

ANKARA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

q-OSİLATÖRLERİ VE q-DEFORME FONONLAR

Emine AYDIN

FİZİK ANABİLİM DALI

ANKARA
2006

Her hakkı saklıdır

Prof. Dr. Bekir Sıtkı KANDEMİR danışmanlığında, Emine AYDIN tarafından hazırlanan bu çalışma 07/08/2006 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oybirliği ile Fizik Anabilim Dalı'nda yüksek lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Başkan: Prof. Dr. Haluk MUTLU
Ankara Üniversitesi Mühendislik Fakültesi
Fizik Mühendisliği Bölümü

Üye: Prof. Dr. Abdullah VERÇİN
Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Fizik Bölümü

Üye: Prof. Dr. B. Sıtkı KANDEMİR
Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Fizik Bölümü

Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü
Tezin Adı : q-Osilatörleri Ve q-Deforme Fononlar

Yukarıdaki sonucu onaylarım

Prof. Dr. Ülkü MEHMETOĞLU
Enstitü Müdürü

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

q-SALINICILARI ve q-DEFORME FONONLAR

Emine AYDIN

Ankara Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Fizik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Bekir Sıtkı KANDEMİR

Bu tezde öncelikle kuantum mekaniğinin temel sistemlerinden biri olan harmonik salıncı sistemi gözden geçirilerek, harmonik salıncıların q-deformasyonu ve bu bağlamda Fibonacci Salıncıları, q-deformasyonun istatistiksel özellikleri gibi konular ayrıntılı olarak incelendi. Deformasyonun sistem üzerinde meydana getirdiği değişiklikler araştırıldı.

2006, 53 sayfa

Anahtar Kelimeler: q-deformasyonu, q-salıncıları

ABSTRACT

Master Thesis

q-OSCILLATORS and q-DEFORMATION

Emine AYDIN

Ankara University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Physics

Supervisor: Prof. Dr. Bekir Sıtkı KANDEMİR

In this thesis, harmonic oscillator which is one of the main systems in quantum mechanics is reviewed; the q-deformation of harmonic oscillators and in this connection, the subjects like Fibonacci oscillators, statistical properties of q-deformed oscillators are examined in detail. The changes in the oscillators system which are caused by the deformation are studied.

2006, 53 pages

Key Words: q-deformation, q-oscillators

TEŞEKKÜR

Kuantum mekaniğinin temelleri hakkında beni böyle bir çalışmaya yönlendiren, en karmaşık kavramları dahi basit ve açık bir dille anlatımı ile kavratan sevgili hocam Sayın Prof. Dr. Bekir Sıtkı KANDEMİR'e teşekkür ederim.

Emine AYDIN

Ankara, Ağustos 2006

İÇİNDEKİLER

ÖZET.....	i
ABSTRACT.....	ii
TEŞEKKÜR.....	iii
SİMGELER DİZİNİ	v
ÇİZELGELER DİZİNİ	vi
1. GİRİŞ.....	1
2. SU(2) LİE CEBİRİ, JORDAN-SCHWINGER KURULUMU VE TEMSİLİ	4
2.1 Harmonik Osilatörlerin q-Analogları ve SU _q (2) Kuantum Grubu.....	7
2.1.1 SU _q (2)'nin q- osilatör temsili	11
2.1.2 q-deforme osilatörünün koordinat temsili	12
2.1.3 q-deforme osilatör için ortagonallik ve skaler çarpım.....	15
2.2 Fibonacci Osilatörleri.....	18
2-3 q-osilatörünün Dönüşüm Teorisi	24
2.3.1 .soğurulma ve yayılma bağıntıları.....	24
2.3.2 konfigürasyon uzayı.....	25
2.3.3 uyarılmış durumlar.....	31
2.3.4 $\bar{a}a$ bazı ve x bazı arasındaki dönüşüm.....	35
2.4 q-Osilatör Sisteminin İstatistiksel Özellikleri: Fononlar ve Fotonlar	39
2.4.1 Termo alan dinamiğinin q-analoğu.....	40
2.4.2 q-osilatör sisteminin istatistik mekaniksel özellikleri.....	44
2.4.2.1 İstatistiksel dağılımın q-analoğu.....	45
2.4.2.2 Siyah cisim ışıması.....	47
2.4.2.3 Öz ısı.....	48
3-SONUÇ.....	51
KAYNAKLAR.....	52
ÖZGEÇMİŞ.....	53

SİMGELER DİZİNİ

a	Harmonik Osilatörün yok edici operatörü
a^+	Harmonik Osilatörün yaratıcı operatörü
a_q	q-deforme Osilatörün yok edici operatörü
a_q^+	q-deforme Osilatörün yaratıcı operatörü
E_n^q	q-deforme Osilatörün n. uyarılmış durum enerji özdeğeri
$G_n(\varepsilon)$	Rogers-Szëgo polinomları
H	Hamiltonyen
$J_{\pm}, J_z$	Açısal momentumun azaltıcı, artırıcı operatörleri ve z bileşeni
J^2	Açısal momentumun karesi
m	Kütle
n	n. durum özdeğeri
N	Sayı operatörü
p	Lineer momentum
q	Deformasyon parametresi
$\Phi_0(x)$	Taban durumu dalga fonksiyonu
$\Phi_n(x)$	n. uyarılmış durum dalga fonksiyonu
ω	Salınımın frekansı
$ \psi_0\rangle$	Taban durum normalize öz vektörü
$ \psi_n\rangle$	n. durum normalize öz vektörü
$\bar{a}$	a_q^+
b	Fermiyonlar için yok edici operatör
b^+	Fermiyonlar için yaratıcı operatör
$g(\omega)$	Frekans spektrumu

ÇİZELGELER DİZİNİ

Çizelge 2.1	$\alpha=3, \beta=-1, [0]=0, [1]=1$ değerlerinin çözümleri.....	21
Çizelge 2.2	$\alpha=3, \beta=-1, [0]=1, [1]=1$ değerlerinin çözümleri.....	22
Çizelge 2.3	Fibonacci Serisi.....	23

1.GİRİŞ

Harmonik osilatör, diatomik moleküllerin titreşimleri, kristal içindeki atomların ve çekirdeklerdeki nükleonların salınımları, elektromanyetik alan, fononlar ve benzeri bir çok titreşen sisteme model teşkil ettiğinden dolayı fizikte temel bir öneme sahiptir. Bir çok fiziksel sistem için, potansiyel enerji $V(q)$, uzayda bir q_0 noktası civarında bir minimuma sahiptir. Potansiyel enerji konumun fonksiyonu olarak bu denge noktası civarında

$$V(q) = V(q_0) + \frac{1}{1!} \left(\frac{\partial V}{\partial q} \right) \bigg|_{q_0} (q - q_0) + \frac{1}{2!} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial q^2} \right) \bigg|_{q_0} (q - q_0)^2 + \dots \quad (1.1)$$

şeklinde kuvvet serisine açılabilir. Buradaki ikinci terim denge koşulundan dolayı sıfırdır. m kütleli bir parçacık denge konumu etrafında çok küçük salınımlar yapıyorsa, potansiyelin kuvvet serisindeki yüksek mertebeli terimler çok küçüktürler ve bu yüzden ihmal edilebilirler. Potansiyelin başlangıç noktasının seçiminin keyfi alınmasından dolayı ilk terim de alınmayabilir. Böylece Denklem (1.1) deki $V(q)$ da sadece

$$V(q) \sim (q - q_0)^2$$

terimi kalır ki, bu da kütlesi m olan ve q_0 denge konumundan q uzaklığına bağlı olarak $-Cq$ geri çağırıcı kuvvetin etkisi altındaki harmonik osilatörün potansiyelidir. Bu şekilde bir potansiyele maruz kalan bir boyutlu bir osilatörün Hamiltoniyeni,

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 q^2 \quad (1.2)$$

ile verilir. Burada, q osilatörün denge konumuna göre olan yer değiştirmeyi, p lineer momentumu, m parçacığın kütlesini ve ω salınımların frekansını belirtir. Harmonik osilatör için kuantizasyon, q ve p 'yi Hilbert uzayında

$$[q, p] = i \quad (1.3)$$

şeklinde Heisenberg sıra değiştirme bağıntısını sağlayan öz eşlenik operatörler olarak geręekleřtirilir ($\hbar = 1$ alınmıştır). Bunlar cinsinden, biri diğerinin hermitik eşleniği olan bozonik operatörler ise

$$a^+ = \left(\sqrt{\frac{m\omega}{2}} \right) q - i \left(\sqrt{\frac{1}{2m\omega}} \right) p \quad (\text{yaratıcı operatör}) \quad (1.4)$$

$$a = \left(\sqrt{\frac{m\omega}{2}} \right) q + i \left(\sqrt{\frac{1}{2m\omega}} \right) p \quad (\text{yok edici operatör}) \quad (1.5)$$

şeklinde tanımlanır. Tanımın sonucu olarak bu bozonik operatörler,

$$[a, a^+] = 1 \quad (1.6)$$

sıra değiştirme bağıntısını sağlarlar. Böylece, Denklem (1.2) ile verilen harmonik osilatör hamiltonyeni Denklem (1.4) ve (1.5)'deki bozonik operatörleri cinsinden

$$H = \frac{\omega}{2} (a^+ a + a a^+) = \omega \left(a^+ a + \frac{1}{2} \right) \quad (1.7)$$

şeklinde yazılabilir. $|\psi_0\rangle$, salınıcı operatörlerin etkidiği $\mathcal{H}$ Hilbert uzayının,

$$a|\psi_0\rangle = 0 \quad (1.8)$$

şartını sağlayan normalize bir öz vektörü olsun. Denklem (1.5) yardımı ile Denklem (1.8)

$$\left[\left(\sqrt{\frac{m\omega}{2}} \right) q + i \left(\sqrt{\frac{1}{2m\omega}} \right) \frac{d}{dq} \right] |\psi_0\rangle = 0$$

şeklinde yazılabilir. Bu şekilde, Denklem (1.8) artık 1. mertebeden lineer bir diferansiyel denkleme dönüşmüştür. Bunun çözümünün $x \equiv (\sqrt{m\omega})q$ olmak üzere konum bazında

$$\langle x | \psi_0 \rangle = \psi_0(x) = \pi^{-1/4} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$$

şeklinde olduğu rahatlıkla gösterilebilir. Bu çözüm, Hilbert uzayında tanımlı skaler çarpıma göre

$$\langle \psi_0 | \psi_0 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx |\langle x | \psi_0 \rangle|^2 = 1$$

şeklinde normalizedir. Normalize özvektörlerin tam kümesi $\{|\psi_n\rangle\}$, $\{|\psi_0\rangle\}$ 'dan

$$|\psi_n\rangle = (n!)^{-1/2} (a^+)^n |\psi_0\rangle \quad (1.9)$$

bağıntısı kullanılarak kurulabilirler. Bu vektörler, $N=a^+a$ ile verilen sayı operatörünün

$$N|\psi_n\rangle = n|\psi_n\rangle$$

şeklinde n özdeğerli normalize öz durumlarıdır. N sayı operatörünün spektrumu, negatif olmayan tam sayılardan meydana gelmiş olup, özdeğerlerin hiç biri dejenere değildir. Dolayısı ile $|\psi_n\rangle$ 'ler H'nin de $(n+1/2)\omega$ özdeğerli özvektörleridir.

2- SU(2) LİE CEBİRİ, JORDAN-SCHWINGER KURULUMU VE TEMSİLİ

K adet lineer bağımsız osilatör topluluğu için yaratıcı ve yok edici operatörler arasındaki sıra değiştirme bağıntıları giriş bölümünde betimlenen bir boyutlu tek osilatörüne benzer olarak

$$\begin{aligned} [a_i, a_j^+] &= \delta_{ij} \\ [a_i, a_j] &= [a_i^+, a_j^+] = 0 \quad i, j = 1, 2, \dots, K \end{aligned} \quad (2.1)$$

şeklinde yazılabilir. Benzer şekilde bu osilatörler topluluğunun hamiltonyeni ,

$$H = \omega \left(\sum_{i=1}^K a_i^+ a_i + \frac{K}{2} \right) \quad (2.2)$$

ve bunun öz durumları

$$(a_1^+)^{n_1} \cdot (a_2^+)^{n_2} \dots (a_K^+)^{n_K} |\psi_0\rangle \quad (2.3)$$

şeklinde kurulabilir. Burada, a_k^+ , k durumunda bir bozon yaratırken, a_k ise yok eder.

Dolayısı ile a_i ve a_i^+ için özdeğer denklemleri bir boyutlu eşdeğerleri dikkate alınarak

$$a_i |n_1, n_2, \dots, n_K\rangle = \sqrt{n_i} |n_1, \dots, n_{i-1}, n_i - 1, n_{i+1}, \dots, n_K\rangle$$

$$a_i^+ |n_1, n_2, \dots, n_K\rangle = \sqrt{n_i + 1} |n_1, \dots, n_{i-1}, n_i + 1, n_{i+1}, \dots, n_K\rangle$$

şeklinde yazılabilir. $SU(2)$ cebirinin operatörleri $J_{\pm}$ ve J_3 iki lineer bağımsız osilatörün artırıcı ve azaltıcı operatörleri cinsinden

$$\begin{aligned} J_+ &= a_1^+ a_2 & J_- &= a_2^+ a_1 \\ J_z &= \frac{1}{2}(a_1^+ a_1 - a_2^+ a_2) \equiv \frac{1}{2}(N_1 - N_2) \end{aligned} \quad (2.4)$$

şeklinde kurulabilir (Chaichian and Hagedron 1998). Bu kurulumu $SU(2)$ 'nin Jordan-Schwinger realizasyonu adı verilir. Açısal momentumun karesi, $\vec{J}^2$ 'de bu bozonik operatörler cinsinden

$$\vec{J}^2 = \frac{1}{2} \sum_{i,j} a_i^+ a_j a_j^+ a_i - \frac{1}{4} N^2 \quad (2.5)$$

şeklinde yazılabilir, burada N ise

$$N \equiv \sum_i a_i^+ a_i = N_1 + N_2$$

ile verilir. Bu durumda, $n=n_1+n_2$ olmak üzere $\vec{J}^2$, nin özdeğer denklemi

$$\vec{J}^2 \left| \psi_{n_1, n_2} \right\rangle = \frac{1}{2} n \left(\frac{1}{2} n + 1 \right) \left| \psi_{n_1, n_2} \right\rangle \quad (2.6)$$

olarak bulunur. Daha öncede bulmuş olduğumuz J_z için de

$$J_z \left| \psi_{n_1, n_2} \right\rangle = \frac{1}{2} (n_1 - n_2) \left| \psi_{n_1, n_2} \right\rangle \quad (2.7)$$

bağıntısı dikkate alınır ise açısal momentum kuantum sayısı j için (2.5) eşitliğinden

$$j = \frac{1}{2}n = 0, \frac{1}{2}, 1, \dots \quad (2.8)$$

değerlerini aldığı görülür. Böylece, Denklem (2.4)'la birlikte Denklem (2.8)'deki ifadeler kullanılır ise j ve m için

$$j = \frac{1}{2}(n_1 + n_2), \quad m = \frac{1}{2}(n_1 - n_2) \quad (2.9)$$

değerleri bulunur.

Açısal momentum özvektörleri artık

$$|jm\rangle = P_{jm}(a_1^+, a_2^+)|0\rangle \quad (2.10)$$

şeklinde vakum durumundan üretilirler, burada $P_{jm}(a_1^+, a_2^+)$

$$P_{jm}(a_1^+, a_2^+) = \frac{(a_1^+)^{j+m} (a_2^+)^{j-m}}{\sqrt{(j+m)!(j-m)!}}$$

şeklinde yazılabilir. (2.10) Denklemindeki operatörler bu vektörler üzerine

$$J_z |jm\rangle = m |jm\rangle$$

$$J_{\pm} |jm\rangle = \sqrt{(j \mp m)(j \pm m + 1)} |j, m \pm 1\rangle$$

olacak şekilde etkirler. Bu sonuçlar, Jordan-Schwinger kurulumunun, SU(2) Lie Cebirinin tüm sonuçlarını çok basit bir şekilde verdiğini gösterir.

2-1 Harmonik Osilatörlerin q-Analogları ve $SU_q(2)$ Kuantum Grubu

$U_q(su(2))$ şeklinde de gösterilebilen $SU_q(2)$ kuantum grubu, ilk olarak Sklyanin ve ondan bağımsız olarak Kulish ve Reshetikhin tarafından Yang-Baxter denklemlerinin incelenmesi esnasında öne sürülmüştür (Chaichian and Hagedron 1998).

Bu kesimde , teoremin cebirsel işlemlerini dikkate değer bir şekilde basitleştiren Jordan-Schwinger temsili (Chaichian and Hagedron 1998) q-analoğu kullanılarak, $SU_q(2)$ kuantum grubunun realizasyonu gerçekleştirilecektir (Biedenharn 1989). Bu realizasyonu bulabilmek için harmonik salıncının q-analoğu kurulacaktır (Biedenharn 1989, Macfarlane 1989).

$SU_q(2)$ kuantum grubu, Lie komütatör bağıntılarına uyan J_+ , J_- ve J_z operatörlerinden cebirsel olarak türetilir (Macfarlane 1989):

$$[J_z, J_{\pm}] = \pm J_{\pm} \quad (2.1.1)$$

$$[J_+, J_-] = [2J_z] = \frac{q^{J_z} - q^{-J_z}}{q^{1/2} - q^{-1/2}} \quad (2.1.2)$$

burada, q reel bir sayı olup, $J_{\pm} = J_x \pm iJ_y$ 'dir. Denklem (2.1.1) ve (2.1.2) ile verilen bu cebirin jeneratörleri $q \rightarrow 1$ limitinde $SU(2)$ 'nin Lie cebirine indirgenir. Denklem (2.1.1) ve (2.1.2)'de $q = e^{\tau}$ ($\tau \rightarrow 0$ iken $q \rightarrow 1$ olmak kaydı ile) olmak üzere

$$[x] = \frac{q^x - q^{-x}}{q - q^{-1}} = \frac{\sinh \tau x}{\sinh \tau}$$

kısaltması kullanılmıştır.

Bir boyutlu q-deforme harmonik osilatör

$$a|0\rangle = 0$$

$$|n\rangle = \frac{(a^+)^n}{([n]!)^{\frac{1}{2}}} |0\rangle$$

olacak şekilde $|n\rangle$ bazlı ($n=0,1,2,3,\dots$) bir Hilbert uzayında etkiyen a operatörü ve bunun eşleniği dikkate alınarak kurulur. Burada $[n]!=[n][n-1].....[1]$ ile verilmiştir. Bu durumda, a ve a^+ 'ın özdeğer denklemleri

$$a^+|n\rangle = [n+1]^{1/2} |n+1\rangle \quad (2.1.3)$$

$$a|n\rangle = [n]^{1/2} |n-1\rangle \quad (2.1.4)$$

ile verilirler, burada

$$aa^+ = [N+1] \quad (2.1.5)$$

$$a^+a = [N] \quad (2.1.6)$$

operatörleri ve N operatörü

$$N|n\rangle = n|n\rangle$$

olacak şekilde tanımlanmıştır. Ayrıca

$$[N, a^+] = a^+ \quad [N, a] = -a \quad (2.1.7)$$

sıra değiştirme bağıntılarının da olduğu ve bunların, a^+a ve aa^+ 'nın Denklem (2.1.5) ve Denklem (2.1.6)'daki değerleri kullanıldığında,

$$aa^+ - q^{-1}a^+a = q^N \quad (2.1.8)$$

bağıntılarını verdiği kolaylıkla görülebirlirler. Bu eşitlik bilinen harmonik osilatör için sıra değiştirme bağıntısının bir cins deformasyonudur. Bu noktada, q^N 'nin a^+a ve aa^+ ile sıra değiştirdiğini ve

$$q^m a^+ q^{-m} = q^r a^+ \quad (2.1.9)$$

$$q^m a q^{-m} = q^{-r} a \quad (2.1.10)$$

bağıntılarının da geçerli olduğunu söylemek gerekir (Macfarlane 1989). Denklem (2.1.10)'da $r=1$ alınarak

$$a^+a = qq^N a q^{-N} a^+$$

bağıntısına ulaşılabilir. Burada m, r ve N arasında $m = rN$ şeklindeki bağıntı geçerlidir. Bu ve $[q^N, N]=0 \rightarrow [q^{N/2}, N]=0$ sıra değiştirme bağıntısı ile $N=a^+a$ bağıntısı kullanılarak

$$a^+a = q^{N/2} a^+ a q^{-N/2}$$

ifadesi elde edilir. Son iki bağıntı (2.1.8) Denkleminde tekrar yerine yazılırsa,

$$q^2 a q^{-N} a^+ - q^{-N/2} a^+ a q^{-N/2} = q \quad (2.1.11)$$

ifadesi bulunmuş olur ki bu noktada, kolaylık için

$$b = (q - q^{-1})^{1/2} a q^{-N/2} \quad (2.1.12)$$

$$b^+ = (q - q^{-1})^{1/2} q^{-N/2} a^+ \quad (2.1.13)$$

şeklinde yeni yaratıcı ve yok edici operatörler tanımlamak uygundur. Bunlar arasındaki sıra değiştirme bağıntısının

$$q^2 b b^+ - b^+ b = q^2 - 1 \quad (2.1.14)$$

olduğunu göstermek kolaydır. Bu yeni operatörlerin özdeğer denklemleri, basit harmonik osilatörde olduğu gibi, $|n\rangle$ durumunda, $n=0,1,2,\dots$ olmak üzere $b|0\rangle = 0$ olacak şekilde

$$b^+ |n\rangle = \{n+1\}^{1/2} |n+1\rangle \quad (2.1.15)$$

$$b |n\rangle = \{n\}^{1/2} |n-1\rangle \quad (2.1.16)$$

yazılabilir. Bu noktadan itibaren kolaylık olsun diye

$$\{x\} = 1 - q^{-2x}$$

kısaltması kullanılacaktır. Bu durumların aslında, Denklem (2.1.14) ve (2.1.15)'in yardımı ile önceki gibi Denklem (2.1.3) ve (2.1.4)'ü Denklem (2.1.15) ve (2.1.16)'ya dönüştüren durumlar olduğunu görmek gerekir. Benzer şekilde b ve b^+ 'lar arasında

$$b b^+ = \{N+1\} = 1 - q^{-2(N+1)}$$

$$b^+ b = \{N\} = 1 - q^{-2N}$$

bağıntılarının olduğu ve bunların da $q = e^\tau$ alınarak

$$\begin{aligned}
b^+b &= 1 - e^{-2\tau N} \\
e^{-2\tau N} &= 1 - b^+b \\
-2\tau N &= \ln(1 - b^+b)
\end{aligned}$$

şeklinde yazılabileceklerini görmek gerekir

2.1.1 $SU_q(2)$ 'nin q -osilatör temsili

Bir q -deforme osilatörün kurulumunu gördükten sonra, şimdi artık $SU(2)_q$ 'nin deforme osilatörler cinsinden nasıl kurulacağı problemi incelenebilir. İki adet birbirinden bağımsız a_i ve a_i^+ operatör grubu ve bunların $|n_i\rangle$ ketlerini gözönüne alarak

$$J_+ = a_1^+ a_2 \quad J_- = a_2^+ a_1 \quad (2.1.17)$$

tanımlanabilir. Bu operatörler arasındaki sıra değişirme bağıntısı ise

$$[J_+, J_-] = [2J_z]$$

şeklindedir. Burada, $[2J_z] = [N_1] - [N_2]$ olduğundan,

$$2J_z = N_1 - N_2 \quad (2.1.18)$$

verir. (2.1.17) Denklemi $SU(2)$ 'nin Schwinger temsilidir. Şimdi artık (2.1.17) ve (2.1.18) Denklemleri ve önceki kesimde elde edilen sonuçları kullanarak, (2.1.1) Denkleminin sağlandığı görülebilir. $SU(2)$ 'nin Jordan-Schwinger temsilinde

$$n_1 = j + m \quad n_2 = j - m$$

oldüğundan, $SU_q(2)$ nin $|jm\rangle$ bazının realizasyonları

$$n_1 = j + m \quad \rightarrow \quad |j + m\rangle = \frac{(a_1^+)^{j+m}}{\sqrt{(j+m)!}} |0\rangle$$

$$n_2 = j - m \quad \rightarrow \quad |j - m\rangle = \frac{(a_2^+)^{j-m}}{\sqrt{(j-m)!}} |0\rangle$$

ifadeleri kullanarak

$$|jm\rangle = |n_1\rangle |n_2\rangle = \frac{(a_1^+)^{j+m} (a_2^+)^{j-m}}{\sqrt{(j+m)!(j-m)!}} |0\rangle$$

şeklinde tanımlanır. Burada $|0\rangle$ keti ise aslında $|00\rangle$ şeklindedir. Son bağıntıya J_+ ve J_- operatörleri uygulanması ile bunlar için özdeğer denklemlerini

$$J_+ |jm\rangle = J_+ |n_1 n_2\rangle = a_1^+ a_2 |n_1 n_2\rangle = \sqrt{(n_1+1)} \sqrt{n_2} |j, m+1\rangle$$

$$J_- |jm\rangle = J_- |n_1 n_2\rangle = a_2^+ a_1 |n_1 n_2\rangle = \sqrt{n_1} \sqrt{(n_2+1)} |j, m-1\rangle$$

olacak şekilde

$$J_{\pm} |jm\rangle = \sqrt{(j \pm m + 1)(j \mp m)} |jm \pm 1\rangle$$

yazmak mümkündür.

2.1.2 q-deforme osilatörün koordinat temsili

q-deforme harmonik osilatörün koordinat temsilini gerçekleştirebilmek için

$$b = e^{2x} - e^x e^{s\partial} \quad (2.1.19)$$

$$b^+ = e^{-2x} - e^{s\partial} e^{-x} \quad (2.1.20)$$

operatörleri tanımlanır. Burada, $\partial \equiv \partial_x = \partial / \partial x$ olup

$$e^{u\partial} e^{vx} = e^{vx} e^{u\partial} e^{uv} \quad (2.1.21)$$

bağıntısı kullanılır ise, (2.1.19) ve (2.1.20) Denklemlerinin (2.1.14) Denklemini sağladığı görülebilir. $u=s$ ve $v=-1$ alınacak olursa Denklem (2.1.21)'de

$$e^{s\partial} e^{-x} = e^{-x} e^{s\partial} e^{-s}$$

ifadesi elde edilir ve buradan yaratıcı operatör

$$b^+ = e^{-2x} - e^{-x} e^{s\partial} e^{-s}$$

şeklinde bulunur. b^+b ve q^2bb^+ bağıntıları hesaplanıp $e^s=q$ olduğu dikkate alındığında, (2.1.14) Denklemi elde edilebilir. Bir evvelki kesimdeki benzer işlemler ile, Denklem (2.1.19)'dan, $(b\Phi_0)(x) = 0$ olacak şekilde

$$\Phi_0(x) = e^{\frac{x^2}{2s} - \frac{x}{2}}$$

taban durum dalga fonksiyonu bulunur. Gerçekten de, bu

$$\begin{aligned} (e^{2x} - e^x e^{s\partial}) \Phi_0(x) &= e^{2x} \Phi_0(x) - e^x \Phi_0(x+s) \\ &= e^{2x} e^{\frac{x^2}{2s} - \frac{x}{2}} - e^x e^{\frac{(x+s)^2}{2s} - \frac{(x+s)}{2}} \\ &= e^{2x + \frac{x^2}{2s} - \frac{x}{2}} - e^{2x + \frac{x^2}{2s} - \frac{x}{2}} \\ &= 0 \end{aligned}$$

olduğundan taban durumudur. Artık yaratıcı operatör aracılığı ile uyarılmış durumlar

$$\Phi_n(x) = (b^+)^n \Phi_0(x)$$

şeklinde yazılabilir. Yani,

$$b^+ |0\rangle = |1\rangle$$

ve

$$b^+ = e^{-2x} - e^{-x} e^{s\partial} e^{-s}$$

oldukları kullanılacak olursa 1. uyarılmış durum için

$$\begin{aligned}\langle x|0\rangle &= \Phi_0(x) \\ \langle x|1\rangle &= \Phi_1(x) \\ \langle x|b^+|0\rangle &= \langle x|1\rangle \\ \Phi_1(x) &= (e^{-2x} - e^{-s}) \Phi_0(x)\end{aligned}$$

buradan 2. uyarılmış durum için

$$\begin{aligned}\langle x|b^+|1\rangle &= \langle x|2\rangle \\ \Phi_2(x) &= (e^{-2x} - e^{-s}) \Phi_1(x) = (e^{-2x} - e^{-s})^2 \Phi_0(x)\end{aligned}$$

ve n. uyarılmış durum için

$$\Phi_n(x) = (e^{-2x} - e^{-s})^n \Phi_0(x)$$

olduğu rahatlıkla gösterilebilir.

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$$

Binom açılımını en son ifadede kullanılırsa, Φ_n

$$\Phi_n(x) = \Phi_0(x) \sum_{k=0}^n \begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix} e^{-2kx} (-e^{-s})^{n-k} \quad (2.1.22)$$

şeklinde yazılabilir. $\begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix}$ normal Binom katsayıları olup, Denklem (2.1.22)'dekiler ise

$$\begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix} = \frac{\{n\}}{\{k\}\{n-k\}}$$

olacak şekilde tanımlanmış ve aralarında ise

$$\begin{Bmatrix} n \\ k-1 \end{Bmatrix} + e^{-2sk} \begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} n+1 \\ k \end{Bmatrix}$$

bağıntısı geçerli olan Binom katsayılarıdır. q-deforme harmonik osilatörün koordinat temsili, Denklem (2.1.22)'deki $\Phi_n(x)$ 'lerden

$$\psi_n(x) = (\{n\}!)^{-1/2} \Phi_n(x) \quad (2.1.23)$$

fonksiyonunu tanımlanarak elde edilebilir. Bu durumda, yaratıcı ve yok edici operatörler ψ_n 'ye uygulanırsa,

$$\begin{aligned} b^+ \Psi_n(x) &= \{n+1\}^{1/2} \psi_{n+1}(x) \\ b \Psi_n(x) &= \{n\}^{1/2} \psi_{n-1}(x) \end{aligned}$$

bağıntıları geçerli olur.

2.1.3 q-deforme osilatör için ortonormallik ve skaler çarpım

Gerçekte ψ_n fonksiyonları, birim çemberde tanımlı olan Rogers-Szëgo Polinomları ile ilişkilidirler (Andrews 1976, Szëgo 1982). Rogers-Szëgo Polinomları,

$$G_n(\varepsilon) = \sum_{k=0}^n \begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix} \varepsilon^k$$

şeklinde tanımlanır. Bu durumda Denklem (2.1.23)'deki normalize polinomlar

$$\psi_n(z) = (\{n\}!)^{-1/2} (-q^{-1})^n G_n(-zq) \quad (2.1.24)$$

olup, $z = e^{i\theta}$ 'dır.

$$(f, g) = \int_0^{2\pi} d\theta / (2\pi) \mu(\theta) f(z)^* g(z)$$

Skaler çarpımı kullanılacak olursa ψ_n 'ler $(\psi_n, \psi_m) = \delta_{nm}$ diklik şartını sağlarlar.

Buradaki $\mu(\theta)$, θ 'nın fonksiyonudur ve

$$\mu(\theta) = \sum_{N \rightarrow -\infty}^{\infty} q^{-n^2} z^n$$

şeklinde tanımlanmıştır. Denklem (2.1.24), (2.1.23) ve (2.1.22) ile karşılaştırıldığında

$$x = -\frac{1}{2} i\theta \quad (2.1.25)$$

olduğu görülür ve böylece

$$\Psi_n \left(x = -\frac{1}{2} i\theta \right) = \Phi_0 \left(x = -\frac{1}{2} i\theta \right) \psi_n(z = e^{i\theta})$$

ifadesi elde edilir. Böylece, daha evvel tanımlanmış olan skaler çarpım

$$\langle n|m \rangle = \int_0^{2\pi} d\theta / (2\pi) \sigma(\theta) \Psi_n(\theta)^* \Psi_m(\theta) \quad (2.1.26)$$

şekline dönüşür. Denklem (2.1.26)'da $\sigma(\theta)$

$$\sigma(\theta) = \mu(\theta) \exp\left(\frac{\theta^2}{4s}\right) \quad (2.1.27)$$

ile verilir. Denklem (2.1.25) kullanılarak b ve b^+ yeniden yazılırsa

$$b = \exp(-i\theta) - \exp\left(-\frac{1}{2}i\theta\right) \exp\left(2is \frac{\partial}{\partial \theta}\right) \quad (2.1.28)$$

$$b^+ = \exp(i\theta) - \exp\left(2is \frac{\partial}{\partial \theta}\right) \exp\left(\frac{1}{2}i\theta\right) \quad (2.1.29)$$

şeklini aldıkları kolayca görülür.

2.2 Fibonacci Osilatörleri

Bu bölümde, bozonik osilatörlerin Schwinger teorisi Fibonacci osilatörlerine genellenerek q-parametresinin fiziksel yorumu üzerinde durulacaktır (Chatterjee 1994,1996).

Bir boyutlu basit harmonik osilatör için olan Hamiltonyen ifadesine benzer olarak q-deforme harmonik osilatör için Hamiltoniyen

$$H = \frac{\omega}{2} (a_q a_q^+ + a_q^+ a_q) \quad (2.2.1)$$

şeklinde yazılabilir. q-deforme harmonik osilatör ile deforme olmamış harmonik osilatörün yaratıcı ve yok edici operatörleri arasında

$$\begin{aligned} a_q &= \sqrt{\frac{[n]}{n}} a \\ a_q^+ &= a^+ \sqrt{\frac{[n]}{n}} \end{aligned} \quad (2.2.2)$$

bağıntıları vardır. q-deforme osilatörün

$$H |n\rangle = E_n^q |n\rangle \quad (2.2.3)$$

özdeğer denklemi deforme olmamış harmonik osilatöre benzer şekilde çözülürse, deforme olmuş harmonik osilatör için enerji özdeğerleri

$$E_n^q = \frac{\omega}{2} \{[n+1] + [n]\} \quad (2.2.4)$$

olarak bulunur. Eğer deformasyon parametresi $q = e^r$ alınırsa enerji özdeğeri,

$$E_n^q = \frac{\omega}{2} \frac{\sinh\left(n\tau + \frac{\tau}{2}\right)}{\sinh\left(\frac{\tau}{2}\right)} \quad (2.4.5)$$

şeklinde bulunur. Bu ifadede $q=1$, yani $\tau = 0$ alınır, enerji özdeğeri deforme olmamış harmonik osilatör için bulunan ifadeyle aynı değerleri alır. (2.1.10) Denkleminin

$$[n+1] - q[n] = q^{-n} \quad (2.2.6)$$

şeklinde yeniden yazılabileceği görüldüğünde,

$$[n+2] = (q + q^{-1})[n+1] - [n] \quad (2.2.7)$$

şeklinde bir indirgeme bağıntısı elde edilebilir. Bu bağıntı, daha genel bir biçimde

$$[n+2] = \alpha[n+1] + \beta[n] \quad (2.2.8)$$

şeklinde de yazılabilir. Denklem (2.2.6), (2.2.7) ve (2.2.8)'den $q \rightarrow 1$ limitinde $[0]=0$, $[1]=1$ ve $q \rightarrow \infty$ limitinde $[0]=1$, $[1]=1$ değerlerini aldığı rahatlıkla görülür. Denklem (2.2.8)'de, $\alpha=q+q^{-1}$ ve $\beta = -1$ alınacak olursa,

$$[n] = \frac{q^n - q^{-n}}{q - q^{-1}}$$

ifadesinin 2'den büyük olması gerektiğine dikkat etmek gerekir.

$\alpha = q + q^{-1} = 3$ ve de $q = 1 + \varphi$ seçilir ise

$$3 = \frac{q^2 + 1}{q}$$

$$3 = \frac{\varphi^2 + 2\varphi + 2}{1 + \varphi}$$

bulunur ki bu da

$$\varphi^2 - \varphi - 1 = 0$$

denkleme indirgenir. Bu denklemin çözümleri ise

$$\varphi_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

şeklinde olup, + işaretli olan

$$\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

(2.2.9)

matematikte “Altın Oran” olarak bilinir. Farklı α ve β seçimleri için $[n]$ ifadeleri çizelge 2.1 ve 2.2’de verilmişlerdir.

Çizelge 2.1 $\alpha=3$, $\beta=-1$, $[0]=0$, $[1]=1$ değerleri kullanılarak (2.2.8) Denklemnin çözümleri

1. DURUM: $\alpha=3$, $\beta=-1$, $[0]=0$, $[1]=1$			
n	$[n+2]=\alpha[n+1] + \beta[n]$	$[n]$	
0	$[0+2]=3[0+1] -1 [0]$ $=3 \times 1$	$[2]$	3
1	$[1+2]=3[1+1] -1 [1]$ $=3 \times 3 -1 \times 1$	$[3]$	8
2	$[2+2]=3[2+1] -1 [2]$ $=3 \times 8 -1 \times 3$	$[4]$	21
3	$[3+2]=3[3+1] -1 [3]$ $=3 \times 21 -8$	$[5]$	55
4	$[4+2]=3[4+1] -1 [4]$ $=3 \times 55 -21$	$[6]$	144
5	$[5+2]=3[5+1] -1 [5]$ $=3 \times 144 -55$	$[7]$	377
6	$[6+2]=3[6+1] -1 [6]$ $=3 \times 377 -144$	$[8]$	987
7	$[7+2]=3[7+1] -1 [7]$ $=3 \times 987 -377$	$[9]$	2584
8	$[8+2]=3[8+1] -1 [8]$ $=3 \times 2584 -987$	$[10]$	6765
9	$[9+2]=3[9+1] -1 [9]$ $=3 \times 6765 -2584$	$[11]$	13530

Çizelge 2.2 $\alpha=3$, $\beta=-1$, $[0]=1$, $[1]=1$ değerleri kullanılarak (2.2.8) Denkleminin çözümleri

2. DURUM: $\alpha=3$, $\beta=-1$, $[0]=1$, $[1]=1$			
n	$[n+2]=\alpha[n+1] - \beta[n]$	$[n]$	
0	$[0+2]=3[0+1] - 1[0]=3-1$	$[2]$	2
1	$[1+2]=3[1+1] - 1[1]=3 \times 2-1$	$[3]$	5
2	$[2+2]=3[2+1] - 1[2]$ $=3 \times 5-2$	$[4]$	13
3	$[3+2]=3[3+1] - 1[3]$ $=3 \times 13-5$	$[5]$	34
4	$[4+2]=3[4+1] - 1[4]$ $=3 \times 34-13$	$[6]$	89
5	$[5+2]=3[5+1] - 1[5]$ $=3 \times 89-34$	$[7]$	233
6	$[6+2]=3[6+1] - 1[6]$ $=3 \times 233-89$	$[8]$	610
7	$[7+2]=3[7+1] - 1[7]$ $=3 \times 610-233$	$[9]$	1597
8	$[8+2]=3[8+1] - 1[8]$ $=3 \times 1597-610$	$[10]$	4181
9	$[9+2]=3[9+1] - 1[9]$ $=3 \times 4181-1597$	$[11]$	10946

Çizelge 2.3 Çizelge 2.1 ve Çizelge 2.2'nin birleştirimi sonucu oluşan Fibonacci Serisinin tablosu

FIBINACCI SERİSİ	
$[n]$	
$[0]$	0
$[0]$	1
$[1]$	1
$[2]$	2
$[2]$	3
$[3]$	5
$[3]$	8
$[4]$	13
$[4]$	21
$[5]$	34
$[5]$	55
$[6]$	89
$[6]$	144
$[7]$	233
$[7]$	377
$[8]$	610
$[8]$	987
$[9]$	1597
$[9]$	2584
$[10]$	4181
$[10]$	6765

2.3 q-osilatörünün Dönüşüm Teorisi

Bu bölümde, yayılım-soğurulma temsilinin bilinen formülasyonu ile başlayarak, kofigürasyon ve momentum uzaylarında durum fonksiyonları elde edilecektir.

2.3.1 Soğurulma ve yayılma bağıntıları

İlk olarak q-deforme sıra değişim bağıntısı

$$(a, \bar{a})_q \equiv a\bar{a} - q\bar{a}a = 1 \quad (2.3.1)$$

şeklinde yeniden yazılırsa, bu operatörlerin zaman bağımlılığı

$$H = \frac{\hbar\omega}{2}(\bar{a}a + a\bar{a}) \quad (2.3.2)$$

Hamiltoniyeni ile

$$i\hbar \dot{a} = (a, H)_q \quad (2.3.3)$$

denkleminde belirlenir. Denklem (2.3.1) ve (2.3.2), Denklem (2.3.3)'de kullanılacak olursa

$$i\hbar \dot{a} = \hbar\omega a \quad (2.3.4)$$

bulunur ki, bu da kabaca bunların

$$a \sim a^{-i\omega t} \quad (2.3.5)$$

şeklinde zaman bağımlılığına sahip olduklarını söyler. $|n\rangle$, H Hamiltonyeninin öz durumları ise

$$\begin{aligned} a|n\rangle &= \langle n \rangle^{1/2} |n-1\rangle \\ \bar{a}|n\rangle &= \langle n+1 \rangle^{1/2} |n+1\rangle \end{aligned} \quad (2.3.6)$$

bağıntıları geçerlidir ve burada $\langle n \rangle$, daha önce olduğu gibi

$$\langle n \rangle = \frac{q^n - 1}{q - 1} \quad (2.3.7)$$

şeklinde tanımlanmıştır. Böylelikle, tüm bunlara ek olarak

$$\begin{aligned} \bar{a}a|n\rangle &= \langle n \rangle |n\rangle \\ a\bar{a}|n\rangle &= \langle n+1 \rangle |n\rangle \end{aligned} \quad (2.3.8)$$

ve

$$(a\bar{a} - q\bar{a}a)|n\rangle = (\langle n+1 \rangle - q\langle n \rangle)|n\rangle = |n\rangle \quad (2.3.9)$$

bağıntılarını da yazmak mümkündür. Son olarak da, Denklem (2.3.2) ile verilen Hamiltonyen için özdeğer denklemi

$$H|n\rangle = \left(\frac{\hbar\omega}{2}\right)(\langle n+1 \rangle + \langle n \rangle)|n\rangle \quad (2.3.10)$$

şeklinde yazılabilir.

2.3.2 konfigürasyon uzayı

Denklem (2.3.1)'de gösterilen basit sıra değişim bağıntısı aşağıda gösterilen formda da yazılabilir:

$$A' \in A = q^{1/2} \quad (2.3.11)$$

Burada tanımlanan A' ve A şoyledir:

$$A = \begin{pmatrix} a \\ \bar{a} \end{pmatrix}, \quad A' = \begin{pmatrix} a & \bar{a} \end{pmatrix}, \quad \epsilon = \begin{pmatrix} 0 & q^{-1/2} \\ -q^{1/2} & 0 \end{pmatrix} \quad (2.3.12)$$

Denklem (2.1.1), $SU_q(2)$ 'ye ait kanonik d6nüşümü kullanarak (x,p) temsiline d6nüşürülebilir. Bu d6nüşüm,

$$A = TX \quad (2.3.13)$$

şeklinde olup, burada

$$X = \begin{pmatrix} D \\ x \end{pmatrix} \quad (2.3.14)$$

ve

$$T = \begin{pmatrix} \alpha & \chi \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in SU_q(2) \quad (2.3.15)$$

ile verilirler. Bu durumda,

$$X' \in X = q^{-1/2} \quad (2.3.16a)$$

ya da

$$(D, x)_q = 1 \quad (2.3.16b)$$

yazılabilir. T ise,

$$T' \in T = T \in T' = \epsilon \quad (2.3.17)$$

bağıntısını sağlar. Denklem (2.3.17)'den elde edilen eşitlikler aşağıda verilmiştir.

$$\begin{aligned} \alpha\beta &= q\beta\alpha, & \alpha\tilde{\alpha} + \beta\tilde{\beta} &= 1, & \alpha\tilde{\beta} &= q\tilde{\beta}\alpha \\ \alpha\tilde{\alpha} + q_1^2\tilde{\beta}\beta &= 1, & \beta\tilde{\alpha} &= q\tilde{\alpha}\beta, & \beta\tilde{\beta} &= \tilde{\beta}\beta, & \tilde{\beta}\tilde{\alpha} &= q\tilde{\alpha}\tilde{\beta} \end{aligned} \quad (2.3.18)$$

Bu eşitlikler bulunurken $\gamma = q_1\tilde{\beta}$ ve $\delta = \tilde{\alpha}$ olarak alınmıştır. Burada, $q_1 = q^{-1}$ 'dir. Denklem (2.3.16)

$$D = \frac{1}{x} \langle \theta \rangle, \quad (2.3.19a)$$

$$\theta = x \frac{d}{dx}, \quad (2.3.19b)$$

olmak üzere

$$D\psi(x) = \frac{\psi(qx) - \psi(x)}{qx - x} \quad (2.3.19c)$$

fark operatörünü sağlar. $q \rightarrow 1$ limitinde, D d/dx olur. Şimdi de eşlenik momentum

$$p = \left(\frac{\hbar}{i} \right) D \quad (2.3.20)$$

olarak tanımlanırsa, Heisenberg q-sıra değişim bağıntısı:

$$px - qxp = -i\hbar \quad (2.3.21)$$

şekline dönüşür ve T

$$a = \alpha D + \beta x, \quad \bar{a} = -q_1 \tilde{\beta} D + \tilde{\alpha} x \quad (2.3.22)$$

kanonik dönüşümü tanımlar. Ters dönüşüm ise

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} \tilde{\alpha} & -q_1 \beta \\ \tilde{\beta} & \alpha \end{pmatrix} \quad (2.3.23a)$$

ya da

$$D = \tilde{\alpha} a - q_1 \beta \tilde{\alpha}, \quad x = \tilde{\beta} a + \alpha \tilde{\alpha} \quad (2.3.23b)$$

biçiminde olur. Yeni değişkenlerle Hamiltonyen yeniden yazılır ise,

$$H = \frac{1}{2} \left[(q+1) (\tilde{\alpha} \beta x^2 - q_1 \tilde{\beta} \alpha d^2) + (\alpha \tilde{\alpha} - q_1 \beta \tilde{\beta}) Dx - (\alpha \tilde{\alpha} - q_1 \beta \tilde{\beta}) x D \right] \quad (2.3.24)$$

şeklini alır. $q \rightarrow 1$ limitinde T operatörü $T = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ biçimine dönüştüğünden, a

ve $\bar{a}$

$$a = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{d}{dx} + x \right) \quad (2.3.25)$$

$$\bar{a} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(-\frac{d}{dx} + x \right)$$

olarak bulunur. Sonuçta, H

$$H = \frac{1}{2} \left(-\frac{d^2}{dx^2} + x^2 \right) \quad (2.3.26)$$

biçimindedir. Taban durumu dalga fonksiyonu

$$a|0\rangle = 0 \quad \text{veya} \quad (\beta x + \alpha D)\psi_0(x) = 0 \quad (2.3.27)$$

bağıntılarından bulunur. D'yi fark operatörü olarak ifade ettikten sonra, Denklem (2.3.27)'den

$$\psi_0(x) = (1 + K)^{-1} \psi_0(qx) \quad (2.3.28)$$

bulunur. Burada K

$$K = (1 - q)\alpha^{-1}\beta x^2 \quad (2.3.29)$$

ile verilir. İterasyon yaparak, taban durumu için

$$\psi_0(x) = \prod_0^\infty (1 + Kq^{2s})^{-1} \psi_0(q^{n+1}x) \quad (2.3.30)$$

veya

$$\psi_0(x) = \prod_0^\infty (1 + Kq^{2s})^{-1} \psi_0(0) \quad (2.3.31)$$

ifadelerini bulmak mümkündür. $|q| < 1$ olduğunda Denklem (2.3.31)'deki çarpım yakınsaktır. $1 > r > 0$ aralığında $q \cong 1$ için Denklem (2.3.31)'deki sonsuz çarpım yaklaşık olarak

$$\psi_0(x) \cong \psi_0(0) \exp \left[-\frac{\alpha^{-1}\beta x^2}{1+q} r \right] \quad (2.3.32)$$

şeklinde yazılabilir. $q=1$ ve $r=1$ olursa, Denklem (2.3.32) ifadesi bilinen Gaussian taban durumuna indirgenir. Denklem (2.3.31)'deki sonsuz çarpım kaydırılmış faktöriyel cinsinden aşağıdaki biçimde tanımlanabilir:

$$(a|q)_n = \prod_{s=0}^{n-1} (1 - aq^s) \quad (2.3.33a)$$

$$(a|q)_\infty = \prod_{s=0}^{\infty} (1 - aq^s) \quad (2.3.33b)$$

Bu durumda, denklem (2.3.31)

$$\psi_0(x) = (-K|q^2)_\infty^{-1} \quad (2.3.34)$$

şeklinde yazılabilir. $\psi_0(x)$ 'in q^2 'nin kuvvetleri cinsinden seri açılımı Euler bölüşüm fonksiyonunu ortaya çıkarır;

$$e_q(z) = (z|q)_\infty^{-1} \quad |z| < 1 \quad (2.3.35)$$

Bu durumda,

$$\psi_0(x) = e_{q^2}(-K) = \sum \frac{(-K)^n}{(q^2|q^2)_n} \quad (2.3.36)$$

ve

$$e_{q^2}(-(1-q^2)K_0) = \sum \frac{(-K_0)^n}{\langle n \rangle_{q^2}!} \quad (2.3.37)$$

öyle ki

$$\psi_0(x) = \sum \frac{(-K_0)^n}{\langle n \rangle_{q^2}!} \quad (2.3.38)$$

şeklinde yazılabilir, burada, K_0 ,

$$K_0 = \frac{\alpha^1 \beta x^2}{1+q} \quad (2.3.39)$$

olarak kullanılmıştır. $e_{q^2} \left(-(1-q^2) K_0 \right)$, $q \rightarrow 1^-$ limitinde e^{-K_0} olacak şekilde tekrar Gaussian gösterimi verir.

2.3.3 Uyarılmış durumlar

İlk uyarılmış durum, Denklem (2.3.22)'den

$$\psi_1(x) = \langle x|1 \rangle = (\tilde{\alpha}x - q_1 \tilde{\beta}D) \psi_0(x) \quad (2.3.40)$$

şeklinde bulunur. Denklem (2.3.27)'den

$$D\psi_0(x) = -\alpha^{-1} \beta x \psi_0(x) \quad (2.3.41)$$

olduğu gösterilebileceğinden, Denklem (2.3.40) için

$$\psi_1(x) = \alpha^{-1} x \psi_0 \quad (2.3.42)$$

ifadesi elde edilebilir. İkinci uyarılmış durum ise,

$$\langle 2 \rangle^{1/2} |2\rangle = \bar{a} |1\rangle \quad (2.3.43)$$

ile verilir, ya da ilk uyarılmış durumdakine benzer şekilde,

$$\begin{aligned} \langle 2 \rangle^{1/2} \psi_2(x) &= (\tilde{\alpha}x - q_1 \tilde{\beta}D) \psi_1(x) \\ &= \tilde{\alpha} \alpha^{-1} x^2 \psi_0 - q_1 \tilde{\beta} \alpha^{-1} D(x \psi_0) \end{aligned} \quad (2.3.44)$$

olarak elde edilebilir. D için, Leibniz Kuralı

$$D(A(x)B(x)) = (DA(x))B(x) + A(x)DB(x) \quad (2.3.45)$$

şeklinde olduğundan , Denklem (2.3.27) ve (2.3.28)'den,

$$\begin{aligned} D(x\psi_0) &= \psi_0(qx) + xD\psi_0(x) \\ &= (1 - q\alpha^{-1}\beta x^2)\psi_0(x) \end{aligned} \quad (2.3.46)$$

ifadesi elde edilir. Bu durumda Denklem (2.3.44)'den,

$$\langle 2 \rangle^{1/2} \psi_2(x) = [\tilde{\alpha}\alpha^{-1}x^2 - q_1\tilde{\beta}\alpha^{-1}(1 - q\alpha^{-1}\beta x^2)]\psi_0(x) \quad (2.3.47)$$

ifadesi veya

$$\psi_2(x) = \langle 2 \rangle^{-1/2} [-q_1\tilde{\beta}\alpha^{-1} + \alpha^{-2}x^2]\psi_0(x) \quad (2.3.48)$$

ifadesi kolaylıkla bulunmaktadır.

Hem $\psi_1(x)$ ve hem de $\psi_2(x)$, $P^{(n)}(x)\psi_0(x)$ formundadır ve burada $\psi_0(x)$, $q \rightarrow 1$ limitinde Gaussian olup, $P^{(n)}(x)$ de Hermite polinomuna indirgenir. $P^{(n)}(x)$ için indirgeme bağıntıları

$$\begin{aligned} \langle n \rangle^{1/2} \psi_n &= \bar{a}\psi_{n-1} \\ \langle n \rangle^{1/2} (P^{(n)}\psi_0) &= \bar{a}(P^{(n-1)}\psi_0) = (\tilde{\alpha}x + \gamma D)(P^{(n-1)}\psi_0) \end{aligned} \quad (2.3.49)$$

denklemleri aracılığı ile elde edilebilir. Leibniz kuralı ve (2.3.27) ve (2.3.28) Denklemleri yardımı ile

$$D(P^{(n)}\psi_0) = DP^{(n)}\psi_0(qx) + P^{(n)}D\psi_0 = \left[(DP^{(n)})(1+K) - P^{(n)}\alpha^{-1}\beta x \right] \psi_0(x) \quad (2.3.50)$$

ifadesi, (2.3.49) ve (2.3.50) Denklemleri aracılığı ile de

$$\langle n \rangle^{1/2} P^{(n)} = \tilde{\alpha} x P^{(n-1)} + \gamma (DP^{(n)})(1+K) - \gamma P^{(n)} \alpha^{-1} \beta x \quad (2.3.51)$$

ifadesi kolaylıkla elde edilir. $P^{(0)} = 1$ olduğundan, Denklem (2.3.50)'den $P^{(n)}$ 'nin her bir n için n . dereceden polinom olması gerektiği açıktır. Ayrıca, $P^{(n-1)}$ belli bir pariteye sahiptir (tek ya da çift). $P^{(0)}$ çift olduğundan, $P^{(n)}$ 'nin, n tek (çift) olduğunda, tek (çift) olduğu görülür. Böylece, $P^{(n)}$

$$P^{(n)} = \sum_{k=0}^{[n/2]} p_k^n x^{n-2k} \quad (2.3.52)$$

şeklinde yazılabilir. Burada $[n/2]$, $n/2$ 'ye eşit ya da bundan küçük en büyük tam sayıdır. Denklem (2.3.52)'de tanımlanan $P^{(n)}$ 'nin, Denklem (2.3.51)'de yerine yazılması ile p_k^n katsayıları için

$$\langle 2 \rangle^{1/2} p_k^n = \left(\tilde{\alpha} p_k^{n-1} \alpha - q^{n-2k-2} \gamma p_k^{n-1} \beta \right) \alpha^{-1} + \langle n-2k+1 \rangle \gamma p_{k-1}^{n-1} \quad (2.3.53)$$

yineleme bağıntısı elde edilir. Denklem (2.3.53), $p_k^n = (\langle n \rangle!)^{-1/2} c_k^n(q) \gamma^k \alpha^{(n-k)}$ ansatz'ı kullanılarak daha da indirgenebilir. Burada tanımlanan $c_k^n(q)$ katsayıları, q 'nun nümerik fonksiyonlardır. Denklem (2.3.18)'de verilen sıra değişim bağıntısının art arda kullanılması ile

$$\tilde{\alpha} p_k^n \alpha = q_l^k \tilde{\alpha} \alpha p_k^n, \quad \gamma p_k^n \beta = q_l^{n-k} \gamma \beta p_k^n \quad (2.3.54)$$

sonucu bulunur. Böylece Denklem (2.3.53), nümerik katsayılar $c_k^n(q)$ tarafından belirlenen daha basit bir bağıntı ile verilir:

$$c_k^n(q) = q_l^k c_k^{n-1}(q) + \langle n-2k+1 \rangle c_{k-1}^{n-1}(q) \quad (2.3.55)$$

Denklem (2.3.55)'ün çözümü, ilk sabit $c_0^0 = 1$ seçilir ise

$$c_k^n(q) = q^{(k/2)(3k+1)} q^{-nk} \langle 2k-1 \rangle_q !! \left\langle \begin{matrix} n \\ 2k \end{matrix} \right\rangle_q \quad (2.3.56)$$

şeklinde yazılabilir, burada $\left\langle \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\rangle_q$ Binom katsayısı olup

$$\left\langle \begin{matrix} n \\ 2k \end{matrix} \right\rangle_q = \frac{\langle n \rangle_q !}{\langle k \rangle_q ! \langle n-k \rangle_q !}$$

ile verilir. Denklem (2.3.56)'ın, Denklem (2.3.55)'ün çözümü olduğu

$$c_k^{n-1} = \frac{\langle n-2k \rangle}{\langle n \rangle} q^k c_k^n \quad (2.3.57)$$

$$c_{k-1}^{n-1} = q^{n-2k} \frac{\langle 2k \rangle}{\langle n \rangle \langle n-2k+1 \rangle} c_k^n \quad (2.3.58)$$

bağıntıları dikkate alınarak kolayca kontrol edilebilir. Böylece, Denklem (2.3.55)'ün sağ tarafındaki ifade

$$q_l^k c_k^{n-1} + \langle n-2k+1 \rangle c_{k-1}^{n-1} = (\langle n-2k \rangle + q^{n-2k} \langle 2k \rangle) c_k^n / \langle n \rangle \quad (2.3.59)$$

biçimine dönüşür. Son olarak, $q^l \langle m \rangle = \langle m+l \rangle - \langle l \rangle$ genel ifadesinin Denklem (2.3.59)'da kullanımı ile Denklem (2.3.51)'in sağlandığı görülür. $q=1$ olduğu zaman c_k^n sabitleri

$$c_k^n = (2k-1)!! \binom{n}{2k} = \frac{n!}{2^k (n-k)!} \binom{n-k}{k} \quad (2.3.60)$$

biçimine indirgenir, burada $(2k-1)!!/(2k)! = 1/2^k k!$ özdeşliği kullanılmıştır. $q=1$ olduğu zaman $\alpha = -\gamma = 1/\sqrt{2}$ olduğunda, $P^{(n)}$ polinomları

$$\begin{aligned} P^n(x) &= \sum_{k=0}^{[n/2]} \frac{(n!)^{1/2}}{2^k} \frac{1}{(n-k)!} \binom{n-k}{k} \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^k \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{k-n} x^{n-2k} \\ &= (n!)^{1/2} 2^{-n/2} \sum_{k=0}^{[n/2]} \frac{(-1)^k}{(n-k)!} \binom{n-k}{k} (2x)^{n-2k} \end{aligned} \quad (2.3.61)$$

şeklini alır. Bunlar bilinen (normalize olmamış) Hermit Polinomlarıdır. Aşağıda ilk altı polinom için açık ifadeleri yazılmıştır.

$$\begin{aligned} P^{(1)}(x) &= \alpha^{-1} x \\ (\langle 2 \rangle!)^{1/2} P^{(2)}(x) &= \alpha^{-2} x^2 - q_1 \tilde{\beta} \alpha^{-1} \\ (\langle 3 \rangle!)^{1/2} P^{(3)}(x) &= \alpha^{-3} x^3 - q_1^2 \langle 3 \rangle \tilde{\beta} \alpha^{-2} x \\ (\langle 4 \rangle!)^{1/2} P^{(4)}(x) &= \alpha^{-4} x^4 - q_1^3 \frac{\langle 4 \rangle \langle 3 \rangle}{\langle 2 \rangle} \tilde{\beta} \alpha^{-3} x^2 + q_1^3 \langle 3 \rangle \tilde{\beta}^2 \alpha^{-2} \\ (\langle 5 \rangle!)^{1/2} P^{(5)}(x) &= \alpha^{-5} x^5 - q_1^4 \frac{\langle 5 \rangle \langle 4 \rangle}{\langle 2 \rangle} \tilde{\beta} \alpha^{-4} x^3 + q_1^5 \langle 5 \rangle \langle 3 \rangle \tilde{\beta}^2 \alpha^{-3} x \\ (\langle 6 \rangle!)^{1/2} P^{(6)}(x) &= \alpha^{-6} x^6 - q_1^5 \frac{\langle 6 \rangle \langle 5 \rangle}{\langle 2 \rangle} \tilde{\beta} \alpha^{-5} x^4 + q_1^7 \frac{\langle 6 \rangle \langle 5 \rangle \langle 3 \rangle}{\langle 2 \rangle} \tilde{\beta}^2 \alpha^{-4} x^2 - q_1^6 \langle 5 \rangle \langle 3 \rangle \tilde{\beta}^3 \alpha^{-3} \end{aligned}$$

2.3.4 $\bar{a}a$ bazı ve x bazı arasındaki dönüşüm

$\bar{a}a$ bazı Denklem (2.3.22)'nin $\alpha = 1$ ve $\beta = 0$ olduğu zamanki özel bir durumudur. Bu durumda,

$$\bar{a}_y = y \quad (2.3.62a)$$

$$a_y = D_y \quad (2.3.62b)$$

$$(a_y, \bar{a}_y)_q = (D_y, y)_q = 1 \quad (2.3.62c)$$

ve

$$|n\rangle = \frac{\bar{a}^n}{(\langle n \rangle!)^{1/2}} |0\rangle \quad (2.3.63)$$

ifadeleri ile

$$\langle y | n \rangle = \frac{y^n}{(\langle n \rangle!)^{1/2}} 1 \quad (2.3.64)$$

denklemini yazılabilir. (2.3.63) Denkleminin x-bazına izdüşümü

$$\langle x | n \rangle = \frac{\bar{a}_x^n}{(\langle n \rangle!)^{1/2}} \langle x | 0 \rangle \quad (2.3.65)$$

olarak veya

$$\psi_n(x) = \frac{\bar{a}_x^n}{(\langle n \rangle!)^{1/2}} \psi_0(x) \quad (2.3.66)$$

şeklinde yazılabilir. $\psi_n(x)$ için üretici fonksiyon aşağıdaki kurulum izlenerek bulunabilir. Öncelikle,

$$\sum \frac{y^n}{(\langle n \rangle!)^{1/2}} \psi_n(x) = \sum \frac{y^n \bar{a}_x^n}{\langle n \rangle!} \psi_0(x)$$

ifadesi ya da

$$\varepsilon_q(y \bar{a}_x) \varepsilon_{q^2}(-K_0) = \sum \frac{y^n}{(\langle n \rangle!)^{1/2}} \psi_n(x)$$

ifadesi dikkate alınır. Burada ε_q

$$\varepsilon_q(z) = \sum \frac{z^n}{\langle n \rangle_q!}$$

ifadesi ile, $\bar{a}_x$ Denklem (2.3.25)'de ve K_0 'da Denklem (2.3.39)'da tanımlanmıştır.

Böylece, $\psi_n(x)$ için üretici fonksiyon

$$g_p(y, x) = \sum \frac{y^n}{(\langle n \rangle!)^{1/2}} \psi_n(x) \quad (2.3.67)$$

olur, burada $g_p(y, x)$

$$g_p(y, x) = \varepsilon_q(y \bar{a}_x) \varepsilon_{q^2}(-K_0)$$

ile verilir. $q=1$ limitinde, bunlar

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_{q^2}(-K_0) &= e^{-x^2/2} \\ \mathcal{E}_q(y\bar{a}_x) &= e^{(1/\sqrt{2})y(x-\partial_x)}\end{aligned}$$

denklemlerine indirgeniler. Bu durumda,

$$\begin{aligned}g_{q=1}(y, x) &= e^{(1/\sqrt{2})y(x-\partial_x)} e^{-x^2/2} = e^{(1/\sqrt{2})yx} e^{(-1/\sqrt{2})y\partial_x} e^{(1/4)(yx, y\partial_x)} e^{-x^2/2} \\ &= e^{(1/\sqrt{2})yx} e^{(-1/\sqrt{2})y\partial_x} e^{-y^2/4} e^{-x^2/2} \\ &= e^{(1/\sqrt{2})yx} e^{-y^2/4} e^{-(1/2)(x-y/\sqrt{2})^2}\end{aligned}$$

ya da

$$g_1(y, x) = e^{-(1/2)(x^2+y^2)+\sqrt{2}xy}$$

ifadesi elde edilir. Denklem (2.3.67)

$$g_p(y, x) = \sum_n \langle x|n \rangle \langle n|y \rangle$$

şeklinde de ifade edilebilir öyle ki $g_p(y, x)$, $\langle x|y \rangle$ 'nin dönüşüm fonksiyonu olur.

2-4 q-Osilatör Sisteminin İstatistiksel Özellikleri: Fononlar ve Fotonlar

Hem fononlar ve hem de fotonlar farklı frekanslardaki serbest salınımlar topluluğu olarak düşünülebileceklerinden dolayı, aşağıda formülasyonu gerçekleştirilecek olan serbest bozon gazının istatistiksel özellikleri bu sistemlerin özelliklerinin q-deformasyonundan ne şekilde etkilendiği hakkında fikir verecektir. Bu bölümde q-deforme alan dinamiği inşa edilerek, bu alan dinamiği cinsinden q-deforme harmonik osilatörler topluluğunun bazı istatistik mekaniksel özellikleri tartışılacaktır. q-Fock uzayı $[n]!=[n][n-1].....[1]$ olmak üzere

$$F = \left\{ |n\rangle = \frac{(a^+)^n}{([n]!)^{1/2}} |0\rangle, a|0\rangle = 0, n = 0, 1, 2, \dots \right\} \quad (2.4.1)$$

şeklinde tanımlanır.. $[x]$ notasyonu q deformasyon parametresi cinsinden daha evvel olduğu gibi

$$[x] = \frac{q^x - q^{-x}}{q - q^{-1}}$$

(2.4.2)

şeklinde tanımlanır. Böylece, $|n\rangle$ sayı durumuna a^+ yaratıcı, a yok edici ve N sayı operatörlerinin etkisi Denklem (2.1.3) ve Denklem (2.1.4) ile verilir. q-Fock uzayında

$$aa^+ = [N+1] \quad a^+a = [N] \quad (2.4.3)$$

özdeşlikleri geçerlidir. Bu noktada q-deforme fermiyonik osilatörleri de tartışmakta fayda vardır. Bu durum için N sayı operatörünün özdeğerleri sadece $n=0$ ve 1 değerlerini alır. q-fermiyonik yaratıcı ve yok edici operatörlerin cebri ise

$$\begin{aligned}
\{b, b\} &= \{b^+, b^+\} = 0 \\
bb^+ + q^{-1}b^+b &= q^{-N} \\
[N, b^+] &= b^+ \quad , \quad [N, b] = -b
\end{aligned}
\tag{2.4.4}$$

biçimindedir. Bunlar, b^+ , b ve N 'nin $|n\rangle$ durumuna etkiyen, $n=0$ ve 1 olmak üzere

$$\begin{aligned}
b^+|0\rangle &= |1\rangle \\
b|0\rangle &= 0 = b^+|1\rangle \\
N|n\rangle &= n|n\rangle
\end{aligned}
\tag{2.4.5}$$

ifadelerine yol açar. Böylelikle

$$b^+b = [N] \quad , \quad bb^+ = [N+1] \tag{2.4.6}$$

özdeşlikleri sağlanmış olur. Bir q -deforme osilatörler topluluğu için, bilinen sıra değişim bağıntıları, yukarıda verilen q -deforme sıra değişim bağıntıları ile değiştirileceğinden dolayı sistemin fiziksel özellikleri q deforme parametresi ile etkilenmiş olur.

2.4.1 Termo alan dinamiğinin q -analoğu

Termo alan dinamiğinin temel düşüncesi oldukça basittir. İyi bilindiği üzere, A gibi bir operatörün topluluk ortalaması

$$\langle A \rangle = Z^{-1}(\beta) T_r \left(A e^{-\beta H} \right) \tag{2.4.7}$$

ile verilir, burada H sistemin hamiltonyenini ve Z de bölüşüm fonksiyonunu temsil eder. Bölüşüm fonksiyonu ise

$$Z(\beta) = T_r e^{-\beta H} \tag{2.4.8}$$

ile tanımlanır. Diğer taraftan kuantum alan teorisinde, A operatörünün beklenen değeri ise $\langle 0|A|0\rangle$ ile verilir. Bu noktada, A gibi bir fiziksel niceliğin topluluk ortalamasının basitçe bunun termal vakum beklenen değeri olarak yazılabileceği bir termal vakum $|O(\beta)\rangle$ tanımlamasının mümkün olup olmadığı sorusu ortaya çıkar. Tam formüle etmek gerekirse bu

$$\langle O(\beta)|A|O(\beta)\rangle = Z^{-1}(\beta)T_r(Ae^{-\beta H}) \quad (2.4.9)$$

anlamına gelir. Gerçekten de bu $|\tilde{n}\rangle$ tilda durumlarını ortaya koyarak ve temel vakumu

$$|O(\beta)\rangle = Z^{-1/2}(\beta)\sum_n \exp(-\beta E_n/2)|n\tilde{n}\rangle \quad (2.4.10)$$

şeklinde tanımlayarak yapılabilir. Burada $|n\tilde{n}\rangle$

$$|n\tilde{n}\rangle = \begin{cases} \frac{(a^+)^n (\tilde{a}^+)^n}{n!} |O\tilde{O}\rangle & n = 0,1,2... \text{ bozonlar için} \\ (b^+)^n (\tilde{b}^+)^n |O\tilde{O}\rangle & n = 0,1 \text{ fermiyonlar için} \end{cases} \quad (2.4.11)$$

ile tanımlanır. Burada, a^+ ve b^+ operatörleri sırası ile bozonların ve fermiyonların bilinen yaratıcı operatörleri (q deforme olmayan), olup $\tilde{a}^+$ ve $\tilde{b}^+$ bunlara karşılık gelen tilda operatörleridir. Bunlar kullanılarak

$$\begin{aligned} \langle O(\beta)|A|O(\beta)\rangle &= Z^{-1}(\beta)\sum_m \sum_n \exp[-\beta(E_m + E_n)/2] \langle m\tilde{m}|A|n\tilde{n}\rangle \\ &= Z^{-1}(\beta)\sum_m \sum_n \exp[-\beta(E_m + E_n)/2] \langle m|A|n\rangle \delta_{m\tilde{m}} \\ &= Z^{-1}(\beta)T_r(Ae^{-\beta H}) \end{aligned} \quad (2.4.12)$$

olacak şekilde Denklem (2.4.9)'un sağlandığı gösterilebilir. Termal vakum

$$\langle O(\beta) | O(\beta) \rangle = 1 \quad (2.4.13)$$

şeklinde normalize edilir. Şimdi bunların ışığında, termo alan dinamiğinin q-analoğu kurulabilir. q-deforme termal vakum

$$|O(\beta)\rangle_q = Z^{1/2}(\beta) \sum_n \exp(-\beta E_n/2) |n\tilde{n}\rangle_q = \sum_n (P_n)^{1/2} |n\tilde{n}\rangle_q \quad (2.4.14)$$

şeklinde tanımlanır. Burada Z bölüşüm fonksiyonu olup

$$P_n = \frac{\exp(-\beta E_n)}{Z(\beta)} = \frac{\exp(-\beta E_n)}{\sum_n \exp(-\beta E_n)} \quad (2.4.15)$$

fonksiyonu ise E_n enerjili durumunda bulunma olasılığını gösterir. Bu durumda q-Fock uzayı artık bozonlar için

$$\left\{ |n\tilde{n}\rangle_q = \frac{(a^+)^n (\tilde{a}^+)^n}{[n]!} |O\tilde{O}\rangle, n=0,1,2,\dots \right\} \quad (2.4.16)$$

ile, fermiyonlar için ise

$$\left\{ |n\tilde{n}\rangle_q = (b^+)^n (\tilde{b}^+)^n |O\tilde{O}\rangle, n=0,1 \right\} \quad (2.4.17)$$

ile verilir. a^+ ve b^+ operatörleri artık q deformedirler ve (2.4.3) ve (2.4.4) Denklemleri ile verilen cebri sağlarlar. $\tilde{a}^+$ ve $\tilde{b}^+$ bunlara karşılık gelen tilda operatörlerdir. Hilbert

uzayının dualinde tilda operatörleri $\tilde{a}$, $\tilde{a}^+$ ve $\tilde{b}$, $\tilde{b}^+$ tilda olmayan operatörler gibi aynı cebri sağlarlar. Yani, bozonlar için

$$\left. \begin{aligned} [\tilde{a}, \tilde{a}] &= [\tilde{a}^+, \tilde{a}^+] = 0 \\ a\tilde{a}^+ - q\tilde{a}^+a &= q^{-\tilde{N}} \\ [\tilde{N}, \tilde{a}^+] &= \tilde{a}^+ \quad [\tilde{N}, \tilde{a}] = -\tilde{a} \end{aligned} \right\} \quad (2.4.18)$$

ve fermiyonlar için

$$\left. \begin{aligned} \{\tilde{b}, \tilde{b}\} &= \{\tilde{b}^+, \tilde{b}^+\} = 0 \\ \tilde{b}\tilde{b}^+ + q^{-1}\tilde{b}^+\tilde{b} &= q^{-\tilde{N}} \\ [\tilde{N}, \tilde{b}^+] &= \tilde{b}^+ \quad [\tilde{N}, \tilde{b}] = -\tilde{b} \end{aligned} \right\} \quad (2.4.19)$$

bağıntıları geçerlidir. Normalizasyon şartı ise

$$\langle O(\beta) | O(\beta) \rangle = \sum_m \sum_n (P_m)^{1/2} (P_n)^{1/2} \langle m\tilde{m} | n\tilde{n} \rangle = \sum_m \sum_n (P_m)^{1/2} (P_M)^{1/2} \delta_{mn} = \sum_n P_n = 1$$

olmasını gerektirir.

Bozon ve fermiyon sistemleri için q-termal vakumlarını detaylı bir şekilde bulmak için, q-deforme harmonik osilatörler topluluğu incelenir. İkinci kuantumlamada, n_k 'inci uyarılmanın enerjisi $E_k = n_k \omega_k$ 'dır. Burada $\hbar = 1$ alınmıştır. Böylece P_{n_k} bozonlar için

$$P_{n_k} = \frac{\exp(-\beta E_k)}{\sum_{n_k=0}^{\infty} \exp(-n_k \beta \omega_k)} = [1 - \exp(-\beta \omega_k)] \exp(-n_k \beta \omega_k) \quad (2.4.20)$$

şeklinde, fermiyonlar için ise

$$P_{n_k} = \frac{\exp(-\beta E_k)}{\sum_{n_k=0}^1 \exp(-n_k \beta \omega_k)} = \frac{\exp(-n_k \beta \omega_k)}{1 + \exp(-\beta \omega_k)} \quad (2.4.21)$$

olarak bulunur. Böylece, Denklem (2.4.14) deki P_{n_k} yerine Denklem (2.4.20) ve (2.4.21) yazılacak olursa termal deforme olmamış vakum, bozonlar için

$$|O(\beta)\rangle_q = \sum_{n_k} (P_{n_k})^{1/2} |n_k \widetilde{n_k}\rangle_q = [1 - \exp(-\beta \omega_k)]^{1/2} \sum_{n_k} \exp(-n_k \beta \omega_k / 2) |n_k \widetilde{n_k}\rangle_q \quad (2.4.22)$$

şeklinde, fermiyonlar için ise

$$|O(\beta)\rangle_q = \sum_{n_k} (P_{n_k})^{1/2} |n_k \widetilde{n_k}\rangle_q = [1 + \exp(-\beta \omega_k)]^{1/2} \sum_{n_k} \exp(-n_k \beta \omega_k / 2) |n_k \widetilde{n_k}\rangle_q \quad (2.4.23)$$

şeklinde bulunur.

2.4.2 q-osilatör sisteminin istatistik mekaniksel özellikleri

Kuantize fiziksel bir sistemin özellikleri, sayı temsiliindeki yaratıcı ve yok edici operatörler ya da alan operatörlerinin sıra değişim bağıntısı ve sistemin hamiltonyeni tarafından karakterize edilir. İlk bakışta, öncelikle, harmonik osilatörler topluluğunun, sıra değişim bağıntısı q-deforme olduğu zaman ne olacağı ya da topluluğun halen serbest olup olmadığı sorusu akla gelebilir. Bunu inceleyebilmek için, osilatör sisteminin serbest Hamiltonyenini muhafaza ederek, sisteme q-deforme sıra değişim bağıntısı empoze edilir. Öncelikle, q-bozonik osilatörlerde oluşan sistem incelenirse, sistemin serbest Hamiltonyeni,

$$H = \sum_k \omega_k N_k \quad (2.4.24)$$

olarak seçilir, burada ω_k k. düzeydeki salıncının frekansı (enerjisi) ve N_k 'da buna karşılık gelen sayı operatörüdür.

2.4.2.1 İstatiksel dağılımın q-analoğu

q-bozonik osilatörler için dağılım fonksiyonunun q-analoğu

$$f_k(q) = \langle O(\beta) | a_k^+ a_k | O(\beta) \rangle_q = \langle O(\beta) | [N_k] | O(\beta) \rangle_q \quad (2.4.25)$$

olarak bulunabilir. Evvelki kesimde tanımlanan q-termal vakum kullanılarak (2.4.25) denklemi

$$\begin{aligned} f_k(q) &= \sum_{m_k} \sum_{n_k} (P_{m_k})^{1/2} (P_{n_k})^{1/2} \langle \widetilde{m_k} m_k | [N_k] | n_k \widetilde{n_k} \rangle_q \\ &= \sum_{m_k} \sum_{n_k} (P_{m_k})^{1/2} (P_{n_k})^{1/2} \langle m_k | [N_k] | n_k \rangle_q \delta_{m_k n_k} \\ &= \sum_{n_k} [n_k] P_{n_k} \end{aligned} \quad (2.4.26)$$

şeklinde yazılabilir. $[n_k]$ 'nın yerine $[n_k] = (q^{n_k} - q^{-n_k}) / (q - q^{-1})$ ve P_{n_k} yerine de Denklem (2.4.20) yazılırsa, Denklem (2.4.26) daki dağılım fonksiyonu

$$\begin{aligned} f_k(q) &= \frac{1 - \exp(-\beta\omega_k)}{q - q^{-1}} \sum_{n_k} \{ q^{n_k} \exp(-n_k \beta\omega_k) - q^{-n_k} \exp(-n_k \beta\omega_k) \} \\ &= \frac{\exp(\beta\omega_k) - 1}{[q \exp(-\beta\omega_k) - 1][q^{-1} \exp(-\beta\omega_k) - 1]} \end{aligned} \quad (2.4.27)$$

şeklini alır. Dağılım fonksiyonunun q-bağımlılığını daha açık bir şekilde görmek için $\ln q = \gamma$ veya $q = e^\gamma$ alınırsa, bu durumda, Denklem (2.4.27)

$$f_k(q) = \frac{\exp(\beta\omega_k) - 1}{[\exp(\beta\omega_k + \gamma) - 1][\exp(\beta\omega_k - \gamma) - 1]} \quad (2.4.28)$$

şeklin alır. $\gamma \rightarrow 0$ veya $q \rightarrow 1$ olduğu zaman Denklem (2.4.28)'in

$$\lim_{\gamma \rightarrow 0} f_k(q) = \frac{1}{\exp(\beta\omega_k) - 1} = f_k \quad (2.4.29)$$

şeklinde bilinen Bose-Einstein dağılımını verdiği kolaylıkla görülür. $f_k(q)$ 'yu daha kompakt bir şekilde yazmak için, Denklem (2.4.28)

$$\begin{aligned} f_k(q) &= \frac{C_1}{\exp(\beta\omega_k + \gamma) - 1} + \frac{C_2}{\exp(\beta\omega_k - \gamma) - 1} \\ &= \frac{[C_1 \exp(-\gamma) + C_2 \exp(\gamma)] \exp(\beta\omega_k) - (C_1 + C_2)}{[\exp(\beta\omega_k + \gamma) - 1][\exp(\beta\omega_k - \gamma) - 1]} \end{aligned} \quad (2.4.30)$$

biçiminde yazılır. Burada C_1 ve C_2 sabitleri Denklem (2.4.30) ve Denklem (2.4.28) karşılaştırılarak

$$\begin{aligned} C_1 e^{-\gamma} + C_2 e^{\gamma} &= 1 \\ C_1 + C_2 &= 1 \end{aligned} \quad (2.4.31)$$

şeklinde bulunur. Denklem (2.4.31)'in çözümü ise

$$C_1 = \frac{e^{\gamma} - 1}{e^{\gamma} - e^{-\gamma}} = \frac{q - 1}{q - q^{-1}} \quad C_2 = \frac{1 - e^{-\gamma}}{e^{\gamma} - e^{-\gamma}} = \frac{1 - q^{-1}}{q - q^{-1}} \quad (2.4.32)$$

biçimindedir. Böylece, son olarak, dağılım fonksiyonu

$$f_k(q) = \frac{C_1}{\exp[\beta(\omega_k + \gamma/\beta)] - 1} + \frac{C_2}{\exp[\beta(\omega_k - \gamma/\beta)] - 1} \quad (2.4.33)$$

şeklinde yazılabilir. Artık, burada C_1 ve C_2 denklem (2.4.32) ile verilirler.

Denklem (2.4.33)'den, γ deformasyon parametresinin, q deforme sıra değişim bağıntısından dolayı, dağılımda $e^{\pm\gamma}$ şeklinde üstel olarak belirdiği görülür. Böylece, dağılım fonksiyonu enerjisi $\omega_k + (\gamma/\beta)$ olan ve enerjisi $\omega_k - (\gamma/\beta)$ olan iki parçaya bölünmüş olur. q 'nın pozitif tanımlı olması dağılım fonksiyonunun ağırlığının $C_1, C_2 > 0$ ve $C_1 + C_2 = 1$ olmasını garanti eder. q fermiyonik salınıcılar dağılım fonksiyonu da benzer şekilde tanımlanabilir.

2.5.2.2 Siyah cisim ışıması

Bir foton topluluğu, bağımsız parçacıklardan oluşan bir bozon sisteminin basit bir örneği olarak düşünülebilir. Fotonlar ışıyım alanının kuantumu olduğundan dolayı, siyah cisim ışıması bozonik osilatörler sistemi olarak bakılabilir. Bir kovuğun duvarları tarafından sürekli olarak yayınlanıp soğurulan q -fotonları incelenecek olursa, siyah cisim ışımasının enerji dağılımı $\omega f(q)$ olup, $f(q)$ 'nin Denklem (2.4.33) ile verildiği görülebilir. Birim hacim başına ışıma alanının enerjisi ki bu ω ile $\omega + d\omega$ arasındaki frekans bölgesindedir

$$u_q(\omega, \beta) d\omega = g(\omega) \omega f(q) d\omega = \frac{\omega^3}{C^3 \pi^2} f(q) d\omega \quad (2.4.41)$$

şeklinde verilir. Burada $g(\omega)$

$$g(\omega) = \frac{\omega^2}{C^3 \pi^2}$$

frekans spektrumudur. Böylece, q -foton sistemi için Planck Işıma Yasası

$$u_q(\omega, \beta) d\omega = \frac{\omega^3}{C^3 \pi^2} \left(\frac{C_1}{\exp(\beta\omega + \gamma) - 1} + \frac{C_2}{\exp(\beta\omega - \gamma) - 1} \right) \quad (2.4.42)$$

şeklinde ifade edilir. $\gamma \rightarrow 0$ olduğu zaman Denklem (2.4.42)'nin

$$u(\omega, \beta) = \frac{1}{C^3 \pi^2} \frac{\omega^3 d\omega}{\exp(\beta\omega) - 1} \quad (2.4.43)$$

$u(\omega, \beta)$ 'nın bilinen Planck Işıma Yasasına dönüştüğü kolaylıkla görülebilir.

2.5.2.3 Öz ısı

Denklem (2.4.42)'den, toplam siyah cisim ışıması kolaylıkla bulunabilir. $q \leftrightarrow q^{-1}$, yani, $\gamma \leftrightarrow -\gamma$ dualite dönüşümü altında $[x]$ notasyonunun invaryant kaldığına dikkat edilecek olursa, q , $0 < q < 1$ ve böylece de γ , $\gamma < 0$ bölgelerine kısıtlanabilir. Bu durumda $f(q)$ dağılım fonksiyonu

$$f(q) = \frac{C_1}{\exp[\beta(\omega - |\gamma|/\beta)] - 1} + \frac{C_2}{\exp[\beta(\omega + |\gamma|/\beta)] - 1} \quad (2.4.44)$$

olarak yazılabilir. Dağılım fonksiyonu $f(q)$, sadece $\omega > |\gamma|/\beta$ olduğu zaman pozitif tanımlıdır. Böylelikle, toplam enerji K Boltzman sabiti olmak üzere,

$$\begin{aligned} u_q(\beta) &= \frac{1}{C^3 \pi^2} \int_{|\gamma|/\beta}^{\infty} \left(\frac{C_1}{\exp[\beta(\omega - |\gamma|/\beta)] - 1} + \frac{C_2}{\exp[\beta(\omega + |\gamma|/\beta)] - 1} \right) (\omega - |\gamma|/\beta)^3 d\omega \\ &= \frac{6K^4 T^4}{C^3 \pi^2} \left(C_1 \zeta(4) + C_2 \zeta(e^{-2|\gamma|}, 4) \right) \end{aligned} \quad (2.4.45)$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada, ζ fonksiyonu ve modifiye ζ fonksiyonu

$$\zeta(4) = \frac{\pi^4}{90} \quad (2.4.46)$$

$$\zeta(e^{2|\gamma|}, 4) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{2|\gamma|n^2}}{n^4}$$

ile verilirler. Böylece, birim hacim başına düşen öz ısı

$$C_v(q) = \frac{du_q(T)}{dT} = \frac{24K^4T^3}{C^3\pi^2} \left(C_1\zeta(4) + C_2\zeta(e^{-2|\gamma|}, 4) \right) \quad (2.4.47)$$

şeklinde bulunur ki bu da alışıldığı şekilde T^3 ile orantılıdır. Eğer q-pertürbasyonunun yeteri kadar küçük olduğu varsayılırsa, yani $|\gamma|$ 'nın yeterince küçük olduğu düşünülürse, o zaman,

$$C_1\zeta(4) + C_2\zeta(e^{-2|\gamma|}, 4) = \frac{1}{2}\zeta(4) + \frac{1}{2}(\zeta(4) - 2|\gamma|\zeta(3)) = \zeta(4) - |\gamma|\zeta(3)$$

ifadesini yazmak mümkündür. Böylece, toplam enerji ve öz ısı basitçe

$$u_q(T) = \frac{6K^4T^4}{C^3\pi^2} (\zeta(4) - |\gamma|\zeta(3)) \quad (2.4.48)$$

$$C_v(q) = \frac{24K^4T^3}{C^3\pi^2} (\zeta(4) - |\gamma|\zeta(3))$$

şeklinde yazılabilir. $\gamma = 0$ olduğu zaman, Denklem (2.4.48) de bulunan sonuçlar, siyah cisim ışıması için bilinen birim hacim başına düşen toplam enerji ve öz ısı sonuçlarını verir, yani

$$u(T) = \frac{\pi^2 K^4 T^4}{15C^3} \tag{2.4.49}$$

$$C_V(T) = \frac{4\pi^2 K^4 T^3}{15C^3}$$

şeklini alırlar.

3.SONUÇ

Kuantum grupları olarak da bilinen Kuantum cebirleri son yılların fizikteki yoğun araştırma konularından birisidir. Özellikle Macfarlane ve Biedenharn'ın (1989) $SU_q(2)$ kuantum grubu ve harmonik osilatörlerin q-analogları üzerine olan çalışmalarından sonra kimya ve fizikte q-deforme sistemlerin uygulamaları geniş bir biçimde yer almıştır.

q-deforme osilatörler teorisi poliatomik moleküllerin titreşimini, süper akışkan filmlerdeki girdapları, ^4He deki fonon spektrumunu açıklamaya çalışmış, bunun yanı sıra kuantum optikte q-deforme koherent durum teorilerinde, istatistik mekanikte, harmonik osilatörün q-analoğu iki durum denklemi ve öz ısı hesabında, q-deforme Morse osilatörü, Landau düzeylerinin dejenereliği, q-deforme fononlar gibi konularda da çalışıla gelmiştir.

Bu tezde, çalışma q-deforme osilatörlerden yola çıkarak bozonlar ve fermiyonların q-analoğunu ve bunlar için Planck Işıma Yasasını. q-salınıcı sistemlerin İstatiksel özelliklerinden yola çıkarak siyah cisim ışıması ve öz ısının q-analoğu incelenmeye çalışılmıştır. Yine deforme olmayan sistemle, deforme olmuş sistem arasındaki farklılık anlaşılmasına çalışılmıştır.

Tüm bu deforme olmuş sistemlerin cebirinin $q=1$ limitinde deforme olmayan sistemin cebirine döndüğü görülmüştür. Yani deforme olmamış sistemler deforme olmuş sistemin özel bir halidir.

Ayrıca bu tezde yer almayan ancak tez oluşturulurken q-deforme Morse osilatörleri ve q-bozon gazları için Planck Dağılım Yasaları da incelenmiştir.

Yine bu her iki deforme olmuş sistemin cebirinin de $q=1$ limitinde deforme olmayan sistemin cebirine döndüğü görülmüştür.

KAYNAKLAR

- Biedenharn, L.C. 1989. The Quantum Group $SU_q(2)$ and a q-analogue of the Boson Operators. J. Phys. A : Math. Gen. 22 L873-L878 Printed in the UK.
- Chaichian, M. and Hagedron, R. 1998. Symmetries in Quantum Mechanics, Institute of Physics Publishing, London
- Chatterjee, R. 1994. Some Comments on q-analogue of a Harmonic Oscillator. Phys. Stat. Sol. (b) 186. 461 Subject classification: 63.50 and 71.10 Department of Physics and Astronomy. University of Calgary
- Chatterjee, R. 1996. Fibonacci Oscillator. Phys. Stat. Sol. (b) 186. 461 Subject classification: 63.50 Department of Physics and Astronomy. University of Calgary
- Cooper, I.L. and Gupta, R.K. 1995. q-deformed Morse Oscillator. Physical Review A. Volume 52, Number 2
- Macfarlane, A.J. 1989. On q-analogues of the Quantum Harmonic Oscillator and the Quantum Group $SU(2)_q$. J. Phys. A: Math. Gen. 22 4581-4588 Printed in the UK.
- Martin-Delgado, M.A. 1991. Planck Distribution for q-boson Gas. J. Phys. A : Math. Gen. 24 L1285-L1291 Printed in the UK.
- Finkelstein, R. and Marcus, E. 1994. Transformation Theory of the q-oscillator. Department of Physics, University of California, Los Angeles California 90024-1547
- Song, He-Shan, Ding, Shu-Xue and An Ing. 1993. Statistical Mechanical Properties of the q-oscillator System. J. Phys. A: Math. Gen. 26 5197-5205 Printed in the UK.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı: Emine AYDIN

Doğum Yeri: Kalecik/ANKARA

Doğum Tarihi: 14/09/1978

Medeni Hali: Bekar

Yabancı Dili: Almanca

Eğitim Durumu:

Lise : Hasanoğlu Atatürk Anadolu Öğretmen
Lisesi (1992-1996)

Lisans : Hacettepe Üniversitesi Eğitim Fakültesi
Fizik Öğretmenliği Bölümü (1996-2001)

Yüksek Lisans : Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri
Enstitüsü Fizik Bölümü (2003-2006)

Çalıştığı Kurumlar:

M.E.B. Fen Bilgisi Öğretmeni

2002-2003 Atatürk İlköğretim Okulu Çukurca-Hakkari

2003-2006 Gazipaşa İlköğretim Okulu Beypazarı-Ankara

2006 Merkez Atatürk İlköğretim Okulu Çamlıdere-Ankara