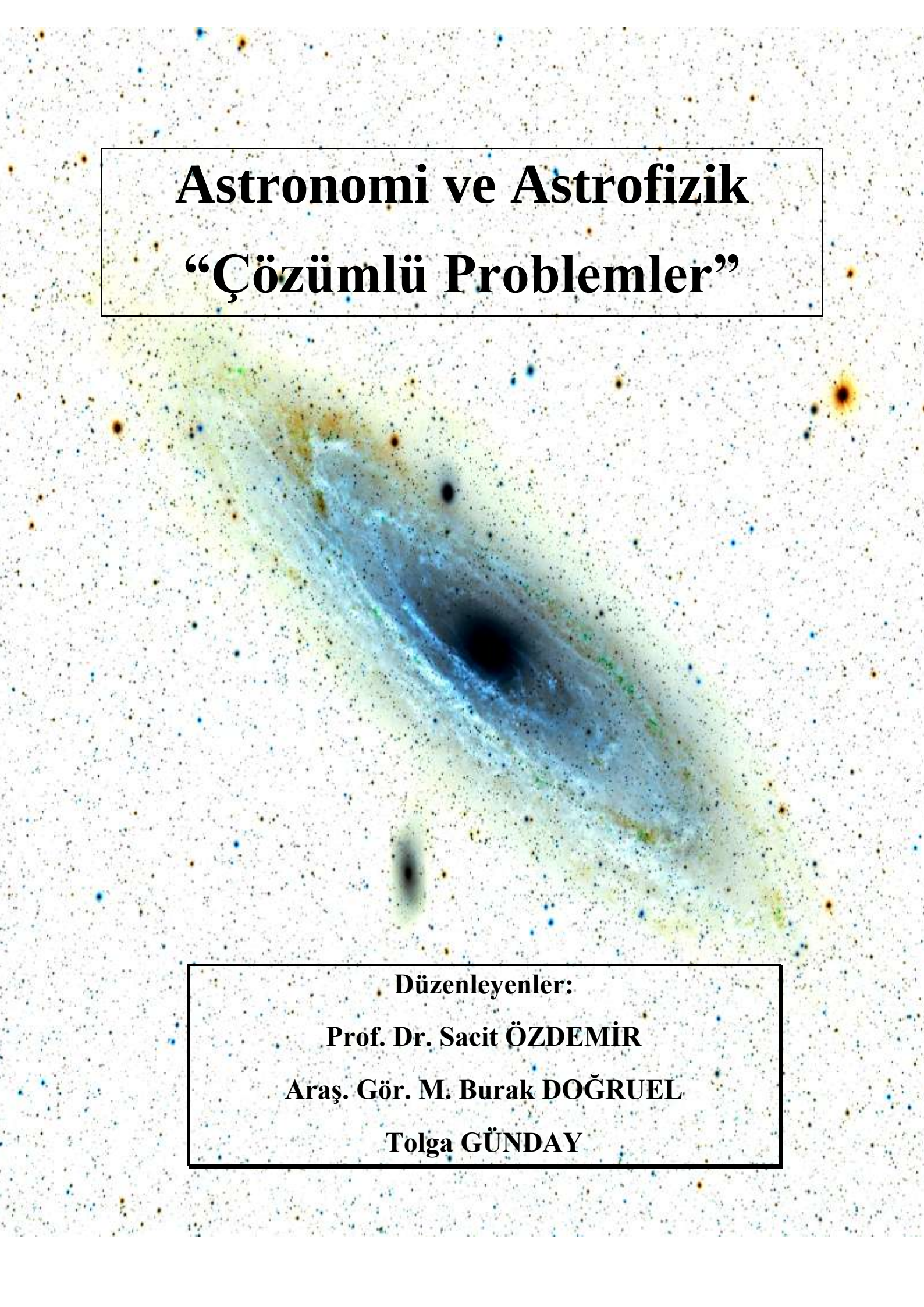
Astronomi ve Astrofizik
“Çözümlü Problemler”



Düzenleyenler:

Prof. Dr. Sacit ÖZDEMİR

Araş. Gör. M. Burak DOĞRUEL

Tolga GÜNDAY

Ö N S Ö Z

Astronomi yani gökbilim tüm insanların, özellikle de gençlerin ve çocukların, son derece ilgisini çeken bir bilim dalıdır. Böyle olmasının bir nedeni belki de, incelediği cisimlerin ***ulaşılamaz*** olmasındandır.

Astronomi konusunda ülkemizde yeterli sayıda Türkçe kaynak bulmak oldukça zordur. Bunun paralelinde, bu konuda "çözümlü problemler" eserlerine ulaşmak ise iyice imkansız hale gelmektedir. Bu kitap ile, konuyla ilgili üniversitelerin Astronomi ve Uzay Bilimleri öğrencileri ve orta öğretim öğrencilerinin ihtiyaç duyduğu önemli bir kaynak eksiği giderilmeye çalışılmıştır.

Yaklaşık dört yıldır vermekte olduğum lisans derslerimin içerisinden seçilmiş olan konuyla ilgili uygun problemler sunulmaktadır. Kitapta çözümlü verilen problemler, Astronomi ve Astrofizik ([1]), Gök Mekaniği ([2]) ve Yıldızların Yapısı ([3]) kitaplarından seçilerek derlenmiştir.

Tüm astronomi meraklılarına faydalı olması ve ülkemizde unutulmaya yüz tutan "astronomi" biliminin hak ettiği yere ulaşması dileklerimle…

Prof. Dr. Sacit ÖZDEMİR

Haziran 2014

[1] Astronomi ve Astrofizik: Temel Kitap, Ed.: S. Özdemir, B. Gürol, O. Demircan, Asil Yayınevi, 2011 (2. Baskı)

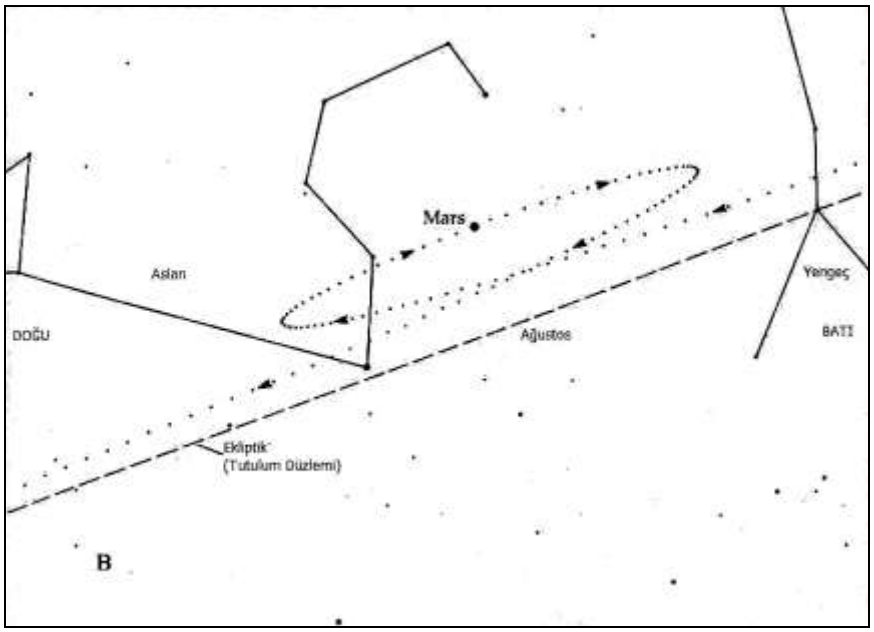
[2] Gök Mekaniği, Z. Tüfekçioğlu, AÜ Fen Fakültesi Yayınları, 120, 1974

[3] Yıldızlar: Yapıları ve Evrimleri, R.J. Tayler, Çev.: C. Aydın, Z. Aslan, AÜ Fen Fakültesi Yayınları, 24, 1995

1. BÖLÜM : GÖK MEKANİĞİ

1.1. Bir dış gezegenin yörünge düzleminin ekliptikle arasındaki açının 10° olduğunu ve gezegenlerin kuzeye doğru hareket ederken karşı konumda ekliptiği kestiğini kabul ederek, bu dış gezegenin geri yöndeki hareketini gösteren şekli çiziniz.

C: Görünüm aynen Şekil.1.1'deki kesikli ilmeğe (loop'a) benzer şekilde olacaktır. Sadece, eğer gezegen tam karşı konumdayken gözleniyorsa bu ilmeğin ortası tutulum (ekliptik) üzerinde olacaktır. İlmeğin genişliği gezegenin Yer'e olan uzaklığına, ilmeğin yüksekliği ise yörüngesinin ekliptikle yaptığı açıya (bu örnekte 10 derece) bağlıdır.



Şekil 1.1: 1994-1995 yıllarında Mars gezegeninin Yer'den gözlenen – gökyüzündeki geri yönlü – **göreli** hareketi. Gezegenin göreli yolu Leo takım yıldızının yıldızlarına göre gösterilmiştir. Bu görünüş, 28°- 39° arasını kapsar. Şubat 1995'te Mars'ı geri hareketinin ortasında göstermektedir. Bu anda gezegen en parlaktır. Geri hareket l993 Aralıkta başlar ve Mart 1995'de biter.

1.2. Yer'i, Jüpiter gezegeninden gözlediğimizi düşünerek, Yer'in kavuşum dönemini hesaplayınız? Venüs'ü gözlemeniz halinde kavuşum dönemi ne olur?

C: 1/S = 1/P – 1/E formülü gereğince P=365.26 gün, E=11.86 yıl=4332 gün değerleri yerine yazılırsa Jüpiter ile Yer'in kavuşum dönemi S=398.9 gün bulunur. Eğer Jüpiter'den Venüs'ü gözlediğimizi düşünürsek P=224.7 gün, E= 11.86 yıl= 4332 gün değerleri yerine yazılırsa Jüpiter ile Venüs'ün kavuşum dönemi S=237 gün bulunur.

1.4. Yeryüzünün *g* çekim ivmesinin belirlendiği yöntemle, aşağıdaki gökcisimleri için aynı ifadenin alacağı değerleri hesaplayınız.
(a) Ay (M_m=*0.0123* $M_\oplus$, R_m= *1738 km*)
(b) Güneş ($M_\odot$=*2x10*^{30} *kg*, $R_\odot$=*7x10*^{8} *m*)
(c) Jüpiter (M_J= *318* $M_\oplus$, R_J=*11.2* $R_\oplus$)

C : Formül: $g = G.M_{gez} / R^2_{gez}$

$G = 6{,}67x10^{-11}\, m^3 / kg.s^2$

$M_{gez} \rightarrow kg$ biriminde olacak

$R_{gez} \rightarrow metre$ biriminde olacak

g (yüzey çekim ivmesi) $\rightarrow m/s^2$ biriminde olacak

İlgili kütle ve yarıçap değerleri yerine yazılırsa:

a) Ay (M_{AY}= *0,0123.*M_{YER}= *7,36x10*^{22} *kg*, R_{AY}= *1738 km*)

$$g_{AY} = 6{,}67\times10^{-11}\frac{m^3}{kg.s^2}\cdot\frac{7{,}554\times10^{22}kg}{\left(1738\times10^3\right)^2(m)^2} = \frac{4{,}906\times10^{12}m}{3{,}0206\times10^{12}s^2} = 1{,}62 m/s^2$$

b) Güneş $= \left(M_\Theta = 2\times10^{30}kg,\ R_\Theta = 7\times10^8 m\right)$

$$g_{GÜNEŞ} = 6{,}67\times10^{-11}\frac{m^3}{kg.s^2}\cdot\frac{2\times10^{30}kg}{\left(7\times10^8\right)^2(m)^2} = \frac{4{,}906\times10^{12}m}{3{,}0206\times10^{12}s^2} = 272{,}24\, m/s^2$$

c) Jüpiter $= \left(M_{jüp} = 318\, M_{yer} = 1{,}901\times10^{27}kg,\ R_{jüp} = 71435{,}84\, km\right)$

$$g_{jüp} = 6{,}67\times10^{-11}\frac{m^3}{kg.s^2}\cdot\frac{1{,}901\times10^{27}kg}{\left(71435{,}84\times10^3\right)^2(m)^2} = 24{,}84\, m/s^2$$

1.5. Merkür gezegeninin enberi ve enöte hızları nedir? Bu gezegenin enberi ve enöte uzaklıkları nedir? Enberi ve enöte noktaları için *vr* (hız x uzaklık) çarpımını hesaplayarak fiziksel sonucu üzerinde açıklama yapınız.

C: Gök mekaniğinden enberi ve enöte noktalarındaki yörünge hızları:

$$V_{enberi} = \frac{2\pi a}{p}.\sqrt{(1+e)/(1-e)}$$

$$V_{enöte} = \frac{2\pi a}{p}.\sqrt{(1-e)/(1+e)}$$

v.r (hız x uzaklık)'ın fiziksel sonucu, yörünge açısal momentumunun korunduğu anlamına gelmektedir.

Merkür gezegeninin yörüngesine ait yarı büyük eksen uzunluğu:

$$a_{merkür} = 0{,}3871\, AB = 58{,}07\times10^6\ km$$

Merkür gezegeninin yörünge periyodu:

$P_{merkür} = 87{,}96\ gün = 7{,}5997 \times 10^6$ s

Merkür yörüngesinin dış merkezliği (eksantrisitesi):

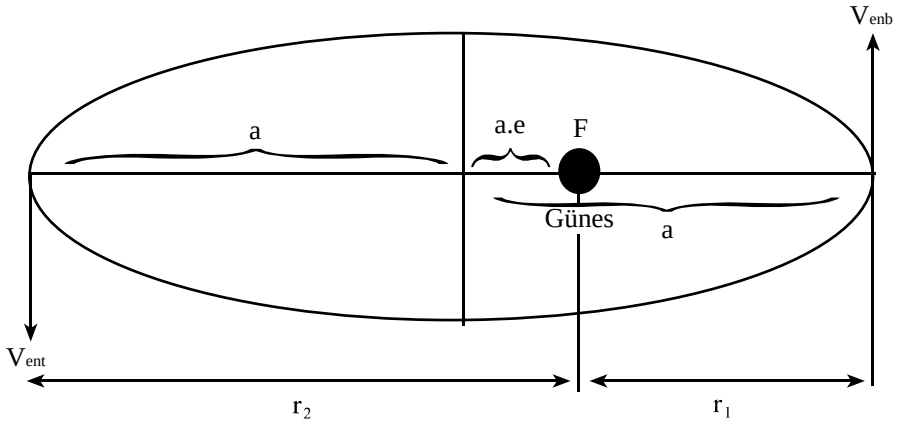
$e_{merkür} = 0{,}2056$

İşlem kolaylığı açısından iki denklemde de ortak olan $\frac{2\pi a}{P}$ 'yi belirleyelim:

$$\frac{2\pi \cdot 58{,}065 \times 10^6}{7{,}5997 \times 10^6\ sa} = 48{,}006\ km/s$$

$$V_{enberi} = 48{,}006 \cdot \sqrt{(1+0{,}2056)/(1-0{,}2056)} = 59{,}14\ km/s$$

$$V_{enöte} = 48{,}006 \cdot \sqrt{(1-0{,}2056)/(1+0{,}2056)} = 31{,}63\ km/s$$



$$\underset{\substack{\downarrow \\ enberi\ uzaklıkla}}{r_1} + \underset{\substack{\downarrow \\ enöte\ uzaklıkla}}{r_2} = 2a = 11{,}613 \times 10^7\ km$$

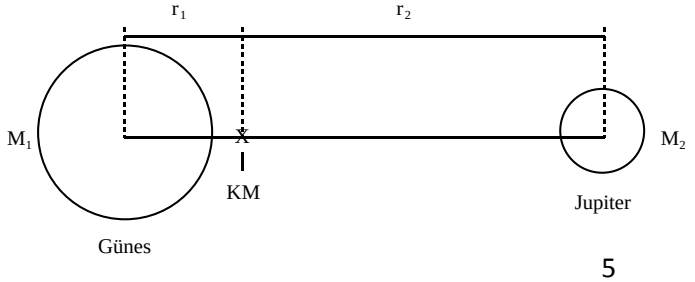
Yörüngesel açısal momentum $L(= mrv)$, yörüngenin her yerinde aynı olur, yani korunur.

$r_2 = r_{enöte} = a + a.e = 70{,}0 \times 10^6\ km$

$r_1 = r_{enberi} = a - a.e = 46{,}13 \times 10^6\ km$

1.6. (a) Güneş-Jüpiter ve **(b)** Yer-Ay sisteminin kütle merkezlerinin göreli konumlarını bulunuz?

C: a) Güneş – Jüpiter kütle merkezi (KM) konumu:



$M_1 = M_\odot = 2 \times 10^{30} kg$

$M_2 = M_{jüp} = 1{,}901 \times 10^{27} kg$

$$a = r_1 + r_2 = d_{gün-jüp} = 5{,}2028\ AB \cong 780{,}0 \times 10^6\ kg$$

$r_1 + r_2 = a$ (Güneş-Jüpiter uzaklığı)

Statik gereğince $r_1.m_1 = r_2.m_2'dir.$ Buradan:

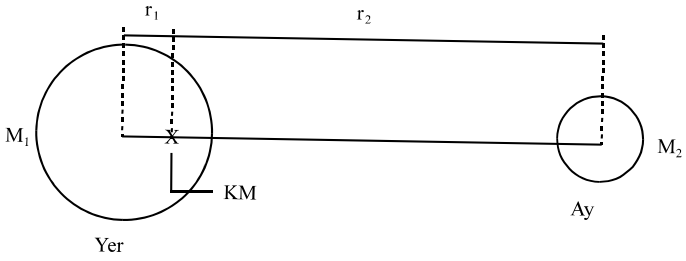
$\frac{r_1}{r_2} = \frac{m_2}{m_1}$ formülü kütle merkezinin yerini verecektir.

$$\rightarrow \frac{r_1}{780{,}0 \times 10^6 - r_1} = \frac{1.901 \times 10^{27}}{2 \times 10^{30}}$$

$$\rightarrow \frac{r_1}{780{,}0 \times 10^6 - r_1} = 9{,}505 \times 10^{-4} \quad \Rightarrow \xrightarrow{r_1 = 741065{,}90\ km} \text{çıkacaktır.}$$

Yani KM Güneş'in fotosferinin (ışık küresinin) hemen dışında ve Güneş'e çok yakındır.

b) Yer – Ay kütle merkezi konumu;



$$a = r_1 + r_2 = d_{ay} = d_{ay-yer} = 384405\ km$$
$$M_{yer} = 5{,}98 \times 10^{24}\ kg$$
$$M_{ay} = 7{,}36 \times 10^{22}\ kg$$

$$\rightarrow \frac{r_1}{384405 - r_1} = \frac{7.36 \times 10^{22}}{5{,}98 \times 10^{24}}$$

$$\rightarrow \frac{r_1}{384405 - r_1} = 0{,}0123 \quad \Rightarrow \xrightarrow{r_1 = 4670{,}73\ km}$$ Yani bulunan KM değeri, Yer-Ay sisteminin kütle merkezinin Dünya'nın içinde olduğunu gösterir.

1.7. Yıldızıl dönemi tam 24 saat olan bir televizyon uydusu Yer etrafında dairesel bir yörüngede dolanmaktadır. Bu uydunun Yer yüzeyinden olan uzaklığı ne kadardır? (İpucu: Kepler yasalarını kullanın). Eğer uydu, yüzeyde bulunan bir gözlemciye göre sabit bir şekilde duruyor ise yörünge düzleminin yönelimi ne şekildedir?

C: Düzenlenmiş 3.Kepler yasasına göre $\frac{a^3}{P^2} = \frac{G(M_1 + M_2)}{4\pi^2}$ dir. M_1 Yer kütlesi olarak, M_2 ise uydu kütlesi (ihmal edilebilir) alınırsa, *P=24 saat=86400 s* alınırsa buradan *a= 42 300 km* bulunur. Yani televizyon uyduları ortalama *40 000 km* uzaklığa yerleştirilirse Yer ile aynı sürede (24 saat) dolanırlar. Bu uyduların yörünge düzlemi yönelimi Yer ekvatoru ile çakışıktır.

1.8. Titan uydusuna ilişkin yörünge parametrelerini kullanarak, Satürn gezegeninin kütlesini hesaplayınız.

C: Yine bir önceki sorudaki Kepler yasası kullanılırsa M_1 Satürn kütlesi, M_2 Titan'ın kütlesi (ihmal edilebilir), $a_{Titan}=1221870\ km$ ve $P_{Titan}=15,945\ gün$ değerleri kullanılırsa, $M_{Satürn}=5.7x10^{26}\ kg= 95\ M_{Yer}$ bulunur.

1.9. Ay'ın yörüngesi üzerindeki herhangi bir noktadan bir taş Yer'e doğru serbest düşmeye bırakılmaktadır. Bu taş Yer merkezinden *192 000 km* uzaklıkta iken hızı ne kadardır?

C: Zamana bağlı olmayan serbest düşme kinematik hız formülü $v^2 = v_0^2 - 2g(y - y_0)$ şeklindedir.

Burada $v_0= 0$ alınırsa ve $y\text{-}y_0= 384000\ km - 192000\ km = 192000\ km$ (yani Yer-Ay mesafesinin ortasında) $v= 61\ 376\ m/s = 61,4\ km/s$ bulunur.

1.10. Kavuşum dönemi $S = 1,5\ yıl$ olan bir cisim Yer'den gözlenmektedir. Bu cismin yörüngesine ilişkin yarı-büyük eksen uzunluğu için olası iki farklı değeri hesaplayınız?

C: Kavuşum dönemi *1,5 yıl* olduğundan bu bir dış gezegendir. Dış gezegenler için verilen, *1/S = 1/E – 1/P* eşitliğinden bu gezegen için $P=1095,75\ gün= 3\ yıl$ bulunur. Düzenlenmemiş Kepler yasası $\frac{a^3}{P^2} = M_1 + M_2$ eşitliğinde (M_2 gezegen kütlesi, M_1 Güneş kütlesi yanında ihmal edilirse ve $M_1= 1\ br$ alınırsa) $a=2,08\ AB$ bulunur. Yörüngesinin oldukça basık bir elips olduğunu varsayarak $e=0,9$ alalım. Bu durumda;

$r = a(1 - e^2) / (1 + e \cos \theta)$ *(1.3)*

eşitliğinden $r_{enberi}=0,208\ AB$ ve $r_{enöte}=3,952\ AB$ bulunur.

1.11. Yer'in yörünge öğelerini kullanarak, Güneş'in kütlesini belirleyiniz Bu hesapta Yer'in kütlesi önemli midir?

C: Kullanılacak formül düzenlenmiş 3. Kepler Yasası'dır.

$$\frac{G.(M_1 - M_2)}{4\pi^2} = \frac{a^3}{p^2}$$

$a \rightarrow$ Yarı büyük eksen uzunluğu, $P \rightarrow$ Dolanma dönemi, $M_1\ ve\ M_2 \rightarrow$ Cisimlerin kütleleri

$G \rightarrow 6,67\times10^{-11}\ \ m^3/kg.s^2$ Evrensel Çekim Sabiti

$M_{yer} = 7,3554\times10^{24}\ kg$

$a_{yer} = 150000000\ km = 15\times10^{10}\ m$

$P_{yer} = 1\ yil \cong 365\ gün = 3,153\times10^7\ s$

$$\frac{6,67\times10^{-11}\cdot(M_\Theta + M_{yer})}{4\pi^2} = \frac{(15\times10^{10})^3}{(3,153\times10^7)^2}$$

$$M_\Theta + M_{yer} = \frac{4.\pi^2.3,375\times10^{33}m^3}{6,63\times10^4\ sn^2m^3.kg.s^2}$$

$M_\Theta + M_{yer} = 2{,}01\times10^{30} kg$

$M_\Theta \rangle\rangle M_{yer}$ olması sebebi ile (>>: çok çok büyük) yerin kütlesi göz ardı edilebilir. Böylece:

$M_\Theta \cong 2{,}01\times10^{30} kg$ olarak bulunur.

1.12. Kendinizle aşağıdaki cisimler arasındaki karşılıklı çekim kuvvetini karşılaştırınız.
(a) *100 kg* kütleli ve *1 m* uzaklıkta bir başkası
(b) Karşı konumda (Yer'e en yakın konumda) iken Mars gezegeni. Sonuçları tartışınız.

C: a) Kendi kütlemiz M_1= *80 kg* olsun. Diğer kişinin kütlesi M_2= *100 kg* olarak verilmiş. Aradaki mesafe *d= 1 m* olacağına göre genel kütle çekim yasasından:

$F_{çekim} = GM_1.M_2/d^2 = 6{,}67x10^{-11}.80.100 / 1^2 = 5{,}3x10^{-7}$ *N* bulunur.

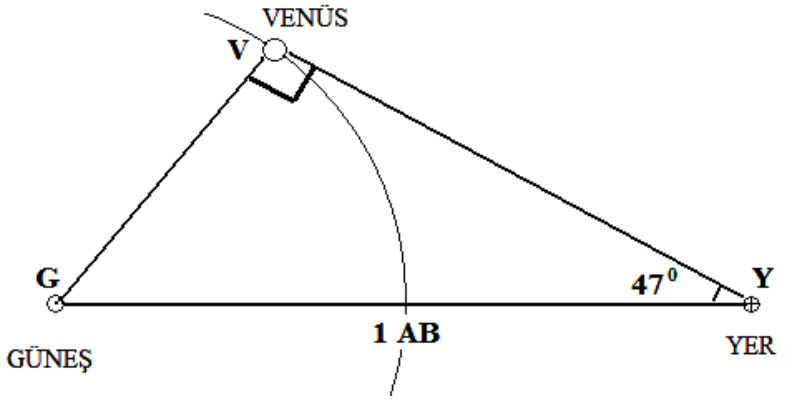
b) Mars'ın kütlesi M_1= *6,42x10*^{23} *kg* ve üst kavuşumda (Yer'e en yakın) iken uzaklığı *d* ≈ *0,52 AB* = *7,77x10*^{10} *m* alarak kütle çekim yasasından:

$F_{çekim} = GM_1.M_2/d^2 = 6{,}67x10^{-11}.\ 6{,}42x10^{23}.80 / (7{,}77x10^{10})^2 = 5{,}67x10^{-7}$ *N* bulunur.

Görüldüğü gibi, 1 m uzağımızdaki 100 kg kütleli bir insanın üzerimize uyguladığı kütle çekim kuvveti, Mars gezegeninin Yer'e **en yakın** konumdayken uyguladığı çekim kuvveti ile kıyaslanabilir büyüklüktedir!

1.13. Venüs'ün en büyük uzanımı *47°* dır. Bu konumda iken Güneş'ten olan uzaklığı *AB* cinsinden ne kadardır?

C: Şekilden de görüldüğü gibi, bir gezegen en büyük uzanımına ulaştığında oluşan üçgen bir **dik** üçgendir. Bu dik üçgenin çözümünden: *|VG|= |GY|.Sin(47*^{0}*) = 1.0,73 = 0,73 AB* olarak Güneş-Venüs uzaklığı bulunur. *1 AB* (Yer-Güneş uzaklığı) = *149 500 000 000 m = 1,495x10*^{11} *m* olduğuna göre, Güneş-Venüs uzaklığı da *~1.1x10*^{11} *m* olarak bulunur.



2.3. Mars'ın uydularından Phobos ve Deimos'un Kepler'in yasasına uyduğunu gösterin ve bu uyduların yörüngelerinden yararlanarak Mars'ın kütlesini hesaplayın.

C: Phobos uydusundan:

$M_{Phobos} = 1{,}07 \times 10^{16}\ kg$, $a_{Phobos} = 9377{,}2\ km = 9377200\ m$, $P_{phobos} = 7{,}67\ saat = 27612\ s$

3. Kepler yasasını kullanırsak:

$$\frac{G.(M_1 + M_2)}{4\pi^2} = \frac{a^3}{p^2},\ G = 6{,}67 \times 10^{-11}\ m^3/kg.s^2$$

$$\frac{6.67 \times 10^{-11}.(M_{mars} + 1{,}07 \times 10^{16})}{4\pi^2} = \frac{(9377200)^3}{(27612)^2}$$

M_{mars}'ı denklemde çekip, çözersek:

$M_{mars} = 6{,}39 \times 10^{23}\ kg$ bulunur.

Deimos uydusundan:

$M_{Deimos} = 1{,}08 \times 10^{15}\ kg$, $a_{Deimos} = 23400\,km = 23400000\ m$, $P_{Deimos} = 30{,}3\ saat = 109080\ s$

$$\frac{G.(M_1 + M_2)}{4\pi^2} = \frac{a^3}{p^2},\ G = 6{,}67 \times 10^{-11}\ m^{3/}/kg.s^2$$

$$\frac{6{,}67 \times 10^{-11}(M_{Mars} + 1{,}9 \times 10^{16})}{4\pi^2} = \frac{(23400000)^3}{(109080)^2}$$

M_{mars}'ı denklemden çekip, çözersek:

$M_{mars} = 6.39 \times 10^{23}\ kg$ bulunur.

Yorum:

Her iki uydu için elde edilecek a^3/p^2 oranı aynı çıkmaktadır ki, Kepler'in Güneş sistemindeki gezegenlerin hareketlerinden bulduğu sonuçta da $\frac{a^3}{p^2} = sbt$ şeklinde çıkmaktaydı. Dolayısıyla Mars'ın uyduları da – doğal olarak – Kepler Yasasına uygun bir şekilde dolanmaktadırlar.

2.4. (a) Kütlesi 10^3 kg olan bir uzay gemisinin (u.g.) Yer ekvatorundaki ve kutuplardaki ağırlığını hesap ediniz (İpucu: Merkezcil çekim kuvvetini düşününüz).
(b) Jüpiter'in hızlı döndüğünü hatırlayarak bu uzay aracının Jüpiter'in ekvatorunda ve kutuplarında ne ağırlıkta olacağını bulunuz.

C: a) $M_{u.g.} = 10^3\ kg$ verilmiş, $W_{u.g.}$ (ekvator) ve $W_{u.g.}$ (kutup) isteniyor.

$G = 6{,}67 \times 10^{-11}\ m^3/kg.s^2$ ve $M_{yer} = 5{,}98 \times 10^{24}\ kg$

Öncelikle ekvator ve kutup için kütle çekim ivmelerini bulalım:

$$g_{ekvator} = \frac{G.M_{\Theta}}{\left(R_{\Theta\ Ekv}\right)^2} = \frac{6{,}67\times10^{-11}\cdot 5{,}98\times10^{24}\ kg}{\left(6385{,}8\times10^{3}\ m\right)^2} = 9{,}781\ m/s^2$$

$$g_{kutup} = \frac{G.M_{\Theta}}{\left(R_{\Theta\ kutup}\right)^2} = \frac{3{,}98\times10^{14}\ m^3/sn^2}{\left(6369{,}3\times10^{3}\ m\right)^2} = 9{,}832\ m/s^2$$

$W_{ekv.u.g.} = 10^3\ kg\cdot 9{,}781\ m/s^2$ $\qquad$ $W_{kutup,u.g.} = 10^3\ kg\cdot 9{,}832\ m/s^2$

$= 9871\ kg\ \ m/s^2 = 9871\ \ N$ $\qquad$ $= 9832\ kg\ m/s^2 = 9832\ N$

Ekvator Ağırlığı $\qquad$ Kutup Ağırlığı

b) $M_{jup} = 1{,}901\times10^{27}\ kg$. Basıklık formülü ile Jüpiter'in kutup yarıçapını bulalım:

$\varepsilon_{jüp.}$ (basıklık) = 0,062'dir.

$R_{ekv.jup} = 71{,}5\times10^{5}\ km$

$\varepsilon = \left(r_{ekv} - r_{kutup}\right)/r_{ekv}$

$0{,}062 = \left(71{,}5\times10^{3} - r_{kutup}\right)/31{,}5\times10^{3} = r_{kutup} = 67{,}06\times10^{3}\ km$

$$g_{ekv} = \frac{G.M_{j}}{\left(R_{j\ ekv}\right)^2} = \frac{6{,}67\times10^{11}\cdot 1{,}901\times10^{27}}{\left(71{,}5\times10^{6}\ m\right)^2} = 24{,}8\ m/s^2 \Rightarrow W_{ekv} = 10^3\ kg.24{,}8 = 24800\ N$$

$$g_{kutup} = \frac{G.M_{j}}{\left(R_{j\ kutup}\right)^2} = \frac{6{,}67\times10^{11}\cdot 1{,}901\times10^{27}}{\left(67{,}06\times10^{6}\ m\right)^2} = 28{,}19\ m/s^2 \Rightarrow W_{kutup} = 10^3\ kg.28{,}19 = 28190\ N$$

Yorum: Farkın Yer'e göre çok daha fazla olduğunu görebiliriz. Bu sonuç Jüpiter gezegeninin Yer'e nazaran daha basık bir yapıda olmasının bir sonucudur.

2.7. Yer'deki sıcaklığa benzer bir sıcaklık elde edebilmek için aşağıdaki yıldızlardan ne kadar uzakta (AB cinsinden) olmamız gerekirdi.
(a) Rigel (yüzey sıcaklığı T= *12000°K,* yarıçapı *R=35* $R_{\odot}$)?
(b) Barnard Yıldızı (*T= 3000°K, R= 0.5* $R_{\odot}$) ?

C:

a) Rigel yıldızı için:

$T_{rigel} = 12000^{o}\ K$

$R_{rigel} = 35R_{\Theta} = 35700000\ \ km = 24{,}5\times10^{6} km$

a: Yer-Güneş arası ortalama mesafe

R_{Θ} : Güneş yarıçapı

T_{Θ} : Güneş sıcaklığı

Önce Güneş sabitini bulalım: Güneş Sabiti $\left(E_T\right)$ = Yer atmosferinin dışına, Güneş'ten birim zamanda birim yüzeye gelen toplam enerjidir.

$E_0 = E_T \cdot \frac{a^2}{R_\Theta^2}$; $E_0 = \sigma.T^4$, burada $\sigma = 5{,}67\times10^{-8}\ W/m^2.K^4$ Stefan-Boltzmann sabiti olmak üzere

$$E_\Theta = 5{,}67\times10^{-8}\ W/m^2.K^4.\underbrace{(5800)^4}_{T_\Theta}\ K^4 = 6{,}4\times10^7\ W/m^2$$

$$6{,}4\times10^7\ W/m^2 = E_T \cdot \frac{150000000^2}{700000^2} \Rightarrow E_T = 1{,}393\times10^3\ W/m^2$$

Güneş yerinde Rigel olsaydı;

$$E_{rigel} = E_T \cdot \frac{a^2}{R_{rigel}^2},\ E_{rigel} = \sigma.(12000)^4 = 1{,}175\times10^9\ W/m^2$$

$$1{,}175\times10^9\ W/m^2 = 1{,}393\times10^3\ W/m^2 \cdot \frac{a^2}{6{,}002\times10^{14}\ km^2}$$

$$a^2 = 5{,}062\times10^{20}\ km^2 \Rightarrow a = 2{,}25\times10^{10}\ km \cong 150\ AB$$

b) Barnard yıldızı için:

$T_{Barnard} = 3000^o K$

$R_{Barnard} = 0{,}5\ R_\Theta$

$$E_{Barnard} = E_T \cdot \frac{a^2}{R_{Barnard}}$$

$$5{,}67\times10^{-8} \cdot (3000)^4 = 1{,}393\times10^3 \cdot \frac{a^2}{(350000)^2}$$

$$a^2 = 4{,}038\times10^{14} \Rightarrow a = 20{,}09\times10^6\ km = 0{,}13\ AB$$

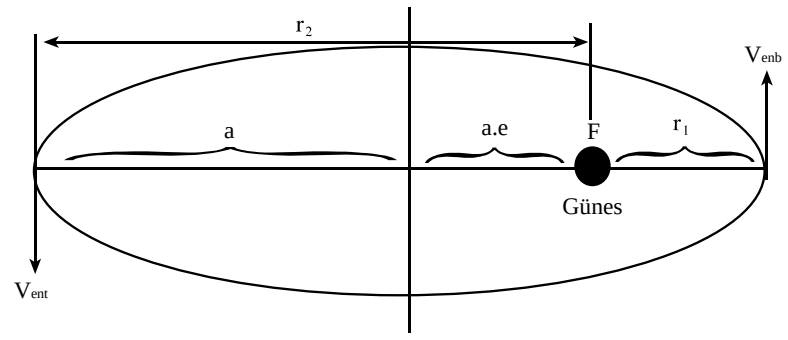
2.9. En öte uzaklığı *5xl0^4 AB* ve yörünge basıklığı *e= 0.995* olan bir ky'ı gözönüne alarak;

(a) Enberi noktasının uzaklığı ve dolanma dönemi nedir?

(b) Enberi ve enöte noktalarındaki hızı nedir?

(c) Enöte noktasında iken Güneş Sisteminden kaçma hızı ne kadardır? Bundan nasıl bir sonuç çıkarmak mümkündür?

C:



$r_2 = 5\times10^4\ AB$, $e_{ky} = 0{,}995$

a) İstenenler $r_1 = ?$ ve $P_{ky} = ?$

$e = 0{,}995 ve\, r_2 = 5\times10^4\ AB = 7{,}5\times10^{15} m$ olarak verilmiş

Önce şekildeki geometriden yarı büyük eksen uzunluğunu belirleyelim;

$r_2 = a + a.e$

$5\times10^4\ AB = a + 0{,}995a$

$5\times10^4\ AB = 1{,}995a \Rightarrow\ a = 25{,}06\times10^3\ AB \quad a = 3{,}75\times10^{15} m$

$r_1 = a - a.e$

$= 25{,}06\times10^3 - 24{,}93\times10^3\ \Rightarrow\ r_1 = 130\ AB$

P_{ky} Kepler'in 3. yasasından;

$$\frac{G.(M_1 + M_2)}{4\pi^2} = \frac{a^3}{P^2} \Rightarrow \frac{6{,}67\times10^{-11}.\overbrace{2\times10^{30}}^{M_\Theta}}{4\pi^2} = \frac{(5{,}30\times10^{46} m)}{P^2}$$

$P_{ky} = 1{,}25\times10^{14} \cong 4\times10^6\ yıl$

b) Enberi ve enöte hızları; $v_{enb} = \frac{2\pi a}{P}.\sqrt{1+e/1-e}$, $v_{enöte} = \frac{2\pi a}{P}.\sqrt{1-e/1+e}$

$$v_{enb} = \frac{2{,}36\times10^{16} m}{1{,}25\times10^{14} sn}\cdot 19{,}9 = 3773{,}2\ m/s, \qquad v_{enöte} = \frac{2{,}36\times10^{16} m}{1{,}25\times10^{14} s}$$

$v_{enb} = 3773{,}2\ m/s$ $\qquad\qquad$ $v_{enöte} = 9{,}45\ m/s$

c) $v_{Kaçma} = \sqrt{\frac{2.G.M.}{r_2}} = \sqrt{\frac{2.6{,}67\times10^{-11}.2.10^{30}}{7{,}5\times10^{15} m}} = 188{,}6\ m/s$

Yorum: $v_{enöte}$ hızı, enöte noktasındaki kaçma hızından küçük olduğu için, kuyruklu yıldız Güneş'in çekim alanından çıkamaz.

2.20. Yer benzeri iç gezegenlerin atmosferlerinde az miktarda H olduğu halde (Jüpiter benzeri) dış gezegenlerinkinde bol miktarda H gazı vardır. Her sınıfın tipik örneği olarak Yer ve Jüpiter'i alarak, her ikisi için H moleküllerinin karekök hızının (v_{rms}) kaçma hızına oranını hesap ediniz. Bu değerler bu gezegenlerde gözlenen göreli H bolluğuna nasıl etki eder?

C: $v_{rms} = (3kT/m)^{1/2}$, kaçış (escape) hızı ise $v_e = \sqrt{2.G.M./R}$ 'dir.

Şayet $\frac{v_{rms}}{v_e} \leq 0,1$ olursa ilgili gaz gezegen atmosferinde sonsuza dek kalır. Aksi halde atmosferi terk eder.

m= Gazın kütlesi, T= Gazın bulunduğu ortamın sıcaklığı (gezegenin ortalama yüzey sıcaklığı), K= Boltzmann sabiti= $1,38\times10^{-23}\ J/K$, G= Evrensel çekim sabiti = $6,67\times10^{-11}\ m^3/kg.s^2$, M= Gezegenin kütlesi, R= Gezegenin yarıçapı, Hidrojen atomunun kütlesi= $M_H = 1,6735\times10^{-27}\ kg$.

H atomu için, Yer'e göre hesap yaparsak:

$$v_{rms\,(Yer)} = \sqrt{\frac{3.1,38\times10^{-23}.290^{O}K}{1,6735\times10^{-27}\ kg}} = 2,67\times10^{3}\ m/s$$

$$\frac{v_{rms\,(Yer)}}{v_{e\,(Yer)}} = \frac{2,67\times10^{3}}{11,18\times10^{3}} = 0,238$$

$$v_{e\,(Yer)} = \sqrt{\frac{2.6,667\times10^{-11}.5,98\times10^{24}kg}{6378000\ m}} = 11,18\times10^{3}\ m/s$$

Yer için sonuç: 0,238, eşik değer olan 0,1'den büyük olduğu için Yer Hidrojen gazını tutamamıştır.

H atomu için Jüpiter'e göre hesap yaparsak:

$$v_{rms\,(Jüp)} = \sqrt{\frac{3.1,38\times10^{-23}/20}{1,6735\times10^{-27}\ kg}} = 1,72\times10^{3}\ m/s$$

$$\frac{v_{rms\,(Jüp)}}{v_{e\,(Jüp)}} = \frac{1,72\times10^{3}}{118,4\times10^{3}} = 0,014$$

$$v_{e\,(Jüp)} = \sqrt{\frac{2.6,667\times10^{-11}\ \ 1,901\times10^{27}\ kg}{71435840\ m}} = 188,4\times10^{3}\ m/s$$

Jüpiter için oran 0,014 çıkmaktadır, yani eşik değer olan 0,1'den küçük olduğu için Hidrojen Jüpiter'in atmosferinde kalacaktır.

2.22. Halley kuyruklu yıldızı (ky)'nın dolanma dönemi *76 yıl*, yörüngesinin basıklığı ise *e= 0,967*'dir.

(a) Bu ky'ın enberi ve enöte noktalarının uzaklıkları ne kadardır?

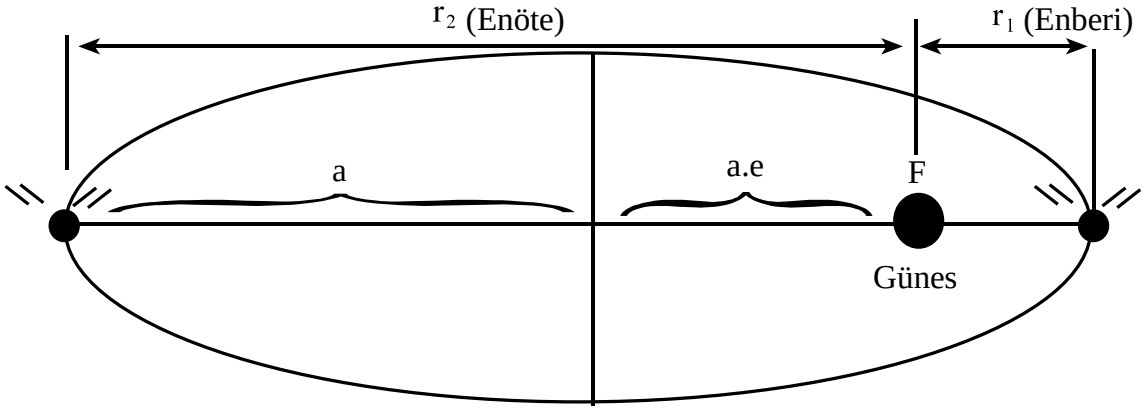
(b) Bu ky enberi ve enöte noktasında iken Güneş'in ky üzerinde oluşturacağı sıcaklık ne olur?

(c) Halley ky'nın albedosu %3 olduğuna göre enberi ve enöte noktalarında iken dengedeki karacisim sıcaklığı ne olur?

C: $P_{halley} = 76\ yıl = 2{,}39\times10^{9}\ s$ ve $e_{halley} = 0{,}967$ olarak veriliyor.

a) r_1 ve r_2 uzaklıkları isteniyor. Verilen dönem ile Kepler'in 3. yasasından yarı büyük eksen uzunluğuna geçeriz.

$$\frac{G(M_1 + M_\Theta)}{4\pi^2} = \frac{a^3}{(2{,}39\times10^{9})^2} \Rightarrow a = 17{,}86\ AB$$



$$r_1 = a - a.e = 17{,}86 - 17{,}86\cdot 0{,}967 = 0{,}58\ AB$$

$$r_2 = a + a.e = 17{,}86 + 17{,}86\cdot 0{,}967 = 35{,}13\ AB$$

b) $E_\Theta = E_{halley}.\frac{a_{halley}^2}{R_\Theta}$, $E_{halley} = \sigma.T_{halley}^4$ Burada yüzey sıcaklığı T_{halley}'i bulacağız.

$E_\Theta\ ve\ R_\Theta$ bilindiği için denklemi daha sade yazalım:

$$\frac{E_\Theta R_\Theta}{(r_1)^2} = E_{H,enberi} \Rightarrow \frac{3{,}14\times10^{19}}{7{,}569\times10^{15}} \Rightarrow E_{Halley\,enberi} = 4{,}14\times10^{3}\ W/m^2$$

$4{,}14\times10^{3} = 5{,}67\times10^{-8}.T_{H,enb}^4 \Rightarrow T = 519{,}80^o K$ enberide iken Güneş'in ky üzerinde oluşturacağı sıcaklık

$$\frac{E_\Theta R_\Theta}{(r_2)^2} = E_{H,enöte} = \frac{3{,}14\times10^{14}}{2{,}77\times10^{14}} = 1{,}134\ W/m^2$$

$1{,}134 = 5{,}67 \times 10^{-8} \;\; T^4_{H,\,enöte} \Rightarrow T = 66{,}86^o\,K$ enötede iken Güneş'in ky üzerinde oluşturacağı sıcaklık

c) Albedosu %3 ise yani *A*= 0,03 alarak $T = 394(1/A)^{1/4} \cdot \frac{1}{\sqrt{r_p}}$ formülüne uygularız:

Burada r_p : AB biriminde Güneş-gökcismi uzaklığıdır.

$T_{enb} = 394.(1-0{,}03).\frac{1}{\sqrt{0{,}58}} \Rightarrow T_{enb} = 501{,}83^o\,K$ Denge durumundaki kara-cisim sıcaklığı

$T_{enöte} = 394.(1-0{,}03).\frac{1}{\sqrt{35{,}13}} \Rightarrow T_{enöte} = 64{,}48^o\,K$ Denge durumundaki kara-cisim sıcaklığı

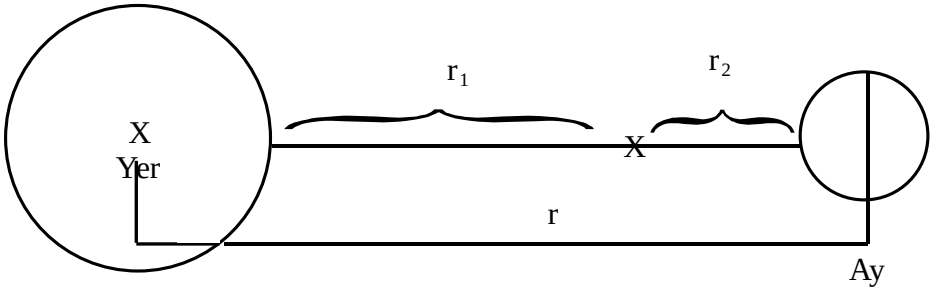
4. BÖLÜM : YER-AY SİSTEMİ

4.1. Apollo uzay gemisi Ay'a doğru gitmektedir. Apollo ile Dünya arasında hangi noktada net çekim ivmesi sıfır olur?

C: Çekim ivmesi $g = \frac{G.M}{r^2}$ 'dir.

Çekim ivmesinin sıfır olması için kütle çekim ivmelerinin birbirlerine eşit olması gerek

$g_{yer} = g_{ay}$



$M_{yer} = 5{,}98 \times 10^{24}\ kg$

$M_{Ay} = 7{,}36 \times 10^{22}\ kg$

$r_1 + r_2 = r =$ Yer – Ay uzaklığı = 384405 km

$$\frac{G.M_{yer}}{r_1^{\,2}} = \frac{G.M_{ay}}{r_2^{\,2}} \Rightarrow \frac{r_1}{r_2} = \sqrt{\frac{M_{yer}}{M_{Ay}}}$$

$$\frac{r_1}{r_2} = \sqrt{\frac{5{,}98 \times 10^{24}}{7{,}36 \times 10^{22}}} \Rightarrow \frac{r_1}{r_2} = 9{,}0138$$

$r_1 = 9{,}0138 \cdot r_2$, $r_1 + r_2$ denkleminde yerine konulursa:

$$r_2 + 9{,}0138 \cdot r_2 = 384405\ km \quad \Rightarrow \quad \underbrace{r_2 = 38387{,}5\ km,\ r_1 = 346017{,}5\ km}_{\text{Uzaklıklarında çekim ivmesi 0 dır}}$$

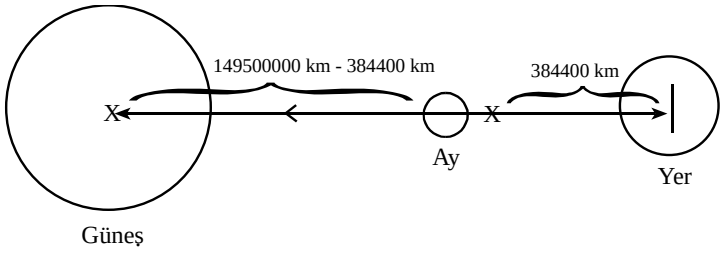
4.3. Ay yörüngesinin dairesel ve ekliptik (tutulum) düzlemi üzerinde olduğunu varsayarak; Güneş'in, Ay'ın karşı konumda ve iç kavuşum konumlarındaki çekim kuvveti arasındaki farkı bulunuz. Bu değeri Yer'in çekimsel etkisi ile karşılaştırınız. Ay'ın yörüngesinin neden basit bir eliptik yörünge olmadığını anlayabildiniz mi?

C:

$$M_{\Theta} = 2 \times 10^{30} kg$$
$$M_{ay} = 7{,}35 \times 10^{22} kg$$
$$M_{yer} = 5{,}98 \times 10^{24} kg$$
$$R_{ay} = 1738\ km$$

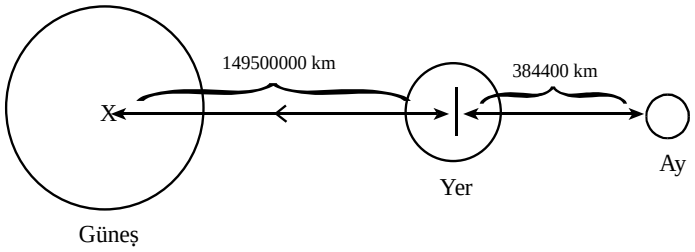
İç kavuşumda (yani Yeniay evresinde), Güneş'in Ay'a uyguladığı çekim kuvveti:

$$F_{1,\Theta} = \frac{GM_{\Theta}.M_{Ay}}{\left((149500000 - 384400) \times 10^{3} m\right)^{2}}$$
$$F_{1,\Theta} = 4{,}4 \times 10^{20} N$$



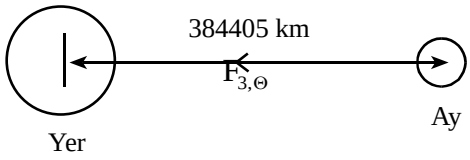
Karşı konumda (yani Dolunay evresinde), Güneş'in Ay'a uyguladığı çekim kuvveti:

$$F_{2,\Theta} = \frac{GM_{\Theta}.M_{Ay}}{\left((149{,}5 \times 10^{6} + 384{,}4 \times 10^{3}) \times 10^{3} m\right)^{2}}$$
$$F_{2,\Theta} = 4{,}36 \times 10^{20} N$$



Yer'in Ay'a uyguladığı çekim kuvveti ise:

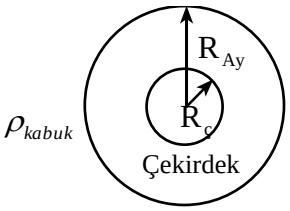
$$F_{3,\Theta} = \frac{GM_{\Theta}M_{Ay}}{\left(384{,}4 \times 10^{6} m\right)^{2}} = 2 \times 10^{20} N$$



Ay üzerine Güneş'in uyguladığı kütle çekim kuvveti Yer'inkinin yaklaşık 2 katıdır. Ay'ın Yer ile birlikte Güneş çevresinde dolanması sonucu doğan merkezcil ivme nedeniyle, Ay Yer'in çekim alanından çıkmamaktadır.

4.4. (a) Ay çekirdeğinin yarıçapı $R_{AY}/10$ ise ve bu yarıçapın üzerinde kalan maddenin eş yoğunluklu bir yapıda ($\rho = 3000\ kg/m^3$) olduğunu kabul ederek, çekirdeğin eş yoğunluklu olması durumunda yoğunluğu ne olmalıdır?
(b) Yer'in Ay üzerindeki gelgit kuvvetini, yörüngenin enberi ve enöte noktası için hesaplayınız ve bulduğunuz sonucu yorumlayınız?

C: a) $R_{çekirdek} = 1735/10 = 173{,}8\ km$, $M_{AY} = 7{,}36x10^{22}\ kg$



$$R_ç = 0{,}1 \times R_{Ay}$$
$$\rho_{kabuk} = 3000\ kg/m^3$$

Kabuk (ya da manto) kısmının kütlesini hesaplayalım:

$$M_{kabuk} = \rho_ç . \frac{4}{3}\pi R_A^3 - \rho_ç . \frac{4}{3}\pi R_ç^3 = \rho_ç \frac{4}{3}\pi\left(R_A^3 - R_ç^3\right) = 3000 . \frac{4}{3}\pi\left[\left(1738\times10^3\right)^3 - \left(173{,}8\times10^3\right)^3\right]$$

$$M_{kabuk} = 6{,}6\times10^{22}\ kg;$$
$$M_{çekirdek} = M_{Ay} - M_{kabuk} = 7{,}6\times10^{21} kg$$

Buradan çekirdeğin yoğunluğu:

$$\rho_ç = \frac{M_ç}{\frac{4}{3}\pi R_ç^3} \qquad \rho_ç = \frac{7{,}6\times10^{21}}{\frac{4}{3}\pi\left(173{,}8\times10^3\right)^3}$$

$\rho_ç = 3{,}5\times10^5\ kg/m^3$; çıkmaktadır ki bu sonuç, Yer'in $10^4\ kg/m^3$'lük çekirdek yoğunluğu ile kıyaslandığında, *gerçekçi* bir değer *olmadığı* görülür! O halde Ay'ın çekirdeği dışındaki madde eş yoğunluklu, yani $\rho = 3000\ kg/m^3$ değerine sahip **değildir**.

b) Yerin Ay üzerine uyguladığı **dik** yöndeki çekim ivmesi:

$B = GM_{uyg.}\left(\frac{r - R_{uyg.}.Cos\phi}{r^3}\right)$; Burada ϕ enlemini 0^0, yani Ay'ın ekvatorunda alarak işlem yapalım: $B_{\substack{yer-Ay \\ enberi}} = 6{,}67\times10^{-11}.5{,}98\times10^{24}\left(363263000 - 1738000/363263000^3\right)$

$$= 3{,}008\times10^{-3}\ m/s^2$$

$$B_{\substack{yer-ay \\ enöte}} = 6{,}67\times10^{-11}.5{,}98\times10^{24}\left(405547000-1738000/4055477000^3\right)=2{,}414\times10^{-3}\ m/s^2$$

Enberi ve en öte noktalarındaki çekim ivmelerini oranlarsak:

$$\frac{B_{yer-ay,\,enöte}}{B_{yer-ay,\,enberi}} = 0{,}802 \cong \%80 \Rightarrow B_{enberi} = 1{,}25.B_{enöte}$$

Yer'in Ay üzerindeki çekim etkisi en beride, en öteye oranla 1,25 kat daha fazladır. Bu gel-git etkisi nedeniyle Ay yörüngesine kilitli dönme yapmakta (yani Yer çevresinde senkronize dolanmakta) ve dönme ekseni doğrultusunda sallanma (presesyon) hareketi yapmaktadır.

4.11. Hidrostatik denge denkleminden yararlanarak Ay'ın merkezi basıncını tahmin etmeye çalışın ve bunu Dünya'nın merkezi basıncı ile karşılaştırın.

C: Hidrostatik basınç denkleminden merkezi basınç:

$P_c = \frac{2}{3}\pi.G.\rho^2R^2 = P_c$ elde edilir.

Burada yoğunluk (ρ)'un denklemini yerine yazıp sadeleştirmeler yapılırsa:

$$P_c = \frac{2}{3}\pi\ G.\rho^2R^2\ ,\ \rho = \frac{3M}{4\pi r^3}$$

$$= \frac{2}{3}\pi\ G\left(\frac{3M}{4\pi R^3}\right)^2.R^2$$

$\Rightarrow P_c = \frac{3GM^2}{8\pi r^4}$; Ay için $M_{AY} = 7{,}35\times10^{22}\ kg,\ R_{AY} = r_{AY} = 1738\ km$ kullanırsak;

$$P_{c,\,Ay} = \frac{3.6{,}67\times10^{-11}.\left(7{,}35\times10^{22}\right)^2}{8\pi\left(1738000\right)^4}\ \frac{\frac{m^3}{kg.sn^2}.kg^2}{m^4} = 4{,}71\times10^9\ Pa = 4{,}71\times10^4\ Atm.$$

Yer için: $M_{YER} = 5{,}98\times10^{24}\,kg,\ r_{YER} = 6378\ km$ kullanırsak;

$$P_{c,\,yer} = \frac{3.6{,}67\times10^{-11}.\left(5{,}98\times10^{24}\right)^2}{8\pi\left(6378000\right)^4} = 1{,}72\times10^{11}\ P_a = 1{,}72\times10^6\ atm$$

$P_{c,\,yer}/P_{c,\,ay} = 1{,}72\times10^6\ atm/4{,}71\times10^4\ atm = 36{,}5$ olarak bulunur.

Yer'in merkezi basıncı, Ay'a göre 36,5 kat daha fazladır.

4.14. Bir kaya örneğinde bulunan ^{40}Ar ve ^{40}K oranının ^{40}Ar/^{40}K=3 olduğunu kabul ederek; bu kayanın yaşını bulunuz? Yaş belirlemesi yaparken hangi kabülleri yapmak zorunda olduğunuzu belirtiniz.

C: Verilenler: Kullanılacak formül:

$$\frac{{}^{40}Ar}{\underbrace{{}^{40}K}_{Bozunmaoranı}} = 3 \qquad \frac{n}{n_0} = e^{0,693t/\tau}$$

$n \rightarrow$ Şimdiki element miktarı

$n_0 \rightarrow$ Orjinal element miktarı

$t \rightarrow$ Şimdiki yaş

$\tau \rightarrow$ Bozulma zamanı

$$K_{orjinal} = K_{şimdi} + K_{bozulmuş}$$

$$= K_{şimdi} + 3.K_{şimdi} \Rightarrow K_{orjinal} = 4\,K_{şimdi} \Rightarrow \frac{n_{K,şimdi}}{n_{K,orjinal}} = \frac{1}{4}$$

$\frac{n}{n_0} = \frac{1}{4} = e^{-0,693.t/\tau}$, her iki tarafın "*ln*"si alınırsa;

$$1n\frac{1}{4} = 1n\, e^{-0,693.t/\tau}$$

$1n\frac{1}{4} = -0,693\,.\,t/\tau\,.\overbrace{1ne}^{1}$, *burada*, $\tau; n = \frac{n_0}{2}$ kadar azaldığı yarı ömürdür ($\tau = 1,3\times10^9\,yıl$)

$-1,3862 = -0,693\,.\,t/\tau$ $\qquad 2,0002 = \frac{t}{\tau} \Rightarrow t = 2.0004.\tau, \quad \tau = 1,3\times10^9\ yıl$

$\Rightarrow t = 1,6\times10^9\,yıl$

Burada, ^{40}Ar'un, taşın oluşumu sırasında barındırdığı başlangıç miktarı ihmal edilmiş ve zaman içerisinde taştan dışarı kaçmadığı kabul edilmiştir.

5.8. Gezegenin ve uydularının yoğunluklarını aynı kabul ederek Mars'ın Roche limitlerini hesaplayınız ve sonuçlarınızı Deimos ile Phobos uydularının yörüngeleriyle karşılaştırınız.

C: Roche limitini veren formül; $d = 2{,}44\sqrt{\frac{\rho_{Ara\ gezegen}}{\rho_{uydu}}}\cdot R_{gezegen}$

$R_{mars} = 3394\ km$

$M_{mars} = 6{,}4\times10^{23}\ kg$

$M_{deimos} = 1{,}8\times10^{15}\ kg$

$M_{phobos} = 1{,}07\times10^{16}\ kg$

$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3}$$

Phobos ve Deimos'un küresel yapıda olmadığı için hacimleri:

$V_{phobos} = 27000\times21000\times19000 = 1{,}07\times10^{13}\ m^3$

$V_{deimos} = 15000\times12000\times11000 = 1{,}98\times10^{12}\ m^3$

$V_{mars} = \frac{4}{3}\pi(3394000)^3 = 1{,}63\times10^{20}\ m^3$

$$\rho_{phobos} = \frac{1{,}07\times10^{16}\ kg}{1{,}07\times10^{13}\ m^3} = 1000\ kg/m^3$$

$$\rho_{deimos} = \frac{1{,}8\times10^{15}\ kg}{1{,}98\times10^{12}\ m^3} = 909{,}09\ kg/m^3$$

$$<\rho> = \frac{\rho_{pho}+\rho_{dei}}{2} = 955\ kg/m^3$$

$$\rho_{mars} = \frac{6{,}4\times10^{23}\ kg}{1{,}63\times10^{20}} = 3926{,}3\ kg/m^3$$

$$d_{roche} = 2{,}44\sqrt[3]{\frac{3926{,}3}{955}}\cdot 3394\ km = 13266{,}6\ km$$

$$a_{phobos}(9377\ km) < d_{roche} < a_{deimos}\ (21000\ km)$$

Phobos Roche limitinin içinde olduğu halde parçalanmamıştır. Bunun nedeni Phobos uydusunun boyutlarının küçük olması nedeniyle, uyduyu oluşturan maddenin gerilme kuvvetlerinin, ana gezegenin (Mars'ın) çekim kuvvetinden (*tidal/gelgit etkilerinden*) daha büyük olmasıdır. Benzer olarak Roche sınırının dışında dolanan Deimos uydusu da, bu sınırın içine girse, aynı nedenden dolayı parçalanmayacaktır.

5.12. Hidrostatik denge denklemini kullanarak Merkür, Venüs ve Mars'ın merkezi basınçlarını karşılaştırınız.

C:

$M_{merkür} = 3{,}29 \times 10^{23}\ kg$

$R_{merkür} = 2440\ km$

$M_{venus} = 4{,}86 \times 10^{24}\ kg$

$R_{venus} = 6052\ km$

$M_{mars} = 6{,}4 \times 10^{23}\ kg$

$R_{mars} = 3394\ km$

$$\rho_{Merkür} = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{3{,}29 \times 10^{23}\ kg}{\frac{4}{3}\pi (2440000)^3} = 5406\ kg/m^3$$

$$\rho_{Venüs} = \frac{4{,}86 \times 10^{24}}{\frac{4}{3}\pi (6052000)^3} = 5234\ kg/m^3$$

$$\rho_{Mars} = \frac{6{,}4 \times 10^{23}}{\frac{4}{3}\pi (3394000)^3} = 3908\ kg/m^3$$

$P_c = \frac{2}{3}\pi G < \rho >^2 R^2$ formülünden:

$$P_{c_{Merkür}} = \frac{2}{3}\pi\ \ 6{,}67 \times 10^{-11} \cdot (5406)^2 \cdot (2440000)^2 = 2{,}418 \times 10^{10}\ Pa$$

$$P_{c_{Venüs}} = \frac{2}{3}\pi\ \ 6{,}67 \times 10^{-11} \cdot (5234)^2 \cdot (6052000)^2 = 1{,}394 \times 10^{11}\ Pa$$

$$P_{c_{Mars}} = \frac{2}{3}\pi\ \ 6{,}67 \times 10^{-11} \cdot (3908)^2 \cdot (3394000)^2 = 2{,}445 \times 10^{10}\ Pa$$

$$P_{c_{Venüs}} > P_{c_{Mars}} > P_{c_{Merkür}}$$

5.13. Mars'ın ortalama albedosu A= 0,16'dır. Enberi noktasında öğlen vakti yüzey sıcaklığı ne kadardır? Enöte noktasında ne kadardır? Gözlemsel olarak elde edilmiş olan 210-300 K sıcaklıkları ile karşılaştırınız.

C:

Mars'ın yörünge yarı büyük eksen uzunluğu (a) ve yörünge dış merkezliği/basıklığı (e) şöyledir:

$a_{mars} = 1{,}5237\ AB,\ \ e_{mars} = 0{,}0934$

Yörünge enberi ve enöte uzaklıkları ise şöyle hesaplanabilir:

$a_{enberi} = a - a.e = 1{,}5237 - 1{,}5237 \cdot 0{,}0934 = 1{,}3813\ AB$

$a_{enöte} = a + a.e = 1{,}5237 + 1{,}5237 \cdot 0{,}0934 = 1{,}666\ AB$

Gezegenin yüzey albedosu $A_{mars} = 0{,}16$.

Kullanılacak formül:

$T = 394(1-A)^{1/4}.\frac{1}{\sqrt{r_p}}$, burada r_p, *AB* cinsinden Güneş-gezegen uzaklığıdır.

$T_{enb} 3{,}94.(1-0{,}16)^{1/4}.\frac{1}{\sqrt{1{,}3813}} = 320{,}8^{O}\,K$

$T_{enöte} 3{,}94.(1-0{,}16)^{1/4}.\frac{1}{\sqrt{1{,}666}} = 292{,}12^{O}\,K$

Mars gezegeninin gözlemlerden belirlenen yüzey sıcaklığı ise, $T_{gözlenen} : 210 - 300^{o}\,K$ arasında kalmaktadır. Yani gözlenen yüzey sıcaklığı, $300^{o}\mathrm{K}$ (en yüksek) değeri ile $210^{o}\mathrm{K}$ (en düşük) değeri arasında değişmektedir. Teorik yolla bulunan yukarıdaki değerler ise $292^{o}\mathrm{K}$ ile $320^{o}\mathrm{K}$ arasında kalmaktadır. Gözlemsel değer $(210^{o}\mathrm{K})$, teorik beklenen sıcaklıktan $\sim 80^{o}\mathrm{K}$ daha düşüktür. Bu sonuç Mars atmosferinin ısıyı iyi tutamayacak bir yapıda olduğunun göstergesidir.

5.14. 19.yy'ın sonlarında Percival Lowell Mars yüzeyinde büyük kanala benzer yapılar gördüğünü ileri sürmüştür. Fakat bu dönemdeki diğer astronomlar bahsedilen kanalları görememişlerdir. Yer'de bulunan teleskopların ayırma güçleri dikkate alındığında Mars yüzeyinde görülebilecek yapıların büyüklükleri ne olabilir? İyi bir teleskop için açısal ayırma gücü teleskobun optik sistemi, tarafından değil atmosferik görüş tarafından sınırlandırılır. Mükemmel bir görüşe sahip bir gözlem gecesi için bu ayırma gücü 1 yay saniyesi kadardır. En iyi gözlemevlerinde mükemmel atmosferik görüşün olması durumunda en fazla ~0.3 yay saniyesi kadar bir açısal ayrıklığın ölçülmesi mümkündür.

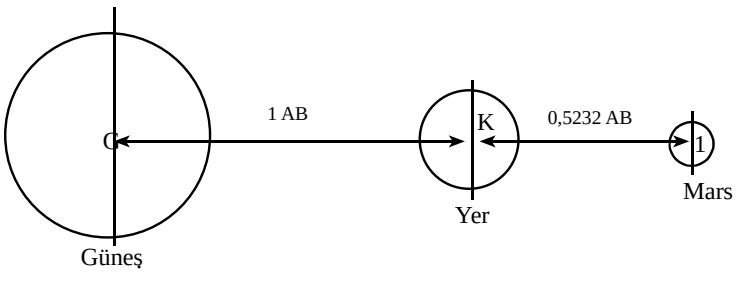
(a) Karşılaşma konumunda Mars'ın açısal çapı ne kadardır?

(b) Mars'taki en büyük yüzey oluşumlarından birisi "Valles Marineris"tir. Boyutları 5000x500 km'dir. Karşılaşma konumunda "Valles Marineris" (V.M.)'in açısal boyutuları ne kadardır? Bu yapı Yer'den gözlenebilir mi?

(c) Karşılaşma konumunda, 1 km enindeki bir kanalı görebilmek için kabaca ne kadarlık bir açısal ayırma gücüne gereksinim duyulur? Lowell bu boyuttaki kanalları görebilir miydi?

(d) Bir yay saniyelik bir açısal ayırma gücü ile minimum görülebilecek yüzey yapısının boyutu ne kadar olabilir?

C: **a)** Karşılaşma konumu:



Açısal çap: $\delta = 2.\arctan\left(\frac{1}{2}.d/D\right)$ formülüyle verilebilir. Burada;

$\delta =$ Açısal çap $\quad d_{Mars} = 6788\ km$

d= cismin çapı $\quad D_{Yer\ Mars} \cong 78555000\ km$

D= Cisimler arası uzaklık

$$\delta_{Mars} = 2.\arctan\left(\frac{1}{2}\frac{6788}{78555000}\right)$$
$$= 17'',82 \approx 18'' = 0'.3$$

b) $\delta_{V.M} = 2.\arctan\left(\frac{1}{2}.\frac{5000}{78555000}\right) = 13''.13$ Evet Yer'den gözlenebilir.

c)

$$\delta_{Kanal} = 2.\arctan\left(\frac{1}{2}\frac{1}{78555000}\right)$$
$$= 0'',00025$$

O halde 1 km genişliğindeki bir kanalın Yer'den görülmesi (atmosferik etki nedeniyle) mümkün değildir.

d) $1'' = 2.\arctan\left(\frac{1}{2}.\frac{d}{78555000}\right)$

d = 380,84 km boyutlarında bir yüzey yapısı ancak $1''$ ayırma gücü ile görülebilir.

GÖK MEKANİĞİ – EK – PROBLEMLERİ

1. İki boyutlu bir kuvvet alanı için potansiyel enerji fonksiyonu $U = \left(3x^3 y - 7x\right)...Joule$ biçimindedir. Herhangi bir (x, y) noktasına etkiyen kuvveti bulunuz.

C:

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial x}\left(3x^3 y - 7x\right) = \left(7 - 9x^2 y\right) Newton$$

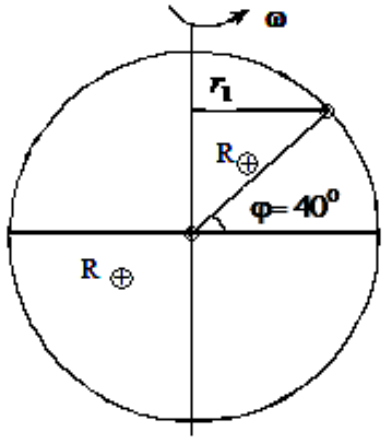
$$F_y = -\frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{\partial}{\partial y}\left(3x^3 y - 7x\right) = -3x^3 \ Newton$$

$$\vec{F} = \left(7 - 9x^2 y\right)\hat{i} - 3x^3 \hat{j} \ Newton$$

---

2. Yeryüzünde $\varphi = 40^o$ enlemindeki bir nokta için, Yer'in dönmesinden ileri gelen v_θ teğetsel hızını hesaplayınız. Bu hız ekvator ve kutuplarda hangi değeri alır?

C:



$v_\theta = r.\dot{\theta},$ 'dir. Burada;

$R_\oplus = 6375\ km\ ve\ r_1 = R_\oplus.Cos\varphi$

olmak üzere;

$$\dot{\theta} = \omega = \frac{2\pi}{P} = \frac{2\pi}{86400s} = 7{,}3\times10^{-5}\ rd/s$$

Yer'in dönmesinden ileri gelen açısal hızdır.

Yukarıda yerine yazarsak:

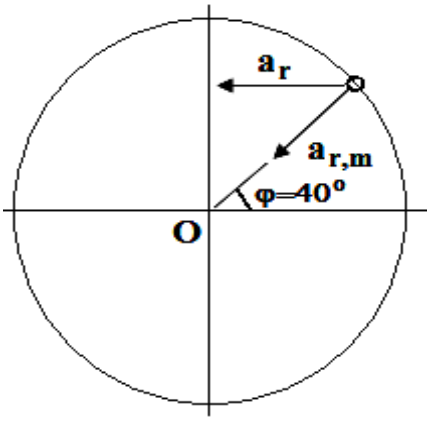
$$v_\theta = r.\dot{\theta} = r_1.\omega = R_\oplus.Cos\varphi.\omega$$

$$v_\theta = 63\,750\times10^3.Cos\left(40^o\right).7{,}3\times10^{-5} rd.s^{-1} = 360\ m/s = 0{,}36\ km/s$$

Bu hız; ekvatorda $v_\theta\,|_{ekv} = R_\oplus.\omega = 470\ m/s = 0{,}47\ km/s$

kutuplarda $v_\theta\,|_{kutup} = R_\oplus.Cos\left(90^o\right)\omega = 0\ m/s$ değerini alır.

b) Aynı nokta $\left(\varphi = 40^o\right)$ için merkezcil ivmeyi ve bunun Yer merkezi doğrultusundaki bileşenini hesaplayınız.



$$a_r = \frac{-v^2}{r} = \frac{-\left(0{,}36\ km/s\right)^2}{6375\ km.Cos\left(40^o\right)} = -0{,}026\ m/s^2$$

Bu ivmenin merkez (O) yönündeki bileşeni

$a_{r,m} = -a_r.Cos\varphi = -0{,}016\ m/s^2$ olur. Bu ivmeyi Yer'in kütle çekim ivmesiyle $\left(g = 9{,}81\ m/s^2\right)$ karşılaştırırsak, çok küçük olduğunu görürüz.

---

3. 10 kg kütleye sahip bir yapay uydu, bir uzay aracıyla $2R_\oplus$ uzaklığında ($R_\oplus = 6375\ km$, Yer'in ortalama yarıçapıdır), yarıçap vektörüne dik doğrultuda hangi hızla fırlatılmalı ki yörünge parabol olsun.

C: Parabolik yörünge için en düşük hız, cisimden kaçış ($v_{kaçış}$) hızına eşittir. O halde

$$v_{kacis} = \sqrt{\frac{2GM}{R}} = \sqrt{\frac{2G.M_\oplus}{2.R_\oplus}} = \sqrt{\frac{2\times 6{,}67\times 10^{-11}\times 6\times 10^{24}}{2\times 6375\times 10^3}}$$

$v_{kacis} = 7823\ m/s = 7{,}82\ km/s$ hızla fırlatılırsa yörüngesi parabol olur.

---

4. Yer'de *200 cm* yükseğe atlayan bir atlet, Ay'da ne kadar yükseğe atlayabilir?

C: Çözüm için Yer ve Ay'ın kütle çekim ivmelerini oranlayalım:

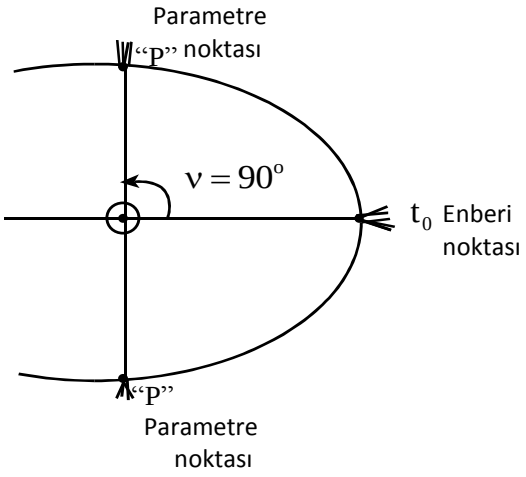
$$\frac{g_{yer}}{g_{ay}} = \frac{\dfrac{GM_{yer}}{R_{yer}^2}}{\dfrac{G.M_{ay}}{R_{ay}^2}} = \frac{R_{ay}^2}{R_{yer}^2}.\frac{M_{yer}}{M_{ay}} = \left(\frac{1738}{6375}\right)^2.\frac{6\times 10^{24}}{7{,}4\times 10^{22}} \cong 6\ kat$$

Ay'da zıplayabileceği yükseklik $h_{Ay} = 6\times 200\ cm = 1200\ cm = 12\ m$!!

---

5. Bir kuyruklu yıldızın (ky) kuyruğunun belirmeye başlaması için, yörüngesi üzerinde yaklaşık olarak "parametre ucu" denilen yerde olması gerekir. Böyle bir ky, Güneş çevresinde *60 yıl*lık bir dönem (periyot) ile yarıbüyük eksen uzunluğu *a= 6,25 AB*, dış merkezliği (basıklığı) *e= 0,3* olan bir elips yörüngede dolanmaktadır. Bu ky'ın ne kadar süre kuyruğunun görülebileceğini, ilgili bir şekil de çizerek, hesaplayınız.

C:



Parametre noktası (ucu), gökcisminin enberi noktasından geçtikten sonra gerçek anomali açısının (ν) tam 90^o'ye ulaştığı yerdir.

Ky'a ait veriler:

A= 6,25 AB

P= 60 yıl

e= 0,3

Çözümde eksantrik anomali E değerine ihtiyacımız vardır. Hesabı ν cinsinden şöyle yapılır:

$$\tan\frac{E}{2}=\sqrt{\frac{1-e}{1+e}}.\tan\frac{\nu}{2}$$

Parametre ucunda $\nu=90^o$ olacağından $\tan\frac{E}{2}=\sqrt{\frac{1-0,3}{1+0,3}}.\tan\frac{90}{2}$ 'den

$\frac{E}{2}\equiv 36^o,27\Rightarrow E=72^o,54=1,266\ rd$ bulunur.

Kepler Denklemi olan, $\frac{2\pi}{P}(t-t_0)=M=E-eSinE$ denklemini kullanarak parametre ucu ile enberi noktasından geçiş zamanı arasındaki süre olan $(t-t_0)$ farkı hesaplanabilir.

$$\frac{2\pi}{60\ yil}(t-t_0)=1,266\ rd-0,3.Sin(72^o,54)\Rightarrow(t-t_o)=9,36\ yıl$$

Bu süreyi 2 ile çarparsak, ky'ın kuyruğunun görüleceği süreyi bulmuş oluruz:

$$2(t-t_0)=18,715\ \ yıl.$$

---

6. 2 km yarıçapa sahip bir küçük gezegenin yoğunluğu $\rho=3\ g/cm^3$ olduğuna göre, (a) bu küçük gezegenin yüzeyinden kurtulma (kaçış, $v_{kaçış}$) hızı ne olur? (b) Yeryüzünde kütlesi birim olan cisme bu hız verilirse, cisim ne kadar yükselebilir?

C: a) $v_{kaçiş}=\sqrt{\frac{2GM}{R}}$, Burada; $M=\rho.\frac{4}{3}\pi R^3=(3000\ kg/m^3).\frac{4}{3}\pi(2\times10^3 m)^3$

$$M = 1\times10^{14} kg; \Rightarrow$$

$$v_{kaçış} = \sqrt{\frac{2\times G\times10^{14}}{2\times10^{3}}} = 2{,}6\ m/s$$

b) Bu hızı yeryüzünde bir cisme verirsek:

$h = \frac{v_0^2}{2g} = \frac{(2{,}6)^2}{2\times9{,}81} = 32\ cm$ cm yükselebilecektir!

YILDIZLARIN İÇ YAPISI ve EVRİMİ PROBLEMLERİ

1. Yıldızların ömrü esasen, çekirdeklerinde bulunan hidrojen atomlarını, termonükleer füzyon (birleşme) yoluyla yakıp bitirdikleri süre boyuncadır. Bu süreye nükleer zaman denilir ve diğer tüm yanma reaksiyonlarının toplam süresi bu süreden daha kısadır. Güneş için bu sürenin (nükleer zamanın, t_n) ne kadar süreceğini hesaplayınız.

C: Nükleer füzyon, reaksiyondaki kütle farkından (Δm) açığa çıkan enerjidir. Yani $E = \Delta m.c^2$ dir. Güneş için reaksiyona giren kütle, toplam kütlesinin %10'u mertebesindeki çekirdek kütlesidir. O halde $\Delta m = 0{,}10 \times M_\Theta$ kadardır. Bu reaksiyonun en iyi verimi ise $\%0{,}7$ yani 0,007'dir. Ayrıca bu çekirdek reaksiyonu sırasında nötrinolarca, çekirdekte üretilen enerjinin ~%5'i uzaya kaçırılır. Dolayısıyla Güneş için toplam füzyon enerjisi:

$E_\Theta = (M_\Theta \times 0{,}10 \times 0{,}007 \times 0{,}95) \times c^2 = 1{,}2 \times 10^{44}\ Joule$ olur.

Nükleer zaman (t_n), bu enerjinin Güneş'in toplam ışınım gücüne (L_Θ= *3,85E26 J/s*) bölünmesiyle elde edilir:

$t_n = \dfrac{E_\Theta}{L_\Theta} = \dfrac{1{,}2 \times 10^{44}\, J}{3{,}85 \times 10^{26}\, J/s} = 3{,}1 \times 10^{17}\, s = 9{,}8 \times 10^{9}\, yıl$, yani yaklaşık 10 milyar yıldır!

---

2. Yıldızlarda ışınım basıncı $P_{ISIN} = \left(\dfrac{1}{3}\right) aT^4$ eşitliği ile, ideal gaz durumunda gaz basıncı ise $P_{gaz} = nkT$ eşitliği ile verilir. Güneş türü yıldızlarda P_{ISIN} / p_{Gaz} oranı $\approx 10^{-4}$ mertebesinde olduğundan, ışınım basıncı hesaplamalarda dikkate alınmayabilir. Erken O-türü anakol yıldızlarının kütlesinin $60M_\Theta$ ve yarıçapının $20R_\Theta$ olduğunu kabul ederek ve merkezi sıcaklığını $T_c = 5 \times 10^7\, K$ alarak, bu tür yıldızlar için P_{ISIN} / P_{Gaz} oranını hesaplayın.

[Çözümde gereken sabitler:

a (ışınım sabiti)= $7{,}55 \times 10^{-16}\, J.m^{-3}K^{-4}$; $M_\Theta(Güneş\ kütlesi) = 2 \times 10^{30}\ kg$;

R_Θ *(Güneş yarıçapı)*= 696500000 *m;* $k(Boltzman\ sabiti) = 1{,}38 \times 10^{-23} m^2.kg.s^{-2}K^{-1}$]

C:

O-türü yıldızlar için $M = 60M_\Theta\ ve\ R = 20R_\Theta$ kullanarak:

$M = 1{,}2 \times 10^{32} kg\ ve\ R = 1{,}39 \times 10^{10} m$ bulunur. Ortalama yoğunluğa geçersek:

$$< \rho >= \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{1{,}2 \times 10^{32} kg}{\frac{4}{3}\pi (1{,}39 \times 10^{10} m)^3} = 10{,}60\ kg/m^3$$

Bu yoğunluğu kullanarak ve ortamın tamamen iyonize olmuş H atomlarından oluştuğunu kabul ederek, ortamdaki parçacık sayı yoğunluğu *n*:

$n = \dfrac{2 < \rho >}{m_H}$ (Burada m_H (H atomu kütlesi)=$1{,}67 \times 10^{-27}\ kg$)

$n = \dfrac{2 \times 10{,}60}{1{,}67 \times 10^{-27}} = 1{,}27 \times 10^{28} \#/m^3$ bulunur. P_{ISIN} / P_{Gaz} oranına geçersek:

$$\frac{P_{ISIN}}{P_{Gaz}} = \frac{\frac{1}{3} a T_c^{\,4}}{n.k.T_c} = \frac{\left(\frac{1}{3}\right) \times 7{,}55 \times 10^{-16} \times \left(5 \times 10^7\right)^3}{1{,}27 \times 10^{28} \times 1{,}38 \times 10^{-23}} = \cong 180\ kat$$ olarak bulunur.

O halde erken tür sıcak yıldızlarda basınç hesabında ışınım basıncını $\left(P_{ISIN}\right)$ **boşlamamak** gerekmektedir.

------ S O N ------