

**ANKARA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

DOKTORA TEZİ

DAYANIKLI 3^k FAKTÖRİYEL TASARIMLAR

Özgün KARATEPE

İSTATİSTİK ANABİLİM DALI

**ANKARA
2026**

Her hakkı saklıdır

ÖZET

Doktora Tezi

DAYANIKLI 3^k FAKTÖRİYEL TASARIMLAR

Özgün KARATEPE

Ankara Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
İstatistik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Birdal ŞENOĞLU

Bu çalışmada, 3^k faktöriyel tasarımlarda hata terimlerinin dağılımının Kumaraswamy Weibull (KumW) ve Çarpık Normal (Skew Normal – SN) olduğu varsayılarak model parametrelerinin dayanıklı tahmin edicileri Tiku (1967) tarafından önerilen uyarlanmış en çok olabilirlik (modified maximum likelihood – MML) yöntemi kullanılarak elde edilmiş ve bu tahmin edicilere dayalı test istatistikleri önerilmiştir.

MML tahmin edicileri asimptotik olarak en çok olabilirlik (maximum likelihood – ML) tahmin edicilerine denktir. Bir başka deyişle, MML tahmin edicileri düzgünlük koşulları altında asimptotik olarak yansız ve etkindir. MML yönteminde veri setindeki aykırı değerlere küçük ağırlıklar verildiğinden, bu tahmin ediciler aykırı değerlere karşı daha dayanıklıdır. Ayrıca, ML tahmin edicilerinden farklı olarak, MML tahmin edicileri kapalı formda elde edilir. Bu özellik, ML yönteminde sıklıkla kullanılan iteratif çözüm yöntemlerinde karşılaşılan problemlerin (yanlış köke yakınsama, hiç yakınsamama, birden fazla köke yakınsama) önüne geçilmesini sağlar.

Elde edilen tahmin ediciler ve bu tahmin edicilere dayalı test istatistiklerinin performansları sırasıyla normal teoriye dayalı tahmin ediciler ve test istatistikleri ile Monte Carlo simülasyonu yardımıyla karşılaştırılmıştır. Monte Carlo simülasyon sonuçları, MML tahmin edicilerine dayalı test istatistiklerinin klasik test istatistiklerinden daha etkin ve daha dayanıklı olduğunu göstermiştir. Ayrıca, önerilen test istatistiklerinin performansı yapay olarak üretilmiş bir veri seti üzerinde incelenmiştir.

Mayıs 2026, 89 sayfa

Anahtar Kelimeler: KumW dağılımı, SN dağılımı, Parametre tahmini, Uyarlanmış en çok olabilirlik, Monte Carlo simülasyonu

ABSTRACT

PhD Thesis

ROBUST 3^k FACTORIAL DESIGNS

Özgün KARATEPE

Ankara University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Statistics

Supervisor: Prof. Dr. Birdal ŞENOĞLU

In this study, robust estimators of model parameters are obtained using the modified maximum likelihood (MML) method proposed by Tiku (1967), under the assumption that the error terms in 3^k factorial designs follow Kumaraswamy Weibull (KumW) and Skew Normal (SN) distributions, and test statistics based on these estimators are proposed.

MML estimators are asymptotically equivalent to maximum likelihood (ML) estimators. In other words, MML estimators are asymptotically unbiased and efficient under regularity conditions. Since smaller weights are assigned to outliers in the data set within the MML method, these estimators are more robust against outliers. Furthermore, unlike ML estimators, MML estimators are obtained in closed form. This property prevents the problems commonly encountered in iterative solution methods frequently employed in the ML approach (convergence to the wrong root, non-convergence of iterations, convergence to multiple roots).

The performance of the obtained estimators and the test statistics based on these estimators are compared, respectively, with those of normal theory-based estimators and test statistics via Monte Carlo simulation. The Monte Carlo simulation results demonstrated that the test statistics based on MML estimators are more efficient and more robust than the classical test statistics. In addition, the performance of the proposed test statistics is examined on a simulated dataset.

May 2026, 89 pages

Keywords: KumW distribution, SN distribution, Parameter estimation, Modified maximum likelihood, Monte Carlo simulation

TEŞEKKÜR

Bu tez çalışmasının her aşamasında tüm bilgi birikimi ve tecrübesini benimle paylaşarak doktora eğitimi sürecimin her aşamasında bana destek olan, çalışkanlığı, prensipleri ile kendime her zaman örnek aldığım ve öğrencisi olmaktan onur duyduğum çok değerli danışman hocam Prof. Dr. Birdal ŞENOĞLU'na en içten saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

Destegini hiçbir zaman esirgemeyen, gece gündüz demeden aklıma takılan her konuyu danışabildiğim, değerli hocam Doç. Dr. Gamze GÜVEN'e en içten saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

TİK toplantılarındaki yardımları ve tez çalışmamdaki değerli katkılarından dolayı değerli hocam Dr. Öğr. Üyesi Yeşim GÜNEY'e en içten saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

Her zaman arkamda olan, doktora sürecim boyunca bana sabreden hayat arkadaşım, canım eşim Elçin Elif KARATEPE'ye en içten teşekkürlerimi sunarım.

Devamlı olarak beni destekleyen ve cesaretlendiren canım annem Berra Tülay KARATEPE'ye, babam Dinçer KARATEPE'ye ve kardeşim Sevi KARATEPE'ye teşekkürlerimi sunarım.

Doktora eğitimim boyunca hep yanımda olan, bu süreci eğlenceli hale getiren canım dostum, kardeşim Ahmet Can ARIK'a teşekkürlerimi sunarım.

Özgün KARATEPE
Ankara, Mayıs 2026

İÇİNDEKİLER

TEZ ONAY SAYFASI	
ETİK.....	i
ÖZET.....	ii
ABSTRACT	iii
TEŞEKKÜR	iv
SİMGELER DİZİNİ	vi
ŞEKİLLER DİZİNİ	vii
ÇİZELGELER DİZİNİ	viii
1. GİRİŞ.....	1
1.1 $a \times b$ Faktöriyel Tasarım	2
1.2 $a \times b \times c$ Faktöriyel Tasarım	5
2. TEMEL BİLGİLER VE YÖNTEMLER.....	11
2.1 KumW Dağılımı	11
2.2 SN Dağılımı.....	13
2.3 MML Yöntemi.....	15
3. HATA TERİMLERİNİN KUMW DAĞILIMINA SAHİP OLDUĞU VARSAYIMI ALTINDA 3^k FAKTÖRİYEL TASARIMLAR	17
3.1 Dayanıklı 3^2 Faktöriyel Tasarım	17
3.1.1 Parametre tahmini	18
3.1.2 Hipotez testi	28
3.2 Dayanıklı 3^3 Faktöriyel Tasarım	32
3.2.1 Parametre tahmini	33
3.2.2 Hipotez testi	44
3.3 Dayanıklılık.....	49
3.4 Dayanıklı 3^k Faktöriyel Tasarım	51
4. HATA TERİMLERİNİN SN DAĞILIMINA SAHİP OLDUĞU VARSAYIMI ALTINDA 3^k FAKTÖRİYEL TASARIMLAR.....	55
4.1 Dayanıklı 3^2 Faktöriyel Tasarım	55
4.1.1 Parametre tahmini	55
4.1.2 Hipotez testi	61
4.2 Dayanıklı 3^3 Faktöriyel Tasarım	64
4.2.1 Parametre tahmini	64
4.2.2 Hipotez testi	73
4.3 Dayanıklılık.....	76
4.4 Dayanıklı 3^k Faktöriyel Tasarım	78
5. UYGULAMA	82
6. SONUÇ	86
KAYNAKLAR	88
ÖZGEÇMİŞ.....	90

SİMGELER DİZİNİ

$\ln(\cdot)$	: Doğal logaritma fonksiyonu
$T(\cdot;\cdot)$	: Owen T fonksiyonu
$\forall$	: Her
λ	: Çarpıklık parametresi
ϕ	: Standart normal dağılımın olasılık yoğunluk fonksiyonu
Φ	: Standart normal dağılımın birikimli dağılım fonksiyonu
γ_1	: Çarpıklık katsayısı
γ_2	: Basıklık katsayısı

Kısaltmalar

ANOVA	: Varyans Analizi (Analysis of Variance)
cdf	: Birikimli Dağılım Fonksiyonu (Cumulative Distribution Function)
DEF	: Ortak Etkinlik (Deficiency)
IG	: Ters Gauss (Inverse Gaussian)
KumG	: Kumaraswamy Genelleştirilmiş Dağılım Ailesi
KumW	: Kumaraswamy Weibull
LS	: En Küçük Kareler (Least Squares)
ML	: En Çok Olabilirlik (Maximum Likelihood)
MML	: Uyarlanmış En Çok Olabilirlik (Modified Maximum Likelihood)
MS	: Kareler Ortalaması (Mean Squares)
MSE	: Hata Kareler Ortalaması (Mean Squares Error)
NID	: Normal Dağılımlı ve Bağımsız (Normally and Independently Distributed)
pdf	: Olasılık Yoğunluk Fonksiyonu (Probability Density Function)
RE	: Göreli Etkinlik (Relative Efficiency)
SN	: Çarpık Normal (Skew Normal)
SS	: Kareler Toplamı (Sum of Squares)

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 2.1 $KumW(a, b, p, 0,1)$ dağılımının farklı a, b ve p değerleri için pdf grafikleri.	12
Şekil 2.2 $SN(0, 1, \lambda)$ dağılımının farklı λ değerleri için pdf grafikleri.....	14
Şekil 3.1 3^2 faktöriyel tasarımın grafiksel gösterimi	18
Şekil 3.2 3^3 faktöriyel tasarımın grafiksel gösterimi	32

ÇİZELGELER DİZİNİ

Çizelge 2.1	KumW dağılımının farklı a, b ve p değerleri için çarpıklık ve basıklık değerleri	13
Çizelge 2.2	SN dağılımının farklı λ değerleri için çarpıklık ve basıklık değerleri	15
Çizelge 3.1	3^2 faktöriyel tasarımda hata terimlerinin KumW dağılımına sahip olması durumunda model parametrelerinin LS ve MML tahmin edicilerinin Yan, MSE, RE ve DEF değerleri.....	27
Çizelge 3.2	3^2 faktöriyel tasarımda hata terimlerinin KumW dağılımına sahip olması durumunda F_A, F_{AB}, F_A^* ve F_{AB}^* test istatistiklerinin deneysel I. tip hataları	30
Çizelge 3.3	3^2 faktöriyel tasarımda hata terimlerinin KumW dağılımına sahip olması durumunda F_A ve F_A^* test istatistiklerinin güçleri.....	31
Çizelge 3.4	3^2 faktöriyel tasarımda hata terimlerinin KumW dağılımına sahip olması durumunda F_{AB} ve F_{AB}^* test istatistiklerinin güçleri	31
Çizelge 3.5	3^3 faktöriyel tasarımda hata terimlerinin KumW dağılımına sahip olması durumunda model parametrelerinin LS ve MML tahmin edicilerinin Yan değerleri	42
Çizelge 3.6	3^3 faktöriyel tasarımda hata terimlerinin KumW dağılımına sahip olması durumunda model parametrelerinin LS ve MML tahmin edicilerinin MSE, RE ve DEF değerleri.....	43
Çizelge 3.7	3^3 faktöriyel tasarımda hata terimlerinin KumW dağılımına sahip olması durumunda $F_A, F_{AB}, F_{ABC}, F_A^*, F_{AB}^*$ ve F_{ABC}^* test istatistiklerinin deneysel I. tip hataları	46
Çizelge 3.8	3^3 faktöriyel tasarımda hata terimlerinin KumW dağılımına sahip olması durumunda F_A ve F_A^* test istatistiklerinin güçleri.....	47
Çizelge 3.9	3^3 faktöriyel tasarımda hata terimlerinin KumW dağılımına sahip olması durumunda F_{AB} ve F_{AB}^* test istatistiklerinin güçleri	48
Çizelge 3.10	3^3 faktöriyel tasarımda hata terimlerinin KumW dağılımına sahip olması durumunda F_{ABC} ve F_{ABC}^* test istatistiklerinin güçleri.....	48
Çizelge 3.11	3^3 faktöriyel tasarımda hata terimlerinin KumW dağılımına sahip olması durumunda Model 1,2,3 ve 4 için $F_A, F_{AB}, F_{ABC}, F_A^*, F_{AB}^*$ ve F_{ABC}^* testlerinin deneysel I. tip hataları ve güçleri	51
Çizelge 4.1	3^2 faktöriyel tasarımda hata terimlerinin SN dağılımına sahip olması durumunda model parametrelerinin LS ve MML tahmin edicilerinin Yan, MSE, RE ve DEF değerleri.....	60
Çizelge 4.2	3^2 faktöriyel tasarımda hata terimlerinin SN dağılımına sahip olması durumunda F_A, F_{AB}, F_A^* ve F_{AB}^* test istatistiklerinin deneysel I. tip hataları..	62
Çizelge 4.3	3^2 faktöriyel tasarımda hata terimlerinin SN dağılımına sahip olması durumunda F_A ve F_A^* test istatistiklerinin güçleri.....	63
Çizelge 4.4	3^2 faktöriyel tasarımda hata terimlerinin SN dağılımına sahip olması durumunda F_{AB} ve F_{AB}^* test istatistiklerinin güçleri	63

Çizelge 4.5	3^3 faktöriyel tasarımda hata terimlerinin SN dağılımına sahip olması durumunda model parametrelerinin LS ve MML tahmin edicilerinin Yan değerleri	71
Çizelge 4.6	3^3 faktöriyel tasarımda hata terimlerinin SN dağılımına sahip olması durumunda model parametrelerinin LS ve MML tahmin edicilerinin MSE, RE ve DEF değerleri.....	72
Çizelge 4.7	3^3 faktöriyel tasarımda hata terimlerinin SN dağılımına sahip olması durumunda $F_A, F_{AB}, F_{ABC}, F_A^*, F_{AB}^*$ ve F_{ABC}^* test istatistiklerinin deneysel I. tip hataları	74
Çizelge 4.8	3^3 faktöriyel tasarımda hata terimlerinin SN dağılımına sahip olması durumunda F_A ve F_A^* test istatistiklerinin güçleri	75
Çizelge 4.9	3^3 faktöriyel tasarımda hata terimlerinin SN dağılımına sahip olması durumunda F_{AB} ve F_{AB}^* test istatistiklerinin güçleri	75
Çizelge 4.10	3^3 faktöriyel tasarımda hata terimlerinin SN dağılımına sahip olması durumunda F_{ABC} ve F_{ABC}^* test istatistiklerinin güçleri.....	76
Çizelge 4.11	3^3 faktöriyel tasarımda hata terimlerinin SN dağılımına sahip olması durumunda Model 1,2,3 ve 4 için $F_A, F_{AB}, F_{ABC}, F_A^*, F_{AB}^*$ ve F_{ABC}^* testlerinin I. tip hataları ve güçleri	78
Çizelge 5.1	Monte Carlo simülasyonu yardımıyla yapay olarak oluşturulmuş veri seti	82
Çizelge 5.2	μ ve σ parametrelerinin LS ve MML tahmin değerleri	83
Çizelge 5.3	Model parametrelerinin LS ve MML tahmin değerleri	84
Çizelge 5.4	Test istatistiklerinin değerleri, ilgili p değerleri, kritik değerler ve serbestlik dereceleri.....	84

1. GİRİŞ

Birçok deney, iki ya da daha fazla faktörün ana (main) ve etkileşim (interaction) etkilerini araştırmayı amaçlar. Bir yanıt değişkeni üzerindeki eşzamanlı etkileri inceleyen bu deneyler, faktöriyel deneyler (factorial experiments) veya çeşitli kaynaklarda belirtildiği üzere faktöriyel tasarımlar (factorial designs) olarak adlandırılır (Fisher 1935, Yates 1937). Faktöriyel tasarımların diğer bir tanımı ise, her faktörün her bir düzeyinin diğer faktörlerin her düzeyiyle birlikte yer aldığı, dolayısıyla faktör düzeylerinin tüm olası kombinasyonlarının denendiği deney düzenleridir (Hicks 1982, Cox ve Reid 2000, Kutner vd. 2004, Tabachnick ve Fidell 2007, Onyiah 2008, Wu ve Hamada 2021, Montgomery 2017).

Faktöriyel tasarımlar, tek faktörlü geleneksel tasarımlara kıyasla yeterli bilgi düzeyine daha az sayıda deneyle ulaşmayı mümkün kılarak zaman ve maliyet tasarrufu sağlar. Ayrıca, faktörler arasındaki etkileşimlerin araştırılmasına imkân verdiğiinden, her seferinde tek faktörün etkisini araştıran tasarımlara göre avantaj sağlar (Şenoğlu 2005, Hinkelmann ve Kempthorne 2005, Montgomery 2017). Bu nedenle, mühendislik, pazarlama, sağlık bilimleri, gıda endüstrisi, çevre bilimleri vb. pek çok alanda yaygın olarak kullanılmaktadır (Antony 2014, Gomez 1984, Malhotra 2019). Burada faktör, deneyde ilgilenilen durum ya da koşulları temsil eden ve iki ya da daha fazla düzeye sahip olabilen bağımsız değişkendir. Faktör düzeylerinin her bir kombinasyonu ise deneme olarak adlandırılır.

Yöntemsel bütünlüğü sağlamak ve kavramsal arka planı netleştirmek amacıyla, öncelikle genel faktöriyel tasarımlar incelenecektir. Genel faktöriyel tasarımlara örnek olarak uygulamada yaygın şekilde kullanılan iki faktörlü ($a \times b$) ve üç faktörlü ($a \times b \times c$) faktöriyel tasarımlar detaylı olarak anlatılacaktır.

1.1 $a \times b$ Faktöriyel Tasarım

A ve B gibi iki faktöre sahip ve bu faktörlerin sırasıyla a ve b düzeyinin olduğu n tekrarlı $a \times b$ faktöriyel tasarım için veri yapısı aşağıda gösterildiği gibidir.

		B Faktörü			
		1	2	...	b
A Faktörü	1	$y_{111}, y_{112}, \dots, y_{11n}$	$y_{121}, y_{122}, \dots, y_{12n}$	...	$y_{1b1}, y_{1b2}, \dots, y_{1bn}$
	2	$y_{211}, y_{212}, \dots, y_{21n}$	$y_{221}, y_{222}, \dots, y_{22n}$	...	$y_{2b1}, y_{2b2}, \dots, y_{2bn}$
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
	a	$y_{a11}, y_{a12}, \dots, y_{a1n}$	$y_{a21}, y_{a22}, \dots, y_{a2n}$	...	$y_{ab1}, y_{ab2}, \dots, y_{abn}$

Matematiksel model;

$$y_{ijk} = \mu + \tau_i + \gamma_j + (\tau\gamma)_{ij} + \varepsilon_{ijk},$$

$$i = 1, 2, \dots, a; j = 1, 2, \dots, b; k = 1, 2, \dots, n \quad (1.1)$$

şeklindedir. Burada;

y_{ijk} : A faktörünün i -inci, B faktörünün j -inci düzeyindeki k -ıncı gözlem değerini,

μ : genel ortalamayı,

τ_i : A faktörünün i -inci düzey etkisini,

γ_j : B faktörünün j -inci düzey etkisini,

$(\tau\gamma)_{ij}$: A faktörünün i -inci düzeyi ile B faktörünün j -inci düzeyi arasındaki etkileşim etkisini,

ε_{ijk} : rastgele hata terimlerini

ifade eder.

(1.1) modeli için hata terimlerinin bağımsız, varyansları homojen, ortalamaları sıfır ve varyansları σ^2 olan normal dağılıma sahip olduğu varsayılır. Bu varsayımlar kısaca $\varepsilon_{ijk} \sim NID(0, \sigma^2)$ şeklinde ifade edilir.

Ayrıca bu çalışmada (1.1) modeli sabit etkili modeldir. Diğer bir deyişle,

$$\sum_{i=1}^a \tau_i = 0, \sum_{j=1}^b \gamma_j = 0, \sum_{i=1}^a (\tau\gamma)_{ij} = 0 \text{ ve } \sum_{j=1}^b (\tau\gamma)_{ij} = 0$$

olduğu varsayılır.

(1.1) modeli için A ve B faktörlerinin ana etkileri ile AB etkileşim etkisinin anlamlı olup olmadığına ilişkin sıfır hipotezleri;

$$\begin{aligned} H_{01}: \forall \tau_i = 0, H_{02}: \forall \gamma_j = 0 \text{ ve } H_{03}: \forall (\tau\gamma)_{ij} = 0, \\ i = 1, 2, \dots, a, j = 1, 2, \dots, b \end{aligned} \quad (1.2)$$

şeklinde gösterilir.

(1.2)'de verilen hipotezleri sınamak için kullanılan test istatistikleri genel kareler toplamının (sum of squares – SS) parçalanışı yardımıyla aşağıda gösterildiği şekilde elde edilir. (1.1) modelinde genel kareler toplamı;

$$SS_{Toplam} = SS_A + SS_B + SS_{AB} + SS_{Hata}$$

olarak bileşenlerine ayrılır. Burada,

$$\begin{aligned} SS_{Toplam} &= \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^n (y_{ijk} - \bar{y}_{...})^2, SS_A = bn \sum_{i=1}^a (\bar{y}_{i..} - \bar{y}_{...})^2, \\ SS_B &= an \sum_{j=1}^b (\bar{y}_{.j.} - \bar{y}_{...})^2, SS_{AB} = n \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b (\bar{y}_{ij.} - \bar{y}_{i..} - \bar{y}_{.j.} + \bar{y}_{...})^2 \text{ ve} \\ SS_{Hata} &= \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^n (y_{ijk} - \bar{y}_{ij.})^2 \end{aligned}$$

sırasıyla, genel kareler toplamının, A , B ana etkilerinin, AB etkileşim etkisinin ve hatanın kareler toplamını ifade eder ve

$$\bar{y}_{i..} = \frac{\sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^n y_{ijk}}{bn}, \bar{y}_{.j.} = \frac{\sum_{i=1}^a \sum_{k=1}^n y_{ijk}}{an}, \bar{y}_{ij.} = \frac{\sum_{k=1}^n y_{ijk}}{n}, \bar{y}_{...} = \frac{\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^n y_{ijk}}{N}$$

ve $N = abn$

olarak tanımlanır. Her bir kareler toplamına karşılık gelen serbestlik dereceleri (degrees of freedom – df) aşağıdaki tabloda gösterilmiştir.

Kaynak	df
Denemeler	$ab - 1$
A	$a - 1$
B	$b - 1$
AB	$(a - 1)(b - 1)$
Hata	$N - ab$
Genel	$N - 1$

Kareler toplamaları ilgili serbestlik derecelerine bölünerek,

$$MS_A = \frac{SS_A}{a-1}, MS_B = \frac{SS_B}{b-1}, MS_{AB} = \frac{SS_{AB}}{(a-1)(b-1)} \text{ ve } MS_{Hata} = \frac{SS_{Hata}}{N-ab}$$

kareler ortalamaları (mean squares - MS) elde edilir. (1.2) de verilen hipotezler ilgili MS değerlerinin MS_{Hata} ya bölünmesiyle elde edilen

$$F_A = \frac{MS_A}{MS_{Hata}}, F_B = \frac{MS_B}{MS_{Hata}} \text{ ve } F_{AB} = \frac{MS_{AB}}{MS_{Hata}} \quad (1.3)$$

test istatistikleri kullanılarak sınanır. Burada, $F_A > F_{\alpha; a-1; N-ab}$ ise H_{01} hipotezi reddedilir ve A faktörünün ana etkisi anlamlıdır denir. Benzer şekilde, $F_B > F_{\alpha; b-1; N-ab}$ ise H_{02} hipotezi reddedilir ve B faktörünün ana etkisi anlamlıdır denir. $F_{AB} > F_{\alpha; (a-1)(b-1); N-ab}$ olduğunda ise H_{03} hipotezi reddedilir ve A ve B faktörleri arasındaki etkileşim etkisi anlamlıdır denir (Şenoğlu ve Acıtaş 2014). Burada α , önceden belirlenen anlamlılık düzeyini ifade etmektedir.

1.2 $a \times b \times c$ Faktöriyel Tasarım

A , B ve C gibi üç faktöre sahip ve bu faktörlerin sırasıyla a , b ve c düzeyinin olduğu n tekrarlı $a \times b \times c$ faktöriyel tasarım için veri yapısı aşağıda gösterildiği gibidir.

		B Faktörü											
		1				2				...			
		1				2				...			
A Faktörü	C Faktörü	1	2	...	c	1	2	...	c	1	2	...	c
		1	2	...	c	1	2	...	c	1	2	...	c
A Faktörü	1	$y_{1111},$	$y_{1121},$	$\dots$	$y_{11c1},$	$y_{1211},$	$y_{1221},$	$\dots$	$y_{12c1},$	$y_{1b11},$	$y_{1b21},$	$\dots$	$y_{1bc1},$
		$y_{1112},$	$y_{1122},$	$\dots$	$y_{11c2},$	$y_{1212},$	$y_{1222},$	$\dots$	$y_{12c2},$	$y_{1b12},$	$y_{1b22},$	$\dots$	$y_{1bc2},$
		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
		$y_{111n},$	$y_{112n},$	$\dots$	$y_{11cn},$	$y_{121n},$	$y_{122n},$	$\dots$	$y_{12cn},$	$y_{1b1n},$	$y_{1b2n},$	$\dots$	$y_{1bcn},$
	2	$y_{2111},$	$y_{2121},$	$\dots$	$y_{21c1},$	$y_{2211},$	$y_{2221},$	$\dots$	$y_{22c1},$	$y_{2b11},$	$y_{2b21},$	$\dots$	$y_{2bc1},$
		$y_{2112},$	$y_{2122},$	$\dots$	$y_{21c2},$	$y_{2212},$	$y_{2222},$	$\dots$	$y_{22c2},$	$y_{2b12},$	$y_{2b22},$	$\dots$	$y_{2bc2},$
		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
		$y_{211n},$	$y_{212n},$	$\dots$	$y_{21cn},$	$y_{221n},$	$y_{222n},$	$\dots$	$y_{22cn},$	$y_{2b1n},$	$y_{2b2n},$	$\dots$	$y_{2bcn},$
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
	a	$y_{a111},$	$y_{a121},$	$\dots$	$y_{a1c1},$	$y_{a211},$	$y_{a221},$	$\dots$	$y_{a2c1},$	$y_{ab11},$	$y_{ab21},$	$\dots$	$y_{abc1},$
		$y_{a112},$	$y_{a122},$	$\dots$	$y_{a1c2},$	$y_{a212},$	$y_{a222},$	$\dots$	$y_{a2c2},$	$y_{ab12},$	$y_{ab22},$	$\dots$	$y_{abc2},$
		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
		$y_{a11n},$	$y_{a12n},$	$\dots$	$y_{a1cn},$	$y_{a21n},$	$y_{a22n},$	$\dots$	$y_{a2cn},$	$y_{ab1n},$	$y_{ab2n},$	$\dots$	$y_{abcn},$

Matematiksel model;

$$y_{ijkl} = \mu + \tau_i + \gamma_j + (\tau\gamma)_{ij} + \delta_k + (\tau\delta)_{ik} + (\gamma\delta)_{jk} + (\tau\gamma\delta)_{ijk} + \varepsilon_{ijkl} \quad (1.4)$$

$$i = 1, 2, \dots, a; j = 1, 2, \dots, b; k = 1, 2, \dots, c; l = 1, 2, \dots, n$$

şeklindedir. Burada;

y_{ijkl} : A faktörünün i -inci, B faktörünün j -inci, C faktörünün k -inci düzeyindeki l -inci gözlem değeri,

μ : genel ortalamayı,

τ_i : A faktörünün i -inci düzey etkisini,

γ_j : B faktörünün j -inci düzey etkisini,

δ_k : C faktörünün k -inci düzey etkisini,

$(\tau\gamma)_{ij}$: A faktörünün i -inci düzeyi ile B faktörünün j -inci düzeyi arasındaki etkileşim etkisini,

$(\tau\delta)_{ik}$: A faktörünün i -inci düzeyi ile C faktörünün k -ıncı düzeyi arasındaki etkileşim etkisini,

$(\gamma\delta)_{jk}$: B faktörünün j -inci düzeyi ile C faktörünün k -ıncı düzeyi arasındaki etkileşim etkisini,

$(\tau\gamma\delta)_{ijk}$: A faktörünün i -inci düzeyi, B faktörünün j -inci düzeyi ile C faktörünün k -ıncı düzeyi arasındaki etkileşim etkisini,

ε_{ijkl} : rastgele hata terimlerini

ifade eder.

(1.4) modeli için hata terimlerinin bağımsız, varyansları homojen, ortalamaları sıfır ve varyansları σ^2 olan normal dağılıma sahip olduğu varsayılır. Bu varsayımlar kısaca $\varepsilon_{ijkl} \sim NID(0, \sigma^2)$ şeklinde gösterilir.

Ayrıca bu çalışmada (1.4) modeli sabit etkili modeldir. Diğer bir deyişle,

$$\sum_{i=1}^a \tau_i = 0, \sum_{j=1}^b \gamma_j = 0, \sum_{k=1}^c \delta_k = 0, \sum_{i=1}^a (\tau\gamma)_{ij} = 0, \sum_{j=1}^b (\tau\gamma)_{ij} = 0$$

$$\sum_{i=1}^a (\tau\delta)_{ik} = 0, \sum_{k=1}^c (\tau\delta)_{ik} = 0, \sum_{j=1}^b (\gamma\delta)_{jk} = 0, \sum_{k=1}^c (\gamma\delta)_{jk} = 0$$

$$\sum_{i=1}^a (\tau\gamma\delta)_{ijk} = 0, \sum_{j=1}^b (\tau\gamma\delta)_{ijk} = 0 \text{ ve } \sum_{k=1}^c (\tau\gamma\delta)_{ijk} = 0$$

olduğu varsayılır.

(1.4) modeli için A , B ve C faktörlerinin ana etkileri ile AB , AC , BC ve ABC etkileşim etkisinin anlamlı olup olmadığına ilişkin sıfır hipotezleri;

$$H_{01}: \forall \tau_i = 0, H_{02}: \forall \gamma_j = 0, H_{03}: \forall \delta_k = 0, H_{04}: \forall (\tau\gamma)_{ij} = 0,$$

$$H_{05}: \forall (\tau\delta)_{ik} = 0, H_{06}: \forall (\gamma\delta)_{jk} = 0 \text{ ve } H_{07}: \forall (\tau\gamma\delta)_{ijk} = 0 \quad (1.5)$$

$$i = 1, 2, \dots, a; j = 1, 2, \dots, b; k = 1, 2, \dots, c$$

şeklinde gösterilir.

(1.5)'te verilen hipotezleri sınamak için kullanılan test istatistikleri genel kareler toplamının parçalanışı yardımıyla aşağıda gösterildiği şekilde elde edilir. (1.4) modelinde genel kareler toplamı;

$$SS_{Toplam} = SS_A + SS_B + SS_C + SS_{AB} + SS_{AC} + SS_{BC} + SS_{ABC} + SS_{Hata}$$

şeklinde bileşenlerine ayrılır. Burada,

$$\begin{aligned} SS_{Toplam} &= \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^c \sum_{l=1}^n (y_{ijkl} - \bar{y}_{....})^2, SS_A = bcn \sum_{i=1}^a (\bar{y}_{i...} - \bar{y}_{....})^2, \\ SS_B &= acn \sum_{j=1}^b (\bar{y}_{.j..} - \bar{y}_{....})^2, SS_C = abn \sum_{k=1}^c (\bar{y}_{..k.} - \bar{y}_{....})^2, \\ SS_{AB} &= cn \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b (\bar{y}_{ij..} - \bar{y}_{i...} - \bar{y}_{.j..} + \bar{y}_{....})^2, \\ SS_{AC} &= bn \sum_{i=1}^a \sum_{k=1}^c (\bar{y}_{i.k.} - \bar{y}_{i...} - \bar{y}_{..k.} + \bar{y}_{....})^2, \\ SS_{BC} &= an \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^c (\bar{y}_{.jk.} - \bar{y}_{.j..} - \bar{y}_{..k.} + \bar{y}_{....})^2, \\ SS_{ABC} &= n \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^c (\bar{y}_{ijk.} - \bar{y}_{ij..} - \bar{y}_{.jk.} - \bar{y}_{i.k.} + \bar{y}_{i...} + \bar{y}_{.j..} + \bar{y}_{..k.} - \bar{y}_{....})^2, \\ SS_{Hata} &= \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^c \sum_{l=1}^n (y_{ijkl} - \bar{y}_{ijk.})^2 \end{aligned}$$

sırasıyla, genel kareler toplamını, A , B , C ana etkilerinin, AB , AC , BC ikili etkileşim etkilerinin, ABC üçlü etkileşim etkisinin ve hatanın kareler toplamlarını ifade eder. Burada,

$$\begin{aligned} \bar{y}_{i...} &= \frac{\sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^c \sum_{l=1}^n y_{ijkl}}{bcn}, \bar{y}_{.j..} = \frac{\sum_{i=1}^a \sum_{k=1}^c \sum_{l=1}^n y_{ijkl}}{acn}, \bar{y}_{..k.} = \frac{\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{l=1}^n y_{ijkl}}{abn}, \\ \bar{y}_{ij..} &= \frac{\sum_{k=1}^c \sum_{l=1}^n y_{ijkl}}{cn}, \bar{y}_{i.k.} = \frac{\sum_{j=1}^b \sum_{l=1}^n y_{ijkl}}{bn}, \bar{y}_{.jk.} = \frac{\sum_{i=1}^a \sum_{l=1}^n y_{ijkl}}{an}, \bar{y}_{ijk.} = \frac{\sum_{l=1}^n y_{ijkl}}{n}, \\ \bar{y}_{....} &= \frac{\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^c \sum_{l=1}^n y_{ijkl}}{N} \text{ ve } N = abcn \end{aligned}$$

olarak tanımlanır. Her bir kareler toplamına karşılık gelen serbestlik dereceleri aşağıdaki tabloda gösterilmiştir.

Kaynak	df
Denemeler	$abc - 1$
A	$a - 1$
B	$b - 1$
C	$c - 1$
AB	$(a - 1)(b - 1)$
AC	$(a - 1)(c - 1)$
BC	$(b - 1)(c - 1)$
ABC	$(a - 1)(b - 1)(c - 1)$
Hata	$N - abc$
Genel	$N - 1$

Kareler toplamaları ilgili serbestlik derecelerine bölünerek,

$$MS_A = \frac{SS_A}{a-1}, MS_B = \frac{SS_B}{b-1}, MS_C = \frac{SS_C}{c-1}, MS_{AB} = \frac{SS_{AB}}{(a-1)(b-1)}, MS_{AC} = \frac{SS_{AC}}{(a-1)(c-1)},$$

$$MS_{BC} = \frac{SS_{BC}}{(b-1)(c-1)}, MS_{ABC} = \frac{SS_{ABC}}{(a-1)(b-1)(c-1)} \text{ ve } MS_{Hata} = \frac{SS_{Hata}}{N-abc}$$

kareler ortalamaları elde edilir. (1.5)'te verilen hipotezler ilgili MS değerlerinin MS_{Hata} ya bölünmesiyle elde edilen

$$F_A = \frac{MS_A}{MS_{Hata}}, F_B = \frac{MS_B}{MS_{Hata}}, F_C = \frac{MS_C}{MS_{Hata}}, F_{AB} = \frac{MS_{AB}}{MS_{Hata}}, F_{AC} = \frac{MS_{AC}}{MS_{Hata}},$$

$$F_{BC} = \frac{MS_{BC}}{MS_{Hata}} \text{ ve } F_{ABC} = \frac{MS_{ABC}}{MS_{Hata}} \quad (1.6)$$

test istatistikleri kullanılarak sınanır. (1.6)'da verilen test istatistiklerinin hesaplanan değerleri, yukarıdaki tabloda verilen ilgili serbestlik derecelerine karşılık gelen F tablo değerinden büyük olduğunda ilgili sıfır hipotezi reddedilir.

İki ve üç faktörlü tasarımlarda açıklanan yöntem ve modelleme çerçevesi, k faktörün her birinin iki düzeye sahip olduğu 2^k , üç düzeye sahip olduğu 3^k vb. faktöriyel tasarımlara genellenebilir. 2^k faktöriyel tasarımlarda düzeyler çoğunlukla “düşük–yüksek” biçiminde

kodlanırken 3^k tasarımlarda ana etkiler ve etkileşim etkileri uygun kodlamayla modele dahil edilir. 3^k faktöriyel tasarımın özel bir durumu olan 3^3 faktöriyel tasarım modeli her biri üç düzeye sahip A , B ve C gibi üç faktörlü tasarımlardır. Bahsedilen tüm bu tasarımlarda kurulan hipotezler, $a \times b \times c$ faktöriyel tasarımda olduğu gibi, genel kareler toplamının parçalanışı ile elde edilen test istatistikleri ile sınanır ve yorumlama yine ana etkilerin varlığı ve bu etkilerin diğer faktöre bağlı olarak değişip değişmediği (etkileşim) etrafında yapılır (Box ve Hunter 2005).

Daha önce de bahsedildiği gibi faktöriyel tasarımlar geleneksel olarak hata terimlerinin normal dağıldığı varsayımına dayanmaktadır. Bu varsayım altında en küçük kareler (Least Squares – LS) tahmin edicileri en etkin tahmin edicilerdir. Ancak gerçek hayat problemlerinde hata terimlerinin dağılımı genellikle normal değildir, bkz. Pearson (1932), Geary (1947), Elveback vd. (1970), Huber (1981), Tiku vd. (1986) ve Şenoğlu ve Tiku (2001, 2002). Normal dağılım varsayımının sağlanmadığı durumlarda LS tahmin edicilerinin ve bu tahmin edicilere dayalı testlerin etkinlikleri hızla düşer.

Şenoğlu (2005, 2007) ve Şenoğlu vd. (2012) sırasıyla Weibull, genelleştirilmiş lojistik ve normal olmayan simetrik (kısa kuyruklu simetrik (Short-Tailed Symmetric - STS) ve uzun kuyruklu simetrik (Long-Tailed Symmetric - LTS)) dağılımlarına sahip olduğu varsayımı altında 2^k faktöriyel tasarımları ele almış, faktörlerin ana etkileri ve etkileşim etkilerini test etmek için Tiku (1967) tarafından önerilen Uyarlanmış En Çok Olabilirlik (Modified Maximum Likelihood – MML) tahmin edicilerine dayalı test istatistiklerinin LS tahmin edicilerine dayalı test istatistiklerine göre daha güçlü ve dayanıklı olduğunu göstermiştir.

Bu tez çalışmasında literatürde var olan diğer çalışmalardan farklı olarak 3^k faktöriyel tasarımlar ele alınmış, hata terimlerinin dağılımının Kumaraswamy Weibull (KumW) ve Çarpık Normal (Skew Normal – SN) olduğu varsayımları altında model parametrelerinin MML tahmin edicileri elde edilmiştir. Daha sonra faktörlerin ana etkilerini ve etkileşim etkilerini test etmek için bu tahmin edicilere dayalı dayanıklı testler önerilmiştir. Elde edilen tahmin ediciler ve bu tahmin edicilere dayalı test

istatistiklerinin performansları Monte Carlo simülasyonu yardımıyla sırasıyla normal teoriye dayalı tahmin ediciler ve bu tahmin edicilere dayalı testler ile karşılaştırılmıştır.

Çalışmanın ikinci bölümünde, KumW ve SN dağılımlarının temel özellikleri ayrıntılı olarak sunulmuştur. Ayrıca ilerleyen bölümlerde ele alınacak faktöriyel tasarım modellerinde parametre tahmini için kullanılan MML yöntemi hakkında genel bilgiler verilmiştir.

Üçüncü bölümde, hata terimlerinin KumW dağıldığı varsayımı altında 3^2 ve 3^3 faktöriyel tasarım modellerinin parametreleri için MML tahmin edicileri elde edilmiştir. Elde edilen bu tahmin ediciler ile LS tahmin edicilerinin etkinlikleri karşılaştırılmış ardından bu tahmin edicilere dayalı olarak geliştirilen test istatistiklerinin I. tip hata ve güç değerleri Monte Carlo simülasyonları aracılığıyla kapsamlı biçimde incelenmiştir. Ayrıca, 3^3 faktöriyel tasarım modeli parametrelerinin MML tahmin edicilerine dayalı test istatistikleri ile LS tahmin edicilerine dayalı test istatistikleri dayanıklılık bakımından da karşılaştırılmış; bir başka anlatımla, varsayılan hata dağılımından makul sapmalar altında testlerin performansları karşılaştırılmıştır.

Dördüncü bölümde, aynı yöntemsel çerçeve bu kez hata terimlerinin SN dağıldığı durumda uygulanmış; 3^2 ve 3^3 faktöriyel tasarım modelleri için MML tahmin edicileri elde edilmiş ve Bölüm 3 ile aynı sırada etkinlik, I. tip hata, güç değerleri ve dayanıklılık değerlendirmeleri yapılmıştır.

Beşinci bölümde, tez kapsamında elde edilen MML tahmin edicileri ve bunlara dayalı önerilen test istatistikleri SN dağılımı varsayımları altında yapay olarak üretilmiş veri seti üzerinde uygulanmış, elde edilen bulgular detaylı olarak sunulmuştur.

Altıncı bölümde, elde edilen tahmin ediciler ve bu tahmin edicilere dayalı olarak geliştirilen test istatistiklerinin performansları, çeşitli istatistiksel kriterler altında incelenmiş ve karşılaştırmalı olarak değerlendirilmiştir.

2. TEMEL BİLGİLER VE YÖNTEMLER

Bu bölümde, KumW ve SN dağılımlarının temel özellikleri ayrıntılı olarak sunulmuştur. Ayrıca ilerleyen bölümlerde ele alınacak faktöriyel tasarım modellerinde parametre tahmini için kullanılan MML yöntemi hakkında genel bilgiler verilmiştir.

2.1 KumW Dağılımı

KumW dağılımı, Kumaraswamy-genelleştirilmiş (KumG) dağılım ailesinin özel bir durumu olup, G fonksiyonu olarak Weibull dağılımının birikimli dağılım fonksiyonunun alınmasıyla elde edilir (Cordeiro vd. 2010, Cordeiro ve Castro 2011).

Y rastgele değişkeni KumW dağılımına sahip ise, $Y \sim KumW(a, b, p, \mu, \sigma)$ ile gösterilir, Dağılımın olasılık yoğunluk fonksiyonu (probability density function – pdf) ve birikimli dağılım fonksiyonu (cumulative distribution function – cdf) sırasıyla;

$$f(y) = \frac{abp}{\sigma} \left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right)^{p-1} \exp\left(-\left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right)^p\right) \left[1 - \exp\left(-\left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right)^p\right)\right]^{a-1} \left\{1 - \left[1 - \exp\left(-\left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right)^p\right)\right]^a\right\}^{b-1}$$

ve

$$F(y) = 1 - \left\{1 - \left[1 - \exp\left(-\left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right)^p\right)\right]^a\right\}^b, y \geq \mu, a, b, p, \sigma > 0$$

şeklindedir. Burada; a, b ve p şekil parametrelerini, μ konum parametresini, σ ise ölçek parametresini ifade etmektedir.

KumW dağılımının beklenen değeri ve varyansı kapalı formda elde edilemez, bu nedenle dağılıma ait momentler genelleştirilmiş moment formülü ile hesaplanmaktadır.

$Y \sim KumW(a, b, p, \mu = 0, \sigma)$ için s -inci genelleştirilmiş moment;

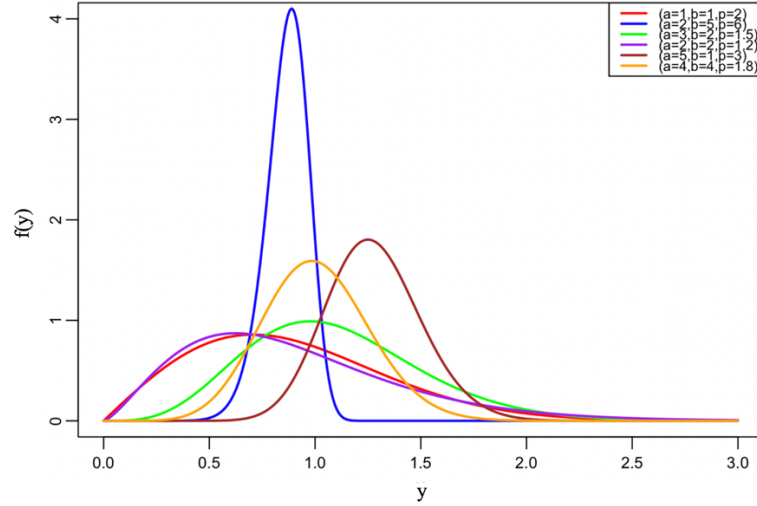
$$E(Y^s) = \sigma^s \Gamma\left(1 + \frac{s}{p}\right) \sum_{k=0}^{\infty} w_{+,k} (k+1)^{-s/p}, a, b, p, \sigma > 0$$

şeklindedir. Burada;

$$w_{+,k} = \sum_{j=0}^{\infty} w_{j,k} \text{ ve } w_{j,k} = \frac{ab(-1)^{j+k} \binom{b-1}{j} \binom{a(j+1)-1}{k}}{k+1},$$

şeklindedir. $E(Y^s)$ eşitliğinde $a > 0$ bir tamsayı olduğunda k indeksi $a(j+1) - 1$ 'de sona ermektedir. Buna karşılık, $w_{+,k}$ katsayısında yer alan j indeksi $b > 0$ bir tamsayı olduğunda $b - 1$ 'de sona ermektedir (Cordeiro vd. 2010).

Burada a, b ve p şekil parametrelerinin bazı değerleri için KumW dağılımının pdf grafikleri Şekil 2.1'de verildiği gibidir.



Şekil 2.1 $KumW(a, b, p, 0, 1)$ dağılımının farklı a, b ve p değerleri için pdf grafikleri

Ayrıca, KumW dağılımının çarpıklık ve basıklık değerleri bazı farklı a, b ve p değerleri için Çizelge 2.1'de verilmiştir.

Çizelge 2.1 KumW dağılımının farklı a, b ve p değerleri için çarpıklık ve basıklık değerleri

$a = 1$ ve $b = 1$						
$p =$	1.2	1.5	2	3	4	6
Çarpıklık	1.5208	1.0721	0.6309	0.1671	-0.0871	-0.3734
Basıklık	6.2317	4.3897	3.2432	2.7284	2.7475	3.0357
$a = 2$ ve $b = 5$						
$p =$	1.2	1.5	2	3	4	6
Çarpıklık	0.8428	0.5466	0.2432	-0.0807	-0.2563	-0.4459
Basıklık	3.9234	3.2751	2.9254	2.9006	3.0439	3.3261
$a = 3$ ve $b = 2$						
$p =$	1.2	1.5	2	3	4	6
Çarpıklık	0.8846	0.6029	0.3234	0.0363	-0.1136	-0.2714
Basıklık	4.1970	3.5079	3.1040	2.9764	3.0253	3.1706
$a = 2$ ve $b = 2$						
$p =$	1.2	1.5	2	3	4	6
Çarpıklık	1.0465	0.7150	0.3853	0.0412	-0.1429	-0.3390
Basıklık	4.5883	3.6426	3.0852	2.9008	2.9746	3.1889

Çizelge 2.1 incelendiğinde; şekil parametresi p nin değeri arttıkça dağılımın çarpıklığının azaldığı ve belirli bir değerden sonra negatif çarpık olduğu görülür. Ayrıca, $a = b = 1$ özel durumunda dağılım, literatürde de belirtildiği üzere, Weibull dağılımına indirgenmektedir.

2.2 SN Dağılımı

SN dağılımı ilk olarak Azzalini (1985) tarafından önerilmiştir. Esnek kuyruk yapısı ve normal dağılımı da kapsaması nedeniyle literatürde oldukça sık kullanılan bir dağılımdır. SN dağılımı, normal dağılımın makul alternatifleri kullanılarak modellenen verilerin analizinde sıklıkla kullanılır.

Y rastgele değişkeni SN dağılımına sahip ise, $Y \sim SN(\mu, \sigma, \lambda)$ ile gösterilir, dağılımın pdf'si ve cdf'si sırasıyla;

$$f(y) = \frac{2}{\sigma} \phi\left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right) \Phi\left(\lambda \frac{y-\mu}{\sigma}\right)$$

ve

$$F(y) = \phi\left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right) - 2T\left(\frac{y-\mu}{\sigma}; \lambda\right), \quad y, \lambda, \mu \in \mathbb{R}; \quad \sigma > 0$$

şeklindedir (Azzalini 1985). Burada; μ konum parametresini, σ ölçek parametresini, λ çarpıklık parametresini, ϕ standart normal dağılımın olasılık yoğunluk fonksiyonunu, Φ standart normal dağılımın birikimli dağılım fonksiyonunu ve T, Owen (1956) tarafından verilen;

$$T(h, a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^a \frac{\exp\left(-\frac{1}{2}h^2(1+t^2)\right)}{1+t^2} dt$$

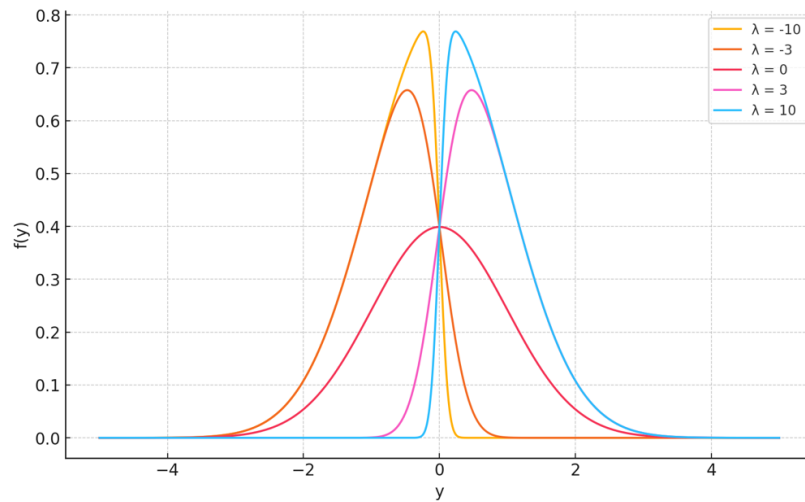
fonksiyonunu ifade etmektedir.

$SN(0, 1, \lambda)$ dağılımının beklenen değeri ve varyansı sırasıyla,

$$E(Y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\lambda}{\sqrt{1+\lambda^2}} \quad \text{ve} \quad V(Y) = 1 - \frac{2}{\pi} \left(\frac{\lambda}{\sqrt{1+\lambda^2}} \right)^2$$

şeklindedir.

λ parametresinin -10, -3, 0, 3 ve 10 değerleri için SN dağılımının pdf grafikleri Şekil 2.2’de gösterildiği gibi elde edilir.



Şekil 2.2 $SN(0, 1, \lambda)$ dağılımının farklı λ değerleri için pdf grafikleri

Burada, λ çarpıklık parametresinin pozitif ya da negatif yönde artmasıyla birlikte dağılımın çarpıklık düzeyinin de arttığı gözlemlenmektedir.

SN dağılımının şeklini daha iyi anlayabilmek için,

$$\gamma_1 = \frac{1}{2}(4 - \pi) \operatorname{sign}(\lambda) \left(\frac{\lambda^2}{\frac{\pi}{2} + (\frac{\pi}{2} - 1)\lambda^2} \right)^{3/2} \text{ ve } \gamma_2 = 2(\pi - 3) \left(\frac{\lambda^2}{\frac{\pi}{2} + (\frac{\pi}{2} - 1)\lambda^2} \right)^2$$

olarak ifade edilen çarpıklık ve basıklık değerleri bazı farklı λ değerleri için Çizelge 2.2’de verilmiştir.

Çizelge 2.2 SN dağılımının farklı λ değerleri için çarpıklık ve basıklık değerleri

λ	-10	-3	0	1	3	5	10
Çarpıklık	-0.96	-0.67	0.00	0.14	0.67	0.85	0.96
Basıklık	3.82	3.51	3.00	3.06	3.51	3.71	3.82

Çizelge 2.2’den görülebileceği üzere, SN dağılımının çarpıklık ve basıklık değerleri λ parametresine bağlıdır. $\lambda = 0$ olduğunda dağılım standart normal dağılıma indirgenmekte ve simetrik bir yapı göstermektedir. λ parametresinin negatif değerler alması durumunda dağılım negatif çarpık, pozitif değerler alması durumunda ise pozitif çarpık hale gelmektedir. Ayrıca, λ parametresinin mutlak değeri arttıkça çarpıklık katsayısının büyüdüğü ve basıklık katsayısının 3 değerinden saparak dağılımın daha sivri tepe noktasına ve daha kalın kuyruklara sahip leptokurtik bir yapıya yöneldiği gözlenmektedir. (Fernanda ve Gomes 2013).

2.3 MML Yöntemi

Parametre tahmininde yaygın olarak kullanılan yöntemlerden biri olan ML (Maximum Likelihood), log-olabilirlik fonksiyonunun ilgili parametreler bakımından maksimize edilmesine dayanır. Düzgünlük koşullarının sağlandığı durumlarda ML tahmin edicileri güçlü asimptotik özelliklere sahiptir. Bununla birlikte, birçok modelde olabilirlik

denklemlerinin kapalı form çözümlerinin elde edilememesi, tahmin sürecinde iteratif algoritmalarının kullanılmasını zorunlu kılmaktadır. İteratif yöntemler yanlış köke yakınsama, birden fazla köke yakınsama ya da hiç yakınsamama gibi çeşitli nümerik sorunlara yol açabilmektedir.

Bu sorunları gidermek amacıyla Tiku (1967, 1968) MML yöntemini önermiştir. Bu yöntem, olabilirlik denklemlerini analitik olarak çözülebilir hâle getirerek kapalı formda ve önemli istatistiksel özelliklere sahip MML tahmin edicilerinin elde edilmesine olanak tanır.

Düzensizlik koşullarının sağlandığı durumlarda MML tahmin edicileri, asimptotik olarak ML tahmin edicilerine denktir, asimptotik normal dağılıma sahiptir ve kapalı formda elde edildikleri için hesaplanmaları oldukça kolaydır. Ayrıca küçük örneklem durumlarında da yeterince etkindirler. Bu özellikleri sayesinde MML yöntemi, ML yönteminin asimptotik avantajlarını korurken iteratif yöntemlerde ortaya çıkabilen nümerik sorunları ortadan kaldırmakta ve hesaplanabilirlik açısından önemli kolaylıklar sağlamaktadır. Dolayısıyla MML, literatürde yaygın biçimde kullanılan güçlü bir tahmin yöntemi olarak öne çıkmaktadır (Vaughan, 1992).

MML yöntemi ile parametre tahmini aşağıdaki adımlar takip edilerek yapılır.

- i. Olabilirlik denklemleri sıra istatistikleri cinsinden ifade edilir.
- ii. Olabilirlik denklemlerindeki parametrelerin doğrusal olmayan fonksiyonları sıra istatistiklerinin beklenen değeri etrafında Taylor serisinin ilk iki terimi kullanılarak doğrusal hale getirilir.
- iii. Elde edilen doğrusal ifadeler olabilirlik denklemlerine yerleştirilerek uyarlanmış olabilirlik denklemleri elde edilir ve bu denklemler analitik olarak çözüldüğünde MML tahmin edicilerine ulaşılır.

Bu bölümde açıklanan MML yöntemi temel alınarak, izleyen bölümlerde hata terimlerinin KumW ve SN dağılımlarına sahip olduğu varsayımı altında faktöriyel tasarım modellerinde parametrelerin MML tahmin edicileri elde edilecektir.

3. HATA TERİMLERİNİN KUMW DAĞILIMINA SAHİP OLDUĞU VARSAYIMI ALTINDA 3^k FAKTÖRİYEL TASARIMLAR

Bu bölümde, hata terimlerinin dağılımının KumW olduğu varsayımı altında 3² ve 3³ faktöriyel tasarım modellerinin parametreleri için MML tahmin edicileri elde edilmiş ve bunların LS tahmin edicilerine göre etkinlikleri karşılaştırılmıştır. Ayrıca, faktörlerin ana etkilerini ve etkileşim etkilerini test etmek amacıyla MML tahmin edicilerine dayalı test istatistikleri önerilmiş; bu test istatistiklerinin performansları LS tahmin edicilerine dayalı test istatistikleriyle Monte Carlo simülasyonları kullanılarak karşılaştırılmıştır. Bölümün sonunda ise elde edilen sonuçlar 3^k faktöriyel tasarım modeline genelleştirilmiştir.

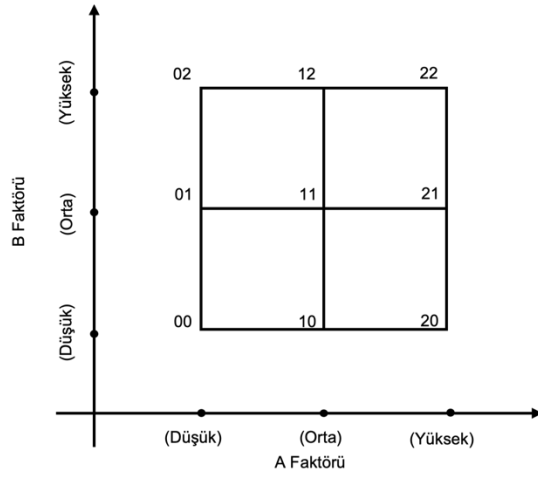
3.1 Dayanıklı 3² Faktöriyel Tasarım

Her biri üç düzeye sahip olan A ve B gibi iki faktörün bulunduğu 3² faktöriyel tasarımın matematiksel modeli;

$$y_{ijk} = \mu + \tau_i + \gamma_j + (\tau\gamma)_{ij} + \varepsilon_{ijk}, \quad i = 1,2,3; j = 1,2,3; k = 1,2, \dots, n \quad (3.1)$$

şeklindeydir. Modelde yer alan terimlere ilişkin açıklamalar Bölüm 1.1’de verildiğinden, tekrar olmaması amacıyla burada verilmemiştir.

3² faktöriyel tasarımda; (a_0, b_0) , (a_1, b_0) , (a_2, b_0) , (a_0, b_1) , (a_1, b_1) , (a_2, b_1) , (a_0, b_2) , (a_1, b_2) ve (a_2, b_2) veya $(0,0)$, $(1,0)$, $(2,0)$, $(0,1)$, $(1,1)$, $(2,1)$, $(0,2)$, $(1,2)$ ve $(2,2)$ olarak gösterilen toplam 3² = 9 tane deneme vardır. 3² faktöriyel tasarımda faktörler ve düzeyler Şekil 3.1’deki gibi gösterilmektedir.



Şekil 3.1 3^2 faktöriyel tasarımın grafiksel gösterimi

(3.1) modeli sabit etkili bir modeldir. Diğer bir deyişle,

$$\sum_{i=1}^3 \tau_i = 0, \sum_{j=1}^3 \gamma_j = 0, \sum_{i=1}^3 (\tau\gamma)_{ij} = 0 \text{ ve } \sum_{j=1}^3 (\tau\gamma)_{ij} = 0$$

olduğu varsayılır.

3.1.1 Parametre tahmini

Bu alt bölümde, 3^2 faktöriyel tasarımda hata terimlerinin dağılımının KumW olduğu varsayımı altında μ , τ_i , γ_j , $(\tau\gamma)_{ij}$ ve σ model parametrelerinin MML tahmin edicileri elde edilecektir.

Hata terimlerinin KumW dağılımına sahip olması durumunda olabilirlik (likelihood - L) fonksiyonu,

$$L = \prod_{i=1}^3 \prod_{j=1}^3 \prod_{k=1}^n \frac{abp}{\sigma} z_{ijk}^{p-1} \exp(-z_{ijk}^p) [1 - \exp(-z_{ijk}^p)]^{a-1} \{1 - [1 - \exp(-z_{ijk}^p)]^a\}^{b-1} \quad (3.2)$$

biçimindedir. Burada; $z_{ijk} = \frac{y_{ijk} - \mu - \tau_i - \gamma_j - (\tau\gamma)_{ij}}{\sigma}$ dir.

(3.2)'de gösterilen olabilirlik fonksiyonunun logaritması alınarak elde edilen log-olabilirlik (log-likelihood - $\ln L$) fonksiyonu ise;

$$\begin{aligned}\ln L = & N \ln(abp) - N \ln \sigma + (p-1) \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^n \ln(z_{ijk}) - \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^n z_{ijk}^p \\ & + (a-1) \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^n \ln\left(1 - \exp\left(-z_{ijk}^p\right)\right) \\ & + (b-1) \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^n \ln\left(1 - \left(1 - \exp\left(-z_{ijk}^p\right)\right)^a\right)\end{aligned}\quad (3.3)$$

biçiminde elde edilir. Burada $N = 3^2 n$ dir.

(3.3)'te gösterilen $\ln L$ fonksiyonunun parametrelere göre kısmi türevinin alınmasıyla olabilirlik denklemleri;

$$\begin{aligned}\frac{\partial \ln L}{\partial \mu} = & -\frac{(p-1)}{\sigma} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^n g_1(z_{ijk}) + \frac{p}{\sigma} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^n g_2(z_{ijk}) \\ & - \frac{(a-1)p}{\sigma} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^n g_3(z_{ijk}) + \frac{a(b-1)p}{\sigma} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^n g_4(z_{ijk}) = 0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \ln L}{\partial \tau_i} = & -\frac{(p-1)}{\sigma} \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^n g_1(z_{ijk}) + \frac{p}{\sigma} \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^n g_2(z_{ijk}) - \frac{(a-1)p}{\sigma} \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^n g_3(z_{ijk}) \\ & + \frac{a(b-1)p}{\sigma} \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^n g_4(z_{ijk}) = 0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \ln L}{\partial \gamma_j} = & -\frac{(p-1)}{\sigma} \sum_{i=1}^3 \sum_{k=1}^n g_1(z_{ijk}) + \frac{p}{\sigma} \sum_{i=1}^3 \sum_{k=1}^n g_2(z_{ijk}) - \frac{(a-1)p}{\sigma} \sum_{i=1}^3 \sum_{k=1}^n g_3(z_{ijk}) \\ & + \frac{a(b-1)p}{\sigma} \sum_{i=1}^3 \sum_{k=1}^n g_4(z_{ijk}) = 0,\end{aligned}\quad (3.4)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \ln L}{\partial (\tau\gamma)_{ij}} = & -\frac{(p-1)}{\sigma} \sum_{k=1}^n g_1(z_{ijk}) + \frac{p}{\sigma} \sum_{k=1}^n g_2(z_{ijk}) - \frac{(a-1)p}{\sigma} \sum_{k=1}^n g_3(z_{ijk}) \\ & + \frac{a(b-1)p}{\sigma} \sum_{k=1}^n g_4(z_{ijk}) = 0 \text{ ve}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \ln L}{\partial \sigma} = & -\frac{N}{\sigma} - \frac{(p-1)}{\sigma} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^n z_{ijk} g_1(z_{ijk}) + \frac{p}{\sigma} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^n z_{ijk} g_2(z_{ijk}) \\ & - \frac{(a-1)p}{\sigma} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^n z_{ijk} g_3(z_{ijk}) + \frac{a(b-1)p}{\sigma} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^n z_{ijk} g_4(z_{ijk}) = 0\end{aligned}$$

şeklinde bulunur. Burada;

$$g_1(z_{ijk}) = \frac{1}{z_{ijk}}, \quad g_2(z_{ijk}) = z_{ijk}^{p-1}, \quad g_3(z_{ijk}) = \frac{z_{ijk}^{p-1} \exp(-z_{ijk}^p)}{(1 - \exp(-z_{ijk}^p))} \quad \text{ve}$$

$$g_4(z_{ijk}) = \frac{(1 - \exp(-z_{ijk}^p))^{a-1} z_{ijk}^{p-1} \exp(-z_{ijk}^p)}{(1 - (1 - \exp(-z_{ijk}^p))^a)}$$

olarak tanımlanır.

(3.4)'te verilen olabilirlik denklemlerinde yer alan parametrelerin doğrusal olmayan; $g_1(z_{ijk})$, $g_2(z_{ijk})$, $g_3(z_{ijk})$ ve $g_4(z_{ijk})$ fonksiyonları nedeniyle, (3.1) modelindeki parametrelerin ML tahmin edicileri için kapalı formda bir çözüm elde edilememektedir. Dolayısıyla iteratif yöntemlere başvurulması gerekmektedir. Ancak bu tür yöntemlerin uygulanması, daha önce değinildiği gibi çeşitli yakınsama sorunlarına yol açabilmektedir. Bu nedenle, Tiku (1967, 1968) tarafından önerilen MML yöntemine başvurularak çözüme ulaşılabacaktır. Öncelikle,

$$z_{ij(1)} \leq z_{ij(2)} \leq \dots \leq z_{ij(n)} \quad (3.5)$$

şeklinde veriler sıralanır. Sıra istatistiklerinin toplama işlemine göre değişmezlik özelliği,

$$\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^n z_{ijk} = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^n z_{ij(k)} \quad (3.6)$$

kullanılarak, (3.4)'te gösterilen olabilirlik denklemlerindeki $g_1(z_{ijk})$, $g_2(z_{ijk})$, $g_3(z_{ijk})$ ve $g_4(z_{ijk})$ sıra istatistikleri cinsinden ifade edilir. Böylece olabilirlik denklemleri,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln L}{\partial \mu} &= -\frac{(p-1)}{\sigma} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^n g_1(z_{ij(k)}) + \frac{p}{\sigma} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^n g_2(z_{ij(k)}) \\ &\quad - \frac{(a-1)p}{\sigma} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^n g_3(z_{ij(k)}) + \frac{a(b-1)p}{\sigma} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^n g_4(z_{ij(k)}) = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln L}{\partial \tau_i} &= -\frac{(p-1)}{\sigma} \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^n g_1(z_{ij(k)}) + \frac{p}{\sigma} \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^n g_2(z_{ij(k)}) \\ &\quad - \frac{(a-1)p}{\sigma} \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^n g_3(z_{ij(k)}) + \frac{a(b-1)p}{\sigma} \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^n g_4(z_{ij(k)}) = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln L}{\partial \gamma_j} &= -\frac{(p-1)}{\sigma} \sum_{i=1}^3 \sum_{k=1}^n g_1(z_{ij(k)}) + \frac{p}{\sigma} \sum_{i=1}^3 \sum_{k=1}^n g_2(z_{ij(k)}) \\ &\quad - \frac{(a-1)p}{\sigma} \sum_{i=1}^3 \sum_{k=1}^n g_3(z_{ij(k)}) + \frac{a(b-1)p}{\sigma} \sum_{i=1}^3 \sum_{k=1}^n g_4(z_{ij(k)}) = 0, \end{aligned} \quad (3.7)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln L}{\partial (\tau \gamma)_{ij}} &= -\frac{(p-1)}{\sigma} \sum_{k=1}^n g_1(z_{ij(k)}) + \frac{p}{\sigma} \sum_{k=1}^n g_2(z_{ij(k)}) - \frac{(a-1)p}{\sigma} \sum_{k=1}^n g_3(z_{ij(k)}) \\ &\quad + \frac{a(b-1)p}{\sigma} \sum_{k=1}^n g_4(z_{ij(k)}) = 0 \text{ ve} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln L}{\partial \sigma} &= -\frac{N}{\sigma} - \frac{(p-1)}{\sigma} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^n z_{ij(k)} g_1(z_{ij(k)}) + \frac{p}{\sigma} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^n z_{ij(k)} g_2(z_{ij(k)}) \\ &\quad - \frac{(a-1)p}{\sigma} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^n z_{ij(k)} g_3(z_{ij(k)}) \\ &\quad + \frac{a(b-1)p}{\sigma} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^n z_{ij(k)} g_4(z_{ij(k)}) = 0 \end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir. Burada;

$$g_1(z_{ij(k)}) = \frac{1}{z_{ij(k)}}, \quad g_2(z_{ij(k)}) = z_{ij(k)}^{p-1}, \quad g_3(z_{ij(k)}) = \frac{z_{ij(k)}^{p-1} \exp(-z_{ij(k)}^p)}{(1 - \exp(-z_{ij(k)}^p))},$$

$$g_4(z_{ij(k)}) = \frac{(1 - \exp(-z_{ij(k)}^p))^{a-1} z_{ij(k)}^{p-1} \exp(-z_{ij(k)}^p)}{(1 - (1 - \exp(-z_{ij(k)}^p))^a)} \text{ ve } z_{ij(k)} = \frac{y_{ij(k)} - \mu - \tau_i - \gamma_j - (\tau \gamma)_{ij}}{\sigma}$$

olarak tanımlanır.

Olabilirlik denklemlerinde bulunan, $g_1(z_{ij(k)})$, $g_2(z_{ij(k)})$, $g_3(z_{ij(k)})$ ve $g_4(z_{ij(k)})$ fonksiyonları, doğrusal olmayan fonksiyonlardır ve Taylor serisinin ilk iki terimini kullanarak sıra istatistiklerinin beklenen değeri $t_{(k)} = E(z_{ij(k)})$ etrafında açılarak doğrusal hale getirilirler. Buna göre;

$$g_1(z_{ij(k)}) \cong g_1(t_{(k)}) + [z_{ij(k)} - t_{(k)}] \left\{ \frac{d}{dz} g_1(z) \right\}_{z=t_{(k)}},$$

$$g_2(z_{ij(k)}) \cong g_2(t_{(k)}) + [z_{ij(k)} - t_{(k)}] \left\{ \frac{d}{dz} g_2(z) \right\}_{z=t_{(k)}},$$

$$g_3(z_{ij(k)}) \cong g_3(t_{(k)}) + [z_{ij(k)} - t_{(k)}] \left\{ \frac{d}{dz} g_3(z) \right\}_{z=t_{(k)}} \text{ ve}$$

$$g_4(z_{ij(k)}) \cong g_4(t_{(k)}) + [z_{ij(k)} - t_{(k)}] \left\{ \frac{d}{dz} g_4(z) \right\}_{z=t_{(k)}}$$

olmak üzere,

$$g_1(z_{ij(k)}) \cong \alpha_{1k} - \beta_{1k} z_{ij(k)}, \quad g_2(z_{ij(k)}) \cong \alpha_{2k} + \beta_{2k} z_{ij(k)}, \quad (3.8)$$

$$g_3(z_{ij(k)}) \cong \alpha_{3k} - \beta_{3k} z_{ij(k)} \quad \text{ve} \quad g_4(z_{ij(k)}) \cong \alpha_{4k} + \beta_{4k} z_{ij(k)}$$

şeklinde yazılır. Burada;

$$\alpha_{1k} = 2/t_{ij(k)} \quad , \quad \beta_{1k} = 1/t_{ij(k)}^2,$$

$$\alpha_{2k} = (2-p)t_{ij(k)}^{p-1} \quad , \quad \beta_{2k} = (p-1)t_{ij(k)}^{p-2},$$

$$\alpha_{3k} = \frac{t_{ij(k)}^{p-1} \exp(-t_{ij(k)}^p)}{(1 - \exp(-t_{ij(k)}^p))} + \beta_{3k} t_{ij(k)},$$

$$\beta_{3k} = t_{ij(k)}^{p-2} \left(\exp(t_{ij(k)}^p) (pt_{ij(k)}^p - p + 1) + p - 1 \right) / \left(\exp(t_{ij(k)}^p) - 1 \right)^2,$$

$$\alpha_{4k} = \frac{t_{ij(k)}^{p-1} (1 - \exp(-t_{ij(k)}^p))^{a-1} \exp(-t_{ij(k)}^p)}{(1 - (1 - \exp(-t_{ij(k)}^p))^a)} - \beta_{4k} t_{ij(k)},$$

$$\beta_{4k} = \frac{t_{ij(k)}^{p-2} (1 - \exp(-t_{ij(k)}^p))^a \{w_{1k} + w_{2k}\}}{\{(1 - \exp(-t_{ij(k)}^p))^{a-1}\}^2 (exp(t_{ij(k)}^p) - 1)^2},$$

$$w_{1k} = \left((1 - \exp(-t_{ij(k)}^p)) (pt_{ij(k)}^p - p + 1) - pt_{ij(k)}^p + p - 1 \right) \exp(t_{ij(k)}^p) \quad \text{ve}$$

$$w_{2k} = (p-1) \left(1 - \exp(-t_{ij(k)}^p) \right)^a + apt_{ij(k)}^p - p + 1$$

şeklinde elde edilir. $t_{(k)}$ 'nın gerçek değerini bulmak zor olduğundan yaklaşık değerleri;

$$\int_{-\infty}^{t(k)} f(z) dz \cong \frac{k}{n+1}, \quad k = 1, 2, \dots, n$$

yardımıyla elde edilir. Burada, $f(z)$ standart KumW dağılımının pdf'sini göstermektedir.

Buna göre, (3.8)'de verilen doğrusal ifadeler, (3.7)'de verilen olabilirlik denklemlerindeki $g_1(z_{ij(k)}), g_2(z_{ij(k)}), g_3(z_{ij(k)})$ ve $g_4(z_{ij(k)})$ fonksiyonlarının yerine yazıldığında;

$$\begin{aligned}\frac{\partial \ln L^*}{\partial \mu} &= -\frac{(p-1)}{\sigma} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^n (\alpha_{1k} - \beta_{1k} z_{ij(k)}) + \frac{p}{\sigma} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^n (\alpha_{2k} + \beta_{2k} z_{ij(k)}) \\ &\quad - \frac{(a-1)p}{\sigma} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^n (\alpha_{3k} - \beta_{3k} z_{ij(k)}) \\ &\quad + \frac{a(b-1)p}{\sigma} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^n (\alpha_{4k} + \beta_{4k} z_{ij(k)}) = 0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \ln L^*}{\partial \tau_i} &= -\frac{(p-1)}{\sigma} \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^n (\alpha_{1k} - \beta_{1k} z_{ij(k)}) + \frac{p}{\sigma} \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^n (\alpha_{2k} + \beta_{2k} z_{ij(k)}) \\ &\quad - \frac{(a-1)p}{\sigma} \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^n (\alpha_{3k} - \beta_{3k} z_{ij(k)}) + \frac{a(b-1)p}{\sigma} \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^n (\alpha_{4k} + \beta_{4k} z_{ij(k)}) = 0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \ln L^*}{\partial \gamma_j} &= -\frac{(p-1)}{\sigma} \sum_{i=1}^3 \sum_{k=1}^n (\alpha_{1k} - \beta_{1k} z_{ij(k)}) + \frac{p}{\sigma} \sum_{i=1}^3 \sum_{k=1}^n (\alpha_{2k} + \beta_{2k} z_{ij(k)}) \\ &\quad - \frac{(a-1)p}{\sigma} \sum_{i=1}^3 \sum_{k=1}^n (\alpha_{3k} - \beta_{3k} z_{ij(k)}) \\ &\quad + \frac{a(b-1)p}{\sigma} \sum_{i=1}^3 \sum_{k=1}^n (\alpha_{4k} + \beta_{4k} z_{ij(k)}) = 0,\end{aligned}\tag{3.9}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \ln L^*}{\partial (\tau\gamma)_{ij}} &= -\frac{(p-1)}{\sigma} \sum_{k=1}^n (\alpha_{1k} - \beta_{1k} z_{ij(k)}) + \frac{p}{\sigma} \sum_{k=1}^n (\alpha_{2k} + \beta_{2k} z_{ij(k)}) \\ &\quad - \frac{(a-1)p}{\sigma} \sum_{k=1}^n (\alpha_{3k} - \beta_{3k} z_{ij(k)}) + \frac{a(b-1)p}{\sigma} \sum_{k=1}^n (\alpha_{4k} + \beta_{4k} z_{ij(k)}) = 0 \text{ ve}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \ln L^*}{\partial \sigma} &= -\frac{N}{\sigma} - \frac{(p-1)}{\sigma} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^n z_{ij(k)} (\alpha_{1k} - \beta_{1k} z_{ij(k)}) \\ &\quad + \frac{p}{\sigma} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^n z_{ij(k)} (\alpha_{2k} + \beta_{2k} z_{ij(k)}) \\ &\quad - \frac{(a-1)p}{\sigma} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^n z_{ij(k)} (\alpha_{3k} - \beta_{3k} z_{ij(k)}) \\ &\quad + \frac{a(b-1)p}{\sigma} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^n z_{ij(k)} (\alpha_{4k} + \beta_{4k} z_{ij(k)}) = 0\end{aligned}$$

olarak ifade edilen uyarlanmış olabilirlik denklemleri elde edilir. Denklem sisteminin çözümünden MML tahmin edicileri;

$$\hat{\mu} = \hat{\mu}_{...} - \frac{\Delta \hat{\sigma}}{m}, \quad \hat{\tau}_i = \hat{\mu}_{i..} - \hat{\mu}_{...}, \quad \hat{\gamma}_j = \hat{\mu}_{.j.} - \hat{\mu}_{...},$$

(3.10)

$$(\widehat{\tau\gamma})_{ij} = \hat{\mu}_{ij} - \hat{\mu}_{i..} - \hat{\mu}_{.j.} + \hat{\mu}_{...} \text{ ve } \hat{\sigma} = \frac{-B + \sqrt{B^2 + 4AC}}{2\sqrt{N(N-3^2)}}$$

şeklinde elde edilir. Burada;

$$\hat{\mu}_{...} = \frac{\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^n \theta_k y_{ij(k)}}{3^2 m}, \quad \hat{\mu}_{i..} = \frac{\sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^n \theta_k y_{ij(k)}}{3m}, \quad \hat{\mu}_{.j.} = \frac{\sum_{i=1}^3 \sum_{k=1}^n \theta_k y_{ij(k)}}{3m},$$

$$\hat{\mu}_{ij.} = \frac{\sum_{k=1}^n \theta_k y_{ij(k)}}{m}, \quad m = \sum_{k=1}^n \theta_k, \quad \Delta = \sum_{k=1}^n \Delta_k, \quad N = 3^2 n,$$

$$\theta_k = (p-1)\beta_{1k} + p\beta_{2k} + (a-1)p\beta_{3k} + a(b-1)p\beta_{4k},$$

$$\Delta_k = (p-1)\alpha_{1k} - p\alpha_{2k} + (a-1)p\alpha_{3k} - a(b-1)p\alpha_{4k},$$

$$B = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^n \Delta_k \{y_{ij(k)} - \hat{\mu}_{ij.}\} \text{ ve } C = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^n \theta_k (y_{ij(k)} - \hat{\mu}_{ij.})^2$$

olarak tanımlanmaktadır.

Model parametrelerinin MML tahmin edicilerinin asimptotik özellikleri (dağılım, yansızlık, etkinlik), 2^k faktöriyel tasarım bağlamında hata terimlerinin dağılımının Weibull ve genelleştirilmiş lojistik olduğu durumlar için ayrıntılı olarak incelenmiş; ilgili lemmalar ve ispatlar Şenoğlu (2005, 2007)'de verilmiştir. Bu çalışmada ele alınan 3^2 ve 3^3 faktöriyel tasarımlar için MML tahmin edicilerinin asimptotik özellikleri 2^k faktöriyel tasarım bağlamında elde edilen MML tahmin edicilerinin asimptotik özelliklerine benzer olduğundan, tekrardan kaçınmak adına burada ve tezin geri kalan kısmında ilgili lemmalar ve ispatlara ayrıca yer verilmeyecektir.

LS tahmin edicileri: Hata terimlerinin normal dağıldığı varsayımı altında LS tahmin edicileri en etkin tahmin edicilerdir. 3^2 faktöriyel tasarım model parametrelerinin LS tahmin edicileri, hata terimlerinin kareler toplamının,

$$\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^n \varepsilon_{ijk}^2 = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^n (Y_{ijk} - \mu - \tau_i - \gamma_j - (\tau\gamma)_{ij})^2$$

ilgili parametrelere göre minimum yapılmasıyla elde edilir. Minimizasyon işlemi kapsamında, söz konusu ifadenin model parametrelerine göre kısmi türevleri alınarak sıfıra eşitlenir. Elde edilen denklem sisteminin çözülmesi sonucunda LS tahmin edicileri elde edilir.

Hata terimlerinin dağılımının $KumW(a, b, p, 0, \sigma)$ olması durumunda 3^2 faktöriyel tasarım model parametrelerinin LS tahmin edicileri;

$$\tilde{\mu}_{BC} = \bar{y}_{...} - m_1 \tilde{\sigma}_{BC}, \quad \tilde{\tau}_i = \bar{y}_{i..} - \bar{y}_{...}, \quad \tilde{\gamma}_j = \bar{y}_{.j.} - \bar{y}_{...}, \quad (3.11)$$

$$\tilde{\tau}\tilde{\gamma}_{ij} = \bar{y}_{ij.} - \bar{y}_{i..} - \bar{y}_{.j.} + \bar{y}_{...} \text{ ve } \tilde{\sigma}_{BC} = \sqrt{\frac{\tilde{\sigma}^2}{v}}$$

şeklinde dir. Burada, $\tilde{\mu}_{BC}$ ve $\tilde{\sigma}_{BC}$, sırasıyla μ ve σ parametrelerinin tahmin edicilerinin yan düzeltmesi (bias correction - BC) yapılmış hali, m_1 ve v ise sırasıyla hata teriminin beklenen değeri ve varyans ıdır. Ayrıca, $\tilde{\sigma}^2 = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^n (y_{ijk} - \bar{y}_{ij.})^2 / 3^2(n - 1)$ dir.

Monte Carlo simülasyonu: (3.1) modeline ilişkin (3.10)'da elde edilen MML tahmin edicilerinin etkinlikleri (3.11)'de verilen geleneksel LS tahmin edicilerinin etkinlikleri ile şekil parametreleri $(a, b \text{ ve } p)$ 'nin $(1, 1, 2)$, $(2, 5, 6)$, $(3, 2, 1.5)$ ve $(2, 2, 1.2)$ değerleri için Monte Carlo simülasyon çalışması yardımıyla karşılaştırılmıştır. Simülasyon çalışmasında genelliği kaybetmeden $\mu = 0$ ve $\sigma = 1$ olarak alınmıştır. Simülasyonda farklı örneklem hacimleri ($n = 6, 8, 10$) kullanılmış ve tüm simülasyonlar 10,000 tekrar ile gerçekleştirilmiştir.

MML ve LS tahmin edicilerinin performansları Yan (bias) ve Hata Kareler Ortalaması (Mean Squares Error – MSE) kriterleri kullanılarak karşılaştırılmıştır. $\hat{\theta}$, θ parametresinin herhangi bir tahmin edicisi olmak üzere,

$$Yan(\hat{\theta}) = E(\hat{\theta} - \theta), \quad MSE(\hat{\theta}) = Yan^2(\hat{\theta}) + Var(\hat{\theta}) \quad (3.12)$$

MSE değerlerine dayalı göreceli etkinlik (Relative Efficiency – RE) değerleri,

$$RE = \frac{MSE(\hat{\theta}_{MML})}{MSE(\hat{\theta}_{LS})} \times 100 \quad (3.13)$$

eşitliği kullanılarak hesaplanır. RE'nin 100'den küçük olması MML tahmin edicisinin LS tahmin edicisinden daha etkin olduğunu göstermektedir.

Ayrıca, $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k$ parametrelerinin $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \dots, \hat{\theta}_k$ olarak ifade edilen tahmin edicilerinin ortak etkinliklerini (deficiency - DEF) karşılaştırmak için,

$$DEF(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \dots, \hat{\theta}_k) = MSE(\hat{\theta}_1) + MSE(\hat{\theta}_2) + \dots + MSE(\hat{\theta}_k) \quad (3.14)$$

kriteri kullanılmıştır.

Elde edilen simülasyon sonuçları Çizelge 3.1'de verilmiştir.

Çizelge 3.1 3^2 faktöriyel tasarımımda hata terimlerinin KumW dağılımına sahip olması durumunda model parametrelerinin LS ve MML tahmin edicilerinin Yan, MSE, RE ve DEF değerleri

$a = 1, b = 1, p = 2$											
Yan						MSE				DEF	
n		μ	τ_1	γ_1	$\tau\gamma_{11}$	σ	μ	τ_1	γ_1	$\tau\gamma_{11}$	σ
6	LS	0.0046	-0.0026	0.0000	-0.0016	-0.0029	0.0088	0.0080	0.0078	0.0157	0.0122
	MML	0.1383	-0.0022	-0.0000	-0.0019	-0.0804	0.0247	0.0066	0.0065	0.0128	0.0156
RE =						281	82	83	82	128	0.0662
8	LS	0.0008	0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0011	0.0062	0.0060	0.0060	0.0122	0.0088
	MML	0.1184	0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0692	0.0179	0.0048	0.0047	0.0096	0.0114
RE =						289	80	78	79	130	0.0484
10	LS	0.0028	-0.0000	0.0000	0.0000	-0.0061	0.0049	0.0047	0.0049	0.0097	0.0068
	MML	0.1047	-0.0000	0.0000	0.0000	-0.0632	0.0140	0.0037	0.0037	0.0075	0.0091
RE =						286	79	76	77	134	0.038
$a = 2, b = 5, p = 6$											
Yan						MSE				DEF	
n		μ	τ_1	γ_1	$\tau\gamma_{11}$	σ	μ	τ_1	γ_1	$\tau\gamma_{11}$	σ
6	LS	0.0053	0.0000	0.0000	0.0000	-0.0055	0.0104	0.0000	4×10^{-5}	0.0000	0.0127
	MML	-0.0066	0.0000	-0.0000	-0.0000	0.0001	0.0100	0.0000	3×10^{-5}	0.0000	0.0119
RE =						96	100	75	100	94	0.0247
8	LS	0.0021	0.0000	0.0000	-0.0000	-0.0027	0.0074	0.0000	0.0000	6×10^{-5}	0.0089
	MML	-0.0035	0.0000	0.0000	-0.0000	-0.0020	0.0069	0.0000	0.0000	5×10^{-5}	0.0082
RE =						93	100	100	83	92	0.0162
10	LS	0.0013	-0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0017	0.0059	0.0000	0.0000	0.0000	0.0071
	MML	-0.0026	-0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0019	0.0055	0.0000	0.0000	0.0000	0.0065
RE =						93	100	100	100	92	0.0128
$a = 3, b = 2, p = 1.5$											
Yan						MSE				DEF	
n		μ	τ_1	γ_1	$\tau\gamma_{11}$	σ	μ	τ_1	γ_1	$\tau\gamma_{11}$	σ
6	LS	0.0063	0.0000	0.0000	0.0020	-0.0052	0.0140	0.0064	0.0065	0.0127	0.0130
	MML	0.0659	-0.0000	0.0000	0.0017	-0.0215	0.0152	0.0055	0.0057	0.0112	0.0115
RE =						109	86	88	88	88	0.0491
8	LS	0.0040	-0.0000	-0.0000	0.0019	-0.0042	0.0102	0.0049	0.0048	0.0096	0.0096
	MML	0.0538	-0.0000	-0.0000	0.0022	-0.0179	0.0107	0.0042	0.0042	0.0083	0.0083
RE =						105	86	88	86	86	0.0357
10	LS	0.0049	0.0000	0.0000	-0.0015	-0.0071	0.0081	0.0039	0.0038	0.0076	0.0076
	MML	0.0474	0.0000	0.0000	-0.0018	-0.0181	0.0084	0.0033	0.0032	0.0065	0.0067
RE =						104	85	84	86	88	0.0281
$a = 2, b = 2, p = 1.2$											
Yan						MSE				DEF	
n		μ	τ_1	γ_1	$\tau\gamma_{11}$	σ	μ	τ_1	γ_1	$\tau\gamma_{11}$	σ
6	LS	0.0086	0.0013	0.0000	-0.0028	-0.0092	0.0105	0.0100	0.0100	0.0194	0.0179
	MML	0.1325	0.0008	-0.0000	-0.0018	-0.0433	0.0227	0.0064	0.0065	0.0125	0.0145
RE =						216	64	65	64	81	0.0626
8	LS	0.0035	0.0011	0.0018	0.0019	-0.0006	0.0077	0.0075	0.0073	0.0147	0.0132
	MML	0.1105	0.0011	0.0010	0.0016	-0.0398	0.0158	0.0046	0.0045	0.0091	0.0104
RE =						205	61	62	62	79	0.0444
10	LS	0.0075	0.0000	0.0000	-0.0015	-0.0088	0.0060	0.0059	0.0059	0.0118	0.0104
	MML	0.0951	0.0000	0.0000	-0.0013	-0.0376	0.0118	0.0035	0.0034	0.0070	0.0081
RE =						197	59	58	59	78	0.0338

Burada, τ_i , γ_j , $\tau\gamma_{ij}$ ($i = 1,2,3$; $j = 1,2,3$) parametrelerine ait Monte Carlo simülasyon sonuçlarından kısalık olması bakımından sadece τ_1 , γ_1 , $\tau\gamma_{11}$ parametrelerine ait sonuçlara yer verilmiştir. Diğer parametrelere ait sonuçlar da benzer çıkmaktadır.

Çizelge 3.1’de görüldüğü gibi, şekil parametrelerinin (a, b ve p) farklı değerleri için MML yöntemiyle bulunan parametre tahmin edicilerinin μ hariç LS yöntemiyle bulunan tahmin edicilere göre daha etkin olduğu görülmektedir.

Ayrıca, örneklem hacminin artmasıyla birlikte MML tahmin edicilerinin etkinliğinin, LS tahmin edicilerine kıyasla arttığı gözlemlenmiştir.

3.1.2 Hipotez testi

(3.1)’de verilen faktöriyel tasarım modelinde; ana etkiler ve etkileşim etkisinin anlamlı olup olmadığına ilişkin sıfır hipotezleri;

$$H_{01}: \forall \tau_i = 0, H_{02}: \forall \gamma_j = 0 \text{ ve } H_{03}: \forall (\tau\gamma)_{ij} = 0 \quad (3.15)$$

biçiminde gösterilir, burada $i = 1, 2, 3, j = 1, 2, 3$ ’tür.

(3.15)’te verilen hipotezleri sınamak için, LS tahmin edicilerine dayalı F test istatistikleri;

$$F_A = \frac{3n \sum_{i=1}^3 \tilde{\tau}_i^2}{2\tilde{\sigma}^2}, F_B = \frac{3n \sum_{j=1}^3 \tilde{\gamma}_j^2}{2\tilde{\sigma}^2} \text{ ve } F_{AB} = \frac{n \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 (\tilde{\tau\gamma})_{ij}^2}{4\tilde{\sigma}^2} \quad (3.16)$$

kullanılır. Burada, ana etkilere ilişkin F test istatistikleri 2 ve 3^2 ($n - 1$) serbestlik dereceli F dağılımına, etkileşim etkisine ilişkin F test istatistiği ise 4 ve 3^2 ($n - 1$) serbestlik dereceli F dağılımına sahiptir. Söz konusu F test istatistikleri LS tahmin edicilerine dayanmaktadır. Buna karşın MML tahmin edicilerine dayalı asimptotik F^* test istatistikleri,

$$F_A^* = \frac{3m \sum_{i=1}^3 \hat{\tau}_i^2}{2\hat{\sigma}^2}, F_B^* = \frac{3m \sum_{j=1}^3 \hat{\gamma}_j^2}{2\hat{\sigma}^2} \text{ ve } F_{AB}^* = \frac{m \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 (\hat{\tau\gamma})_{ij}^2}{4\hat{\sigma}^2} \quad (3.17)$$

şeklinde önerilmiştir.

Hata terimlerinin KumW dağılımına sahip olması durumunda, (3.15)’te verilen hipotezlerin test edilmesinde önerilen F_A^*, F_B^* ve F_{AB}^* test istatistikleri, normal teori altında

kullanılan F_A , F_B ve F_{AB} test istatistikleriyle Monte Carlo simülasyon çalışması yardımıyla I. tip hata oranları ve güç değerleri bakımından karşılaştırılmıştır.

Monte Carlo simülasyon çalışmasında örneklem hacmi $n = 6, 8, 10$ olarak alınmış; şekil parametreleri ise $(1, 1, 2)$, $(2, 5, 6)$, $(3, 2, 1.5)$ ve $(2, 2, 1.2)$ olarak belirlenmiştir.

I. tip hata oranları hesaplanırken;

$$\begin{aligned} P_1 &= Prob\{F_A^* \geq F_\alpha(v_1, v_4)|H_{01}\}, P_2 = Prob\{F_B^* \geq F_\alpha(v_2, v_4)|H_{02}\} \text{ ve} \\ P_3 &= Prob\{F_{AB}^* \geq F_\alpha(v_3, v_4)|H_{03}\} \end{aligned} \quad (3.18)$$

olasılıkları kullanılmıştır. Burada; $v_1 = v_2 = 2$, $v_3 = 4$, ve $v_4 = 3^2(n - 1)$ 'tür.

LS tahmin edicilerine dayalı F_A ve F_{AB} ile MML tahmin edicilerine dayalı F_A^* ve F_{AB}^* test istatistiklerinin deneysel I. tip hata oranları Çizelge 3.2'de verilmiştir. F_B ve F_B^* testlerine ait sonuçlar, F_A ve F_A^* ile F_{AB} ve F_{AB}^* testlerine ilişkin sonuçlara benzerlik gösterdiğinden dolayı, kısalık olması bakımından Çizelge 3.2'de verilmemiştir.

Çizelge 3.2 3^2 faktöriyel tasarımda hata terimlerinin KumW dağılımına sahip olması durumunda F_A , F_{AB} , F_A^* ve F_{AB}^* test istatistiklerinin deneysel I. tip hataları

			A	AB
$a = 1, b = 1, p = 2$	$n = 6$	F	0.053	0.047
		F^*	0.041	0.035
	$n = 8$	F	0.053	0.049
		F^*	0.036	0.033
	$n = 10$	F	0.050	0.050
		F^*	0.032	0.034
$a = 2, b = 5, p = 6$	$n = 6$	F	0.051	0.049
		F^*	0.048	0.047
	$n = 8$	F	0.049	0.046
		F^*	0.050	0.045
	$n = 10$	F	0.052	0.048
		F^*	0.053	0.047
$a = 3, b = 2, p = 1.5$	$n = 6$	F	0.049	0.050
		F^*	0.045	0.046
	$n = 8$	F	0.057	0.052
		F^*	0.048	0.042
	$n = 10$	F	0.051	0.048
		F^*	0.044	0.042
$a = 2, b = 2, p = 1.2$	$n = 6$	F	0.048	0.047
		F^*	0.031	0.029
	$n = 8$	F	0.050	0.048
		F^*	0.032	0.027
	$n = 10$	F	0.048	0.048
		F^*	0.031	0.030

Sonuçlar incelendiğinde (a, b, p) şekil parametreleri $(2, 5, 6)$ ve $(3, 2, 1.5)$ olduğunda, F_A , F_{AB} , F_A^* ve F_{AB}^* test istatistiklerine ilişkin I. tip hata oranlarının nominal $\alpha = 0.05$ değerine oldukça yakın olduğu görülmüştür. Buna karşılık, $(a, b, p) = (1, 1, 2)$ ve $(2, 2, 1.2)$ olduğunda ise F_A^* ve F_{AB}^* test istatistiklerine ilişkin I. tip hata oranlarının nominal değerin biraz altında kaldığı görülmektedir. Bulgular, MML tahmin edicilerine dayalı test istatistiklerinin asimptotik olarak F dağılımına sahip olduğunu desteklemekle birlikte, küçük ve orta örneklem büyüklüklerinde bazı durumlarda nominal anlamlılık düzeyinin altında kaldığını göstermektedir.

Çizelge 3.3'te F_A ve F_A^* , Çizelge 3.4'te ise F_{AB} ve F_{AB}^* test istatistiklerine ait güç değerleri verilmiştir. Güç değerlerinin hesaplanmasında, modele ait varsayımları koruyacak biçimde, bazı hücrelerdeki gözlem değerlerine d sabiti eklenip çıkarılmıştır.

Çizelge 3.3 3^2 faktöriyel tasarımda hata terimlerinin KumW dağılımına sahip olması durumunda F_A ve F_A^* test istatistiklerinin güçleri

n	$a = 1, b = 1, p = 2$			$a = 2, b = 5, p = 6$			$a = 3, b = 2, p = 1.5$			$a = 2, b = 2, p = 1.2$		
	d	F_A	F_A^*	d	F_A	F_A^*	d	F_A	F_A^*	d	F_A	F_A^*
6	0.00	0.053	0.041	0.000	0.051	0.048	0.00	0.049	0.045	0.00	0.048	0.031
	0.06	0.096	0.081	0.015	0.115	0.113	0.06	0.103	0.102	0.07	0.105	0.089
	0.12	0.255	0.251	0.030	0.331	0.345	0.12	0.312	0.320	0.14	0.281	0.307
	0.18	0.510	0.532	0.045	0.640	0.666	0.18	0.606	0.638	0.21	0.559	0.665
	0.24	0.775	0.821	0.060	0.879	0.897	0.24	0.863	0.897	0.28	0.810	0.915
	0.30	0.929	0.955	0.075	0.980	0.985	0.30	0.968	0.983	0.35	0.946	0.990
	0.36	0.986	0.993	0.090	0.997	0.999	0.36	0.996	0.999	0.42	0.999	0.999
8	0.00	0.053	0.036	0.000	0.049	0.050	0.00	0.057	0.048	0.00	0.050	0.032
	0.05	0.085	0.076	0.012	0.102	0.105	0.05	0.104	0.100	0.05	0.081	0.063
	0.10	0.241	0.239	0.024	0.282	0.293	0.10	0.287	0.305	0.10	0.201	0.225
	0.15	0.491	0.523	0.036	0.571	0.604	0.15	0.581	0.620	0.15	0.412	0.504
	0.20	0.739	0.794	0.048	0.827	0.853	0.20	0.838	0.881	0.20	0.653	0.789
	0.25	0.919	0.954	0.060	0.958	0.970	0.25	0.961	0.979	0.25	0.837	0.945
	0.30	0.983	0.993	0.072	0.994	0.997	0.30	0.996	0.998	0.30	0.970	0.993
10	0.00	0.050	0.032	0.000	0.052	0.053	0.00	0.051	0.044	0.00	0.048	0.031
	0.04	0.084	0.071	0.010	0.094	0.095	0.04	0.089	0.087	0.05	0.099	0.086
	0.08	0.200	0.195	0.020	0.253	0.268	0.08	0.242	0.255	0.10	0.243	0.296
	0.12	0.399	0.428	0.030	0.525	0.553	0.12	0.486	0.526	0.15	0.497	0.639
	0.16	0.655	0.711	0.040	0.776	0.806	0.16	0.743	0.792	0.20	0.764	0.904
	0.20	0.846	0.899	0.050	0.935	0.953	0.20	0.915	0.947	0.25	0.919	0.986
	0.24	0.955	0.981	0.060	0.989	0.994	0.24	0.982	0.992	0.30	0.980	0.999

Çizelge 3.4 3^2 faktöriyel tasarımda hata terimlerinin KumW dağılımına sahip olması durumunda F_{AB} ve F_{AB}^* test istatistiklerinin güçleri

n	$a = 1, b = 1, p = 2$			$a = 2, b = 5, p = 6$			$a = 3, b = 2, p = 1.5$			$a = 2, b = 2, p = 1.2$		
	d	F_{AB}	F_{AB}^*	d	F_{AB}	F_{AB}^*	d	F_{AB}	F_{AB}^*	d	F_{AB}	F_{AB}^*
6	0.00	0.047	0.035	0.000	0.049	0.047	0.00	0.050	0.046	0.00	0.047	0.029
	0.08	0.084	0.066	0.018	0.088	0.086	0.07	0.086	0.079	0.08	0.084	0.063
	0.16	0.221	0.198	0.036	0.230	0.234	0.14	0.204	0.205	0.16	0.180	0.176
	0.24	0.457	0.462	0.054	0.487	0.510	0.21	0.428	0.444	0.24	0.381	0.425
	0.32	0.724	0.755	0.072	0.775	0.794	0.28	0.701	0.739	0.32	0.638	0.741
	0.40	0.959	0.976	0.090	0.932	0.944	0.35	0.895	0.923	0.40	0.835	0.926
	0.48	0.983	0.992	0.108	0.989	0.993	0.42	0.974	0.985	0.48	0.949	0.989
8	0.00	0.049	0.033	0.000	0.046	0.045	0.00	0.052	0.042	0.00	0.048	0.027
	0.07	0.089	0.068	0.015	0.088	0.088	0.06	0.087	0.082	0.07	0.082	0.061
	0.14	0.225	0.207	0.030	0.218	0.231	0.12	0.205	0.207	0.14	0.189	0.192
	0.21	0.477	0.499	0.045	0.456	0.480	0.18	0.432	0.463	0.21	0.399	0.470
	0.28	0.763	0.806	0.060	0.747	0.778	0.24	0.712	0.759	0.28	0.653	0.784
	0.35	0.926	0.958	0.075	0.921	0.939	0.30	0.898	0.913	0.35	0.855	0.953
	0.42	0.986	0.995	0.090	0.983	0.989	0.36	0.976	0.987	0.42	0.957	0.995
10	0.00	0.050	0.034	0.000	0.048	0.047	0.00	0.048	0.042	0.00	0.048	0.030
	0.06	0.086	0.066	0.013	0.087	0.088	0.05	0.081	0.075	0.06	0.077	0.061
	0.12	0.213	0.195	0.026	0.204	0.216	0.10	0.188	0.189	0.12	0.170	0.181
	0.18	0.442	0.466	0.039	0.447	0.473	0.15	0.377	0.409	0.18	0.375	0.466
	0.24	0.725	0.777	0.052	0.723	0.753	0.20	0.658	0.705	0.24	0.618	0.766
	0.30	0.903	0.943	0.065	0.907	0.929	0.25	0.863	0.908	0.30	0.830	0.949
	0.36	0.981	0.993	0.078	0.978	0.985	0.30	0.962	0.982	0.36	0.942	0.994

Çizelge 3.3 ve 3.4 incelendiğinde, MML tahmin edicilerine dayalı olarak elde edilen test istatistiklerinin gücünün, farklı örneklem hacmi ve şekil parametreleri değerleri için LS tahmin edicilerine dayalı test istatistiklerinin gücünden tüm durumlarda daha yüksek olduğu görülmektedir. Bununla birlikte $(a, b, p) = (2, 2, 1.2)$ olduğu durumda farkın oldukça belirgin olduğu dikkat çekmektedir.

3.2 Dayanıklı 3^3 Faktöriyel Tasarım

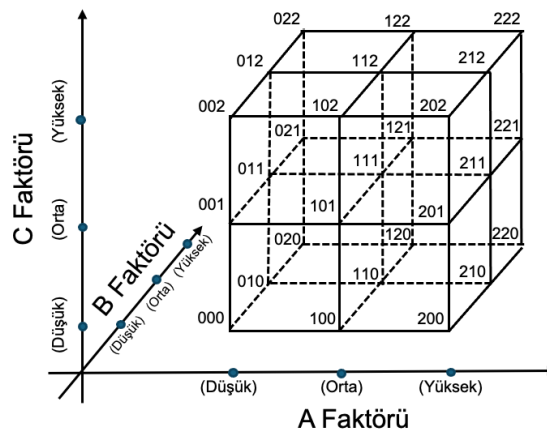
Her biri üç düzeye sahip olan A , B ve C gibi üç faktörün bulunduğu 3^3 faktöriyel tasarımın matematiksel modeli;

$$y_{ijkl} = \mu + \tau_i + \gamma_j + (\tau\gamma)_{ij} + \delta_k + (\tau\delta)_{ik} + (\gamma\delta)_{jk} + (\tau\gamma\delta)_{ijk} + \varepsilon_{ijkl} \quad (3.19)$$

$$i = 1, 2, 3; j = 1, 2, 3; k = 1, 2, 3; l = 1, 2, \dots, n$$

şeklindedir. Modele ilişkin tanımlar Bölüm 1.2’de verilmiş olup kısalık olması bakımından burada ayrıca bahsedilmemiştir.

3^3 faktöriyel tasarımda; toplam $3^3 = 27$ tane deneme vardır. 3^3 faktöriyel tasarımda faktörler ve düzeyler Şekil 3.2’deki gibi gösterilmektedir.



Şekil 3.2 3^3 faktöriyel tasarımın grafiksel gösterimi

(3.19)’daki 3^3 faktöriyel tasarım modeli sabit etkili bir modeldir. Diğer bir deyişle,

$$\sum_{i=1}^3 \tau_i = 0, \sum_{j=1}^3 \gamma_j = 0, \sum_{k=1}^3 \delta_k = 0, \sum_{i=1}^3 (\tau\gamma)_{ij} = 0, \sum_{j=1}^3 (\tau\gamma)_{ij} = 0,$$

$$\sum_{i=1}^3 (\tau\delta)_{ik} = 0, \sum_{k=1}^3 (\tau\delta)_{ik} = 0, \sum_{j=1}^3 (\gamma\delta)_{jk} = 0, \sum_{k=1}^3 (\gamma\delta)_{jk} = 0,$$

$$\sum_{i=1}^3 (\tau\gamma\delta)_{ijk} = 0, \sum_{j=1}^3 (\tau\gamma\delta)_{ijk} = 0 \text{ ve } \sum_{k=1}^3 (\tau\gamma\delta)_{ijk} = 0$$

olduğu varsayılır.

3.2.1 Parametre tahmini

Bu alt bölümde, 3^3 faktöriyel tasarımda hata terimlerinin dağılımının KumW olduğu varsayımı altında model parametrelerinin MML tahmin edicileri elde edilecektir.

Hata terimlerinin KumW dağılımına sahip olması durumunda olabilirlik fonksiyonu,

$$L = \prod_{i=1}^3 \prod_{j=1}^3 \prod_{k=1}^3 \prod_{l=1}^n \frac{abp}{\sigma} z_{ijkl}^{p-1} \exp(-z_{ijkl}^p) \left[1 - \exp(-z_{ijkl}^p)\right]^{a-1} \left\{1 - \left[1 - \exp(-z_{ijkl}^p)\right]^a\right\}^{b-1} \quad (3.20)$$

biçimindedir. Burada; $z_{ijkl} = \frac{y_{ijkl} - \mu - \tau_i - \gamma_j - \delta_k - (\tau\gamma)_{ij} - (\tau\delta)_{ik} - (\gamma\delta)_{jk} - (\tau\gamma\delta)_{ijk}}{\sigma}$ dir.

(3.20)'de gösterilen olabilirlik fonksiyonunun logaritması alınarak elde edilen $\ln L$ fonksiyonu;

$$\begin{aligned} \ln L &= N \ln(abp) - N \ln \sigma + (p-1) \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^n \ln(z_{ijkl}) \\ &\quad - \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^n z_{ijkl}^p + (a-1) \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^n \ln(1 - \exp(-z_{ijkl}^p)) \\ &\quad + (b-1) \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^n \ln(1 - (1 - \exp(-z_{ijkl}^p))^a) \end{aligned} \quad (3.21)$$

biçiminde elde edilir. Burada $N = 3^3 n$ dir.

(3.21)'de gösterilen $\ln L$ fonksiyonunun model parametrelerine göre kısmi türevlerinin alınmasıyla olabilirlik denklemleri;

$$\begin{aligned}\frac{\partial \ln L}{\partial \mu} = & -\frac{(p-1)}{\sigma} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^n g_1(z_{ijkl}) + \frac{p}{\sigma} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^n g_2(z_{ijkl}) \\ & - \frac{(a-1)p}{\sigma} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^n g_3(z_{ijkl}) \\ & + \frac{a(b-1)p}{\sigma} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^n g_4(z_{ijkl}) = 0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \ln L}{\partial \tau_i} = & -\frac{(p-1)}{\sigma} \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^n g_1(z_{ijkl}) + \frac{p}{\sigma} \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^n g_2(z_{ijkl}) \\ & - \frac{(a-1)p}{\sigma} \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^n g_3(z_{ijkl}) + \frac{a(b-1)p}{\sigma} \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^n g_4(z_{ijkl}) = 0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \ln L}{\partial \gamma_j} = & -\frac{(p-1)}{\sigma} \sum_{i=1}^3 \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^n g_1(z_{ijkl}) + \frac{p}{\sigma} \sum_{i=1}^3 \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^n g_2(z_{ijkl}) \\ & - \frac{(a-1)p}{\sigma} \sum_{i=1}^3 \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^n g_3(z_{ijkl}) + \frac{a(b-1)p}{\sigma} \sum_{i=1}^3 \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^n g_4(z_{ijkl}) = 0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \ln L}{\partial \delta_k} = & -\frac{(p-1)}{\sigma} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{l=1}^n g_1(z_{ijkl}) + \frac{p}{\sigma} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{l=1}^n g_2(z_{ijkl}) \\ & - \frac{(a-1)p}{\sigma} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{l=1}^n g_3(z_{ijkl}) + \frac{a(b-1)p}{\sigma} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{l=1}^n g_4(z_{ijkl}) = 0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \ln L}{\partial (\tau\gamma)_{ij}} = & -\frac{(p-1)}{\sigma} \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^n g_1(z_{ijkl}) + \frac{p}{\sigma} \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^n g_2(z_{ijkl}) - \frac{(a-1)p}{\sigma} \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^n g_3(z_{ijkl}) \\ & + \frac{a(b-1)p}{\sigma} \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^n g_4(z_{ijkl}) = 0,\end{aligned} \tag{3.22}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \ln L}{\partial (\tau\delta)_{ik}} = & -\frac{(p-1)}{\sigma} \sum_{j=1}^3 \sum_{l=1}^n g_1(z_{ijkl}) + \frac{p}{\sigma} \sum_{j=1}^3 \sum_{l=1}^n g_2(z_{ijkl}) - \frac{(a-1)p}{\sigma} \sum_{j=1}^3 \sum_{l=1}^n g_3(z_{ijkl}) \\ & + \frac{a(b-1)p}{\sigma} \sum_{j=1}^3 \sum_{l=1}^n g_4(z_{ijkl}) = 0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \ln L}{\partial (\gamma\delta)_{jk}} = & -\frac{(p-1)}{\sigma} \sum_{i=1}^3 \sum_{l=1}^n g_1(z_{ijkl}) + \frac{p}{\sigma} \sum_{i=1}^3 \sum_{l=1}^n g_2(z_{ijkl}) - \frac{(a-1)p}{\sigma} \sum_{i=1}^3 \sum_{l=1}^n g_3(z_{ijkl}) \\ & + \frac{a(b-1)p}{\sigma} \sum_{i=1}^3 \sum_{l=1}^n g_4(z_{ijkl}) = 0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \ln L}{\partial (\tau\gamma\delta)_{ijk}} = & -\frac{(p-1)}{\sigma} \sum_{l=1}^n g_1(z_{ijkl}) + \frac{p}{\sigma} \sum_{l=1}^n g_2(z_{ijkl}) - \frac{(a-1)p}{\sigma} \sum_{l=1}^n g_3(z_{ijkl}) \\ & + \frac{a(b-1)p}{\sigma} \sum_{l=1}^n g_4(z_{ijkl}) = 0 \text{ ve}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \ln L}{\partial \sigma} = & -\frac{N}{\sigma} - \frac{N(p-1)}{\sigma} + \frac{p}{\sigma} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^n z_{ijkl}^p \\
& - \frac{(a-1)p}{\sigma} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^n \frac{z_{ijkl}^p \exp(-z_{ijkl}^p)}{(1-\exp(-z_{ijkl}^p))} \\
& + \frac{a(b-1)p}{\sigma} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^n \frac{(1-\exp(-z_{ijkl}^p))^{a-1} z_{ijkl}^p \exp(-z_{ijkl}^p)}{(1-(1-\exp(-z_{ijkl}^p))^a)} = 0
\end{aligned}$$

şeklinde bulunur. Burada;

$$g_1(z_{ijkl}) = \frac{1}{z_{ijkl}}, \quad g_2(z_{ijkl}) = z_{ijkl}^{p-1}, \quad g_3(z_{ijkl}) = \frac{z_{ijkl}^{p-1} \exp(-z_{ijkl}^p)}{(1-\exp(-z_{ijkl}^p))} \text{ ve}$$

$$g_4(z_{ijkl}) = \frac{(1-\exp(-z_{ijkl}^p))^{a-1} z_{ijkl}^{p-1} \exp(-z_{ijkl}^p)}{(1-(1-\exp(-z_{ijkl}^p))^a)}$$

olarak tanımlanır.

(3.22)'de verilen olabilirlik denklemlerinde yer alan parametrelerin doğrusal olmayan $g_1(z_{ijkl})$, $g_2(z_{ijkl})$, $g_3(z_{ijkl})$ ve $g_4(z_{ijkl})$ fonksiyonları nedeniyle, hata terimlerinin dağılımı KumW olarak varsayıldığında 3^3 faktöriyel tasarım modelindeki parametrelerin ML tahmin edicilerinin açık çözümüne ulaşamaz.

Bu nedenle, model parametrelerinin tahmin edicilerini elde etmek için Tiku (1967) tarafından önerilen MML metodolojisi kullanılarak çözüme ulaşılır. Öncelikle veriler

$$z_{ijk(1)} \leq z_{ijk(2)} \leq \dots \leq z_{ijk(n)} \quad (3.23)$$

şeklinde sıralanır. Sıra istatistiklerinin toplama işlemine göre değişmezlik özelliği,

$$\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^n z_{ijkl} = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^n z_{ijk(l)} \quad (3.24)$$

kullanılarak, olabilirlik denklemlerindeki toplamlar sıra istatistikleri cinsinden ifade edilir. Böylece olabilirlik denklemleri,

$$\begin{aligned}\frac{\partial \ln L}{\partial \mu} = & -\frac{(p-1)}{\sigma} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^n g_1(z_{ijk(l)}) + \frac{p}{\sigma} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^n g_2(z_{ijk(l)}) \\ & - \frac{(a-1)p}{\sigma} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^n g_3(z_{ijk(l)}) \\ & + \frac{a(b-1)p}{\sigma} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^n g_4(z_{ijk(l)}) = 0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \ln L}{\partial \tau_i} = & -\frac{(p-1)}{\sigma} \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^n g_1(z_{ijk(l)}) + \frac{p}{\sigma} \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^n g_2(z_{ijk(l)}) \\ & - \frac{(a-1)p}{\sigma} \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^n g_3(z_{ijk(l)}) + \frac{a(b-1)p}{\sigma} \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^n g_4(z_{ijk(l)}) = 0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \ln L}{\partial \gamma_j} = & -\frac{(p-1)}{\sigma} \sum_{i=1}^3 \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^n g_1(z_{ijk(l)}) + \frac{p}{\sigma} \sum_{i=1}^3 \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^n g_2(z_{ijk(l)}) \\ & - \frac{(a-1)p}{\sigma} \sum_{i=1}^3 \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^n g_3(z_{ijk(l)}) + \frac{a(b-1)p}{\sigma} \sum_{i=1}^3 \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^n g_4(z_{ijk(l)}) = 0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \ln L}{\partial \delta_k} = & -\frac{(p-1)}{\sigma} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{l=1}^n g_1(z_{ijk(l)}) + \frac{p}{\sigma} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{l=1}^n g_2(z_{ijk(l)}) \\ & - \frac{(a-1)p}{\sigma} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{l=1}^n g_3(z_{ijk(l)}) + \frac{a(b-1)p}{\sigma} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{l=1}^n g_4(z_{ijk(l)}) = 0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \ln L}{\partial (\tau\gamma)_{ij}} = & -\frac{(p-1)}{\sigma} \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^n g_1(z_{ijk(l)}) + \frac{p}{\sigma} \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^n g_2(z_{ijk(l)}) \\ & - \frac{(a-1)p}{\sigma} \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^n g_3(z_{ijk(l)}) + \frac{a(b-1)p}{\sigma} \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^n g_4(z_{ijk(l)}) = 0,\end{aligned} \quad (3.25)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \ln L}{\partial (\tau\delta)_{ik}} = & -\frac{(p-1)}{\sigma} \sum_{j=1}^3 \sum_{l=1}^n g_1(z_{ijk(l)}) + \frac{p}{\sigma} \sum_{j=1}^3 \sum_{l=1}^n g_2(z_{ijk(l)}) \\ & - \frac{(a-1)p}{\sigma} \sum_{j=1}^3 \sum_{l=1}^n g_3(z_{ijk(l)}) + \frac{a(b-1)p}{\sigma} \sum_{j=1}^3 \sum_{l=1}^n g_4(z_{ijk(l)}) = 0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \ln L}{\partial (\gamma\delta)_{jk}} = & -\frac{(p-1)}{\sigma} \sum_{i=1}^3 \sum_{l=1}^n g_1(z_{ijk(l)}) + \frac{p}{\sigma} \sum_{i=1}^3 \sum_{l=1}^n g_2(z_{ijk(l)}) \\ & - \frac{(a-1)p}{\sigma} \sum_{i=1}^3 \sum_{l=1}^n g_3(z_{ijk(l)}) + \frac{a(b-1)p}{\sigma} \sum_{i=1}^3 \sum_{l=1}^n g_4(z_{ijk(l)}) = 0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \ln L}{\partial (\tau\gamma\delta)_{ijk}} = & -\frac{(p-1)}{\sigma} \sum_{l=1}^n g_1(z_{ijk(l)}) + \frac{p}{\sigma} \sum_{l=1}^n g_2(z_{ijk(l)}) - \frac{(a-1)p}{\sigma} \sum_{l=1}^n g_3(z_{ijk(l)}) \\ & + \frac{a(b-1)p}{\sigma} \sum_{l=1}^n g_4(z_{ijk(l)}) = 0 \text{ ve}\end{aligned}$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \sigma} = -\frac{N}{\sigma} - \frac{(p-1)}{\sigma} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^n z_{ijk(l)} g_1(z_{ijk(l)})$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{p}{\sigma} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^n z_{ijk(l)} g_2(z_{ijk(l)}) \\
& - \frac{(a-1)p}{\sigma} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^n z_{ijk(l)} g_3(z_{ijk(l)}) \\
& + \frac{a(b-1)p}{\sigma} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^n z_{ijk(l)} g_4(z_{ijk(l)}) = 0
\end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir. Burada;

$$g_1(z_{ijk(l)}) = \frac{1}{z_{ijk(l)}}, \quad g_2(z_{ijk(l)}) = z_{ijk(l)}^{p-1}, \quad g_3(z_{ijk(l)}) = \frac{z_{ijk(l)}^{p-1} \exp(-z_{ijk(l)}^p)}{(1 - \exp(-z_{ijk(l)}^p))},$$

$$g_4(z_{ijk(l)}) = \frac{(1 - \exp(-z_{ijk(l)}^p))^{a-1} z_{ijk(l)}^{p-1} \exp(-z_{ijk(l)}^p)}{(1 - (1 - \exp(-z_{ijk(l)}^p))^a)} \text{ ve}$$

$$z_{ijk(l)} = \frac{y_{ijk(l)} - \mu - \tau_i - \gamma_j - \delta_k - (\tau\gamma)_{ij} - (\tau\delta)_{ik} - (\gamma\delta)_{jk} - (\tau\gamma\delta)_{ijk}}{\sigma}$$

olarak tanımlanır.

Olabilirlik denklemlerinde bulunan, $g_1(z_{ijk(l)})$, $g_2(z_{ijk(l)})$, $g_3(z_{ijk(l)})$ ve $g_4(z_{ijk(l)})$ fonksiyonları, doğrusal olmayan fonksiyonlardır ve Taylor serisinin ilk iki terimini kullanarak sıra istatistiklerinin beklenen değeri $t_{(l)} = E(z_{ijk(l)})$ etrafında açılarak doğrusal hale getirilirler. Buna göre;

$$g_1(z_{ijk(l)}) \cong g_1(t_{(l)}) + [z_{ijk(l)} - t_{(l)}] \left\{ \frac{d}{dz} g_1(z) \right\}_{z=t_{(l)}},$$

$$g_2(z_{ijk(l)}) \cong g_2(t_{(l)}) + [z_{ijk(l)} - t_{(l)}] \left\{ \frac{d}{dz} g_2(z) \right\}_{z=t_{(l)}},$$

$$g_3(z_{ijk(l)}) \cong g_3(t_{(l)}) + [z_{ijk(l)} - t_{(l)}] \left\{ \frac{d}{dz} g_3(z) \right\}_{z=t_{(l)}} \text{ ve}$$

$$g_4(z_{ijk(l)}) \cong g_4(t_{(l)}) + [z_{ijk(l)} - t_{(l)}] \left\{ \frac{d}{dz} g_4(z) \right\}_{z=t_{(l)}}$$

olmak üzere,

$$\begin{aligned}
 g_1(z_{ijk(l)}) &\cong \alpha_{1l} - \beta_{1l}z_{ijk(l)}, \quad g_2(z_{ijk(l)}) \cong \alpha_{2l} + \beta_{2l}z_{ijk(l)}, \\
 g_3(z_{ijk(l)}) &\cong \alpha_{3l} - \beta_{3l}z_{ijk(l)} \quad \text{ve} \quad g_4(z_{ijk(l)}) \cong \alpha_{4l} + \beta_{4l}z_{ijk(l)}
 \end{aligned} \tag{3.26}$$

şeklinde yazılır. Burada;

$$\alpha_{1l} = 2/t_{ijk(l)} \quad , \quad \beta_{1l} = 1/t_{ijk(l)}^2,$$

$$\alpha_{2l} = (2-p)t_{ijk(l)}^{p-1} \quad , \quad \beta_{2l} = (p-1)t_{ijk(l)}^{p-2},$$

$$\alpha_{3l} = \frac{t_{ijk(l)}^{p-1} \exp(-t_{ijk(l)}^p)}{(1 - \exp(-t_{ijk(l)}^p))} + \beta_{3l}t_{ijk(l)},$$

$$\beta_{3l} = t_{ijk(l)}^{p-2} \left(\exp(t_{ijk(l)}^p) (pt_{ijk(l)}^p - p + 1) + p - 1 \right) / \left(\exp(t_{ijk(l)}^p) - 1 \right)^2,$$

$$\alpha_{4l} = \frac{t_{ijk(l)}^{p-1} (1 - \exp(-t_{ijk(l)}^p))^{a-1} \exp(-t_{ijk(l)}^p)}{(1 - (1 - \exp(-t_{ijk(l)}^p))^a)} - \beta_{4l}t_{ijk(l)},$$

$$\beta_{4l} = \frac{t_{ijk(l)}^{p-2} (1 - \exp(-t_{ijk(l)}^p))^a \{w_{1l} + w_{2l}\}}{\{(1 - \exp(-t_{ijk(l)}^p))^a - 1\}^2 (\exp(t_{ijk(l)}^p) - 1)^2},$$

$$w_{1l} = \left((1 - \exp(-t_{ijk(l)}^p)) (pt_{ijk(l)}^p - p + 1) - pt_{ijk(l)}^p + p - 1 \right) \exp(t_{ijk(l)}^p) \quad \text{ve}$$

$$w_{2l} = (p-1) \left(1 - \exp(-t_{ijk(l)}^p) \right)^a + apt_{ijk(l)}^p - p + 1$$

şeklinde elde edilir. $t_{(l)}$ 'nin gerçek değerini bulmak zor olduğundan yaklaşık değerleri;

$$\int_{-\infty}^{t(l)} f(z) dz \cong \frac{l}{n+1}, l = 1, 2, \dots, n$$

yardımla elde edilir. Burada, $f(z)$ standart KumW dağılımının pdf'sini göstermektedir.

Buna göre, (3.26)'da verilen doğrusal ifadeler, (3.25)'te verilen olabilirlik denklemlerindeki $g_1(z_{ijk(l)})$, $g_2(z_{ijk(l)})$, $g_3(z_{ijk(l)})$ ve $g_4(z_{ijk(l)})$ fonksiyonlarının yerine yazıldığında;

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln L^*}{\partial \mu} = & -\frac{(p-1)}{\sigma} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^n (\alpha_{1l} - \beta_{1l} z_{ijk(l)}) \\ & + \frac{p}{\sigma} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^n (\alpha_{2l} + \beta_{2l} z_{ijk(l)}) \\ & - \frac{(a-1)p}{\sigma} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^n (\alpha_{3l} - \beta_{3l} z_{ijk(l)}) \\ & + \frac{a(b-1)p}{\sigma} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^n (\alpha_{4l} + \beta_{4l} z_{ijk(l)}) = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln L^*}{\partial \tau_i} = & -\frac{(p-1)}{\sigma} \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^n (\alpha_{1l} - \beta_{1l} z_{ijk(l)}) + \frac{p}{\sigma} \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^n (\alpha_{2l} + \beta_{2l} z_{ijk(l)}) \\ & - \frac{(a-1)p}{\sigma} \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^n (\alpha_{3l} - \beta_{3l} z_{ijk(l)}) \\ & + \frac{a(b-1)p}{\sigma} \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^n (\alpha_{4l} + \beta_{4l} z_{ijk(l)}) = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln L^*}{\partial \gamma_j} = & -\frac{(p-1)}{\sigma} \sum_{i=1}^3 \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^n (\alpha_{1l} - \beta_{1l} z_{ijk(l)}) + \frac{p}{\sigma} \sum_{i=1}^3 \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^n (\alpha_{2l} + \beta_{2l} z_{ijk(l)}) \\ & - \frac{(a-1)p}{\sigma} \sum_{i=1}^3 \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^n (\alpha_{3l} - \beta_{3l} z_{ijk(l)}) \\ & + \frac{a(b-1)p}{\sigma} \sum_{i=1}^3 \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^n (\alpha_{4l} + \beta_{4l} z_{ijk(l)}) = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln L^*}{\partial \delta_k} = & -\frac{(p-1)}{\sigma} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{l=1}^n (\alpha_{1l} - \beta_{1l} z_{ijk(l)}) + \frac{p}{\sigma} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{l=1}^n (\alpha_{2l} + \beta_{2l} z_{ijk(l)}) \\ & - \frac{(a-1)p}{\sigma} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{l=1}^n (\alpha_{3l} - \beta_{3l} z_{ijk(l)}) \\ & + \frac{a(b-1)p}{\sigma} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{l=1}^n (\alpha_{4l} + \beta_{4l} z_{ijk(l)}) = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln L^*}{\partial (\tau\gamma)_{ij}} = & -\frac{(p-1)}{\sigma} \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^n (\alpha_{1l} - \beta_{1l} z_{ijk(l)}) + \frac{p}{\sigma} \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^n (\alpha_{2l} + \beta_{2l} z_{ijk(l)}) \\ & - \frac{(a-1)p}{\sigma} \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^n (\alpha_{3l} - \beta_{3l} z_{ijk(l)}) \\ & + \frac{a(b-1)p}{\sigma} \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^n (\alpha_{4l} + \beta_{4l} z_{ijk(l)}) = 0, \end{aligned} \tag{3.27}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \ln L^*}{\partial (\tau\delta)_{ik}} &= -\frac{(p-1)}{\sigma} \sum_{j=1}^3 \sum_{l=1}^n (\alpha_{1l} - \beta_{1l} z_{ijk(l)}) + \frac{p}{\sigma} \sum_{j=1}^3 \sum_{l=1}^n (\alpha_{2l} + \beta_{2l} z_{ijk(l)}) \\ &\quad - \frac{(a-1)p}{\sigma} \sum_{j=1}^3 \sum_{l=1}^n (\alpha_{3l} - \beta_{3l} z_{ijk(l)}) + \frac{a(b-1)p}{\sigma} \sum_{j=1}^3 \sum_{l=1}^n (\alpha_{4l} + \beta_{4l} z_{ijk(l)}) = 0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \ln L^*}{\partial (\gamma\delta)_{jk}} &= -\frac{(p-1)}{\sigma} \sum_{i=1}^3 \sum_{l=1}^n (\alpha_{1l} - \beta_{1l} z_{ijk(l)}) + \frac{p}{\sigma} \sum_{i=1}^3 \sum_{l=1}^n (\alpha_{2l} + \beta_{2l} z_{ijk(l)}) \\ &\quad - \frac{(a-1)p}{\sigma} \sum_{i=1}^3 \sum_{l=1}^n (\alpha_{3l} - \beta_{3l} z_{ijk(l)}) + \frac{a(b-1)p}{\sigma} \sum_{i=1}^3 \sum_{l=1}^n (\alpha_{4l} + \beta_{4l} z_{ijk(l)}) = 0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \ln L^*}{\partial (\tau\gamma\delta)_{ijk}} &= -\frac{(p-1)}{\sigma} \sum_{l=1}^n (\alpha_{1l} - \beta_{1l} z_{ijk(l)}) + \frac{p}{\sigma} \sum_{l=1}^n (\alpha_{2l} + \beta_{2l} z_{ijk(l)}) \\ &\quad - \frac{(a-1)p}{\sigma} \sum_{l=1}^n (\alpha_{3l} - \beta_{3l} z_{ijk(l)}) + \frac{a(b-1)p}{\sigma} \sum_{l=1}^n (\alpha_{4l} + \beta_{4l} z_{ijk(l)}) = 0 \text{ ve}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \ln L^*}{\partial \sigma} &= -\frac{N}{\sigma} - \frac{(p-1)}{\sigma} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^n z_{ijk(l)} (\alpha_{1l} - \beta_{1l} z_{ijk(l)}) \\ &\quad + \frac{p}{\sigma} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^n z_{ijk(l)} (\alpha_{2l} + \beta_{2l} z_{ijk(l)}) \\ &\quad - \frac{(a-1)p}{\sigma} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^n z_{ijk(l)} (\alpha_{3l} - \beta_{3l} z_{ijk(l)}) \\ &\quad + \frac{a(b-1)p}{\sigma} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^n z_{ijk(l)} (\alpha_{4l} + \beta_{4l} z_{ijk(l)}) = 0\end{aligned}$$

olarak ifade edilen uyarlanmış olabilirlik denklemleri elde edilir. Denklem sisteminin çözümünden MML tahmin edicileri;

$$\begin{aligned}\hat{\mu} &= \hat{\mu}_{...} - \frac{\Delta\hat{\sigma}}{m}, \quad \hat{\tau}_i = \hat{\mu}_{i...} - \hat{\mu}_{...}, \quad \hat{\gamma}_j = \hat{\mu}_{.j..} - \hat{\mu}_{...}, \quad \hat{\delta}_k = \hat{\mu}_{..k.} - \hat{\mu}_{...}, \\ (\widehat{\tau\gamma})_{ij} &= \hat{\mu}_{ij..} - \hat{\mu}_{i...} - \hat{\mu}_{.j..} + \hat{\mu}_{...}, \quad (\widehat{\tau\delta})_{ik} = \hat{\mu}_{i.k.} - \hat{\mu}_{i...} - \hat{\mu}_{..k.} + \hat{\mu}_{...}, \\ (\widehat{\gamma\delta})_{jk} &= \hat{\mu}_{.jk.} - \hat{\mu}_{.j..} - \hat{\mu}_{..k.} + \hat{\mu}_{...}, \\ (\widehat{\tau\gamma\delta})_{ijk} &= \hat{\mu}_{ijk.} - \hat{\mu}_{ij..} - \hat{\mu}_{i.k.} - \hat{\mu}_{.jk.} + \hat{\mu}_{i...} + \hat{\mu}_{.j..} + \hat{\mu}_{..k.} - \hat{\mu}_{...} \text{ ve} \\ \hat{\sigma} &= \frac{-B + \sqrt{B^2 + 4NC}}{2\sqrt{N(N-3^3)}}\end{aligned} \tag{3.28}$$

şeklinde elde edilir. Burada;

$$\hat{\mu}_{...} = \frac{\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^n \theta_l y_{ijk(l)}}{3^3 m}, \quad \hat{\mu}_{i...} = \frac{\sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^n \theta_l y_{ijk(l)}}{3^2 m},$$

$$\hat{\mu}_{.j..} = \frac{\sum_{i=1}^3 \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^n \theta_l y_{ijk(l)}}{3^2 m}, \quad \hat{\mu}_{..k.} = \frac{\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{l=1}^n \theta_l y_{ijk(l)}}{3^2 m}, \quad \hat{\mu}_{ij..} = \frac{\sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^n \theta_l y_{ijk(l)}}{3m},$$

$$\hat{\mu}_{i.k.} = \frac{\sum_{j=1}^3 \sum_{l=1}^n \theta_l y_{ijk(l)}}{3m}, \quad \hat{\mu}_{.jk.} = \frac{\sum_{i=1}^3 \sum_{l=1}^n \theta_l y_{ijk(l)}}{3m}, \quad \hat{\mu}_{ijk.} = \frac{\sum_{l=1}^n \theta_l y_{ijk(l)}}{m},$$

$$m = \sum_{l=1}^n \theta_l, \quad \Delta = \sum_{l=1}^n \Delta_l, \quad N = 3^3 n,$$

$$\theta_l = (p-1)\beta_{1l} + p\beta_{2l} + (a-1)p\beta_{3l} + a(b-1)p\beta_{4l},$$

$$\Delta_l = (p-1)\alpha_{1l} - p\alpha_{2l} + (a-1)p\alpha_{3l} - a(b-1)p\alpha_{4l},$$

$$B = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^n \Delta_l \{y_{ijk(l)} - \hat{\mu}_{ijk.}\} \text{ ve}$$

$$C = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^n \theta_l (y_{ijk(l)} - \hat{\mu}_{ijk.})^2$$

olarak tanımlanmaktadır.

LS tahmin edicileri: Hata terimlerinin dağılımının $KumW(a, b, p, 0, \sigma)$ olması durumunda 3^3 faktöriyel tasarım model parametrelerinin LS tahmin edicileri;

$$\tilde{\mu}_{BC} = \bar{y}_{....} - m_1 \tilde{\sigma}_{BC}, \quad \tilde{\tau}_i = \bar{y}_{i....} - \bar{y}_{....}, \quad \tilde{\gamma}_j = \bar{y}_{.j..} - \bar{y}_{....}, \quad \tilde{\delta}_k = \bar{y}_{..k.} - \bar{y}_{....},$$

$$\widetilde{\tau\gamma}_{ij} = \bar{y}_{ij..} - \bar{y}_{i....} - \bar{y}_{.j..} + \bar{y}_{....}, \quad \widetilde{\tau\delta}_{ik} = \bar{y}_{i.k.} - \bar{y}_{i....} - \bar{y}_{..k.} + \bar{y}_{....},$$

$$\widetilde{\gamma\delta}_{jk} = \bar{y}_{.jk.} - \bar{y}_{.j..} - \bar{y}_{..k.} + \bar{y}_{....}, \quad (3.29)$$

$$\widetilde{\tau\gamma\delta}_{ijk} = \bar{y}_{ijk.} - \bar{y}_{ij..} - \bar{y}_{i.k.} - \bar{y}_{.jk.} + \bar{y}_{i....} + \bar{y}_{.j..} + \bar{y}_{..k.} - \bar{y}_{....} \text{ ve}$$

$$\tilde{\sigma}_{BC} = \sqrt{\frac{\tilde{\sigma}^2}{v}}$$

şeklindedir. Burada, $\tilde{\mu}_{BC}$ ve $\tilde{\sigma}_{BC}$, sırasıyla μ ve σ parametrelerinin tahmin edicilerinin yan düzeltmesi yapılmış hali, m_1 ve v ise sırasıyla hata teriminin beklenen değeri ve varyansdır. Ayrıca, $\tilde{\sigma}^2 = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^n (y_{ijkl} - \bar{y}_{ijk})^2 / 3^3(n-1)$ dir.

Monte Carlo simülasyonu: Hata terimlerinin dağılımının KumW olduğu varsayımı altında 3^3 faktöriyel tasarım modeline ait parametrelerin MML ve LS tahmin edicileri (3.12)’de tanımlanan Yan ve MSE ile sırasıyla (3.13) ve (3.14)’te tanımlanan RE ve DEF kriterlerine göre Monte Carlo simülasyonu yardımıyla 10,000 tekrar yapılarak karşılaştırılmıştır. Karşılaştırma yapılırken $(a, b, p) = (1, 1, 2), (2, 5, 6), (3, 2, 1.5)$ ve $(2, 2, 1.2)$ ve örneklem hacmi $n = 6, 8, 10$ alınmıştır. Sonuçlar Çizelge 3.5 ve 3.6’da sunulmuştur.

Çizelge 3.5 3^3 faktöriyel tasarımda hata terimlerinin KumW dağılımına sahip olması durumunda model parametrelerinin LS ve MML tahmin edicilerinin Yan değerleri

$a = 1, b = 1, p = 2$										
n		μ	τ_1	γ_1	$\tau\gamma_{11}$	δ_1	$\tau\delta_{11}$	$\gamma\delta_{11}$	$\tau\gamma\delta_{111}$	σ
6	LS	-0.0030	-0.0000	-0.0000	-0.0012	0.0014	0.0000	-0.0000	0.0000	0.0010
	MML	0.1370	-0.0000	-0.0000	-0.0010	0.0012	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0776
8	LS	0.0034	0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0039
	MML	0.1165	0.0000	-0.0000	-0.0000	0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0675
10	LS	-0.0009	-0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	-0.0000	0.0012	0.0020
	MML	0.1034	-0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	-0.0000	0.0008	-0.0609
$a = 2, b = 5, p = 6$										
n		μ	τ_1	γ_1	$\tau\gamma_{11}$	δ_1	$\tau\delta_{11}$	$\gamma\delta_{11}$	$\tau\gamma\delta_{111}$	σ
6	LS	0.0048	-0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	-0.0000	-0.0054
	MML	-0.0082	-0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0016
8	LS	-0.0017	0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	0.0015
	MML	-0.0067	0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0017
10	LS	0.0033	-0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	-0.0000	0.0000	0.0000	-0.0037
	MML	-0.0042	0.0000	0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	-0.0001
$a = 3, b = 2, p = 1.5$										
n		μ	τ_1	γ_1	$\tau\gamma_{11}$	δ_1	$\tau\delta_{11}$	$\gamma\delta_{11}$	$\tau\gamma\delta_{111}$	σ
6	LS	0.0018	-0.0000	-0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0022	0.0000	0.0000	-0.0024
	MML	0.0624	-0.0000	-0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0019	0.0000	0.0000	-0.0179
8	LS	0.0006	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	0.0000	-0.0000	0.0001
	MML	0.0517	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	0.0000	-0.0000	-0.0155
10	LS	0.0004	0.0000	-0.0000	-0.0000	0.0000	0.0010	0.0000	-0.0010	-0.0012
	MML	0.0449	0.0000	-0.0000	-0.0000	0.0000	0.0010	0.0000	-0.0011	-0.0145
$a = 2, b = 2, p = 1.2$										
n		μ	τ_1	γ_1	$\tau\gamma_{11}$	δ_1	$\tau\delta_{11}$	$\gamma\delta_{11}$	$\tau\gamma\delta_{111}$	σ
6	LS	0.0016	-0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	0.0017	-0.0003
	MML	0.1320	-0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	0.0020	-0.0419
8	LS	0.0024	-0.0000	-0.0000	0.0000	0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0013	-0.0060
	MML	0.1094	-0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0009	-0.0389
10	LS	0.0035	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	-0.0010	-0.0000	-0.0000	-0.0029
	MML	0.0942	-0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	-0.0011	0.0000	-0.0000	-0.0353

Çizelge 3.6 3^3 faktöriyel tasarımda hata terimlerinin KumW dağılımına sahip olması durumunda model parametrelerinin LS ve MML tahmin edicilerinin MSE, RE ve DEF değerleri

$a = 1, b = 1, p = 2$											
MSE										DEF	
n		μ	τ_1	γ_1	$\tau\gamma_{11}$	δ_1	$\tau\delta_{11}$	$\gamma\delta_{11}$	$\tau\gamma\delta_{111}$	σ	
6	LS	0.0030	0.0027	0.0027	0.0053	0.0026	0.0053	0.0052	0.0107	0.0041	0.0416
	MML	0.0206	0.0022	0.0022	0.0044	0.0022	0.0044	0.0043	0.0089	0.0091	0.0583
	RE =	687	81	81	83	85	83	83	83	222	
8	LS	0.0021	0.0020	0.0020	0.0040	0.0020	0.0039	0.0040	0.0080	0.0030	0.0310
	MML	0.0149	0.0016	0.0016	0.0032	0.0016	0.0032	0.0032	0.0064	0.0068	0.0425
	RE =	710	80	80	80	80	82	80	80	227	
10	LS	0.0016	0.0016	0.0016	0.0033	0.0016	0.0032	0.0032	0.0065	0.0023	0.0249
	MML	0.0117	0.0012	0.0012	0.0025	0.0012	0.0025	0.0025	0.0050	0.0054	0.0332
	RE =	731	75	75	76	75	78	78	77	235	
$a = 2, b = 5, p = 6$											
MSE										DEF	
n		μ	τ_1	γ_1	$\tau\gamma_{11}$	δ_1	$\tau\delta_{11}$	$\gamma\delta_{11}$	$\tau\gamma\delta_{111}$	σ	
6	LS	0.0034	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	6×10^{-5}	6×10^{-5}	0.0000	0.0042	0.0092
	MML	0.0033	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	4×10^{-5}	4×10^{-5}	0.0000	0.0039	0.0086
	RE =	97	100	100	100	100	67	67	100	93	
8	LS	0.0026	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	4×10^{-5}	0.0031	0.0070
	MML	0.0024	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	3×10^{-5}	0.0029	0.0065
	RE =	92	100	100	100	100	100	100	75	94	
10	LS	0.0019	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	6×10^{-5}	-0.0000	-0.0000	0.0023	0.0052
	MML	0.0018	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	3×10^{-5}	-0.0000	-0.0000	0.0022	0.0049
	RE =	95	100	100	100	100	50	100	100	96	
$a = 3, b = 2, p = 1.5$											
MSE										DEF	
n		μ	τ_1	γ_1	$\tau\gamma_{11}$	δ_1	$\tau\delta_{11}$	$\gamma\delta_{11}$	$\tau\gamma\delta_{111}$	σ	
6	LS	0.0047	0.0021	0.0021	0.0042	0.0022	0.0043	0.0043	0.0085	0.0045	0.0369
	MML	0.0075	0.0018	0.0018	0.0036	0.0019	0.0038	0.0037	0.0074	0.0041	0.0356
	RE =	160	86	86	86	86	88	86	87	91	
8	LS	0.0034	0.0016	0.0016	0.0032	0.0016	0.0032	0.0032	0.0065	0.0032	0.0275
	MML	0.0053	0.0014	0.0014	0.0027	0.0014	0.0027	0.0028	0.0056	0.0029	0.0262
	RE =	156	88	88	84	88	84	88	86	91	
10	LS	0.0027	0.0013	0.0013	0.0026	0.0013	0.0025	0.0026	0.0052	0.0025	0.0220
	MML	0.0040	0.0011	0.0011	0.0022	0.0011	0.0022	0.0022	0.0044	0.0022	0.0205
	RE =	148	85	85	85	85	88	85	85	88	
$a = 2, b = 2, p = 1.2$											
MSE										DEF	
n		μ	τ_1	γ_1	$\tau\gamma_{11}$	δ_1	$\tau\delta_{11}$	$\gamma\delta_{11}$	$\tau\gamma\delta_{111}$	σ	
6	LS	0.0035	0.0033	0.0033	0.0066	0.0033	0.0064	0.0066	0.0135	0.0061	0.0526
	MML	0.0191	0.0021	0.0021	0.0043	0.0021	0.0042	0.0042	0.0087	0.0060	0.0528
	RE =	546	64	64	65	64	66	64	64	98	
8	LS	0.0027	0.0024	0.0025	0.0049	0.0026	0.0050	0.0050	0.0100	0.0046	0.0397
	MML	0.0132	0.0015	0.0015	0.0030	0.0016	0.0030	0.0030	0.0061	0.0046	0.0375
	RE =	489	63	60	61	62	60	60	61	100	
10	LS	0.0021	0.0020	0.0020	0.0040	0.0020	0.0040	0.0039	0.0078	0.0036	0.0314
	MML	0.0098	0.0012	0.0012	0.0023	0.0012	0.0024	0.0024	0.0046	0.0035	0.0286
	RE =	467	60	60	57	60	60	62	59	97	

Burada, τ_i , γ_j , δ_k , $\tau\gamma_{ij}$, $\tau\delta_{ik}$, $\gamma\delta_{jk}$ ve $\tau\gamma\delta_{ijk}$ ($i = 1,2,3$; $j = 1,2,3$ ve $k = 1,2,3$) parametrelerine ait Monte Carlo simülasyon sonuçlarından kısalık olması bakımından

sadece $\tau_1, \gamma_1, \delta_1, \tau\gamma_{11}, \tau\delta_{11}, \gamma\delta_{11}$ ve $\tau\gamma\delta_{111}$ parametrelerine ait sonuçlara yer verilmiştir. Diğer parametrelere ait sonuçlar da benzer çıkmaktadır.

Çizelge 3.5 ve 3.6’da görüldüğü gibi, şekil parametrelerinin (a, b ve p) farklı değerleri için MML yöntemiyle bulunan parametre tahmin edicilerinin μ hariç LS yöntemiyle bulunan tahmin edicilere göre daha etkin olduğu görülmektedir.

Ayrıca, örneklem hacminin artmasıyla birlikte MML tahmin edicilerinin etkinliğinin, LS tahmin edicilerine kıyasla arttığı gözlemlenmiştir.

3.2.2 Hipotez testi

(3.19)’da verilen 3^3 faktöriyel tasarım modelinde A, B ve C faktörlerinin ana etkileri ile AB, AC, BC ve ABC etkileşim etkilerinin anlamlı olup olmadığına ilişkin hipotezler;

$$H_{01}: \forall \tau_i = 0, H_{02}: \forall \gamma_j = 0, H_{03}: \forall \delta_k = 0, H_{04}: \forall (\tau\gamma)_{ij} = 0, \quad (3.30)$$

$$H_{05}: \forall (\tau\delta)_{ik} = 0, H_{06}: \forall (\gamma\delta)_{jk} = 0 \text{ ve } H_{07}: \forall (\tau\gamma\delta)_{ijk} = 0$$

biçiminde gösterilir, burada $i = 1,2,3, j = 1,2,3$ ve $k = 1,2,3$ ’tür.

(3.30)’da verilen hipotezleri sınamak için, LS tahmin edicilerine dayalı F test istatistikleri;

$$F_A = \frac{3^2 n \sum_{i=1}^3 \tilde{\tau}_i^2}{2\tilde{\sigma}^2}, F_B = \frac{3^2 n \sum_{j=1}^3 \tilde{\gamma}_j^2}{2\tilde{\sigma}^2}, F_C = \frac{3^2 n \sum_{k=1}^3 \tilde{\delta}_k^2}{2\tilde{\sigma}^2}, F_{AB} = \frac{3n \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 (\tilde{\tau\gamma})_{ij}^2}{4\tilde{\sigma}^2},$$

$$F_{AC} = \frac{3n \sum_{i=1}^3 \sum_{k=1}^3 (\tilde{\tau\delta})_{ik}^2}{4\tilde{\sigma}^2}, F_{BC} = \frac{3n \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 (\tilde{\gamma\delta})_{jk}^2}{4\tilde{\sigma}^2} \text{ ve} \quad (3.31)$$

$$F_{ABC} = \frac{n \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 (\tilde{\tau\gamma\delta})_{ijk}^2}{8\tilde{\sigma}^2}$$

biçiminde olup, ana etkilere ilişkin F test istatistikleri 2 ve $3^3 (n - 1)$ serbestlik dereceli F dağılımına, ikili etkileşim etkisine ilişkin F test istatistikleri 4 ve $3^3 (n - 1)$ serbestlik dereceli F dağılımına, üçlü etkileşim etkisine ilişkin F test istatistiği ise 8 ve $3^3 (n - 1)$ serbestlik dereceli F dağılımına sahiptir. Buna karşın MML tahmin edicilerine dayalı asimptotik F^* test istatistikleri,

$$F_A^* = \frac{3^2 m \sum_{i=1}^3 \hat{\tau}_i^2}{2\hat{\sigma}^2}, F_B^* = \frac{3^2 m \sum_{j=1}^3 \hat{\gamma}_j^2}{2\hat{\sigma}^2}, F_C^* = \frac{3^2 m \sum_{k=1}^3 \hat{\delta}_k^2}{2\hat{\sigma}^2}, F_{AB}^* = \frac{3m \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 (\widehat{\tau\gamma})_{ij}^2}{4\hat{\sigma}^2},$$

$$F_{AC}^* = \frac{3m \sum_{i=1}^3 \sum_{k=1}^3 (\widehat{\tau\delta})_{ik}^2}{4\hat{\sigma}^2}, F_{BC}^* = \frac{3m \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 (\widehat{\gamma\delta})_{jk}^2}{4\hat{\sigma}^2} \text{ ve} \quad (3.32)$$

$$F_{ABC}^* = \frac{m \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 (\widehat{\tau\gamma\delta})_{ijk}^2}{8\hat{\sigma}^2}$$

şeklinde önerilmiştir.

Hata terimlerinin KumW dağılımına sahip olması durumunda, (3.30)'da verilen hipotezlerin test edilmesinde önerilen $F_A^*, F_B^*, F_C^*, F_{AB}^*, F_{AC}^*, F_{BC}^*$ ve F_{ABC}^* test istatistikleri, normal teori altında kullanılan $F_A, F_B, F_C, F_{AB}, F_{AC}, F_{BC}$ ve F_{ABC} test istatistikleriyle Monte Carlo simülasyon çalışması yardımıyla I. tip hata oranları ve güç değerleri bakımından karşılaştırılmıştır.

Monte Carlo simülasyon çalışmasında örneklem hacimleri $n = 6, 8, 10$ olarak alınmış; şekil parametreleri ise $(1, 1, 2), (2, 5, 6), (3, 2, 1.5)$ ve $(2, 2, 1.2)$ olarak belirlenmiştir.

I. tip hata oranları hesaplanırken;

$$P_1 = Prob\{F_A^* \geq F_\alpha(v_1, v_8) | H_{01}\}, P_2 = Prob\{F_B^* \geq F_\alpha(v_2, v_8) | H_{02}\},$$

$$P_3 = Prob\{F_C^* \geq F_\alpha(v_3, v_8) | H_{03}\}, P_4 = Prob\{F_{AB}^* \geq F_\alpha(v_4, v_8) | H_{04}\}, \quad (3.33)$$

$$P_5 = Prob\{F_{AC}^* \geq F_\alpha(v_5, v_8) | H_{05}\}, P_6 = Prob\{F_{BC}^* \geq F_\alpha(v_6, v_8) | H_{06}\} \text{ ve}$$

$$P_7 = Prob\{F_{ABC}^* \geq F_\alpha(v_7, v_8) | H_{07}\}$$

olasılıkları kullanılmıştır. Burada; $\nu_1 = \nu_2 = \nu_3 = 2$, $\nu_4 = \nu_5 = \nu_6 = 4$, $\nu_7 = 8$ ve $\nu_8 = 3^3(n - 1)$ 'tür.

LS tahmin edicilerine dayalı F_A , F_{AB} ve F_{ABC} ile MML tahmin edicilerine dayalı F_A^* , F_{AB}^* ve F_{ABC}^* test istatistiklerinin deneysel I. tip hata oranları Çizelge 3.7'de verilmiştir. F_B , F_B^* , F_C , F_C^* , F_{BC} , F_{BC}^* , F_{AC} ve F_{AC}^* testlerine ait sonuçlar, F_A ve F_A^* , F_{AB} ve F_{AB}^* ile F_{ABC} ve F_{ABC}^* testlerine ilişkin sonuçlara benzerlik gösterdiğinden dolayı, kısalık olması bakımından Çizelge 3.7'de verilmemiştir.

Çizelge 3.7 3^3 faktöriyel tasarımda hata terimlerinin KumW dağılımına sahip olması durumunda F_A , F_{AB} , F_{ABC} , F_A^* , F_{AB}^* ve F_{ABC}^* test istatistiklerinin deneysel I. tip hataları

			A	AB	ABC
$a = 1, b = 1, p = 2$	$n = 6$	F	0.051	0.050	0.052
		F^*	0.034	0.033	0.031
	$n = 8$	F	0.053	0.049	0.051
		F^*	0.036	0.028	0.029
	$n = 10$	F	0.045	0.048	0.046
		F^*	0.031	0.030	0.024
$a = 2, b = 5, p = 6$	$n = 6$	F	0.047	0.052	0.051
		F^*	0.046	0.049	0.048
	$n = 8$	F	0.049	0.051	0.050
		F^*	0.045	0.049	0.048
	$n = 10$	F	0.050	0.048	0.047
		F^*	0.047	0.048	0.044
$a = 3, b = 2, p = 1.5$	$n = 6$	F	0.053	0.050	0.049
		F^*	0.043	0.039	0.039
	$n = 8$	F	0.047	0.050	0.052
		F^*	0.042	0.039	0.044
	$n = 10$	F	0.051	0.051	0.050
		F^*	0.042	0.043	0.041
$a = 2, b = 2, p = 1.2$	$n = 6$	F	0.050	0.051	0.044
		F^*	0.028	0.026	0.019
	$n = 8$	F	0.048	0.049	0.052
		F^*	0.027	0.024	0.021
	$n = 10$	F	0.048	0.057	0.046
		F^*	0.026	0.025	0.020

Sonuçlar incelendiğinde (a, b, p) şekil parametreleri $(2,5,6)$ ve $(3,2,1.5)$ olduğunda, F_A , F_{AB} , F_{ABC} , F_A^* , F_{AB}^* ve F_{ABC}^* test istatistiklerine ilişkin I. tip hata oranlarının nominal $\alpha =$

0.05 değerine oldukça yakın olduğu görülmüştür. Buna karşılık, $(a, b, p) = (1, 1, 2)$ ve $(2, 2, 1.2)$ olduğunda ise F_A^* , F_{AB}^* ve F_{ABC}^* test istatistiklerine ilişkin I. tip hata oranlarının nominal değerin biraz altında kaldığı görülmektedir. Bulgular, MML tahmin edicilerine dayalı test istatistiklerinin asimptotik olarak F dağılımına sahip olduğunu desteklemekle birlikte, küçük ve orta örneklem büyüklüklerinde bazı durumlarda nominal anlamlılık düzeyinin altında kaldığını göstermektedir.

Çizelge 3.8’de F_A ve F_A^* , Çizelge 3.9’da F_{AB} ve F_{AB}^* , Çizelge 3.10’da ise F_{ABC} ve F_{ABC}^* , test istatistiklerine ait güç değerleri verilmiştir. Güç değerlerinin hesaplanmasında, modele ait varsayımları koruyacak biçimde, bazı hücrelerdeki gözlem değerlerine d sabiti eklenip çıkarılmıştır.

Çizelge 3.8 3^3 faktöriyel tasarımda hata terimlerinin KumW dağılımına sahip olması durumunda F_A ve F_A^* test istatistiklerinin güçleri

n	$a = 1, b = 1, p = 2$			$a = 2, b = 5, p = 6$			$a = 3, b = 2, p = 1.5$			$a = 2, b = 2, p = 1.2$		
	d	F_A	F_A^*	d	F_A	F_A^*	d	F_A	F_A^*	d	F_A	F_A^*
6	0.00	0.051	0.034	0.000	0.047	0.046	0.00	0.053	0.043	0.00	0.050	0.028
	0.04	0.115	0.103	0.008	0.104	0.104	0.03	0.098	0.094	0.04	0.106	0.087
	0.08	0.338	0.346	0.016	0.290	0.302	0.06	0.244	0.259	0.08	0.274	0.308
	0.12	0.662	0.697	0.024	0.590	0.616	0.09	0.510	0.541	0.12	0.565	0.680
	0.16	0.902	0.931	0.032	0.843	0.869	0.12	0.759	0.799	0.16	0.822	0.925
	0.20	0.984	0.994	0.040	0.967	0.976	0.15	0.926	0.950	0.20	0.951	0.991
	0.24	0.999	0.999	0.048	0.996	0.998	0.18	0.983	0.991	0.24	0.993	0.999
8	0.00	0.053	0.036	0.000	0.049	0.045	0.00	0.047	0.042	0.00	0.048	0.027
	0.03	0.098	0.082	0.007	0.106	0.108	0.03	0.110	0.105	0.03	0.089	0.071
	0.06	0.269	0.266	0.014	0.297	0.313	0.06	0.315	0.336	0.06	0.221	0.251
	0.09	0.526	0.568	0.021	0.597	0.625	0.09	0.623	0.670	0.09	0.443	0.561
	0.12	0.796	0.850	0.028	0.852	0.873	0.12	0.877	0.913	0.12	0.700	0.847
	0.15	0.941	0.968	0.035	0.966	0.977	0.15	0.979	0.988	0.15	0.884	0.972
	0.18	0.990	0.996	0.042	0.997	0.998	0.18	0.998	0.999	0.18	0.967	0.998
10	0.00	0.045	0.031	0.000	0.050	0.047	0.00	0.051	0.042	0.00	0.048	0.026
	0.03	0.108	0.095	0.006	0.096	0.098	0.02	0.085	0.083	0.03	0.094	0.082
	0.06	0.325	0.336	0.012	0.270	0.280	0.04	0.192	0.202	0.06	0.266	0.327
	0.09	0.642	0.698	0.018	0.565	0.594	0.06	0.390	0.418	0.09	0.537	0.697
	0.12	0.882	0.930	0.024	0.822	0.849	0.08	0.627	0.677	0.12	0.801	0.932
	0.15	0.979	0.992	0.030	0.956	0.968	0.10	0.833	0.882	0.15	0.945	0.993
	0.18	0.997	0.999	0.036	0.992	0.996	0.12	0.939	0.964	0.18	0.991	0.999

Çizelge 3.9 3^3 faktöriyel tasarımda hata terimlerinin KumW dağılımına sahip olması durumunda F_{AB} ve F_{AB}^* test istatistiklerinin güçleri

n	$a = 1, b = 1, p = 2$			$a = 2, b = 5, p = 6$			$a = 3, b = 2, p = 1.5$			$a = 2, b = 2, p = 1.2$		
	d	F_{AB}	F_{AB}^*	d	F_{AB}	F_{AB}^*	d	F_{AB}	F_{AB}^*	d	F_{AB}	F_{AB}^*
6	0.00	0.050	0.033	0.00	0.052	0.049	0.00	0.050	0.039	0.00	0.051	0.026
	0.05	0.093	0.074	0.01	0.088	0.085	0.04	0.081	0.076	0.05	0.085	0.056
	0.10	0.265	0.250	0.02	0.229	0.237	0.08	0.211	0.210	0.10	0.216	0.215
	0.15	0.564	0.582	0.03	0.481	0.502	0.12	0.455	0.477	0.15	0.466	0.543
	0.20	0.841	0.875	0.04	0.762	0.788	0.16	0.725	0.762	0.20	0.744	0.850
	0.25	0.966	0.979	0.05	0.928	0.945	0.20	0.912	0.939	0.25	0.916	0.977
	0.30	0.996	0.999	0.06	0.988	0.992	0.24	0.983	0.991	0.30	0.984	0.999
8	0.00	0.049	0.028	0.00	0.051	0.049	0.00	0.050	0.039	0.00	0.049	0.024
	0.04	0.089	0.067	0.01	0.105	0.102	0.04	0.096	0.089	0.04	0.074	0.051
	0.08	0.229	0.213	0.02	0.298	0.313	0.08	0.279	0.288	0.08	0.189	0.187
	0.12	0.485	0.510	0.03	0.622	0.658	0.12	0.593	0.636	0.12	0.393	0.486
	0.16	0.768	0.813	0.04	0.889	0.913	0.16	0.862	0.901	0.16	0.661	0.804
	0.20	0.938	0.967	0.05	0.982	0.989	0.20	0.975	0.988	0.20	0.867	0.961
	0.24	0.990	0.997	0.06	0.999	0.999	0.24	0.998	0.999	0.24	0.963	0.995
10	0.00	0.048	0.030	0.000	0.048	0.048	0.00	0.051	0.043	0.00	0.057	0.025
	0.04	0.092	0.074	0.008	0.088	0.089	0.03	0.084	0.078	0.04	0.086	0.061
	0.08	0.286	0.279	0.016	0.237	0.253	0.06	0.203	0.208	0.08	0.235	0.265
	0.12	0.594	0.639	0.024	0.520	0.553	0.09	0.432	0.466	0.12	0.498	0.646
	0.16	0.872	0.920	0.032	0.803	0.832	0.12	0.708	0.755	0.16	0.781	0.918
	0.20	0.979	0.993	0.040	0.951	0.966	0.15	0.901	0.936	0.20	0.939	0.994
	0.24	0.998	0.999	0.048	0.994	0.995	0.18	0.979	0.989	0.24	0.990	0.999

Çizelge 3.10 3^3 faktöriyel tasarımda hata terimlerinin KumW dağılımına sahip olması durumunda F_{ABC} ve F_{ABC}^* test istatistiklerinin güçleri

n	$a = 1, b = 1, p = 2$			$a = 2, b = 5, p = 6$			$a = 3, b = 2, p = 1.5$			$a = 2, b = 2, p = 1.2$		
	d	F_{ABC}	F_{ABC}^*	d	F_{ABC}	F_{ABC}^*	d	F_{ABC}	F_{ABC}^*	d	F_{ABC}	F_{ABC}^*
6	0.00	0.052	0.031	0.000	0.051	0.048	0.00	0.049	0.039	0.00	0.044	0.019
	0.06	0.082	0.055	0.015	0.087	0.085	0.06	0.088	0.075	0.07	0.081	0.045
	0.12	0.187	0.157	0.030	0.236	0.241	0.12	0.227	0.222	0.14	0.203	0.179
	0.18	0.403	0.383	0.045	0.539	0.560	0.18	0.519	0.544	0.21	0.446	0.496
	0.24	0.693	0.705	0.060	0.834	0.860	0.24	0.805	0.837	0.28	0.747	0.844
	0.30	0.906	0.924	0.075	0.970	0.979	0.30	0.958	0.971	0.35	0.926	0.980
	0.36	0.985	0.990	0.090	0.997	0.999	0.36	0.995	0.998	0.42	0.987	0.999
8	0.00	0.051	0.029	0.000	0.050	0.048	0.00	0.052	0.044	0.00	0.052	0.021
	0.06	0.088	0.055	0.012	0.080	0.078	0.05	0.081	0.072	0.06	0.080	0.047
	0.12	0.251	0.219	0.024	0.215	0.221	0.10	0.208	0.204	0.12	0.192	0.184
	0.18	0.548	0.551	0.036	0.470	0.497	0.15	0.473	0.505	0.18	0.449	0.534
	0.24	0.846	0.881	0.048	0.771	0.799	0.20	0.767	0.809	0.24	0.735	0.865
	0.30	0.972	0.985	0.060	0.937	0.956	0.25	0.945	0.968	0.30	0.929	0.988
	0.36	0.998	0.999	0.072	0.990	0.995	0.30	0.994	0.997	0.36	0.989	0.999
10	0.00	0.046	0.024	0.000	0.047	0.044	0.00	0.050	0.041	0.00	0.046	0.020
	0.05	0.082	0.054	0.011	0.086	0.085	0.05	0.096	0.086	0.05	0.076	0.045
	0.10	0.219	0.185	0.022	0.228	0.240	0.10	0.275	0.281	0.10	0.183	0.163
	0.15	0.480	0.485	0.033	0.494	0.521	0.15	0.591	0.638	0.15	0.403	0.476
	0.20	0.784	0.824	0.044	0.788	0.824	0.20	0.883	0.928	0.20	0.672	0.821
	0.25	0.945	0.974	0.055	0.956	0.967	0.25	0.984	0.993	0.25	0.881	0.971
	0.30	0.994	0.998	0.066	0.995	0.998	0.30	0.999	0.999	0.30	0.974	0.999

Çizelge 3.8 - 3.10’da, MML tahmin edicileri ile bulunan F_A^* , F_{AB}^* , F_{ABC}^* test istatistiklerinin gücü tüm örneklem hacimleri ve şekil parametreleri değerleri için LS tahmin edicilerine dayalı F_A , F_{AB} ve F_{ABC} test istatistiklerinin gücünden yüksek olduğu görülmektedir.

3.3 Dayanıklılık

Gerçek hayata ilişkin uygulamalarda, modeldeki hata terimlerinin dağılımı varsayılan dağılımdan sapma gösterebilir. Bu durumda, varsayılan modelin makul alternatifleri altında testlerin performansları önem kazanmaktadır. Bir testin I. tip hatasının makul alternatifler altında nominal anlamlılık düzeyinden belirgin biçimde sapmaması I. tip hata bakımından dayanıklılık olarak tanımlanırken; testin gücünün hem varsayılan model hem de makul alternatifler altında yüksek kalması ise etkinlik bakımından dayanıklılık olarak adlandırılmaktadır (Box 1953, Box ve Tiao 1964).

Bu çalışmada, gerçek modelin $KumW(a = 3, b = 2, p = 1.5, \mu = 0, \sigma = 1)$ ve örneklem hacminin $n = 10$ olduğu varsayımı altında, aşağıda verilen alternatif modeller ele alınmıştır.

Model 1. Dixon aykırı değer (outlier) modeli:

$$(n - r)KumW(a = 3, b = 2, p = 1.5, \mu = 0, \sigma = 1) + rKumW(a = 3, b = 2, p = 1.5, \mu = 0, \sigma = 1.3), r = \lfloor 0.5 + 0.1n \rfloor$$

Bu modelde r adet gözlem $KumW(a = 3, b = 2, p = 1.5, \mu = 0, \sigma = 1.3)$ dağılımından gelirken $(n - r)$ adet gözlem $KumW(a = 3, b = 2, p = 1.5, \mu = 0, \sigma = 1)$ dağılımından gelmektedir.

Model 2. Dağılımın yanlış belirlenmesi (misspecification):

Bu modelde gözlemler $KumW(a = 2, b = 5, p = 1.5, \mu = 0, \sigma = 1)$ dağılımından gelmektedir.

Model 3. Bulaşık (contamination) model:

$$0.90KumW(a = 3, b = 2, p = 1.5, \mu = 0, \sigma = 1) + 0.10IG(\mu = 1, \lambda = 2)$$

Bu modelde, gözlemlerin %90'ı $KumW(a = 3, b = 2, p = 1.5, \mu = 0, \sigma = 1)$ dağılımından, %10'u ise ortalaması 1 şekil parametresi 0.7 olan IG (Inverse Gaussian – Ters Gauss) dağılımından $IG(\mu = 1, \lambda = 2)$ gelmektedir.

Model 4. Karma (mixture) model:

$$0.90KumW(a = 3, b = 2, p = 1.5, \mu = 0, \sigma = 1) + 0.10KumW(a = 2, b = 2, p = 1.2, \mu = 0, \sigma = 1)$$

Bu modelde ise, gözlemlerin %90'ı $KumW(a = 3, b = 2, p = 1.5, \mu = 0, \sigma = 1)$ dağılımından, %10'u ise $KumW(a = 2, b = 2, p = 1.2, \mu = 0, \sigma = 1)$ dağılımından gelmektedir.

Bu kapsamda, LS tahmin edicilerine dayalı F_A, F_{AB}, F_{ABC} test istatistikleri ile MML tahmin edicilerine dayalı $F_A^*, F_{AB}^*, F_{ABC}^*$ test istatistikleri I. tip hata oranları ile güçleri bakımından karşılaştırılmıştır. Güç değerlerinin hesaplanmasında, modele ait varsayımları koruyacak biçimde, bazı hücrelerdeki gözlem değerlerine d sabiti eklenip çıkarılmıştır. $d = 0.00$ için elde edilen güç değerleri I. tip hata oranlarını göstermektedir, sonuçlar Çizelge 3.11'de verilmiştir.

Çizelge 3.11 3^3 faktöriyel tasarımda hata terimlerinin KumW dağılımına sahip olması durumunda Model 1,2,3 ve 4 için $F_A, F_{AB}, F_{ABC}, F_A^*, F_{AB}^*$ ve F_{ABC}^* testlerinin deneysel I. tip hataları ve güçleri

Model 1			Model 2			Model 3			Model 4		
d	F_A	F_A^*	d	F_A	F_A^*	d	F_A	F_A^*	d	F_A	F_A^*
0.00	0.046	0.039	0.000	0.049	0.046	0.00	0.048	0.034	0.00	0.051	0.042
0.03	0.114	0.112	0.015	0.090	0.088	0.03	0.116	0.107	0.02	0.060	0.060
0.06	0.337	0.367	0.030	0.261	0.274	0.06	0.329	0.357	0.04	0.195	0.203
0.09	0.683	0.745	0.045	0.542	0.582	0.09	0.657	0.717	0.06	0.357	0.401
0.12	0.907	0.948	0.060	0.787	0.837	0.12	0.893	0.936	0.08	0.593	0.635
0.15	0.988	0.995	0.075	0.944	0.965	0.15	0.978	0.993	0.10	0.809	0.854
0.18	0.996	0.999	0.090	0.991	0.996	0.18	0.997	0.999	0.12	0.947	0.953
d	F_{AB}	F_{AB}^*	d	F_{AB}	F_{AB}^*	d	F_{AB}	F_{AB}^*	d	F_{AB}	F_{AB}^*
0.00	0.041	0.035	0.00	0.047	0.041	0.00	0.050	0.039	0.00	0.046	0.040
0.03	0.070	0.064	0.02	0.085	0.078	0.03	0.073	0.069	0.03	0.080	0.076
0.06	0.163	0.168	0.04	0.223	0.238	0.06	0.169	0.171	0.06	0.182	0.192
0.09	0.371	0.404	0.06	0.482	0.515	0.09	0.376	0.398	0.09	0.394	0.429
0.12	0.631	0.691	0.08	0.774	0.821	0.12	0.619	0.677	0.12	0.697	0.736
0.15	0.856	0.901	0.10	0.934	0.961	0.15	0.841	0.901	0.15	0.889	0.926
0.18	0.967	0.983	0.12	0.987	0.993	0.18	0.953	0.978	0.18	0.975	0.980
d	F_{ABC}	F_{ABC}^*	d	F_{ABC}	F_{ABC}^*	d	F_{ABC}	F_{ABC}^*	d	F_{ABC}	F_{ABC}^*
0.00	0.035	0.031	0.00	0.048	0.040	0.00	0.053	0.039	0.00	0.051	0.042
0.05	0.07	0.061	0.03	0.088	0.080	0.05	0.084	0.071	0.08	0.061	0.046
0.10	0.210	0.211	0.06	0.247	0.248	0.10	0.232	0.231	0.16	0.166	0.167
0.15	0.507	0.560	0.09	0.555	0.588	0.15	0.507	0.542	0.24	0.366	0.384
0.20	0.821	0.871	0.12	0.849	0.886	0.20	0.798	0.853	0.32	0.619	0.679
0.25	0.963	0.986	0.15	0.973	0.987	0.25	0.952	0.981	0.40	0.847	0.888
0.30	0.997	0.999	0.18	0.998	0.999	0.30	0.993	0.998	0.48	0.978	0.984

İncelenen tüm durumlarda hem LS hem de MML tahmin edicilerine dayalı elde edilen istatistiklerin I. tip hata bakımından dayanıklı olduğu görülmektedir.

Sonuçlar, MML tahmin edicilerine dayalı F^* test istatistiklerinin, ana etkiler ve etkileşim etkilerini test etmede F test istatistiklerine göre belirgin biçimde daha güçlü ve dayanıklı olduğunu açıkça göstermektedir.

3.4 Dayanıklı 3^k Faktöriyel Tasarım

3^k faktöriyel tasarımlar her biri üç düzeye sahip olan k tane faktör tarafından bağımlı değişkenin etkilendiği tasarımlar olup, 3^2 ve 3^3 faktöriyel tasarımların en yaygın kullanılan 3^k faktöriyel tasarım modellerinden olduğu bilinmektedir. 3^k faktöriyel tasarımın matematiksel modeli;

$$\begin{aligned}
y_{abc...ijkl} &= \mu + \tau_a + \gamma_b + \delta_c + \dots + \phi_i + \psi_j + \nu_k + (\tau\gamma)_{ab} + \dots + (\psi\nu)_{jk} \\
&\quad + (\tau\gamma\delta)_{abc} + \dots + (\phi\psi\nu)_{ijk} + \dots + (\tau\gamma\delta \dots \phi\psi\nu)_{abc...ijk} + \varepsilon_{abc...ijkl} \\
a, b, c, \dots, i, j, k &= 1, 2, 3; \quad l = 1, 2, \dots, n
\end{aligned} \tag{3.34}$$

şeklindedir. Burada; $\varepsilon_{ij...kl}$ KumW dağılımına sahip rastgele hata terimlerini ifade eder.

Bölüm 3.1 ve 3.2’de detaylı olarak belirtilen adımlar takip edilerek elde edilen MML tahmin edicileri aşağıdaki gibidir.

$$\begin{aligned}
\hat{\mu} &= \hat{\mu}_{\dots\dots\dots} - \frac{\Delta\hat{\sigma}}{m}, \\
\hat{\tau}_a &= \hat{\mu}_{a\dots\dots\dots} - \hat{\mu}_{\dots\dots\dots}, \dots, \quad \hat{\nu}_k = \hat{\mu}_{\dots\dots\dots k} - \hat{\mu}_{\dots\dots\dots}, \\
(\widehat{\tau\gamma})_{ab} &= \hat{\mu}_{ab\dots\dots\dots} - \hat{\mu}_{a\dots\dots\dots} - \hat{\mu}_{b\dots\dots\dots} + \hat{\mu}_{\dots\dots\dots}, \dots, \\
(\widehat{\psi\nu})_{jk} &= \hat{\mu}_{\dots\dots\dots jk} - \hat{\mu}_{\dots\dots\dots j} - \hat{\mu}_{\dots\dots\dots k} + \hat{\mu}_{\dots\dots\dots}, \\
(\widehat{\tau\gamma\delta})_{abc} &= \hat{\mu}_{abc\dots\dots\dots} - \hat{\mu}_{ab\dots\dots\dots} - \hat{\mu}_{a.c\dots\dots\dots} - \hat{\mu}_{bc\dots\dots\dots} + \hat{\mu}_{a\dots\dots\dots} + \hat{\mu}_{b\dots\dots\dots} \\
&\quad + \hat{\mu}_{.c\dots\dots\dots} - \hat{\mu}_{\dots\dots\dots}, \dots, \\
&\quad \vdots \\
(\widehat{\phi\psi\nu})_{ijk} &= \hat{\mu}_{\dots\dots\dots ijk} - \hat{\mu}_{\dots\dots\dots ij} - \hat{\mu}_{\dots\dots\dots i.k} - \hat{\mu}_{\dots\dots\dots jk} + \hat{\mu}_{\dots\dots\dots i} + \hat{\mu}_{\dots\dots\dots j} + \hat{\mu}_{\dots\dots\dots k} \\
&\quad - \hat{\mu}_{\dots\dots\dots}, \\
&\quad \vdots \\
(\widehat{\tau\gamma\delta \dots \phi\psi\nu})_{abc...ijk} &= \hat{\mu}_{abc...ijk} - \dots \pm \hat{\mu}_{\dots\dots\dots} \quad \text{ve } \hat{\sigma} = \frac{-B + \sqrt{B^2 + 4NC}}{2\sqrt{N(N-3^k)}}.
\end{aligned} \tag{3.35}$$

şeklinde elde edilir. Burada;

$$B = \lambda \sum_{a=1}^3 \sum_{b=1}^3 \sum_{c=1}^3 \dots \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^n \alpha_l \{y_{abc...ijk(l)} - \hat{\mu}_{abc...ijk}\},$$

$$C = \sum_{a=1}^3 \sum_{b=1}^3 \sum_{c=1}^3 \dots \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^n \theta_l \{y_{abc...ijk(l)} - \hat{\mu}_{abc...ijk}\}^2 \text{ ve}$$

$$N = 3^k n$$

olarak tanımlanmaktadır.

Ayrıca, $\hat{\mu}_{a.....}$, $\hat{\mu}_{ab.....}$, $\dots$, $\hat{\mu}_{abc.....}$ vb. ifadelerin önceki bölümlerde tanımlanan ifadelerle benzer olduğu görülmektedir. Bu nedenle, kısalık olması bakımından bu bölümde tekrarlanmamıştır. α_l ve θ_l katsayıları Bölüm 3.1.1 ve 3.2.1’de gösterildiği gibidir.

Ana etkilerin ve etkileşim etkilerinin anlamlı olup olmadığı;

$$H_{01}: \tau_a = 0, \dots, H_{0k}: \nu_k = 0,$$

$$H_{0(k+1)}: (\tau\gamma)_{ab} = 0, \dots, H_{0(k+d)}: (\psi\nu)_{jk} = 0,$$

$$H_{0(k+d+1)}: (\tau\gamma\delta)_{abc} = 0, \dots, H_{0(k+d+s)}: (\phi\psi\nu)_{ijk} = 0, \quad (3.36)$$

$\vdots$

$$H_{0T}: (\tau\gamma\delta \dots \phi\psi\nu)_{abc\dots ijk} = 0$$

hipotezleri ile test edilir. Burada k ana etkilerin sayısını, $d = \binom{k}{2}$, $s = \binom{k}{3}$ ve $T = \sum_{r=1}^k \binom{k}{r}$ göstermektedir.

Ana etkilerin ve etkileşim etkileri hakkındaki hipotezleri test etmek için MML tahmin edicilerine dayalı test istatistikleri

$$F_A^* = \frac{3^{k-1} m \sum_{a=1}^3 \hat{\tau}_a^2}{2\hat{\sigma}^2}, \dots, F_K^* = \frac{3^{k-1} m \sum_{k=1}^3 \hat{\nu}_k^2}{2\hat{\sigma}^2},$$

$$F_{AB}^* = \frac{3^{k-2}m \sum_{a=1}^3 \sum_{b=1}^3 (\widehat{\tau\gamma})_{ab}^2}{2^2 \widehat{\sigma}^2}, \dots, F_{JK}^* = \frac{3^{k-2}m \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 (\widehat{\psi\nu})_{jk}^2}{2^2 \widehat{\sigma}^2}, \quad (3.37)$$

$$F_{ABC}^* = \frac{3^{k-3}m \sum_{a=1}^3 \sum_{b=1}^3 \sum_{c=1}^3 (\widehat{\tau\gamma\delta})_{abc}^2}{2^3 \widehat{\sigma}^2}, \dots, F_{IJK}^* = \frac{3^{k-3}m \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 (\widehat{\phi\psi\nu})_{ijk}^2}{2^3 \widehat{\sigma}^2},$$

⋮

$$F_{ABC\dots IJK}^* = \frac{m \sum_{a=1}^3 \sum_{b=1}^3 \sum_{c=1}^3 \dots \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 (\widehat{\tau\gamma\delta\dots\phi\psi\nu})^2}{2^k \widehat{\sigma}^2}$$

biçimindedir. Buradaki m ifadesi Bölüm 3.1.2 ve 3.2.2’de gösterildiği gibidir.

4. HATA TERİMLERİNİN SN DAĞILIMINA SAHİP OLDUĞU VARSAYIMI ALTINDA 3^k FAKTÖRİYEL TASARIMLAR

Önceki bölümde hata terimlerinin dağılımlarının KumW olduğu varsayımı altında uygulanan adımlar, bu bölümde, hata terimlerinin dağılımının SN olduğu varsayımı altında 3^k faktöriyel tasarım modelleri için uygulanacaktır.

4.1 Dayanıklı 3² Faktöriyel Tasarım

Her biri üç düzeye sahip olan A ve B gibi iki faktörün bulunduğu 3² faktöriyel tasarımın matematiksel modeli (3.1)'de gösterilmiştir.

3² faktöriyel tasarımda hata terimlerinin dağılımının SN olduğu varsayımı altında model parametrelerinin MML tahmin edicileri elde edilerek LS tahmin edicilerine göre etkinlikleri karşılaştırılmıştır.

Faktörlerin ana etkileri ve etkileşim etkilerini test etmek için MML tahmin edicilerine dayalı test istatistikleri önerilerek LS tahmin edicilerine dayalı test istatistiklerine göre testlerin güçleri karşılaştırılmıştır.

4.1.1 Parametre tahmini

Hata terimlerinin SN dağılımına sahip olması durumunda olabilirlik fonksiyonu;

$$L = \prod_{i=1}^3 \prod_{j=1}^3 \prod_{k=1}^n \frac{2}{\sigma \sqrt{2\pi}} \exp \left(-\frac{1}{2} z_{ijk}^2 \right) \Phi(\lambda z_{ijk}) \quad (4.1)$$

biçimindedir. Olabilirlik fonksiyonunun logaritması alınarak elde edilen $\ln L$ fonksiyonu ise;

$$\ln L = N \ln \left(\frac{2}{\sigma} \right) - \frac{N}{2} \ln(2\pi) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^n z_{ijk}^2 + \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^n \ln \left(\Phi(\lambda z_{ijk}) \right) \quad (4.2)$$

biçiminde elde edilir. Burada $N = 3^2 n$ dir.

(4.2)'de gösterilen $\ln L$ fonksiyonunun parametrelere göre kısmi türevinin alınmasıyla olabilirlik denklemleri;

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \mu} = \frac{1}{\sigma} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^n z_{ijk} - \frac{\lambda}{\sigma} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^n w(z_{ijk}) = 0,$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \tau_i} = \frac{1}{\sigma} \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^n z_{ijk} - \frac{\lambda}{\sigma} \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^n w(z_{ijk}) = 0,$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \gamma_j} = \frac{1}{\sigma} \sum_{i=1}^3 \sum_{k=1}^n z_{ijk} - \frac{\lambda}{\sigma} \sum_{i=1}^3 \sum_{k=1}^n w(z_{ijk}) = 0, \quad (4.3)$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial (\tau\gamma)_{ij}} = \frac{1}{\sigma} \sum_{k=1}^n z_{ijk} - \frac{\lambda}{\sigma} \sum_{k=1}^n w(z_{ijk}) = 0 \text{ ve}$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \sigma} = -\frac{N}{\sigma} + \frac{1}{\sigma} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^n z_{ijk}^2 - \frac{\lambda}{\sigma} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^n z_{ijk} w(z_{ijk}) = 0$$

şeklinde bulunur. Burada;

$$w(z_{ijk}) = \frac{\phi(\lambda z_{ijk})}{\Phi(\lambda z_{ijk})} \text{ ve } z_{ijk} = \frac{y_{ijk} - \mu - \tau_i - \gamma_j - (\tau\gamma)_{ij}}{\sigma}$$

olarak tanımlanır.

(4.3)'te verilen olabilirlik denklemlerinde yer alan parametrelerin doğrusal olmayan $w(z_{ijk})$ fonksiyonu nedeniyle, hata terimlerinin dağılımı SN olarak varsayıldığında 3^2 faktöriyel tasarım modelindeki parametrelerin ML tahmin edicilerinin açık çözümüne ulaşamaz.

Bu nedenle, model parametrelerinin tahmin edicilerini elde etmek için Tiku (1967) tarafından önerilen MML yöntemi kullanılarak çözüme ulaşılır. Bir önceki bölümde gösterildiği şekilde, 3.5 ve 3.6'da verilen işlemler uygulanarak olabilirlik denklemlerindeki toplamalar sıra istatistikleri cinsinden ifade edilir. Böylece olabilirlik denklemleri,

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \mu} = \frac{1}{\sigma} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^n z_{ij(k)} - \frac{\lambda}{\sigma} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^n w(z_{ij(k)}) = 0,$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \tau_i} = \frac{1}{\sigma} \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^n z_{ij(k)} - \frac{\lambda}{\sigma} \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^n w(z_{ij(k)}) = 0,$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \gamma_j} = \frac{1}{\sigma} \sum_{i=1}^3 \sum_{k=1}^n z_{ij(k)} - \frac{\lambda}{\sigma} \sum_{i=1}^3 \sum_{k=1}^n w(z_{ij(k)}) = 0, \quad (4.4)$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial (\tau\gamma)_{ij}} = \frac{1}{\sigma} \sum_{k=1}^n z_{ij(k)} - \frac{\lambda}{\sigma} \sum_{k=1}^n w(z_{ij(k)}) = 0 \text{ ve}$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \sigma} = -\frac{N}{\sigma} + \frac{1}{\sigma} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^n z_{ijk}^2 - \frac{\lambda}{\sigma} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^n z_{ijk} w(z_{ij(k)}) = 0$$

şeklinde yazılabilir. Burada;

$$w(z_{ij(k)}) = \frac{\phi(\lambda z_{ij(k)})}{\Phi(\lambda z_{ij(k)})} \text{ ve } z_{ij(k)} = \frac{y_{ij(k)} - \mu - \tau_i - \gamma_j - (\tau\gamma)_{ij}}{\sigma}$$

olarak tanımlanır.

Olabilirlik denklemlerinde bulunan $w(z_{ij(k)})$ fonksiyonu, doğrusal olmayan fonksiyondur ve Taylor serisinin ilk iki terimini kullanarak sıra istatistiklerinin beklenen değeri $t_{(k)} = E(z_{ij(k)})$ etrafında açılarak doğrusal hale getirilir. Buna göre;

$$w(z_{ij(k)}) \cong w(t_{(k)}) + [z_{ij(k)} - t_{(k)}] \left\{ \frac{d}{dz} w(z) \right\}_{z=t_{(k)}}$$

olmak üzere,

$$w(z_{ij(k)}) \cong \alpha_k - \beta_k z_{ij(k)} \quad (4.5)$$

şeklinde yazılır. Burada;

$$\alpha_k = \frac{\phi(\lambda t_{(k)})}{\Phi(\lambda t_{(k)})} + t_{(k)}\beta_k, \quad \beta_k = \frac{\phi(\lambda t_{(k)})}{\Phi(\lambda t_{(k)})} \left(\frac{\lambda^2 t_{(k)} \Phi(\lambda t_{(k)}) + \lambda \phi(\lambda t_{(k)})}{\Phi(\lambda t_{(k)})} \right)$$

şeklinde elde edilir. $t_{(k)}$ 'nın gerçek değerini bulmak zor olduğundan yaklaşık değerleri;

$$\int_{-\infty}^{t_{(k)}} f(z) dz \cong \frac{k}{n+1}, \quad k = 1, 2, \dots, n$$

yardımıyla elde edilir. Burada, $f(z)$ standart SN dağılımının pdf'sini göstermektedir.

Buna göre, (4.5)'te verilen doğrusal ifade, (4.4)'te verilen olabilirlik denklemlerindeki $w(z_{ij(k)})$ fonksiyonu yerine yazıldığında;

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln L^*}{\partial \mu} &= \frac{1}{\sigma} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^n z_{ij(k)} - \frac{\lambda}{\sigma} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^n (\alpha_k - \beta_k z_{ij(k)}) = 0, \\ \frac{\partial \ln L^*}{\partial \tau_i} &= \frac{1}{\sigma} \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^n z_{ij(k)} - \frac{\lambda}{\sigma} \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^n (\alpha_k - \beta_k z_{ij(k)}) = 0, \\ \frac{\partial \ln L^*}{\partial \gamma_j} &= \frac{1}{\sigma} \sum_{i=1}^3 \sum_{k=1}^n z_{ij(k)} - \frac{\lambda}{\sigma} \sum_{i=1}^3 \sum_{k=1}^n (\alpha_k - \beta_k z_{ij(k)}) = 0, \\ \frac{\partial \ln L^*}{\partial (\tau\gamma)_{ij}} &= \frac{1}{\sigma} \sum_{k=1}^n z_{ij(k)} - \frac{\lambda}{\sigma} \sum_{k=1}^n (\alpha_k - \beta_k z_{ij(k)}) = 0, \\ \frac{\partial \ln L^*}{\partial \sigma} &= -\frac{N}{\sigma} + \frac{1}{\sigma} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^n z_{ij(k)}^2 - \frac{\lambda}{\sigma} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^n z_{ijk} (\alpha_k - \beta_k z_{ij(k)}) = 0 \end{aligned} \quad (4.6)$$

olarak ifade edilen uyarlanmış olabilirlik denklemleri elde edilir. (4.6)'da verilen denklem sisteminin çözümünden MML tahmin edicileri;

$$\begin{aligned} \hat{\mu} &= \hat{\mu}_{...} - \left(\frac{\lambda \Delta}{m} \right) \hat{\sigma}, \quad \hat{\tau}_i = \hat{\mu}_{i..} - \hat{\mu}_{...}, \quad \hat{\gamma}_j = \hat{\mu}_{.j.} - \hat{\mu}_{...}, \\ (\widehat{\tau\gamma})_{ij} &= \hat{\mu}_{ij.} - \hat{\mu}_{i..} - \hat{\mu}_{.j.} + \hat{\mu}_{...} \quad \text{ve} \quad \hat{\sigma} = \frac{-B + \sqrt{B^2 + 4NC}}{2\sqrt{N(N-3^2)}} \end{aligned} \quad (4.7)$$

şeklinde elde edilir. Burada;

$$\hat{\mu}_{...} = \frac{\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^n \theta_k y_{ij(k)}}{3^2 m}, \quad \hat{\mu}_{i..} = \frac{\sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^n \theta_k y_{ij(k)}}{3m}, \quad \hat{\mu}_{.j.} = \frac{\sum_{i=1}^3 \sum_{k=1}^n \theta_k y_{ij(k)}}{3m},$$

$$\hat{\mu}_{ij.} = \frac{\sum_{k=1}^n \theta_k y_{ij(k)}}{m}, \quad m = \sum_{k=1}^n \theta_k, \quad \theta_k = 1 + \lambda \beta_k, \quad \Delta = \sum_{k=1}^n \alpha_k, \quad N = 3^2 n,$$

$$B = \lambda \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^n \alpha_k \{y_{ij(k)} - \hat{\mu}_{ij.}\} \quad \text{ve} \quad C = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^n \theta_k \{y_{ij(k)} - \hat{\mu}_{ij.}\}^2$$

olarak tanımlanmaktadır.

LS tahmin edicileri: Hata terimlerinin dağılımının $SN(0, \sigma, \lambda)$ olması durumunda 3^2 faktöriyel tasarım model parametrelerinin LS tahmin edicileri,

$$\tilde{\mu}_{BC} = \bar{y}_{...} - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\lambda}{\sqrt{1+\lambda^2}} \tilde{\sigma}_{BC}, \quad \tilde{\tau}_i = \bar{y}_{i..} - \bar{y}_{...}, \quad \tilde{\gamma}_j = \bar{y}_{.j.} - \bar{y}_{...}, \quad (4.8)$$

$$\tilde{\tau}\tilde{\gamma}_{ij} = \bar{y}_{ij.} - \bar{y}_{i..} - \bar{y}_{.j.} + \bar{y}_{...} \quad \text{ve} \quad \tilde{\sigma}_{BC} = \sqrt{\frac{\tilde{\sigma}^2}{1 - \frac{2\left(\frac{\lambda}{\sqrt{1+\lambda^2}}\right)^2}{\pi}}}$$

şeklindedir. Burada, Burada, $\tilde{\mu}_{BC}$ ve $\tilde{\sigma}_{BC}$, sırasıyla μ ve σ parametrelerinin tahmin edicilerinin yan düzeltilmesi yapılmış halidir.

Monte Carlo simülasyonu: Hata terimlerinin dağılımının SN olduğu varsayımı altında, 3^2 faktöriyel tasarımın model parametrelerinin MML ve LS tahmin edicileri (3.12)'de tanımlanan Yan ve MSE ile sırasıyla (3.13) ve (3.14)'te tanımlanan RE ve DEF kriterlerine göre Monte Carlo simülasyonu yardımıyla 10,000 tekrar yapılarak karşılaştırılmıştır. Sonuçlar Çizelge 4.1'de sunulmuştur.

Çizelge 4.1 3^2 faktöriyel tasarımda hata terimlerinin SN dağılımına sahip olması durumunda model parametrelerinin LS ve MML tahmin edicilerinin Yan, MSE, RE ve DEF değerleri

$\lambda = 0$												
Yan						MSE					DEF	
n		μ	τ_1	γ_1	$\tau\gamma_{11}$	σ	μ	τ_1	γ_1	$\tau\gamma_{11}$	σ	
6	LS	0.0017	0.0000	-0.0023	0.0018	-0.0064	0.0185	0.0373	0.0365	0.0760	0.0109	0.1792
	MML	0.0017	0.0000	-0.0023	0.0018	-0.0064	0.0185	0.0373	0.0365	0.0760	0.0109	0.1792
RE =						100	100	100	100	100		
8	LS	0.0017	0.0000	0.0000	0.0000	-0.0035	0.0137	0.0276	0.0273	0.0557	0.0079	0.1322
	MML	0.0017	0.0000	0.0000	0.0000	-0.0035	0.0137	0.0276	0.0273	0.0557	0.0079	0.1322
RE =						100	100	100	100	100		
10	LS	0.0000	0.0011	-0.0000	0.0026	-0.0035	0.0112	0.0222	0.0222	0.0452	0.0063	0.1071
	MML	0.0000	0.0011	-0.0000	0.0026	-0.0035	0.0112	0.0222	0.0222	0.0452	0.0063	0.1071
RE =						100	100	100	100	100		
$\lambda = 1$												
Yan						MSE					DEF	
n		μ	τ_1	γ_1	$\tau\gamma_{11}$	σ	μ	τ_1	γ_1	$\tau\gamma_{11}$	σ	
6	LS	0.0036	-0.0012	0.0000	0.0016	-0.0049	0.0151	0.0247	0.0257	0.0512	0.0114	0.1281
	MML	0.0188	-0.0012	0.0000	0.0016	-0.0007	0.0153	0.0245	0.0255	0.0509	0.0114	0.1276
RE =						101	99	99	99	100		
8	LS	0.0006	0.0000	-0.0000	0.0042	-0.0035	0.0116	0.0189	0.0186	0.0377	0.0083	0.0951
	MML	0.0125	0.0000	-0.0000	0.0043	-0.0002	0.0117	0.0188	0.0184	0.0374	0.0083	0.0946
RE =						101	99	99	99	100		
10	LS	0.0007	0.0025	-0.0000	0.0020	-0.0028	0.0086	0.0149	0.0154	0.0308	0.0062	0.0759
	MML	0.0105	0.0025	-0.0000	0.0020	-0.0002	0.0087	0.0148	0.0152	0.0306	0.0061	0.0754
RE =						101	99	99	99	98		
$\lambda = 3$												
Yan						MSE					DEF	
n		μ	τ_1	γ_1	$\tau\gamma_{11}$	σ	μ	τ_1	γ_1	$\tau\gamma_{11}$	σ	
6	LS	0.0052	-0.0007	-0.0011	-0.0023	-0.0071	0.0094	0.0158	0.0157	0.0323	0.0136	0.0868
	MML	0.0675	-0.0015	-0.0007	-0.0019	-0.0159	0.0123	0.0130	0.0129	0.0264	0.0120	0.0766
RE =						131	82	82	82	88		
8	LS	0.0039	-0.0009	-0.0016	0.0000	-0.0057	0.0070	0.0122	0.0118	0.0241	0.0098	0.0649
	MML	0.0510	-0.0015	-0.0011	0.0000	-0.0117	0.0085	0.0098	0.0096	0.0196	0.0086	0.0561
RE =						121	80	81	81	88		
10	LS	0.0031	-0.0014	-0.0011	0.0000	-0.0040	0.0053	0.0095	0.0096	0.0199	0.0073	0.0516
	MML	0.0408	-0.0014	-0.0013	0.0000	-0.0083	0.0062	0.0077	0.0075	0.0159	0.0064	0.0437
RE =						117	81	78	80	88		
$\lambda = 5$												
Yan						MSE					DEF	
n		μ	τ_1	γ_1	$\tau\gamma_{11}$	σ	μ	τ_1	γ_1	$\tau\gamma_{11}$	σ	
6	LS	0.0058	-0.0000	0.0000	-0.0025	-0.0072	0.0082	0.0142	0.0145	0.0283	0.0142	0.0794
	MML	0.0980	-0.0000	0.0000	-0.0019	-0.0310	0.0152	0.0094	0.0094	0.0188	0.0126	0.0654
RE =						185	66	65	66	89		
8	LS	0.0044	-0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0048	0.0059	0.0108	0.0110	0.0220	0.0104	0.0601
	MML	0.0727	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0210	0.0093	0.0069	0.0072	0.0140	0.0086	0.0460
RE =						158	64	65	64	83		
10	LS	0.0036	-0.0000	-0.0000	0.0011	-0.0044	0.0046	0.0087	0.0088	0.0170	0.0082	0.0473
	MML	0.0567	-0.0000	0.0000	0.0015	-0.0155	0.0062	0.0056	0.0055	0.0106	0.0067	0.0346
RE =						135	64	62	62	82		

Burada, τ_i , γ_j , $\tau\gamma_{ij}$ ($i = 1,2,3$; $j = 1,2,3$) parametrelerine ait Monte Carlo simülasyon sonuçlarından kısalık olması bakımından sadece τ_1 , γ_1 , $\tau\gamma_{11}$ parametrelerine ait sonuçlara yer verilmiştir. Diğer parametrelere ait sonuçlar da benzer çıkmaktadır.

Çizelge 4.1’de görüldüğü gibi, çarpıklık parametresi arttıkça MML yöntemiyle bulunan parametre tahmin edicilerinin etkinlikleri μ hariç LS yöntemiyle bulunan tahmin edicilerin etkinliklerine göre artış göstermektedir.

$\lambda = 0$ değeri için SN dağılımı standart normal dağılıma indirgeneceğinden etkinlikler eşit bulunmuştur.

Ayrıca, çarpıklık parametresi λ ’nın 1, 3 ve 5 değerlerinde örneklem hacmi arttıkça da beklendiği gibi MML tahmin edicilerinin etkinliklerinin arttığı görülmektedir.

4.1.2 Hipotez testi

Hata terimlerinin SN dağılımına sahip olduğu varsayımı altında, 3^2 faktöriyel tasarım modelinde ana ve etkileşim etkilerini test etmek için MML tahmin edicilerine dayalı olarak önerilen test istatistikleri LS tahmin edicilerine dayalı test istatistikleriyle I. tip hata oranları ve güç bakımından karşılaştırılmıştır. Çarpıklık katsayısı $\lambda = 0,1,3,5$ ve örneklem hacmi $n = 6,8,10$ alınmıştır. Testlerin I. tip hata oranları Çizelge 4.2’de sunulmuştur.

Çizelge 4.2 3^2 faktöriyel tasarımda hata terimlerinin SN dağılımına sahip olması durumunda F_A , F_{AB} , F_A^* ve F_{AB}^* test istatistiklerinin deneysel I. tip hataları

			A	AB
$\lambda = 0$	$n = 6$	F	0.052	0.050
		F^*	0.052	0.050
	$n = 8$	F	0.051	0.051
		F^*	0.051	0.051
	$n = 10$	F	0.051	0.050
		F^*	0.051	0.050
$\lambda = 1$	$n = 6$	F	0.049	0.047
		F^*	0.047	0.048
	$n = 8$	F	0.050	0.051
		F^*	0.051	0.051
	$n = 10$	F	0.050	0.052
		F^*	0.050	0.052
$\lambda = 3$	$n = 6$	F	0.050	0.050
		F^*	0.053	0.052
	$n = 8$	F	0.047	0.051
		F^*	0.045	0.054
	$n = 10$	F	0.053	0.050
		F^*	0.054	0.048
$\lambda = 5$	$n = 6$	F	0.051	0.050
		F^*	0.052	0.053
	$n = 8$	F	0.048	0.048
		F^*	0.050	0.049
	$n = 10$	F	0.048	0.051
		F^*	0.048	0.050

Çizelge 4.2 incelendiğinde LS tahmin edicilerine dayalı F_A ve F_{AB} ile MML tahmin edicilerine dayalı olarak geliştirilen F_A^* ve F_{AB}^* test istatistiklerinin I. tip hatalarının $\alpha = 0.050$ değerine oldukça yakın olduğu görülmektedir. Bu sonuç, LS ve MML tahmin edicilerine dayalı test istatistiklerinin asimptotik olarak F dağılımına sahip olduğunu, ayrıca küçük örneklem hacimleri için de bu istatistiklerin F dağılımına uyduğunu Monte Carlo simülasyon çalışmasıyla desteklemektedir.

LS ve MML tahmin edicilerine dayalı test istatistiklerine ait güç değerlerinin hesaplanmasında, modele ait varsayımları koruyacak biçimde, bazı hücrelerdeki gözlem değerlerine d sabiti eklenip çıkarılmıştır. Sonuçlar, Çizelge 4.3 ve 4.4'te verilmiştir.

Çizelge 4.3 3^2 faktöriyel tasarımda hata terimlerinin SN dağılımına sahip olması durumunda F_A ve F_A^* test istatistiklerinin güçleri

n	$\lambda = 0$			$\lambda = 1$			$\lambda = 3$			$\lambda = 5$		
	d	F_A	F_A^*	d	F_A	F_A^*	d	F_A	F_A^*	d	F_A	F_A^*
6	0.00	0.052	0.052	0.00	0.049	0.047	0.00	0.050	0.050	0.00	0.051	0.050
	0.13	0.096	0.096	0.11	0.103	0.105	0.08	0.091	0.103	0.07	0.082	0.091
	0.26	0.253	0.253	0.22	0.275	0.278	0.16	0.232	0.274	0.14	0.203	0.262
	0.39	0.511	0.511	0.33	0.524	0.535	0.24	0.476	0.540	0.21	0.407	0.559
	0.52	0.788	0.788	0.44	0.791	0.795	0.32	0.733	0.811	0.28	0.651	0.825
	0.65	0.937	0.937	0.55	0.949	0.948	0.40	0.909	0.953	0.35	0.842	0.962
	0.78	0.996	0.996	0.66	0.998	0.999	0.48	0.976	0.992	0.42	0.941	0.993
8	0.00	0.051	0.051	0.00	0.050	0.051	0.00	0.047	0.051	0.00	0.048	0.048
	0.12	0.114	0.114	0.10	0.104	0.106	0.07	0.092	0.102	0.06	0.085	0.103
	0.24	0.293	0.293	0.20	0.292	0.297	0.14	0.245	0.291	0.12	0.213	0.281
	0.36	0.587	0.587	0.30	0.582	0.594	0.21	0.497	0.573	0.18	0.408	0.562
	0.48	0.842	0.842	0.40	0.845	0.853	0.28	0.742	0.826	0.24	0.641	0.830
	0.60	0.962	0.962	0.50	0.960	0.972	0.35	0.911	0.962	0.30	0.842	0.965
	0.72	0.991	0.991	0.60	0.995	0.997	0.42	0.971	0.993	0.36	0.948	0.993
10	0.00	0.051	0.051	0.00	0.052	0.052	0.00	0.053	0.050	0.00	0.048	0.051
	0.10	0.103	0.103	0.09	0.117	0.118	0.06	0.095	0.108	0.05	0.085	0.102
	0.20	0.258	0.258	0.18	0.303	0.309	0.12	0.224	0.261	0.10	0.189	0.242
	0.30	0.524	0.524	0.27	0.602	0.613	0.18	0.457	0.547	0.15	0.351	0.517
	0.40	0.790	0.790	0.36	0.855	0.857	0.24	0.712	0.806	0.20	0.592	0.782
	0.50	0.942	0.942	0.45	0.961	0.968	0.30	0.891	0.952	0.25	0.781	0.943
	0.60	0.991	0.991	0.54	0.994	0.996	0.36	0.975	0.992	0.30	0.924	0.997

Çizelge 4.4 3^2 faktöriyel tasarımda hata terimlerinin SN dağılımına sahip olması durumunda F_{AB} ve F_{AB}^* test istatistiklerinin güçleri

n	$\lambda = 0$			$\lambda = 1$			$\lambda = 3$			$\lambda = 5$		
	d	F_{AB}	F_{AB}^*	d	F_{AB}	F_{AB}^*	d	F_{AB}	F_{AB}^*	d	F_{AB}	F_{AB}^*
6	0.00	0.050	0.050	0.00	0.047	0.048	0.00	0.050	0.050	0.00	0.052	0.053
	0.20	0.094	0.094	0.15	0.082	0.085	0.11	0.082	0.091	0.10	0.085	0.095
	0.40	0.270	0.270	0.30	0.233	0.234	0.22	0.215	0.241	0.20	0.184	0.248
	0.60	0.591	0.591	0.45	0.501	0.503	0.33	0.447	0.512	0.30	0.407	0.552
	0.80	0.861	0.861	0.60	0.781	0.784	0.44	0.715	0.795	0.40	0.662	0.842
	1.00	0.974	0.974	0.75	0.947	0.949	0.55	0.905	0.954	0.50	0.861	0.979
	1.20	0.993	0.993	0.90	0.994	0.995	0.66	0.971	0.993	0.60	0.961	0.991
8	0.00	0.051	0.051	0.00	0.051	0.051	0.00	0.045	0.054	0.00	0.050	0.049
	0.15	0.086	0.086	0.13	0.092	0.091	0.09	0.081	0.093	0.08	0.082	0.090
	0.30	0.224	0.224	0.26	0.246	0.248	0.18	0.196	0.221	0.16	0.173	0.233
	0.45	0.474	0.474	0.39	0.529	0.532	0.27	0.409	0.499	0.24	0.368	0.518
	0.60	0.753	0.753	0.52	0.789	0.794	0.36	0.662	0.765	0.32	0.594	0.794
	0.75	0.938	0.938	0.65	0.952	0.959	0.45	0.873	0.930	0.40	0.819	0.955
	0.90	0.996	0.996	0.78	0.991	0.995	0.54	0.964	0.994	0.48	0.945	0.996
10	0.00	0.050	0.050	0.00	0.052	0.050	0.00	0.054	0.048	0.00	0.048	0.050
	0.13	0.082	0.082	0.11	0.092	0.093	0.08	0.087	0.091	0.07	0.076	0.096
	0.26	0.213	0.213	0.22	0.215	0.216	0.16	0.190	0.224	0.14	0.166	0.227
	0.39	0.451	0.451	0.33	0.486	0.489	0.24	0.412	0.482	0.21	0.353	0.513
	0.52	0.731	0.731	0.44	0.742	0.754	0.32	0.675	0.771	0.28	0.585	0.791
	0.65	0.913	0.913	0.55	0.938	0.938	0.40	0.861	0.946	0.35	0.801	0.958
	0.78	0.995	0.995	0.66	0.993	0.996	0.48	0.967	0.998	0.42	0.924	0.992

Çizelge 4.3 ve 4.4 incelendiğinde MML tahmin edicilerine dayalı olarak önerilen test istatistiklerinin beklenildiği üzere $\lambda = 0$ hariç LS tahmin edicilerine dayalı test istatistiklerinden daha güçlü olduğu görülmektedir. $\lambda = 0$ durumunda SN dağılımı standart normal dağılıma indirgendiğinden LS ve MML tahmin edicilerine dayalı testlerin gücü aynıdır. λ arttıkça MML tahmin edicilerine dayalı testlerin gücünün LS tahmin edicilerine dayalı testlere kıyasla belirgin şekilde arttığı görülmektedir.

4.2 Dayanıklı 3^3 Faktöriyel Tasarım

Her biri üç düzeye sahip olan A , B ve C gibi üç faktörün bulunduğu 3^3 faktöriyel tasarımın matematiksel modeli (3.19)'da gösterilmiştir.

Önceki bölümlerdeki gibi, 3^3 faktöriyel tasarımda hata terimlerinin dağılımının SN olduğu varsayımı altında model parametrelerinin MML tahmin edicileri elde edilerek LS tahmin edicilerine göre etkinlikleri karşılaştırılmıştır.

Faktörlerin ana etkileri ve etkileşim etkilerini test etmek için MML tahmin edicilerine dayalı test istatistikleri önerilerek LS tahmin edicilerine dayalı test istatistiklerine göre testlerin güçleri karşılaştırılmıştır.

4.2.1 Parametre tahmini

Bu alt bölümde, 3^3 faktöriyel tasarımda hata terimlerinin dağılımının SN olduğu varsayımı altında model parametrelerinin MML tahmin edicileri elde edilecektir.

Hata terimlerinin SN dağılımına sahip olması durumunda olabilirlik fonksiyonu,

$$L = \prod_{i=1}^3 \prod_{j=1}^3 \prod_{k=1}^3 \prod_{l=1}^n \frac{2}{\sigma \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2} Z_{ijkl}^2\right) \Phi(\lambda Z_{ijkl}) \quad (4.9)$$

biçimindedir. Burada; $Z_{ijkl} = \frac{y_{ijkl} - \mu - \tau_i - \gamma_j - (\tau\gamma)_{ij} - \delta_k - (\tau\delta)_{ik} - (\gamma\delta)_{jk} - (\tau\gamma\delta)_{ijk}}{\sigma}$ dir.

Olabilirlik fonksiyonunun logaritması alınarak elde edilen $\ln L$ fonksiyonu ise;

$$\begin{aligned}\ln L &= N \ln\left(\frac{2}{\sigma}\right) - \frac{N}{2} \ln(2\pi) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^n z_{ijkl}^2 \\ &\quad + \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^n \ln\left(\Phi(\lambda z_{ijkl})\right)\end{aligned}\quad (4.10)$$

biçiminde elde edilir. Burada $N = 3^3 n$ dir.

(4.10)'da gösterilen $\ln L$ fonksiyonunun parametrelere göre kısmi türevlerinin alınmasıyla olabilirlik denklemleri;

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \mu} = \frac{1}{\sigma} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^n z_{ijkl} - \frac{\lambda}{\sigma} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^n \frac{\phi(\lambda z_{ijkl})}{\Phi(\lambda z_{ijkl})} = 0,$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \tau_i} = \frac{1}{\sigma} \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^n z_{ijkl} - \frac{\lambda}{\sigma} \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^n \frac{\phi(\lambda z_{ijkl})}{\Phi(\lambda z_{ijkl})} = 0,$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \gamma_j} = \frac{1}{\sigma} \sum_{i=1}^3 \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^n z_{ijkl} - \frac{\lambda}{\sigma} \sum_{i=1}^3 \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^n \frac{\phi(\lambda z_{ijkl})}{\Phi(\lambda z_{ijkl})} = 0,$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial (\tau\gamma)_{ij}} = \frac{1}{\sigma} \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^n z_{ijkl} - \frac{\lambda}{\sigma} \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^n \frac{\phi(\lambda z_{ijkl})}{\Phi(\lambda z_{ijkl})} = 0, \quad (4.11)$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \delta_k} = \frac{1}{\sigma} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{l=1}^n z_{ijkl} - \frac{\lambda}{\sigma} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{l=1}^n \frac{\phi(\lambda z_{ijkl})}{\Phi(\lambda z_{ijkl})} = 0,$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial (\tau\delta)_{ik}} = \frac{1}{\sigma} \sum_{j=1}^3 \sum_{l=1}^n z_{ijkl} - \frac{\lambda}{\sigma} \sum_{j=1}^3 \sum_{l=1}^n \frac{\phi(\lambda z_{ijkl})}{\Phi(\lambda z_{ijkl})} = 0,$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial (\gamma\delta)_{jk}} = \frac{1}{\sigma} \sum_{i=1}^3 \sum_{l=1}^n z_{ijkl} - \frac{\lambda}{\sigma} \sum_{i=1}^3 \sum_{l=1}^n \frac{\phi(\lambda z_{ijkl})}{\Phi(\lambda z_{ijkl})} = 0,$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial (\tau\gamma\delta)_{ijk}} = \frac{1}{\sigma} \sum_{l=1}^n z_{ijkl} - \frac{\lambda}{\sigma} \sum_{l=1}^n \frac{\phi(\lambda z_{ijkl})}{\Phi(\lambda z_{ijkl})} = 0 \text{ ve}$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \sigma} = -\frac{N}{\sigma} + \frac{1}{\sigma} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^n z_{ijkl}^2 - \frac{\lambda}{\sigma} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^n z_{ijkl} \frac{\phi(\lambda z_{ijkl})}{\Phi(\lambda z_{ijkl})} = 0$$

şeklinde bulunur. Burada;

$$w(z_{ijkl}) = \frac{\phi(\lambda z_{ijkl})}{\Phi(\lambda z_{ijkl})} \text{ ve } z_{ijkl} = \frac{y_{ijkl} - \mu - \tau_i - \gamma_j - (\tau\gamma)_{ij} - \delta_k - (\tau\delta)_{ik} - (\gamma\delta)_{jk} - (\tau\gamma\delta)_{ijk}}{\sigma}$$

olarak tanımlanır.

Benzer şekilde (4.11)'de verilen olabilirlik denklemlerinde yer alan parametrelerin doğrusal olmayan; $w(z_{ijkl})$ fonksiyonları nedeniyle, hata terimlerinin dağılımı SN olarak varsayıldığında 3^3 faktöriyel tasarım modelindeki parametrelerin ML tahmin edicilerinin açık çözümüne ulaşamaz.

Bu nedenle, model parametrelerinin tahmin edicilerini elde etmek için Tiku (1967) tarafından önerilen MML metodolojisi kullanılarak çözüme ulaşılır. Bir önceki bölümde gösterildiği şekilde, (3.23) ve (3.24)'teki işlemler uygulanarak olabilirlik denklemlerindeki toplamlar sıra istatistikleri cinsinden ifade edilir. Böylece olabilirlik denklemleri,

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \mu} = \frac{1}{\sigma} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^n z_{ijk(l)} - \frac{\lambda}{\sigma} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^n w(z_{ijk(l)}) = 0,$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \tau_i} = \frac{1}{\sigma} \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^n z_{ijk(l)} - \frac{\lambda}{\sigma} \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^n w(z_{ijk(l)}) = 0,$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \gamma_j} = \frac{1}{\sigma} \sum_{i=1}^3 \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^n z_{ijk(l)} - \frac{\lambda}{\sigma} \sum_{i=1}^3 \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^n w(z_{ijk(l)}) = 0,$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial (\tau\gamma)_{ij}} = \frac{1}{\sigma} \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^n z_{ijk(l)} - \frac{\lambda}{\sigma} \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^n w(z_{ijk(l)}) = 0,$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \delta_k} = \frac{1}{\sigma} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{l=1}^n z_{ijk(l)} - \frac{\lambda}{\sigma} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{l=1}^n w(z_{ijk(l)}) = 0, \quad (4.12)$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial (\tau\delta)_{ik}} = \frac{1}{\sigma} \sum_{j=1}^3 \sum_{l=1}^n z_{ijk(l)} - \frac{\lambda}{\sigma} \sum_{j=1}^3 \sum_{l=1}^n w(z_{ijk(l)}) = 0,$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial (\gamma\delta)_{jk}} = \frac{1}{\sigma} \sum_{i=1}^3 \sum_{l=1}^n z_{ijk(l)} - \frac{\lambda}{\sigma} \sum_{i=1}^3 \sum_{l=1}^n w(z_{ijk(l)}) = 0,$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial (\tau\gamma\delta)_{ijk}} = \frac{1}{\sigma} \sum_{l=1}^n z_{ijk(l)} - \frac{\lambda}{\sigma} \sum_{l=1}^n w(z_{ijk(l)}) = 0 \text{ ve}$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \sigma} = -\frac{N}{\sigma} + \frac{1}{\sigma} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^n z_{ijk(l)}^2 - \frac{\lambda}{\sigma} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^n z_{ijk(l)} w(z_{ijk(l)}) = 0$$

şeklinde yazılabilir. Burada;

$$w(z_{ijk(l)}) = \frac{\phi(\lambda z_{ijk(l)})}{\Phi(\lambda z_{ijk(l)})} \text{ ve } z_{ijk(l)} = \frac{y_{ijk(l)} - \mu - \tau_i - \gamma_j - (\tau\gamma)_{ij} - \delta_k - (\tau\delta)_{ik} - (\gamma\delta)_{jk} - (\tau\gamma\delta)_{ijk}}{\sigma}$$

olarak tanımlanır.

Olabilirlik denklemlerinde bulunan, $w(z_{ijk(l)}) = \frac{\phi(\lambda z_{ijk(l)})}{\Phi(\lambda z_{ijk(l)})}$ fonksiyonu, doğrusal olmayan bir fonksiyondur ve Taylor serisinin ilk iki terimini kullanarak sıra istatistiklerinin beklenen değeri $t_{(l)} = E(z_{ijk(l)})$ etrafında açılarak doğrusal hale getirilir. Buna göre;

$$w(z_{ijk(l)}) \cong w(t_{(l)}) + [z_{ijk(l)} - t_{(l)}] \left\{ \frac{d}{dz} w(z) \right\}_{z=t_{(l)}}, l = 1, 2, \dots, n$$

olmak üzere,

$$w(z_{ijk(l)}) \cong \alpha_l - \beta_l z_{ijk(l)} \quad (4.13)$$

şeklinde yazılır. Burada;

$$\alpha_l = \frac{\phi(\lambda t_{(l)})}{\Phi(\lambda t_{(l)})} + t_{(l)} \beta_l, \quad \beta_l = \frac{\phi(\lambda t_{(l)})}{\Phi(\lambda t_{(l)})} \left(\frac{\lambda^2 t_{(l)} \Phi(\lambda t_{(l)}) + \lambda \phi(\lambda t_{(l)})}{\Phi(\lambda t_{(l)})} \right)$$

şeklinde elde edilir. $t_{(l)}$ 'nin gerçek değerini bulmak zor olduğundan yaklaşık değerleri;

$$\int_{-\infty}^{t_{(l)}} f(z) dz \cong \frac{l}{n+1}, l = 1, 2, \dots, n$$

yardımıyla elde edilir. Burada, $f(z)$ standart SN dağılımını göstermektedir.

Buna göre, (4.13)'te verilen doğrusal ifade, (4.12)'de verilen olabilirlik denklemlerindeki $w(z_{ijk(l)})$ fonksiyonu yerine yazıldığında;

$$\frac{\partial \ln L^*}{\partial \mu} = \frac{1}{\sigma} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^n z_{ijk(l)} - \frac{\lambda}{\sigma} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^n (\alpha_l - \beta_l z_{ijk(l)}) = 0,$$

$$\frac{\partial \ln L^*}{\partial \tau_i} = \frac{1}{\sigma} \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^n z_{ijk(l)} - \frac{\lambda}{\sigma} \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^n (\alpha_l - \beta_l z_{ijk(l)}) = 0,$$

$$\frac{\partial \ln L^*}{\partial \gamma_j} = \frac{1}{\sigma} \sum_{i=1}^3 \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^n z_{ijk(l)} - \frac{\lambda}{\sigma} \sum_{i=1}^3 \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^n (\alpha_l - \beta_l z_{ijk(l)}) = 0,$$

$$\frac{\partial \ln L^*}{\partial (\tau\gamma)_{ij}} = \frac{1}{\sigma} \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^n z_{ijk(l)} - \frac{\lambda}{\sigma} \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^n (\alpha_l - \beta_l z_{ijk(l)}) = 0$$

$$\frac{\partial \ln L^*}{\partial \delta_k} = \frac{1}{\sigma} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{l=1}^n z_{ijk(l)} - \frac{\lambda}{\sigma} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{l=1}^n (\alpha_l - \beta_l z_{ijk(l)}) = 0, \quad (4.14)$$

$$\frac{\partial \ln L^*}{\partial (\tau\delta)_{ik}} = \frac{1}{\sigma} \sum_{j=1}^3 \sum_{l=1}^n z_{ijk(l)} - \frac{\lambda}{\sigma} \sum_{j=1}^3 \sum_{l=1}^n (\alpha_l - \beta_l z_{ijk(l)}) = 0,$$

$$\frac{\partial \ln L^*}{\partial (\gamma\delta)_{jk}} = \frac{1}{\sigma} \sum_{i=1}^3 \sum_{l=1}^n z_{ijk(l)} - \frac{\lambda}{\sigma} \sum_{i=1}^3 \sum_{l=1}^n (\alpha_l - \beta_l z_{ijk(l)}) = 0,$$

$$\frac{\partial \ln L^*}{\partial (\tau\gamma\delta)_{ijk}} = \frac{1}{\sigma} \sum_{l=1}^n z_{ijk(l)} - \frac{\lambda}{\sigma} \sum_{l=1}^n (\alpha_l - \beta_l z_{ijk(l)}) = 0 \text{ ve}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln L^*}{\partial \sigma} &= -\frac{N}{\sigma} + \frac{1}{\sigma} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^n z_{ijk(l)}^2 \\ &\quad - \frac{\lambda}{\sigma} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^n z_{ijk(l)} (\alpha_l - \beta_l z_{ijk(l)}) = 0 \end{aligned}$$

olarak ifade edilen uyarlanmış olabilirlik denklemleri elde edilir. Denklem sisteminin çözümünden MML tahmin edicileri;

$$\hat{\mu} = \hat{\mu}_{...} - \left(\frac{\lambda\Delta}{m}\right) \hat{\sigma}, \quad \hat{\tau}_i = \hat{\mu}_{i...} - \hat{\mu}_{...}, \quad \hat{\gamma}_j = \hat{\mu}_{.j.} - \hat{\mu}_{...}, \quad \hat{\delta}_k = \hat{\mu}_{..k.} - \hat{\mu}_{...},$$

$$(\widehat{\tau\gamma})_{ij} = \hat{\mu}_{ij.} - \hat{\mu}_{i...} - \hat{\mu}_{.j.} + \hat{\mu}_{...}, \quad (\widehat{\tau\delta})_{ik} = \hat{\mu}_{i.k.} - \hat{\mu}_{i...} - \hat{\mu}_{..k.} + \hat{\mu}_{...},$$

$$(\widehat{\gamma\delta})_{jk} = \hat{\mu}_{.jk.} - \hat{\mu}_{.j..} - \hat{\mu}_{..k.} + \hat{\mu}_{....}, \quad (4.15)$$

$$(\widehat{\tau\gamma\delta})_{ijk} = \hat{\mu}_{ijk.} - \hat{\mu}_{ij..} - \hat{\mu}_{i.k.} - \hat{\mu}_{.jk.} + \hat{\mu}_{i...} + \hat{\mu}_{.j..} + \hat{\mu}_{..k.} - \hat{\mu}_{....} \text{ ve}$$

$$\hat{\sigma} = \frac{-B + \sqrt{B^2 + 4NC}}{2\sqrt{N(N-3^3)}}$$

şeklinde elde edilir. Burada;

$$\hat{\mu}_{....} = \frac{\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^n \theta_l y_{ijk(l)}}{3^3 m}, \quad \hat{\mu}_{i...} = \frac{\sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^n \theta_l y_{ijk(l)}}{3^2 m},$$

$$\hat{\mu}_{.j..} = \frac{\sum_{i=1}^3 \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^n \theta_l y_{ijk(l)}}{3^2 m}, \quad \hat{\mu}_{..k.} = \frac{\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{l=1}^n \theta_l y_{ijk(l)}}{3^2 m}, \quad \hat{\mu}_{ij..} = \frac{\sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^n \theta_l y_{ijk(l)}}{3m},$$

$$\hat{\mu}_{i.k.} = \frac{\sum_{j=1}^3 \sum_{l=1}^n \theta_l y_{ijk(l)}}{3m}, \quad \hat{\mu}_{.jk.} = \frac{\sum_{i=1}^3 \sum_{l=1}^n \theta_l y_{ijk(l)}}{3m}, \quad \hat{\mu}_{ijk.} = \frac{\sum_{l=1}^n \theta_l y_{ijk(l)}}{m},$$

$$m = \sum_{l=1}^n \theta_l, \quad \theta_l = 1 + \lambda \beta_l, \quad \Delta = \sum_{l=1}^n \alpha_l, \quad N = 3^3 n,$$

$$B = \lambda \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^n \alpha_l \{y_{ijk(l)} - \hat{\mu}_{ijk.}\} \text{ ve}$$

$$C = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^n \theta_l \{y_{ijk(l)} - \hat{\mu}_{ijk.}\}^2$$

olarak tanımlanmaktadır.

LS tahmin edicileri: Hata terimlerinin dağılımının $SN(0, \sigma, \lambda)$ olması durumunda 3^3 faktöriyel tasarım model parametrelerinin LS tahmin edicileri,

$$\tilde{\mu}_{BC} = \bar{y}_{....} - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\lambda}{\sqrt{1+\lambda^2}} \tilde{\sigma}_{BC}, \quad \tilde{\tau}_i = \bar{y}_{i...} - \bar{y}_{....}, \quad \tilde{\gamma}_j = \bar{y}_{.j..} - \bar{y}_{....}, \quad \tilde{\delta}_k = \bar{y}_{..k.} - \bar{y}_{....},$$

$$\widetilde{\tau\gamma}_{ij} = \bar{y}_{ij..} - \bar{y}_{i...} - \bar{y}_{.j..} + \bar{y}_{....}, \quad \widetilde{\tau\delta}_{ik} = \bar{y}_{i.k.} - \bar{y}_{i...} - \bar{y}_{..k.} + \bar{y}_{....},$$

$$\widetilde{\gamma\delta}_{jk} = \bar{y}_{.jk.} - \bar{y}_{.j..} - \bar{y}_{..k.} + \bar{y}_{....}, \quad (4.16)$$

$$\widetilde{\tau\gamma}\delta_{ijk} = \bar{y}_{ijk} - \bar{y}_{ij..} - \bar{y}_{i.k.} - \bar{y}_{.jk.} + \bar{y}_{i...} + \bar{y}_{.j..} + \bar{y}_{..k.} - \bar{y}_{....} \text{ ve}$$

$$\tilde{\sigma}_{BC} = \sqrt{\frac{\tilde{\sigma}^2}{1 - \frac{2\left(\frac{\lambda}{\sqrt{1+\lambda^2}}\right)^2}{\pi}}}$$

şeklindedir. Burada, μ ve σ parametrelerinin tahmin edicilerine yan düzeltmesi yapılmıştır.

Monte Carlo simülasyonu: Hata terimlerinin dağılımının SN olduğu varsayımı altında MML tahmin edicileri, LS tahmin edicileriyle (3.12)'de tanımlanan Yan ve MSE ile sırasıyla (3.13) ve (3.14)'te tanımlanan RE ve DEF kriterlerine göre Monte Carlo simülasyonu yardımıyla 10,000 tekrar yapılarak karşılaştırılmıştır. Çarpıklık katsayısı $\lambda = 0,1,3,5$ ile örneklem hacmi $n = 6,8,10$ alınmıştır. Sonuçlara Çizelge 4.5 ve 4.6'da yer verilmiştir.

Çizelge 4.5 3^3 faktöriyel tasarımda hata terimlerinin SN dağılımına sahip olması durumunda model parametrelerinin LS ve MML tahmin edicilerinin Yan değerleri

$\lambda = 0$										
n		μ	τ_1	γ_1	$\tau\gamma_{11}$	δ_1	$\tau\delta_{11}$	$\gamma\delta_{11}$	$\tau\gamma\delta_{111}$	σ
6	LS	0.0016	-0.0000	0.0032	-0.0000	-0.0000	-0.0021	0.0016	0.0016	-0.0000
	MML	0.0016	-0.0000	0.0032	-0.0000	-0.0000	-0.0021	0.0016	0.0016	-0.0000
8	LS	-0.0000	-0.0016	-0.0000	0.0000	0.0000	0.0018	0.0013	-0.0018	-0.0012
	MML	-0.0000	-0.0016	-0.0000	0.0000	0.0000	0.0018	0.0013	-0.0018	-0.0012
10	LS	0.0000	-0.0010	0.0000	0.0003	-0.0021	0.0013	0.0016	-0.0018	-0.0000
	MML	0.0000	-0.0010	0.0000	0.0003	-0.0021	0.0013	0.0016	-0.0018	-0.0000
$\lambda = 1$										
n		μ	τ_1	γ_1	$\tau\gamma_{11}$	δ_1	$\tau\delta_{11}$	$\gamma\delta_{11}$	$\tau\gamma\delta_{111}$	σ
6	LS	0.0018	0.0011	0.0017	-0.0011	0.0000	0.0000	-0.0026	-0.0027	-0.0018
	MML	0.0174	0.0010	0.0017	-0.0012	0.0000	0.0000	-0.0024	-0.0026	0.0023
8	LS	0.0006	-0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	0.0015	-0.0000	-0.0011
	MML	0.0129	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	0.0000	0.0015	-0.0000	0.0021
10	LS	0.0001	-0.0000	0.0000	-0.0000	-0.0000	0.0000	0.0000	0.0012	-0.0018
	MML	0.0102	-0.0000	0.0000	-0.0000	-0.0000	0.0000	0.0000	0.0012	0.0008
$\lambda = 3$										
n		μ	τ_1	γ_1	$\tau\gamma_{11}$	δ_1	$\tau\delta_{11}$	$\gamma\delta_{11}$	$\tau\gamma\delta_{111}$	σ
6	LS	0.0023	0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0034	-0.0024
	MML	0.0668	0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0019	-0.0121
8	LS	0.0007	0.0000	0.0000	-0.0009	0.0000	0.0000	0.0000	0.0029	-0.0011
	MML	0.0492	0.0000	0.0000	-0.0011	-0.0000	0.0000	0.0000	0.0020	-0.0076
10	LS	0.0010	-0.0000	-0.0000	0.0019	0.0000	0.0000	0.0009	0.0000	-0.0020
	MML	0.0399	0.0000	-0.0000	0.0014	0.0000	0.0000	0.0011	0.0000	-0.0069
$\lambda = 5$										
n		μ	τ_1	γ_1	$\tau\gamma_{11}$	δ_1	$\tau\delta_{11}$	$\gamma\delta_{11}$	$\tau\gamma\delta_{111}$	σ
6	LS	0.0017	-0.0016	-0.0000	-0.0000	0.0000	0.0000	0.0013	-0.0014	-0.0024
	MML	0.0970	-0.0008	-0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0005	-0.0018	-0.0278
8	LS	0.0021	-0.0000	0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	0.0014	0.0019	-0.0160
	MML	0.0711	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	0.0004	0.0014	-0.0174
10	LS	0.0009	-0.0000	0.0017	0.0000	0.0000	0.0000	0.0011	0.0000	-0.0020
	MML	0.0553	-0.0000	0.0008	0.0000	0.0000	0.0000	0.0010	0.0000	-0.0134

Çizelge 4.6 3^3 faktöriyel tasarımda hata terimlerinin SN dağılımına sahip olması durumunda model parametrelerinin LS ve MML tahmin edicilerinin MSE, RE ve DEF değerleri

$\lambda = 0$											
MSE											DEF
n		μ	τ_1	γ_1	$\tau\gamma_{11}$	δ_1	$\tau\delta_{11}$	$\gamma\delta_{11}$	$\tau\gamma\delta_{111}$	σ	
6	LS	0.0062	0.0125	0.0124	0.0247	0.0122	0.0248	0.0248	0.0483	0.0038	0.1697
	MML	0.0062	0.0125	0.0124	0.0247	0.0122	0.0248	0.0248	0.0483	0.0038	0.1697
	RE =	100	100	100	100	100	100	100	100	100	
8	LS	0.0047	0.0091	0.0090	0.0189	0.0094	0.0185	0.0186	0.0369	0.026	0.1277
	MML	0.0047	0.0091	0.0090	0.0189	0.0094	0.0185	0.0186	0.0369	0.026	0.1277
	RE =	100	100	100	100	100	100	100	100	100	
10	LS	0.0037	0.0075	0.0075	0.0148	0.0072	0.0148	0.0146	0.0301	0.0020	0.1022
	MML	0.0037	0.0075	0.0075	0.0148	0.0072	0.0148	0.0146	0.0301	0.0020	0.1022
	RE =	100	100	100	100	100	100	100	100	100	
$\lambda = 1$											
MSE											DEF
n		μ	τ_1	γ_1	$\tau\gamma_{11}$	δ_1	$\tau\delta_{11}$	$\gamma\delta_{11}$	$\tau\gamma\delta_{111}$	σ	
6	LS	0.0050	0.0085	0.0084	0.0171	0.0086	0.0173	0.0170	0.0328	0.0038	0.1185
	MML	0.0052	0.0084	0.0083	0.0170	0.0085	0.0172	0.0169	0.0326	0.0038	0.1179
	RE =	104	99	99	99	99	99	99	99	100	
8	LS	0.0037	0.0063	0.0062	0.0125	0.0063	0.0128	0.0126	0.0251	0.0027	0.0882
	MML	0.0039	0.0062	0.0062	0.0124	0.0063	0.0127	0.0125	0.0249	0.0027	0.0878
	RE =	105	98	100	99	100	99	99	99	100	
10	LS	0.0030	0.0050	0.0049	0.0102	0.0050	0.0102	0.0100	0.0202	0.0021	0.0706
	MML	0.0031	0.0049	0.0049	0.0102	0.0050	0.0101	0.0099	0.0200	0.0021	0.0702
	RE =	103	98	100	100	100	99	99	99	100	
$\lambda = 3$											
MSE											DEF
n		μ	τ_1	γ_1	$\tau\gamma_{11}$	δ_1	$\tau\delta_{11}$	$\gamma\delta_{11}$	$\tau\gamma\delta_{111}$	σ	
6	LS	0.0031	0.0053	0.0052	0.0106	0.0052	0.0105	0.0107	0.0208	0.0044	0.0758
	MML	0.0071	0.0043	0.0042	0.0087	0.0042	0.0085	0.0086	0.0171	0.0040	0.0667
	RE =	229	81	81	82	81	81	80	82	91	
8	LS	0.0022	0.0040	0.0040	0.0079	0.0040	0.0080	0.0080	0.0157	0.0032	0.0570
	MML	0.0043	0.0032	0.0032	0.0064	0.0033	0.0065	0.0065	0.0127	0.0028	0.0489
	RE =	195	80	80	81	82	81	81	81	88	
10	LS	0.0018	0.0032	0.0032	0.0062	0.0032	0.0063	0.0065	0.0125	0.0025	0.0454
	MML	0.0031	0.0026	0.0025	0.0050	0.0026	0.0051	0.0052	0.0101	0.0022	0.0384
	RE =	172	81	78	81	81	81	80	81	88	
$\lambda = 5$											
MSE											DEF
n		μ	τ_1	γ_1	$\tau\gamma_{11}$	δ_1	$\tau\delta_{11}$	$\gamma\delta_{11}$	$\tau\gamma\delta_{111}$	σ	
6	LS	0.0027	0.0049	0.0048	0.0099	0.0048	0.0095	0.0095	0.0188	0.0047	0.0696
	MML	0.0112	0.0033	0.0032	0.0064	0.0032	0.0064	0.0063	0.0127	0.0045	0.0572
	RE =	415	67	67	65	67	67	66	68	96	
8	LS	0.0020	0.0036	0.0036	0.0071	0.0037	0.0072	0.0072	0.0146	0.0035	0.0525
	MML	0.0064	0.0023	0.0023	0.0045	0.0023	0.0047	0.0045	0.0094	0.0030	0.0394
	RE =	320	64	64	63	62	65	62	64	86	
10	LS	0.0016	0.0029	0.0029	0.0058	0.0029	0.0056	0.0058	0.0117	0.0027	0.0419
	MML	0.0041	0.0018	0.0018	0.0036	0.0018	0.0036	0.0036	0.0072	0.0023	0.0298
	RE =	256	62	62	62	62	64	62	62	85	

Burada, τ_i , γ_j , $\tau\gamma_{ij}$, δ_k , $\tau\delta_{ik}$, $\gamma\delta_{jk}$, $\tau\gamma\delta_{ijk}$ ($i = 1,2,3; j = 1,2,3; k = 1,2,3$) parametrelerine ait Monte Carlo simülasyon sonuçlarından kısalık olması bakımından

sadece $\tau_1, \gamma_1, \tau\gamma_{11}, \delta_1, \tau\delta_{11}, \gamma\delta_{11}, \tau\gamma\delta_{111}$ parametrelerine ait sonuçlara yer verilmiştir. Diğer parametrelere ait sonuçlar da benzer çıkmaktadır.

Çizelge 4.6’da görüldüğü gibi, çarpıklık parametresi arttıkça MML yöntemiyle bulunan parametre tahmin edicilerinin etkinliği μ hariç LS yöntemiyle bulunan tahmin edicilerin etkinliklerine göre artış göstermektedir.

$\lambda = 0$ değeri için dağılım standart normal dağılım olacağından etkinlikler eşit bulunmuştur.

Ayrıca, çarpıklık parametresi λ ’nın 1, 3 ve 5 değerlerinde örneklem hacmi arttıkça beklendiği gibi MML tahmin edicilerinin etkinliklerinin LS tahmin edicilerine kıyasla arttığı görülmektedir.

4.2.2 Hipotez testi

Hata terimlerinin SN dağılımına sahip olduğu varsayımı altında, 3^3 faktöriyel tasarım modelinde ana ve etkileşim etkilerini test etmek için MML tahmin edicilerine dayalı olarak önerilen test istatistikleri LS tahmin edicilerine dayalı test istatistikleriyle I. tip hata oranları ve güç bakımından karşılaştırılmıştır. Çarpıklık katsayısı $\lambda = 0,1,3,5$ ve örneklem hacmi $n = 6,8,10$ alınmıştır. Testlerin I. tip hata oranları Çizelge 4.7’de sunulmuştur.

Çizelge 4.7 3^3 faktöriyel tasarımda hata terimlerinin SN dağılımına sahip olması durumunda F_A , F_{AB} , F_{ABC} , F_A^* , F_{AB}^* ve F_{ABC}^* test istatistiklerinin deneysel I. tip hataları

			<i>A</i>	<i>AB</i>	<i>ABC</i>
$\lambda = 0$	$n = 6$	F	0.053	0.050	0.049
		F^*	0.053	0.050	0.049
	$n = 8$	F	0.046	0.052	0.051
		F^*	0.046	0.052	0.051
	$n = 10$	F	0.051	0.046	0.048
		F^*	0.051	0.046	0.048
$\lambda = 1$	$n = 6$	F	0.048	0.044	0.053
		F^*	0.049	0.043	0.053
	$n = 8$	F	0.051	0.053	0.048
		F^*	0.049	0.052	0.048
	$n = 10$	F	0.046	0.049	0.050
		F^*	0.047	0.049	0.049
$\lambda = 3$	$n = 6$	F	0.050	0.055	0.048
		F^*	0.048	0.054	0.046
	$n = 8$	F	0.051	0.047	0.050
		F^*	0.047	0.046	0.046
	$n = 10$	F	0.052	0.050	0.051
		F^*	0.054	0.049	0.050
$\lambda = 5$	$n = 6$	F	0.054	0.054	0.052
		F^*	0.045	0.048	0.049
	$n = 8$	F	0.051	0.051	0.052
		F^*	0.048	0.042	0.050
	$n = 10$	F	0.049	0.049	0.050
		F^*	0.046	0.046	0.044

Çizelge 4.7 incelendiğinde LS tahmin edicilerine dayalı F_A , F_{AB} ve F_{ABC} ile MML tahmin edicilerine dayalı olarak geliştirilen F_A^* , F_{AB}^* ve F_{ABC}^* test istatistiklerinin I. tip hatalarının $\alpha = 0.050$ değerine oldukça yakın olduğu görülmektedir. Bu sonuç, LS ve MML tahmin edicilerine dayalı test istatistiklerinin asimptotik olarak F dağılımına sahip olduğunu, ayrıca küçük örneklem hacimleri için de bu istatistiklerin F dağılımına uyduğunu Monte Carlo simülasyon çalışmasıyla desteklemektedir.

LS ve MML tahmin edicilerine dayalı test istatistiklerine ait güç değerlerinin hesaplanmasında modele ait varsayımları koruyacak biçimde, bazı hücrelerdeki gözlem değerlerine d sabiti eklenip çıkarılmıştır. Sonuçlar, Çizelge 4.8 - 4.10'da verilmiştir.

Çizelge 4.8 3^3 faktöriyel tasarımda hata terimlerinin SN dağılımına sahip olması durumunda F_A ve F_A^* test istatistiklerinin güçleri

n	$\lambda = 0$			$\lambda = 1$			$\lambda = 3$			$\lambda = 5$		
	d	F_A	F_A^*	d	F_A	F_A^*	d	F_A	F_A^*	d	F_A	F_A^*
6	0.00	0.056	0.056	0.00	0.048	0.049	0.00	0.050	0.048	0.00	0.054	0.045
	0.08	0.099	0.099	0.07	0.112	0.114	0.05	0.105	0.113	0.05	0.106	0.123
	0.16	0.298	0.298	0.14	0.326	0.327	0.10	0.274	0.318	0.10	0.299	0.405
	0.24	0.583	0.583	0.21	0.643	0.645	0.15	0.559	0.639	0.15	0.589	0.770
	0.32	0.844	0.844	0.28	0.886	0.888	0.20	0.812	0.885	0.20	0.848	0.952
	0.40	0.965	0.965	0.35	0.978	0.978	0.25	0.950	0.979	0.25	0.966	0.996
	0.48	0.995	0.995	0.42	0.998	0.999	0.30	0.992	0.998	0.30	0.996	0.999
8	0.00	0.046	0.046	0.00	0.051	0.049	0.00	0.051	0.047	0.00	0.051	0.048
	0.07	0.108	0.108	0.06	0.110	0.112	0.04	0.093	0.103	0.04	0.099	0.120
	0.14	0.293	0.293	0.12	0.318	0.319	0.08	0.239	0.279	0.08	0.267	0.371
	0.21	0.605	0.605	0.18	0.638	0.639	0.12	0.484	0.565	0.12	0.524	0.711
	0.28	0.853	0.853	0.24	0.878	0.882	0.16	0.743	0.829	0.16	0.787	0.932
	0.35	0.967	0.967	0.30	0.976	0.977	0.20	0.913	0.960	0.20	0.937	0.991
	0.42	0.997	0.997	0.36	0.997	0.997	0.24	0.981	0.994	0.24	0.989	0.999
10	0.00	0.051	0.051	0.00	0.046	0.047	0.00	0.052	0.054	0.00	0.049	0.045
	0.06	0.092	0.092	0.05	0.106	0.106	0.04	0.104	0.118	0.03	0.083	0.098
	0.12	0.279	0.279	0.10	0.285	0.290	0.08	0.290	0.344	0.06	0.190	0.269
	0.18	0.562	0.562	0.15	0.573	0.579	0.12	0.579	0.675	0.09	0.390	0.564
	0.24	0.815	0.815	0.20	0.835	0.837	0.16	0.842	0.911	0.12	0.629	0.825
	0.30	0.958	0.958	0.25	0.958	0.960	0.20	0.967	0.990	0.15	0.826	0.955
	0.36	0.994	0.994	0.30	0.995	0.995	0.24	0.994	0.999	0.18	0.940	0.993

Çizelge 4.9 3^3 faktöriyel tasarımda hata terimlerinin SN dağılımına sahip olması durumunda F_{AB} ve F_{AB}^* test istatistiklerinin güçleri

n	$\lambda = 0$			$\lambda = 1$			$\lambda = 3$			$\lambda = 5$		
	d	F_{AB}	F_{AB}^*	d	F_{AB}	F_{AB}^*	d	F_{AB}	F_{AB}^*	d	F_{AB}	F_{AB}^*
6	0.00	0.050	0.050	0.00	0.044	0.043	0.00	0.055	0.054	0.00	0.054	0.054
	0.11	0.100	0.100	0.10	0.106	0.106	0.07	0.089	0.101	0.06	0.083	0.098
	0.22	0.275	0.275	0.20	0.328	0.329	0.14	0.256	0.304	0.12	0.218	0.287
	0.33	0.573	0.573	0.30	0.679	0.680	0.21	0.558	0.649	0.18	0.447	0.618
	0.44	0.850	0.850	0.40	0.916	0.919	0.28	0.832	0.903	0.24	0.728	0.889
	0.55	0.974	0.974	0.50	0.990	0.991	0.35	0.965	0.987	0.30	0.913	0.985
	0.66	0.998	0.998	0.60	0.999	0.999	0.42	0.994	0.999	0.36	0.982	0.999
8	0.00	0.052	0.052	0.00	0.053	0.052	0.00	0.047	0.046	0.00	0.051	0.042
	0.10	0.101	0.101	0.08	0.097	0.094	0.06	0.095	0.103	0.05	0.082	0.090
	0.20	0.301	0.301	0.16	0.285	0.289	0.12	0.256	0.308	0.10	0.198	0.279
	0.30	0.619	0.619	0.24	0.606	0.608	0.18	0.541	0.649	0.15	0.435	0.609
	0.40	0.890	0.890	0.32	0.869	0.872	0.24	0.821	0.899	0.20	0.691	0.881
	0.50	0.985	0.985	0.40	0.978	0.979	0.30	0.962	0.989	0.25	0.892	0.983
	0.60	0.999	0.999	0.48	0.998	0.998	0.36	0.995	0.999	0.30	0.976	0.999
10	0.00	0.046	0.046	0.00	0.049	0.049	0.00	0.049	0.049	0.00	0.049	0.046
	0.09	0.108	0.108	0.07	0.097	0.097	0.05	0.085	0.093	0.04	0.074	0.084
	0.18	0.311	0.311	0.14	0.279	0.282	0.10	0.228	0.267	0.08	0.168	0.229
	0.27	0.631	0.631	0.21	0.584	0.586	0.15	0.491	0.589	0.12	0.348	0.513
	0.36	0.893	0.893	0.28	0.847	0.851	0.20	0.756	0.856	0.16	0.592	0.800
	0.45	0.985	0.985	0.35	0.972	0.974	0.25	0.931	0.974	0.20	0.809	0.957
	0.54	0.999	0.999	0.42	0.997	0.998	0.30	0.989	0.998	0.24	0.936	0.996

Çizelge 4.10 3^3 faktöriyel tasarımda hata terimlerinin SN dağılımına sahip olması durumunda F_{ABC} ve F_{ABC}^* test istatistiklerinin güçleri

n	$\lambda = 0$			$\lambda = 1$			$\lambda = 3$			$\lambda = 5$		
	d	F_{ABC}	F_{ABC}^*	d	F_{ABC}	F_{ABC}^*	d	F_{ABC}	F_{ABC}^*	d	F_{ABC}	F_{ABC}^*
6	0.00	0.049	0.049	0.00	0.053	0.053	0.00	0.048	0.046	0.00	0.052	0.049
	0.14	0.082	0.082	0.12	0.088	0.089	0.10	0.091	0.102	0.08	0.079	0.093
	0.28	0.213	0.213	0.24	0.235	0.234	0.20	0.249	0.296	0.16	0.184	0.240
	0.42	0.477	0.477	0.36	0.503	0.505	0.30	0.562	0.661	0.24	0.389	0.546
	0.56	0.774	0.774	0.48	0.806	0.810	0.40	0.853	0.920	0.32	0.682	0.853
	0.70	0.945	0.945	0.60	0.964	0.966	0.50	0.976	0.993	0.40	0.892	0.981
	0.84	0.993	0.993	0.72	0.996	0.996	0.60	0.999	0.999	0.48	0.980	0.998
8	0.00	0.051	0.051	0.00	0.048	0.048	0.00	0.049	0.046	0.00	0.052	0.049
	0.13	0.089	0.089	0.11	0.095	0.097	0.08	0.079	0.081	0.07	0.079	0.089
	0.26	0.246	0.246	0.22	0.259	0.257	0.16	0.223	0.261	0.14	0.185	0.265
	0.39	0.554	0.554	0.33	0.570	0.571	0.24	0.491	0.589	0.21	0.424	0.597
	0.52	0.848	0.848	0.44	0.878	0.879	0.32	0.795	0.876	0.28	0.699	0.890
	0.65	0.970	0.970	0.55	0.983	0.984	0.40	0.954	0.986	0.35	0.896	0.988
	0.78	0.998	0.998	0.66	0.999	0.999	0.48	0.994	0.999	0.42	0.983	0.999
10	0.00	0.048	0.048	0.00	0.049	0.049	0.00	0.051	0.049	0.00	0.049	0.044
	0.11	0.083	0.083	0.10	0.094	0.095	0.07	0.078	0.086	0.06	0.074	0.087
	0.22	0.224	0.224	0.20	0.277	0.276	0.14	0.213	0.251	0.12	0.170	0.253
	0.33	0.503	0.503	0.30	0.591	0.598	0.21	0.482	0.574	0.18	0.389	0.581
	0.44	0.797	0.797	0.40	0.887	0.893	0.28	0.785	0.873	0.24	0.653	0.873
	0.55	0.956	0.956	0.50	0.983	0.983	0.35	0.940	0.984	0.30	0.879	0.981
	0.66	0.997	0.997	0.60	0.999	0.999	0.42	0.991	0.999	0.36	0.972	0.999

Çizelge 4.8-4.10 incelendiğinde MML tahmin edicilerine dayalı önerilen test istatistiklerinin beklenildiği üzere $\lambda = 0$ hariç LS tahmin edicilerine dayalı test istatistiklerinden daha güçlü olduğu görülmektedir. $\lambda = 0$ durumunda SN dağılımı standart normal dağılıma indirgendiğinden LS ve MML tahmin edicilerine dayalı testlerin gücü aynıdır. λ arttıkça MML tahmin edicilerine dayalı testlerin gücünün LS tahmin edicilerine dayalı testlere kıyasla belirgin şekilde arttığı görülmektedir.

4.3 Dayanıklılık

Varsayılan modelin $SN(\mu = 0, \sigma = 1, \lambda = 2)$ ve gözlem sayısının $n = 10$ olduğu durumda aşağıdaki alternatif modeller ele alınmıştır.

Model 1. Dixon aykırı değer (outlier) modeli:

$$(n - r)SN(\mu = 0, \sigma = 1, \lambda = 2) + rSN(\mu = 0, \sigma = 2, \lambda = 2), r = \lceil 0.5 + 0.1n \rceil$$

Bu modelde r adet gözlem $SN(\mu = 0, \sigma = 2, \lambda = 2)$ dağılımından gelirken $(n - r)$ adet gözlem $SN(\mu = 0, \sigma = 1, \lambda = 2)$ dağılımından gelmektedir.

Model 2. Dağılımın yanlış belirlenmesi (misspecification):

Bu modelde gözlemler $SN(\mu = 0, \sigma = 1, \lambda = 3)$ dağılımından gelmektedir.

Model 3. Bulaşık (contamination) model:

$$0.90SN(\mu = 0, \sigma = 1, \lambda = 2) + 0.10IG(\mu = 1, \lambda = 0.7)$$

Bu modelde, gözlemlerin %90'ı $SN(\mu = 0, \sigma = 1, \lambda = 2)$ dağılımından, %10'u ise ortalaması 1 şekil parametresi 0.7 olan $IG(\mu = 1, \lambda = 0.7)$ gelmektedir.

Model 4. Karma (mixture) model:

$$0.90SN(\mu = 0, \sigma = 1, \lambda = 2) + 0.10SN(\mu = 0, \sigma = 1, \lambda = 5)$$

Bu modelde, gözlemlerin %90'ı $SN(\mu = 0, \sigma = 1, \lambda = 2)$ dağılımından, %10'u ise $SN(\mu = 0, \sigma = 1, \lambda = 5)$ dağılımından gelmektedir.

Çizelge 4.11'de hata terimlerinin SN dağılımına sahip olması durumunda LS tahmin edicilerine dayalı F_A , F_{AB} , F_{ABC} ve MML tahmin edicilerine dayalı F_A^* , F_{AB}^* , F_{ABC}^* test istatistiklerinin güç değerleri verilmiştir.

Çizelge 4.11 3^3 faktöriyel tasarımda hata terimlerinin SN dağılımına sahip olması durumunda Model 1,2,3 ve 4 için $F_A, F_{AB}, F_{ABC}, F_A^*, F_{AB}^*$ ve F_{ABC}^* testlerinin I. tip hataları ve güçleri

Model 1			Model 2			Model 3			Model 4		
d	F_A	F_A^*	d	F_A	F_A^*	d	F_A	F_A^*	d	F_A	F_A^*
0.00	0.042	0.033	0.000	0.059	0.042	0.00	0.048	0.052	0.00	0.048	0.045
0.04	0.058	0.057	0.034	0.094	0.095	0.04	0.102	0.114	0.04	0.088	0.093
0.08	0.184	0.209	0.068	0.233	0.236	0.08	0.235	0.274	0.08	0.269	0.284
0.12	0.401	0.453	0.102	0.442	0.468	0.12	0.476	0.532	0.12	0.531	0.569
0.16	0.653	0.711	0.136	0.701	0.758	0.16	0.744	0.817	0.16	0.784	0.827
0.20	0.831	0.878	0.170	0.867	0.912	0.20	0.860	0.928	0.20	0.943	0.963
0.24	0.945	0.972	0.204	0.974	0.989	0.24	0.967	0.995	0.24	0.989	0.995
d	F_{AB}	F_{AB}^*	d	F_{AB}	F_{AB}^*	d	F_{AB}	F_{AB}^*	d	F_{AB}	F_{AB}^*
0.00	0.035	0.033	0.00	0.045	0.036	0.00	0.059	0.054	0.00	0.049	0.051
0.06	0.080	0.082	0.05	0.090	0.078	0.06	0.098	0.103	0.05	0.083	0.089
0.12	0.179	0.199	0.10	0.237	0.241	0.12	0.236	0.266	0.10	0.202	0.216
0.18	0.413	0.474	0.15	0.450	0.506	0.18	0.496	0.579	0.15	0.424	0.464
0.24	0.752	0.807	0.20	0.774	0.821	0.24	0.799	0.875	0.20	0.693	0.742
0.30	0.917	0.953	0.25	0.930	0.962	0.30	0.939	0.980	0.25	0.901	0.929
0.36	0.984	0.993	0.30	0.987	0.994	0.36	0.982	0.996	0.30	0.975	0.987
d	F_{ABC}	F_{ABC}^*	d	F_{ABC}	F_{ABC}^*	d	F_{ABC}	F_{ABC}^*	d	F_{ABC}	F_{ABC}^*
0.00	0.031	0.030	0.00	0.046	0.057	0.00	0.055	0.048	0.00	0.049	0.050
0.07	0.048	0.049	0.06	0.065	0.074	0.08	0.084	0.078	0.07	0.074	0.070
0.14	0.115	0.123	0.12	0.168	0.190	0.16	0.212	0.248	0.14	0.196	0.201
0.21	0.255	0.296	0.18	0.332	0.388	0.24	0.457	0.549	0.21	0.419	0.463
0.28	0.492	0.555	0.24	0.618	0.674	0.32	0.758	0.847	0.28	0.706	0.753
0.35	0.740	0.815	0.30	0.825	0.886	0.40	0.928	0.971	0.35	0.913	0.942
0.42	0.908	0.949	0.36	0.961	0.990	0.48	0.983	0.997	0.42	0.984	0.992

İncelenen tüm durumlarda hem LS hem de MML tahmin edicilerine dayalı elde edilen istatistiklerin I. tip hata bakımından dayanıklı olduğu görülmektedir.

Sonuçlar, MML tahmin edicilerine dayalı F^* test istatistiklerinin, ana etkiler ve etkileşim etkilerini test etmede F test istatistiklerine göre belirgin biçimde daha güçlü ve dayanıklı olduğunu açıkça göstermektedir.

4.4 Dayanıklı 3^k Faktöriyel Tasarım

3^k faktöriyel tasarımlar her biri üç düzeye sahip olan k tane faktör tarafından bağımlı değişkenin etkilendiği tasarımlar olup, 3^2 ve 3^3 faktöriyel tasarımların en yaygın kullanılan 3^k faktöriyel tasarım modellerinden olduğu bilinmektedir. 3^k faktöriyel tasarımın model denklemi;

$$\begin{aligned}
y_{abc...ijkl} &= \mu + \tau_a + \gamma_b + \delta_c + \dots + \phi_i + \psi_j + \nu_k + (\tau\gamma)_{ab} + \dots + (\psi\nu)_{jk} \\
&\quad + (\tau\gamma\delta)_{abc} + \dots + (\phi\psi\nu)_{ijk} + \dots + (\tau\gamma\delta \dots \phi\psi\nu)_{abc...ijk} + \varepsilon_{abc...ijkl} \\
a, b, c, \dots, i, j, k &= 1, 2, 3; \quad l = 1, 2, \dots, n
\end{aligned} \tag{4.17}$$

şeklindedir. Burada; $\varepsilon_{abc...ijkl}$ SN dağılımına sahip rastgele hata terimlerini ifade eder.

Bölüm 4.1 ve 4.2’de detaylı olarak belirtilen parametre tahmini adımlarının aynısı takip edilerek elde edilen MML tahmin edicileri aşağıdaki gibi elde edilir;

$$\begin{aligned}
\hat{\mu} &= \hat{\mu}_{\dots\dots\dots} - \left(\frac{\lambda\Delta}{m}\right) \hat{\sigma}, \\
\hat{\tau}_a &= \hat{\mu}_{a\dots\dots\dots} - \hat{\mu}_{\dots\dots\dots}, \dots, \quad \hat{\nu}_k = \hat{\mu}_{\dots\dots k\dots} - \hat{\mu}_{\dots\dots\dots}, \\
(\widehat{\tau\gamma})_{ab} &= \hat{\mu}_{ab\dots\dots\dots} - \hat{\mu}_{a\dots\dots\dots} - \hat{\mu}_{\dots b\dots\dots\dots} + \hat{\mu}_{\dots\dots\dots}, \dots, \\
(\widehat{\psi\nu})_{jk} &= \hat{\mu}_{\dots\dots jk\dots} - \hat{\mu}_{\dots\dots j\dots} - \hat{\mu}_{\dots\dots\dots k\dots} + \hat{\mu}_{\dots\dots\dots}, \\
(\widehat{\tau\gamma\delta})_{abc} &= \hat{\mu}_{abc\dots\dots\dots} - \hat{\mu}_{ab\dots\dots\dots} - \hat{\mu}_{a\dots c\dots\dots\dots} - \hat{\mu}_{\dots bc\dots\dots\dots} + \hat{\mu}_{a\dots\dots\dots} + \hat{\mu}_{\dots b\dots\dots\dots} \quad (4.18) \\
&\quad + \hat{\mu}_{\dots c\dots\dots\dots} - \hat{\mu}_{\dots\dots\dots}, \dots, \\
(\widehat{\phi\psi\nu})_{ijk} &= \hat{\mu}_{\dots\dots ijk\dots} - \hat{\mu}_{\dots\dots ij\dots} - \hat{\mu}_{\dots\dots\dots i\dots k\dots} - \hat{\mu}_{\dots\dots\dots jk\dots} + \hat{\mu}_{\dots\dots\dots i\dots} + \hat{\mu}_{\dots\dots\dots j\dots} + \hat{\mu}_{\dots\dots\dots k\dots} \\
&\quad - \hat{\mu}_{\dots\dots\dots}, \\
&\quad \vdots \\
(\widehat{\tau\gamma\delta \dots \phi\psi\nu})_{abc...ijk} &= \hat{\mu}_{abc...ijk\dots} - \dots \pm \hat{\mu}_{\dots\dots\dots} \quad \text{ve } \hat{\sigma} = \frac{-B + \sqrt{B^2 + 4NC}}{2\sqrt{N(N-3^k)}}.
\end{aligned}$$

şeklinde elde edilir. Burada;

$$\begin{aligned}
B &= \lambda \sum_{a=1}^3 \sum_{b=1}^3 \sum_{c=1}^3 \dots \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^n \alpha_l \{y_{abc...ijk(l)} - \hat{\mu}_{abc...ijk}\}, \\
C &= \sum_{a=1}^3 \sum_{b=1}^3 \sum_{c=1}^3 \dots \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^n \theta_l \{y_{abc...ijk(l)} - \hat{\mu}_{abc...ijk}\}^2 \text{ ve} \\
N &= 3^k n
\end{aligned}$$

olarak tanımlanmaktadır.

Ayrıca, $\hat{\mu}_{a.....}$, $\hat{\mu}_{ab.....}$, $\dots$, $\hat{\mu}_{abc.....}$ vb. ifadelerin önceki bölümlerde tanımlanan ifadelerle benzer olduğu görülmektedir. Bu nedenle, kısalık olması bakımından bu bölümde tekrarlanmamıştır. α_l ve θ_l katsayıları Bölüm 4.1.1 ve Bölüm 4.2.1’de gösterildiği gibidir.

Ana etkilerin ve etkileşim etkilerinin anlamlı olup olmadığı;

$$H_{01}: \tau_a = 0, \dots, H_{0k}: \nu_k = 0,$$

$$H_{0(k+1)}: (\tau\gamma)_{ab} = 0, \dots, H_{0(k+d)}: (\psi\nu)_{jk} = 0,$$

$$H_{0(k+d+1)}: (\tau\gamma\delta)_{abc} = 0, \dots, H_{0(k+d+s)}: (\phi\psi\nu)_{ijk} = 0 \quad (4.19)$$

$\vdots$

$$H_{0T}: (\tau\gamma\delta \dots \phi\psi\nu)_{abc\dots ijk} = 0.$$

hipotezleri ile test edilir. Burada k ana etkilerin sayısını, $d = \binom{k}{2}$, $s = \binom{k}{3}$ ve $T = \sum_{r=1}^k \binom{k}{r}$ göstermektedir.

Ana etkilerin ve etkileşim etkileri hakkındaki hipotezleri test etmek için MML tahmin edicilerine dayalı test istatistikleri

$$F_A^* = \frac{3^{k-1}m \sum_{a=1}^3 \hat{\tau}_a^2}{2\hat{\sigma}^2}, \dots, F_K^* = \frac{3^{k-1}m \sum_{k=1}^3 \hat{\nu}_k^2}{2\hat{\sigma}^2},$$

$$F_{AB}^* = \frac{3^{k-2}m \sum_{a=1}^3 \sum_{b=1}^3 (\widehat{\tau\gamma})_{ab}^2}{2^2 \hat{\sigma}^2}, \dots, F_{JK}^* = \frac{3^{k-2}m \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 (\widehat{\psi\nu})_{jk}^2}{2^2 \hat{\sigma}^2}, \quad (4.20)$$

$$F_{ABC}^* = \frac{3^{k-3}m \sum_{a=1}^3 \sum_{b=1}^3 \sum_{c=1}^3 (\widehat{\tau\gamma\delta})_{abc}^2}{2^3 \hat{\sigma}^2}, \dots, F_{IJK}^* = \frac{3^{k-3}m \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 (\widehat{\phi\psi\nu})_{ijk}^2}{2^3 \hat{\sigma}^2},$$

⋮

$$F_{ABC...IJK}^* = \frac{m_{\Sigma_{a=1}^3 \Sigma_{b=1}^3 \Sigma_{c=1}^3 \dots \Sigma_{i=1}^3 \Sigma_{j=1}^3 \Sigma_{k=1}^3} (\tau \gamma \widehat{\delta \dots \phi \psi \nu})^2}{2^k \hat{\sigma}^2},$$

biçimindedir. Buradaki m ifadesi Bölüm 4.1.2 ve 4.2.2’de gösterildiği gibidir.

5. UYGULAMA

Bu bölümde hata terimlerinin dağılımının SN olduğu varsayımı altında 3^3 faktöriyel tasarım modeline ait parametrelerin MML tahmin edicilerinin ve bunlara dayalı test istatistiklerinin nasıl hesaplandığını gösterebilmek amacıyla yapay olarak üretilmiş edilmiş veri seti kullanılmıştır.

Veri seti oluşturulurken hata terimlerinin dağılımının $SN(\mu = 0, \sigma = 1, \lambda = 5)$ olduğu, üç faktörün her birinin üç düzeye sahip olduğu 3^3 faktöriyel tasarımda her bir hücre için örneklem hacmi $n = 8$ olarak alınmıştır. Daha sonra, A faktörünün birinci düzeyindeki gözlemlerden 0.12 çıkarılarak ve üçüncü düzeyindeki gözlemlere 0.12 eklenerek A faktörünün etkisi anlamlı hale getirilmiştir.

Çizelge 5.1 Monte Carlo simülasyonu yardımıyla yapay olarak oluşturulmuş veri seti

$l =$	1	2	3	4	5	6	7	8
y_{111l}	0.94076	1.82402	0.45390	0.24360	0.29616	-0.00857	1.46299	1.60721
y_{112l}	-0.07159	1.09816	0.59008	1.63085	1.59823	1.07739	0.53433	0.86774
y_{113l}	0.52236	0.87596	0.77235	1.59143	-0.20259	0.90618	0.77860	-0.05715
y_{121l}	0.28586	0.26604	0.55518	0.45987	0.78339	-0.20301	0.08271	0.05091
y_{122l}	0.95039	0.87465	1.48920	0.51073	0.82210	0.45923	0.47247	-0.02006
y_{123l}	1.82958	-0.05787	0.18501	0.28566	0.71530	0.63942	0.15379	0.72078
y_{131l}	-0.05228	1.39888	0.71806	0.47995	0.30788	0.40931	1.28019	0.23577
y_{132l}	0.62483	-0.38798	0.25132	0.10739	-0.19233	0.81800	1.22529	0.50407
y_{133l}	-0.24190	-0.28843	-0.40937	0.55014	2.49693	0.58843	1.67332	0.42334
y_{211l}	0.07271	2.63804	0.13475	1.90027	0.93597	1.49261	1.30421	0.69792
y_{212l}	0.56769	2.01064	0.96159	0.15793	0.67074	0.72389	1.14254	1.12185
y_{213l}	0.81450	0.98101	0.73412	0.42813	1.53694	0.61090	1.44376	1.01052
y_{221l}	1.52959	0.88139	0.18416	0.51567	1.63791	1.20914	2.36629	1.17290
y_{222l}	0.41243	0.79394	0.71449	-0.08624	2.41717	0.95093	0.65285	1.43707
y_{223l}	0.34534	0.70502	0.51157	0.43643	-0.17207	0.41514	1.20468	-0.13557
y_{231l}	1.39708	0.67572	1.86775	0.75874	1.15505	1.82046	0.98899	2.08457
y_{232l}	0.50292	0.31110	0.11533	1.25228	0.59871	0.63260	0.71677	1.63705
y_{233l}	0.29561	1.70925	0.37797	0.45124	0.85836	2.01860	0.53359	0.14207
y_{311l}	0.90694	0.35210	0.43893	0.48337	0.09438	0.51308	3.77557	0.85741
y_{312l}	1.57982	0.73708	0.00780	0.62315	1.64448	0.08713	0.80877	0.84469
y_{313l}	0.81798	0.25558	3.51811	0.77340	0.19627	0.42258	1.23949	0.73270
y_{321l}	0.49955	0.41549	0.99641	0.61780	0.57192	1.51218	0.81318	1.66778
y_{322l}	0.73376	0.74204	0.93096	1.00208	1.02982	0.24257	1.54391	0.65501
y_{323l}	1.41587	0.19940	1.09771	1.33149	0.50863	2.10126	1.43958	1.65729
y_{331l}	1.81404	1.31595	0.52121	0.38060	1.99278	1.32515	1.13335	0.13158
y_{332l}	0.53306	0.24601	2.02633	0.74805	0.90721	-0.03169	0.21236	0.85262
y_{333l}	1.82766	0.67857	0.58327	0.63276	1.11446	0.36983	1.77726	0.26252

Burada, ana etkiler ve etkileşim etkilerinin arasında anlamlı bir fark olup olmadığı;

$$H_{01}: \tau_1 = \tau_2 = \tau_3 = 0,$$

$$H_{02}: \gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = 0,$$

$$H_{03}: \delta_1 = \delta_2 = \delta_3 = 0,$$

$$H_{04}: (\tau\gamma)_{11} = (\tau\gamma)_{12} = (\tau\gamma)_{13} = (\tau\gamma)_{21} = \dots = (\tau\gamma)_{33} = 0, \quad (5.1)$$

$$H_{05}: (\tau\delta)_{11} = (\tau\delta)_{12} = (\tau\delta)_{13} = (\tau\delta)_{21} = \dots = (\tau\delta)_{33} = 0,$$

$$H_{06}: (\gamma\delta)_{11} = (\gamma\delta)_{12} = (\gamma\delta)_{13} = (\gamma\delta)_{21} = \dots = (\gamma\delta)_{33} = 0 \text{ ve}$$

$$H_{07}: (\tau\gamma\delta)_{111} = (\tau\gamma\delta)_{112} = (\tau\gamma\delta)_{113} = (\tau\gamma\delta)_{121} = \dots = (\tau\gamma\delta)_{333} = 0$$

hipotezleri yardımıyla sınanır.

μ ve σ parametrelerinin tahmin değerleri Çizelge 5.2'deki gibi elde edilmiştir.

Çizelge 5.2 μ ve σ parametrelerinin LS ve MML tahmin değerleri

	μ	σ
LS	-0.0025	1.0568
MML	0.0861	1.0237

Ayrıca 3^3 faktöriyel tasarım modelinin τ_1 , γ_j , δ_k , $(\tau\gamma)_{ij}$, $(\tau\delta)_{ik}$, $(\gamma\delta)_{jk}$ ve $(\tau\gamma\delta)_{ijk}$ ($i, j, k = 1, 2, 3$) parametrelerinin LS ve MML tahmin değerleri Çizelge 5.3'te verilmiştir.

Çizelge 5.3 Model parametrelerinin LS ve MML tahmin değerleri

	τ_1	τ_2	τ_3	γ_1	γ_2	γ_3	δ_1	δ_2	δ_3
LS	-0.21091	0.10757	0.10335	0.08036	-0.04463	-0.03573	0.09835	-0.06101	-0.03734
MML	-0.20589	0.10787	0.09802	0.03488	0.00232	-0.03720	0.07906	-0.03519	-0.04388
	$(\tau\gamma)_{11}$	$(\tau\gamma)_{12}$	$(\tau\gamma)_{13}$	$(\tau\gamma)_{21}$	$(\tau\gamma)_{22}$	$(\tau\gamma)_{23}$	$(\tau\gamma)_{31}$	$(\tau\gamma)_{32}$	$(\tau\gamma)_{33}$
LS	0.11176	-0.05580	-0.05596	-0.00836	-0.04974	0.05810	-0.10340	0.10554	-0.00214
MML	0.08677	0.01623	-0.10300	0.02199	-0.13861	0.11662	-0.10875	0.12238	-0.01363
	$(\tau\delta)_{11}$	$(\tau\delta)_{12}$	$(\tau\delta)_{13}$	$(\tau\delta)_{21}$	$(\tau\delta)_{22}$	$(\tau\delta)_{23}$	$(\tau\delta)_{31}$	$(\tau\delta)_{32}$	$(\tau\delta)_{33}$
LS	-0.13346	0.10738	0.02608	0.19569	-0.02019	-0.17549	-0.06222	-0.08719	0.14942
MML	-0.05142	0.08779	-0.03638	0.09804	-0.02653	-0.07151	-0.04662	-0.06126	0.10789
	$(\gamma\delta)_{11}$	$(\gamma\delta)_{12}$	$(\gamma\delta)_{13}$	$(\gamma\delta)_{21}$	$(\gamma\delta)_{22}$	$(\gamma\delta)_{23}$	$(\gamma\delta)_{31}$	$(\gamma\delta)_{32}$	$(\gamma\delta)_{33}$
LS	-0.02726	0.03196	-0.00470	-0.09169	0.10347	-0.01179	0.11894	-0.13543	0.01649
MML	-0.08955	0.03525	0.05431	-0.04601	0.08188	-0.03587	0.13557	-0.11713	-0.01843
	$(\tau\gamma\delta)_{111}$	$(\tau\gamma\delta)_{112}$	$(\tau\gamma\delta)_{113}$	$(\tau\gamma\delta)_{121}$	$(\tau\gamma\delta)_{122}$	$(\tau\gamma\delta)_{123}$	$(\tau\gamma\delta)_{131}$	$(\tau\gamma\delta)_{132}$	$(\tau\gamma\delta)_{133}$
LS	0.10936	0.03180	-0.14116	-0.10105	0.03202	0.06903	-0.00831	-0.06382	0.07212
MML	0.09590	0.02666	-0.12256	-0.13988	0.01633	0.12356	0.04398	-0.04299	-0.00099
	$(\tau\gamma\delta)_{211}$	$(\tau\gamma\delta)_{212}$	$(\tau\gamma\delta)_{213}$	$(\tau\gamma\delta)_{221}$	$(\tau\gamma\delta)_{222}$	$(\tau\gamma\delta)_{223}$	$(\tau\gamma\delta)_{231}$	$(\tau\gamma\delta)_{232}$	$(\tau\gamma\delta)_{233}$
LS	-0.12360	-0.03504	0.15864	0.14727	0.05180	-0.19907	-0.02367	-0.01677	0.04044
MML	-0.17691	0.00240	0.17451	0.13074	0.00696	-0.13769	0.04618	-0.00936	-0.03682
	$(\tau\gamma\delta)_{311}$	$(\tau\gamma\delta)_{312}$	$(\tau\gamma\delta)_{313}$	$(\tau\gamma\delta)_{321}$	$(\tau\gamma\delta)_{322}$	$(\tau\gamma\delta)_{323}$	$(\tau\gamma\delta)_{331}$	$(\tau\gamma\delta)_{332}$	$(\tau\gamma\delta)_{333}$
LS	0.01424	0.00324	-0.01748	-0.04622	-0.08382	0.13004	0.03198	0.08058	-0.11256
MML	0.08101	-0.02906	-0.05195	0.00915	-0.02328	0.01414	-0.09016	0.05234	0.03782

Elde edilen LS ve MML tahmin değerleri ile hesaplanan test istatistikleri değerleri ve bunlara karşılık gelen p -değerleri, kritik değerler ve serbestlik dereceleri Çizelge 5.4'te özetlenmiştir.

Çizelge 5.4 Test istatistiklerinin değerleri, ilgili p değerleri, kritik değerler ve serbestlik dereceleri

	A	B	C	AB	AC	BC	ABC
Test istatistiklerinin değerleri							
F	5.546	0.808	1.229	0.644	1.847	0.745	0.492
F^*	8.189	0.335	1.212	1.688	0.958	1.174	0.674
p-değerleri							
F	0.0046	0.4471	0.2949	0.6318	0.1216	0.5623	0.8609
F^*	0.0004	0.7155	0.3000	0.1545	0.4317	0.3234	0.7143
Kritik değerler							
	3.044	3.044	3.044	2.419	2.419	2.419	1.988
Serbestlik dereceleri							
	(v_1, v_8)	(v_2, v_8)	(v_3, v_8)	(v_4, v_8)	(v_5, v_8)	(v_6, v_8)	(v_7, v_8)
	(2,189)	(2,189)	(2,189)	(4,189)	(4,189)	(4,189)	(8,189)

Analiz sonuçları, F_A^* ve F_A testleri için p -değerlerinin nominal seviyesi $\alpha = 0.050$ değerinden oldukça küçük olduğunu, diğer testler için ise beklediği gibi $\alpha = 0.050$ değerinden oldukça yüksek olduğunu göstermektedir.

Bu nedenle, (5.1)'de verilen H_{01} hipotezi reddedilirken, diğer sıfır hipotezleri reddedilemez. Diğer bir deyişle, beklenildiği gibi A faktörünün düzeyleri arasında anlamlı bir fark vardır.

6. SONUÇ

Parametrelerin LS tahmin edicileri normal dağılım varsayımı altında en etkin tahmin edicilerdir. Ancak gerçek hayat problemlerinde hata terimlerinin dağılımı genellikle normal değildir. Normal dağılım varsayımının sağlanmadığı durumlarda LS tahmin edicilerinin ve bu tahmin edicilere dayalı test istatistiklerinin etkinlikleri hızla düşmektedir.

Bu çalışmada, hata terimlerinin dağılımının KumW ve SN olduğu varsayımı altında, 3^2 ve 3^3 faktöriyel tasarım model parametrelerinin MML tahmin edicileri ayrıntılı olarak elde edilmiştir. Elde edilen tahmin ediciler ve bu tahmin edicilere dayalı test istatistiklerinin performansları Monte Carlo simülasyonu yardımıyla normal teori tahmin edicileri ve testleri ile karşılaştırılmıştır.

Öncelikle, hata terimlerinin KumW dağılımına sahip olduğu varsayımı altında 3^2 ve 3^3 faktöriyel tasarım model parametrelerinin MML tahmin edicileri elde edilmiştir. Elde edilen MML tahmin edicileri ile geleneksel LS tahmin edicilerinin performansları, KumW dağılımının farklı şekil parametre değerleri ve farklı örneklem hacimleri altında Yan, MSE, RE ve DEF bakımından 10,000 tekrarlı Monte Carlo Simülasyon çalışması yardımıyla karşılaştırılmıştır. Sonuçlar, MML tahmin edicilerinin LS tahmin edicilerine göre daha etkin olduğunu göstermiştir.

Daha sonra, 3^2 ve 3^3 faktöriyel tasarım modellerinde ana etkiler ve etkileşim etkilerini test etmek amacıyla MML tahmin edicilerine dayalı test istatistikleri önerilmiş; bu istatistikler, LS tahmin edicilerine dayalı test istatistikleri ile farklı örneklem hacimleri ve şekil parametre değerleri altında I. tip hata oranları ve güçleri bakımından karşılaştırılmıştır. Elde edilen sonuçlara göre, MML tahmin edicilerine dayalı test istatistiklerinin daha üstün performans sergilediği görülmüştür.

Aynı şekilde, hata terimlerinin SN dağılımına sahip olduğu varsayımı altında 3^2 ve 3^3 faktöriyel tasarım model parametrelerinin MML tahmin edicileri elde edilerek, farklı çarpıklık katsayıları için MML tahmin edicilerinin LS yöntemiyle bulunan tahmin

edicilere göre daha etkin olduğu görülmüştür. Ayrıca, MML tahmin edicilerine dayalı test istatistiklerinin, LS tahmin edicilerine dayalı test istatistiklerine karşı daha güçlü olduğu Monte Carlo simülasyonu yardımıyla gösterilmiştir.

Elde edilen sonuçlar, 3^2 ve 3^3 faktöriyel tasarımda izlenen adımlar takip edilerek 3^k faktöriyel tasarıma genelleştirilmiştir. Ayrıca, önerilen testlerin I. tip hata ve etkinlik bakımından dayanıklılıkları Monte Carlo simülasyonu yardımıyla ayrıntılı olarak incelenmiş ve LS tahmin edicilerine dayalı test istatistiklerine göre daha etkin ve dayanıklı oldukları gösterilmiştir.

Uygulama kapsamında 3^3 faktöriyel tasarım modeli ele alınmış ve SN dağılımından yapay olarak üretilmiş veri seti kullanılarak model parametrelerinin MML tahminleri elde edilmiş ve önerilen test istatistiklerinin hesap değeri bulunmuştur.

Sonuç olarak bu çalışmada, hata terimlerinin dağılımının KumW ve SN olduğu durumlarda, MML yöntemiyle elde edilen tahmin edicilerin geleneksel LS tahmin edicilerine göre daha etkin olduğu ve MML tahmin edicilerine dayalı test istatistiklerinin ise LS tahmin edicilerine dayalı test istatistiklerine göre daha güçlü ve daha dayanıklı olduğu tespit edilmiştir.

KAYNAKLAR

- Antony, J. 2014. Design of Experiments for Engineers and Scientists. Elsevier, 294, London.
- Azzalini, A. 1985. A Class of Distributions which Includes the Normal Ones. Scand J Statist, 12(1), 171-178.
- Box, G.E.P. 1953. Nonnormality and tests on variances. Biometrika, 40, 318-335.
- Box, G.E.P. and Tiao, G.C. 1964. A note on criterion robustness and inference robustness. Biometrika, 51, 169-173.
- Box, G.E.P. and Hunter, J.S. 2005. Statistics and Experimenters. Wiley, 633, New York.
- Cordeiro, G. M., Ortega, E. M. M., and Nadarajah, S. 2010. The Kumaraswamy Weibull distribution with application to failure data. Journal of the Franklin Institute, 347(8), 1399–1429.
- Cordeiro, G. M. and Castro, M. 2011. A new family of generalized distributions. Journal of Statistical Computation and Simulation, 81(7), 883-898.
- Cox, D.R. and Reid, N. 2000. The Theory of the Design of Experiments. CRC Press, 86, Florida.
- Elveback, L.R., Guillier, C.L. and Keating, F.R. 1970. Health, Normality and the Ghost of Gauss, J. American Medical Assoc., 211, 69-75.
- Fernanda F. and Gomes M.I. 2013. The Skew-Normal Distribution in SPC, Revstat Statistical Journal, 11(1); 83-104.
- Fisher, R.A. 1935. The Design of Experiments, Hafner Press, 256, USA.
- Geary, R.C. 1947. Testing for normality, Biometrika, 34, 209-242.
- Gomez, K. A. and Gomez, A. A. 1984. Statistical Procedures for Agricultural Research (2nd ed.). John Wiley and Sons, 680, New York.
- Hicks, C.R. 1982. Fundamental Concepts in the Design of Experiments, Saunders College Publishing, 377, Orlando, Florida.
- Hinkelmann, K. and Kempthorne O. 2005. Design and Analysis of Experiments: Vol. 2 Advanced Experimental Design. John Wiley and Sons, 780, New York.
- Huber, P. J. 1981. Robust Statistics, Jonh Wiley, New York.
- Kutner A.H., Nachtsheim CJ., Neter J. ve Li W. 2004. Applied Linear Statistical Models (5th Edition). McGraw-Hill, 1296, New York.
- Malhotra, N. K. 2019. Marketing Research: An Applied Orientation (7th ed.). Pearson. 793, United Kingdom.
- Montgomery, D.C. 2017. The Design and Analysis of Experiments. Wiley, 734, New York.
- Onyiah, L.C. 2008. Design and Analysis of Experiments: Classical and Regression Approaches with SAS. CRC Press, 822, Florida.

- Pearson, E.S. 1932. The analysis of variance in cases of nonnormal variation, *Biometrika*, 23, 114-133.
- Senoglu, B. and Tiku, M.L. 2001. Analysis of variance in experimental design with nonnormal error distributions, *Communication in Statistics-Theory and Methods*, Vol: 30, pp: 1335-1352.
- Senoglu, B. and Tiku, M.L. 2002. Linear contrasts in experimental design with nonidentical error distributions, *Biometrical Journal*, 44(3), 359–374.
- Şenoğlu, B. 2005. Robust 2^k factorial design with weibull error distributions. *Journal of Applied Statistics*, 32(10), 1051–1066.
- Şenoğlu, B. 2007. Robust estimation and hypothesis testing in 2^k factorial design. *Communications Faculty of Sciences University of Ankara Series A1 Mathematics and Statistics*, 56(2), 39-50.
- Şenoğlu B., Acıtaş Ş. ve Kasap P. 2012. Robust 2^k factorial designs: non-normal symmetric distribution. *Pakistan Journal of Statistics*, 28(1), 93-114.
- Şenoğlu, B. ve Acıtaş, Ş. 2014. İstatistiksel Deney Tasarımı: Sabit Etkili Modeller. Nobel Akademik Yayıncılık, 392, Ankara.
- Tabachnick, B.G. and Fidell, L.S. 2007. *Experimental Designs Using ANOVA*. Duxbury, 724, California.
- Tiku, M.L. 1967. Estimating the mean and standard deviation from censored normal samples. *Biometrika*, 54(1), 155-165.
- Tiku, M.L. 1968. Estimating the parameters of log-normal distribution from censored samples, *J. Amer. Stat Assoc.*, 63, 134-140.
- Tiku, M.L., Tan, W.Y., Balakrishnan, N. 1986. *Robust Inference*, Marcel Dekker, New York, USA.
- Vaughan, D.C. 1992. On the Tiku-Suresh method of estimation, *Commun. Stat.-Theory Meth.*, Vol: 22, pp: 231-235.
- Yates, F. 1937. *Design and Analysis of Factorial Experiments*. Imperial Bureau of Soil Sciences, 85, London.
- Wu, C.F.J. and Hamada, M.S. 2021. *Experiments Planning, Analysis and Optimization* (3rd Edition). Wiley, 645, USA.