağıdaki şartları sağlar:
(1) Her $y\in W$ için, $(\varphi \circ s)(y) = \varphi(s(y)) = \varphi([(\gamma^{-1}\alpha)\, \gamma]_y) = y$. O halde, $\varphi \circ s = 1_W$.

(2) $W = W(x)$ için α, x de kapalı bir eğri, γ x de sıfır eğri ise, bu takdirde $(\gamma^{-1}\alpha)\gamma \sim \alpha$, dolayısıyla $s(x) = [(\gamma^{-1}\alpha)\gamma]_x = [\alpha]_x \in s(W)$ dir.

Şimdi, $W = W(x)$, α, x de bir kapalı eğri ve $y \in W$ herhangi bir nokta olsun. γ başlangıç noktası x, bitim noktası y olan W de bir eğri olmak üzere

$$(\gamma^{-1}\alpha)\gamma = \beta$$

diyelim. Dolayısıyla

$$[(\gamma^{-1}\alpha)\gamma]_y = [\beta]_y$$

ve buradan

$$s(W) = \bigcup_{y \in W} [\beta]_y$$

olarak yazılabilir. s(W) yi açık cümle olarak tarif edersek, gösterebiliriz ki

$$\tau = \{ s(W) : W = W(x) \subset X \text{ açık}, s \in \Gamma(W, H) \}$$

ailesi H üzerinde bir topoloji tabanıdır: Bunun için $s_1(W_1)$, $s_2(W_2) \in \tau$ olmak üzere $s_1(W_1) \cap s_2(W_2) \in \tau$ olduğunu göstermek yeterlidir:

(i) $s_1(W_1) \cap s_2(W_2) \neq \varnothing$ ise, enaz bir $[\alpha]_y \in s_1(W_1) \cap s_2(W_2)$ vardır ve

$$\varphi([\alpha]_y) = y \in (W_1 \cap W_2)$$

dir. O halde

$$[\alpha]_y \in s_1(W_1) \text{ ve } [\alpha]_y \in s_2(W_2)$$

$$[\alpha]_y = s_1(y), \quad y \in W_1$$

$$[\alpha]_y = s_2(y), \quad y \in W_2$$

dir. Buradan,

$$s_1(y) = s_2(y), \; y \in (W_1 \cap W_2)$$

$$s_1 \mid W_1 \cap W_2 = s_2 \mid W_1 \cap W_2$$

$$s_1 = s_2$$

$$s_1 \mid W_1 = s_2 \mid W_2$$

dir. Teorem 3.4.4 den,

$$s_1(W_1) = s_2(W_2)$$

dir.O halde

$$s_1(W_1) \cap s_2(W_2) = s_1(W_1) = s_2(W_2)$$

ve buradan

$$s_1(W_1) \cap s_2(W_2) \in \tau$$

bulunur.

(ii) $s_1(W_1) \cap s_2(W_2) = \varnothing$ ise, $\varnothing \in \tau$ olduğundan, $s_1(W_1) \cap s_2(W_2) \in \tau$. Dolayısıyla τ, H üzerinde bir topoloji tabanıdır ve H nın açık cümleleri τ nun elemanlarının keyfi birleşimleridir. Dolayısıyla, bu topoloji ile birlikte H bir topolojik uzaydır.

Şimdi gösterelim ki, $\varphi : H \to X$ tabii tasviri bir lokal topolojik tasvirdir:
Bunun için göstermeliyiz ki, her $\sigma=[\beta]_y \in H$, $y \in X$ için bir $U(\sigma) \subset H$ ve $W(y = \varphi(\sigma)) \subset X$ açık civarı vardır öyle ki $\varphi|_U : U \to W$ bir topolojik tasvirdir.

Halbuki, $\sigma = [\beta]_y \in H$ için $\varphi(\sigma) = \varphi([\beta]_y) = y$ dir. Bu takdirde, y yi ihtiva eden W eğrisel irtibatlı açık civarı için bir $s:W \to H$ tasviri vardır öyle ki $s(y) = \sigma$ dir.

$$U = s(W),\ \varphi|_U = \varphi^*$$

diyelim.

(1) $\varphi^* : U \to W$ birebirdir. Gerçekten, $x \in X$ ve s tasviri x deki kapalı eğriler yardımıyla tarif edilmiş ise, bu takdirde herhangi $\sigma_1, \sigma_2 \in s(W)$ için başlangıç noktası x, bitim noktası sırasıyla $y_1, y_2 \in W$ olan W de γ_1, γ_2 eğrileri vardır öyle ki

$$\sigma_1 = s(y_1) = [(\gamma_1^{-1}\alpha) \gamma_1]_{y_1} = [\beta_1]_{y_1} \quad \sigma_2 = s(y_2) = [(\gamma_2^{-1}\alpha) \gamma_2]_{y_2} = [\beta_2]_{y_2}$$

dir. Şimdi, $\varphi^*(\sigma_1) = \varphi^*(\sigma_2)$ ise, $y_1 = y_2$ dir. Bu taktirde $\gamma_1 \sim \gamma_2$ dir. Bu da $\sigma_1 = \sigma_2$ olması demektir. O halde φ^* birebirdir.

(2) $\varphi^* : U \to W$ süreklidir. Gerçekten, $\sigma \in U = s(W)$ herhangi bir nokta $\varphi^*(\sigma) = y \in W$ ve $V=V(y) \subset W$ herhangi bir civar olmak üzere $s(V) \subset U = s(W)$, σ nın bir civarıdır ve $\varphi^*(s(V)) = V \subset W$ dir. Dolayısıyla, φ^* süreklidir.

(3) $(\varphi^*)^{-1} : W \to U$ süreklidir. Gerçekten, $y \in W$ herhangi bir nokta, $s(y) = \sigma \in U$ ve $U' = U'(\sigma) \subset U$ de σ nın bir civarı ise, bu takdirde $\varphi^*(U') \subset W$, y nin W de bir civarıdır ve $s(\varphi^*(U')) = U'$ dir . O halde s süreklidir (Balcı 1982).

Sonuç olarak aşağıdaki teoremi ifade edebiliriz.

Teorem 3.5.1. X bir lokal eğrisel irtibatlı topolojik uzay ve her $x \in X$ e tekabül eden esas grup $\pi_1(X,x)$ olmak üzere, $H = \bigvee_{x \in X} \pi_1(X,x)$ ve $\sigma_x = [\alpha]_x \in \pi_1(X,x)$, $x \in X$ için $\varphi(\sigma_x) = \varphi([\alpha]_x) = x$ olarak tanımlanan $\varphi : H \to X$ tabii tasvir olsun. Bu takdirde, (H,φ) ikilisi X üzerinde bir demettir.

Tarif 3.5.1. Teorem 3.5.1. ile elde edilen (H,φ) demetine X üzerinde **esas grupların demeti** denir.

Herbir $x \in X$ için $\pi_1(X,x) = \varphi^{-1}(x)$ esas grubuna demetin x üzerindeki **sapı** denir.
Biliyoruz ki, $x \in X$ herhangi bir nokta ise, X lokal eğrisel irtibatlı olduğundan, x i ihtiva eden bir $W=W(x)$ eğrisel irtibatlı açık civarı ve bu civar üzerinde $\pi \circ s = 1_W$ şartını sağlayan bir $s : W \to H$ sürekli tasviri vardır. Bu s tasvirine H nın W üzerindeki **kesiti** denir. H nın W üzerindeki bütün kesitlerinin cümlesi de $\Gamma(W,H)$ ile gösterilir.

Teorem 3.5.2. X bir lokal eğrisel irtibatlı topolojik uzay, (H, φ) X üzerinde esas grupların demeti ve $\Gamma(W, H)$, W üzerindeki bütün kesitlerin cümlesi olsun. Bu takdirde $\Gamma(W, H)$ cümlesi, noktasal çarpma işlemiyle birlikte, bir gruptur.

İspat. Noktasal çarpma işlemini herhangi $y \in W$ için $(s_1.s_2)(y) = s_1(y).s_2(y)$ şeklinde tarif edelim. İddia ediyoruz ki her $s_1, s_2 \in \Gamma(W, H)$ için $s_1.s_2 \in \Gamma(W, H)$ dır.

Gerçekten herhangi s_1, $s_2 \in \Gamma(W, H)$ ve $y \in W$ için α_1, α_2 $x \in W$ de kapalı eğriler ve γ, x noktasını y noktasına birleştiren eğri olmak üzere

$$s_1(y) = [(\gamma^{-1}\alpha_1)\gamma]$$
$$s_2(y) = [(\gamma^{-1}\alpha_2)\gamma]$$

dir. O halde, $s_1(y).s_2(y) = [(\gamma^{-1}\alpha_1)\gamma].[(\gamma^{-1}\alpha_2)\gamma] = [(\gamma^{-1}\alpha_1\alpha_2)\gamma] \in \pi_1(X,y)$ dir. Dolayısıyla, $s_1.s_2 \in \Gamma(W,H)$ dir.

(1) Özdeş Eleman : Her $s \in \Gamma(W,H)$ ve $y \in W$ için δ, $x \in W$ de sıfır eğri olmak üzere $I(y) = [(\gamma^{-1}\delta)\gamma]$ şeklinde tarifli $I \in \Gamma(W,H)$ kesitini gözönüne alalım. $(\gamma^{-1}\delta)\gamma \sim \gamma^{-1}\gamma$ dır. Dolayısıyla $I(y) = [\gamma^{-1}\gamma] = [1]$, 1_Y de sıfır eğri ve

$$(I.s)(y) = I(y).s(y) = [(\gamma^{-1}\delta)\gamma][(\gamma^{-1}\alpha)\gamma] = [(\gamma^{-1}(\delta\alpha)\gamma] = [\gamma^{-1}(\alpha)\gamma] = s(y)$$

$$(s.I)(y) = s(y).I(y) = [(\gamma^{-1}\alpha)\gamma][(\gamma^{-1}\delta)\gamma] = [(\gamma^{-1}(\alpha\delta)\gamma] = [\gamma^{-1}(\alpha)\gamma] = s(y)$$

dir. Dolayısıyla $I \in \Gamma(W,H)$ özdeş elemandır.

(2) Ters eleman : $s \in \Gamma(W, H)$ herhangi bir kesit ve her $y \in W$ için α, $x \in W$ de kapalı bir eğri olmak üzere $s(y) = [(\gamma^{-1}\alpha)\gamma]$ olsun. Şimdi $\delta = \alpha^{-1}$ olmak üzere her $y \in W$ için

$$s^{-1}(y) = [(\gamma^{-1}\delta)\gamma]$$

şeklinde tarifli $s^{-1} : W \to H$ tasvirini göz önüne alalım. $s^{-1} \in \Gamma(W, H)$ ve

$(s.s^{-1})(y)=s(y)s^{-1}(y)=[(\gamma^{-1}\alpha)\gamma][(\gamma^{-1}\delta)\gamma]=[(\gamma^{-1}\alpha)\gamma(\gamma^{-1}\delta)\gamma]=[(\gamma^{-1}\alpha\delta)\gamma]=[\gamma^{-1}\alpha\alpha^{-1}\gamma]=[\gamma^{-1}\gamma]=[1]$
$=I(y)$.

$(s^{-1}s)(y)=s^{-1}(y)s(y)=[(\gamma^{-1}\delta)\gamma][(\gamma^{-1}\alpha)\gamma]=[(\gamma^{-1}\delta)\gamma(\gamma^{-1}\alpha)\gamma]=[(\gamma^{-1}\delta\alpha)\gamma]=[\gamma^{-1}\alpha^{-1}\alpha\gamma]=[\gamma^{-1}\gamma]=[1]=I(y)$

dir. O halde, $ss^{-1} = s^{-1}s$. Dolayısıyla $s^{-1}\in\Gamma(W, H)$, s nin tersidir.

(3) Asosyatiflik : Her $s_1, s_2, s_3\in\Gamma(W, H)$ için, $s_1.(s_2.s_3) = (s_1.s_2).s_3$ olduğu kolaylıkla gösterilebilir.

Böylece, $(\Gamma(W, H), .)$ bir gruptur.

Teorem 3.5.3. $f : X_1 \to X_2$ sürekli bir tasvir olsun. Bu durumda sapları muhafaza eden bir
$f^* : H_1 \to H_2$ demet morfizmi vardır (Balcı 1982).

İspat. $x_1\in X_1$ herhangi bir nokta ve α, x_1 de kapalı bir eğri olsun. $x_2\in X_2$ için $fo\alpha$, $f(x_1)=x_2$ noktasında kapalı bir eğridir ve $[f \circ \alpha]\in (H_2)_{x_2}$ dir. Diğer taraftan, α_1 ve α_2, $x_1\in X_1$ noktasında kapalı eğrilerdir öyle ki $\alpha_1 \sim \alpha_2$ ise $f \circ \alpha_1 \sim f \circ \alpha_2$. dir. Böylece her $[\alpha]_{x_1} =\sigma_{x_1} \in (H_1)_{x_1} \subset H_1$ için bir $f^*:H_1\to H_2$ vardır öyle ki $f^*(\sigma_{x_1})=f([\alpha]_{x_1})=[f \circ \alpha]_{f(x_1)=x_2}$ dir. f^* tasviri iyi tariflidir .

Şimdi de f^* ın sürekli olduğunu gösterelim: $U_2\subset f^*(H_1)\subset H_2$ açık bir altcümle olsun. Genelliği kaybetmeksizin, kabul edelim ki $W_2\subset X_2$ açık cümlesi için $U_2 = t(W_2)$ ve $t\in\Gamma(W_2,H_2)$ kesitidir. Böylece $\varphi_2(t(W_2)) =W_2$ olur. f nin sürekliliğinden dolayı
$f^{-1}(W_2) = W_1 \subset X_1$ bir açık cümledir. Şimdi kabul edelim ki $\sigma_{x_2} \in U_2$ olsun.

$f^*(\sigma_{x_1}) = \sigma_{x_2}$ olacak şekilde en az $\sigma_{x_1} \in U_1 = (f^*)^{-1} (U_2)$ elemanı vardır. $s(x_1) = \sigma_{x_1}$ ve $s(W_1)\subset H_1$ açık cümlesi için $\varphi(\sigma_{x_1}) = x_1\in W_1$ olmak üzere $s\in\Gamma(W_1, H_1)$ kesiti vardır. Dolayısıyla $s(W_1) \subset U_1$ dir.

Gösterilebilir ki $U_1 = \bigcup_{i\in I} s_i(W_1)$ dir. Burada, $U_1 \subset H_1$ bir açık cümledir ve f^* sürekli bir tasvirdir.

Sonuç 3.5.1. $f : X_1 \to X_2$ bir topolojik tasvir olsun. Bu takdirde X_1 ve X_2 üzerindeki H_1 ve H_2 demetleri izomorftur.

Teorem 3.5.4. $f{:}X_1 \to X_2$ sürekli bir tasvir olsun. Bu takdirde bir $f{:}\Gamma(X_1, H_1) \to \Gamma(X_2,H_2)$ homomorfizmi vardır.

İspat. $f : (X_1, c_1) \to (X_2, f(c_1) = c_2)$ sürekli tasvirler olsun. Biliyoruz ki $f^*: H_1 \to H_2$ bir demet homomorfizmidir, yani her $\sigma_{c_1} = [\alpha]_{c_1} \in (H_1)_{c_1}$, X_1 üzerinde bir tek s kesiti tarif eder öyle ki her $x_1 \in X_1$ için $s(x_1)=[(\gamma^{-1}\alpha)\gamma]_{x_1}$ dir. Diğer taraftan, $f^*([\alpha]_{c_1})=[fo\alpha]_{c_2} \in (H_2)_{c_2}$ ve $[fo\alpha]_{c_2}$, X_2 üzerinde bir t kesitini tanımlar öyle ki herhangi $x_2 \in X_2$ için $t(x_2)=[(\delta^{-1}fo\alpha)\delta]_{x_2}$ dir. Bu durumda $(H_1)_{c_1}$ ve $(H_2)_{c_2}$ arasındaki $[\alpha]_{c_1} \leftrightarrow [fo\alpha]_{c_2}$ eşlemesi, $\Gamma(W_1, H_1)$ ve $\Gamma (W_2, H_2)$ arasında $s \leftrightarrow t$ eşlemesini verir. Eğer bu eşlemeyi $f_* (s(x_1)) = f^* [(\gamma^{-1}\alpha) \gamma]_{x_1} = [(\delta^{-1} f \circ \alpha) \delta]_{x_2} = t (x_2)$ şeklinde tanımlarsak, bu durumda $f_* : \Gamma(X_1, H_1) \to \Gamma(X_2, H_2)$ tasviri bir homomorfizmdir.

4. MANİFOLDLAR ve LIE GRUPLARI

Bu bölümde çalışmamızın bundan sonraki kısmında taban uzay olarak kullanacağımız manifoldlar ve Lie gruplarını ele alıp temel özellikleri itibarı ile inceleyeceğiz.

4.1. Manifoldlar

Tarif 4.1.1. M bir topolojik uzay olsun. M aşağıdaki şartları sağlıyorsa, bu taktirde M ye bir **n-boyutlu bir topolojik manifold** (topolojik n-manifold) denir.
(M_1) M bir Hausdorff uzayıdır.
(M_2) M nin herbir açık altcümlesi R^n nin bir açık altcümlesine homeomorftur.
(M_3) M nin sayılabilir bir açık örtüsü vardır.

Tarif 4.1.2 M bir topolojik uzay olsun. U, M nin bir açık altcümlesi ve V, R^n nin bir açık altcümlesi olmak üzere bir $\psi:U\to V$ homeomorfizmine M topolojik uzayı üzerinde **n-boyutlu bir koordinat dönüşümü** denir.

Tarif 4.1.3. U, R^n de bir açık altcümle olmak üzere eğer bir $f : U \to R$ fonksiyonunun k. mertebeden bütün kısmi türevleri var ve sürekli ise f fonksiyonu **C^k sınıfından diferensiyellenebilirdir** denir. U da C^k sınıfından diferensiyellenebilir fonksiyonların cümlesi $C^k(U, R)$ ile gösterilir, yani

$$C^k(U, R) = \{ f \mid f : U \to R \text{ ve f fonksiyonu } C^k \text{ sınıfından diferensiyellenebilir} \}$$

dir.

Tarif 4.1.4. U, V, sırasıyla, R^m ve R^n de birer açık altcümle olsunlar. Bir $\psi : U \to V$, $u\to\psi(u)=(x_1(u),x_2(u),...,x_n(u))$ fonksiyonu için bütün $x_i : U \to R$ koordinat fonksiyonları C^k sınıfından ise $\psi\in C^k(U,V)$ dir denir. x_i fonksiyonlarına ψ nin **Öklid koordinat fonksiyonları** adı verilir,

$$C^k(U, V) = \{ \psi \mid \psi\in C^k(U, V), k\in N \}$$

ile gösterilir.

Tarif 4.1.5. U ile V, $\mathbb{R}^n$ nin iki açık altcümlesi olsun. Bir ψ:U$\rightarrow$V fonksiyonu için aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa ψ ye C^k sınıfından bir **diffeomorfizm** ve U ile V ye de **k. dereceden diffeomorftur** denir.

(i) $\psi \in C^k(U,V)$.

(ii) $\psi^{-1}:V \rightarrow U$ var ve $\psi^{-1} \in C^k(V,U)$.

Tarif 4.1.6. M, n-boyutlu bir topolojik manifold ve U, M nin bir açık altcümle olsun. Şayet U bir ψ homeomorfizmi ile $\mathbb{R}^n$ nin bir E açık altcümlesine eşlenebiliyorsa,yani

$$\psi : U \rightarrow E$$

bir homeomorfizm ise (U, ψ) ikilisine M de bir **koordinat komşuluğu** veya **harita** denir.

$u \in U$ için $\psi(u) \in \mathbb{R}^n$ dir ve $\psi(u)=(x_1(u),...,x_n(u))$, $x_i(u) \in R$, $1 \leq i \leq n$ dir. $x_1(u),...,x_n(u)$; $u \in U$ noktasının (U, ψ) koordinat komşuluğuna göre **lokal koordinatlarıdır**.

$x_i(u)$ reel sayısına $\psi(u)$ noktasının **i-yinci koordinatı** ve $x_i : U \rightarrow R$ fonksiyonuna da **koordinat fonksiyonu** denir.

Tarif 4.1.7. M bir topolojik n-manifold ve M nin bir açık örtüsü $\{ U_\alpha \}_{\alpha \in A}$ olsun. Buradaki A, α indislerinin cümlesidir. $\mathbb{R}^n$de, U_α ya bir ψ_α homeomorfizmi altında homeomorf olan açık cümle E_α olsun. Böylece ortaya çıkan (U_α, ψ_α) haritalarının $\{ (U_\alpha, \psi_\alpha) \}_{\alpha \in A}$ koleksiyonuna M nin bir **atlası** (koordinat komşuluğu sistemi) denir.

Şimdi de bir manifold üzerinde diferensiyellenebilir yapıyı tarif edelim:

M bir topolojik n-manifold ve bir $p \in M$ noktasının açık komşulukları da U_α ve U_β olsun. Şekilden de görüleceği gibi U_α ve U_β için $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ ise $U_\alpha \cap U_\beta$ nin her noktasında $(x_\alpha^1,...,x_\alpha^n)$ ve $(x_\beta^1,...,x_\beta^n)$ gibi iki koordinat sistemi tanımlıdır.

$\psi_\alpha (U_\alpha \cap U_\beta) \subset E_\alpha \subset R^n$ ve $\psi_\beta (U_\alpha \cap U_\beta) \subset E_\beta \subset R^n$ birer açık cümledirler.

$$\psi_\beta \circ \psi_\alpha^{-1} : \psi_\alpha (U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow \psi_\beta (U_\alpha \cap U_\beta)$$

fonksiyonu iki homeomorfizmin bileşkesi olduğundan bir homeomorfizmdir.

$\phi_{\beta\alpha}=\psi_\beta \circ \psi_\alpha^{-1}$olsun. O halde her $u\in\psi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ noktası için,

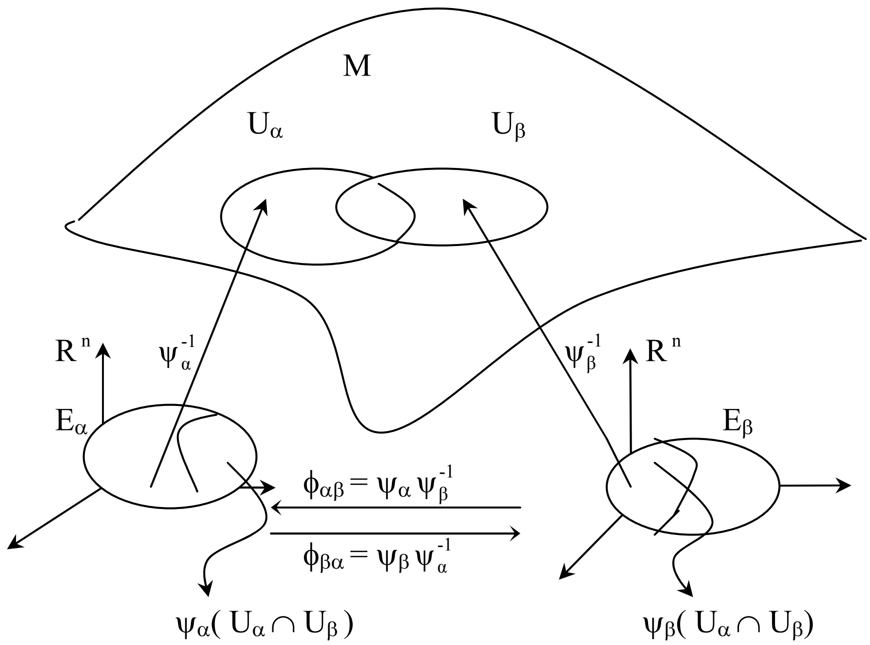
$$\phi_{\beta\alpha}(u) = \psi_\beta(\psi_\alpha^{-1}(u)) \quad (1)$$

yazılabilir. Bir $p\in M$ noktasının komşuluklarından biri U_α olmak üzere bir $f : U_\alpha\subset M\to R$ fonksiyonu sürekli olsun. p nin bir açık komşuluğu U_α ise U_α nın noktaları kendilerinin lokal koordinatları ile belirtilirler.Dolayısıyla f fonksiyonuna n değişkenin bir sürekli fonksiyonu olarak bakabiliriz. Eğer bu fonksiyon $(x_\alpha^1(p),...,x_\alpha^n(p))$ noktasında diferensiyellenebilir ise **f ye $p\in M$ noktasında diferensiyellenebilir** denir (Şekil 4.1).

(1) eşitliğinden $\phi_{\beta\alpha}(x_\alpha^1(p),...,x_\alpha^n(p))=(x_\beta^1(p),...,x_\beta^n(p))$ elde edilir. Benzer şekilde $\phi_{\alpha\beta}((x_\beta^1(p),...,x_\beta^n(p))=(x_\alpha^1(p),...,x_\alpha^n(p))$ yazılabilir.

Eğer $\phi_{\alpha\beta}$ nın bütün $\phi^i_{\alpha\beta}$, $1\leq i\leq n$, bileşenleri diferensiyellenebilir ise $\phi_{\alpha\beta}$ diferensiyellenebilirdir denir.

Tersine $\phi_{\alpha\beta}$ nın diferensiyellenebilir olması demek $\phi^i_{\alpha\beta}$ bileşenlerinin diferensiyellenebilir olması demektir.



Şekil 4.1. Diferensiyellenebilir manifold

Tarif 4.1.8. M bir n-boyutlu topolojik manifold ve $S=\{ (U_\alpha,\psi_\alpha) \}_{\alpha\in A}$ de M nin bir atlası olsun. Eğer S atlası aşağıdaki özelliğe sahip ise S ye C^k, $k\geq 1$, sınıfındandır denir: $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ olmak üzere her α, $\beta \in A$ için,

$$\phi_{\alpha\beta}=\psi_\alpha o \psi_\beta^{-1}: \psi_\beta(U_\alpha\cap U_\beta)\rightarrow\psi_\alpha(U_\alpha\cap U_\beta)$$

$$\phi_{\beta\alpha}=\psi_\beta o \psi_\alpha^{-1}: \psi_\alpha(U_\alpha\cap U_\beta)\rightarrow\psi_\beta(U_\alpha\cap U_\beta)$$

fonksiyonları C^k sınıfından ise. Eğer S atlası M üzerinde C^k sınıfından ve kendisinden başka hiçbir atlas tarafından ihtiva edilmiyor ise S ye M üzerinde bir **C^k sınıfından diferensiyellenebilir yapı** denir.

Tarif 4.1.9. M bir topolojik n- manifold olsun. Eğer M üzerinde C^k sınıfından bir diferensiyellenebilir yapı varsa, M ye C^k sınıfından **diferensiyellenebilir manifold** denir.

Örnek 4.1.1. $S^1 = \{x\in R^2 \mid d(x,0)=1\}$, 1-manifoldu diferensiyellenebilir bir manifolddur.

$$U = \{ u\in R \mid 0<u<2\pi \}$$

olmak üzere bir ψ tasvirini

$$\psi : \rightarrow U\subset R^1 \rightarrow W\subset S^1\subset R^2,\ \psi(u) = (\cos u, \sin u)$$

ile tarif edelim, burada

$$x_1(u) = \cos u,\ x_2(u) = \sin u$$

dur.

x_1 ve x_2 fonksiyonları ve tersleri sürekli olduklarından ψ bir homeomorfizmdir. O halde U nin P ve Q gibi iki noktası için $x_i(P) = x_i(Q)$ $(1\leq i\leq n)$ ise P = Q dır.

$x_1(p),...,x_n(p)$ reel sayılarına $p \in W$ noktasının (W, ψ) koordinat komşuluğuna göre, **lokal koordinatları** ve U üzerinde tarifli olan $(x_1, x_2, ..., x_n)$ reel değerli fonksiyon n-lisine de (W, ψ) üzerindeki **lokal koordinat sistemi** denir.

$$W_1 = \{ (x_1,x_2) \in S^1 \mid x_2>0 \}$$
$$W_2 = \{ (x_1,x_2) \in S^1 \mid x_2<0 \}$$
$$W_3 = \{ (x_1,x_2) \in S^1 \mid x_1>0 \}$$
$$W_4 = \{ (x_1,x_2) \in S^1 \mid x_1<0 \}$$

cümleleri S^1 in birer açık altcümleler olup

$$S^1 = W_1 \cup W_2 \cup W_3 \cup W_4$$

dir. Şimdi I, J [-1, 1] kapalı aralığı ve

$$\psi_i^{-1} : W_i \to I, \quad I = \{ x_i \mid -1 \leq x_1 \leq 1,\ i = 1,2 \}$$
$$\psi_j^{-1} : W_j \to J, \quad J = \{ x_j \mid -1 \leq x_1 \leq 1,\ j = 3, 4 \}$$

olmak üzere,

$$\psi_1^{-1}(x_1, x_2) = x_1,$$
$$\psi_2^{-1}(x_1,x_2) = x_1$$
$$\psi_3^{-1}(x_1,x_2) = x_2,$$
$$\psi_4^{-1}(x_1,x_2) = x_2$$

fonksiyonlarını tarif edelim. Burada

$$x_1 = \cos u,$$
$$x_2 = \sin u$$

dur.

Açık olarak ψ_i^{-1} ve ψ_j^{-1} fonksiyonları birer homeomorfizm olduğundan S^1 topolojik 1-manifoldunun bir atlası

$$\{ (\psi_i, W_i)_{i=1,2,3,4} \} = \{ (\psi_1, W_1),(\psi_2, W_2),(\psi_3, W_3),(\psi_4, W_4) \}$$

dir. Burada

$$W_1 \cap W_3 = \{ (x_1,x_2) \in S^1 \mid x_1 x_2 > 0 \}$$

olduğundan,

$$\psi_1^{-1}(W_1 \cap W_3) = J = \{ t \mid o<t<1 \},$$

$$\psi_3^{-1} (W_1 \cap W_3) = J = \{ s \mid o<s<1 \}$$

ve koordinat geçiş fonksiyonları,

$$\varphi_{31}(u) = (\psi_3^{-1} o \psi_1)(u) = \psi_3^{-1} (\psi_1(u)) = \psi_3^{-1} (x_1(u), x_2(u)) = x_2 = \sqrt{1-t^2}$$

$$\varphi_{13}(u) = (\psi_1^{-1} o \psi_3)(u) = \psi_1^{-1} (\psi_3(u)) = \psi_1^{-1} (x_1(u), x_2(u)) = x_1 = \sqrt{1-s^2}$$

biçimindedir. φ_{31} ve φ_{13} fonksiyonları $0<t<1$ için diferensiyellenebilirdirler.

Benzer şekilde φ_{12}, φ_{21}, φ_{23}, φ_{32} fonksiyonları da hesaplanarak diferensiyellenebilir oldukları görülür.

O halde S^1 1-manifoldu diferensiyellenebilir bir manifolddur.

4.2. Lie Grupları

Tarif 4.2.1. Bir G cümlesi verilsin. Şayet G aşağıdaki şartları sağlıyorsa, bu taktirde G ye bir **topolojik grup** denir.

(1) **(** G, .) grupdur.

(2) G bir topolojik uzaydır.

(3) $. : G \times G \to G, \ (x, y) \to x.y^{-1}$ tasviri süreklidir.

Tarif 4.2.2. Bir G cümlesi verilsin. Şayet G aşağıdaki şartları sağlıyorsa, bu taktirde G ye bir **Lie grubu** denir.

(1) G bir analitik manifolddur.

(2) (G, .) bir grupdur.

(3) . : $G \times G \to G$, $(x, y) \to x.y^{-1}$ analitik tasvirdir.

Aynı tarifi bir başka şekilde de verebiliriz:

Bir G cümlesi verilsin. Şayet G aşağıdaki şartları sağlıyorsa, bu taktirde G ye bir **Lie grubu** denir.

(1) G bir diferensiyellenebilir manifolddur.

(2) (G, .) bir grupdur.

(3) . : $GxG \to G$, $(x,y) \to xy^{-1}$ diferensiyellenebilir tasvirdir.

Tarif 4.2.3. G bir Lie grubu olsun. Eğer G bir kompakt manifold ise bu taktirde G ye **kompakt Lie grubu** denir.Eğer G irtibatlı ise G ye **irtibatlı Lie grubu** denir.

Tarif 4.2.4. Eğer G ve H iki Lie grubu ve f, G den H ya bir analitik homomorfizm ise, bu taktirde f ye bir **Lie homomorfizmi** denir. Eğer, f nin tersi var ve analitik ise, bu taktirde f ye bir **Lie izomorfizmi** denir (Warner 1983).

Sonuç 4.2.1. İki Lie grubu arasında her sürekli homomorfizm bir Lie homomorfizmidir ve dolayısıyla her topolojik izomorfizm bir Lie izomorfizmdir.

Tarif 4.2.5. Elemanları birer matris olan Lie grubuna **matris Lie grubu** denir.

Örnek 4.2.1. $S^1 \cong R/Z$ olmak üzere S^1 birim çemberi bir Lie grubudur. Daha önce S^1 in diferensiyellenebilir manifold olduğunu gösterdik. Şimdi de S^1 in analitik manifold olduğunu gösterip daha sonra onun bir Lie grubu olduğunu gösterelim:

$$S^1=\{ x\in R^2 \mid \sum_{i=1}^{2} x_i^2 =1\}$$

olmak üzere $S^1 \cong R/Z$ dir. Gerçekten (R,+) bir Abel grubu ve Z, R nin normal altgrubudur.

$$\pi : R \to R/\text{Çek}f$$

ve

$$f : R \to S^1,\ f(t) = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$$

olarak tarif edilirse f bir epimorfizmdir ve Çekf =Z dir. Dolayısıyla 1. İzomorfizm teoreminden $R/Z \cong S^1$ dir.

Açık olarak R bir Lie grubu ve Z bir diskret normal altgruptur. Z diskret olduğundan R/Z, R üzerinde bir manifold yapısına sahiptir. R/Z grubunda Z normal altgrup olup, analitiklik lokal bir özelik olduğundan R/Z nin analitikliği elde edilir.

$$u = (x_1, y_1),\ v = (x_2, y_2) \in S^1,\ \ u.v = (x_1 x_2 - y_1 y_2,\ x_1 y_2 + x_2 y_1)$$

olarak tarifli işlemle $(S^1, .)$ bir gruptur. $u^{-1}=(x_1,-y_1)$ dir. Dolayısıyla $\mu(u,v)=u.v$ ve $\lambda(u)=u^{-1}$ tasvirleri analitiktir. O halde S^1 bir Lie grubudur (Fegan 1991).

Örnek 4.2.2. $T^n = S^1 x S^1 x ... x S^1 = R^n/Z^n$ n-boyutlu tor grubu bir Lie grubudur.

Tarif 4.2.6. GL(n, R), nxn tipinde katsayıları reel, tersinir matrislerin cümlesidir. Bu cümlenin çarpma işlemi ile oluşturduğu gruba **genel lineer grup** denir ve GL(n, R) ile gösterilir.

GL(n, C), nxn tipinde katsayıları kompleks, tersinir matrislerin cümlesidir. GL(n, C) de ve GL(n, R) de de determinantları +1 olan matrisler vardır. Bu matrislerin cümleleri de matris çarpımı işlemine göre birer grupturlar. Bu gruplara **özel lineer grup** denir, sırası ile SL(n,C) ve SL(n,R) ile gösterilir. Böylece aşağıdaki bağıntılar yazılabilir:

$$SL(n, R) = SL(n, C) \cap GL(n, R),\ SO(n) = SL(n, C) \cap O(n),$$
$$SU(n) = SL(n, C) \cap U(n).$$

SU(2), 2×2 tipinde kompleks katsayılı, tersi kompleks eşleniğinin transpozuna eşit ve determinantı 1 olan matrislerin cümlesidir, yani

$$SU(2) = \{ A : \overline{A}^{t} = A^{-1} \text{ ve } \det A = 1, A \in C^{n}_{n} \}$$

dir.z ve w, $|z|^2 + |w|^2 = 1$ koşulunu gerçekleyen kompleks sayılar ise bu taktirde

$$\begin{pmatrix} z & w \\ -\overline{w} & \overline{z} \end{pmatrix} \in SU(2)$$

dir. Tersine, eğer $A \in SU(2)$ ise bu taktirde z ve w kompleks sayıları vardır öyle ki

$$A = \begin{pmatrix} z & w \\ -\overline{w} & \overline{z} \end{pmatrix}$$

dir.

U(n), n×n tipinde kompleks katsayılı, tersi eşleniğinin transpozuna eşit olan matrislerin cümlesidir. Yani,

$$U(n) = \{ A : \overline{A}^{t} = A^{-1}, A \in C^{n}_{n} \}$$

dir. U(n) e **üniter grup** denir. n=1 için S^1 e izomorf. n >1 için basit irtibatlı ve kompakttır.

SU(n), U(n) in determinantı 1 olan altgruplarıdır.Yani,

$$SU(n) = \{ A : \overline{A}^{t} = A^{-1} \text{ ve } \det A = 1, A \in C^{n}_{n} \}$$

dir. SU(n) e **özel üniter grup** denir. SU(n), $n \geq 2$ için basit irtibatlı ve kompakttır.

O(n), n×n tipinde reel katsayılı, tersi transpozuna eşit olan matrislerin cümlesidir. Yani,

$$O(n) = \{ A : A^{t} = A^{-1}, A \in R^{n}_{n} \}$$

dir. O(n) e **ortogonal grup** denir.

O(n,R)**, reel ortogonal matrisler grubudur.** O(n,R) İrtibatlı değildir fakat kompaktdır.

O(n, C) cümlesinin matris çarpımına göre oluşturduğu gruba **kompleks ortogonal grup** denir ve O(n, C) ile gösterilir. SO(n), O(n) in determinantı 1 olan altgruplarıdır, yani,

$$SO(n) = \{ A : A^t = A^{-1} \text{ ve } \det A = 1, A \in R^n{}_n \}$$

dir. SO(n) cümlesinin matris çarpımına göre oluşturduğu gruba **özel ortogonal grup** denir ve SO(n) ile gösterilir. SO(n, R), determinantı 1 olan reel ortogonal matrisler grubudur. $n \geq 2$ için irtibatlı, kompakt, n=3 ve $n \geq 5$ için basit irtibatlı değildir.

Sp(n) **simpletik gruptur**. Terimleri kuaterniyonlar olan, inversi eşleniğinin transpozuna eşit olan, nxn tipindeki matrislerin cümlesidir, yani,

$$Sp(n) = \{ A : \overline{A}^{\,t} = A^{-1}, H^n{}_n \}$$

dir. H kuaterniyonları göstersin. Bu taktirde $H \cong R^4$ ve H nın bir elemanı x+iy+jz+kw dir. Kuaterniyonların cümlesi,

$$H = \{ x+iy+jz+kw \mid i, j, k = \sqrt{-1}, x, y, z, w \in R \}$$

ile gösterir. Bir kuaterniyonun eşleniği,

$$\overline{x + iy + ju + kv} = x - i\,y - j\,u - k\,v$$

dir (Fegan 1991).

Örnek 4.2.3. GL(n,R) bir Lie grubudur.

İspat.G=GL(n, R) = { A = [a_{ij}]:det$A \neq 0$ } matris çarpımı işlemine göre bir grup olup, üstelik bir Lie grubudur: Bütün n×n tipindeki reel matrislerin cümlesi olan gl(n, R), reel saylar cismi üzerinde n^2-boyutlu bir vektör uzaydır ve dolayısıyla bir manifolddur. Her bir

$a=[a_{ij}]\in gl(n,R)$ için $[a_{ij}]=(a_{11},a_{21},...,a_{n1},a_{12},...,a_{n2},...,a_{1n},...,a_{nn})$ alıp $a_{ij}= b_i+(j-1)n$ dersek $gl(n, R)$ nin $a=[a_{ij}]$ matrisine R^{n^2} nin $(b_1, b_2,...,b_n)$ noktasını karşılık tutabiliriz.Böylece $gl(n, R)$ ile R^{n^2} arasında bire birebir tekabül kurmuş oluruz.Bu $gl(n,R)$ den R^{n^2} ye bir lineer izomorfizm, dolayısıyla koordinat sistemi verir.

$$GL(n, R) = \{ g\in gl(n, R) \mid \det g\neq 0 \}$$

cümlesi matris çarpımı altında bir gruptur.

$$\det:gl(n, R) \to R,\ \ A \to \det A = \det[a_{ij}] = \sum S(\sigma)\, a_{\sigma(1)}\, a_{\sigma(2)} ...a_{\sigma(n)},\ \sigma\in S_n$$

determinant fonksiyonu dif-bilir fonksiyonların çarpımlarının toplamına eşit olduğundan dif-bilir ve dolayısıyla süreklidir. Sürekli bir fonksiyonda, değer cümlesinde bir kapalı (veya açık) cümlenin ters görüntüsü yine kapalı (veya açık)dır. $\det:gl(n,R)\to R$ fonksiyonu sürekli ve $\{0\}$ cümlesi R de kapalı olduğundan

$$\det^{-1}\{0\} = \{ g\in gl(n, R) \mid \det g = 0 \}$$

cümlesi $gl(n, R)$ de kapalıdır. Bu cümle ise $gl(n, R)$ ye göre $GL(n,R)$ nin tümleyenidir. O halde $GL(n, R)$ cümlesi $gl(n, R)$ nin bir açık altcümlesidir. Böylece $GL(n, R)$ bir manifolddur.

Şimdi $a,b\in GL(n, R)$ için,

$$GL(n, R) \times GL(n, R) \to GL(n, R),\ \ (a, b) \to ab^{-1}$$

grup işlemi (matris çarpımı) nin diferensiyellenebilir olduğunu gösterelim:

$a = [a_{ij}]$, $b = [b_{ij}]$ ve $b^{-1}= [B_{ij} / |b|]$ için

$$ab^{-1}= [\sum_{k=1}^{n} a_{ik} B_{ij} / |b|]$$

olarak yazılır. Burada [$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\ B_{ij}\ /|b|$] fonksiyonları diferensiyellenebilir olduğundan ab^{-1}diferensiyellenebilirdir. Böylece GL(n, R) bir Lie grubudur (Hacısalihoğlu 1980).

Örnek 4.2.4. Lie grubunun örneklerinden biri SU(2) dir ve

$$SU(2) = \{ A : \overline{A}^{t} = A^{-1} \text{ ve } \det A = 1,\ A \in C^{n}_{n} \}$$

şeklinde ifade edilir. Burada A, 2x2 tipinde kompleks katsayılı matristir. SU(2) nin elemanları z ve w, $|z|^2+|w|^2 = 1$ olmak üzere

$$A=\begin{pmatrix} z & w \\ -\overline{w} & \overline{z} \end{pmatrix}$$

şeklindedir.

Karşıt olarak, $A \in SU(2)$ ise, bu takdirde yukarıdaki A yı sağlayan z ve w vardır. $z = x+iy$ ve $w = u+iv$ olmak üzere $x^2 + y^2 + u^2 + v^2 = 1$ olsun. Bu takdirde SU(2) üzerinde haritaları aşağıdaki gibi tarif edebiliriz:

$$U_1 = \{ A: x>0 \},\quad U_2=\{ A: x<0 \}$$
$$U_3 = \{ A: y>0 \},\quad U_4=\{ A: y<0 \}$$
$$U_5 = \{ A: u>0 \},\quad U_6=\{ A: u<0 \}$$
$$U_7 = \{ A: v>0 \},\quad U_8=\{ A: v<0 \}$$

Eşlenilen tasvirler ise,

$$\varphi_1(A) = (y, u, v),\qquad \varphi_2(A) = (y, u, v)$$
$$\varphi_3(A) = (x, u, v),\qquad \varphi_4(A) = (x, u, v)$$
$$\varphi_5(A) = (x, y, v),\qquad \varphi_6(A) = (x, y, v)$$
$$\varphi_7(A)=(x, y, u),\qquad \varphi_8(A) = (x, y, u)$$

ile verilir. Kolayca görülebilir ki bu tasvirler analitiktir.

$$\varphi : SU(2) \to R^4, \varphi(A) = (x, y, u, v)$$

olsun. Bu takdirde A_1 ve A_2 ,(z_1, w_1) ve (z_2, w_2) ile verilen iki matris öyle ki

$$\varphi(A_i) = (x_i, y_i, u_i, v_i)$$

olsun. Bu takdirde

$$\varphi(A_1A_2) = (x_3, y_3, u_3, v_3)$$

dir. Burada,

$$x_3 = x_1x_2 - y_1y_2 - u_1u_2 - v_1v_2$$

$$y_3 = x_1y_2 + x_2y_1 + u_1v_2 - u_2v_1$$

$$u_3 = x_1u_2 + x_2u_1 - y_1v_2 + y_2v_1$$

$$v_3 = x_1v_2 + x_2v_1 + y_1u_2 - y_2u_1$$

dir. π_i, R^4 ün 3-boyutlu altuzayı üzerine izdüşümü olmak üzere $\varphi_i=\pi_i\, \varphi|_{U_i}$ olduğundan, açıktır ki matris çarpımı bir analitik tasvirdir. Böylece

$$\varphi(A^{-1}) = (x, -y, -u, -v)$$

dir. Dolayısıyla SU(2), 3-boyutlu bir Lie grubudur.

$$\varphi : SU(2) \to R^4, \varphi(A) = (x, y, u, v)$$

tasviri SU(2) den R^4 e birim vektörlerin cümlesi S^3 üzerine bir diffeomorfizmdir (Fegan 1991).

Teorem 4.2.1. G ve H iki Lie grubu olsun.Eğer f : G → H sürekli bir homomorfizm ise bu taktirde f analiktir (Price 1977).

Teorem 4.2.2. H, bir G Lie grubunun kapalı altgrubu olsun. Bu taktirde H bir Lie grubudur (Price 1977).

Örnek 4.2.5. GL (n, R) nin bir Lie grubu olduğunu biliyoruz. O(n) ve SO(n) in her ikisi de GL(n ,R) nin kapalı altgrubu olduğundan bunların Lie grubu olduğunu hemen söyleyebiliriz. O(n) ve SO(n) in kapalı olduklarını görmek için,

$$f : GL(n, R) \rightarrow M (n),\ f (A) = A^{-1} - A^{t}$$

olarak tarifli sürekli tasviri gözönüne alalım. Bu taktirde

$$O(n) = f^{-1}\{ 0 \}$$

olup sürekli bir tasvir altında kapalı cümlenin ters görüntüsü de kapalıdır. Dolayısıyla O(n) kapalıdır.

Benzer olarak SO(n) için

$$\det : O(n) \rightarrow \{-1, 1\}$$

fonksiyonu alınırsa, bu taktirde

$$SO(n) = \det^{-1}\{1\}$$

dir. Böylece SO (n), O(n) in kapalı bir altgrubudur. Dolayısıyla GL(n, R) nin kapalı bir altgrubudur.

Benzer bir yolla U(n), GL(n, C) nin ve SU(n), U(n) in kapalı bir altgrubudur.

4.3. Oktonyonların İnşası

Tarif 4.3.1. I bir indis cümlesi i, j$\in$I olsun. Bu taktirde her i ve j için $a_i \in R$ ve $(e_j)^2 = -1$ olmak üzere,

$$a = a_0 + a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3 + a_4 e_4 + a_5 e_5 + a_6 e_6 + a_7 e_7$$

şeklindeki elemanlardan oluşan

$$O = \{ a : a = a_0 + a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3 + a_4 e_4 + a_5 e_5 + a_6 e_6 + a_7 e_7 \}$$

cümlesine **oktonyonlar** denir ve O ile gösterilir.

Oktonyonları inşa etmenin elemanter yolu onların çarpım tablosunu vermektir (Çizelge 4.1.).

Oktonyonlar tabanları 1, e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7 olan 8-boyutlu bir cebirdirler ve onların çarpma işlemi bu tabloda verilir. Bu tablo i-inci satırdaki bir elemanla j-yinci sütundaki bir elemanın çarpımının sonucunu tanımlar.

Çizelge 4.1. Oktonyonlar için çarpma tablosu

	$\mathbf{e_1}$	$\mathbf{e_2}$	$\mathbf{e_3}$	$\mathbf{e_4}$	$\mathbf{e_5}$	$\mathbf{e_6}$	$\mathbf{e_7}$
$\mathbf{e_1}$	1	e_4	e_7	$-e_2$	e_6	$-e_5$	$-e_3$
$\mathbf{e_2}$	$-e_4$	-1	e_5	e_1	e_3	e_7	$-e_6$
$\mathbf{e_3}$	$-e_7$	$-e_5$	-1	e_6	e_2	$-e_4$	e_1
$\mathbf{e_4}$	e_2	$-e_1$	$-e_6$	-1	e_7	e_3	$-e_5$
$\mathbf{e_5}$	$-e_6$	e_3	$-e_2$	$-e_7$	-1	e_1	e_4
$\mathbf{e_6}$	e_5	$-e_7$	e_4	$-e_3$	$-e_1$	-1	e_2
$\mathbf{e_7}$	e_3	e_6	$-e_1$	e_5	$-e_4$	$-e_2$	-1

(1) $e_1,\ldots,e_7$ -1 in karekökleridir.

(2) $i \neq j$ olduğunda e_i ve e_j anti-komütatiftir:

(3) $e_i \,.\, e_j = - e_j \,.\, e_i$

(4) $e_i \,.\, e_j = e_k \Rightarrow \quad e_{i+1} \,.\, e_{j+1} = e_{k+1}$, burada indisleri Z_7 de olduğu gibi alırız.

(5) $e_i \,.\, e_j = e_k \Rightarrow \quad e_{2i} \,.\, e_{2j} = e_{2k}$.

Oktonyonlar birleşmeli değildir.

4.4. İstisnai Lie Gruplarının Oktonyonlar Yardımıyla İnşası

İstisnai Lie grupları G_2 , F_4 , E_6 , E_7 ve E_8 dir. İstisnai Lie grupları oktonyonlarla ifade edilebilir.

Tarif 4.4.1. Oktonyonların otomorfizmleri grubuna G_2 denir. G_2, 14 boyutludur ve onun aşikar olmayan en küçük temsili 7 boyutludur (Baez 2001).

Tarif 4.4.2. Oktonyonların 3x3 matrislerinin otomorfizmleri grubuna F_4 denir. F_4, 52 boyutludur ve aşikar olmayan en küçük temsili de 26 boyutludur (Baez 2001).

$$\begin{bmatrix} o_{11} & o_{12} & o_{13} \\ o_{21} & o_{22} & o_{23} \\ o_{31} & o_{32} & o_{33} \end{bmatrix}$$

Burada o_{11},o_{22} ve o_{33} reel, o_{12}, o_{13} ve o_{23} sırasıyla o_{21},o_{31} ve o_{32} nin oktonyon eşleniğidir.

Tarif 4.4.3. E_6, F_4 ün kompleks sayılarla genişletilmesidir. E_6, 78 boyutludur ve aşikar olmayan en küçük temsili de 27 boyutludur (Baez 2001).

Tarif 4.4.4. E_7, F_4 ün kuaterniyonlarla genişletilmesidir. E_7, 133 boyutludur ve aşikar olmayan en küçük temsili de 56 boyutludur (Baez 2001).

Tarif 4.4.5. E_8, F_4 ün oktonyonlarla genişletilmesidir. E_8, 248 boyutludur ve aşikar olmayan en küçük temsili de 248 boyutludur (Baez 2001).

5. LİE GRUPLARI ÜZERİNDE DEMETLER

5.1. İrtibatlı Lie Grupları Üzerinde Demetler

Bu bölümde S. Balcı tarafından literatüre kazandırılan bir topolojik uzayın esas gruplarının demetinin oluşturulmasında kullanılan metodlar yardımıyla, irtibatlı Lie gruplarının esas gruplarının demetleri incelenmiş ve bu incelemede C. Yıldız ve M. Çitil'in doktora tezinden yararlanılmıştır. Taban uzayı olarak bir Lie grubu alınması durumunda demetin bir analitik manifold ve demetin herbir global kesitinin de bir Lie grubu olduğu gösterilecektir.

Teorem 5.1.1. M irtibatlı bir Lie grubu ve her bir $x \in M$ ye tekabül eden esas grup $\pi_1(M, x)$ olmak üzere $H = \underset{x \in M}{V} \pi_1(M, x)$ cümlesini gözönüne alalım. H, M üzerinde bir cümledir. Şimdi bir $\varphi : H \to M$, $x \in M$ için $\varphi(\sigma) = \varphi([\alpha]_x) = x$ tabii tasvirini gözönüne alalım. Bu takdirde H üzerinde tabii bir topoloji vardır öyle ki, bu topolojiye göre φ lokal topolojik bir tasvir olup (H, φ) ikilisi M üzerinde bir demettir.

İspat. Teoremin ispatı, kesim 3.5 deki esas grupların demetinin inşası ile aynı metotlar kullanılarak kolayca gösterilebilir.

Esas grupların demetinin sapları herhangi bir noktadaki homotopi grupları (esas grupları, kesitleri ise taban noktada tarif edilen homotopi gruplarının herhangi bir elemanı tarafından tarif edilen açık tasvirlerdir.

Teorem 5.1.2. M irtibatlı bir Lie grubu, (H, φ), M üzerinde esas grupların demeti ve $\Gamma(W, H)$ da W üzerindeki kesitlerin cümlesi olsun. Bu takdirde $\Gamma(W, H)$ cümlesi her $y \in W$ ve her $s_1, s_2 \in \Gamma(W, H)$ için $(s_1 . s_2) (y) = s_1(y).s_2(y)$ işlemine göre bir gruptur.

İspat. Teorem 3.5.2. nin ispatına benzer şekilde gösterilebilir.

Teorem 5.1.3. M irtibatlı bir Lie grubu ve (H, φ), M nin esas gruplarının demeti olsun. Bu takdirde H, M üzerinde bir analitik manifolddur.

İspat. M nin manifold olmasından faydalanılarak H nın manifold olduğu gösterilebilir:

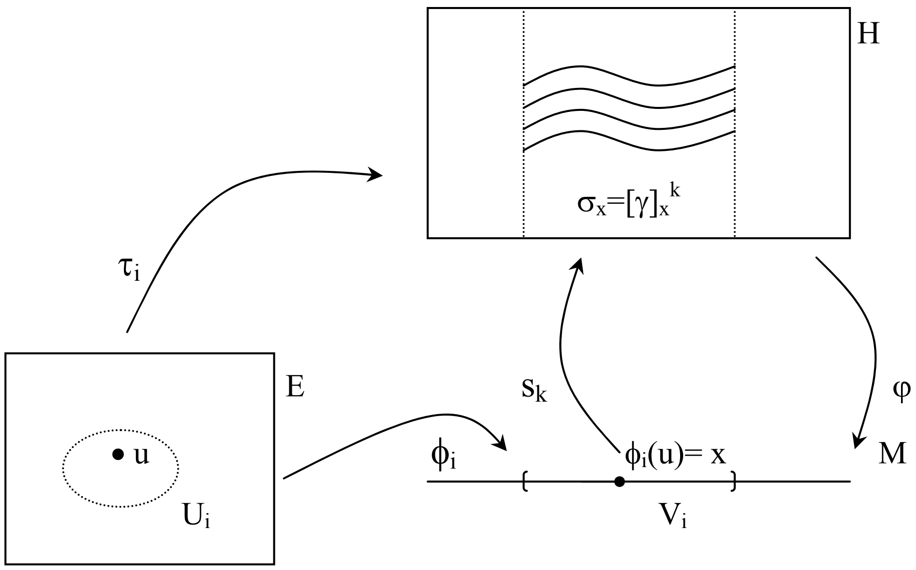
Şöyle ki, her $\sigma_x \in H$ için bir $W = W(\sigma_x) \subset H$ açık altcümlesi vardır öyle ki φ lokal topolojik olduğundan $\varphi : W \to V$ topolojik olacak şekilde bir $V = V(x) \subset M$ açık altcümlesi vardır.

M manifold olduğundan dolayı da $\phi_i : U \to V$ topolojik olacak şekilde bir $U \subset E$ açık altcümlesi vardır. Üstelik $(\varphi|_W)^{-1} = s$ ve $\tau_i = s o \phi_i$ olduğundan τ_i lokal topolojiktir.

Her $\sigma_x, \sigma_y \in H$ ($\sigma_x \neq \sigma_y$) için $\varphi : H \to M$ lokal topolojik olduğundan $\varphi(\sigma_x) = x$ ve $\varphi(\sigma_y) = y$ noktaları vardır. Bu durumda x ve y nin ayrık açık komşulukları vardır. O halde $s_1 \in \Gamma(V(x), H)$ ve $s_2 \in \Gamma(V(y), H)$ kesitleri vardır öyle ki $s_1(x) = \sigma_x$ ve $s_2(y) = \sigma_y$ dir. Sonuç olarak $s_1(V(x)) \cap s_2(V(y)) = \varnothing$ dir. O halde H, Hausdorff uzaydır.

M bir Lie grubu olduğundan (M, $(\phi_i)_{i \in A}$) analitik manifolddur (Şekil 5.1.) :

Yani her $x \in M$ için $U_i \subset E$, $V_i \subset M$ açık altcümleler olmak üzere $\phi_i : U_i \to V_i$ homeomorfizmdir. M analitik manifold olduğundan her $i, j \in A$ için $\phi_j^{-1} \phi_i$ analitiktir.



Şekil 5.1. Analitik manifold

Her bir $i\in A$ ya karşılık $\tau_i : U_i \to \varphi^{-1}(V_i)$ dönüşümünü $\tau_i(u) = [\gamma]^k_{\phi_i(u)} = \sigma_x^k$ olarak tarif edelim. Burada $k\in N$ olup σ_x^k, H daki k.katı belirtir. τ_i bir bijeksiyondur ve τ_i $(i\in A)$ lerin görüntülerinin birleşimi H yı örter. $i, j\in A$ ve τ_i, τ_j nin görüntü cümlelerinin arakesiti boş olmasın, yani $\varphi^{-1}(V_i) \cap \varphi^{-1}(V_j) \neq \emptyset$ olsun.

$$\varphi^{-1}(V_i) \cap \varphi^{-1}(V_j) = \varphi^{-1}(V_i \cap V_j)$$

olduğundan $V_i \cap V_j \neq \emptyset$ dır. Şimdi $u\in \tau_i^{-1}(\varphi^{-1}(V_i) \cap \varphi^{-1}(V_j))$ olduğunu kabul edelim. Bu takdirde,

$$\tau_j^{-1} \tau_i (u) = \tau_j^{-1} ([\gamma]^k_{\phi_i(u)}) = \tau_j^{-1} ([\gamma]^k_{\phi_j(u')}) = \phi_j^{-1}\phi_i(u)$$

dir.

Şimdi,

$$\tau_i^{-1} (\varphi^{-1}(V_i) \cap \varphi^{-1}(V_j)) = \tau_i^{-1} \varphi^{-1}(V_i \cap V_j) = \phi_i^{-1}(V_i \cap V_j),\ \tau_i = s_k\, \phi_i,\ \tau_j = (s_k\, \phi_j)^{-1}$$

olmak üzere,

$$(s_k \phi_j)^{-1}(s_k \phi_i) = \phi_j^{-1} s_k^{-1} s_k \phi_i = \phi_j^{-1}\phi_i$$

olup $\tau_j^{-1}\tau_i$ nın $\tau_i^{-1}(\varphi^{-1}(V_i) \cap \varphi^{-1}(V_j))$ üzerinde analitikliği $\phi_j^{-1}\phi_i$ nın $\phi_i^{-1}(V_i \cap V_j)$ üzerinde analitik olmasından elde edilir.

Burada n=kard(H_x) olmak üzere $\varphi^{-1}(V_i) \cong V_i^n$ dir(Çitil 2003).

Teorem 5.1.4. M irtibatlı bir Lie grubu, (H, φ), M nin esas gruplarının demeti ve Γ(M, H), M üzerindeki bütün global kesitlerin cümlesi olsun. Bu takdirde, Γ(M, H) cümlesi her $y \in M$ ve her $s_1, s_2 \in \Gamma(M, H)$ için, $(s_1.s_2) (y) = s_1(y).s_2(y)$ işlemine göre bir gruptur.

İspat. Teorem 5.1.2 de W = M alınarak istenilen elde edilir.

Teorem. 5.1.5. $s \in \Gamma(M, H)$ keyfi bir eleman olsun. Bu takdirde,

$$s(M) =\{ s(x) \mid x \in M \}$$

cümlesi bir Lie grubudur.

İspat. İlk olarak s (M) nin analitik manifold olduğunu gösterelim: H üzerinde Teorem 5.1.1 de inşa edilen topolojiye göre $s (M) \subset H$ açık bir altcümledir. H, E üzerinde analitik manifold olduğundan s (M) analitik manifolddur.

Herhangi $x,y \in M$ için s(M) üzerindeki işlemi

$$s(x) * s(y) = s(x.y)$$

şeklinde tarif edelim. $s \in \Gamma(M, H)$ için $x \in M$ noktasında α_1 kapalı eğrisi vardır öyle ki γ, x' i y ye birleştiren eğri olmak üzere $(\gamma^{-1}\alpha_1)\gamma$ y noktasında bir eğridir ve

$$s(y) = [(\gamma^{-1}\alpha_1)\gamma]_y \in \Gamma(M,H)$$

dir.

(1) Özdeş Eleman : M nin özdeş elmanı e olsun. $x \in M$ noktasına karşılık gelen $s(x) \in s(M)$ noktası için,

$$s(x) * s(e) = s(x.e) = s(x)$$

olduğundan s(e), s(M) nin özdeş elemanıdır.

(2) Ters Eleman: Her $s(x) \in s(M)$ için $s(x^{-1}) \in s(M)$ ters elemandır. Gerçekten

$$s(x) * s(x^{-1}) = s(x.x^{-1}) = s(e) \text{ olup } s(x^{-1}) = s(x^{-1}$$

elde edilir.

(3) Birleşme özeliği:Her $x, y, z \in M$ için,

$$(s(x) * s(y)) * s(z)=s(x.y) * s(z)=s((x.y).z) \in s(M)$$

dir. M bir grup olduğundan, (x.y).z=x.(y.z) dir. Dolayısıyla, s((x.y).z)=s(x.(y.z)). Bu ise,

$$(s(x) * s(y)) * s(z) = s(x) * (s(y) * s(z))$$

demektir. Yani s(M) birleşme özeliğine sahiptir.

Dolayısıyla (s(M), $*$) bir gruptur.

Şimdi de $x, y \in M$ olmak üzere, her $s \in \Gamma(M, H)$ için

$$\mu' : s(M) \times s(M) \to s(M)$$
$$(s(x), s(y)) \to s(x) * s(y)^{-1} = s(x.y^{-1})$$

tasvirinin analitik olduğunu gösterelim. (H, $(\tau_i)_{i \in A}$) ve (M, $(\phi_i)_{i \in B}$) analitik manifold olduğundan

$$\begin{tikzcd} s(M)xs(M) \arrow[r, "\mu'"] \arrow[d, "F"'] & s(M) \\ MxM \arrow[r, "\mu"] & M \arrow[u, "s"'] \end{tikzcd}$$

diyagramı komütatiftir. Yani $F = (\phi_i \tau_i^{-1}, \phi_j \tau_j^{-1})$ olmak üzere $s = \tau_i \phi_i^{-1}$ olup $s \circ \mu \circ F$ analitiktir. Dolayısıyla μ' analitiktir. Böylece s(M) nin bir Lie grubu olduğu görülür.

5.2. Funktoriyel Geçişler

Bu kesimde i = 1,2 için M_i Lie grubu ve (H_i, φ_i), M_i üzerinde homotopi gruplarının demeti olarak alınacaktır.

Şimdi aşağıdaki teoremleri ispatlarını vermeden ifade ediyoruz.

Teorem 5.2.1. M_1, M_2 herhangi iki Lie grubu ve $f : M_1 \rightarrow M_2$ bir Lie homomorfizmi olsun. Bu takdirde bir $f^* : H_1 \rightarrow H_2$ analitik tasviri vardır (Çitil 2003).

Teorem 5.2.2. Lie grupları ve üzerlerinde tarifli Lie homomorfizmleri kategorisinden, demetler ve üzerlerinde tarifli analitik tasvirleri kategorisine bir kovaryant funktor vardır (Çitil 2003).

Sonuç 5.2.1. M_1, M_2 herhangi Lie grupları ve $f : M_1 \rightarrow M_2$ bir Lie izomorfizmi olsun. Bu takdirde bir $f^*: H_1 \rightarrow H_2$ diffeomorfizmi vardır (Çitil 2003).

Teorem 5.2.3. M_1, M_2 herhangi Lie grupları ve $f : M_1 \rightarrow M_2$ bir Lie izomorfizmi olsun. Bu takdirde, $f_* : \Gamma(M_1, H_1) \rightarrow \Gamma(M_2, H_2)$ bir izomorfizmdir (Çitil 2003).

5.3. Kompakt İstisnai Lie Gruplarının Homotopi Gruplarının Demetleri

Bu kısımda kompakt, irtibatlı, basit irtibatlı basit istisnai Lie gruplarının homotopi gruplarını gözönüne alacağız. Burada M, G_2, F_4, E_6, E_7 ve E_8 den herhangi biri olacaktır (Mimura and Toda 1970 Kachi and Mimura 1999).

Teorem 5.3.1. M kompakt, irtibatlı, istisnai bir Lie grubu ve herbir $x \in M$ ye tekabül eden esas grup $\pi_1(M, x)$ olmak üzere, $H = \bigvee_{x \in M} \pi_1(M, x)$ cümlesini gözönüne alalım.

$\varphi : H \to M$, $x \in M$ için $\varphi(\sigma_x) = \varphi([\alpha]_x) = x$ tabii tasvir olsun. Bu takdirde H üzerinde tabii bir topoloji vardır öyle ki, bu topolojiye göre φ lokal topolojik tasvirdir. O halde, (H, φ) ikilisi M üzerinde bir demettir.

İspat. Teoremin ispatı S. Balcı'nın Esas grupların demetinin inşasında kullandığı metod ve teknikler uygulanarak kolaylıkla verilebilir, öyle ki burada taban uzay olarak kompakt istisnai Lie grubu alınmıştır.

6. İSTİSNAİ İRTİBATLI LIE GRUPLARININ SELF HOMOTOPİ GRUPLARININ DEMETİ

Bu bölüm iki kesimden oluşmaktadır. Birinci kesimde X istisnai irtibatlı bir Lie grubu olmak üzere, X in self tasvirlerinin homotopi grubu takdim edilmiştir. İstisnai irtibatlı X Lie grupları G_2, F_4, E_6, E_7, E_8 olarak sınıflandırılmaktadır. Bu uzayların self homotopi gruplarının incelenmesi yakın zamanlarda H. Oshima ve M. Mimura tarafından başlatılmıştır. Bu self homotopi gruplarının yapısı onların rankı, nilpotentlik sınıfı ve Lusternik-Schnirelmann kategorisi yardımıyla verilmektedir. S. Balcı tarafından elde edilmiş olan ‘‘bir topolojik uzayın esas gruplarının demeti’’nin inşasında kullanılan metodlar temel alınarak ‘‘istisnai Lie gruplarının self homotopi gruplarının demeti’’ inşa edilmiştir. Daha sonra bu demetin kesitleri ve sapları arasındaki ilişkiler incelenmiş, herbir sapın kesitlerin bir grubuna izomorf olduğu gösterilmiştir. İkinci kesimde istisnai irtibatlı Lie grupları ve sürekli tasvirleri kategorisinden istisnai irtibatlı Lie gruplarının self homotopi gruplarının demetleri ve demet homomorfizmleri kategorisine bir kovaryant funktorun varlığı elde edilmiştir.

6.1. İstisnai İrtibatlı Lie Grupları Üzerinde Self Homotopik Tasvirlerin Demeti

X istisnai irtibatlı bir Lie grubu olsun. Biliyoruz ki bir X Lie grubu lokal eğrisel irtibatlıdır. Dolayısıyla X eğrisel irtibatlıdır.

Tarif 6.1.1. X istisnai irtibatlı bir Lie grubu ve f, g : $X \to X$ sürekli iki tasvir olsun. Bu durumda,

$$F(x, 0) = f, \;\; F(x, 1) = g$$

olacak şekilde bir

$$F = F(x, t) : X \times J \to X$$

sürekli tasviri varsa, bu takdirde f tasviri g tasvirine **self homotoptur** denir ve $f \sim g$ yazılır. F tasvirine ise f den g ye bir **self homotopidir** denir.

X istisnai irtibatlı bir Lie grubu f : $X \to X$ sürekli bir tasvir olmak üzere, bu şekilde tarif edilen f sürekli tasvirlerinin homotopi sınıflarının cümlesini

$$\hom [\, X,X \,] = \{\, [\, f \,] \mid f : X \to X \text{ sürekli} \,\}$$

ile gösterelim. Burada [f], f ye homotop olan X den X'e bütün sürekli tasvirlerin cümlesini göstermektedir.

Bundan sonra, X istisnai irtibatlı bir Lie grubu, $x_o \in X$ keyfi sabit bir nokta olmak üzere, bölüm boyunca X Lie grubunu bir (X, x_o) noktalı topolojik uzayı olarak gözönüne alacağız.

Şimdi, $x_o \in X$ keyfi sabit bir nokta, $e \in X$ özdeş eleman olmak üzere,

$$H_{x_o} = \hom [\, (X, x_o) \,;\, (X, e) \,] = \{\, [\, f \,]_{x_o} \mid f : (X, x_o) \to (X, e) \text{ sürekli ve } f\,(x_o) = e \,\}$$

ile tarif edilen H_{x_o} cümlesi üzerinde, her $[\, f \,], [\, g \,]_{x_o} \in H_{x_o}$ için,

$$(\, f.g \,)\,(x) = f\,(\, x \,).g\,(\, x \,)$$

olmak üzere,

$$[\, f \,]\,.\,[\, g \,] = [\, f.\, g \,]_{x_o}$$

şeklinde bir işlem tarif edelim. Bu işlem iyi tarifli olup, H_{x_o} cümlesi bu çarpma işlemi ile birlikte bir gruptur. Gerçekten,

1. İşlem iyi tariflidir: Bunun için f, g, h ve k tasvirleri için, $h \in [\, f \,]_{x_o}$, $k \in [\, g \,]_{x_o}$ ise

$$[\, h.\, k \,]_{x_o} = [\, f.g \,]_{x_o}$$

olduğunu göstermeliyiz. $h \in [\, f \,]_{x_o}$ ise $h \sim f$ dir. O halde bir F (x, t) homotopisi vardır öyle ki

$$F(x,t) : (X, x_o) \times J \to (X, e)$$

$$F(x,0) = f, \;\; F(x,1) = h$$

dır. Öte taraftan $k \in [g]_{x_o}$ ise $k \sim g$ dir. O halde bir $G(x,t)$ homotopisi vardır öyle ki

$$G(x,t) : (X, x_o) \times J \to (X, e)$$

$$G(x,0) = g, \;\; G(x,1) = k$$

dır. Şimdi

$$(f.g)(x) = f(x).g(x)$$

olmak üzere

$$(f.g)(x_o) = f(x_o).\, g(x_o) = e$$

dir. O halde $[f.g]_{x_o} \in \hom[(X, x_o) ; (X, e)]$ dir.

$$(h.k)(x) = h(x).\, k(x)$$

olmak üzere

$$(h.k)(x_o) = h(x_o).\, k(x_o) = e$$

dir. O halde $[h.k]_{x_o} \in \hom[(X, x_o) ; (X, e)]$ dır. Böylece $F(x,t)$ ve $G(x,t)$ homotopileri vasıtasıyla tarif edilen bir

$$H = H(x,t) = F(x,t)\, G(x,t) : (X, x_o) \times J \to (X, e)$$

homotopisi vardır öyle ki

$$H(x,0) = (f.g)(x)$$
$$H(x,1) = (h.k)(x)$$

olarak yazılır. Gerçekten,

$$H(x,t) = F(x,t).\, G(x,t)$$

sürekli olup

$$H(x,0) = F(x,0).\, G(x,0) = f.\, g$$

$$H(x,1) = F(x,1).\, G(x,1) = h.\, k$$

dır. O halde

$$f.\, g \sim h.\, k$$

ve dolayısıyla,

$$[f.\, g]_{x_o} = [h.\, k]_{x_o}$$

bulunur.

2. Birleşme özeliği sağlanır. Çünkü her $[f]_{x_o}, [g]_{x_o}, [h]_{x_o} \in H_{x_o}$ için,

$$([f]_{x_o}.[g]_{x_o}).[h]_{x_o} = ([f.\, g]_{x_o}).[h]_{x_o}$$

$$= [(f.\, g).h]_{x_o}$$

$$= [f.(g.h)]_{x_o}$$

$$= [f]_{x_o}.([g.h]_{x_o})$$

$$= [f]_{x_o}.([g]_{x_o}.[h]_{x_o})$$

3. Özdeş eleman vardır. Çünkü

$$1 : (X, x_o) \to (X, e)$$

her $x \in X$ için $1(x_o) = e$ olmak üzere, her $[f]_{x_o} \in H_{x_o}$ için,

$$[1]_{x_o}.[f]_{x_o} = [1.f]_{x_o}$$

ve $1.\, f = f$ olduğundan

$$[1.f]_{x_o} = [f]_{x_o}$$

dir. Benzer şekilde

$$[\,f\,]_{x_o} . [\,1\,]_{x_o} = [\,f.1\,]_{x_o}$$

ve f. 1 = f olduğundan

$$[\,f.1\,]_{x_o} = [\,f\,]_{x_o}$$

dır. O halde

$$[\,1.f\,]_{x_o} = [\,f.1\,]_{x_o} = [\,f\,]_{x_o}$$

olduğundan $[\,1\,]_{x_o} \in H_{x_o}$ özdeş eleman olup $[\,1\,]_{x_o} = [\,e\,]_{x_o}$ şeklinde gösterilecektir.

4. Her $[\,f\,]_{x_o} \in H_{x_o}$ ın $[\,f\,]_{x_o} . [\,g\,]_{x_o} = [\,f.\,g\,]_{x_o}$ şeklinde tarifli işleme göre bir tersi vardır. Gerçekten $[\,f\,]_{x_o} \in H_{x_o}$ herhangi bir eleman olmak üzere, bir

$$g : (X, x_o) \to (X, e)$$

tasvirini her $x \in X$ için

$$g(x) = (f(x))^{-1}$$

şeklinde tarif edelim. Bu durumda g sürekli olup $g(x_o) = e$ dir. Dolayısıyla $[\,g\,]_{x_o} \in H_{x_o}$ dır. Ayrıca

$$\begin{aligned} (f.g)(x_o) &= f(x_o).\,g(x_o) \\ &= f(x_o).\,(f(x_o))^{-1} \\ &= e \end{aligned}$$

olduğundan $[\,f.\,g\,]_{x_o} \in H_{x_o}$ dır. Böylece

$$[\,f\,]_{x_o} . [\,g\,]_{x_o} = [\,f.\,g\,]_{x_o} = [\,1\,]_{x_o}$$

bulunur. Benzer şekilde, $[g.\,f\,]_{x_o} \in H_{x_o}$ olmak üzere, gösterilebilir ki

$$[\,g\,]_{x_o} . [\,f\,]_{x_o} = [\,g.\,f\,]_{x_o} = [\,1\,]_{x_o}$$

dır. Böylece

$$([f]_{x_o})^{-1} = [g]_{x_o} .$$

O halde, tarif olarak, H_{x_o} grubuna X istisnai irtibatlı Lie grubunun x_o noktasındaki **self-homotopik tasvirlerinin grubu** diyeceğiz.

Şimdi X istisnai irtibatlı Lie grubu ve H_x , X in x noktasındaki self-homotopik tasvirlerinin grubu olmak üzere,

$$H(X) = \bigvee_{x \in X} H_x$$

cümlesini tanımlayalım. H(X) üzerindeki tabii tasviri

$$\Phi : H(X) \to X, \quad \Phi ([f]_x) = x$$

şeklinde tarif edelim.

Şimdi, $W \subset X$ açık bir cümle ve $x \in W = W(x)$ keyfi sabit bir nokta olsun. Şimdi her $y \in W$ için $[\varphi] \in \mathrm{hom} [(X, y); (X, x_o)]$ ve $[f] \in \mathrm{hom} [(X, x_o), (X, e)]$ keyfi sabit elemanlar olmak üzere bir

$$s : W \to H(X)$$

tasvirini $s (y) = [f \circ \varphi]_y$ şeklinde tanımlayalım. s iyi tariflidir. Gerçekten, $g = f \circ \varphi$ olmak üzere,

$$g (y) = (f \circ \varphi) (y) = f (\varphi (y)) = f (x_o) = e$$

ve g sürekli olduğundan $[g]_y \in H_y$ dir.

Şimdi $f_1 , f_2 \in [f]_y$ olmak üzere,

$$f_1 \circ \varphi \sim f_2 \circ \varphi$$

olduğundan

$$[f_1 \circ \varphi]_y = [f_2 \circ \varphi]_y$$

dir. Öte taraftan her $y \in W$ için,

$$(\Phi \circ s)(y) = \Phi(s(y)) = \Phi([f \circ \varphi]_y) = y$$

olduğundan, $\Phi \circ s = 1_W$ dir. Yani s, Φ nin lokal tersidir.

H (X) üzerinde bir topoloji inşa edilebilir öyle ki bu topoloji ile birlikte Φ bir lokal topolojik tasvir olup bu topolojiye göre s de süreklidir. s (W) yi açık cümle olarak ifade edersek,

$$T = \{ s(W) \mid W = W(x) \subset X \}$$

ailesi H (X) üzerinde bir topoloji tabanıdır: Bunun için $s_1(W_1)$, $s_2(W_2) \in T$ olmak üzere $s_1(W_1) \cap s_2(W_2) \in T$ olduğunu göstermek yeterlidir:

(i) $s_1(W_1) \cap s_2(W_2) \neq \varnothing$ ise, herhangi bir $y \in W = (W_1 \cap W_2)$ için enaz bir $\sigma_y \in s_1(W_1) \cap s_2(W_2)$ vardır. Bu durumda $\sigma_y \in s_1(W_1)$ ve $\sigma_y \in s_2(W_2)$ dir. Buradan

$$\sigma_y = s_1(y),\ y \in W_1$$
$$\sigma_y = s_2(y),\ y \in W_2$$

dir. Buradan

$$s_1(y) = s_2(y),\ y \in (W_1 \cap W_2)$$

ve

$$s_1|_{W_1 \cap W_2} = s_2|_{W_1 \cap W_2}$$

dir. Dolayısıyla bir $s : W = W_1 \cap W_2 \to H$ kesitini,

$$s(W) = s(W_1 \cap W_2) = s_1|_{W_1 \cap W_2} = s_2|_{W_1 \cap W_2}$$

şeklinde tarif edecek olursak $s (W) = s (W_1 \cap W_2) = s_1 (W_1) \cap s_2 (W_2)$ dir. Dolayısıyla herhangi $s_1 (W_1), s_2 (W_2) \in T$ iken $s_1 (W_1) \cap s_2 (W_2) \in T$ dir.

(ii) $s_1 (W_1) \cap s_2 (W_2) = \emptyset$ ise, $\emptyset \in T$ olduğundan $s_1 (W_1) \cap s_2 (W_2) \in T$ dir.

Şu halde T, H (X) üzerinde bir topoloji tabanıdır. H (X) in açık cümleleri T nin elemanlarının keyfi birleşimleridir. H (X) bu topoloji ile birlikte bir topolojik uzaydır.

Şimdi göstermeliyiz ki $\Phi : H (X) \to X$ tabii tasviri bir lokal topolojik tasvirdir.Yani, her $\delta = [h]_y \in H (X)$, $y \in X$ için, $U (\delta) \subset H (X)$ ve $W = W (y) = \Phi (U (\delta)) \subset X$ açık civarları vardır, öyle ki

$$\Phi|_U : U \to W$$

bir topolojik tasvirdir. Halbuki, $\delta = [h]_y \in H (X)$ için $\Phi (\delta) = \Phi ([h]_y) = y$ idi. Bu taktirde y yi ihtiva eden W açık civarı için bir

$$s : W \to H (X)$$

tasviri vardır, öyle ki $s (y) = \delta$. Ayrıca $U (\delta) = s (W)$ ve $\Phi|_U = \Phi^*$ diyelim.

1. $\Phi^* = \Phi|_{s(W)} : U \to W$ bire-birdir: Gerçekten, $y \in W$ ve s tasviri (X, y) den (X, e) ye taban noktalarını muhafaza eden sürekli tasvirlerin homotopi sınıfı olarak tarif edildiğinden herhangi $\delta_1 , \delta_2 \in s (W)$ ve $y_1, y_2 \in W$ için,

$$s_1 : W \to H (X),\ \ s_1 (y_1) = [f_1 \circ \varphi]_{y_1} , \qquad \delta_1 = s_1 (y_1)$$

$$s_2: W \to H (X),\ \ s_2 (y_2) = [f_2 \circ \varphi]_{y_2} , \qquad \delta_2 = s_2 (y_2)$$

dir. Şimdi $\Phi^*(\delta_1) = \Phi^* (\delta_2)$ ise $\delta_1 = \delta_2$ olduğunu gösterelim: $\Phi^* (\delta_1) = \Phi^* (\delta_2)$ olsun. Bu durumda,

$$\Phi^*(s_1(y_1)) = \Phi^*(s_2(y_2)) \Rightarrow \Phi^*([f_1 \circ \varphi]_{y_1}) = \Phi^*([f_2 \circ \varphi]_{y_2})$$

dir. Buradan, $y_1 = y_2$ ve $[f_1]_{y_1} = [f_2]_{y_2}$ olur. O halde,

$$f_1 \sim f_2 \Rightarrow f_1 \circ \varphi \sim f_2 \circ \varphi \Rightarrow [f_1 \circ \varphi]_{y_1} = [f_2 \circ \varphi]_{y_2}$$

dir. Bu ise

$$s_1(y_1) = s_2(y_2)$$

ve

$$\delta_1 = \delta_2$$

olması demektir. O halde Φ^* bire-birdir.

2. $\Phi^* = \Phi|_U : U \to W$ süreklidir: Gerçekten $\delta \in U = s(W)$ herhangi bir eleman ve $\Phi^*(\delta) = y \in W$ ve $V = V(y) \subset X$ herhangi bir civar olmak üzere, $s(V(y)) \subset U = s(W)$, δ nın bir civarıdır ve $\Phi^*(s(V)) = V \subset W$ olduğundan Φ^* süreklidir.

3. $(\Phi^*)^{-1} = (\Phi|_U)^{-1} = s : W \to U$ süreklidir: Gerçekten $y \in W$ herhangi bir nokta, $s(y) = \delta \in U$ ve $U' = U'(\delta) \subset U$ da δ nın bir civarı ise $(\Phi|_U)(U') \subset W$, y nin W civarıdır ve

$$s((\Phi|_U)(U')) = U'$$

dir. O halde s süreklidir.

Bu durumda aşağıdaki teoremi ifade edebiliriz.

Teorem 6.1.1. X istisnai irtibatlı bir Lie grubu, H_x herbir $x \in X$ elemanına tekabül eden self homotopik tasvirlerin grubu, $H(X) = \bigvee_{x \in X} H_x$ ve $\Phi : H(X) \to X$, her $\delta_x = [f]_x \in (H_x)_x$ için $\Phi(\delta_x) = \Phi([f]_x) = x$ olsun. Bu taktirde $(H(X), \Phi)$, X üzerinde bir demettir.

Tarif olarak, bu demete istisnai irtibatlı bir Lie grubu üzerinde **self homotopik tasvirlerin gruplarının demeti** denir.

İstisnai irtibatlı bir Lie grubu üzerinde self homotopik tasvirlerin gruplarının demetinin sapları, herhangi bir noktadaki self homotopik tasvirlerin grupları; kesitleri ise taban noktada tarif edilen self homotopi gruplarının herhangi bir elemanı tarafından tarif edilen açık tasvirlerdir.

Teorem 6.1.2. X istisnai irtibatlı bir Lie grubu, $(H (X), \Phi)$ X üzerinde self homotopik tasvirlerin gruplarının demeti ve $\Gamma(W, H (X))$ de W üzerindeki kesitlerin cümlesi olsun. Bu taktirde $\Gamma(W, H (X))$ cümlesi her $y \in W$ ve her $s_1, s_2 \in \Gamma(W, H (X))$ için $(s_1 . s_2) (y) = s_1 (y) . s_2 (y)$ işlemine göre bir gruptur.

İspat. 1. İşlem iyi tariflidir : Çünkü

$$\Gamma(W, H (X)) \times \Gamma(W, H (X)) \to \Gamma(W, H (X))$$

$$(s_1 . s_2) (y) = s_1 (y) . s_2 (y) = [f_1 \circ \varphi]_y . [f_2 \circ \varphi]_y$$

$$= [f_1 . f_2 \circ \varphi]_y$$

$f_1 . f_2 = f$ dersek, $(s_1 . s_2) (y) = [f \circ \varphi]_y \in \Gamma(W, H (X))$ dir.

2. İşlem birleşmelidir : Çünkü her $s_1, s_2, s_3 \in \Gamma(W, H (X))$, her $y \in W$ için

$$(s_1 . (s_2 . s_3)) (y) = s_1 (y). (s_2 . s_3)(y)$$

$$= s_1 (y). (s_2 (y) . s_3 (y))$$
$$= [f_1 \circ \varphi]_y \ ([f_2 \circ \varphi]_y . [f_3 \circ \varphi]_y)$$

$$= [f_1 \circ \varphi]_y \ ([f_2 . f_3 \circ \varphi]_y)$$

$= [\ f_1 . (\ f_2 . f_3\ )\ o\ \varphi\ ]_y$

$= [\ (\ f_1 . f_2\ ). f_3\ o\ \varphi\ ]_y$

$= [\ f_1 . f_2\ o\ \varphi\ ]_y\ . [\ f_3\ o\ \varphi\ ]_y$

$= (\ [\ f_1\ o\ \varphi\ ]_y . [\ f_2\ o\ \varphi\ ]_y\ ) . [\ f_3\ o\ \varphi\ ]_y$

$= (\ s_1 (\ y\ ).\ s_2 (\ y\ )\ ). s_3 (\ y\ ).$

3. Birim kesit vardır : $1 : (\ X, x_o) \rightarrow (\ X, e\ )$, her $x \in X$ için $1(\ x\ ) = e$ olmak üzere birim kesit

$$I\ (y) = [\ 1\ o\ \varphi\ ]_y$$

ile tanımlıdır.

$(\ I. s\ )\ (\ y\ ) = I\ (\ y\ ).\ s\ (\ y\ )$

$= [\ 1\ o\ \varphi\ ]_y . [\ f\ o\ \varphi\ ]_y$

$= [\ 1. f\ o\ \varphi\ ]_y$

$= [\ f\ o\ \varphi\ ]_y$

$= s\ (\ y\ )$

$(\ s. I\ )\ (\ y\ ) = s\ (\ y\ ). I\ (\ y\ )$

$= [\ f\ o\ \varphi\ ]_y . [\ 1\ o\ \varphi\ ]_y$

$= [\ f .1\ o\ \varphi\ ]_y$

$= [\, f \circ \varphi \,]_y$

$= s\,(\,y\,)$

dir.

4. Her $s \in \Gamma(\,W,\ H\,(\,X\,)\,)$ için $s^{-1} \in \Gamma(\,W,\ H\,(\,X\,)\,)$ vardır. Gerçekten her $[\,f\,]_x \in H_x$ için

$$g : (\,X, x_o) \to (\,X, e\,),\ \ g\,(\,x\,) = (\,[\,f\,(\,x\,)\,]\,)^{-1}$$

olmak üzere,

$$s^{-1}(\,y\,) = [\,g \circ \varphi\,]_y$$

tasviri s nin tersidir ve

$$(\,s^{-1}.\,s\,)\,(\,y\,) = s^{-1}(\,y\,).\,s\,(\,y\,)$$

$$= [\,g \circ \varphi\,]_y.\,[\,f \circ \varphi\,]_y$$

$$= [\,g.f \circ \varphi\,]_y$$

$$= [\,1 \circ \varphi\,]_y$$

$$= I\,(\,y\,)$$

olduğundan $s^{-1}.\,s = I$ dır. Benzer şekilde $s.\,s^{-1} = I$ dır.

Teorem 6.1.3. X istisnai irtibatlı bir Lie grubu ve (H(X), Φ) X üzerinde self homotopik tasvirlerin gruplarının demeti ve W, X in bir açık altcümlesi olsun. Bu taktirde $H_x \cong \Gamma\,(\,W, H\,)$ dır.

İspat. $W \subset X$ açık bir cümle ve $s \in \Gamma\,(\,W, H\,)$ olsun. Bu taktirde bir $\sigma_x = [\,f\,]_x \in H_x$ vardır öyle ki her $y \in W$ için $s\,(\,y\,) = [\,f \circ \varphi\,]_y$ dir. Yani H_x in her elemanına $\Gamma\,(\,W, H\,)$ da yalnız bir eleman karşılık gelir. Yani

$$\Psi : H_x \to \Gamma\,(\,W, H\,)$$

dönüşümü her $\sigma_x \in H_x$ için $\Psi(\sigma_x) = s(y) = [f \circ \varphi]_y$ şeklinde tarif edilir.

1. Ψ bire-birdir : Gerçekten, σ^1_x , σ^2_x sırasıyla $s_1, s_2 \in \Gamma(W, H)$ kesitlerini belirlesin. Bu taktirde her $y \in W$ için,

$$s_1(y) = [f_1 \circ \varphi]_y$$

$$s_2(y) = [f_2 \circ \varphi]_y$$

dir. Eğer $\sigma^1_x \neq \sigma^2_x$ ise $s_1(y) \neq s_2(y)$ dir. Dolayısıyla Ψ bire-birdir. Ψ nin tarifinden dolayı Ψ üzerinedir. Böylece Ψ bir bijeksiyondur.

Şimdi de Ψ nin bir homomorfizm olduğunu gösterelim: $\sigma^1_x = [f_1]_x$, $\sigma^2_x = [f_2]_x \in H_x$ ise

$$\sigma^1_x . \sigma^2_x = [f_1]_x . [f_2]_x = [f_1 . f_2]_x$$

dir. Böylece $\sigma^1_x \sigma^2_x \in H_x$ bir $s \in \Gamma(W, H)$ kesitini tarif eder.

$$\begin{aligned}
\Psi(\sigma^1_x . \sigma^2_x) = \Psi([f_1]_x . [f_2]_x) &= \Psi([f_1 . f_2]_x) \\
&= [f_1 . f_2 \circ \varphi]_x \\
&= [(f_1 \circ \varphi) . (f_2 \circ \varphi)]_x \\
&= [f_1 \circ \varphi]_y . [f_2 \circ \varphi]_x \\
&= \Psi([f_1]_x) . \Psi([f_2]_x) \\
&= s_1(y) . s_2(y) \\
&= \Psi(\sigma^1_x) . \Psi(\sigma^2_x)
\end{aligned}$$

dir. Böylece Ψ bir izomorfizmdir.

Sonuç 6.1.1. H_x sapı W üzerindeki kesitlerin grubunu tamamiyle belirler.

Eğer W = X alınırsa H_x sapı tamamiyle X üzerinde global kesitlerin grubunu belirler,yani $H_x \cong \Gamma(X, H)$ dır.

Teorem 6.1.4. X istisnai irtibatlı bir Lie grubu ve x_o , $y_o \in X$ herhangi iki nokta olsun. Bu taktirde $H_{x_o} \cong H_{y_o}$ dır.

İspat. $\Pi : H_{x_o} \rightarrow H_{y_o}$, $\Pi ([f]_{x_o}) = [f \text{ o } \varphi]_{y_o}$ şeklinde tarif edilen Π tasviri iyi tariflidir, burada $\varphi : (X, y_o) \rightarrow (X, x_o)$ sürekli bir tasvirdir, yani

$$\varphi \in [\varphi] \in \text{hom} [(X, y_o), (X, x_o)].$$

Gerçekten,

$$[f_1]_{x_o} = [f_2]_{x_o} \Rightarrow f_1 \in [f_2]_{x_o}$$

$$\Rightarrow f_1 \sim f_2$$

$$\Rightarrow f_1 \text{ o } \varphi \sim f_2 \text{ o } \varphi$$

$$\Rightarrow f_1 \text{ o } \varphi \in [f_2 \text{ o } \varphi]_{y_o}$$

$$\Rightarrow [f_1 \text{ o } \varphi]_{y_o} = [f_2 \text{ o } \varphi]_{y_o}$$

1. Π bire-birdir : Gerçekten, her $[f_1]_{x_o}$, $[f_2]_{x_o} \in H_{x_o}$ için ,

$$\Pi ([f_1]_{x_o}) = \Pi ([f_2]_{x_o}) \Rightarrow [f_1 \text{ o } \varphi]_{y_o} = [f_2 \text{ o } \varphi]_{y_o}$$

$$\Rightarrow f_1 \text{ o } \varphi \sim f_2 \text{ o } \varphi$$

$$\Rightarrow f_1 \sim f_2$$

$$\Rightarrow f_1 \in [\, f_2 \,]_{x_o}$$

$$\Rightarrow [\, f_1 \,]_{x_o} = [\, f_2 \,]_{x_o}$$

2. Π örtendir : Gerçekten, her $[\, f \,]_{x_o} \in H_{x_o}$ homotopi sınıfı $[\, f \text{ o } \varphi \,]_{y_o} \in H_{y_o}$ homotopi sınıfını belirtir.

Karşıt olarak her $[\, f \text{ o } \varphi \,]_{y_o} \in H_{y_o}$ homotopi sınıfı $[\, f \,]_{x_o} \in H_{x_o}$ homotopi sınıfını belirtir.

3. Φ bir homomorfizmdir : Gerçekten, her $[\, f_1 \,]_{x_o}$, $[\, f_2 \,]_{x_o} \in H_{x_o}$ için,

$$\Pi(\, [\, f_1 \,]_{x_o} . [\, f_2 \,]_{x_o} \,) = \Pi(\, [\, f_1 . f_2 \,]_{x_o}$$

$$= [\, f_1 . f_2 \text{ o } \varphi \,]_{y_o}$$

$$= [\, (\, f_1 \text{ o } \varphi \,) . (\, f_2 \text{ o } \varphi \,) \,]_{y_o}$$

$$= \Pi(\, [\, f_1 \,]_{x_o} \,) . \Pi(\, [\, f_2 \,]_{x_o} \,)$$

6.2. Karakterizasyonlar

X_1, X_2 herhangi istisnai irtibatlı Lie grupları ve $H(X_1)$, $H(X_2)$ de bu gruplara karşılık gelen self homotopi gruplarının demetleri olsun. Bunları $(X_1, H(X_1))$ ve $(X_2, H(X_2))$ notasyonu ile gösterelim.

Tarif 6.2.1. $(X_1, H(X_1))$ ve $(X_2, H(X_2))$ çiftleri verilsin. Eğer,
1. $\mu : X_1 \rightarrow X_2$ sürekli,

2. $\mu^*: H(X_1) \to H(X_2)$ sürekli,

3. μ^*, μ ye göre sapları koruyor. Yani

$$\begin{array}{ccc} H(X_1) & \xrightarrow{\mu^*} & H(X_2) \\ \Phi_1 \downarrow & \mu & \downarrow \Phi_2 \\ X_1 & \to & X_2 \end{array}$$

kare diagramı değişmeli ve

4. Her $x_1 \in X_1$ için,

$$\mu^* \big|\, (H(X_1))_{x_1} : (H(X_1))_{x_1} \to (H(X_2))_{\mu(x_1)}$$

homomorfizm ise, bu taktirde

$$F = (\mu, \mu^*) : (X_1, H(X_1)) \to (X_2, H(X_2))$$

çiftine $(X_1, H(X_1))$ ve $(X_2, H(X_2))$ çiftleri arasında bir **homomorfizm** denir.

Tarif 6.2.2. $F = (\mu, \mu^*) : (X_1, H(X_1)) \to (X_2, H(X_2))$ bir homomorfizm ve μ ile μ^* topolojik tasvir iseler $F = (\mu, \mu^*)$ ikilisine bir **izomorfizm** denir.

Teorem 6.2.1. $(X_1, H(X_1))$ ve $(X_2, H(X_2))$ çiftleri verilsin. Eğer $\mu : X_1 \to X_2$ sürekli bir tasvir ise, bu taktirde $(X_1, H(X_1))$ ve $(X_2, H(X_2))$ çiftleri arasında bir homomorfizm vardır.

İspat. $x_1 \in X_1$ keyfi sabit bir nokta olsun. Bu taktirde $\mu(x_1) \in X_2$ olup, $(H(X_1))_{x_1} \subset H(X_1)$, $(H(X_2))_{\mu(x_1)} \subset H(X_2)$ mütekabil saplardır. Şimdi f_1 ve f_2, x_1 de self homotopik tasvirler ise $\mu(x_1)$ deki f_1', f_2' tasvirlerini

$$f_1' = \mu \circ f_1, \quad f_2' = \mu \circ f_2$$

şeklinde tarif edelim.

Eğer $f_1 \sim f_2 \Rightarrow \exists\, F(x, t) : X \times J \to X \ni F$ sürekli ve $F(x, 0) = f_1$, $F(x, 1) = f_2$.

Şimdi

$$G = G(x, t) : X \times J \to X$$

tasvirini,

$$G(x, t) = \mu(F(x, t))$$

olarak tarif edersek, G süreklidir. Üstelik,

$$G(x, 0) = \mu(F(x, 0)) = \mu \circ f_1$$

$$G(x, 1) = \mu(F(x, 1)) = \mu \circ f_2$$

dır. O halde

$$\mu \circ f_1 \sim \mu \circ f_2$$

dır. Dolayısıyla $[f]_{x_1} \leftrightarrow [\mu \circ f]_{\mu(x_1)}$ eşlemesi tek anlamlıdır.Yani bu eşleme herbir $[f]_{x_1}$ elemanına birtek $[\mu \circ f]_{\mu(x_1)}$ elemanını karşılık tutmaktadır. Böylece bir

$$\mu^* : H(X_1) \to H(X_2)$$

tasvirini her $[f]_{x_1} \in H(X_1)$ için,

$$\mu^*([f]_{x_1}) = [\mu \circ f]_{\mu(x_1)} \in H(X_2)$$

şeklinde tarif edebiliriz.

1. μ^*süreklidir : Eğer $U_2 \subset H(X_2)$ herhangi açık cümle ise $(\mu^*)^{-1}(U_2) = U_1 \subset H(X_1)$ bir açık cümledir. Gerçekten, $U_2 \subset H(X_2)$ açık ise, W_i eğrisel irtibatlı açık bir civar olmak üzere

$$U_2 = \bigcup_{i \in I} s_i^2(W_i)$$

$$\Phi_2(U_2) = \bigcup_{i \in I} W_i$$

dir. Burada

$$s_i^2 : W_i \to H(X_2)$$

birer kesittir. Dolayısıyla $\bigcup_{i\in I} W_i \subset X_2$ açıktır. μ sürekli olduğundan

$$\mu^{-1}\left(\bigcup_{i\in I} W_i\right) = \bigcup_{i\in I} \mu^{-1}(W_i) \subset X_1 \text{açıktır.}$$

Ayrıca $\mu^{-1}(W_i)$, X_1 de eğrisel irtibatlı bir açık civar olduğundan bir

$$s_i^{\,1} : \mu^{-1}(W_i) \rightarrow H(X_1)$$

kesiti vardır. Böylece $\bigcup_{i\in I} s_i^{\,1}(\mu^{-1}(W_i)) \subset H(X_1)$ bir açıktır. Göstereceğiz ki

$$U_1 = \bigcup_{i\in I} s_i^{\,1}(\mu^{-1}(W_i))$$

dır. Eğer $\sigma_1 = [f_1]_{x_1} \in U_1 = (\mu^*)^{-1}(U_2)$ ise bu durumda $\sigma_2 = [\mu \text{ o } f_1]_{\mu(x_1)}$ vardır öyle ki $\mu^*(\sigma_1) = \sigma_2$ ve $\Phi_2(\sigma_2) = \Phi_2([\mu \text{ o } f_1]_{\mu(x_1)}) = \mu(x_1)$ dir. Dolayısıyla $\mu(x_1) \in W_i$ ise $x_1 \in \mu^{-1}(W_i)$ ve $\sigma_1 = [f_1]_{x_1} \in \bigcup_{i\in I} s_i^{\,1}(W_i)$ dir.Böylece

$$U_1 \subset \bigcup_{i\in I} s_i^{\,1}(\mu^{-1}(W_i))$$

dir. Diğer taraftan, $\sigma_1 \in \bigcup_{i\in I} s_i^{\,1}(\mu^{-1}(W_i))$ ise bir $i \in I$ için, $\sigma_1 \in s_i^{\,1}(\mu^{-1}(W_i))$ dir. Buradan $\sigma_1 = [f_1]_{x_1}$ ise, $\Phi_1(\sigma_1) = x_1$ ve $[\mu \text{ o } f_1]_{\mu(x_1)} = \sigma_2 \in U_2$ dir. Böylece, $\bigcup_{i\in I} s_i^{\,1}(\mu^{-1}(W_i)) \subset U_1$ dir.O halde,

$$U_1 = \bigcup_{i\in I} s_i^{\,1}(\mu^{-1}(W_i))$$

dir.

2. μ^*, μ ye göre sapları korur : Gerçekten, herhangi $\sigma_1 = [f_1]_{x_1} \in H(X_1)$ için

$$(\mu \text{ o } \Phi_1)([f_1]_{x_1}) = \mu(\Phi_1([f_1]_{x_1})) = \mu(x_1)$$

$$(\Phi_2 \text{ o } \mu^*)([f_1]_{x_1}) = \Phi_2(\mu^*([f_1]_{x_1})) = \Phi_2([\mu \text{ o } f_1]_{\mu(x_1)}) = \mu(x_1)$$

dir.

3. Her $x_1 \in X_1$ için ,

$$\mu^* \big| H_{x_1} : H_{x_1} \rightarrow H_{\mu(x_1)}$$

tasviri bir homomorfizmdir : Gerçekten f_1 ve f_2, $x_1 \in X_1$ de self homotopik tasvirler ise

$$f_1' = \mu \text{ o } f_1, \;\; f_2' = \mu \text{ o } f_2$$

de $\mu (x_1) \in X_2$ de self homotopik tasvirlerdir. Dolayısıyla

$$\mu^* ([f_1]_{x_1}). \mu^* ([f_2]_{x_1}) = [\mu \text{ o } f_1]_{\mu(x_1)} . [\mu \text{ o } f_2]_{\mu(x_1)}$$

$$= [\mu \text{ o } f_1 . f_2]_{\mu(x_1)}$$

$$=\mu^* ([f_1 . f_2]_{x_1})$$

dır. O halde $F = (\mu, \mu^*)$ bir homomorfizmdir.

Teorem 6.2.2. $(X_1, H(X_1))$ ve $(X_2, H(X_2))$ ve $(X_3, H(X_3))$ çiftleri verilsin. Eğer $\mu : X_1 \rightarrow X_2$ ve $\lambda : X_2 \rightarrow X_3$ sürekli ise bu taktirde $k = \lambda \text{ o } \mu$, $k^* = \lambda^* \text{ o } \mu^*$ olacak şekilde bir $F = (k, k^*) : (X_1, H(X_1)) \rightarrow (X_3, H(X_3))$ bir homomorfizmdir. Herhangi $[f]_{x_1} \in H(X_1)$ için

$$k^* ([f]_{x_1}) = [k \text{ o } f]_{k(x_1)} = [f]_{\lambda(\mu(x_1))}$$

ve

$$(\lambda^* \text{ o } \mu^*) ([f]_{x_1}) = \lambda^* (\mu^* [f]_{x_1})$$

$$= \lambda^* ([\mu \text{ o } f]_{\mu(x_1)})$$

$$= [\lambda \text{ o } (\mu \text{ o } f)]_{\lambda(\mu(x_1))}$$

dir. Gösterilebilir ki

$$(\lambda \text{ o } \mu) \text{ o } f \sim \lambda \text{ o } (\mu \text{ o } f)$$

dir. Dolayısıyla

$$k^{*} = \lambda^{*} \circ \mu^{*}$$

dır.

Şimdi ***C***, istisnai irtibatlı Lie grupları ve sürekli tasvirleri kategorisi, ***D***, istisnai irtibatlı Lie gruplarının self homotopi gruplarının demetleri ve demet homomorfizmleri kategorisi olsun.

Bir T : ***C***$\rightarrow$ ***D*** tasvirini sırasıyla her X için ve $\mu : X_1 \rightarrow X_2$ için, T (X) = H ve $T(\mu) = \mu^* : H(X_1) \rightarrow H(X_2)$ şeklinde tarif edelim.

1. $X_1 = X_2$ ve $\mu = 1_{X_1}$ ise $T(1_{X_1}) = 1_{H(X_1)}$ dir. Çünkü, her $[f]_{x_1} \in H(X_1)$ için

$$T(1_{X_1})([f]_{x_1}) = (1_{X_1})^*([f]_{x_1}) = [1_{X_1} \circ f]_{x_1} = [f]_{x_1}$$

dir.

2. $\mu : X_1 \rightarrow X_2$ ve $\lambda : X_2 \rightarrow X_3$ sürekli iken $\lambda \circ \mu : X_1 \rightarrow X_3$ süreklidir. Dolayısıyla

$$T(\lambda \circ \mu) : H(X_1) \rightarrow H(X_3)$$

bir homomorfizm olup,

$$T(\lambda \circ \mu) = (\lambda \circ \mu)^* = \lambda^* \circ \mu^* = T(\lambda) \circ T(\mu)$$

dir. Dolayısıyla T : *C*$\rightarrow$ *D* bir kovaryant funktordur.

Böylece aşağıdaki teoremi verebiliriz.

Teorem 6.2.3. İstisnai irtibatlı Lie grupları ve sürekli tasvirleri kategorisinden, istisnai irtibatlı Lie gruplarının self homotopi gruplarının demetleri ve demet homomorfizmleri kategorisine bir kovaryant funktor vardır.

Teorem 6.2.4. $(X_1, H(X_1))$ ve $(X_2, H(X_2))$ çiftleri verilsin. Eğer $\mu : X_1 \rightarrow X_2$ bir topolojik tasvir ise, bu taktirde $(X_1, H(X_1))$ ve $(X_2, H(X_2))$ çiftleri arasında bir izomorfizm vardır.

İspat. $\mu : X_1 \to X_2$ topolojik olduğundan süreklidir. Dolayısıyla bir

$$\mu^* : H(X_1) \to H(X_2)$$

sürekli tasviri vardır ve $F = (\mu, \mu^*)$ bir homomorfizmdir. Yine $\mu : X_1 \to X_2$ topolojik olduğundan μ^{-1} süreklidir. Dolayısıyla,

$$(\mu^{-1})^* : H(X_2) \to H(X_1)$$

sürekli tasviri vardır ve $F^{-1} = (\mu^{-1}, (\mu^{-1})^*)$ bir homomorfizmdir. Diğer taraftan $\mu^{-1} \circ \mu = 1_{X_1}$ ve $\mu \circ \mu^{-1} = 1_{X_2}$ olduğundan $(1_{X_1})^* = 1_{H(X_1)}$ ve $(1_{X_2})^* = 1_{H(X_2)}$ dir. Herhangi $[f_1], [f_2] \in H(X_1)$ için,

$$\mu^*([f_1]) = \mu^*([f_2]) \Rightarrow [g_1] = [g_2]$$

dir. Buradan

$$(\mu^*)^{-1}([g_1]) = (\mu^*)^{-1}([g_2])$$

olup,

$$(\mu^*)^{-1}(\mu^*[f_1]) = (\mu^*)^{-1}(\mu^*[f_2])$$

ve

$$(\mu^*)^{-1} \circ \mu^* = 1_{H(X_1)}$$

olduğundan $[f_1] = [f_2]$ dir. Dolayısıyla μ^* birebirdir. Diğer taraftan $(\mu^*)^{-1} = (\mu^{-1})^*$ olduğundan $(\mu^*)^{-1}$ süreklidir. O halde $F(\mu, \mu^*)$ bir izomorfizmdir. Aynı şekilde gösterilebilir ki
$F^{-1} = (\mu^{-1}, (\mu^{-1})^*)$ bir izomorfizmdir.

KAYNAKLAR

Adams, F. J. 1982. Lectures on Lie Groups. The University of Chicago Press.

Adams, F. J. 1996. Lectures on Exceptional Lie Groups. The University of Chicago Press.

Baez, J. C. 2002. The octonions. Bull. Amer. Math. Soc. (N. S.) No.2; 145-205.

Balcı, S. 1978. Homotopi ve Bir Uzayın Esas Grubu. Y.L.Tezi, Ankara Üniversitesi, 96 s., Ankara.

Balcı, S. 1981. Bir Topolojik Uzayın Esas Gruplarının Demeti ve İlgili Karakterizasyonlar.Ph. D. Tezi, Ankara Üniversitesi, 38 s., Ankara.

Balcı, S. 1982. The Sheaf of The Fundemental Groups. Commun. Fac. Sci. Univ. Ankara, Ser. A1 Mathématiques, Tome 31; 59-65.

Balcı, S. 1983. On the Sheaf of The Fundemental Groups. Commun. Fac. Sci. Univ. Ankara, Ser A1 Mathématiques, Tome 32; 41-47.

Balcı, S. 1993. Characterization of Abelianized Normal Covering Spaces Via Global Sections. Jour. Inst. Math. and Comp. Sci. Math. Ser. Vol 6; No. 2; 129-135.

Balcı, S. 1994. On the Solution of the Lifting Problem on Abelian Covering Spaces. Pure and Applied Mathematica Sciences, Vol. 39, No. 1-2; pp. 69-77.

Balcı, S.and Güner, E. 1998. On The Sheaf H_n of Higher Homotopy Groups as an Abelian Covering Space. Commun. Fac. Sci. Univ. Ankara, Ser. A1, V 47; 35-44.

Çitil, M. 2003. Kompakt İstisnai Lie Gruplarının Homotopi Gruplarının Demeti Ph. D. Tezi, Ankara Üniversitesi,   p. , Ankara.

Fegan, H. D. 1991. An Introduction to Compact Lie Groups. Series in Pure Math, v;13.

Grauret, H. and Fritzsche, K. 1976.Several Complex Variables, Springer-Verlag.

Güner, E. 1996. Yüksek Homotopi Gruplarının Demeti Ph. D. Tezi, Ankara Üniversitesi, 53 s. , Ankara.

Hacısalihoğlu, H. 1980. Yüksek Diferensiyel Geometriye Giriş. Fırat Ünv.

Hacısalihoğlu, H. H. 2000. Diferensiyel Geometri. cilt 1; baskı 4.

Mimura, M. and Toda, H. 1970. Cohomology Operations and the Homotopy Groups of

Compact Lie Groups. I.Topology, 9; 317-336.
Kachi, H. and Mimura, M. 1999. Homotopy groups of compact Exceptional Lie groups. Proc. Japan Acad.Ser.A Math.Sci. 75, no 4; 47-49.
Oshima, H. 2000. Self Homotopy Group of the Exceptional Lie Group G_2. J. Math. Kyoto Univ., 40, No. 1; 177-184.
Price, J. F. 1977. Lie Groups and Compact Groups. London Math. Soc. Lecture Note Series, 25.
Uluçay, C. 1971. Fonksiyonlar Teorisi ve Rimann Yüzeyleri. Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Yayınları, Şirketi Mürettibiye Basımevi, Um. 114, Mat. 31; 696 s. , İstanbul.
Uluçay, C. 1972. Modern Topolojiye Giriş ve Grup Temsilleri. İstanbul Teknik Üniversitesi Kütüphanesi, Şirketi Mürettibiye Basımevi, Sayı 868; 287 s. , İstanbul.
Uluçay, C. 1978. Fonksiyonlar Teorisi ve Rimann Yüzeyleri. KTÜ.Temel Bil. Fak. Yayını, 2. Baskı.
Yıldız, C. 1982. H- Gruplar Üzerinde Demetler ve Bazı Karakterizasyonlar Ph. D. Tezi, İ. Ü. Fen-Edebiyat Fakültesi, 37 s. , Ankara.
Yıldız, C. 1999. Genel Topoloji.Gazi Üniv. Yayını.Ankara.

ÖZGEÇMİŞ

Ankara'da 1966 yılında doğdu. İlk, orta, lise öğrenimini Ankara'da tamamladı. 1990 yılında Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü'nden mezun oldu. 1991 yılında öğretmenlik görevine başladı.1995 yılında Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı'nda Yüksek Lisans öğrenimini tamamladı. Çankaya Milli Piyango Anadolu Lisesinde Matematik(İng) Öğretmeni olarak görev yapmaktadır.