

ANKARA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

GENELLEŞTİRİLMİŞ AĞIRLIKLIL MORREY UZAYLARINDA
MAKSİMAL, SİNGÜLER OPERATÖRLER VE KOMÜTATÖRLERİ
İÇİN İKİ AĞIRLIKLIL EŞİTSİZLİKLER

Ayşe ÖZKÖK

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ANKARA
2024

Her hakkı saklıdır

SİMGELER DİZİNİ

\mathbb{R}^n	n -boyutlu Öklid uzayı
$B(x, r)$	x merkezli r yarıçaplı yuvar
${}^cB(x, r)$	x merkezli r yarıçaplı yuvarın tümleyeni
ω	Ağırlık fonksiyonu
φ	Genelleştirme fonksiyonu
m	Lebesgue ölçüsü
m^*	Lebesgue dış ölçüsü
χ	Karakteristik fonksiyon
$L_p(\mathbb{R}^n)$	Lebesgue uzayı
$L_p^{loc}(\mathbb{R}^n)$	p . mertebeden lokal integrallenebilen fonksiyonların uzayı
$L_1^{loc}(\mathbb{R}^n)$	\mathbb{R}^n de lokal integrallenebilen fonksiyonların uzayı
$L_{p,\omega}(\mathbb{R}^n)$	Ağırlıklı Lebesgue uzayı
$L_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$	Morrey uzayı
$L_{\omega}^{p,\kappa}(\mathbb{R}^n)$	Ağırlıklı Morrey uzayı
$M^{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)$	Genelleştirilmiş Morrey uzayı
$M_{\omega}^{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)$	Genelleştirilmiş ağırlıklı Morrey uzayı
$WM_{\omega}^{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)$	Zayıf genelleştirilmiş ağırlıklı Morrey uzayı
$C_0^{\infty}(\mathbb{R}^n)$	Kompakt desteğe sahip sürekli fonksiyonlar sınıfı
$A_p(\mathbb{R}^n)$	Muckenhoupt ağırlık sınıfı
$F_p(\mathbb{R}^n)$	Fefferman-Pong ağırlık sınıfı
M	Maksimal operatör
M^{\sharp}	Sharp maksimal fonksiyon
T	Singüler integral operatör
$T_{\varepsilon}f$	Alışılmış kesme fonksiyon
M_b	Maksimal komütatör
$[M, b]$	Hardy-Littlewood maksimal komütatörü
$[b, T]$	Singüler komütatör

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

GENELLEŞTİRİLMİŞ AĞIRLIKLIL MORREY UZAYLARINDA MAKSİMAL, SİNGÜLER OPERATÖRLER VE KOMÜTATÖRLERİ İÇİN İKİ AĞIRLIKLIL EŞİTSİZLİKLER

Ayşe ÖZKÖK

Ankara Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Canay AYKOL KOCAKUŞAKLI

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır. Tezde; genelleştirilmiş ağırlıklı Morrey uzaylarında maksimal ve singüler operatörler için \tilde{A}_p ve F_p ağırlıklı eşitsizlikler; maksimal ve singüler komütatörler için ise yalnızca \tilde{A}_p ağırlıklı eşitsizlikler karakterize edilmiştir. Birinci bölüm giriş kısmına ayrılmıştır. Bu bölümde, Hardy-Littlewood maksimal operatörü ve Calderón-Zygmund singüler operatör tanımlanmıştır. \tilde{A}_p ve F_p Feffermann-Pong ağırlıklarına yer verilirken; komütatör tanımına da değinilmiştir. Ayrıca, ilk kez Guliyev tarafından tanımlanmış olan genelleştirilmiş ağırlıklı Morrey uzay tanımı ve bu uzayın bazı özelliklerine yer verilmiştir. İkinci bölümde tanım, teorem ve lemmalara yer verilmiştir. Üçüncü bölüm, dört kısımdan oluşmaktadır. Bu bölümün birinci kısmında, genelleştirilmiş ağırlıklı Morrey uzaylarında \tilde{A}_p ve F_p ağırlık sınıfları kullanılarak maksimal operatörlerin sınırlılığı ispatlanmıştır. Bu bölümün ikinci kısmında, genelleştirilmiş ağırlıklı Morrey uzaylarında \tilde{A}_p ve F_p ağırlık sınıfları kullanılarak Calderón-Zygmund singüler operatörlerin sınırlılığı ispatlanmıştır. Bu bölümün üçüncü kısmında, genelleştirilmiş ağırlıklı Morrey uzaylarında \tilde{A}_p ağırlık sınıfları kullanılarak maksimal komütatörler için iki ağırlıklı eşitsizlikler elde edilirken; dördüncü kısmında ise genelleştirilmiş ağırlıklı Morrey uzaylarında \tilde{A}_p ağırlık sınıfları kullanılarak singüler komütatörler için iki ağırlıklı eşitsizlikler verilmiştir. Dördüncü bölümde, genelleştirilmiş ağırlıklı Morrey uzaylarında bazı uygulamalara yer verilmiştir. Son bölümde ise elde edilen sonuçların analizi yapılmıştır.

Temmuz 2024, 52 sayfa

Anahtar Kelimeler: Maksimal operatör, Calderón-Zygmund singüler operatörleri, komütatör, Feffermann-Pong ağırlıkları, \tilde{A}_p ağırlıkları, ağırlıklı Lebesgue uzayı, Morrey uzayı, genelleştirilmiş ağırlıklı Morrey uzayı, ağırlıklı eşitsizlikler, BMO uzayı

ABSTRACT

Master Thesis

TWO-WEIGHTED INEQUALITIES FOR MAXIMAL, SINGULAR OPERATORS
AND THEIR COMMUTATORS IN GENERALIZED WEIGHTED MORREY SPACES

Ayşe ÖZKÖK

Ankara University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Canay AYKOL KOCAKUŞAKLI

This thesis consists of five chapters. In this thesis, \tilde{A}_p and F_p weighted inequalities for maximal and singular operators in generalized weighted Morrey spaces and only \tilde{A}_p weighted inequalities for maximal and singular commutators are characterized. The first chapter is devoted to the introduction. In this chapter, Hardy-Littlewood maximal operator and Calderón-Zygmund singular operator are introduced. While \tilde{A}_p and F_p Feffermann-Pong weights are introduced, the definition of commutators are also mentioned. In addition, the definition and some properties of generalized weighted Morrey spaces which was first introduced by Guliyev, are also included. In the second chapter; definitions, theorems and lemmas are given. The third chapter consists of four parts. In the first part of this chapter, the boundedness of maximal operators in generalized weighted Morrey spaces by using the class of weights \tilde{A}_p and F_p is proved. In the second part of this chapter, the boundedness of Calderón-Zygmund singular operators in generalized weighted Morrey spaces by using the class of weights \tilde{A}_p and F_p is proved. In the third part of this chapter, while two-weighted inequalities in generalized weighted Morrey spaces for maximal commutators by using the class of weights \tilde{A}_p are obtained, in the fourth part two-weighted inequalities in generalized weighted Morrey spaces for singular commutators by using the class of weights \tilde{A}_p are also given. In the fourth chapter, some priori applications in generalized weighted Morrey spaces are given. In the last chapter, the results obtained are analyzed.

July 2024, 52 pages

Key Words: Maximal operator, Calderón-Zygmund singular operators, commutator, Feffermann-Pong weights, A_p weights, weighted Lebesgue space, Morrey space, generalized weighted Morrey space, weighted inequalities, BMO space

TEŞEKKÜR

Bu çalışmanın gerçekleştirilmesinde yoluma ışık tutan, kıymetli bilgi birikiminden istifade etmemi sağlayan, pozitif yaklaşımı ve desteğini daima hissettiğim, Sayın Danışmanım Prof. Dr. Canay AYKOL KOCAKUŞAKLI'ya (Ankara Üniversitesi Matematik Anabilim Dalı), çalışmalarımın en başında anabilim dalımıza ziyareti vesilesiyle tanışma ve kalıcı bilgiler edinme imkanı bulduğum Sayın Prof. Dr. Javanshir J.HASANOV'a, Sayın Öğretmenim M. Cemal YALTIRAK'a, eğitimim boyunca 2210-A Genel Yurt İçi Yüksek Lisans Burs Programı ile beni destekleyen TÜBİTAK'a, ilk günden bu yana; her zaman yanı başımda olan, maddi ve manevi desteklerini benden esirgemeyen ve çok çeşitli başarılar elde etmeme imkân sağlayan başta sevgili annem Fadime ÖZKÖK ve sevgili babam İsmet ÖZKÖK olmak üzere tüm aile bireylerime ve arkadaşlarıma en içten sevgi, saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

Bu tezi, elde ettikleri başarıların altında yalnızca emek, azim ve alın teri yatan tüm insanlara ithaf ediyorum.

Ayşe ÖZKÖK
Ankara, Temmuz 2024

İÇİNDEKİLER

TEZ ONAY SAYFASI	
ETİK	i
ÖZET	ii
ABSTRACT.....	iii
TEŞEKKÜR.....	iv
SİMGELER DİZİNİ	vi
1. GİRİŞ	1
2. TEMEL KAVRAMLAR	5
2.1 Temel Tanım ve Teoremler.....	5
3. $M_{\omega}^{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ GENELLEŞTİRİLMİŞ AĞIRLIKLIL MORREY UZAY- LARINDA MAKSİMAL, SİNGÜLER OPERATÖRLER VE KOMÜ- TATÖRLERİ İÇİN İKİ AĞIRLIKLIL EŞİTSİZLİKLER	17
3.1 Genelleştirilmiş Ağırlıklı Morrey Uzaylarında Maksimal Operatör- ler için \tilde{A}_p ve F_p Ağırlıklı Eşitsizlikler	17
3.2 Genelleştirilmiş Ağırlıklı Morrey Uzaylarında Singüler Operatör- ler için \tilde{A}_p ve F_p Ağırlıklı Eşitsizlikler	23
3.3 Genelleştirilmiş Ağırlıklı Morrey Uzaylarında Maksimal Komü- tatörler için \tilde{A}_p Ağırlıklı Eşitsizlikler	29
3.4 Genelleştirilmiş Ağırlıklı Morrey Uzaylarında Singüler Komü- tatörler için \tilde{A}_p Ağırlıklı Eşitsizlikler	36
4. BAZI UYGULAMALAR	42
5. TARTIŞMA VE SONUÇ	46
KAYNAKLAR.....	48
ÖZGEÇMİŞ	52

1. GİRİŞ

Klasik Morrey uzayı, 1938 yılında Morrey tarafından ikinci dereceden eliptik kısmi diferensiyel denklemlerin çözümlerinin lokal davranışlarıyla ilgilenilirken ortaya çıkmıştır. Guliyev (1994), Mizuhara (1991) ve Nakai (1994) tarafından $\mathcal{M}^{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ genelleştirilmiş Morrey uzayları tanımlanmıştır (Ayrıca bkz. Guliyev, 1999, 2009; Sawano, 2019). 2009 yılında Komori ve Shirai tarafından $L_{\omega}^{p,\kappa}(\mathbb{R}^n)$ ağırlıklı Morrey uzayları tanımlanmış ve Hardy-Littlewood maksimal operatörü, Calderón-Zygmund operatörü gibi klasik bazı operatörlerin bu uzaylardaki sınırlılıkları araştırılmıştır. 2012 yılında, Guliyev tarafından ilk kez genelleştirilmiş Morrey ve ağırlıklı Morrey uzayların genişlemesi olarak düşünülebilecek, $\mathcal{M}_{\omega}^{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ genelleştirilmiş ağırlıklı Morrey uzayların tanımı ve özellikleri verilmiştir. Ayrıca, Guliyev tarafından hem alt-lineer operatörlerin hem de onların Calderón-Zygmund ve Riesz potansiyeli tarafından üretilen yüksek dereceli komütatörlerinin sınırlılıkları, $\mathcal{M}_{\omega}^{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ genelleştirilmiş ağırlıklı Morrey uzaylarında araştırılmıştır (Guliyev vd., 2014; Karaman vd., 2014).

Ölçülebilir, pozitif ve A kümesi üzerinde hemen her yerde sonlu olan fonksiyona, A kümesi üzerinde bir ağırlık fonksiyonu denir ve ω ile gösterilir.

$1 \leq p < \infty$, $\varphi; \mathbb{R}^n \times (0, \infty)$ üzerinde pozitif ölçülebilir bir fonksiyon ve ω, \mathbb{R}^n üzerinde negatif olmayan ölçülebilir bir fonksiyon olsun. Supremum \mathbb{R}^n de tüm $B(x, r)$ yuvarları üzerinden alınmak üzere,

$$\|f\|_{\mathcal{M}_{\omega}^{p,\varphi}} = \sup_{x \in \mathbb{R}^n, r > 0} \frac{1}{\varphi(x, r) \|\omega\|_{L_p(B(x, r))}} \|f\|_{L_{p,\omega}(B(x, r))}$$

sonlu normuna sahip olan tüm $f \in L_{p,\omega}^{loc}(\mathbb{R}^n)$ fonksiyonlarının oluşturduğu uzay, $\mathcal{M}_{\omega}^{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ genelleştirilmiş ağırlıklı Morrey uzayı olarak tanımlanmaktadır. (Guliyev, 2012).

Burada $L_{p,\omega}(B(x, r))$,

$$\|f\|_{L_{p,\omega}(B(x, r))} \equiv \|f \chi_{B(x, r)}\|_{L_{p,\omega}(\mathbb{R}^n)} = \left(\int_{B(x, r)} |f(y)|^p \omega(y) dy \right)^{\frac{1}{p}}$$

şeklindeki ölçülebilir f fonksiyonlarının ağırlıklı L_p -uzayını temsil etmektedir.

Ayrıca $f \in WL_{p,\omega}^{loc}(\mathbb{R}^n)$ olmak üzere,

$$\|f\|_{WM_{\omega}^{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)} = \sup_{x \in \mathbb{R}^n, r > 0} \frac{1}{\varphi(x, r) \|\omega\|_{L_p(B(x, r))}} \|f\|_{WL_{p,\omega}(B(x, r))}$$

sonlu normuna sahip olan tüm fonksiyonların oluşturduğu uzay $WM_{\omega}^{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ zayıf genelleştirilmiş ağırlıklı Morrey uzayı temsil etmektedir, burada $WL_{p,\omega}(B(x, r))$

$$\|f\|_{WL_{p,\omega}(B(x, r))} \equiv \|f\chi_{B(x, r)}\|_{WL_{p,\omega}(\mathbb{R}^n)} = \sup_{t > 0} t \left(\int_{y \in B(x, r): |f(y)| > t} |f(y)|^p \omega(y) dy \right)^{\frac{1}{p}}$$

biçimindeki ölçülebilir f fonksiyonlarının zayıf ağırlıklı L_p -uzayını temsil etmektedir.

$$\|f\|_{\mathcal{M}_{\omega}^{p,\varphi}} = \sup_{x \in \mathbb{R}^n, r > 0} \frac{1}{\varphi(x, r) \|\omega\|_{L_p(B(x, r))}} \|f\|_{L_{p,\omega}(B(x, r))}$$

ifadesi için $\omega(x) = \chi_{B(x, r)}(x)$ seçilirse, bu durumda $\mathcal{M}_{\omega}^{p,\varphi}(\mathbb{R}^n) = \mathcal{M}^{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ genelleştirilmiş Morrey uzayı elde edilir. Öte yandan; $\varphi(x, r) = r^{\frac{\lambda-n}{p}}$ seçilirse, bu durumda $\mathcal{M}^{p,\varphi}(\mathbb{R}^n) = L_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ klasik Morrey uzayı elde edilir (Morrey, 1938).

f , \mathbb{R}^n üzerinde lokal integrallenebilir bir fonksiyon olsun. $|B(x, r)|$, $B(x, r)$ yuvarımın Lebesgue ölçüsü olmak üzere, Hardy-Littlewood maksimal fonksiyonu

$$Mf(x) = \sup_{r > 0} |B(x, r)|^{-1} \int_{B(x, r)} |f(y)| dy$$

biçiminde tanımlanır.

Maksimal operatör çalışmaları, harmonik analizin en önemli konularından bir tanesidir.

Calderón-Zygmund tipli singüler operatör,

$$Tf(x) = \int_{\mathbb{R}^n} K(x, y) f(y) dy$$

şeklinde tanımlanır, burada $K(x, y)$ standart singüler çekirdektir, yani K fonksiyonu $\{(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n : x \neq y\}$ üzerinde sürekli ve

$$\text{her } x \neq y \text{ için } |K(x, y)| \leq C|x - y|^{-n},$$

eğer $|x - y| > 2|y - z|$ ise $|(x, y) - K(x, z)| \leq C \frac{|y - z|^\sigma}{|x - y|^{n+\sigma}}$, $\sigma > 0$,

eğer $|x - y| > 2|x - \eta|$ ise $|K(x, y) - K(\eta, y)| \leq C \frac{|x - \eta|^\sigma}{|x - y|^{n+\sigma}}$, $\sigma > 0$,

özelliklerini sağlayan bir fonksiyondur.

$T_\varepsilon f(x)$ alışımlı kesme fonksiyonu,

$$T_\varepsilon f(x) = \int_{\{y \in \mathbb{R}^n : |x-y| \geq \varepsilon\}} K(x, y) f(y) dy$$

olmak üzere,

$$T^* f(x) = \sup_{\varepsilon > 0} |T_\varepsilon f(x)|$$

bir maksimal singüler operatördür.

Verilen bir b ölçülebilir fonksiyonu için maksimal komütatör, her $x \in \mathbb{R}^n$ için

$$M_b(f)(x) = \sup_{x \in \mathbb{R}^n, r > 0} |B(x, r)|^{-1} \int_{B(x, r)} |b(x) - b(y)| |f(y)| dy$$

biçiminde tanımlanmaktadır (Guliyev vd., 2011).

Verilen bir b ölçülebilir fonksiyonu için M Hardy-Littlewood maksimal komütatör, her $x \in \mathbb{R}^n$ için

$$[M, b]f(x) = M(bf)(x) - b(x)Mf(x)$$

biçiminde tanımlanmaktadır (Ağcayazı vd., 2015).

$1 \leq p < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ olmak üzere

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n, r > 0} \left(\frac{1}{|B(x, r)|} \int_{B(x, r)} \omega_2^p(y) dy \right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{1}{|B(x, r)|} \int_{B(x, r)} \omega_1^{-p'}(y) dy \right)^{\frac{1}{p'}} < \infty$$

ise (ω_1, ω_2) ağırlık fonksiyonları $\tilde{A}_p(\mathbb{R}^n)$ sınıfına aittir.

$F_p(\mathbb{R}^n)$ Feffermann-Pong Ağırlıkları, 1995 yılında Pérez tarafından tanımlanmıştır.

$1 < p < \infty$ ve $1 < t < \infty$ olmak üzere, Feffermann-Pong Ağırlıkları

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n, r > 0} \left(\frac{1}{|B(x, r)|} \int_{B(x, r)} \omega_2^p(y) dy \right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{1}{|B(x, r)|} \int_{B(x, r)} \omega_1^{-p't}(y) dy \right)^{\frac{1}{p't}} < \infty$$

şartını sağlayan (ω_1, ω_2) ağırlık fonksiyonlarının sınıfıdır.

Süreç içerisinde birçok matematikçi tarafından farklı fonksiyon uzaylarında bir dizi araştırmalar yapılmıştır: Farklı ağırlıklar kullanılarak Morrey uzaylarında ağırlıklı norm eşitsizlikleri elde edilmeye çalışılmıştır (Örneğin bkz. Samko, 2009; Haroske ve Skrzypczak, 2017; Nakamura vd., 2018). Morrey uzaylarında Hardy-Littlewood maksimal fonksiyonu için iki ağırlıklı norm eşitsizlikleri elde edilmiştir (Tanaka, 2015). Ayrıca, maksimal ve singüler operatörler için global Morrey tipli uzaylarda iki ağırlıklı norm eşitsizlikleri de elde edilmiştir (G. Bozyiğit, 2023).

Bu tezde, genelleştirilmiş ağırlıklı Morrey uzaylarında maksimal ve singüler operatörler için ağırlıklar; sırasıyla \tilde{A}_p ve F_p sınıflarından seçilmek üzere, iki ağırlıklı norm eşitsizlikleri verilecektir. Diğer bir deyişle, $1 < p < \infty$ için $(\omega_1, \omega_2) \in \tilde{A}_p(\mathbb{R}^n)$ ve $(\omega_1, \omega_2) \in F_p(\mathbb{R}^n)$ olduğunda, M maksimal ve T singüler operatörlerin $\mathcal{M}_{\omega_1}^{p,\varphi_1}(\mathbb{R}^n)$ uzayından $\mathcal{M}_{\omega_2}^{p,\varphi_2}(\mathbb{R}^n)$ uzayına sınırlı oldukları gösterilecektir (Aykol vd., 2023). Aynı zamanda, genelleştirilmiş ağırlıklı Morrey uzaylarında maksimal ve singüler komütatörler için de iki ağırlıklı \tilde{A}_p eşitsizliklerinin karakterizasyonunun verilmesi amaçlanmıştır. Benzer şekilde, $1 < p < \infty$, $(\omega_1, \omega_2) \in \tilde{A}_p(\mathbb{R}^n)$ olduğunda, M_b maksimal ve $[b, T]$ singüler komütatörlerin $\mathcal{M}_{\omega_1}^{p,\varphi_1}(\mathbb{R}^n)$ uzayından $\mathcal{M}_{\omega_2}^{p,\varphi_2}(\mathbb{R}^n)$ uzayına sınırlı oldukları gösterilecektir (Aykol vd., 2022). Bu çalışma boyunca, temel olarak söz konusu iki makale baz alınmıştır.

Tez boyunca C , parametreden bağımsız pozitif bir sabit olacaktır. Ayrıca, \mathbb{R}^+ üzerindeki tüm pozitif Lebesgue ölçülebilir fonksiyonların kümesi $\mathfrak{M}(\mathbb{R}^+)$; tüm negatif olmayan ölçülebilir fonksiyonların kümesi $\mathfrak{M}^+(\mathbb{R}^+)$; tüm negatif olmayan ölçülebilir artan fonksiyonların kümesi $\mathfrak{M}^+(\mathbb{R}^+; \uparrow)$ ile gösterilecektir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

2.1 Temel Tanım ve Teoremler

Tanım 2.1 X, K cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun. Eğer bir

$$\|\cdot\| : X \rightarrow \mathbb{R} \quad x \rightarrow \|x\|$$

dönüşümü $\forall x, y \in X$ ve $\forall a \in K$ için

$$(N1) \|x\| \geq 0 \text{ ve } \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \theta,$$

$$(N2) \|ax\| = |a| \|x\|,$$

$$(N3) \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

özelliklerini sağlıyorsa, bu dönüşüme X üzerinde norm adı verilir. $(X, \|\cdot\|)$ ikilisine bir normlu vektör uzayı denir. $(X, \|\cdot\|)$ normlu uzayı kısaca X ile gösterilir (Kreyszig, 1989).

Tanım 2.2 Bir T lineer operatörü aşağıdaki özellikleri gerçekleyen bir operatördür:

(i) T nin $D(T)$ tanım kümesi bir vektör uzayı, $R(T)$ değer kümesi aynı cisim üzerinde bir vektör uzayıdır.

(ii) $\forall x, y \in D(T)$ ve α skaleri için,

$$T(x + y) = Tx + Ty$$

$$T(\alpha x) = \alpha Tx$$

gerçeklenir (Kreyszig, 1989).

Tanım 2.3 X ve Y normlu uzaylar ve $D(T) \subset X$ olmak üzere, $T : D(T) \rightarrow Y$ lineer operatör olsun. Eğer her $\forall x \in D(T)$ için, $\|Tx\| \leq A \|x\|$ olacak şekilde $A \geq 0$ reel sayısı varsa, T operatörü sınırlıdır denir. Bir T operatörünün normu

$$\|T\| = \sup_{\substack{x \neq 0 \\ x \in D(T)}} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} \text{ ile tanımlanır (Kreyszig, 1989).}$$

Tanım 2.4 X ve Y normlu uzaylar, $D(T) \subset X$ olmak üzere $T : D(T) \rightarrow Y$ bir operatör ve $x_0 \in D(T)$ olsun. Eğer verilen her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık, $\|x - x_0\| < \delta$ koşulunu gerçekleyen her $x \in D(T)$ için, $\|Tx - Tx_0\| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı varsa, T ye x_0 noktasında süreklidir denir (Kreyszig, 1989).

Tanım 2.5 X ve Y normlu uzaylar ve $D(T) \subset X$ olmak üzere, $T : D(T) \rightarrow Y$ lineer operatör olsun. Bu durumda T nin sürekli olması için gerek ve yeter koşul T nin sınırlı olmasıdır (Kreyszig, 1989).

Tanım 2.6 (Cebir ve σ - Cebir) X bir küme olsun. Eğer X in alt kümelerinin bir Σ sınıfı için aşağıdaki özellikler sağlanıyorsa Σ sınıfına, X üzerinde bir cebirdir denir:

- (i) $X \in \Sigma$,
- (ii) Her $E \in \Sigma$ için $E^c = X - E \in \Sigma$,
- (iii) $k = 1, 2, \dots, n$ için $E_k \in \Sigma$ ise $\bigcup_{k=1}^n E_k \in \Sigma$.

Burada (iii) şartı yerine, "Her $n \in \mathbb{N}$ için $E_n \in \Sigma$ ise $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in \Sigma$ " şartı konulursa Σ cebirine bir σ -cebir adı verilir (Royden ve Fitzpatrick, 2010).

Tanım 2.7 Bir κ sınıfını kapsayan σ -cebirlerinin en küçüğüne κ nın ürettiği σ -cebiri denir. \mathbb{R}^n deki bütün açık (a, b) aralıklarının ürettiği σ -cebirine Borel cebiri denir ve $B(\mathbb{R}^n)$ ile gösterilir. $B(\mathbb{R}^n)$ nin her bir elemanına Borel kümesi denir.

Tanım 2.8 X bir küme ve Σ , X üzerinde bir σ -cebiri olsun. Bu durumda (X, Σ) ikilisine bir ölçülebilir uzay, Σ daki her bir kümeye de Σ -ölçülebilir küme veya kısaca ölçülebilir küme adı verilir (Royden ve Fitzpatrick, 2010).

Tanım 2.9 (Ölçülebilir Fonksiyon) (X, Σ) bir ölçülebilir uzay ve $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Eğer $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ için,

$$f^{-1}(] \alpha, +\infty[) = \{x \in X : f(x) > \alpha\} \in \Sigma$$

oluyorsa f ye ölçülebilir fonksiyon denir. X üzerindeki ölçülebilir fonksiyonların ailesi $\mathfrak{M}(X, \Sigma)$ ile gösterilir (Royden ve Fitzpatrick, 2010).

Tanım 2.10 (X, Σ) bir ölçülebilir uzay olsun. Σ üzerinde tanımlı genişletilmiş reel değerli bir μ fonksiyonu

- (i) $\mu(\emptyset) = 0$,
- (ii) Her $A \in \Sigma$ için $\mu(A) \geq 0$,
- (iii) Σ daki her ayrık (A_n) dizisi için $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$

özelliklerini sağlıyorsa, bu fonksiyona ölçü denir. Eğer her $A \in \Sigma$ için $\mu(A) < \infty$ ise, μ ye sonlu ölçü adı verilir (Royden ve Fitzpatrick, 2010).

Tanım 2.11 (Ölçü Uzayı) Bir X kümesi, X in alt kümelerinin bir Σ σ -cebiri ve Σ üzerinde tanımlı bir μ ölçüsünden oluşan (X, Σ, μ) üçlüsüne bir ölçü uzayı adı verilir (Royden ve Fitzpatrick, 2010).

Tanım 2.12 (Dış Ölçü) X bir küme ve $P(X)$ de X in kuvvet kümesi olsun. $P(X)$ üzerinde tanımlı, genişletilmiş reel değerli bir μ^* fonksiyonu

$$(i) \mu^*(\emptyset) = 0,$$

$$(ii) \text{ Her } E \in P(X) \text{ için } \mu^*(E) \geq 0,$$

$$(iii) A \subset B \subset X \text{ için } \mu^*(A) \leq \mu^*(B),$$

$$(iv) \text{ Her bir } n \in \mathbb{N} \text{ için } A_n \in P(X) \text{ ise } \mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n)$$

şartlarını sağlıyorsa μ^* fonksiyonuna, X üzerinde bir dış ölçüdür denir (Royden ve Fitzpatrick, 2010).

Tanım 2.13 (I_k) , \mathbb{R} nin sınırlı ve açık alt aralıklarının bir dizisi,

$$\tau_A = \{I_k : A \subset \bigcup I_k\}$$

olsun. $P(\mathbb{R})$ üzerinde

$$m^*(A) = \inf \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} l(I_k) : (I_k) \in \tau_A \right\}$$

biçiminde tanımlanan m^* bir dış ölçüdür. Bu dış ölçüye, Lebesgue dış ölçüsü denir.

Lebesgue dış ölçüsü, \mathbb{R} nin her bir alt aralığına onun uzunluğunu karşılık getirir.

n -boyutlu \mathbb{R}^n uzayında Lebesgue dış ölçüsünü tanımlamak için

$$I = \{x : a_i \leq x_i \leq b_i, \quad i = 1, 2, \dots, n\}$$

n -boyutlu kapalı aralıkların göz önüne alalım. Bu aralıkların hacimleri

$$v(I) = \prod_{i=1}^n (b_i - a_i)$$

biçimindedir. Keyfi bir $E \subset \mathbb{R}^n$ kümesinin Lebesgue dış ölçüsü

$$m^*(E) = \inf \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} v(I_k) : E \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k, \quad I_k \text{ bir aralık} \right\}$$

ile tanımlanır. $\forall A \subset \mathbb{R}^n$ için eğer

$$m^*(A) = m^*(A \cap E) + m^*(A \cap (\mathbb{R}^n - E)) \quad (\text{Caratheodary Ölçümü})$$

ise E kümesine, Lebesgue ölçülebilirdir denir. \mathbb{R}^n üzerindeki Lebesgue dış ölçüsü, her bir aralığa onun hacmini denk getirir (Royden ve Fitzpatrick, 2010).

Tanım 2.14 (\mathbb{R}, m^*) , m^* dış ölçüsüne göre ölçülebilen \mathbb{R} nin alt kümelerinin sınıfı olmak üzere; m^* Lebesgue dış ölçüsünün $\mathfrak{M}(\mathbb{R}, m^*)$ sınıfına ve $B(\mathbb{R})$ sınıflarına olan kısıtlanmasına Lebesgue ölçüsü denir, m ile gösterilir.

Tanım 2.15 (X, Σ, μ) bir ölçü uzayı olsun. Eğer bir önerme ölçüsü sıfır olan bir küme dışında doğru ise, o önerme hemen her yerde (h.h.y.) doğrudur denir (Royden ve Fitzpatrick, 2010).

Tanım 2.16 (X, Σ, μ) bir ölçü uzayı olsun. $0 < p < \infty$ olmak üzere

$$L_p(X) = \left\{ f \in \mathfrak{M}(X, \Sigma) : \int_X |f|^p d\mu < \infty \right\}$$

kümesine p -inci kuvvetten integrallenebilen fonksiyonlar sınıfı denir. L_p uzayında bir f fonksiyonunun normu

$$\|f\|_{L_p(X)} = \begin{cases} \left(\int_X |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} & , 1 \leq p < \infty \\ \text{ess sup}_{x \in X} |f(x)| & , p = \infty \end{cases}$$

ile tanımlanır (Grafakos, 2014).

Tanım 2.17 $E \subset \mathbb{R}^n$ ölçülebilir bir küme olmak üzere, E nin Lebesgue ölçüsü

$$|E| = \int_E dx$$

biçiminde tanımlanır (Grafakos, 2014).

Tanım 2.18 K , \mathbb{R}^n Öklid uzayında herhangi bir kompakt küme ve f Lebesgue ölçülebilir bir fonksiyon olmak üzere, $1 \leq p < \infty$ için

$$\int_K |f|^p d\mu < \infty$$

ise f fonksiyonuna \mathbb{R}^n üzerinde p -inci kuvvetten lokal integrallenebilirdir denir ve $f \in L_p^{loc}(\mathbb{R}^n)$ ile gösterilir.

Teorem 2.1 Eğer $1 \leq p \leq \infty$ ise $L_p(\mathbb{R}^n) \subset L_1^{loc}(\mathbb{R}^n)$ sağlanır.

Tanım 2.19 $A \subset E^n$ olsun.

$$\chi_A = \begin{cases} 1 & , x \in A \\ 0 & , x \notin A \end{cases}$$

ile tanımlanan χ_A fonksiyonu, A nın karakteristik fonksiyonu olarak adlandırılır.

Tanım 2.20 (Hölder Eşitsizliği) $p > 1$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olmak üzere $f \in L_p, g \in L_q$ olsun. Bu durumda $fg \in L_1$ olmak üzere

$$\|fg\|_{L_1} \leq \|f\|_{L_p} \|g\|_{L_q}$$

eşitsizliği sağlanır (Sadosky, 1979).

Tanım 2.21 (Minkowski Eşitsizliği) $p \geq 1$ için eğer $f, g \in L_p$ ise $f + g \in L_p$ olmak üzere

$$\|f + g\|_{L_p} \leq \|f\|_{L_p} + \|g\|_{L_p}$$

eşitsizliği sağlanır (Sadosky, 1979).

Tanım 2.22 (Fubini) $\mu \geq 0, \nu \geq 0$ olmak üzere (X, μ) ve (Y, ν) ölçü uzayları ve $\mu \otimes \nu, X \times Y$ üzerinde tanımlı çarpım ölçüsü olsun. Bu durumda, $F(x, y)$ fonksiyonu $\mu \otimes \nu$ -integrallenebilir ise

$$\begin{aligned} \iint_{X \times Y} F(x, y) d\mu \otimes \nu &= \int_X \left(\int_Y F(x, y) d\nu \right) d\mu \\ &= \int_Y \left(\int_X F(x, y) d\mu \right) d\nu \end{aligned}$$

sağlanır. Burada, $X = Y = \mathbb{R}$ ise $\mu = \nu$ Lebesgue ölçüsüdür. Bu durumda \mathbb{R}^2 de $\mu \otimes \nu = dx_1 dx_2$ dir (Sadosky, 1979).

Tanım 2.23 Ölçülebilir, pozitif ve A kümesi üzerinde hemen her yerde sonlu olan fonksiyona, A kümesi üzerinde bir ağırlık fonksiyonu denir ve ω ile gösterilir.

Tanım 2.24 (Morrey Uzayları) $0 \leq \lambda \leq n$, $1 \leq p < \infty$, $f \in L_p^{loc}(\mathbb{R}^n)$ ve supremum \mathbb{R}^n de tüm $B(x, r)$ yuvarları üzerinden alınmak üzere,

$$\|f\|_{L_{p,\lambda}} \equiv \|f\|_{L_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)} = \sup_{x \in \mathbb{R}^n, r > 0} r^{-\frac{\lambda}{p}} \|f\|_{L_p(B(x,r))} < \infty$$

normuna sahip olan tüm fonksiyonların oluşturduğu uzay $L_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ Morrey uzayı olarak tanımlanmaktadır (Morrey, 1938).

Tanım 2.25 (Genelleştirilmiş Morrey Uzayları) $1 \leq p < \infty$, $f \in L_p^{loc}(\mathbb{R}^n)$, $\varphi; \mathbb{R}^n \times (0, \infty)$ üzerinde pozitif ölçülebilir bir fonksiyon ve supremum \mathbb{R}^n de tüm $B(x, r)$ yuvarları üzerinden alınmak üzere,

$$\|f\|_{M_{p,\varphi}} \equiv \|f\|_{M_{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)} = \sup_{x \in \mathbb{R}^n, r > 0} \frac{r^{-\frac{n}{p}}}{\varphi(x, r)} \|f\|_{L_p(B(x,r))} < \infty$$

normuna sahip olan tüm fonksiyonların oluşturduğu uzay $M_{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ genelleştirilmiş Morrey uzayı olarak tanımlanmaktadır (Guliyev vd., 1994).

Tanım 2.26 (Genelleştirilmiş Ağırlıklı Morrey Uzayları) $1 \leq p < \infty$, $\varphi; \mathbb{R}^n \times (0, \infty)$ üzerinde pozitif ölçülebilir bir fonksiyon ve ω, \mathbb{R}^n üzerinde negatif olmayan ölçülebilir bir fonksiyon olsun. Supremum \mathbb{R}^n de tüm $B(x, r)$ yuvarları üzerinden alınmak üzere,

$$\|f\|_{\mathcal{M}_\omega^{p,\varphi}} = \sup_{x \in \mathbb{R}^n, r > 0} \frac{1}{\varphi(x, r) \|\omega\|_{L_p(B(x,r))}} \|f\|_{L_{p,\omega}(B(x,r))} < \infty$$

normuna sahip olan tüm $f \in L_{p,\omega}^{loc}(\mathbb{R}^n)$ fonksiyonlarının oluşturduğu uzay $\mathcal{M}_\omega^{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ genelleştirilmiş ağırlıklı Morrey uzayı olarak tanımlanmaktadır (Guliyev, 2009).

Tanım 2.27 (Ağırlıklı Morrey Uzayları) $1 \leq p < \infty$, $0 < \kappa < 1$ ve $\omega; \mathbb{R}^n \times (0, \infty)$ üzerinde negatif olmayan ölçülebilir bir fonksiyon olsun. Bu durumda

$$\|f\|_{L_\omega^{p,\kappa}} = \sup_{x \in \mathbb{R}^n, r > 0} \omega(B(x, r))^{-\frac{\kappa}{p}} \|f\|_{L_{p,\omega}(B(x,r))} < \infty$$

normuna sahip olan tüm f fonksiyonlarının uzayı $L_\omega^{p,\kappa}(\mathbb{R}^n)$ ağırlıklı Morrey uzayı olarak tanımlanmaktadır (Komori ve Shirai, 2009).

Tanım 2.28 f, \mathbb{R}^n üzerinde lokal integrallenebilir bir fonksiyon olsun. $|B(x, r)|$, $B(x, r)$ yuvarının Lebesgue ölçüsü olmak üzere, Hardy-Littlewood maksimal fonksiyonu

$$Mf(x) = \sup_{r > 0} |B(x, r)|^{-1} \int_{B(x,r)} |f(y)| dy$$

şeklinde tanımlanır (Grafakos, 2014).

Tanım 2.29 Calderón-Zygmund tipli singüler operatör,

$$Tf(x) = \int_{\mathbb{R}^n} K(x, y)f(y)dy$$

şeklinde tanımlanır, burada $K(x, y)$ standart singüler çekirdektir, yani K fonksiyonu $\{(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n : x \neq y\}$ üzerinde sürekli ve

$$\text{her } x \neq y \text{ için } |K(x, y)| \leq C|x - y|^{-n},$$

$$\text{eğer } |x - y| > 2|y - z| \text{ ise } |(x, y) - K(x, z)| \leq C \frac{|y - z|^\sigma}{|x - y|^{n+\sigma}}, \quad \sigma > 0,$$

$$\text{eğer } |x - y| > 2|x - \eta| \text{ ise } |K(x, y) - K(\eta, y)| \leq C \frac{|x - \eta|^\sigma}{|x - y|^{n+\sigma}}, \quad \sigma > 0$$

özelliklerini sağlayan bir fonksiyondur.

Tanım 2.30 (Muckenhoupt Ağırlıkları) $1 \leq p < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ olmak üzere

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n, r > 0} \left(\frac{1}{|B(x, r)|} \int_{B(x, r)} \omega^p(y)dy \right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{1}{|B(x, r)|} \int_{B(x, r)} \omega^{-p'}(y)dy \right)^{\frac{1}{p'}} < \infty$$

ise ω ağırlık fonksiyonu $A_p(\mathbb{R}^n)$ sınıfına aittir. Her $x \in \mathbb{R}^n$ ve $r > 0$ için,

$$|B(x, r)|^{-1} \int_{B(x, r)} \omega(y)dy \leq C \operatorname{ess\,sup}_{y \in B(x, r)} \frac{1}{\omega(y)}$$

olacak şekilde pozitif bir C sabiti mevcut ise ω , $A_1(\mathbb{R}^n)$ sınıfına aittir (Muckenhoupt, 1972).

Tanım 2.31 $1 \leq p < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ olmak üzere

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n, r > 0} \left(\frac{1}{|B(x, r)|} \int_{B(x, r)} \omega_2^p(y)dy \right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{1}{|B(x, r)|} \int_{B(x, r)} \omega_1^{-p'}(y)dy \right)^{\frac{1}{p'}} < \infty$$

ise (ω_1, ω_2) ağırlık fonksiyonları, $\tilde{A}_p(\mathbb{R}^n)$ sınıfına aittir (Muckenhoupt, 1972).

Tanım 2.32 (Feffermann-Pong Ağırlıkları) $1 < p < \infty$ ve $1 < t < \infty$ olmak üzere

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n, r > 0} \left(\frac{1}{|B(x, r)|} \int_{B(x, r)} \omega_2^p(y) dy \right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{1}{|B(x, r)|} \int_{B(x, r)} \omega_1^{-p't}(y) dy \right)^{\frac{1}{p't}} < \infty$$

ise (ω_1, ω_2) ağırlık fonksiyonları, $F_p(\mathbb{R}^n)$ sınıfına aittir (Pérez, 1995).

Teorem 2.2 $1 < p < \infty$, $0 < \delta < 1$ ve $(\omega_1, \omega_2) \in \tilde{A}_p(\mathbb{R}^n)$ olsun. Bu durumda, M maksimal operatörü $L_{p, \omega_1^\delta}(\mathbb{R}^n)$ uzayından $L_{p, \omega_2^\delta}(\mathbb{R}^n)$ uzayına sınırlıdır (Neugebauer, 1983).

Teorem 2.3 $1 < p < \infty$, $0 < \delta < 1$ ve $(\omega_1, \omega_2) \in \tilde{A}_p(\mathbb{R}^n)$ olsun. Bu durumda, T singüler operatörü $L_{p, \omega_1^\delta}(\mathbb{R}^n)$ uzayından $L_{p, \omega_2^\delta}(\mathbb{R}^n)$ uzayına sınırlıdır (Fujii, 1991).

Sonuç 2.1 $1 < p < \infty$ ve $\omega \in A_p(\mathbb{R}^n)$ olsun. Bu durumda, T singüler operatörü ve M maksimal operatörü $L_{p, \omega}(\mathbb{R}^n)$ uzayında sınırlıdır (Neugebauer, 1983).

Tanım 2.33 Keskin (sharp) maksimal fonksiyonu M^\sharp

$$f_{B(x, r)}(x) = |B(x, r)|^{-1} \int_{B(x, r)} f(y) dy$$

olmak üzere,

$$M^\sharp f(x) = \sup_{r > 0} |B(x, r)|^{-1} \int_{B(x, r)} |f(y) - f_{B(x, r)}| dy$$

biçiminde tanımlanmaktadır (Hao, 2020).

Tanım 2.34 (Bounded Mean Oscillation) $BMO(\mathbb{R}^n)$ uzayı,

$$\|f\|_{BMO} = \sup_{x \in \mathbb{R}^n, r > 0} |B(x, r)|^{-1} \int_{B(x, r)} |f(y) - f_{B(x, r)}| dy < \infty$$

veya

$$\|f\|_{BMO} = \inf_C \sup_{x \in \mathbb{R}^n, r > 0} |B(x, r)|^{-1} \int_{B(x, r)} |f(y) - C| dy < \infty$$

olacak şekilde tüm lokal integrallenebilen f fonksiyonlarının uzayıdır.

Tanım 2.35 Verilen bir b ölçülebilir fonksiyonu ve $x \in \mathbb{R}^n$ için, maksimal komütatör

$$M_b(f)(x) = \sup_{x \in \mathbb{R}^n, r > 0} |B(x, r)|^{-1} \int_{B(x, r)} |b(x) - b(y)| |f(y)| dy$$

biçiminde tanımlanmaktadır (Guliyev vd., 2011).

Tanım 2.36 Verilen bir b ölçülebilir fonksiyonu ve her $x \in \mathbb{R}^n$ için, M Hardy-Littlewood maksimal komütatör

$$[M, b]f(x) = M(bf)(x) - b(x)Mf(x)$$

biçiminde tanımlanmaktadır (Ağcayazı vd., 2015).

Esasında M_b ve $[M, b]$ birbirlerinden farklı operatörlerdir. Örneğin, M_b nin pozitif ve altlineer bir operatör olmasına karşılık $[M, b]$ ne pozitif ne de altlineerdir. Maksimal operatörler ve komütatörleri birçok farklı Morrey tipli uzayda ele alınmıştır (Örneğin bkz. Di Fazio ve Ragusa, 1991; Aykol vd., 2016; Ağcayazı vd., 2018; Aykol vd., 2020).

Tanım 2.37 $1 \leq p < \infty$ olmak üzere, $BMO_{p, \omega}(\mathbb{R}^n)$ uzayı

$$\|f\|_{BMO_{p, \omega}} = \sup_{x \in \mathbb{R}^n, r > 0} \frac{\|(f(\cdot) - f_{B(x, r)})\chi_{B(x, r)}\|_{L_{p, \omega}(\mathbb{R}^n)}}{\|\omega\|_{L_p(B(x, r))}}$$

veya

$$\|f\|_{BMO_{p, \omega}} = \sup_{x \in \mathbb{R}^n, r > 0} \frac{1}{|B(x, r)|} \|(f(\cdot) - f_{B(x, r)})\chi_{B(x, r)}\|_{L_{p, \omega}(\mathbb{R}^n)} \|\omega^{-1}\|_{L_{p'}(B(x, r))} < \infty$$

olacak şekilde tüm lokal integrallenebilen f fonksiyonlarının uzayıdır.

Teorem 2.4 $1 \leq p < \infty$ ve ω Lebesgue ölçülebilir bir fonksiyon olsun. Eğer $\omega \in A_p(\mathbb{R}^n)$ ise bu durumda $\|\cdot\|_{BMO_{p, \omega}}$ ve $\|\cdot\|_{BMO}$ normları denktir (Ho, 2016).

İlerleyen bölümlerde, teoremler ispatlanırken sıradaki lemmaya ihtiyaç duyulacaktır.

Lemma 2.1 $b \in BMO(\mathbb{R}^n)$ olsun. Bu durumda C ; b , x , r ve t parametlerinden bağımsız olmak üzere, $0 < 2r < t$ için

$$|b_{B(x,r)} - b_{B(x,t)}| \leq C \|b\|_{BMO} \ln \frac{t}{r}$$

olacak şekilde bir $C > 0$ sabiti mevcuttur (Janson, 1978).

Sobolev uzayları ve türevleri için standart gösterim kullanılacaktır yani eğer

$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}_+^n$ biçiminde bir çoklu-indeks ise, bu durumda $|\alpha| = \sum_{j=1}^n \alpha_j$, $D^\alpha = \partial_{x_1}^{\alpha_1} \dots \partial_{x_n}^{\alpha_n}$ ve

$$W_p^k(\Omega) = \{v \in L_p(\Omega) : D^\alpha v \in L_p(\Omega), \forall |\alpha| \leq k\}$$

olmak üzere, genelleştirilmiş ağırlıklı Sobolev-Morrey uzayları

$$W_{p,\varphi}^k(\Omega, \omega) = \{v \in \mathcal{M}_\omega^{p,\varphi}(\Omega) : D^\alpha v \in \mathcal{M}_\omega^{p,\varphi}(\Omega), \forall |\alpha| \leq k\}$$

biçiminde ifade edilmektedir.

Γ , Laplace operatörünün standart temel çözümü olsun; ω_n , \mathbb{R}^n de birim kürenin alanı olmak üzere,

$$\Gamma(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \log |x|^{-1} & , n = 2 \\ \frac{1}{n(n-2)\omega_n} |x|^{2-n} & , n \geq 3 \end{cases}$$

şeklinde gösterilir.

Verilen $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ için \mathbb{R}^n de $-\Delta\phi = f$ denkleminin çözümünün

$$\phi(x) = \int \Gamma(x-y)f(y)dy$$

şeklinde verilen ϕ potansiyeli olduğu çok bilinen bir sonuçtur ve $1 < p < \infty$ için

$$\|\phi\|_{W_p^2(\mathbb{R}^n)} \leq C \|f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \quad (2.1)$$

eşitsizliği sağlar. Esasında bu kabul, singüler integrallerin Calderón-Zygmund teorisinin bir sonucudur (Stein, 1993).

Diğer yandan, Ω düzgün sınırlı bölgelerde Dirichlet probleminin (2.2)

$$\begin{cases} -\Delta\phi = f & , \Omega \text{ içerisinde} \\ \phi = 0 & , \partial\Omega \text{ üzerinde} \end{cases} \quad (2.2)$$

çözümüne yönelik, (2.1) dekine benzer kabuller oldukça yaygındır (Agmon vd., 1959).

$L_{\infty, \omega}(\mathbb{R}_+)$,

$$\|g\|_{L_{\infty, \omega}(\mathbb{R}_+)} = \operatorname{ess\,sup}_{t>0} v(t)g(t)$$

normuna sahip ağırlıklı L_{∞} uzayı olsun.

$$\mathbb{A} = \left\{ \varphi \in \mathfrak{M}^+(\mathbb{R}_+; \uparrow) : \lim_{t \rightarrow 0^+} \varphi(t) = 0 \right\}$$

biçiminde gösterilir.

u , \mathbb{R}_+ üzerinde sürekli ve negatif olmayan bir fonksiyon olmak üzere, \bar{S}_u supremal operatörü, $t \in (0, \infty)$ için

$$(\bar{S}_u g)(t) := \|u g\|_{L_{\infty}(0, t)}$$

biçiminde tanımlanır.

Teorem 2.5 v_1 ve v_2 fonksiyonları, her $t > 0$ için $0 < \|v_1\|_{L_{\infty}(0, t)} < \infty$ olacak şekilde negatif olmayan ölçülebilir fonksiyonlar olsun. u , \mathbb{R} üzerinde negatif olmayan sürekli bir fonksiyon olsun. Bu durumda \bar{S}_u operatörü, \mathbb{A} koniği üzerinde $L_{\infty, v_1}(\mathbb{R}_+)$ uzayından $L_{\infty, v_2}(\mathbb{R}_+)$ uzayına sınırlı olması için gerek ve yeter koşul

$$\left\| v_2 \bar{S}_u \left(\|v_1\|_{L_{\infty}(0, \cdot)}^{-1} \right) \right\|_{L_{\infty}(\mathbb{R}_+)} < \infty$$

(Burenkov vd., 2010).

Tanım 2.38 w bir ağırlık olmak üzere, $0 < t < \infty$ için ağırlıklı Hardy ve ağırlıklı eşlenik Hardy operatörleri sırasıyla,

$$H_w g(t) := \int_0^t g(s)w(s)ds, \quad H_w^* g(t) := \int_t^{\infty} g(s)w(s)ds$$

biçiminde tanımlanır (Guliyev, 2013).

Teorem 2.6 v_1, v_2 ve w fonksiyonları $(0, \infty)$ üzerinde ağırlıklar olsun ve $v_1(t)$ orijinin komşuluğunun dışında sınırlı olsun. Bazı $C > 0$ ve $(0, \infty)$ üzerinde tüm negatif olmayan ve azalmayan g fonksiyonları için

$$\operatorname{ess\,sup}_{t>0} v_2(t)H_w^*g(t) \leq C \operatorname{ess\,sup}_{t>0} v_1(t)g(t) \quad (2.3)$$

sağlanması için gerek ve yeter koşul

$$B_1 := \operatorname{ess\,sup}_{t>0} v_2(t) \int_t^\infty \frac{w(s)ds}{\operatorname{ess\,sup}_{s<\tau<\infty} v_1(\tau)} < \infty.$$

Üstelik $C = B_1$, (2.3) için en iyi sabittir (Guliyev, 2013).

Teorem 2.7 v_1, v_2 ve w fonksiyonları $(0, \infty)$ üzerinde ağırlıklar olsun ve $v_1(t)$ orijinin komşuluğunun dışında sınırlı olsun. Bazı $C > 0$ ve $(0, \infty)$ üzerinde tüm negatif olmayan ve azalmayan g fonksiyonları için

$$\operatorname{ess\,sup}_{t>0} v_2(t)H_w g(t) \leq C \operatorname{ess\,sup}_{t>0} v_1(t)g(t) \quad (2.4)$$

sağlanması için gerek ve yeter koşul

$$B_2 := \operatorname{ess\,sup}_{t>0} v_2(t) \int_0^t \frac{w(s)ds}{\operatorname{ess\,sup}_{0<\tau<s} v_1(\tau)} < \infty.$$

Üstelik $C = B_2$ (2.4) için en iyi sabittir (Guliyev, 2013a, 2013b).

3. $\mathcal{M}_{\omega}^{P,\varphi}(\mathbb{R}^N)$ GENELLEŞTİRİLMİŞ AĞIRLIKLIL MORREY UZAYLARINDA MAKSİMAL, SİNGÜLER OPERATÖRLER VE KOMÜTATÖRLERİ İÇİN İKİ AĞIRLIKLIL EŞİTSİZLİKLER

3.1 Genelleştirilmiş Ağırlıklı Morrey Uzaylarında Maksimal Operatörler için \tilde{A}_p ve F_p Ağırlıklı Eşitsizlikler

Bu bölümde genelleştirilmiş ağırlıklı Morrey uzaylarında maksimal operatörler için iki ağırlıklı eşitsizlikler ispat edilecektir. Maksimal operatörler için sırasıyla, ilk olarak \tilde{A}_p ağırlıklı eşitsizlikler ardından F_p ağırlıklı eşitsizlikler elde edilecektir. Sıradaki iki ağırlıklı lokal kabuller geçerlidir.

Teorem 3.1 $1 < p < \infty$, $0 < \delta < 1$ ve $(\omega_1, \omega_2) \in \tilde{A}_p(\mathbb{R}^n)$ olsun. Bu durumda C sabiti; f , x ve t den bağımsız olmak üzere, her $f \in L_{p,\omega_1^\delta}(\mathbb{R}^n)$ için

$$\|Mf\|_{L_{p,\omega_2^\delta}(B(x,t))} \leq C \|\omega_2^\delta\|_{L_p(B(x,t))} \sup_{r \geq t} \|f\|_{L_{p,\omega_1^\delta}(B(x,r))} \|\omega_2^\delta\|_{L_p(B(x,r))}^{-1} \quad (3.1)$$

eşitsizliği gerçekleşir (Aykol vd., 2022).

İspat. f fonksiyonunu, $t > 0$ için

$$f = f_1 + f_2, \quad f_1(y) = f(y)\chi_{B(x,2t)}(y), \quad f_2(y) = f(y)\chi_{cB(x,2t)}(y) \quad (3.2)$$

biçiminde ayırılım. Buradan

$$\begin{aligned} Mf(x) &= \sup_{r>0} |B(x,r)|^{-1} \int_{B(x,r)} |f(y)| dy \\ &\leq \sup_{r>0} |B(x,r)|^{-1} \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)| dy \\ &\leq \sup_{r>0} |B(x,r)|^{-1} \left[\int_{B(x,2t)} |f(y)| dy + \int_{cB(x,2t)} |f(y)| dy \right] \\ &\leq \sup_{r>0} |B(x,r)|^{-1} \left[\int_{B(x,2t)} |f_1(y)| dy + \int_{cB(x,2t)} |f_2(y)| dy \right] \end{aligned}$$

olduğundan,

$$\|Mf\|_{L_{p,\omega_2^\delta}(B(x,t))} \leq \|Mf_1\|_{L_{p,\omega_2^\delta}(B(x,t))} + \|Mf_2\|_{L_{p,\omega_2^\delta}(B(x,t))}$$

elde edilir. Maksimal operatörün ağırlıklı Lebesgue uzaylarındaki sınırlılığı kullanılarak; C sabiti, f fonksiyonuna bağlı olmamak koşuluyla

$$\|Mf_1\|_{L_{p,\omega_2^\delta}(B(x,t))} \leq \|Mf_1\|_{L_{p,\omega_2^\delta}(\mathbb{R}^n)} \leq C\|f_1\|_{L_{p,\omega_1^\delta}(\mathbb{R}^n)} = C\|f\|_{L_{p,\omega_1^\delta}(B(x,2t))} \quad (3.3)$$

gerçeklenir. (3.3) eşitsizliğinin sağ tarafı $\|\omega_2^\delta\|_{L_p(B(x,t))} \times \|\omega_2^\delta\|_{L_p(B(x,t))}^{-1}$ ifadesi ile çarpıldıktan sonra $r \geq t$ olmak üzere supremum alındığında

$$\begin{aligned} \|Mf_1\|_{L_{p,\omega_2^\delta}(B(x,t))} &\leq C\|\omega_2^\delta\|_{L_p(B(x,t))} \|\omega_2^\delta\|_{L_p(B(x,t))}^{-1} \|f\|_{L_{p,\omega_1^\delta}(B(x,2t))} \\ &\leq C\|\omega_2^\delta\|_{L_p(B(x,t))} \sup_{r \geq t} \|f\|_{L_{p,\omega_1^\delta}(B(x,r))} \|\omega_2^\delta\|_{L_p(B(x,r))}^{-1} \end{aligned} \quad (3.4)$$

elde edilir.

$z \in B(x,t)$ için,

$$\begin{aligned} Mf_2(z) &= \sup_{r>0} |B(z,r)|^{-1} \int_{B(z,r)} |f_2(y)| dy \\ &\leq C \sup_{r \geq 2t} |B(x,2r)|^{-1} \int_{{}^c B(x,2t) \cap B(z,r)} |f(y)| dy \\ &\leq C \sup_{r \geq t} |B(x,r)|^{-1} \int_{B(x,r)} |f(y)| dy \end{aligned}$$

bulunur. Elde edilen son eşitsizlikteki integrand $\omega_1^\delta \times (\omega_1^\delta)^{-1}$ ifadesi ile çarpılarak,

$$Mf_2(z) \leq C \sup_{r \geq t} |B(x,r)|^{-1} \int_{B(x,r)} |f(y)| \omega_1^\delta (\omega_1^\delta)^{-1} dy$$

elde edilir ve Hölder eşitsizliği yardımıyla,

$$\begin{aligned} Mf_2(z) &\leq C \sup_{r \geq t} |B(x,r)|^{-1} \|f\|_{L_{p,\omega_1^\delta}(B(x,r))} \|\chi_{B(x,r)} \omega_1^{-\delta}\|_{L_{p'}(\mathbb{R}^n)} \\ &\leq C \sup_{r \geq t} r^{-n} \|f\|_{L_{p,\omega_1^\delta}(B(x,r))} \|\omega_1^{-\delta}\|_{L_{p'}(B(x,r))} \end{aligned}$$

bulunur. $(\omega_1, \omega_2) \in \tilde{A}_p(\mathbb{R}^n)$ olduğundan,

$$Mf_2(z) \leq C \sup_{r \geq t} \|f\|_{L_{p,\omega_1^\delta}(B(x,r))} \|\omega_2^\delta\|_{L_p(B(x,r))}^{-1}$$

eşitsizliği elde edilir. Buradan, elde edilen son eşitsizliğin her iki tarafının $L_{p,\omega_2^\delta}(B(x,t))$ normu alınarak,

$$\|Mf_2\|_{L_{p,\omega_2^\delta}(B(x,t))} \leq C \|\omega_2^\delta\|_{L_p(B(x,t))} \sup_{r \geq t} \|f\|_{L_{p,\omega_1^\delta}(B(x,r))} \|\omega_2^\delta\|_{L_p(B(x,r))}^{-1} \quad (3.5)$$

bulunur. Dolayısıyla, (3.4) ve (3.5) den (3.1) elde edilir. ■

Sıradaki teorem, $(\omega_1, \omega_2) \in \widetilde{A}_p(\mathbb{R}^n)$ için maksimal operatörün genelleştirilmiş ağırlıklı Morrey uzaylarında sınırlılığının varlığını gösteren ana teoremdir.

Teorem 3.2 $1 < p < \infty$, $0 < \delta < 1$, $(\omega_1, \omega_2) \in \widetilde{A}_p(\mathbb{R}^n)$ olsun. $\varphi_1(x, r)$ ve $\varphi_2(x, r)$ fonksiyonları, C sabiti; x ve t den bağımsız olmak üzere

$$\sup_{t>r} \frac{\operatorname{ess\,inf}_{t<s<\infty} \varphi_1(x, s) \|\omega_1^\delta\|_{L_p(B(x,s))}}{\|\omega_2^\delta\|_{L_p(B(x,t))}} \leq C \varphi_2(x, r) \quad (3.6)$$

koşulunu sağlasın. Bu durumda M maksimal operatörü $\mathcal{M}_{\omega_1^\delta}^{p, \varphi_1}(\mathbb{R}^n)$ uzayından $\mathcal{M}_{\omega_2^\delta}^{p, \varphi_2}(\mathbb{R}^n)$ uzayına sınırlıdır (Aykol vd., 2022).

İspat. $f \in \mathcal{M}_{\omega_1^\delta}^{p, \varphi_1}(\mathbb{R}^n)$ olsun. (3.6) eşitsizliği yardımıyla, Tanım 2.38, Teorem 2.6, Teorem 3.1 den ve

$$g = \|f\|_{L_{p, \omega_1^\delta}(B(x,t))}, \quad \omega = \|\omega_2^\delta\|_{L_p(B(x,t))}^{-1}, \quad v_1 = \frac{1}{\varphi_1(x, t) \|\omega_1^\delta\|_{L_p(B(x,t))}}, \quad v_2 = \frac{1}{\varphi_2(x, t)}$$

seçilmek üzere maksimal operatörün, genelleştirilmiş ağırlıklı Morrey uzayı norm tanımını kullanılarak

$$\begin{aligned} \|Mf\|_{\mathcal{M}_{\omega_2^\delta}^{p, \varphi_2}(\mathbb{R}^n)} &= \sup_{x \in \mathbb{R}^n, t > 0} \frac{1}{\varphi_2(x, t) \|\omega_2^\delta\|_{L_p(B(x,t))}} \|Mf\|_{L_{p, \omega_2^\delta}(B(x,t))} \\ &\leq C \sup_{x \in \mathbb{R}^n, t > 0} \frac{\|\omega_2^\delta\|_{L_p(B(x,t))}}{\varphi_2(x, t) \|\omega_2^\delta\|_{L_p(B(x,t))}} \sup_{t > r} \|f\|_{L_{p, \omega_1^\delta}(B(x,t))} \|\omega_2^\delta\|_{L_p(B(x,t))}^{-1} \\ &= C \sup_{x \in \mathbb{R}^n, t > 0} \frac{1}{\varphi_2(x, t)} \sup_{t > r} \|f\|_{L_{p, \omega_1^\delta}(B(x,t))} \|\omega_2^\delta\|_{L_p(B(x,t))}^{-1} \\ &\leq C \sup_{x \in \mathbb{R}^n, t > 0} \frac{1}{\varphi_1(x, t) \|\omega_1^\delta\|_{L_p(B(x,t))}} \|f\|_{L_{p, \omega_1^\delta}(B(x,t))} \\ &= C \|f\|_{\mathcal{M}_{\omega_1^\delta}^{p, \varphi_1}(\mathbb{R}^n)} \end{aligned}$$

elde edilir. Sonuç olarak, M maksimal operatör için sınırlılığın varlığını gösteren

$$\|Mf\|_{\mathcal{M}_{\omega_2^\delta}^{p, \varphi_2}(\mathbb{R}^n)} \leq C \|f\|_{\mathcal{M}_{\omega_1^\delta}^{p, \varphi_1}(\mathbb{R}^n)}$$

eşitsizliği elde edilir ve böylece ispat tamamlanır. ■

Böylelikle, maksimal operatörler için \widetilde{A}_p ağırlıklı eşitsizlikler elde edilmiştir. İlerleyen kısımlarda F_p ağırlıklı eşitsizlikler elde edilmeye çalışılacaktır.

1972 yılında, B. Muckenhoupt A_p ağırlıklarını karakterize etmiş ve $\omega \in A_p$ koşulunun, M maksimal operatörün $L_{p, \omega}(\mathbb{R}^n)$ de sınırlı olması için yeterli olduğunu

göstermiştir. Bu durum, maksimal operatörün sınırlılık probleminin (ω_1, ω_2) çifti için de verilmesini mümkün kılmıştır. Ancak, 1985 yılında Garcia-Cuerva ve Rubio de Francia $(\omega_1, \omega_2) \in \tilde{A}_p(\mathbb{R}^n)$ gerek koşulunun; M maksimal operatörün $L_{p,\omega_1}(\mathbb{R}^n)$ uzayından $L_{p,\omega_2}(\mathbb{R}^n)$ uzayına sınırlı olması için yeterli olmadığını göstermişlerdir.

E. Sawyer (1982), M maksimal operatörün kendisini de içeren doğru gerek ve yeter koşulun varlığını göstermiş olup; bu kapsamdaki ilk sonuç, 1987 yılında C. Neugebauer tarafından elde edilmiştir.

$1 < p < \infty$ ve $1 < t < \infty$ için,

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n, r > 0} \left(\frac{1}{|B(x, r)|} \int_{B(x, r)} \omega_2^p(y) dy \right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{1}{|B(x, r)|} \int_{B(x, r)} \omega_1^{-p't}(y) dy \right)^{\frac{1}{p't}} < \infty \quad (3.7)$$

ise bu durumda M maksimal operatörü $L_{p,\omega_1}(\mathbb{R}^n)$ uzayından $L_{p,\omega_2}(\mathbb{R}^n)$ uzayına sınırlıdır (Pérez, 1995).

Teorem 3.3 $1 < p < \infty$ ve $(\omega_1, \omega_2) \in F_p(\mathbb{R}^n)$ olsun bu durumda M maksimal operatörü $L_{p,\omega_1}(\mathbb{R}^n)$ uzayından $L_{p,\omega_2}(\mathbb{R}^n)$ uzayına sınırlıdır. Üstelik, eğer $1 < p < \infty$ ve $\omega \in F_p(\mathbb{R}^n)$ ise bu durumda M maksimal operatörü $L_{p,\omega}(\mathbb{R}^n)$ uzayında sınırlıdır (Pérez, 1995).

Sıradaki iki ağırlıklı lokal kabuller geçerlidir.

Teorem 3.4 $1 < p < \infty$ ve $(\omega_1, \omega_2) \in F_p(\mathbb{R}^n)$ olsun. Bu durumda C sabiti; f , x ve s den bağımsız olmak üzere, her $f \in L_{p,\omega_1}(\mathbb{R}^n)$ için

$$\|Mf\|_{L_{p,\omega_2}(B(x,s))} \leq C \|\omega_2\|_{L_p(B(x,s))} \sup_{r \geq s} \|f\|_{L_{p,\omega_1}(B(x,r))} \|\omega_2\|_{L_p(B(x,r))}^{-1} \quad (3.8)$$

eşitsizliği gerçekleşir (Aykol vd., 2023).

İspat. f fonksiyonunu, $s > 0$ için

$$f = f_1 + f_2, \quad f_1(y) = f(y)\chi_{B(x,2s)}(y), \quad f_2(y) = f(y)\chi_{cB(x,2s)}(y) \quad (3.9)$$

biçiminde ayırılım. Buradan

$$\|Mf\|_{L_{p,\omega_2}(B(x,s))} \leq \|Mf_1\|_{L_{p,\omega_2}(B(x,s))} + \|Mf_2\|_{L_{p,\omega_2}(B(x,s))}$$

elde edilir. Teorem 3.3 kullanılarak C sabiti, f fonksiyonuna bağlı olmamak koşuluyla

$$\|Mf_1\|_{L_{p,\omega_2}(B(x,s))} \leq \|Mf_1\|_{L_{p,\omega_2}(\mathbb{R}^n)} \leq C\|f_1\|_{L_{p,\omega_1}(\mathbb{R}^n)} = C\|f\|_{L_{p,\omega_1}(B(x,2s))} \quad (3.10)$$

gerçeklenir. (3.10) eşitsizliğinin sağ tarafı $\|\omega_2\|_{L_p(B(x,s))} \times \|\omega_2\|_{L_p(B(x,s))}^{-1}$ ifadesi ile çarpıldıktan sonra $r \geq s$ olmak üzere supremum alındığında

$$\begin{aligned} \|Mf_1\|_{L_{p,\omega_2}(B(x,s))} &\leq C\|\omega_2\|_{L_p(B(x,s))}\|\omega_2\|_{L_p(B(x,s))}^{-1}\|f\|_{L_{p,\omega_1}(B(x,2s))} \\ &\leq C\|\omega_2\|_{L_p(B(x,s))} \sup_{r \geq s} \|f\|_{L_{p,\omega_1}(B(x,r))} \|\omega_2\|_{L_p(B(x,r))}^{-1} \end{aligned} \quad (3.11)$$

eşitsizliği elde edilir.

$z \in B(x, s)$ için,

$$\begin{aligned} Mf_2(z) &= \sup_{r>0} |B(z, r)|^{-1} \int_{B(z,r)} |f_2(y)| dy \\ &\leq C \sup_{r \geq 2s} |B(x, 2r)|^{-1} \int_{{}^c B(x, 2s) \cap B(z,r)} |f(y)| dy \\ &\leq C \sup_{r \geq s} |B(x, r)|^{-1} \int_{B(x,r)} |f(y)| dy \end{aligned}$$

bulunur. Elde edilen son eşitsizlikteki integrand $\omega_1 \times \omega_1^{-1}$ ifadesi ile çarpılarak,

$$Mf_2(z) \leq C \sup_{r \geq s} |B(x, r)|^{-1} \int_{B(x,r)} |f(y)| \omega_1 \omega_1^{-1} dy$$

elde edilir ve Hölder eşitsizliği yardımıyla ve $(\omega_1, \omega_2) \in F_p(\mathbb{R}^n)$ olduğundan,

$$\begin{aligned} Mf_2(z) &\leq C \sup_{r \geq s} |B(x, r)|^{-1} \|f\|_{L_{p,\omega_1}(B(x,r))} \|\chi_{B(x,r)} \omega_1^{-1}\|_{L_{p'(\mathbb{R}^n)}} \\ &\leq C \sup_{r \geq s} r^{-n} \|f\|_{L_{p,\omega_1}(B(x,r))} \|\omega_1^{-1}\|_{L_{p'(B(x,r))}} \\ &\leq C \sup_{r \geq s} r^{-n + \frac{n}{p't}} \|f\|_{L_{p,\omega_1}(B(x,r))} \|\omega_1^{-1}\|_{L_{p't}(B(x,r))} \\ &\leq C \sup_{r \geq s} r^{-n + \frac{n}{p't}} \|f\|_{L_{p,\omega_1}(B(x,r))} r^{\frac{n}{p} + \frac{n}{p't}} \|\omega_2\|_{L_p(B(x,r))}^{-1} \\ &\leq C \sup_{r \geq s} \|f\|_{L_{p,\omega_1}(B(x,r))} \|\omega_2\|_{L_p(B(x,r))}^{-1} \end{aligned}$$

bulunur. Buradan, elde edilen son eşitsizliğin her iki tarafının $L_{p,\omega_2}(B(x,s))$ normu alınarak,

$$\|Mf_2\|_{L_{p,\omega_2}(B(x,s))} \leq C \|\omega_2\|_{L_p(B(x,s))} \sup_{r \geq s} \|f\|_{L_{p,\omega_1}(B(x,r))} \|\omega_2\|_{L_p(B(x,r))}^{-1} \quad (3.12)$$

eşitsizliği elde edilir. Dolayısıyla, (3.11) ve (3.12) den (3.8) elde edilir. ■

Sıradaki teorem, $(\omega_1, \omega_2) \in F_p(\mathbb{R}^n)$ için maksimal operatörün genelleştirilmiş ağırlıklı Morrey uzaylarındaki sınırlılığının varlığını gösteren ana teoremdir.

Teorem 3.5 $1 < p < \infty$, $(\omega_1, \omega_2) \in F_p(\mathbb{R}^n)$ olsun. $\varphi_1(x, r)$ ve $\varphi_2(x, r)$ fonksiyonları, C sabiti; x ve s den bağımsız olmak üzere

$$\sup_{s > r} \frac{\operatorname{ess\,inf}_{s < \tau < \infty} \varphi_1(x, \tau) \|\omega_1\|_{L_p(B(x, \tau))}}{\|\omega_2\|_{L_p(B(x, s))}} \leq C \varphi_2(x, r) \quad (3.13)$$

koşulunu sağlasın. Bu durumda M maksimal operatörü $\mathcal{M}_{\omega_1}^{p,\varphi_1}(\mathbb{R}^n)$ uzayından $\mathcal{M}_{\omega_2}^{p,\varphi_2}(\mathbb{R}^n)$ uzayına sınırlıdır (Aykol vd., 2023).

İspat. $f \in \mathcal{M}_{\omega_1}^{p,\varphi_1}(\mathbb{R}^n)$ olsun. (3.13) eşitsizliğinden, Tanım 2.38, Teorem 2.6, Teorem 3.4 den ve

$$g = \|f\|_{L_{p,\omega_1}(B(x,s))}, \quad \omega = \|\omega_2\|_{L_p(B(x,s))}^{-1}, \quad v_1 = \frac{1}{\varphi_1(x, s) \|\omega_1\|_{L_p(B(x,s))}}, \quad v_2 = \frac{1}{\varphi_2(x, s)}$$

seçilmek üzere,

$$\begin{aligned} \|Mf\|_{\mathcal{M}_{\omega_2}^{p,\varphi_2}(\mathbb{R}^n)} &= \sup_{x \in \mathbb{R}^n, t > 0} \frac{1}{\varphi_2(x, s) \|\omega_2^\delta\|_{L_p(B(x,s))}} \|Mf\|_{L_{p,\omega_2^\delta}(B(x,s))} \\ &\leq C \sup_{x \in \mathbb{R}^n, r > 0} \frac{\|\omega_2\|_{L_p(B(x,s))}}{\varphi_2(x, s) \|\omega_2\|_{L_p(B(x,s))}} \sup_{s > r} \|f\|_{L_{p,\omega_1}(B(x,s))} \|\omega_2\|_{L_p(B(x,s))}^{-1} \\ &= C \sup_{x \in \mathbb{R}^n, r > 0} \frac{1}{\varphi_2(x, s)} \sup_{s > r} \|f\|_{L_{p,\omega_1}(B(x,s))} \|\omega_2\|_{L_p(B(x,s))}^{-1} \\ &\leq C \sup_{x \in \mathbb{R}^n, r > 0} \frac{1}{\varphi_1(x, s) \|\omega_1\|_{L_p(B(x,s))}} \|f\|_{L_{p,\omega_1}(B(x,s))} \\ &= C \|f\|_{\mathcal{M}_{\omega_1}^{p,\varphi_1}(\mathbb{R}^n)} \end{aligned}$$

elde edilir ve böylece ispat tamamlanır. ■

3.2 Genelleştirilmiş Ağırlıklı Morrey Uzaylarında Singüler Operatörler için \tilde{A}_p ve F_p Ağırlıklı Eşitsizlikler

Bu bölümde genelleştirilmiş ağırlıklı Morrey uzaylarında singüler operatörler için iki ağırlıklı eşitsizlikler ispat edilecektir. Singüler operatörler için sırasıyla, ilk olarak \tilde{A}_p ağırlıklı eşitsizlikler ardından F_p ağırlıklı eşitsizlikler verilecektir.

Calderón-Zygmund komütatörleri, ikinci dereceden eliptik kısmi diferensiyel denklemlerin çözümlerinin kararlılığı konusunda yapılan çalışmalarda önemli rol oynamaktadır.

Lemma 3.1 $1 < s < \infty$ ve $b \in BMO(\mathbb{R}^n)$ olsun, bu durumda her $x \in \mathbb{R}^n$ için

$$|[b, T]f|(x) \leq M(|[b, T]f|(x)) \leq C\|b\|_{BMO} \left((M|Tf|^s)^{\frac{1}{s}}(x) + (M|f|^s)^{\frac{1}{s}}(x) \right)$$

eşitsizliği sağlanacak şekilde bir $C > 0$ mevcuttur (Di Fazio ve Ragusa, 1991).

2004 yılında Lerner,

$$\int_{\mathbb{R}^n} |Tf(x)g(x)|dx \leq C \int_{\mathbb{R}^n} Mf(x)Mg(x)dx$$

eşitsizliğinin gerçekleştiğini göstermiştir.

Sıradaki iki ağırlıklı lokal kabuller geçerlidir.

Teorem 3.6 $1 < p < \infty$ ve $(\omega_1, \omega_2) \in \tilde{A}_p(\mathbb{R}^n)$ olsun, bu durumda C sabiti; f , x ve t den bağımsız olmak üzere, her $f \in L_{p, \omega_1^\delta}(\mathbb{R}^n)$ için

$$\|Tf\|_{L_{p, \omega_2^\delta}(B(x, t))} \leq C \|\omega_2^\delta\|_{L_p(B(x, t))} \int_t^\infty \frac{\|f\|_{L_{p, \omega_1^\delta}(B(x, s))}}{\|\omega_2^\delta\|_{L_p(B(x, s))}} \frac{ds}{s} \quad (3.14)$$

eşitsizliği gerçekleşir (Aykol vd., 2022).

İspat. f fonksiyonunu, $t > 0$ için

$$f = f_1 + f_2, \quad f_1(y) = f(y)\chi_{B(x, 2t)}(y), \quad f_2(y) = f(y)\chi_{B^c(x, 2t)}(y)$$

biçiminde ayıralım. Buradan

$$\begin{aligned}
Tf(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} K(x, y) |f(y)| dy \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^n} K(x, y) \left[\int_{B(x, 2t)} |f(y)| dy + \int_{{}^c B(x, 2t)} |f(y)| dy \right] \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^n} K(x, y) \left[\int_{B(x, 2t)} |f_1(y)| dy + \int_{{}^c B(x, 2t)} |f_2(y)| dy \right]
\end{aligned}$$

olduğundan,

$$\|Tf\|_{L_{p, \omega_2^\delta}(B(x, t))} \leq \|Tf_1\|_{L_{p, \omega_2^\delta}(B(x, t))} + \|Tf_2\|_{L_{p, \omega_2^\delta}(B(x, t))}$$

elde edilir. Singüler operatörün ağırlıklı Lebesgue uzaylarındaki sınırlılığını kullanarak; C sabiti, f fonksiyonuna bağlı olmamak koşuluyla

$$\|Tf_1\|_{L_{p, \omega_2^\delta}(B(x, t))} \leq \|Tf_1\|_{L_{p, \omega_2^\delta}(\mathbb{R}^n)} \leq C \|f_1\|_{L_{p, \omega_1^\delta}(\mathbb{R}^n)} = C \|f\|_{L_{p, \omega_1^\delta}(B(x, 2t))} \quad (3.15)$$

gerçeklenir. (3.15) eşitsizliğinden ve standart singüler çekirdeğin çok bilinen üç özelliğinden bir tanesi kullanılarak,

$$\begin{aligned}
|Tf_1(x)| &\leq \int_{B(x, 2t)} |K(x, y)| |f(y)| dy \\
&\leq c_1 \int_{B(x, 2t)} |x - y|^{-n} |f(y)| dy \\
&= c_1 (-n) \int_{B(x, 2t)} |f(y)| \left(\int_{|x-y|}^{\infty} s^{-n-1} ds \right) dy \\
&= c \int_{2t}^{\infty} s^{-n-1} \left(\int_{\{y \in \mathbb{R}^n : 2t \leq |x-y| \leq s\}} |f(y)| dy \right) ds \\
&\leq c \int_t^{\infty} s^{-n-1} \left(\int_{\{y \in \mathbb{R}^n : 2t \leq |x-y| \leq s\}} |f(y)| \omega_1^\delta(y) \omega_1^{-\delta}(y) dy \right) ds \\
&\leq c \int_t^{\infty} s^{-n-1} \|f\|_{L_{p, \omega_1^\delta}(B(x, s))} \|\omega_1^\delta\|_{L_{p'}(B(x, s))}^{-1} ds \\
&\leq c \int_t^{\infty} s^{-n-1} \|f\|_{L_{p, \omega_1^\delta}(B(x, s))} \|\omega_2^\delta\|_{L_p(B(x, s))}^{-1} ds
\end{aligned}$$

elde edilir, buradan elde edilen son ifadenin her iki tarafı için norm alınırsa,

$$\begin{aligned}
\|Tf_1\|_{L_{p, \omega_2^\delta}(B(x, t))} &\leq c \left\| s^{-n-1} \int_t^{\infty} \|f\|_{L_{p, \omega_1^\delta}(B(x, s))} \|\omega_2^\delta\|_{L_p(B(x, s))}^{-1} ds \right\|_{L_{p, \omega_2^\delta}(B(x, t))} \\
&\leq c \int_t^{\infty} s^{-n} \|f\|_{L_{p, \omega_1^\delta}(B(x, s))} \|\omega_2^\delta\|_{L_p(B(x, s))}^{-1} \|1\|_{L_{p, \omega_2^\delta}(B(x, t))} \frac{ds}{s} \\
&\leq C \|\omega_2^\delta\|_{L_p(B(x, t))} \int_t^{\infty} \frac{\|f\|_{L_{p, \omega_1^\delta}(B(x, s))}}{\|\omega_2^\delta\|_{L_p(B(x, s))}} \frac{ds}{s} \quad (3.16)
\end{aligned}$$

bulunur.

$\|Tf_2\|_{L_{p,\omega_2^\delta}(B(x,t))}$ normu için, $z \in B(x,t)$ olmak üzere

$$|Tf_2(z)| \leq C \int_{cB(x,2t)} \frac{|f(y)|}{|y-z|^n} dy$$

ve

$$|x-z| \leq t, \quad |z-y| \geq 2t \implies \frac{1}{2}|z-y| \leq |x-y| \leq \frac{3}{2}|z-y|$$

eşitsizliklerini ele alalım. Verilen eşitsizlikler yardımıyla,

$$|Tf_2(z)| \leq C \int_{cB(x,2t)} |x-y|^{-n} |f(y)| dy$$

yazılır. $\delta > 0$ seçilirse,

$$|Tf_2(z)| = \delta \int_{cB(x,2t)} |x-y|^{-n+\delta} |f(y)| \int_{|x-y|}^{\infty} s^{-\delta-1} ds dy$$

elde edilir, buradan Fubini Teoremi kullanılarak

$$\begin{aligned} |Tf_2(z)| &= \delta \int_{cB(x,2t)} |x-y|^{-n+\delta} |f(y)| dy \int_{|x-y|}^{\infty} s^{-\delta-1} ds \\ &\leq C \int_t^{\infty} s^{-n-1} \int_{\{y \in \mathbb{R}^n : 2t \leq |x-y| \leq s\}} |f(y)| dy ds \end{aligned}$$

elde edilir. Elde edilen eşitsizlik, $\omega_1^\delta \times \omega_1^{-\delta}$ ağırlıkları ile çarpıldıktan sonra Hölder eşitsizliği uygulanarak,

$$\begin{aligned} |Tf_2(z)| &\leq C \int_t^{\infty} s^{-n-1} \int_{\{y \in \mathbb{R}^n : 2t \leq |x-y| \leq s\}} |f(y)| \omega_1^\delta \omega_1^{-\delta} dy ds \\ &\leq C \int_t^{\infty} s^{-n-1} \|\omega_1^{-\delta} \chi_{B(x,s)}\|_{L_{p'}(\mathbb{R}^n)} \|f\|_{L_{p,\omega_1^\delta}(B(x,s))} ds \end{aligned}$$

bulunur. $(\omega_1, \omega_2) \in \tilde{A}_p(\mathbb{R}^n)$ olduğundan,

$$\begin{aligned} |Tf_2(z)| &\leq C \int_t^{\infty} s^{-n-1} \|\omega_2^{-\delta} \chi_{B(x,s)}\|_{L_p(\mathbb{B}(x,s))} \|f\|_{L_{p,\omega_1^\delta}(B(x,s))} ds \\ &= C \int_t^{\infty} \frac{\|f\|_{L_{p,\omega_1^\delta}(B(x,s))} ds}{\|\omega_2^\delta\|_{L_p(B(x,s))} s} \end{aligned} \quad (3.17)$$

bulunur ve elde edilen (3.17) eşitsizliğinin her iki tarafı için $L_{p,\omega_2^\delta}(B(x,t))$ normu alınarak,

$$\begin{aligned} \|Tf_2\|_{L_{p,\omega_2^\delta}(B(x,t))} &\leq C \|\chi_{B(x,t)}\|_{L_{p,\omega_2^\delta}(\mathbb{R}^n)} \int_t^{\infty} \frac{\|f\|_{L_{p,\omega_1^\delta}(B(x,s))} ds}{\|\omega_2^\delta\|_{L_p(B(x,s))} s} \\ &\leq C \|\omega_2^\delta\|_{L_p(B(x,t))} \int_t^{\infty} \frac{\|f\|_{L_{p,\omega_1^\delta}(B(x,s))} ds}{\|\omega_2^\delta\|_{L_p(B(x,s))} s} \end{aligned} \quad (3.18)$$

eşitsizliği elde edilir. (3.16) ve (3.18) den (3.14) elde edilir. Böylece ispat tamamlanır. ■

Sıradaki teorem, $(\omega_1, \omega_2) \in \tilde{A}_p(\mathbb{R}^n)$ için singüler operatörün genelleştirilmiş ağırlıklı Morrey uzaylarındaki sınırlılığının varlığını gösteren ana teoremdir.

Teorem 3.7 $1 < p < \infty$, $0 < \delta < 1$ ve $(\omega_1, \omega_2) \in \tilde{A}_p(\mathbb{R}^n)$ olsun, $\varphi_1(x, r)$ ve $\varphi_2(x, r)$ fonksiyonları, C sabiti; x ve t den bağımsız olmak üzere

$$\int_t^\infty \frac{\operatorname{ess\,inf}_{t < s < \infty} \varphi_1(x, s) \|\omega_1^\delta\|_{L_p(B(x, s))}}{\|\omega_2^\delta\|_{L_p(B(x, t))}} \frac{dt}{t} \leq C \varphi_2(x, r) \quad (3.19)$$

koşulunu sağlasın. Bu durumda T operatörü $\mathcal{M}_{\omega_1^\delta}^{p, \varphi_1}(\mathbb{R}^n)$ uzayından $\mathcal{M}_{\omega_2^\delta}^{p, \varphi_2}(\mathbb{R}^n)$ uzayına sınırlıdır (Aykol vd., 2022).

İspat. $f \in \mathcal{M}_{\omega_1^\delta}^{p, \varphi_1}(\mathbb{R}^n)$ olsun. (3.19) eşitsizliğinden, Tanım 2.38, Teorem 2.6, Teorem 3.6 dan ve

$$g = \|f\|_{L_{p, \omega_1^\delta}(B(x, t))}, \quad \omega = \frac{1}{t} \|\omega_2^\delta\|_{L_p(B(x, t))}^{-1}, \quad v_1 = \frac{1}{\varphi_1(x, t) \|\omega_1^\delta\|_{L_p(B(x, t))}}, \quad v_2 = \frac{1}{\varphi_2(x, t)}$$

seçilmek üzere, singüler operatörün genelleştirilmiş ağırlıklı Morrey uzayı norm tanımından yararlanılarak,

$$\begin{aligned} \|Tf\|_{\mathcal{M}_{\omega_2^\delta}^{p, \varphi_2}(\mathbb{R}^n)} &= \sup_{x \in \mathbb{R}^n, t > 0} \frac{1}{\varphi_2(x, t) \|\omega_2^\delta\|_{L_p(B(x, t))}} \|Tf\|_{L_{p, \omega_2^\delta}(B(x, t))} \\ &\leq C \sup_{x \in \mathbb{R}^n, t > 0} \frac{\|\omega_2^\delta\|_{L_p(B(x, t))}}{\varphi_2(x, t) \|\omega_2^\delta\|_{L_p(B(x, t))}} \int_s^\infty \frac{\|f\|_{L_{p, \omega_1^\delta}(B(x, t))}}{\|\omega_2^\delta\|_{L_p(B(x, t))}} \frac{dt}{t} \\ &= C \sup_{x \in \mathbb{R}^n, t > 0} \frac{1}{\varphi_2(x, t)} \int_s^\infty \frac{\|f\|_{L_{p, \omega_1^\delta}(B(x, t))}}{\|\omega_2^\delta\|_{L_p(B(x, t))}} \frac{dt}{t} \\ &\leq C \sup_{x \in \mathbb{R}^n, t > 0} \frac{1}{\varphi_1(x, t) \|\omega_1^\delta\|_{L_p(B(x, t))}} \|f\|_{L_{p, \omega_1^\delta}(B(x, t))} \\ &= C \|f\|_{\mathcal{M}_{\omega_1^\delta}^{p, \varphi_1}(\mathbb{R}^n)} \end{aligned}$$

elde edilir. Sonuç olarak, T singüler operatörün sınırlılığı gösteren

$$\|Tf\|_{\mathcal{M}_{\omega_2^\delta}^{p, \varphi_2}(\mathbb{R}^n)} \leq C \|f\|_{\mathcal{M}_{\omega_1^\delta}^{p, \varphi_1}(\mathbb{R}^n)}$$

eşitsizliği elde edilir ve böylece ispat tamamlanır. ■

Böylelikle, singüler operatörler için \tilde{A}_p ağırlıklı eşitsizlikler elde edilmiştir. Şimdi de F_p ağırlıklı eşitsizlikler elde edilmeye çalışılacaktır.

Teorem 3.8 $1 < p < \infty$ ve $(\omega_1, \omega_2) \in F_p(\mathbb{R}^n)$ olsun, bu durumda T singüler operatörü $L_{p,\omega_1}(\mathbb{R}^n)$ uzayından $L_{p,\omega_2}(\mathbb{R}^n)$ uzayına sınırlıdır.

İspat. Teorem 3.3 ve

$$\int_{\mathbb{R}^n} |Tf(x)g(x)|dx \leq C \int_{\mathbb{R}^n} Mf(x)Mg(x)dx$$

eşitsizliği kullanılarak, T operatörünün $L_{p,\omega}(\mathbb{R}^n)$ uzayında sınırlı olduğu elde edilir. T^* operatörünün sınırlılığı, Teorem 3.3 ve Teorem 3.8 den

$$T^* f(x) \leq c[M(Tf)(x) + Mf(x)]$$

eşitsizliği kullanılarak elde edilir. ■

Sonuç 3.1 $1 < p < \infty$ ve $\omega \in F_p(\mathbb{R}^n)$ olsun, bu durumda T integral operatörü $L_{p,\omega}(\mathbb{R}^n)$ uzayında sınırlıdır.

Sıradaki iki ağırlıklı lokal kabuller geçerlidir.

Teorem 3.9 $1 < p < \infty$ ve $(\omega_1, \omega_2) \in F_p(\mathbb{R}^n)$ olsun. Bu durumda C sabiti; x ve r den bağımsız olmak üzere, her $f \in L_{p,\omega_1}(\mathbb{R}^n)$ için

$$\|Tf\|_{L_{p,\omega_2}(B(x,r))} \leq C\|\omega_2\|_{L_p(B(x,r))} \int_r^\infty \frac{\|f\|_{L_{p,\omega}(B(x,s))}}{\|\omega_2\|_{L_p(B(x,s))}} \frac{ds}{s} \quad (3.20)$$

gerçeklenir (Aykol vd., 2023).

İspat. f fonksiyonunu, $t > 0$ için

$$f = f_1 + f_2, \quad f_1(y) = f(y)\chi_{B(x,2r)}(y), \quad f_2(y) = f(y)\chi_{B^c(x,2r)}(y)$$

şeklinde ayırılım. Buradan,

$$\|Tf\|_{L_{p,\omega_2}(B(x,r))} \leq \|Tf_1\|_{L_{p,\omega_2}(B(x,r))} + \|Tf_2\|_{L_{p,\omega_2}(B(x,r))}$$

elde edilir. Singüler operatörün ağırlıklı Lebesgue uzaylarındaki sınırlılığı kullanılarak; C sabiti, f fonksiyonuna bağlı olmamak koşuluyla

$$\|Tf_1\|_{L_{p,\omega_2}(B(x,r))} \leq \|Tf_1\|_{L_{p,\omega_2}(\mathbb{R}^n)} \leq C\|f_1\|_{L_{p,\omega_1}(\mathbb{R}^n)} = C\|f\|_{L_{p,\omega_1}(B(x,2r))} \quad (3.21)$$

gerçeklenir. (3.21) den yararlanılarak, $\|f\|_{L_{p,\omega_1}(B(x,2r))}$ normunun, r ye göre azalmayan olmasından dolayı

$$\|Tf_1\|_{L_{p,\omega_2}(B(x,r))} \leq C \|\omega_2\|_{L_p(B(x,r))} \int_r^\infty \frac{\|f\|_{L_{p,\omega}(B(x,s))}}{\|\omega_2\|_{L_p(B(x,s))}} \frac{ds}{s} \quad (3.22)$$

bulunur.

$\|Tf_2\|_{L_{p,\omega_2}(B(x,r))}$ normu için, $z \in B(x, r)$ olmak üzere

$$|Tf_2(z)| \leq C \int_{eB(x,2r)} \frac{|f(y)|}{|y-z|^n} dy$$

ve

$$|x-z| \leq r, \quad |z-y| \geq 2r \implies \frac{1}{2}|z-y| \leq |x-y| \leq \frac{3}{2}|z-y|$$

eşitsizliklerini ele alalım. Verilen eşitsizlikler yardımıyla,

$$|Tf_2(z)| \leq C \int_{eB(x,2r)} |x-y|^{-n} |f(y)| dy$$

elde edilir. $\delta > 0$ seçilirse, her $z \in B(x, r)$ için

$$\begin{aligned} |Tf_2(z)| &\leq \delta \int_{eB(x,r)} |x-y|^{-n+\delta} |f(y)| dy \int_{|x-y|}^\infty s^{-\delta-1} ds \\ &\leq C \int_r^\infty s^{-n-1} \int_{\{y \in \mathbb{R}^n : 2r \leq |x-y| \leq s\}} |f(y)| dy ds \\ &\leq C \int_r^\infty s^{-n-1} \|\omega_1^{-1} \chi_{B(x,s)}\|_{L_{p'}(\mathbb{R}^n)} \|f\|_{L_{p,\omega_1}(B(x,s))} ds \\ &\leq C \int_r^\infty s^{-n+\frac{n}{p'}t-1} \|\omega_1^{-1}\|_{L_{p't}(B(x,s))} \|f\|_{L_{p,\omega_1}(B(x,s))} ds \end{aligned}$$

bulunur. Böylece,

$$\int_{eB(x,r)} |x-y|^{-n} |f(y)| dy \leq C \int_r^\infty s^{-n+\frac{n}{p'}t-1} \|\omega_1^{-1}\|_{L_{p't}(B(x,s))} \|f\|_{L_{p,\omega_1}(B(x,s))} ds \quad (3.23)$$

yazılır ve elde edilen (3.23) eşitsizliğinin her iki tarafı için $L_{p,\omega_2}(B(x, r))$ normu alınarak,

$$\begin{aligned} \|Tf_2\|_{L_{p,\omega_2}(B(x,r))} &\leq C \|\chi_{B(x,r)}\|_{L_{p,\omega_2}(\mathbb{R}^n)} \int_r^\infty s^{-n+\frac{n}{p'}t-1} \|\omega_1^{-1}\|_{L_{p't}(B(x,s))} \|f\|_{L_{p,\omega_1}(B(x,s))} ds \\ &\leq C \|\omega_2\|_{L_p(B(x,r))} \int_r^\infty \frac{\|f\|_{L_{p,\omega_1}(B(x,s))}}{\|\omega_2\|_{L_p(B(x,s))}} \frac{ds}{s} \end{aligned} \quad (3.24)$$

bulunur. (3.22) ve (3.24) den (3.20) elde edilir. Böylece ispat tamamlanır. \blacksquare

Sıradaki teorem, $(\omega_1, \omega_2) \in F_p(\mathbb{R}^n)$ için singüler operatörün, genelleştirilmiş ağırlıklı Morrey uzaylarındaki sınırlılığının varlığını gösteren ana teoremdir.

Teorem 3.10 $1 < p < \infty$, $(\omega_1, \omega_2) \in F_p(\mathbb{R}^n)$ olsun. $\varphi_1(x, r)$ ve $\varphi_2(x, r)$ fonksiyonları, C sabiti; $x \in \mathbb{R}^n$ ve r den bağımsız olmak üzere

$$\int_r^\infty \frac{\operatorname{ess\,inf}_{\tau < s < \infty} \varphi_1(x, s) \|\omega_1\|_{L_p(B(x, s))}}{\|\omega_2\|_{L_p(B(x, \tau))}} \frac{d\tau}{\tau} \leq C \varphi_2(x, r) \quad (3.25)$$

koşulunu sağlasın. Bu durumda T operatörü $\mathcal{M}_{\omega_1}^{p, \varphi_1}(\mathbb{R}^n)$ uzayından $\mathcal{M}_{\omega_2}^{p, \varphi_2}(\mathbb{R}^n)$ uzayına sınırlıdır (Aykol vd., 2023).

İspat. $f \in \mathcal{M}_{\omega_1}^{p, \varphi_1}(\mathbb{R}^n)$ olsun. (3.25) eşitsizliğinden, Tanım 2.38, Teorem 2.6, Teorem 3.9 dan ve

$$g = \|f\|_{L_{p, \omega_1^\delta}(B(x, r))}, \quad \omega = \frac{1}{r} \|\omega_2\|_{L_p(B(x, r))}^{-1}, \quad v_1 = \frac{1}{\varphi_1(x, r) \|\omega_1\|_{L_p(B(x, r))}}, \quad v_2 = \frac{1}{\varphi_2(x, r)}$$

seçilmek üzere singüler operatörün genelleştirilmiş ağırlıklı Morrey uzayı norm tanımından yararlanılarak,

$$\begin{aligned} \|Tf\|_{\mathcal{M}_{\omega_2}^{p, \varphi_2}(\mathbb{R}^n)} &= \sup_{x \in \mathbb{R}^n, r > 0} \frac{1}{\varphi_2(x, r) \|\omega_2\|_{L_p(B(x, r))}} \|Tf\|_{L_{p, \omega_2}(B(x, r))} \\ &\leq C \sup_{x \in \mathbb{R}^n, r > 0} \frac{\|\omega_2\|_{L_p(B(x, r))}}{\varphi_2(x, r) \|\omega_2\|_{L_p(B(x, r))}} \int_s^\infty \frac{\|f\|_{L_{p, \omega_1}(B(x, r))}}{\|\omega_2\|_{L_p(B(x, r))}} \frac{dr}{r} \\ &= C \sup_{x \in \mathbb{R}^n, r > 0} \frac{1}{\varphi_2(x, r)} \int_r^\infty \frac{\|f\|_{L_{p, \omega_1}(B(x, r))}}{\|\omega_2\|_{L_p(B(x, r))}} \frac{dr}{r} \\ &\leq C \sup_{x \in \mathbb{R}^n, r > 0} \frac{1}{\varphi_1(x, r) \|\omega_1\|_{L_p(B(x, r))}} \|f\|_{L_{p, \omega_1}(B(x, r))} \\ &= C \|f\|_{\mathcal{M}_{\omega_1}^{p, \varphi_1}(\mathbb{R}^n)} \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Böylece ispat tamamlanır. ■

3.3 Genelleştirilmiş Ağırlıklı Morrey Uzaylarında Maksimal Komütatörler için \tilde{A}_p Ağırlıklı Eşitsizlikler

Bu bölümde genelleştirilmiş ağırlıklı Morrey uzaylarında maksimal komütatörler için \tilde{A}_p ağırlıklı eşitsizlikler elde edilecektir. Sıradaki iki ağırlıklı lokal kabuller geçerlidir.

Tanım 3.1 Her $x \in \mathbb{R}^n$ ve verilen bir b ölçülebilir fonksiyonu için maksimal komütatör

$$M_b(f)(x) = \sup_{x \in \mathbb{R}^n, r > 0} |B(x, r)|^{-1} \int_{B(x, r)} |b(x) - b(y)| |f(y)| dy$$

biçiminde tanımlanmaktadır (Guliyev vd., 2011).

Tanım 3.2 Her $x \in \mathbb{R}^n$ ve verilen bir b ölçülebilir fonksiyonu için, M Hardy-Littlewood maksimal komütatörü

$$[M, b]f(x) = M(bf)(x) - b(x)Mf(x)$$

biçiminde tanımlanmaktadır (Ağcayazı vd., 2015).

Lemma 3.2 b negatif olmayan herhangi bir lokal integrallenebilir fonksiyon olsun. Bu durumda her $x \in \mathbb{R}^n$ ve $f \in L_1^{loc}(\mathbb{R}^n)$ için,

$$|[M, b]f(x)| \leq M_b(f)(x)$$

eşitsizliği gerçekleşir (Ağcayazı vd., 2015).

Teorem 3.11 X, \mathbb{R}^n üzerinde tanımlı ölçülebilir fonksiyonların Banach uzayı, M ; X üzerinde sınırlı ve $b \in BMO(\mathbb{R}^n)$ olsun. Bu durumda M_b operatörü, X üzerinde sınırlıdır ve C sabiti f den bağımsız olmak üzere,

$$\|M_b f\|_X \leq C \|b\|_{BMO} \|f\|_X$$

gerçeklenir (Ağcayazı vd., 2015).

Sonuç 3.2 $b \in BMO(\mathbb{R}^n)$ olsun. Her $x \in \mathbb{R}^n$ ve $f \in L_1^{loc}(\mathbb{R}^n)$ için,

$$M_b f(x) \leq C \|b\|_{BMO} M^2 f(x)$$

olacak şekilde bir $C > 0$ mevcuttur (Ağcayazı vd., 2015).

Sonuç 3.3 $1 \leq p < \infty$, $b \in BMO(\mathbb{R}^n)$ ve $\omega \in A_p(\mathbb{R}^n)$ olsun, bu durumda M_b operatörü $L_{p, \omega}(\mathbb{R}^n)$ uzayında sınırlıdır.

Teorem 3.12 $1 < p < \infty$, $0 < \delta < 1$, $b \in BMO(\mathbb{R}^n)$ ve $(\omega_1, \omega_2) \in \tilde{A}_p(\mathbb{R}^n)$, $\omega_1 \in A_p(\mathbb{R}^n)$ olsun, bu durumda M_b operatörü $L_{p, \omega_1^\delta}(\mathbb{R}^n)$ uzayından $L_{p, \omega_2^\delta}(\mathbb{R}^n)$ uzayına sınırlıdır.

İspat. $f \in L_{p,\omega_1^\delta}(\mathbb{R}^n)$, $b \in BMO(\mathbb{R}^n)$ olsun. $M_b f(x) \leq C\|b\|_{BMO} M^2 f(x)$ eşitsizliği gerçekleşir. Eşitsizliğin her iki tarafı için norm alındıktan sonra,

$$\|M_b f\|_{L_{p,\omega_2^\delta}(\mathbb{R}^n)} \leq C\|b\|_{BMO} \|M^2 f\|_{L_{p,\omega_2^\delta}(\mathbb{R}^n)}$$

elde edilir. Sonuç 3.3 den ve $(\omega_1, \omega_2) \in \tilde{A}_p(\mathbb{R}^n)$ olduğunda M maksimal operatörün ağırlıklı Lebesgue uzaylarındaki sınırlılığından yararlanılarak

$$\|M_b f\|_{L_{p,\omega_2^\delta}(\mathbb{R}^n)} \leq C_1\|b\|_{BMO} \|M f\|_{L_{p,\omega_1^\delta}(\mathbb{R}^n)}$$

eşitsizliği elde edilir. Ayrıca $\omega_1 \in A_p(\mathbb{R}^n)$ olduğundan,

$$\|M_b f\|_{L_{p,\omega_2^\delta}(\mathbb{R}^n)} \leq C_2\|b\|_{BMO} \|f\|_{L_{p,\omega_1^\delta}(\mathbb{R}^n)}$$

gerçeklenir. Böylece ispat tamamlanır. ■

Teorem 3.13 $1 < p < \infty$, $0 < \delta < 1$, $b \in BMO(\mathbb{R}^n)$ ve $(\omega_1, \omega_2) \in \tilde{A}_p(\mathbb{R}^n)$, $\omega_1, \omega_2 \in A_p(\mathbb{R}^n)$ olsun, bu durumda C sabiti; f , x ve t den bağımsız olmak üzere, her $f \in L_{p,\omega_1^\delta}(\mathbb{R}^n)$ için

$$\|M_b f\|_{L_{p,\omega_2^\delta}(B(x,t))} \leq C\|b\|_{BMO} \|\omega_2^\delta\|_{L_p(B(x,t))} \sup_{r \geq t} \left(1 + \ln \frac{r}{t}\right) \frac{\|f\|_{L_{p,\omega_1^\delta}(B(x,r))}}{\|\omega_2^\delta\|_{L_p(B(x,r))}} \quad (3.26)$$

gerçeklenir (Aykol vd., 2022).

İspat. f fonksiyonunu, $t > 0$ için

$$f = f_1 + f_2, \quad f_1(y) = f(y)\chi_{B(x,2t)}(y), \quad f_2(y) = f(y)\chi_{B^c(x,2t)}(y)$$

şeklinde ayrılım buradan,

$$\|M_b f\|_{L_{p,\omega_2^\delta}(B(x,t))} \leq \|M_b f_1\|_{L_{p,\omega_2^\delta}(B(x,t))} + \|M_b f_2\|_{L_{p,\omega_2^\delta}(B(x,t))}$$

elde edilir. Teorem 3.12 den C sabiti, f den bağımsız olmak üzere

$$\|M_b f_1\|_{L_{p,\omega_2^\delta}(B(x,t))} \leq \|M_b f_1\|_{L_{p,\omega_2^\delta}(\mathbb{R}^n)} \leq C\|b\|_{BMO} \|f_1\|_{L_{p,\omega_1^\delta}(\mathbb{R}^n)} = C\|b\|_{BMO} \|f\|_{L_{p,\omega_1^\delta}(B(x,2t))} \quad (3.27)$$

(3.27) eşitsizliğinin sağ tarafı $\|\omega_2^\delta\|_{L_p(B(x,t))} \times \|\omega_2^\delta\|_{L_p(B(x,t))}^{-1}$ ifadesi ile çarpılarak

$$\|M_b f_1\|_{L_{p,\omega_2^\delta}(B(x,t))} \leq C\|b\|_{BMO} \|\omega_2^\delta\|_{L_p(B(x,t))} \|\omega_2^\delta\|_{L_p(B(x,t))}^{-1} \|f\|_{L_{p,\omega_1^\delta}(B(x,2t))}$$

elde edilir. $\|f\|_{L_{p,\omega_1^\delta}(B(x,2t))}$ normu t ye göre azalmayan olduğundan, $r \geq t$ olmak üzere supremum alınırsa

$$\|M_b f_1\|_{L_{p,\omega_2^\delta}(B(x,t))} \leq C \|b\|_{BMO} \|\omega_2^\delta\|_{L_p(B(x,t))} \sup_{r \geq t} \left(1 + \ln \frac{r}{t}\right) \frac{\|f\|_{L_{p,\omega_1^\delta}(B(x,r))}}{\|\omega_2^\delta\|_{L_p(B(x,r))}} \quad (3.28)$$

gerçeklenir.

$z \in B(x, t)$ için,

$$\begin{aligned} M_b f_2(z) &= \sup_{r>0} |B(z, r)|^{-1} \int_{B(z,r)} |b(z) - b(y)| |f_2(y)| dy \\ &\leq \sup_{r \geq 2t} |B(x, 2r)|^{-1} \int_{B(x,2r) \cap B(z,r)} |b(z) - b(y)| |f(y)| dy \\ &\leq \sup_{r \geq t} |B(x, r)|^{-1} \int_{B(x,r)} |b(z) - b(y)| |f(y)| dy \\ &= \sup_{r \geq t} |B(x, r)|^{-1} \int_{B(x,r)} |b(z) - b_{B(x,r)} - (b(y) - b_{B(x,r)})| |f(y)| dy \\ &\leq \sup_{r \geq t} |B(x, r)|^{-1} \int_{B(x,r)} |b(y) - b_{B(x,r)}| |f(y)| dy \\ &\quad + \sup_{r \geq t} |B(x, r)|^{-1} \int_{B(x,r)} |b(z) - b_{B(x,r)}| |f(y)| dy \\ &= I_1 + I_2 \end{aligned}$$

bulunur. Öncelikle,

$$I_1 = \sup_{r \geq t} |B(x, r)|^{-1} \int_{B(x,r)} |b(y) - b_{B(x,r)}| |f(y)| dy$$

integrali için yukarıdaki eşitlikteki integrand $\omega_1^\delta \times (\omega_1^\delta)^{-1}$ ifadesi ile çarpılarak

$$I_1 = \sup_{r \geq t} |B(x, r)|^{-1} \int_{B(x,r)} |b(y) - b_{B(x,r)}| (\omega_1^\delta)^{-1} |f(y)| \omega_1^\delta dy$$

elde edilir.

Teorem 2.4 ve Hölder eşitsizliği yardımıyla,

$$I_1 \leq C \sup_{r \geq t} |B(x, r)|^{-1} \|f\|_{L_{p,\omega_1^\delta}(B(x,r))} \|b(\cdot) - b_{B(x,r)}\|_{L_{p',\omega_1^{-\delta}}(B(x,r))} \quad (3.29)$$

elde edilir.

Buradan,

$$\|b\|_{BMO} = \sup_{x \in \mathbb{R}^n, r > 0} \frac{\|b(\cdot) - b_{B(x,r)}\|_{L_{p',\omega_1^{-\delta}}(B(x,r))}}{\|\omega_1^\delta\|_{L_p(B(x,r))}^{-1}}$$

olduğu bilindiğinden; (3.26) da istenilen $\|b\|_{BMO}$ ifadesini elde edebilmek amacıyla, (3.29) eşitsizliğinin sağ tarafı $\|\omega_1^\delta\|_{L_{p'}(B(x,r))}^{-1} \times \|\omega_1^\delta\|_{L_{p'}(B(x,r))}^{-1}$ ile çarpılır ve sonrasında $r > 0$ ve $x \in \mathbb{R}^n$ olmak üzere supremum alınırsa

$$\begin{aligned} I_1 &\leq C \sup_{r \geq t} |B(x, r)|^{-1} \|f\|_{L_{p, \omega_1^\delta}(B(x, r))} \sup_{x \in \mathbb{R}^n, r > 0} \frac{\|b(\cdot) - b_{B(x, r)}\|_{L_{p', \omega_1^{-\delta}}(B(x, r))}}{\|\omega_1^\delta\|_{L_{p'}(B(x, r))}^{-1}} \|\omega_1^\delta\|_{L_{p'}(B(x, r))}^{-1} \\ &\leq C \|b\|_{BMO} \sup_{r \geq t} r^{-n} \|f\|_{L_{p, \omega_1^\delta}(B(x, r))} \|\omega_1^\delta\|_{L_{p'}(B(x, r))}^{-1} \end{aligned}$$

elde edilir.

Şimdi I_2 integralini hesaplayalım:

$$\begin{aligned} I_2 &= \sup_{r \geq t} |B(x, r)|^{-1} \int_{B(x, r)} |b(z) - b_{B(x, r)}| |f(y)| dy \\ &= \sup_{r \geq t} |B(x, r)|^{-1} \int_{B(x, r)} |b(z) - b_{B(x, t)} - (b_{B(x, r)} - b_{B(x, t)})| |f(y)| dy \\ &\leq \sup_{r \geq t} |B(x, r)|^{-1} \int_{B(x, r)} |b(z) - b_{B(x, t)}| |f(y)| dy \\ &\quad + \sup_{r \geq t} |B(x, r)|^{-1} \int_{B(x, r)} |b_{B(x, t)} - b_{B(x, r)}| |f(y)| dy \end{aligned}$$

bulunur.

Yukarıdaki son eşitsizlikte elde edilen supremum içeren ifadeleri ayrı ayrı ele alalım.

İlk ifade için

$$\begin{aligned} |b(z) - b_{B(x, t)}| &= \left| b(z) - B(x, t)^{-1} \int_{B(x, t)} b(y) dy \right| \\ &= \left| b(z) + B(x, t)^{-1} \left[\int_{B(x, t)} (b(z) - b(y) - b(z)) dy \right] \right| \\ &= \left| b(z) + B(x, t)^{-1} \left[\int_{B(x, t)} (b(z) - b(y)) dy - b(z) \int_{B(x, t)} dy \right] \right| \\ &= \left| b(z) + B(x, t)^{-1} \int_{B(x, t)} (b(z) - b(y)) dy - |B(x, t)|^{-1} |B(x, t)| b(z) \right| \\ &\leq B(x, t)^{-1} \int_{B(x, t)} |b(z) - b(y)| dy \\ &\leq \sup_{t > 0} B(x, t)^{-1} \int_{B(x, t)} |b(z) - b(y)| dy \\ &= M_b \chi_{B(x, t)}(z) \end{aligned}$$

olduğundan,

$$\begin{aligned}
& \sup_{r \geq t} |B(x, r)|^{-1} \int_{B(x, r)} |b(z) - b_{B(x, t)}| |f(y)| dy \\
& \leq \sup_{r \geq t} |B(x, r)|^{-1} \int_{B(x, r)} M_b \chi_{B(x, t)}(z) |f(y)| \omega_1^\delta \omega_1^{-\delta} dy \\
& \leq C M_b \chi_{B(x, t)}(z) \int_{B(x, r)} \sup_{r \geq t} |B(x, r)|^{-1} \|f\|_{L_{p, \omega_1^\delta}(B(x, r))} \|\omega_1^\delta\|_{L_{p'}(B(x, r))}^{-1} dy \\
& \leq C M_b \chi_{B(x, t)}(z) \sup_{r \geq t} r^{-n} \|f\|_{L_{p, \omega_1^\delta}(B(x, r))} \|\omega_1^\delta\|_{L_{p'}(B(x, r))}^{-1} \quad (*)
\end{aligned}$$

elde edilir. İkinci ifade için ise Lemma 2.1 kullanılarak

$$\begin{aligned}
\sup_{r \geq t} |B(x, r)|^{-1} \int_{B(x, r)} |b_{B(x, t)} - b_{B(x, r)}| |f(y)| dy & \leq C \sup_{r \geq t} |B(x, r)|^{-1} \|b\|_{BMO} \\
& \times \ln \frac{r}{t} \int_{B(x, r)} |f(y)| dy \\
& \leq C \sup_{r \geq t} |B(x, r)|^{-1} \|b\|_{BMO} \\
& \times \ln \frac{r}{t} \int_{B(x, r)} |f(y)| \omega_1^\delta \omega_1^{-\delta} dy \\
& \leq C \|b\|_{BMO} \sup_{r \geq t} r^{-n} \ln \frac{r}{t} \\
& \times \|f\|_{L_{p, \omega_1^\delta}(B(x, r))} \|\omega_1^\delta\|_{L_{p'}(B(x, r))}^{-1} \quad (**).
\end{aligned}$$

bulunur. Sonuç olarak, elde edilen (*) ve (**) ifadeleri birleştirilerek I_2 için,

$$\begin{aligned}
I_2 & \leq C M_b \chi_{B(x, t)}(z) \sup_{r \geq t} r^{-n} \|f\|_{L_{p, \omega_1^\delta}(B(x, r))} \|\omega_1^\delta\|_{L_{p'}(B(x, r))}^{-1} \\
& + C \|b\|_{BMO} \sup_{r \geq t} r^{-n} \ln \frac{r}{t} \|f\|_{L_{p, \omega_1^\delta}(B(x, r))} \|\omega_1^\delta\|_{L_{p'}(B(x, r))}^{-1} \quad (3.30)
\end{aligned}$$

bulunur. Böylelikle,

$$\begin{aligned}
M_b f_2(z) & \leq I_1 + I_2 \\
& \leq C \|b\|_{BMO} \sup_{r \geq t} r^{-n} \|f\|_{L_{p, \omega_1^\delta}(B(x, r))} \|\omega_1^\delta\|_{L_{p'}(B(x, r))}^{-1} \\
& + C M_b \chi_{B(x, t)}(z) \sup_{r \geq t} r^{-n} \|f\|_{L_{p, \omega_1^\delta}(B(x, r))} \|\omega_1^\delta\|_{L_{p'}(B(x, r))}^{-1} \\
& + C \|b\|_{BMO} \sup_{r \geq t} r^{-n} \ln \frac{r}{t} \|f\|_{L_{p, \omega_1^\delta}(B(x, r))} \|\omega_1^\delta\|_{L_{p'}(B(x, r))}^{-1}
\end{aligned}$$

gerçeklendiği gösterilmiştir. Teorem 3.12 yardımıyla,

$$\begin{aligned}
\|M_b f_2(z)\|_{L_{p,\omega_2^\delta}(B(x,t))} &\leq \|I_1 + I_2\|_{L_{p,\omega_2}(\mathbb{R}^n)} \\
&\leq \|I_1\|_{L_{p,\omega_2^\delta}(B(x,t))} + \|I_2\|_{L_{p,\omega_2^\delta}(B(x,t))} \\
&\leq \left\| C\|b\|_{BMO} \sup_{r \geq t} r^{-n} \|f\|_{L_{p,\omega_1^\delta}(B(x,r))} \|\omega_1^\delta\|_{L_{p_1}(B(x,r))}^{-1} \right\|_{L_{p,\omega_2^\delta}(B(x,t))} \\
&\quad + \left\| C M_b \chi_{B(x,t)} \sup_{r \geq t} r^{-n} \|f\|_{L_{p,\omega_1^\delta}(B(x,r))} \|\omega_1^\delta\|_{L_{p_1}(B(x,r))}^{-1} \right\|_{L_{p,\omega_2^\delta}(B(x,t))} \\
&\quad + \left\| C\|b\|_{BMO} \sup_{r \geq t} r^{-n} \ln \frac{r}{t} \|f\|_{L_{p,\omega_1^\delta}(B(x,r))} \|\omega_1^\delta\|_{L_{p_1}(B(x,r))}^{-1} \right\|_{L_{p,\omega_2^\delta}(B(x,t))} \\
&\leq \left\| C\|b\|_{BMO} \sup_{r \geq t} r^{-n} (1 + \ln \frac{r}{t}) \|f\|_{L_{p,\omega_1^\delta}(B(x,r))} \|\omega_1^\delta\|_{L_{p_1}(B(x,r))}^{-1} \right\|_{L_{p,\omega_2^\delta}(B(x,t))} \\
&\quad + \left\| C M_b \chi_{B(x,t)} \sup_{r \geq t} r^{-n} \|f\|_{L_{p,\omega_1^\delta}(B(x,r))} \|\omega_1^\delta\|_{L_{p_1}(B(x,r))}^{-1} \right\|_{L_{p,\omega_2^\delta}(B(x,t))} \\
&\leq C\|b\|_{BMO} \|\omega_2^\delta\|_{L_p(B(x,t))} \sup_{r \geq t} (1 + \ln \frac{r}{t}) \frac{\|f\|_{L_{p,\omega_1^\delta}(B(x,r))}}{\|\omega_2^\delta\|_{L_p(B(x,r))}} \\
&\quad + C \|M_b \chi_{B(x,t)}\|_{L_{p,\omega_2^\delta}(B(x,t))} \sup_{r \geq t} (1 + \ln \frac{r}{t}) \frac{\|f\|_{L_{p,\omega_1^\delta}(B(x,r))}}{\|\omega_2^\delta\|_{L_p(B(x,r))}} \\
&\leq C\|b\|_{BMO} \|\omega_2^\delta\|_{L_p(B(x,t))} \sup_{r \geq t} (1 + \ln \frac{r}{t}) \frac{\|f\|_{L_{p,\omega_1^\delta}(B(x,r))}}{\|\omega_2^\delta\|_{L_p(B(x,r))}} \tag{3.31}
\end{aligned}$$

elde edilir. (3.28) ve (3.31) den (3.26) elde edilir. ■

Teorem 3.14 $1 < p < \infty$, $0 < \delta < 1$, $b \in BMO(\mathbb{R}^n)$ ve $(\omega_1, \omega_2) \in \tilde{A}_p(\mathbb{R}^n)$, $\omega_1, \omega_2 \in A_p(\mathbb{R}^n)$ olsun. $\varphi_1(x, r)$ ve $\varphi_2(x, r)$ fonksiyonları, C sabiti; x ve t den bağımsız olmak üzere

$$\sup_{t > r} \left(1 + \ln \frac{t}{r} \right) \frac{\text{ess inf}_{t < s < \infty} \varphi_1(x, s) \|\omega_1^\delta\|_{L_p(B(x,s))}}{\|\omega_2^\delta\|_{L_p(B(x,t))}} \leq C \varphi_2(x, r) \tag{3.32}$$

koşulunu sağlasın. Bu durumda M_b maksimal komütatörü $\mathcal{M}_{\omega_1^\delta}^{p,\varphi_1}(\mathbb{R}^n)$ uzayından $\mathcal{M}_{\omega_2^\delta}^{p,\varphi_2}(\mathbb{R}^n)$ uzayına sınırlıdır (Aykol vd., 2022).

İspat. $f \in \mathcal{M}_{\omega_1^\delta}^{p,\varphi_1}(\mathbb{R}^n)$, $b \in BMO(\mathbb{R}^n)$ olsun. (3.32) eşitsizliği yardımıyla, Tanım 2.38, Teorem 2.6, Teorem 3.13 den ve

$$g = \|f\|_{L_{p,\omega_1^\delta}(B(x,t))}, \quad \omega = \left(1 + \ln \frac{t}{r} \right) \|\omega_2^\delta\|_{L_p(B(x,t))}^{-1}, \quad v_1 = \frac{1}{\varphi_1(x, t) \|\omega_1^\delta\|_{L_p(B(x,t))}}, \quad v_2 = \frac{1}{\varphi_2(x, t)}$$

seçilmek üzere

$$\begin{aligned}
\|M_b f\|_{M_{\omega_2^\delta}^{p,\varphi_2}(\mathbb{R}^n)} &= \sup_{x \in \mathbb{R}^n, t > 0} \frac{1}{\varphi_2(x, t) \|\omega_2^\delta\|_{L_p(B(x, t))}} \|M_b f\|_{L_{p, \omega_2^\delta}(B(x, t))} \\
&\leq C \|b\|_{BMO} \sup_{x \in \mathbb{R}^n, t > 0} \frac{1}{\varphi_2(x, t) \|\omega_2^\delta\|_{L_p(B(x, t))}} \|\omega_2^\delta\|_{L_p(B(x, t))} \\
&\quad \times \sup_{t > r} \left(1 + \ln \frac{t}{r}\right) \|f\|_{L_{p, \omega_1^\delta}(B(x, t))} \|\omega_2^\delta\|_{L_p(B(x, t))}^{-1} \\
&= C \|b\|_{BMO} \sup_{x \in \mathbb{R}^n, t > 0} \frac{1}{\varphi_2(x, t)} \sup_{t > r} \left(1 + \ln \frac{t}{r}\right) \|f\|_{L_{p, \omega_1^\delta}(B(x, t))} \|\omega_2^\delta\|_{L_p(B(x, t))}^{-1} \\
&\leq C \|b\|_{BMO} \sup_{x \in \mathbb{R}^n, t > 0} \frac{1}{\varphi_1(x, t) \|\omega_1^\delta\|_{L_p(B(x, t))}} \|f\|_{L_{p, \omega_1^\delta}(B(x, t))} \\
&= C \|b\|_{BMO} \|f\|_{M_{\omega_1^\delta}^{p,\varphi_1}(\mathbb{R}^n)}
\end{aligned}$$

elde edilir ve böylece ispat tamamlanır. ■

3.4 Genelleştirilmiş Ağırlıklı Morrey Uzaylarında Singüler Komütatör- ler için \tilde{A}_p Ağırlıklı Eşitsizlikler

Bu bölümde genelleştirilmiş ağırlıklı Morrey uzaylarında singüler komütatörler için \tilde{A}_p ağırlıklı eşitsizlikler elde edilecektir. Sıradaki iki ağırlıklı lokal kabuller geçerlidir.

Teorem 3.15 $1 < p < \infty$, $0 < \delta < 1$, $b \in BMO(\mathbb{R}^n)$ ve $(\omega_1, \omega_2) \in \tilde{A}_p(\mathbb{R}^n)$, $\omega_1 \in A_p(\mathbb{R}^n)$ olsun. Bu durumda $[b, T]$ operatörü $L_{p, \omega_1^\delta}(\mathbb{R}^n)$ uzayından $L_{p, \omega_2^\delta}(\mathbb{R}^n)$ uzayına sınırlıdır (Coifman, Rochberg ve Weiss, 1976).

İspat. $f \in L_{p, \omega_1^\delta}(\mathbb{R}^n)$, $b \in BMO(\mathbb{R}^n)$ ve $(\omega_1, \omega_2) \in \tilde{A}_p(\mathbb{R}^n)$, $\omega_1 \in A_p(\mathbb{R}^n)$ olsun.

Lemma 3.1 kullanılarak,

$$\begin{aligned}
\|[b, T] f\|_{L_{p, \omega_2^\delta}(\mathbb{R}^n)} &\leq \|M([b, T] f)\|_{L_{p, \omega_2^\delta}(\mathbb{R}^n)} \\
&\leq C \|b\|_{BMO} \left\| (M|Tf|^s)^{\frac{1}{s}} + (M|f|^s)^{\frac{1}{s}} \right\|_{L_{p, \omega_2^\delta}(\mathbb{R}^n)} \\
&\leq C \|b\|_{BMO} \left[\left\| (M|Tf|^s)^{\frac{1}{s}} \right\|_{L_{p, \omega_2^\delta}(\mathbb{R}^n)} + \left\| (M|f|^s)^{\frac{1}{s}} \right\|_{L_{p, \omega_2^\delta}(\mathbb{R}^n)} \right]
\end{aligned}$$

elde edilir, Teorem 2.3 ve Sonuç 2.1 den yararlanılarak

$$\begin{aligned}
\|[b, T] f\|_{L_{p, \omega_2^\delta}(\mathbb{R}^n)} &\leq C \|b\|_{BMO} \left[\left\| (|Tf|^s)^{\frac{1}{s}} \right\|_{L_{p, \omega_1^\delta}(\mathbb{R}^n)} + \left\| (|f|^s)^{\frac{1}{s}} \right\|_{L_{p, \omega_1^\delta}(\mathbb{R}^n)} \right] \\
&\leq C \|b\|_{BMO} \|f\|_{L_{p, \omega_1^\delta}(\mathbb{R}^n)}
\end{aligned}$$

bulunur. ■

Teorem 3.16 $1 < p < \infty$, $0 < \delta < 1$, $b \in BMO(\mathbb{R}^n)$ ve $(\omega_1, \omega_2) \in \tilde{A}_p(\mathbb{R}^n)$, $\omega_1, \omega_2 \in A_p(\mathbb{R}^n)$ olsun. Bu durumda C sabiti; f , x ve t den bağımsız olmak üzere, her $f \in L_{p, \omega_1^\delta}(\mathbb{R}^n)$ için

$$\|[b, T]f\|_{L_{p, \omega_2^\delta}(B(x, t))} \leq C \|b\|_{BMO} \|\omega_2^\delta\|_{L_p(B(x, t))} \int_t^\infty \left(1 + \ln \frac{r}{t}\right) \frac{\|f\|_{L_{p, \omega_1^\delta}(B(x, r))} dr}{\|\omega_2^\delta\|_{L_p(B(x, r))} r} \quad (3.33)$$

gerçeklenir (Aykol vd., 2022).

İspat. f fonksiyonunu, $t > 0$ için

$$f = f_1 + f_2, \quad f_1(y) = f(y)\chi_{B(x, 2t)}(y), \quad f_2(y) = f(y)\chi_{cB(x, 2t)}(y)$$

şeklinde ayırılım buradan,

$$\|[b, T]f\|_{L_{p, \omega_2^\delta}(B(x, t))} \leq \|[b, T]f_1\|_{L_{p, \omega_2^\delta}(B(x, t))} + \|[b, T]f_2\|_{L_{p, \omega_2^\delta}(B(x, t))}$$

gerçeklenir. $[b, T]$ operatörünün Lebesgue uzaylarındaki sınırlılığını karakterize eden Teorem 3.15 kullanılarak, C sabiti; f den bağımsız olmak üzere

$$\|[b, T]f_1\|_{L_{p, \omega_2^\delta}(B(x, t))} \leq \|[b, T]f_1\|_{L_{p, \omega_2^\delta}(\mathbb{R}^n)} \leq C \|b\|_{BMO} \|f_1\|_{L_{p, \omega_1^\delta}(\mathbb{R}^n)} = C \|b\|_{BMO} \|f\|_{L_{p, \omega_1^\delta}(B(x, 2t))} \quad (3.34)$$

gerçeklenir. $\|f\|_{L_{p, \omega_1^\delta}(B(x, 2t))}$ normunun t ye göre azalmayan olması gerçeğinden,

$$\|[b, T]f_1\|_{L_{p, \omega_2^\delta}(B(x, t))} \leq C \|b\|_{BMO} \|\omega_2^\delta\|_{L_p(B(x, t))} \int_t^\infty \left(1 + \ln \frac{s}{t}\right) \frac{\|f\|_{L_{p, \omega_1^\delta}(B(x, s))} ds}{\|\omega_2^\delta\|_{L_p(B(x, s))} s} \quad (3.35)$$

eşitsizliği elde edilir.

$\|[b, T]f_2\|_{L_{p, \omega_2^\delta}(B(x, t))}$ normu için, $z \in B(x, t)$ olmak üzere

$$|[b, T]f_2(z)| \leq C \int_{cB(x, 2t)} |b(z) - b(y)| \frac{|f(y)|}{|y - z|^n} dy$$

ifadesini ve

$$|x - z| \leq t, \quad |z - y| \geq 2t \implies \frac{1}{2}|z - y| \leq |x - y| \leq \frac{3}{2}|z - y|$$

eşitsizliklerini göz önüne alalım.

Verilen eşitsizlikler yardımıyla,

$$|[b, T]f_2(z)| \leq C \int_{cB(x, 2t)} |x - y|^{-n} |b(z) - b(y)| |f(y)| dy$$

yazılır.

$[b, T]f_2$ için öncelikle

$$\begin{aligned} \int_{cB(x, t)} |x - y|^{-n} |b(z) - b(y)| |f(y)| dy &\leq C \|b\|_{BMO} \int_t^\infty s^{-n} \left(1 + \ln \frac{s}{t}\right) \|\omega_1^{-\delta}\|_{L_{p'}(B(x, s))} \\ &\quad \times \|f\|_{L_{p, \omega_1^\delta}(B(x, s))} \frac{ds}{s} \end{aligned} \quad (3.36)$$

eşitsizliğini ispatlayalım. $z \in B(x, t)$ olmak üzere, $[b, T]f_2$ için

$$\begin{aligned} \int_{cB(x, t)} |x - y|^{-n} |b(z) - b(y)| |f(y)| dy &\leq \int_{cB(x, t)} |x - y|^{-n} \\ &\quad \times |b(z) - b_{B(x, t)} - (b(y) - b_{B(x, t)})| |f(y)| dy \\ &\leq \int_{cB(x, t)} |x - y|^{-n} |b(y) - b_{B(x, t)}| |f(y)| dy \\ &\quad + \int_{cB(x, t)} |x - y|^{-n} |b(z) - b_{B(x, t)}| |f(y)| dy \\ &= J_1 + J_2 \end{aligned}$$

elde edilir. $\delta > 0$ seçilmek üzere J_1 ve J_2 integrallerini ayrı ayrı hesaplayalım.

J_1 integrali için;

$$\begin{aligned} J_1 &= \int_{cB(x, t)} |x - y|^{-n} |b(y) - b_{B(x, t)}| |f(y)| dy \\ &\leq \delta \int_{cB(x, t)} |x - y|^{-n+\delta} |b(y) - b_{B(x, t)}| |f(y)| dy \int s^{-\delta-1} ds \end{aligned}$$

Fubini Teoremi kullanılarak,

$$\begin{aligned} J_1 &\leq C \int_t^\infty s^{-n-1} \int_{\{y \in \mathbb{R}^n : 2t \leq |x-y| \leq s\}} |b(y) - b_{B(x, t)}| |f(y)| dy ds \\ &= C \int_t^\infty s^{-n-1} \int_{\{y \in \mathbb{R}^n : 2t \leq |x-y| \leq s\}} |b(y) - b_{B(x, s)} - (b_{B(x, t)} - b_{B(x, s)})| |f(y)| dy ds \\ &\leq C \int_t^\infty s^{-n-1} \int_{\{y \in \mathbb{R}^n : 2t \leq |x-y| \leq s\}} |b(y) - b_{B(x, s)}| |f(y)| dy ds \\ &\quad + C \int_t^\infty s^{-n-1} \int_{\{y \in \mathbb{R}^n : 2t \leq |x-y| \leq s\}} |b_{B(x, t)} - b_{B(x, s)}| |f(y)| dy ds \\ &\leq C \int_t^\infty s^{-n-1} \int_{\{y \in \mathbb{R}^n : 2t \leq |x-y| \leq s\}} |b(y) - b_{B(x, s)}| \omega_1^{-\delta} |f(y)| \omega_1^\delta dy ds \\ &\quad + C \int_t^\infty s^{-n-1} \int_{\{y \in \mathbb{R}^n : 2t \leq |x-y| \leq s\}} |b_{B(x, t)} - b_{B(x, s)}| \omega_1^{-\delta} |f(y)| \omega_1^\delta dy ds \end{aligned}$$

bulunur.

Elde edilen her iki integral ifadeleri için de Hölder eşitsizliği kullanılarak

$$\begin{aligned} J_1 &\leq C \int_t^\infty s^{-n-1} \|b(y) - b_{B(x,s)}\|_{L_{p',\omega_1^{-\delta}}(B(x,s))} \|f\|_{L_{p,\omega_1^\delta}(B(x,s))} ds \\ &\quad + C \int_t^\infty s^{-n-1} \|b_{B(x,t)} - b_{B(x,s)}\|_{L_{p',\omega_1^{-\delta}}(B(x,s))} \|\omega_1^{-\delta}\|_{L_{p'}(B(x,s))} \|f\|_{L_{p,\omega_1^\delta}(B(x,s))} ds \end{aligned}$$

elde edilir.

Daha sonra elde edilen eşitsizlikteki ilk integral ifadesi için Teorem 2.4, ikinci integral ifadesi için ise Lemma 2.1 kullanılarak

$$\begin{aligned} J_1 &\leq C \int_t^\infty s^{-n-1} \|b(\cdot) - b_{B(x,s)}\|_{L_{p',\omega_1^{-\delta}}(B(x,s))} \|f\|_{L_{p,\omega_1^\delta}(B(x,s))} ds \\ &\quad + C \|b\|_{BMO} \int_t^\infty s^{-n-1} \ln \frac{s}{t} \|\omega_1^{-\delta}\|_{L_{p'}(B(x,s))} \|f\|_{L_{p,\omega_1^\delta}(B(x,s))} ds \end{aligned}$$

elde edilir.

İlk integral ifadesinde, $\|b\|_{BMO}$ normunu elde edebilmek amacıyla Tanım 2.34 kullanılarak gerekli düzenlemeler yapıldığında

$$\begin{aligned} J_1 &\leq C \int_t^\infty s^{-n-1} \|b(\cdot) - b_{B(x,s)}\|_{L_{p',\omega_1^{-\delta}}(B(x,s))} \|\omega_1^\delta\|_{L_{p'}(B(x,s))} \|\omega_1^{-\delta}\|_{L_{p'}(B(x,s))} \|f\|_{L_{p,\omega_1^\delta}(B(x,s))} ds \\ &\quad + C \|b\|_{BMO} \int_t^\infty s^{-n-1} \ln \frac{s}{t} \|\omega_1^{-\delta}\|_{L_{p'}(B(x,s))} \|f\|_{L_{p,\omega_1^\delta}(B(x,s))} ds \\ &\leq C \|b\|_{BMO} \int_t^\infty s^{-n-1} \|\omega_1^{-\delta}\|_{L_{p'}(B(x,s))} \|f\|_{L_{p,\omega_1^\delta}(B(x,s))} ds \\ &\quad + C \|b\|_{BMO} \int_t^\infty s^{-n-1} \ln \frac{s}{t} \|\omega_1^{-\delta}\|_{L_{p'}(B(x,s))} \|f\|_{L_{p,\omega_1^\delta}(B(x,s))} ds \end{aligned}$$

bulunur.

J_2 integrali için, C sabiti; x ve t den bağımsız olmak üzere,

$$\begin{aligned}
J_2 &= |b(z) - b_{B(x,t)}| \int_{cB(x,t)} |x-y|^{-n} |f(y)| dy \\
&= \left| b(z) - |B(x,t)|^{-1} \int_{B(x,t)} b(y) dy \right| \int_{cB(x,t)} |x-y|^{-n} \omega_1^\delta \omega_1^{-\delta} |f(y)| dy \\
&= \left| b(z) + |B(x,t)|^{-1} \int_{B(x,t)} (b(z) - b(y) - b(z)) dy \right| \\
&\quad \times \int_t^\infty s^{-n} \|\omega_1^{-\delta}\|_{L_{p'}(B(x,s))} \|f\|_{L_{p,\omega_1^\delta}(B(x,s))} \frac{ds}{s} \\
&= \left| b(z) + |B(x,t)|^{-1} \left[\int_{B(x,t)} (b(z) - b(y)) dy - b(z) \int_{B(x,t)} dy \right] \right| \\
&\quad \times \int_t^\infty s^{-n} \|\omega_1^{-\delta}\|_{L_{p'}(B(x,s))} \|f\|_{L_{p,\omega_1^\delta}(B(x,s))} \frac{ds}{s} \\
&= \left| b(z) + |B(x,t)|^{-1} \int_{B(x,t)} (b(z) - b(y)) dy - |B(x,t)|^{-1} b(z) |B(x,t)| dy \right| \\
&\quad \times \int_t^\infty s^{-n} \|\omega_1^{-\delta}\|_{L_{p'}(B(x,s))} \|f\|_{L_{p,\omega_1^\delta}(B(x,s))} \frac{ds}{s} \\
&\leq |B(x,t)|^{-1} \int_{B(x,t)} |b(z) - b(y)| dy \int_t^\infty s^{-n} \|\omega_1^{-\delta}\|_{L_{p'}(B(x,s))} \|f\|_{L_{p,\omega_1^\delta}(B(x,s))} \frac{ds}{s} \\
&\leq \sup_{t>0} |B(x,t)|^{-1} \int_{B(x,t)} |b(z) - b(y)| dy \int_t^\infty s^{-n} \|\omega_1^{-\delta}\|_{L_{p'}(B(x,s))} \|f\|_{L_{p,\omega_1^\delta}(B(x,s))} \frac{ds}{s} \\
&\leq CM_b \chi_{B(x,t)}(z) \int_t^\infty s^{-n} \|\omega_1^{-\delta}\|_{L_{p'}(B(x,s))} \|f\|_{L_{p,\omega_1^\delta}(B(x,s))} \frac{ds}{s}
\end{aligned}$$

bulunur. Dolayısıyla (3.36) eşitsizliğinde her iki tarafın $L_{p,\omega_2^\delta}(B(x,t))$ normu alınarak,

$$\begin{aligned}
\|[b, T]f_2\|_{L_{p,\omega_2^\delta}(B(x,t))} &\leq C \|\chi_{B(x,t)}\|_{L_{p,\omega_2^\delta}(B(x,t))} \|b\|_{BMO} \\
&\quad \times \int_t^\infty s^{-n} \left(1 + \ln \frac{s}{t}\right) \|\omega_1^{-\delta}\|_{L_{p'}(B(x,s))} \|f\|_{L_{p,\omega_1^\delta}(B(x,s))} \frac{ds}{s} \\
&\leq C \|b\|_{BMO} \|\omega_2^\delta\|_{L_p(B(x,t))} \\
&\quad \times \int_t^\infty \left(1 + \ln \frac{s}{t}\right) \frac{\|f\|_{L_{p,\omega_1^\delta}(B(x,s))} ds}{\|\omega_2^\delta\|_{L_p(B(x,s))} s}
\end{aligned} \tag{3.37}$$

bulunur. Buradan, (3.35) ve (3.37) den (3.33) elde edilir ve böylece ispat tamamlanır. ■

Teorem 3.17 $1 < p < \infty$, $0 < \delta < 1$, $b \in BMO(\mathbb{R}^n)$ ve $(\omega_1, \omega_2) \in \tilde{A}_p(\mathbb{R}^n)$, $\omega_1, \omega_2 \in A_p(\mathbb{R}^n)$ olsun. $\varphi_1(x, r)$ ve $\varphi_2(x, r)$ fonksiyonları, C sabiti; x ve t den

bağımsız olmak üzere

$$\int_t^\infty \left(1 + \ln \frac{t}{r}\right) \frac{\operatorname{ess\,inf}_{t < s < \infty} \varphi_1(x, s) \|\omega_1^\delta\|_{L_p(B(x, s))}}{\|\omega_2^\delta\|_{L_p(B(x, t))}} \frac{dt}{t} \leq C \varphi_2(x, r) \quad (3.38)$$

koşulunu sağlasın. Bu durumda, $[b, T]$ komütatörü $\mathcal{M}_{\omega_1^\delta}^{p, \varphi_1}(\mathbb{R}^n)$ uzayından $\mathcal{M}_{\omega_2^\delta}^{p, \varphi_2}(\mathbb{R}^n)$ uzayına sınırlıdır (Aykol vd., 2022).

İspat. $f \in \mathcal{M}_{\omega_1^\delta}^{p, \varphi_1}(\mathbb{R}^n)$ olsun. (3.38) eşitsizliği yardımıyla, Tanım 2.38, Teorem 2.6, Teorem 3.16 dan ve

$$g = \|f\|_{L_{p, \omega_1^\delta}(B(x, t))}, \quad \omega = \left(1 + \ln \frac{t}{r}\right) \frac{1}{t} \|\omega_2^\delta\|_{L_p(B(x, t))}^{-1}, \quad v_1 = \frac{1}{\varphi_1(x, t) \|\omega_1^\delta\|_{L_p(B(x, t))}}, \quad v_2 = \frac{1}{\varphi_2(x, t)}$$

seçilmek üzere,

$$\begin{aligned} \|[b, T]\|_{M_{\omega_2^\delta}^{p, \varphi_2}(\mathbb{R}^n)} &= \sup_{x \in \mathbb{R}^n, t > 0} \frac{1}{\varphi_2(x, t) \|\omega_2^\delta\|_{L_p(B(x, t))}} \|[b, T]\|_{L_{p, \omega_2^\delta}(B(x, t))} \\ &\leq C \|b\|_{BMO} \sup_{x \in \mathbb{R}^n, t > 0} \frac{1}{\varphi_2(x, t) \|\omega_2^\delta\|_{L_p(B(x, t))}} \|\omega_2^\delta\|_{L_p(B(x, t))} \int_r^\infty \left(1 + \ln \frac{t}{r}\right) \\ &\quad \times \frac{\|f\|_{L_{p, \omega_1^\delta}(B(x, t))}}{\|\omega_2^\delta\|_{L_p(B(x, t))}} \frac{ds}{t} \\ &= C \|b\|_{BMO} \sup_{x \in \mathbb{R}^n, t > 0} \frac{1}{\varphi_2(x, t)} \int_r^\infty \left(1 + \ln \frac{t}{r}\right) \frac{\|f\|_{L_{p, \omega_1^\delta}(B(x, t))}}{\|\omega_2^\delta\|_{L_p(B(x, t))}} \frac{dt}{t} \\ &\leq C \|b\|_{BMO} \sup_{x \in \mathbb{R}^n, t > 0} \frac{1}{\varphi_1(x, t) \|\omega_1^\delta\|_{L_p(B(x, t))}} \|[b, T]\|_{L_{p, \omega_1^\delta}(B(x, t))} \\ &= C \|b\|_{BMO} \|f\|_{L_{p, \omega_1^\delta}(B(x, r))} \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir ve böylece ispat tamamlanır. ■

4. BAZI UYGULAMALAR

Bu bölümde, Ω sınırlı bölgelerinde (2.2) Dirichlet problemi ele alınacaktır. $\partial\Omega$ nin, C^2 sınıfına ait olduğu kabul edilecektir.

Dirichlet probleminin çözümü; her sabit $y \in \Omega$ için, $h(x, y)$

$$\begin{cases} \Delta_x h(x, y) = 0 & , \quad x \in \Omega \\ h(x, y) = -\Gamma(x - y) & , \quad x \in \partial\Omega \end{cases}$$

olmak üzere

$$G(x, y) = \Gamma(x - y) + h(x, y)$$

biçiminde de yazılabilen

$$\phi(x) = \int_{\Omega} G(x, y) f(y) dy \quad (4.1)$$

şeklindeki $G(x, y)$ Green fonksiyonudur.

Eğer $P(y, Q)$ Poisson çekirdeği ise dS ; $\partial\Omega$ üzerindeki yüzey ölçüsünü temsil etmek üzere $h(x, y)$,

$$h(x, y) = -\frac{1}{(n-2)\omega_n} \int_{\partial\Omega} \frac{1}{|x - Q|^{n-2}} P(y, Q) dS(Q)$$

biçiminde ifade edilir.

Green fonksiyonu,

$$G(x, y) \leq \begin{cases} C \log |x - y| & , \quad n = 2 \\ C |x - y|^{2-n} & , \quad n \geq 3 \end{cases}$$

ve

$$|D_{x_i} G(x, y)| \leq C |x - y|^{1-n}$$

eşitsizliklerini sağlamaktadır (Widman, 1967). Dolayısıyla,

$$D_{x_i} \phi(x) = \int_{\Omega} D_{x_i} G(x, y) f(y) dy$$

elde edilir. (4.1) yardımıyla, ϕ fonksiyonunun ikinci türevlerini elde edebilmek için sıradaki lemma kullanılacaktır. $d(x)$, sınıra olan uzaklığı temsil etmek üzere

$$d(x) = \inf_{Q \in \partial\Omega} |x - Q|$$

biçiminde tanımlanır.

Lemma 4.1 Verilen $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ için, (eğer $n=2$ ise $|\alpha|>0$)

$$|D^\alpha h(x, y)| \leq C d(x)^{2-n-|\alpha|}$$

olacak şekilde n ve α ya bağlı bir C sabiti mevcuttur.

Verilen lemmadan her $x \in \Omega$ için, x noktasının komşuluğunda $D_{x_i x_j} h(x, y)$ nin düzgün sınırlı olduğu elde edilir, böylelikle

$$D_{x_i x_j} \int_{\Omega} h(x, y) f(y) dy = \int_{\Omega} D_{x_i x_j} h(x, y) f(y) dy$$

gerçeklenir. Üstelik, $|D_{x_j} \Gamma(x)| \leq C|x|^{1-n}$ olduğundan

$$D_{x_j} \int_{\Omega} \Gamma(x - y) f(y) dy = \int_{\Omega} D_{x_j} \Gamma(x - y) f(y) dy$$

gerçeklenir.

$D_{x_i x_j} \Gamma$ integrallenebilen bir fonksiyon olmadığından, ikinci türev ile integrasyonun sırası değiştirilemez. c sınırlı bir fonksiyon ve

$$Kf(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|x-y|>\varepsilon} D_{x_i x_j} \Gamma(x - y) f(y) dy$$

olmak üzere

$$D_{x_i} \int_{\Omega} D_{x_j} \Gamma(x - y) f(y) dy = Kf(x) + c(x) f(x)$$

gerçeklenir.

Burada ve daha sonraki tüm gösterimlerde: f , \mathbb{R}^n üzerinde tanımlı orijinal f fonksiyonunun sıfır ile genişlemesi olarak kabul edilecektir.

K operatörü, Calderón-Zygmund singüler operatördür. Esasında, $D_{x_j} \Gamma \in C^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ ve $(1 - n)$. dereceden homojen bir fonksiyon olduğundan;

buradan $D_{x_i x_j} \Gamma(x - y)$ nin, $(-n)$. dereceden homojen ve birim küre üzerinde sıfır ortalamaya sahip bir fonksiyon olduğu sonucuna varılır (Agmon, 1965). Dolayısıyla $1 < p < \infty$ için $K, L_p(\mathbb{R}^n)$ uzayında sınırlı bir operatördür (Calderón ve Zygmund, 1952).

Ayrıca $1 < p < \infty$ için,

$$\tilde{K}f(x) = \sup_{\varepsilon > 0} \left| \int_{|x-y| > \varepsilon} D_{x_i x_j} \Gamma(x - y) f(y) dy \right|$$

maksimal operatörü $L_p(\mathbb{R}^n)$ uzayında sınırlıdır.

Teorem 4.1 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ sınırlı bir C^2 bölgesi, $1 < p < \infty$, $0 < \delta < 1$, $b \in BMO(\mathbb{R}^n)$, $(\omega_1, \omega_2) \in \tilde{A}_p(\mathbb{R}^n)$ ve $\omega_1, \omega_2 \in A_p(\mathbb{R}^n)$ olsun. $\varphi_1(x, r)$ ve $\varphi_2(x, r)$ fonksiyonları (3.6) koşulunu sağlasın. $f \in \mathcal{M}_{\omega_1^\delta}^{p, \varphi_1}(\Omega)$ ve ϕ fonksiyonu (2.2) probleminin çözümü olsun, bu durumda

$$\|\phi\|_{W_{p, \varphi_2}^2(\Omega, \omega_2^\delta)} \leq C \|f\|_{\mathcal{M}_{\omega_1^\delta}^{p, \varphi_1}(\Omega)} \quad (4.2)$$

olacak şekilde yalnızca n ve Ω ya bağlı bir C sabiti mevcuttur (Aykol vd., 2022).

İspat. Green fonksiyonu için aşağıda bulunan eşitsizliğe ihtiyaç duyulacaktır. Bu eşitsizlik, A. Dall'Acqua ve G. Sweers (2004) tarafından ispatlanmıştır ancak buradaki bölge, C^2 den daha düzgün bir bölge olarak ele alınmıştır. Ω , bir sınırlı C^2 bölgesi olsun ve $G(x, y)$, Ω üzerindeki (2.2) probleminin Green fonksiyonu olsun. Her $(x, y) \in \Omega \times \Omega$ için,

$$|D_{x_i x_j} G(x - y)| \leq C \frac{d(x)}{|x - y|^{n+1}}$$

olacak şekilde n ve Ω ya bağlı bir C sabiti mevcuttur. Bu sonuç, aşağıdaki ifadelerden ileri gelmektedir (Duran vd., 2009).

Her $x \in \Omega$ için,

$$|\phi(x)| + |D_{x_i} \phi(x)| \leq C M f(x), \quad (4.3)$$

$$|D_{x_i x_j} \phi(x)| \leq C (\tilde{K}f(x) + M f(x) + |f(x)|) \quad (4.4)$$

olacak şekilde n ve Ω ya bağlı olmak üzere bir C sabiti mevcuttur.

Teorem 3.2 ve Teorem 3.6 dan M ve \tilde{K} operatörleri $\mathcal{M}_{\omega_1^\delta}^{p, \varphi_1}(\Omega)$ uzayından $\mathcal{M}_{\omega_2^\delta}^{p, \varphi_2}(\Omega)$ uzayına sınırlıdır. Sonuç olarak, (4.3) ve (4.4) den (4.2) elde edilir. ■

Teorem 4.2 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ sınırlı bir C^2 bölgesi, $1 < p < \infty$, $0 < \delta < 1$, $b \in BMO(\mathbb{R}^n)$, $(\omega_1, \omega_2) \in \tilde{A}_p(\mathbb{R}^n)$ ve $\omega_1, \omega_2 \in A_p(\mathbb{R}^n)$ olsun. $\varphi_1(x, r)$ ve $\varphi_2(x, r)$ fonksiyonları (3.19) koşulunu sağlasın. $f \in \mathcal{M}_{\omega_1^\delta}^{p, \varphi_1}(\Omega)$ ve ϕ fonksiyonu (2.2) probleminin çözümü olsun, bu durumda

$$\|\phi\|_{W_{p, \varphi_2}^2(\Omega, \omega_2^\delta)} \leq C \|f\|_{\mathcal{M}_{\omega_1^\delta}^{p, \varphi_1}(\Omega)}$$

olacak şekilde yalnızca n ve Ω ya bağlı bir C sabiti mevcuttur (Aykol vd., 2022).

Sonuç 4.1 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ sınırlı bir C^2 bölgesi, $1 < p < \infty$, $(\omega_1, \omega_2) \in F_p(\mathbb{R}^n)$ olsun. $\varphi_1(x, r)$ ve $\varphi_2(x, r)$ fonksiyonları (3.13) ve (3.25) koşullarını sağlasın. $f \in \mathcal{M}_{\omega_1}^{p, \varphi_1}(\Omega)$ ve ϕ fonksiyonu (2.2) probleminin çözümü olsun, bu durumda

$$\|\phi\|_{W_{p, \varphi_2}^2(\Omega, \omega_2)} \leq C \|f\|_{\mathcal{M}_{\omega_1}^{p, \varphi_1}(\Omega)}$$

olacak şekilde yalnızca n ve Ω ya bağlı bir C sabiti mevcuttur (Aykol vd., 2023).

5. TARTIŞMA VE SONUÇ

$1 \leq p < \infty$, φ ; $\mathbb{R}^n \times (0, \infty)$ üzerinde pozitif ölçülebilir bir fonksiyon ve ω , \mathbb{R}^n üzerinde negatif olmayan ölçülebilir bir fonksiyon, supremum \mathbb{R}^n de tüm $B(x, r)$ yuvarları üzerinden alınmak üzere,

$$\|f\|_{\mathcal{M}_\omega^{p,\varphi}} = \sup_{x \in \mathbb{R}^n, r > 0} \frac{1}{\varphi(x, r) \|\omega\|_{L_p(B(x, r))}} \|f\|_{L_{p,\omega}(B(x, r))}$$

sonlu normuna sahip olan tüm $f \in L_p^{loc}(\mathbb{R}^n)$ fonksiyonların oluşturduğu uzay, $M_\omega^{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ genelleştirilmiş ağırlıklı Morrey uzayı olarak tanımlanmaktadır. Bu tezde, genelleştirilmiş ağırlıklı Morrey uzaylarında temel olarak maksimal, singüler operatörler ve bu operatörlerin komütatörleri incelenmiş olup aşağıdaki çıktılar elde edilmiştir:

■ $1 < p < \infty$, $0 < \delta < 1$, $(\omega_1, \omega_2) \in \tilde{A}_p(\mathbb{R}^n)$ olsun. $\varphi_1(x, r)$ ve $\varphi_2(x, r)$ fonksiyonları, C sabiti; x ve t den bağımsız olmak üzere

$$\sup_{t > r} \frac{\operatorname{ess\,inf}_{t < s < \infty} \varphi_1(x, s) \|\omega_1^\delta\|_{L_p(B(x, s))}}{\|\omega_2^\delta\|_{L_p(B(x, t))}} \leq C \varphi_2(x, r)$$

koşulunu sağlıyorsa bu durumda M maksimal operatörü $\mathcal{M}_{\omega_1^\delta}^{p,\varphi_1}(\mathbb{R}^n)$ uzayından $\mathcal{M}_{\omega_2^\delta}^{p,\varphi_2}(\mathbb{R}^n)$ uzayına sınırlıdır.

■ $1 < p < \infty$, $(\omega_1, \omega_2) \in F_p(\mathbb{R}^n)$ olsun. $\varphi_1(x, r)$ ve $\varphi_2(x, r)$ fonksiyonları, C sabiti; x ve s den bağımsız olmak üzere

$$\sup_{s > r} \frac{\operatorname{ess\,inf}_{s < \tau < \infty} \varphi_1(x, \tau) \|\omega_1\|_{L_p(B(x, \tau))}}{\|\omega_2\|_{L_p(B(x, s))}} \leq C \varphi_2(x, r)$$

koşulunu sağlıyorsa bu durumda M maksimal operatörü $\mathcal{M}_{\omega_1}^{p,\varphi_1}(\mathbb{R}^n)$ uzayından $\mathcal{M}_{\omega_2}^{p,\varphi_2}(\mathbb{R}^n)$ uzayına sınırlıdır.

■ $1 < p < \infty$, $0 < \delta < 1$ ve $(\omega_1, \omega_2) \in \tilde{A}_p(\mathbb{R}^n)$ olsun, $\varphi_1(x, r)$ ve $\varphi_2(x, r)$ fonksiyonları, C sabiti; x ve t den bağımsız olmak üzere

$$\int_t^\infty \frac{\operatorname{ess\,inf}_{t < s < \infty} \varphi_1(x, s) \|\omega_1^\delta\|_{L_p(B(x, s))}}{\|\omega_2^\delta\|_{L_p(B(x, t))}} \frac{dt}{t} \leq C \varphi_2(x, r)$$

koşulunu sağlıyorsa bu durumda T operatörü $\mathcal{M}_{\omega_1^\delta}^{p,\varphi_1}(\mathbb{R}^n)$ uzayından $\mathcal{M}_{\omega_2^\delta}^{p,\varphi_2}(\mathbb{R}^n)$ uzayına sınırlıdır.

■ $1 < p < \infty$, $(\omega_1, \omega_2) \in F_p(\mathbb{R}^n)$ olsun. $\varphi_1(x, r)$ ve $\varphi_2(x, r)$ fonksiyonları, C sabiti; $x \in \mathbb{R}^n$ ve r den bağımsız olmak üzere

$$\int_r^\infty \frac{\operatorname{ess\,inf}_{\tau < s < \infty} \varphi_1(x, s) \|\omega_1\|_{L_p(B(x, s))}}{\|\omega_2\|_{L_p(B(x, \tau))}} \frac{d\tau}{\tau} \leq C\varphi_2(x, r)$$

koşulunu sağlıyorsa bu durumda T operatörü $\mathcal{M}_{\omega_1}^{p, \varphi_1}(\mathbb{R}^n)$ uzayından $\mathcal{M}_{\omega_2}^{p, \varphi_2}(\mathbb{R}^n)$ uzayına sınırlıdır.

■ $1 < p < \infty$, $0 < \delta < 1$, $b \in BMO(\mathbb{R}^n)$ ve $(\omega_1, \omega_2) \in \tilde{A}_p(\mathbb{R}^n)$, $\omega_1, \omega_2 \in A_p(\mathbb{R}^n)$ olsun. $\varphi_1(x, r)$ ve $\varphi_2(x, r)$ fonksiyonları, C sabiti; x ve t den bağımsız olmak üzere

$$\sup_{t > r} \left(1 + \ln \frac{t}{r}\right) \frac{\operatorname{ess\,inf}_{t < s < \infty} \varphi_1(x, s) \|\omega_1^\delta\|_{L_p(B(x, s))}}{\|\omega_2^\delta\|_{L_p(B(x, t))}} \leq C\varphi_2(x, r)$$

koşulunu sağlıyorsa bu durumda M_b maksimal komütatörü $\mathcal{M}_{\omega_1}^{p, \varphi_1}(\mathbb{R}^n)$ uzayından $\mathcal{M}_{\omega_2}^{p, \varphi_2}(\mathbb{R}^n)$ uzayına sınırlıdır.

■ $1 < p < \infty$, $0 < \delta < 1$, $b \in BMO(\mathbb{R}^n)$ ve $(\omega_1, \omega_2) \in \tilde{A}_p(\mathbb{R}^n)$, $\omega_1, \omega_2 \in A_p(\mathbb{R}^n)$ olsun. $\varphi_1(x, r)$ ve $\varphi_2(x, r)$ fonksiyonları C sabiti; x ve t den bağımsız olmak üzere

$$\int_t^\infty \left(1 + \ln \frac{t}{r}\right) \frac{\operatorname{ess\,inf}_{t < s < \infty} \varphi_1(x, s) \|\omega_1^\delta\|_{L_p(B(x, s))}}{\|\omega_2^\delta\|_{L_p(B(x, t))}} \frac{dt}{t} \leq C\varphi_2(x, r)$$

koşulunu sağlıyorsa bu durumda, $[b, T]$ singüler komütatörü $\mathcal{M}_{\omega_1}^{p, \varphi_1}(\mathbb{R}^n)$ uzayından $\mathcal{M}_{\omega_2}^{p, \varphi_2}(\mathbb{R}^n)$ uzayına sınırlıdır.

Bu çalışmanın son bölümünde, bazı uygulamalara yer verilmiştir. Tez çalışmasında, maksimal ve singüler operatörlerin iki ağırlıklı eşitsizlikleri hem \tilde{A}_p hem de F_p ağırlık sınıfları kullanılarak ispat edilmiştir ve her iki operatöre ait sonuçlar derlenmiştir. Maksimal ve singüler komütatörler için ise \tilde{A}_p ağırlık sınıfları kullanılmıştır.

Bu tezin; içerdiği güncel bilgiler ve detaylı açıklamalar dolayısıyla, benzer alanlarda çalışma yapacak olan yüksek lisans ve doktora öğrencileri için yararlı ve yönlendirici bir kaynak olacağı düşünülmektedir.

KAYNAKLAR

- Agmon S., Lectures on elliptic boundary value problems, mathematical studies, vol. 2, D. Van Nostrand Co., Inc., Princeton, N.J.-Toronto-London, 1965.S. Agmon, A. Douglis, and L.
- Agmon S., Douglis A., and Nirenberg L., Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions, I , Comm. Pure Appl. Math. 12 (1959), 623-727.
- Ağcayazı M., Gogatishvili A., Koca K. and Mustafayev R., A note on maximal commutators and commutators of maximal functions, J. Math. Soc. Japan. 67(2) (2015), 581-593.
- Ağcayazi M., Gogatishvili A. and Mustafayev R., Weak-type estimates in Morrey spaces for maximal commutator and commutator of maximal function, Tokyo J. Math. 41 (1)(2018), 193-218.
- Aykol C., Almali S.E., Hasanov J.J., Scapellato A., A new characterization of two-weighted inequalities for maximal, singular operators and their commutators in generalized weighted Morrey spaces and applications (2023) (Yayına Gönderildi).
- Aykol C., Armutcu H., Omarova M.N., Maximal commutator and commutator of maximal function on modified Morrey spaces, Trans. Natl. Acad. Sci. Azerb. Ser. Phys.-Tech. Math. Sci. 36 (1) (2016), 29-35.
- Aykol C., Badalov X.A., Hasanov J.J., Maximal and singular operators in the local "complementary" generalized variable exponent Morrey spaces on unbounded sets, Quaest. Math. 43 (10) (2020), 1487-1512.
- Aykol C., Hasanov J.J., Safarov Z.V., A characterization of two-weighted inequalities for maximal, singular operators and their commutators in generalized weighted Morrey spaces, Funct. Approx. Comment. Math. Advance Publication 1-23 (2022).
- Bozyiğit G., Two-weighted inequalities for maximal and singular integral operators in global Morrey type spaces, (2023). Retrieved from <https://tez.yok.gov.tr/>
- Burenkov V., Gogatishvili A., Guliyev V.S. and Mustafayev R., Boundedness of the fractional maximal operator in local Morrey-type spaces, Complex Var. Elliptic Equ. 55 (8-10) (2010), 739-758.
- Calderón A.P. and Zygmund A., On the existence of certain singular integrals, Acta Math. 88 (1952), 85-139.
- Coifman R., Rochberg R. and Weiss G., Factorization theorems for Hardy spaces in several variables, Ann. of Math. 103 (2) (1976), 611-635.
- Dallacqua A. and Sweers G., Estimates for Green function and Poisson kernels of higher order Dirichlet boundary value problems, J. Differential Equations 205 (2004), 466-487.

- Di Fazio G. and Ragusa M. A., Commutators and Morrey spaces, *Bollettino U.M.I.* 7 5-A (1991), 323-332.
- Duran R.G., Sanmartino M. and Toschi M., Weighted a priori estimates for Poisson equation, *Indiana Univ. Math. J.* 29 (2009), 1-16.
- Fujii N., A condition for a two-weight norm inequality for singular operators, *Studia Math.*, 1991, v.98, p.175-190
- Garcia-Cuerva J. and Rubio de Francia J. L., Weighted norm inequalities and related topics, *North Holland Math. Studies* 116, North Holland, Amsterdam, (1985).
- Grafakos L. 2014. *Classical Fourier Analysis*. Springer NY, (3) 17, 638.
- Guliyev V.S., Boundedness of the maximal, potential and singular operators in the generalized Morrey spaces, *J. Inequal. Appl. Art. ID* 503948, 20 pp. (2009).
- Guliyev V.S., Generalized weighted Morrey spaces and higher order commutators of sublinear operators, *Eurasian Math. J.* 3 (3) 2012, 33-61.
- Guliyev V.S., Function spaces, integral operators and two weighted inequalities on homogeneous groups, *Some applications. (Russian)* Baku, 1-332 (1999).
- Guliyev V.S., Integral operators on function spaces on the homogeneous groups and on domains in G , (Russian) Doctor's degree dissertation, Moscow, Mat. Inst. Steklov, 1-329 (1994).
- Guliyev V.S., Local generalized Morrey spaces and singular integrals with rough kernel, *Azerb. J. Math.* 3 (2), 2013, 79-94.
- Guliyev V.S., Aliyev S.S., Karaman T. and Shukurov P.S. 2011. Boundedness of sublinear operators and commutators on generalized Morrey spaces. *Integr. Equ. Oper. Theory*, 71 (3), 327-355.
- Guliyev V.S., Karaman T., Mustafayev R.Ch. and Serbetçi A., Commutators of sublinear operators generated by Calderón-Zygmund operator on generalized weighted Morrey spaces, *Czechoslovak Math. J.* 64 (139) (2) (2014), 365-386.
- Hao C. 2020. *Lecture notes on harmonic analysis*, Institute of Math. AMSS, CAS.
- Haroske D.D. and Skrzypczak L., Embeddings of weighted Morrey spaces, *Math. Nachr.* 290 (7) (2017), 1066-1086.
- Ho K.P., Singular integral operators, John-Nirenberg inequalities and Tribel-Lizorkin type spaces on weighted Lebesgue spaces with variable exponents, *Revista De La Union Matematica Argentina* 57 (1) (2016), 85-101.
- Janson S., Mean oscillation and commutators of singular integral operators, *Ark. Mat.* 16 (1978), 263-270.

- Karaman T., Guliyev V.S. and Şerbetçi A., Boundedness of sublinear operators generated by Calderón-Zygmund operators on generalized weighted Morrey spaces, *An. Stiint. Univ. Al. I. Cuza Iasi. Mat. (N. S.)* 60 (1) (2014), 227-244.
- Komori Y. and Shirai S., Weighted Morrey spaces and a singular integral operator, *Math. Nachr.* 282 (2) (2009), 219-231.
- Kreyszig E. 1989. *Introductory Functional Analysis with Applications*, Wiley
- Lerner A.K., Weighted norm inequalities for the local sharp maximal function, *J. Fourier Anal. Appl.* 10 (5) (2004), 465-474.
- Mizuhara T., Boundedness of some classical operators on generalized Morrey spaces, *Harmonic Analysis (S. Igari, Editor), ICM 90 Satellite Proceedings*, Springer - Verlag, Tokyo 183-189 (1991).
- Morrey C.B., On the solutions of quasi-linear elliptic partial differential equations, *Trans. Amer. Math. Soc.* 43 (1938), 126-166.
- Muckenhoupt B., Weighted norm inequalities for the Hardy maximal function, *Trans. Amer. Math. Soc.* 165(1972), 207-226.
- Nakai E., Hardy-Littlewood maximal operator, singular integral operators and Riesz potentials on generalized Morrey spaces, *Math. Nachr.* 166, 95-103 (1994).
- Nakamura S., Sawano Y., and Tanaka H., The fractional operators on weighted Morrey spaces, *J. Geom. Anal.* 28 (2) (2018), 1502-1524.
- Neugebauer C.J., Inserting Ap-weights, *Proc. Amer. Math. Soc.* 87(4) (1983), 644-648.
- Neugebauer C.J., Iterations of Hardy-Littlewood maximal functions, *Proc. Amer. Math. Soc.* 101 (1987), 272-276.
- Perez C., On sufficient conditions for the boundedness of the Hardy-Littlewood maximal operator between weighted L_p -spaces with different weights, *Proc. London Math. Soc.* 3 (71) (1995) 135-157.
- Royden H.L. and Fitzpatrick P.M. 2010. *Real analysis*, China Machine Press, (4).
- Sadosky C. 1979. *Interpolation of operators and singular integrals*, Marcel Dekker Inc., 375p
- Samko N., Weighted Hardy and singular operators in Morrey spaces, *J. Math. Anal. Appl.* 350 (1) (2009), 56-72.
- Sawano Y., A thought on generalized Morrey spaces, *J. Indonesian Math. Soc.* 25(3), 210-281 (2019).
- Sawyer E.T., A characterization of a two weight norm weight inequality for maximal operators, *Studia Math.* 75 (1982), 1-11.

Stein E.M., Harmonic analysis: Real-variable methods, orthogonality and oscillatory integrals. Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1993.

Tanaka H., Two-weight norm inequalities on Morrey spaces, Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. 40 (2) (2015), 773-791.

Widman K.O., Inequalities for the Green function and boundary continuity of the gradient of solutions of elliptic differential equations, Math. Scand. 21 (1967), 17-37.