

**ANKARA ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**KONTAK MANİFOLDLARDA ESAS FORMLAR VE YÖNLENDİRME**

**İsmail GÖK**

**MATEMATİK ANA BİLİM DALI**

**ANKARA**

**2005**

**Her Hakkı Saklıdır.**

Prof. Dr. Hilmi HACISALİHOĞLU danışmanlığında İsmail GÖK tarafından hazırlanan bu çalışma 22/07/2005 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Başkan : Prof. Dr. Hilmi HACISALİHOĞLU

Üye : Prof. Dr. Baki KARLIĞA

Üye : Doç. Dr. M. Kemal SAĞEL

Yukarıdaki sonucu onaylarım.

Prof. Dr. Ülkü MEHMETOĞLU

Enstitü Müdürü

## ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

### KONTAK MANİFOLDLARDA ESAS FORMLAR VE YÖNLENDİRME

İsmail GÖK

Ankara Üniversitesi  
Fen Bilimleri Enstitüsü  
Matematik Ana Bilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. H. Hilmi HACISALİHOĞLU

Bu yüksek lisans tezi dört bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölüm giriş bölümüne ayrılmıştır.

İkinci bölümde lineer dönüşüm, simetrik bi-lineer formlar, Rieman manifoldlar, Riemann koneksiyonu, ikinci temel form ve yönlendirme kavramları tanımlanmıştır.

Üçüncü bölümde ise ,sırasıyla, kontak manifoldlar, hemen hemen kontak manifoldlar, hemen hemen kontak metrik manifoldlar, kontak manifoldlarda ikinci temel form, hemen hemen kontak manifoldların torsiyon tensörü, K-kontak manifoldlar kavramları örneklerle incelenmiştir.

Son bölümde ise kontak geometri de yönlendirme kavramı incelenmiştir.

**2005 , 98 sayfa**

**ANAHTAR KELİMELER:** Kontak Formlar, Kontak Manifoldlar, Kontak Dönüşümler, Kontak Yapı, Temel Formlar, Kompleks Yapı, Torsiyon Tensörü, Yönlendirme.

## ABSTRACT

Master Thesis

### FUNDAMENTAL FORMS AND ORIENTATION ON CONTACT MANIFOLDS

İsmail GÖK

Ankara University  
Graduate School of Natural and Applied Sciences  
Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. H. Hilmi HACISALİHOĞLU

This thesis consists of four chapters.

The first chapter has been devoted to the introduction.

In the second chapter, linear transformation, symmetric bi-linear forms, Riemann manifolds, Riemannian connections, second fundamental form and orientation have been recalled.

In the third chapter, contact manifolds, almost contact manifolds, contact metric manifolds, torsion tensor of almost contact manifolds, k-contact manifolds have been dealt by giving examples.

In the last chapter, orientation of contact geometry has been recalled.

**2005, 98 pages**

**Key Words:** Contact forms, Contact manifolds, Contact transformation, Contact structures, Fundamental forms, Complex structure, Torsion tensor, Orientation.

## TEŞEKKÜR

Bu alıŐma konusunu bana veren ve araŐtırmalarımın her aŐamasında beni yÖnlendiren danıŐmanım, Sayın Prof. Dr. H. Hilmi HACISALİHOĞLU ( Ankara Üniversitesi Fen Fakóltesi )' na, öneri ve sorgulamalarıyla yardımını gördüğüm Sayın Prof. Dr. Yusuf YAYLI ( Ankara Üniversitesi Fen Fakóltesi )' ya, manevi desteğini esirgemeyen Sayın Abdullah ALTIN ( Ankara Üniversitesi Fen Fakóltesi )' a, çalıŐmalarımda yardımlarını esirgemeyen Sayın ArŐ. Gör. etin CAMCI ( Ankara Üniversitesi Fen Fakóltesi )' ya, Sayın ArŐ. Gör. Abdullah YILDIRIM ( Ankara Üniversitesi Fen Fakóltesi )' a, Sayın Dr. Hüseyin KOCAYİĞİT ' e en içten saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

Bu çalıŐmalarım sırasında benden maddi yardımlarını esirgemeyen TÜBİTAK' a saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

Tezimi aldığım günden bu yana bana anlayıŐ gösteren ve yardımını esirgemeyen sevgili eŐim Özlem GÖK' e en içten sevgi ve teşekkürlerimi sunarım.

İsmail GÖK

Ankara, Temmuz 2005

## İÇİNDEKİLER

ÖZET.....	i
ABSTRACT.....	ii
TEŞEKKÜR.....	iii
SİMGELER DİZİNİ.....	v
<b>1.GİRİŞ</b> .....	1
<b>2. TEMEL KAVRAMLAR</b> .....	2
2.1. Lineer Döşümler ve Simetrik Bi-lineer Formlar.....	2
2.2. Riemann Manifoldu, Riemann Koneksiyonu, İkinci Temel Form .....	5
2.3. Bir Yüzeyin Yönlendirilmesi .....	9
<b>3. KONTAK GEOMETRİ</b> .....	12
3.1. Kontak Manifoldlar.....	12
3.2. Hemen Hemen Kontak Manifoldlar.....	34
3.3. Hemen Hemen Kontak Metrik Manifold .....	42
3.4 Kontak Manifoldlarda İkinci Temel Form.....	53
3.5. Hemen Hemen Kontak Manifoldların Torsiyon Tensörü .....	57
3.6. K-Kontak Manifoldları.....	82
<b>4. MANİFOLDLAR ÜZERİNDE YÖNLENDİRME</b> .....	92
4.1. Genel Anlamda Bir Manifoldun Yönlendirilmesi.....	92
4.2 Kontak Manifoldlarda Yönlendirme .....	95
KAYNAKLAR .....	97
ÖZGEÇMİŞ .....	98

## SİMGELER DİZİNİ

$E^n$	n boyutlu Öklid uzayı
$M^n$	n boyutlu Riemann manifoldu
$\eta$	1-form
$g$	Riemann metrik tensörü
$D$	Riemann konneksiyonu
$\Gamma$	Adi grup
$\Gamma_0$	Alt grubumsu
$C^\infty$	Diferensiyellenebilme
$[ , ]$	Lie (Bracket) Operatörü
$A_\xi$	Şekil operatörü
$B$	İkinci temel form
$\ V\ $	$V$ vektörünün uzunluğu
$R$	$M$ nin Riemann eğrilik tensörü
$\chi(M)$	$M$ nin teğet vektör alanlarının uzayı
$\chi(M)^\perp$	$\chi(M)$ nin duali
$\nabla^\perp$	$M$ nin $T^\perp(M)$ normal demetindeki konneksiyon

## 1. GİRİŞ

Bu tezde tek boyutlu manifoldlar sınıfında önemli bir yeri olan kontak manifoldların bazı özelliklerini inceleyeceğiz.  $\eta$  1-form olmak üzere  $\eta \wedge (d\eta)^n \neq 0$  koşulunu sağlayan  $\eta$  1-formuna kontak form denir. Bu yüzeyler teorisinde iyi bilinen hacim elementine karşılık gelir ve  $W = EG - F^2$  ifadesinin karşıtıdır. Ayrıca kontak manifoldlar içerisindeki bazı tanım ve teoremleri ifade edeceğiz.

## 2. TEMEL KAVRAMLAR

### 2.1. Lineer Dönüşümler ve Simetrik Bi-lineer Formlar

**Tanım 2.1.1.**  $V_1, V_2, \dots, V_r$  ve  $W$  uzayları aynı  $K$  cismi üzerinde tanımlı birer vektör uzayı ve kartezyen çarpımları da  $V_1 \times V_2 \times \dots \times V_r$  olsun.

$$L: V_1 \times V_2 \times \dots \times V_r \longrightarrow W$$

dönüşümü için aşağıdaki özellik varsa bu dönüşüme **r-lineer dönüşüm** denir (Hacısalihoglu 1980).

$\alpha_1 \in V_1, \alpha_2 \in V_2, \dots, \alpha_{i-1} \in V_{i-1}, a\varepsilon + b\mu \in V_i, \alpha_{i+1} \in V_{i+1}, \dots, \alpha_r \in V_r$  ve  $\forall a, b \in K$  için

$$\begin{aligned} L(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{i-1}, a\varepsilon + b\mu, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_r) &= aL(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{i-1}, \varepsilon, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_r) \\ &+ bL(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{i-1}, \mu, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_r) \end{aligned} \quad (2.1.1)$$

#### Özel Haller:

**i)**  $V$  ve  $W$  aynı  $K$  cismi üzerinde tanımlı vektör uzayları ve  $L, V$  den  $W$  ya tanımlı bir fonksiyon olsun.  $L$  fonksiyonu aşağıdaki iki önermeyi sağlarsa  $L$  ye bir **lineer dönüşüm** denir.

a)  $\forall \alpha, \beta \in V$  için  $L(\alpha + \beta) = L(\alpha) + L(\beta)$

b)  $\forall \alpha \in V$  ve  $\forall c \in K$  için  $L(c\alpha) = cL(\alpha)$

**ii)**  $V_1, V_2$  ve  $W$  aynı  $K$  cismi üzerinde tanımlı vektör uzayları ve  $L, V_1 \times V_2$  den  $W$  ya tanımlı bir fonksiyon olsun.

$$L: V_1 \times V_2 \rightarrow W$$

dönüşümü,  $\forall \alpha_1, \alpha_2, \alpha \in V_1$  ve  $\forall \beta_1, \beta_2, \beta \in V_2$  ve  $\forall a_1, a_2 \in \mathbb{F}$  için

$$L(a_1 x_1 + a_2 x_2, y) = a_1 L(x_1, y) + a_2 L(x_2, y)$$

$$L(x, a_1 y_1 + a_2 y_2) = a_1 L(x, y_1) + a_2 L(x, y_2)$$

biçiminde tanımlı ise  $L$ 'ye  $V_1 \times V_2$  üzerinde tanımlı **bi-lineer dönüşüm** adı verilir.

$V$  nin seçilmiş bir bazı  $\{V_1, V_2, \dots, V_n\}$  ve

$$L(V_i, V_j) = a_{ij} \quad (2.1.1)$$

olsun. Bu durumda  $L$  bi-lineer formuna karşılık gelen matris

$$L = \begin{bmatrix} L(V_1, V_1) & L(V_1, V_2) & \dots & L(V_1, V_n) \\ L(V_2, V_1) & L(V_2, V_2) & \dots & L(V_2, V_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ L(V_n, V_1) & L(V_n, V_2) & \dots & L(V_n, V_n) \end{bmatrix}_{n \times n} \quad (2.1.2)$$

olur (Hacısalihoglu 1980).

**Teorem 2.1.1.**  $A: V \longrightarrow W$  dönüşümü sonlu boyutlu bir  $V$  vektör uzayından bir  $W$  vektör uzayına bir lineer dönüşüm ise

$$\text{rank}A + \text{sıfırlık}A = \text{boy}V \quad (2.1.3)$$

dır (Hacısalihoglu 1985).

**Teorem 2.1.2.**  $V$  ve  $W$  aynı  $F$  cismi üzerinde  $n$ -boyutlu birer vektör uzayı olsunlar.  
Bir

$$A: V \longrightarrow W$$

lineer dönüşümü için aşağıdaki önermeler denktir.

- 1)  $A: V \longrightarrow W$  bir lineer izomorfizmdir.
  - 2)  $A$  injektiftir.
  - 3)  $\forall \alpha \in V$  için  $A(\alpha) = 0 \Rightarrow \alpha = 0$
  - 4)  $A$  nın sıfırlık derecesi =0
  - 5)  $rank A = 0$
  - 6)  $A$  örten
- dir (Hacısalıhoğlu 1985) .

**Tanım 2.1.2.** Metrik tensörü  $g$  olan Riemann manifoldu  $M$  olsun. Bir  $X_p \in T_M(P)$  tanjant vektörünün **normu(uzunluğu)**

$$\|X_p\| = \sqrt{g(X_p, X_p)} \quad (2.1.4)$$

şeklindedir (Hacısalıhoğlu 1980).

**Tanım 2.1.3.**  $V$  bir reel vektör uzayı olsun.

$$L: V \times V \xrightarrow{\text{bi-linear}} \square$$

dönüşümü  $\forall X, Y \in V$  için

$$L(X, Y) = L(Y, X) \quad (2.1.6)$$

oluyorsa  $L$  dönüşümüne **simetrik bi-lineer form** denir (Hacısalıhoğlu 1980).

**Tanım 2.1.4.**  $V$  bir reel vektör uzayı olsun.  $V$  üzerinde simetrik bi-lineer dönüşüm  $L$  olmak üzere sıfırdan farklı  $\forall \alpha \in V$  için

$$L(\alpha, \alpha) > 0 \quad (2.1.7)$$

ve  $\forall \alpha, \beta \in V$  için

$$L(\alpha, \beta) = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0 \quad (2.1.8)$$

oluyorsa  $L$  ye **pozitif tanımlıdır** denir (Hacısalıhoğlu 1985) .

**Tanım 2.1.5.**  $V$  bir reel vektör uzayı olsun.  $V$  üzerinde simetrik bi-lineer dönüşüm  $L$  olmak üzere  $\forall \alpha \in V$  için

$$L(\alpha, \alpha) = 0 \Rightarrow \alpha = 0 \quad (2.1.8)$$

oluyorsa  $L$  ye **non-dejeneredir** denir (Hacısalıhoğlu 1985) .

## 2.2. Riemann Manifoldu, Riemann Koneksiyonu, İkinci Temel Form

**Tanım 2.2.1.**  $M$  bir  $C^\infty$  manifold olsun.  $M$  üzerinde tanımlı bir  $g$  simetrik bi-lineer formu pozitif tanımlı ise

$$g : \chi(M) \times \chi(M) \rightarrow C^\infty(M, \mathbb{R}) \quad (2.2.1)$$

şeklinde tanımlı  $(0,2)$  tipindeki  $g$  metrik tensörüne  $M$  de **Riemann metriği** adı verilir (Hacısalıhoğlu 1980).

**Tanım 2.2.2.** Bir  $C^\infty$   $M$  manifoldu üzerinde bir  $g$  Riemann metriği tanımlanabiliyorsa  $(M, g)$  ikilisine bir **Riemann manifoldu** denir.

Eğer  $g$  Riemann metriğinde pozitif tanımlılık aksiyomu yerine non-dejenere aksiyomu alınırsa  $(M, g)$  ikilisine **yarı-Riemann manifoldu** denir (Hacısalıhoğlu 2003) .

**Tanım 2.2.3.**  $V$  vektör uzayının ortonormal bir bazı  $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  olsun.

$$\varepsilon_i = g(e_i, e_i) \quad (2.2.2)$$

olmak üzere  $\forall X \in V$  vektörü

$$X = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i g(X, e_i) e_i \quad (2.2.3)$$

olacak şekilde tek türlü yazılabilir (O'Neill 1983).

**Tanım 2.2.4.** Bir Riemann manifoldu  $M$  ve  $M$  üzerinde bir Riemann koneksiyonu  $D$  olsun.  $D$ 'nin  $M$ 'ye ait bir bölge üzerindeki  $\forall X, Y, Z \in \chi(M)$  ve  $\forall f, h \in C^\infty(M, \square)$  için,

$$D: \chi(M) \times \chi(M) \rightarrow \chi(M)$$

$$(X, Y) \rightarrow D(X, Y) = D_X Y$$

bi-lineer dönüşümü

$$i) D_X(Y + Z) = D_X Y + D_X Z \quad (2.2.4)$$

$$ii) D_{X+Y} Z = D_X Z + D_Y Z \quad (2.2.5)$$

$$iii) D_{fX} Y = f D_X Y \quad (2.2.6)$$

$$iV) D_X(fY) = f D_X Y + X(f)Y \quad (2.2.7)$$

özelliklerini sağlıyorsa  $D$  ye  $M$  üzerinden tanımlı bir afin koneksiyon veya kovaryant türev adı verilir (Hacısalıhoğlu 2003) .

**Tanım 2.2.5.**  $(M, g)$  bir Riemann manifoldu ve  $D$  de  $M$  üzerinde tanımlı bir afin olsun. O zaman  $\forall X, Y, Z \in \chi(M)$  olmak üzere  $D$  dönüşümü

$$i) D_X Y - D_Y X = [X, Y] \quad (\text{zero tensör özelliği}) \quad (2.2.8)$$

$$ii) Zg(X, Y) = g(D_Z X, Y) + g(X, D_Z Y) \quad (D \text{ 'nin metrikle bağdaşabilme özelliği}) \quad (2.2.9)$$

şartlarını sağlıyorsa  $D$  ye  $M$  nin **Levi-Civita koneksiyonu** denir (Hacısalıhoğlu 2003).

**Teorem 2.2.1.** Bir Riemann (veya yarı Riemann) manifoldu üzerinde bir tek Riemann koneksiyonu vardır (Hacısalıhoğlu 2003).

**Tanım 2.2.6.**  $M$  bir Riemann manifoldu ve  $\bar{M} \subset M$  nin alt manifoldu olsun.  $M$  ve  $\bar{M}$  nin Riemann koneksiyonları, sırasıyla,  $D$  ve  $\bar{D}$  olmak üzere

$$V : \chi(\bar{M}) \times \chi(\bar{M}) \rightarrow \chi(\bar{M})^\perp$$

$\chi(\bar{M})^\perp, \chi(\bar{M})$  in ortogonal komplemanı olmak üzere

$$(D_X Y) = \bar{D}_X Y + V(X, Y) \quad (2.2.10)$$

denkleminde **Genelleştirilmiş Gauss Denklemi** denir (Hacısalıhoğlu 2003).

**Tanım 2.2.7.** n-boyutlu bir Riemann manifoldu  $M$  ve  $M$  nin k-boyutlu alt manifoldu  $\bar{M}$  olsun. O zaman  $\chi(\bar{M})^\perp$  in

$$\psi = \{N_1, N_2, \dots, N_{n-k}\}$$

ortonormal bazı yardımıyla,  $\forall X, Y, Z \in \chi(\bar{M})$  için,

$$B_i(X, Y) = \langle V(X, Y), N_i \rangle \quad ; \quad 1 \leq i \leq n-k$$

$$V(X, Y) = \sum_{i=1}^{n-k} B_i(X, Y) N_i \quad (2.2.11)$$

şeklinde tanımlı  $B_i$  bi-linear formlarına  $\overline{M}$  nin  $\psi$  ye göre **ikinci temel formları** denir.

Eğer  $V = 0$  ise  $M$  ye **total geodeziktir** denir (Hacısalıhoğlu 2003).

**Tanım 2.2.8.**  $\overline{M}$  ve  $M$  ,sırasıyla,  $n$  ve  $n+k$  boyutlu Riemann manifoldları olmak üzere  $\overline{M}$  ,  $M$  nin alt manifoldu olsun.  $M$  de normal bir birim vektör alanı  $\varepsilon$  olsun.  $D_X \varepsilon$  nin teğet ve normal bileşenleri, sırasıyla,  $-A_\varepsilon(X)$  ve  $\nabla_X^\perp$  olmak üzere ,

$$A: \chi(M) \times \chi^\perp(M) \longrightarrow \chi(M)$$

dönüşümü iyi tanımlıdır. Böylece ;

$$D_X \varepsilon = -A_\varepsilon(X) + \nabla_X^\perp \varepsilon \quad (2.2.12)$$

biçiminde tanımlı denkleme **Weingarten denklemi** adı verilir. Burada  $A_\varepsilon$  ya **şekil operatörü**,  $\nabla^\perp$  e de  $M$  nin  $T^\perp(M)$  **normal demetindeki koneksiyon** adı verilir.  $M$  nin şekil operatörü  $A_\varepsilon$  ile ikinci temel form  $V$  arasında

$$g(A_\varepsilon(X), Y) = \square g(V(X, Y), \varepsilon) \quad (2.2.13)$$

bağıntısı vardır (Hacısalıhoğlu 2003).

### 2.3. Bir Yüzeyin Yönlendirilmesi

**Tanım 2.3.1.**  $n$  boyutlu  $V$  vektör uzayının, iki bazı, sırasıyla,  $\varphi$  ve  $\varphi'$  olsun.

$$\varphi = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\} \quad \text{ve} \quad \varphi' = \{\alpha'_1, \alpha'_2, \dots, \alpha'_n\}$$

eşitlikleriyle verilmiş olsun.

$$\alpha'_j = \sum_{i=1}^n p_{ij} \alpha_i \quad (2.3.1)$$

şeklinde tanımlı  $[p_{ij}]_{n \times n}$  matrisine,  $\varphi'$  tabanının  $\varphi$  tabanına göre matrisi denir.

$\varphi'$  ve  $\varphi$  tabanına göre matrisi  $P'$  olsun.  $P$  matrisinin tersi mevcut ve

$$P^{-1} = P'$$

olur (Sabuncuoğlu 2004).

**Tanım 2.3.2.**  $M$  yüzeyinin basit yüzeylerden oluşan bir örtüsü, bu basit yüzeylerin pozitif yönlü birim dik vektör alanları, basit yüzeylerin arakesit noktalarında çakışacak biçimde bulunabiliyorsa,  $M$  yüzeyi **yönlendirilebilir yüzeydir** denir (Sabuncuoğlu 2004).

**Teorem 2.3.1.**  $M$  yüzeyinin basit yüzeylerden oluşan bir örtüsünde,

$$\varphi(U) \cap \psi(H) \neq \emptyset$$

koşulunu sağlayan  $\varphi(U)$  ve  $\psi(H)$  basit yüzeylerini göz önüne alalım. Bu basit yüzeylerin pozitif yönlü birim dik vektör alanlarının, basit yüzeylerin arakesit noktalarında çakışması için gerek ve yeter koşul,  $\varphi(U)$  yüzeyinin  $\{\partial_1, \partial_2\}$  çatı alanı ile

$\psi(H)$  yüzeyinin  $\{\bar{\partial}_1, \bar{\partial}_2\}$  çatı alanının ortak noktalarda çakışmasıdır (Sabuncuoğlu 2004).

**Teorem 2.3.2.** Bir  $M$  manifoldunun yönlendirilebilir olması için gerek ve yeter şart  $M$  nin  $\{U_x, U_x\}$  yönlendirilmiş koordinat koşuluna sahip olmasıdır. (Sabuncuoğlu 2004).

**Tanım 2.3.3.**  $M$  üzerinde sıfırdan farklı bir  $C^\infty$   $n$ -form  $\omega$  mevcut ise  $M$  bir  $n$ -boyutlu yönlendirilebilir manifolddur.  $M$  yönlendirilmiş ise  $M$  üzerinde sıfırdan farklı bir  $\omega$   $n$ -formu seçeriz ve  $M$  nin  $\omega$  ile yönlendirilmiş olduğunu ve  $M$  nin yönünün  $\omega$  olduğunu söyleyebiliriz. O zaman  $\forall P \in M$  için  $T_M(P)$  deki bir sıralanmış  $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n\}$  bazı

$$\omega = b \{\bar{e}_1^* \wedge \bar{e}_2^* \wedge \dots \wedge \bar{e}_n^*\}$$

daki  $b > 0$  ise manifold pozitif yönlüdür. Eğer  $M$  yönlendirilmiş ve  $\{\bar{e}_1^*, \bar{e}_2^*, \dots, \bar{e}_n^*\}$  ve  $T_M(P)$  nin pozitif yönlü bir bazı ise  $T_M(P)$  deki

$$V_j = \sum_{i=1}^n b_{ij} \bar{e}_i^* \quad ; \quad 1 \leq i \leq n$$

tanjant vektörlerinden oluşan bir diğer baz da pozitif yönlüdür.  $\Leftrightarrow \det [b_{ij}] > 0$

Örneğin  $E^n$  Öklit uzayı yönlendirilebilirdir.

$$u_i : E^n \longrightarrow \mathbb{R}^n \quad ; \quad 1 \leq i \leq n$$

doğal koordinat fonksiyonlarını göstermek üzere

$$\omega = \{du_1 \wedge du_2 \wedge \dots \wedge du_n\}$$

seçmek üzere  $E^n$  yi yönlendirmiş oluruz. Böylece topolojik bir sonuç olarak  $E^n$  deki kapalı yüzeyler yönlendirilebilir.

$M$  ve  $\overline{M}$  yönlendirilmiş iki  $n$ – manifold olsunlar. Bir singüler olmayan

$$f : M \xrightarrow{C^\infty} \overline{M}$$

Eğer  $f_*$  türev dönüşümü  $T_M$  deki pozitif yönlü bazları  $T_{\overline{M}}$  deki pozitif yönlü bazlara dönüştürüyorsa  $f_*$  dönüşümüne **yönü koruyordur** denir (Hacısalihoglu 2003) .

**Tanım 2.3.4.**  $M$  yönlendirilmiş bir Riemann  $n$ – manifold olsun.  $T_M(P)$  de pozitif yönlü bir ortonormal baz  $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$  ve buna dual olan bazda  $\{\vec{e}_1^*, \vec{e}_2^*, \dots, \vec{e}_n^*\}$  olsun.  $\forall P \in M$  için  $V|_P = \vec{e}_1^* \wedge \dots \wedge \vec{e}_n^*$  olarak tanımlanan  $V$   $n$ –formunu ele alalım.  $V$   $n$ – formu özel bazların seçilişinden bağımsız olduğu için **iyi tanımlanmıştır** denir ve ayrıca da  $M$  üzerinde bir  $C^\infty$  formudur.  $V$   $n$ – formuna  $M$  nin **hacim elementi** denir (Hacısalihoglu 2003) .

### 3. KONTAK GEOMETRİ

#### 3.1. Kontak Manifolddar

**Tanım 3.1.1.**  $(2n+1)$ -boyutlu diferensiyellenebilir bir Riemann manifoldu  $M$  olsun.  $M$  üzerinde her noktada,

$$\eta \wedge (d\eta)^n \neq 0 \quad (3.1.1)$$

koşulunu sağlayan bir  $\eta$  diferensiyel 1- formu varsa  $\eta$  ya **kontak form**,  $(M, \eta)$  ikilisine de **kontak manifold** denir. Burada  $\eta \wedge (d\eta)^n \neq 0$  bağıntısı  $M$  manifoldu üzerinde bir hacim elementine karşılık gelir ve bundan dolayı  $M$  manifoldu yönlendirilebilirdir. Burada  $(d\eta)^n$ ,  $d\eta$  nin kendisi ile  $n$  defa dış çarpımını gösterir, yani

$$(d\eta)^n = \underbrace{(d\eta) \wedge (d\eta) \wedge \dots \wedge (d\eta)}_{n \text{ tane}}$$

dir.  $\eta$  1-form olduğundan  $d\eta$  2-form ve  $\eta \wedge (d\eta)^n$  ifadesi  $(2n+1)$ -form olur. Bu sebepten dolayı kontak manifoldlar  $(2n+1)$ -boyutlu manifoldlardır (Blair 1986, Blair 2002).

**Teorem 3.1.1. (Darboux'un Klasik Teoremi):**  $n$ -boyutlu diferensiyellenebilir Riemann manifoldu  $M$  ve bu manifold üzerinde diferensiyel 1-form  $\omega$  olsun.  $M$  üzerinde,

$$\omega \wedge (d\omega)^p \neq 0 \quad , \quad (d\omega)^{p+1} = 0$$

$$\omega = dy^{p+1} - \sum_{i=1}^p y^i dx^i$$

olacak şekilde  $M$  nin her noktası civarında bir  $(x^1, x^2, \dots, x^p, y^1, y^2, \dots, y^{n-p})$  koordinat sistemi vardır (Yano ve Kon 1984).

Böylece Darboux teoremine göre:  $(2n+1)$ -boyutlu  $M$  kontak manifoldunun her noktası civarında,

$$\eta = dz - \sum_{i=1}^n y^i dx^i$$

olacak şekilde  $(x^1, x^2, \dots, x^n, y^1, y^2, \dots, y^n, z)$  koordinatları vardır (Blair 1976, Yano ve Kon 1984) .

**Örnek 3.1.1.**  $(2n+1)$ -boyutlu kontak manifold  $M$  olsun. Bu durumda  $M$  manifoldu üzerinde diferensiyel bir form

$$\eta = dz - \sum_{i=1}^n y^i dx^i$$

olmak üzere  $\eta \wedge (d\eta)^n \neq 0$  olduğunu gösterelim.

$(x^1, x^2, \dots, x^n, y^1, y^2, \dots, y^n, z) \in \square^{2n+1}$  dir.

$n = 1$  için  $M^3$  de  $\eta \wedge d\eta \neq 0$  olduğunu gösterelim:

$$\eta = dz - y^1 dx^1$$

olmak üzere

$$d\eta = d(dz) - dy^1 \wedge dx^1 - y^1 d(dx^1)$$

dır.

$$d(dz) = 0, d(dx^1) = 0$$

olduğundan

$$\begin{aligned} d\eta &= -dy^1 \wedge dx^1 \\ &= dx^1 \wedge dy^1 \end{aligned}$$

olur. O zaman

$$\begin{aligned} \eta \wedge d\eta &= (dz - y^1 dx^1) \wedge (dx^1 \wedge dy^1) \\ &= [dz \wedge (dx^1 \wedge dy^1)] - [y^1 dx^1 \wedge (dx^1 \wedge dy^1)] \\ &= dx^1 \wedge dy^1 \wedge dz \\ &\neq 0 \end{aligned}$$

dir. Böylece  $(M^3, \eta)$  ikilisi 3-boyutlu bir kontak manifolddur.

$n = 2$  için  $M^5$  de  $\eta \wedge (d\eta)^2 \neq 0$  olduğunu gösterelim:

$$\eta = dz - \sum_{i=1}^2 y^i dx^i = dz - y^1 dx^1 - y^2 dx^2$$

olmak üzere

$$d\eta = d(dz) - dy^1 \wedge dx^1 - y^1 d(dx^1) - dy^2 \wedge dx^2 - y^2 d(dx^2)$$

dir.

$$d(dz) = 0, d(dx^1) = 0, d(dx^2) = 0$$

olduğundan

$$d\eta = dx^1 \wedge dy^1 + dx^2 \wedge dy^2 = \sum_{i=1}^2 dx^i \wedge dy^i$$

olur. Buradan

$$\begin{aligned} (d\eta)^2 &= d\eta \wedge d\eta \\ &= (dx^1 \wedge dy^1 + dx^2 \wedge dy^2) \wedge (dx^1 \wedge dy^1 + dx^2 \wedge dy^2) \\ &= [(dx^1 \wedge dy^1) \wedge (dx^1 \wedge dy^1)] + [(dx^1 \wedge dy^1) \wedge (dx^2 \wedge dy^2)] \\ &\quad + [(dx^2 \wedge dy^2) \wedge (dx^1 \wedge dy^1)] + [(dx^2 \wedge dy^2) \wedge (dx^2 \wedge dy^2)] \\ &= 2(dx^1 \wedge dy^1 \wedge dx^2 \wedge dy^2) \\ &= 2!(dx^1 \wedge dy^1 \wedge dx^2 \wedge dy^2) \end{aligned}$$

dır. O zaman

$$\begin{aligned} \eta \wedge (d\eta)^2 &= (dz - y^1 dx^1 - y^2 dx^2) \wedge [2!(dx^1 \wedge dy^1 \wedge dx^2 \wedge dy^2)] \\ &= 2!(dx^1 \wedge dy^1 \wedge dx^2 \wedge dy^2 \wedge dz) \\ &\neq 0 \end{aligned}$$

elde edilir. O halde  $(M^5, \eta)$  ikilisi 5-boyutlu kontak manifolddur.

$n=3$  için  $M^7$  de  $\eta \wedge (d\eta)^3 \neq 0$  olduğunu gösterelim:

$$\eta = dz - \sum_{i=1}^3 y^i dx^i = dz - y^1 dx^1 - y^2 dx^2 - y^3 dx^3$$

olmak üzere

$$d\eta = d(dz) - dy^1 \wedge dx^1 - y^1 d(dx^1) - dy^2 \wedge dx^2 - y^2 d(dx^2) - dy^3 \wedge dx^3 - y^3 d(dx^3)$$

dir.

$$d(dz) = 0 \quad , \quad d(dx^1) = 0 \quad , \quad d(dx^2) = 0 \quad , \quad d(dx^3) = 0$$

olduğundan

$$d\eta = dx^1 \wedge dy^1 + dx^2 \wedge dy^2 + dx^3 \wedge dy^3 = \sum_{i=1}^3 dx^i \wedge dy^i$$

ve

$$\begin{aligned} (d\eta)^2 &= d\eta \wedge d\eta \\ &= (dx^1 \wedge dy^1 + dx^2 \wedge dy^2 + dx^3 \wedge dy^3) \\ &\quad \wedge (dx^1 \wedge dy^1 + dx^2 \wedge dy^2 + dx^3 \wedge dy^3) \\ &= 2!(dx^1 \wedge dy^1 \wedge dx^2 \wedge dy^2) + 2!(dx^2 \wedge dy^2 \wedge dx^3 \wedge dy^3) \\ &\quad + 2!(dx^1 \wedge dy^1 \wedge dx^3 \wedge dy^3) \end{aligned}$$

dir. Ayrıca

$$\begin{aligned} (d\eta)^3 &= d\eta \wedge (d\eta)^2 \\ &= (dx^1 \wedge dy^1 + dx^2 \wedge dy^2 + dx^3 \wedge dy^3) \wedge \begin{pmatrix} 2!(dx^1 \wedge dy^1 \wedge dx^2 \wedge dy^2) \\ +2!(dx^2 \wedge dy^2 \wedge dx^3 \wedge dy^3) \\ +2!(dx^1 \wedge dy^1 \wedge dx^3 \wedge dy^3) \end{pmatrix} \\ &= 3!(dx^1 \wedge dy^1 \wedge dx^2 \wedge dy^2 \wedge dx^3 \wedge dy^3) \end{aligned}$$

ve buradan da

$$\begin{aligned} \eta \wedge (d\eta)^3 &= (dz - y^1 dx^1 - y^2 dx^2 - y^3 dx^3) \wedge [3!(dx^1 \wedge dy^1 \wedge dx^2 \wedge dy^2 \wedge dx^3 \wedge dy^3)] \\ &= 3!(dx^1 \wedge dy^1 \wedge dx^2 \wedge dy^2 \wedge dx^3 \wedge dy^3 \wedge dz) \\ &\neq 0 \end{aligned}$$

olur. O halde  $(M^7, \eta)$  ikilisi 7-boyutlu kontak manifolddur.

$n > 3$  için  $M^{2n+1}$  de  $\eta \wedge (d\eta)^n \neq 0$  olduğunu gösterelim.

$$\eta = dz - \sum_{i=1}^n y^i dx^i = dz - y^1 dx^1 - y^2 dx^2 - \dots - y^n dx^n$$

olmak üzere

$$d\eta = d(dz) - \sum_{i=1}^n [dy^i \wedge dx^i - y^i d(dx^i)]$$

$$d(dz) = 0 \text{ ve } d(dx^i) = 0, \quad 1 \leq i \leq n$$

olduğundan

$$d\eta = \sum_{i=1}^n dx^i - dy^i$$

dır. Buradan

$$\begin{aligned} (d\eta)^2 &= d\eta \wedge d\eta \\ &= (dx^1 \wedge dy^1 + dx^2 \wedge dy^2 + \dots + dx^n \wedge dy^n) \\ &\quad \wedge (dx^1 \wedge dy^1 + dx^2 \wedge dy^2 + \dots + dx^n \wedge dy^n) \\ &= 2! (dx^1 \wedge dy^1 \wedge dx^2 \wedge dy^2) + 2! (dx^1 \wedge dy^1 \wedge dx^3 \wedge dy^3) \\ &\quad + \dots + 2! (dx^1 \wedge dy^1 \wedge dx^n \wedge dy^n) + 2! (dx^2 \wedge dy^2 \wedge dx^3 \wedge dy^3) \\ &\quad + 2! (dx^2 \wedge dy^2 \wedge dx^4 \wedge dy^4) + \dots + 2! (dx^2 \wedge dy^2 \wedge dx^n \wedge dy^n) \\ &\quad + 2! (dx^3 \wedge dy^3 \wedge dx^4 \wedge dy^4) + 2! (dx^3 \wedge dy^3 \wedge dx^5 \wedge dy^5) \\ &\quad + \dots + 2! (dx^3 \wedge dy^3 \wedge dx^n \wedge dy^n) + \dots + 2! (dx^{n-1} \wedge dy^{n-1} \wedge dx^n \wedge dy^n) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
(d\eta)^3 &= d\eta \wedge (d\eta)^2 \\
&= 3!(dx^1 \wedge dy^1 + dx^2 \wedge dy^2 + dx^3 \wedge dy^3) \\
&\quad + \dots + 3!(dx^1 \wedge dy^1 \wedge dx^2 \wedge dy^2 \wedge dx^n \wedge dy^n) \\
&\quad + 3!(dx^2 \wedge dy^2 \wedge dx^3 \wedge dy^3 \wedge dx^4 \wedge dy^4) \\
&\quad + \dots + 3!(dx^2 \wedge dy^2 \wedge dx^3 \wedge dy^3 \wedge dx^n \wedge dy^n) \\
&\quad + \dots + 3!(dx^{n-2} \wedge dy^{n-2} \wedge dx^{n-1} \wedge dy^{n-1} \wedge dx^n \wedge dy^n)
\end{aligned}$$

olduğu görülür. Buradan da

$$\begin{aligned}
(d\eta)^n &= d\eta \wedge d\eta \wedge \dots \wedge d\eta \\
&= n!(dx^1 \wedge dy^1 \wedge dx^2 \wedge dy^2 \wedge \dots \wedge dx^n \wedge dy^n)
\end{aligned}$$

veya

$$\begin{aligned}
\eta \wedge (d\eta)^n &= (dz - \sum_{i=1}^n y^i dx^i) \wedge [n!(dx^1 \wedge dy^1 \wedge dx^2 \wedge dy^2 \wedge \dots \wedge dx^n \wedge dy^n)] \\
&= n!(dx^1 \wedge dy^1 \wedge dx^2 \wedge dy^2 \wedge \dots \wedge dx^n \wedge dy^n \wedge dz) \\
&\neq 0
\end{aligned}$$

elde edilir. O halde  $(M^{2n+1}, \eta)$  ikilisi  $(2n+1)$ -boyutlu bir kontak manifolddur.

**Örnek 3.1.2.** 3- boyutlu diferensiyellenebilir bir manifold  $M^3$  olsun. Her  $(x,y,z)$  noktası civarında

$$\eta = \cos z dx + \sin z dy$$

diferensiyel 1-formu için,

$$\eta \wedge d\eta \neq 0$$

olduğunu gösterelim.

Burada

$$d\eta = -\sin z dz \wedge dx + \cos z d(dx) + \cos z dz \wedge dy + \sin z d(dy)$$

$$d(dx) = 0 \quad , \quad d(dy) = 0$$

olduğundan

$$d\eta = \sin z dx \wedge dz + \cos z dz \wedge dy$$

dır, dolayısı ile

$$\begin{aligned} \eta \wedge d\eta &= (\cos z dx + \sin z dy) \wedge (\sin z dx \wedge dz + \cos z dz \wedge dy) \\ &= \cos^2 z dx \wedge dz \wedge dy + \sin^2 z dy \wedge dx \wedge dz \\ &= -\cos^2 z dx \wedge dy \wedge dz - \sin^2 z dx \wedge dy \wedge dz \\ &= (\cos^2 z + \sin^2 z)(-dx \wedge dy \wedge dz) \\ &= -(dx \wedge dy \wedge dz) \\ &\neq 0 \end{aligned}$$

dır. Böylece  $(M^3, \eta)$  ikilisi 3-boyutlu bir kontak manifolddur.

**Tanım 3.1.2.**  $\square^{2n+1}$  üzerinde kartezyen koordinatlar  $(x^1, x^2, \dots, x^n, y^1, y^2, \dots, y^n, z)$  ve

$\square^{2n+1}$  de bir diferensiyel 1-form  $\eta = dz - \sum_{i=1}^n y^i dx^i$  olsun.  $\square^{2n+1}$  in açık alt cümleleri  $U$

ve  $U'$  olmak üzere

$$f : U \xrightarrow{\text{diffeomorfizm}} U'$$

diffeomorfizimi için,

$$f_* : \chi(U) \longrightarrow \chi(U') \quad \text{ve} \quad f^* : \Omega(U') \longrightarrow \Omega(U)$$

olmak üzere

$$f^* \eta = \tau \cdot \eta \quad (3.1.2)$$

ise  $f$  ye **kontak transformasyon** denir. Burada  $\tau$ ,  $U$  üzerinde sıfır olmayan bir reel değerli fonksiyondur. Ayrıca  $\chi(U)$ ,  $U$  üzerindeki vektör alanlarının uzayı,  $\Omega(U)$  da  $\chi(U)$  nun dualidir.

$U$  üzerindeki bütün kontak transformasyonların cümlesi  $\Gamma$  ise;

$$\Gamma = \{f | f : U \xrightarrow{\text{diffeomorfizm}} U'; U, U' \subset \mathbb{R}^{2n+1} \text{ açıklar. } f^* \eta = \tau \cdot \eta\}$$

şeklindedir. Burada  $\tau : U \rightarrow \mathbb{R}$  reel değerli bir fonksiyondur. O zaman  $\Gamma$  ya **adi grup (grubumsu)** denir (Yano ve Kon 1984).

**Tanım 3.1.3.** Bir  $f \in \Gamma$  kontak transformasyonu için  $\tau=1$  yani

$$f^* \eta = \eta \quad (3.1.3)$$

ise  $f$  ye bir **kesin kontak transformasyon** veya **sıkı kontak transformasyon** denir. Bu tip transformasyonların cümlesi  $\Gamma_0$  ile gösterilirse

$$\Gamma_0 = \{f | f : U \xrightarrow{\text{diffeomorfizm}} U'; U, U' \subset \mathbb{R}^{2n+1} \text{ açıklar. } f^* \eta = \eta\}$$

şeklindedir.

$\Gamma_0$  cümlesine  $\Gamma$  için bir **alt grubumsu (değişimli olmayan grup)** denir (Yano ve Kon 1984).

**Teorem 3.1.2.** Kontak transformasyonların cümlesi  $\Gamma$ , çarpma işlemine göre bir grubumsudur (Yano ve Kon 1984).

**İspat:**

$$\text{i) } \quad \circ : \Gamma \times \Gamma \rightarrow \Gamma \\ (g, f) \mapsto g \circ f$$

şeklinde tanımlı  $\circ$  işlemi  $\Gamma$  cümlesinde bir iç işlemdir.

$$f : U \rightarrow U' \quad , \quad g : V \rightarrow V' \quad , \quad U' \cap V \neq \emptyset$$

kontak transformasyonları verilsin.

$$f_* : \chi(U) \rightarrow \chi(U') \quad , \quad g_* : \chi(V) \rightarrow \chi(V')$$

ve

$$f^* : \Omega(U') \rightarrow \Omega(U) \quad , \quad g^* : \Omega(V') \rightarrow \Omega(V)$$

olmak üzere

$$f^* \eta_0 = \tau_0 \cdot \eta_0 \quad , \quad g^* \eta_1 = \tau_1 \cdot \eta_1$$

dır. Burada  $\tau_0 : U \rightarrow \mathbb{R}$  ve  $\tau_1 : V \rightarrow \mathbb{R}$  reel değerli fonksiyonlardır.

Böylece

$$g \circ f : f^{-1}(U' \cap V) \subset U \rightarrow g(U' \cap V) \subset V'$$

dönüşümü de bir kontak transformasyondur.

Gerçekten

$$\begin{aligned}
 U &\xrightarrow{f} U' \subset V \xrightarrow{g} V' \\
 f^{-1}(U' \cap V) \subset U &\xleftarrow{f^{-1}} U' \cap V \xrightarrow{g} g(U' \cap V) \subset V' \\
 g \circ f &: f^{-1}(U' \cap V) \subset U \longrightarrow g(U' \cap V) \subset V' \\
 (g \circ f)_* &: \chi(f^{-1}(U' \cap V)) \longrightarrow \chi(g(U' \cap V)) \\
 (g \circ f)^* &: \Omega(g(U' \cap V)) \longrightarrow \Omega(f^{-1}(U' \cap V))
 \end{aligned}$$

$\forall \eta_1 \in \Omega(g(U' \cap V))$  için

$$\begin{aligned}
 (g \circ f)^* \eta_1 &= (f^* \circ g^*) \eta_1 \\
 &= f^*(g^* \eta_1) \quad ; \text{ g kontak transformasyon , } g^* \eta_1 = \tau_1 \cdot \eta_1 \\
 &= f^*(\tau_1 \cdot \eta_1) \quad ; \text{ f kontak transformasyon , } f^* \tau_1 \cdot \eta_1 = \tau_0 \cdot (\tau_1 \cdot \eta_1) \\
 &= \tau_0 \cdot (\tau_1 \cdot \eta_1) \\
 &= (\tau_0 \cdot \tau_1) \cdot \eta_1
 \end{aligned}$$

$\tau_0 \cdot \tau_1 = \tau$  kabul edilir ise  $(g \circ f)^* \eta_1 = \tau \cdot \eta_1$  olur ki bu da  $g \circ f \in \Gamma$  demektir.

ii)  $o$  işlemi  $\Gamma$  da birleşimlidir:  $U, V, W, U', V', W' \subset \square^{2n+1}$  in açıkları olmak üzere

$$U \xrightarrow{f} U' \subset V \xrightarrow{g} V' \subset W \xrightarrow{h} W' \quad ; \quad U' \cap V \neq \emptyset \quad , \quad V' \cap W \neq \emptyset$$

$\forall f, g, h \in \Gamma$  ve  $\forall \eta_0 \in \Gamma \Omega(W')$  için

$$\begin{aligned}
 [(f \circ g) \circ h]^* (\eta_0) &= [h^* \circ (f \circ g)^*] (\eta_0) \\
 &= [h^* \circ (g^* \circ f^*)] (\eta_0) \\
 &= h^* ((g^* \circ f^*) (\eta_0))
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[(f \circ g) \circ h]^*(\eta_0) &= h^*(g^*(f^*\eta_0)) \quad ; f \text{ kontak transformasyon, } f^*\eta_0 = \tau_0 \cdot \eta_0 \\
&= h^*(g^*(\tau_0 \cdot \eta_0)) \quad ; g \text{ kontak transformasyon, } g^*(\tau_0 \cdot \eta_0) = \tau_1 \cdot (\tau_0 \cdot \eta_0) \\
&= (h^*(\tau_1(\tau_0 \cdot \eta_0))) \quad ; h \text{ kontak transformasyon } h^*\eta_0 = \tau \cdot \eta_0 \\
&= (\tau_2 \tau_1 \tau_0) \eta_0
\end{aligned}$$

$(\tau_2 \tau_1 \tau_0) = \tau$  alınırsa

$$[(f \circ g) \circ h]^*(\eta_0) = \tau \cdot \eta_0 \quad (3.1.4)$$

dır.

Diğer taraftan,

$\forall f, g, h \in \Gamma$  ve  $\forall \eta_0$  için ,

$$\begin{aligned}
[(f \circ (g \circ h))^*(\eta_0) &= [(g \circ h)^* \circ f^*](\eta_0) \\
&= [(h^* \circ g^*) \circ f^*](\eta_0) \\
&= (h^* \circ g^*)(f^*(\eta_0)) \quad ; f \text{ kontak transformasyon, } f^*\eta_0 = \tau_0 \cdot \eta_0 \\
&= (h^* \circ g^*)(\tau_0 \cdot \eta_0) \\
&= h^*(g^*(\tau_0 \cdot \eta_0)) \quad ; g \text{ kontak transformasyon, } g^*(\tau_0 \cdot \eta_0) = \tau_1 \cdot (\tau_0 \cdot \eta_0) \\
&= h^*(\tau_1 \cdot (\tau_0 \cdot \eta_0)) \quad ; h \text{ kontak transformasyon } h^*\eta_0 = \tau \cdot \eta_0 \\
&= (\tau_2 \tau_1 \tau_0) \eta_0
\end{aligned}$$

$(\tau_2 \tau_1 \tau_0) = \tau$  alınırsa

$$[(f \circ g) \circ h]^*(\eta_0) = \tau \cdot \eta_0 \quad (3.1.5)$$

dır.

(3.1.4) ve (3.1.5) den

$$[(f \circ g) \circ h]^*(\eta_0) = [f \circ (g \circ h)]^*(\eta_0)$$

olur. Bu ifade  $\forall \eta_0$  için doğru olduğundan

$$[(f \circ g) \circ h]^* = [f \circ (g \circ h)]^*$$

dır. O halde  $\forall f, g, h \in \Gamma$  için

$$(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$$

olur. Yani  $\circ$  işlemi  $\Gamma$  da birleşimlidir.

**iii)**  $f : U \xrightarrow{\text{diffeomorfizm}} U'$  olduğundan  $f^{-1}$  vardır ve  $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = I$  olur.

$I \in \Gamma$  birim kontak transformasyon olduğundan  $\forall \eta \in \Omega(U)$  için

$$I^* \eta = \eta$$

olur. Ayrıca  $f \in \Gamma$  olduğundan  $f^* \eta = \tau \cdot \eta$  olacak şekilde  $\tau \neq 0$  fonksiyonu vardır.

Buna göre

$$f \circ f^{-1} = I$$

$$(f \circ f^{-1})^*(\eta) = I^*(\eta)$$

$$[(f^{-1})^* \circ f^*](\eta) = I^*(\eta)$$

$$(f^{-1})^*(f^*(\eta)) = \eta \quad ; f \text{ kontak transformasyon , } f^*\eta_0 = \tau.\eta$$

$$(f^{-1})^*(\tau.\eta) = \eta$$

dır. O halde  $\eta_1 = \tau.\eta$  ve  $\tau^{-1}$  mevcut ise  $\eta = \tau^{-1}\eta_1$  olup  $f^{-1} \in \Gamma$  olur.

$$(f^{-1})^*(\eta_1) = \tau^{-1}\eta_1$$

yazılabilir. O halde  $\tau^{-1}$  mevcut ise sonuç olarak  $\Gamma$  cümlesi  $\circ$  işlemine göre bir grubumdur.

**Teorem 3.1.3.**  $\Gamma_0$  cümlesi ,  $\Gamma$  cümlesinin bir alt grubudur.

**İspat:**

$$\Gamma_0 = \{f \mid f : U \rightarrow U' ; U \text{ ve } U' \subset \mathbb{R}^{2n+1} \text{ açıklar, } f^*\eta = \eta\} \subset \Gamma \text{ nin alt grubudur.}$$

Gerçekten ,

i)  $I^*\eta = \eta$  olduğundan  $I \in \Gamma_0$  dır. Yani

$$\Gamma_0 \neq \emptyset$$

olur.

ii)  $\forall f \in \Gamma_0$  için

$$f^*\eta = \eta$$

$$f^*\eta = 1.\eta \text{ ve } \tau = 1 \text{ alınır}$$

$$f^*\eta = \tau.\eta \text{ olur ki , bu da } f \in \Gamma \text{ demektir.}$$

Yani ,

$$\Gamma_0 \subset \Gamma$$

olur.

**iii)**  $\forall f, g \in \Gamma_0$  için  $fog^{-1} \in \Gamma_0$  olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned} (fog^{-1})^* \eta &= (g^{-1})^* (f^* \eta) \\ &= (g^{-1})^* \eta \quad ; \quad g^{-1} \text{ sıkı kontak transformasyon } (g^{-1})^* \eta = \eta \\ &= \eta \end{aligned}$$

O halde

$$fog^{-1} \in \Gamma_0$$

dir.

Sonuç olarak  $\Gamma_0 \subset \Gamma$  bir alt gruptur.

**Tanım 3.1.4.**  $\forall (i, j)$  çifti için  $f_{ij}$  ,

$$f_{ij} = f_i \circ f_j^{-1} = f_i f_j^{-1} \tag{3.1.6}$$

anlamında o işlemi kullanılmayacaktır.  $\forall U_i, V_i \subset \mathbb{R}^{2n+1}$  açıkları için

$$f_i : U_i \rightarrow V_i \subset \mathbb{R}^{2n+1}$$

homeomorfizimleri verilmiş olsun. Ayrıca  $M$  nin bir açık örtüsü  $\{U_i\}$  ve

boy  $M = (2n + 1)$  olsun. Eğer

$$f_i' f_j^{-1} \in \Gamma$$

ise

$$\{U_i, f_i\} \text{ ve } \{U_i', f_i'\}$$

**koordinat sistemleri (haritalar) denktirler** denir. Bu denklik bağıntısına göre denklik sınıflarının cümlesi  $M$  üzerinde bir **en geniş anlamda kontak yapı** olarak adlandırılır (Yano ve Kon 1984).

**Sonuç 3.1.1.**  $f_j(U_i \cap U_j)$  üzerinde

$$(f_i f_j^{-1})^*(\eta_0) = \rho_{ij} \eta_0 \quad (3.1.7)$$

olacak şekilde sıfırdan farklı bir  $\rho_{ij} = (f_i f_j^{-1})^*$  fonksiyonu vardır (Kocayiğit 2004).

**İspat :**  $f_i \in \Gamma$  olduğundan  $f_i^* \eta_0 = \tau_0 \cdot \eta_0$  dır. Böylece  $f_i f_j^{-1} \in \Gamma$  olduğundan

$$\begin{aligned} (f_i f_j^{-1})^*(\eta_0) &= [(f_j^{-1})^* f_i^*] \eta_0 \\ &= (f_j^{-1})^* ((f_i^*)(\eta_0)) \quad ; \quad f_i \in \Gamma \quad , \quad f_i^* \eta_0 = \tau_0 \cdot \eta_0 \\ &= (f_j^{-1})^* (\tau_0 \cdot \eta_0) \end{aligned}$$

dır.  $f_j^{-1} \in \Gamma$  olduğundan  $(f_j^{-1})(\eta_1) = \tau' \cdot \eta_1$  olup

$$\begin{aligned} (f_i f_j^{-1})^*(\eta_0) &= \tau' (\tau_0 \cdot \eta_0) \\ &= (\tau' \tau_0) \cdot \eta_0 \end{aligned}$$

$$(f_i \circ f_j^{-1})^*(\eta_0) = \rho_{ij} \eta_0$$

elde edilir. Diğer taraftan

$$\rho_{ij} \eta_0 = (f_i \circ f_j^{-1})^*(\eta_0)$$

eşitliğinin her iki tarafına soldan  $f_j^*$  yi uygularsak,

$$\begin{aligned} f_j^*(\rho_{ij} \eta_0) &= [f_j^*(f_i \circ f_j^{-1})^*](\eta_0) \\ &= [f_j^*((f_j^{-1})^* \circ f_i^*)](\eta_0) \\ &= [(f_j^* \circ (f_j^{-1})^*) \circ f_i^*](\eta_0) \\ &= [(f_j^{-1} \circ f_j)^* \circ f_i^*](\eta_0) \\ &= [I^* \circ f_i^*](\eta_0) \\ &= f_i^*(\eta_0) \end{aligned}$$

$$f_j^*(\rho_{ij}(\eta_0)) = f_i^*(\eta_0) \quad (3.1.8)$$

olur.

### Sonuç 3.1.2.

$$f_j^*(\rho_{ij}(\eta_0)) = f_j^*(\rho_{ij})f_j^*(\eta_0) \quad (3.1.9)$$

dır (Kocayiğit 2004).

**İspat:**  $f_j$  bir kontak transformasyon olduğundan  $U_j$  üzerinde reel değerli bir  $\tau'$  fonksiyonu

$$f_j^*(\rho_{ij} \cdot \eta_0) = \tau'(\rho_{ij} \cdot \eta_0)$$

olacak şekilde vardır.  $\tau_0$  ve  $\tau_1$   $U_j$  üzerinde reel değerli fonksiyonlar olmak üzere

$$\begin{aligned}(f_j^* \rho_{ij})(\rho) &= (\tau_0 \rho_{ij})(\rho) \\ &= \tau_0(\rho) \rho_{ij}\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}(f_j^* \eta_0)(\rho) &= (\tau_1 \eta_0)(\rho) \\ &= \tau_1(\rho) \eta_0\end{aligned}$$

olduğundan,

$$\begin{aligned}[(f_j^* \rho_{ij})(f_j^* \eta_0)](\rho) &= (f_j^* \rho_{ij})(\rho)(f_j^* \eta_0)(\rho) \\ &= (\tau_0(\rho) \rho_{ij})(\tau_1(\rho) \eta_0) \\ &= \tau_0(\rho) \tau_1(\rho) \rho_{ij} \eta_0 \\ &= [(\tau_0 \tau_1) \rho_{ij} \eta_0](\rho)\end{aligned}$$

$$[(f_j^* \rho_{ij})(f_j^* \eta_0)](\rho) = [\tau^i(\rho_{ij} \eta_0)](\rho) = f_j^*(\rho_{ij} \eta_0)(\rho) \quad (3.1.10)$$

dır. Bu eşitlik  $\forall \rho \in U_i$  için var olduğundan (3.1.9) ve (3.1.10) dan

$$\begin{aligned}(f_j^* \rho_{ij})(f_j^* \eta_0) &= \tau^i(\rho_{ij} \eta_0) \\ &= f_i^* \eta_0 \\ &= f_j^*(\rho_{ij} \eta_0)\end{aligned}$$

elde edilir.

**Sonuç 3.1.3.** Eğer  $\eta_i$  yi her  $U_i$  üzerinde  $\eta_i = f_i^* \eta_0$  olacak şekilde bir 1-form olarak tanımlarsak  $U_i \cap U_j \neq \emptyset$  üzerinde

$$\eta_i = f_j^*(\rho_{ij})\eta_j$$

dır ve  $\eta_i$  ler birer kontak form olur (Kocayiğit 2004).

**İspat:**

$$f_i^* \eta_0 = (f_j^* \rho_{ij})(f_j^* \eta_0)$$

eşitliğinde  $f_i^* \eta_0$  yerine  $\eta_i$  ve  $f_j^* \eta_0$  yerine  $\eta_j$  yazılırsa  $\eta_0 \wedge (d\eta_0)^n \neq 0$  olduğundan  $\eta_i \wedge (d\eta_i)^n \neq 0$  olur. Ayrıca  $\eta_i = f_i^* \eta_0$  olduğundan ,

$$\begin{aligned} d\eta_i &= d(f_i^* \eta_0) \\ &= f_i^*(d\eta_0) \end{aligned}$$

dır.

$$\begin{aligned} (d\eta_i)^n &= \frac{1}{n!} (d\eta_i \wedge d\eta_i \wedge \dots \wedge d\eta_i) \\ &= \frac{1}{n!} (f_i^*(d\eta_0) \wedge f_i^*(d\eta_0) \wedge \dots \wedge f_i^*(d\eta_0)) \\ &= \frac{1}{n!} f_i^*(d\eta_0 \wedge d\eta_0 \wedge \dots \wedge d\eta_0) \quad ; f_i^* \text{ lineer olduğundan} \\ &= f_i^* \left[ \frac{1}{n!} (d\eta_0 \wedge d\eta_0 \wedge \dots \wedge d\eta_0) \right] \\ &= f_i^*(d\eta_0)^n \end{aligned}$$

dir. Buna göre

$$\begin{aligned} \eta_i \wedge (d\eta_i)^n &= (f_i^* \eta_0) \wedge (f_i^*(d\eta_0)^n) \\ &= f_i^*(\eta_0 \wedge (d\eta_0)^n) \end{aligned}$$

olur. Bu ise  $f_i^*$  lineer ve  $\eta_0 \wedge (d\eta_0) \neq 0$  olduğundan

$$\eta_i \wedge (d\eta_i)^n \neq 0 \quad ; \quad 1 \leq i \leq n$$

demektir. Dolayısıyla her  $i$  değeri için  $\eta_i$  ler kontak formdur.

**Tanım 3.1.5.**  $(2n+1)$ -boyutlu diferensiyellenebilir Riemann manifoldu  $M$  ve  $\eta$  da  $M$  üzerinde diferensiyel 1-form olsun.

$$D = \{X \in \mathcal{X}(M) \mid \eta: \mathcal{X}(M) \xrightarrow[\text{lineer}]{\text{dif. bilir}} C^\infty(M, R), \eta(X) = 0\} \quad (3.1.11)$$

cümlesine  $\eta$  kontak formunun **kontak distribüsyonu** denir (Blair 1976).

**Tanım 3.1.6.**  $(M, \eta)$  kontak manifoldu üzerinde  $X \neq \xi$  için ,

$$\eta(\xi) = 1 \quad (3.1.12)$$

$$d\eta(\xi, X) = 0 \quad (3.1.13)$$

olacak şekilde bir tek  $\xi \in \mathcal{X}(M)$  vektör alanı varsa  $\xi$  ye  $\eta$  kontak yapısının **karakteristik vektör alanı** denir.

Burada

$$\xi: M \xrightarrow[\text{örten}]{1:1} \bigcup_{p \in M} T_M(P)$$

şeklinde tanımlı  $(1,0)$  tipinde tensör alanıdır (Blair 1976).

**Örnek 3.1.3.**  $M^3$  3-boyutlu diferensiyellenebilir bir manifold olsun. Her  $(x^1, y^1, z)$  noktası civarında  $\eta = \cos z dx + \sin z dy$  diferensiyel 1-formu için Tanım (3.1.6) daki şartları sağlayan bir tek  $\xi \in \chi(M)$  vektör alanı

$$\xi = \cos z \frac{\partial}{\partial x} + \sin z \frac{\partial}{\partial y}$$

dır. Gerçekten ,

$$d\eta = \sin z dx \wedge dz + \cos z dz \wedge dy$$

olmak üzere,

$$\begin{aligned} d\eta(X, \xi) &= [\sin z dx \wedge dz + \cos z dz \wedge dy](X, \xi) \\ &= [\sin z dx \wedge dz](X, \xi) + [\cos z dz \wedge dy](X, \xi) \\ &= \sin z [dx(X)dz(\xi) - dx(\xi)dz(X)] + \cos z [dz(X)dy(\xi) - dz(\xi)dy(X)] \\ &= \sin z \left[ dx(X)dz\left(\cos z \frac{\partial}{\partial x} + \sin z \frac{\partial}{\partial y}\right) - dx\left(\cos z \frac{\partial}{\partial x} + \sin z \frac{\partial}{\partial y}\right)dz(X) \right] \\ &\quad + \cos z \left[ dz(X)dy\left(\cos z \frac{\partial}{\partial x} + \sin z \frac{\partial}{\partial y}\right) - dz\left(\cos z \frac{\partial}{\partial x} + \sin z \frac{\partial}{\partial y}\right)dy(X) \right] \\ &= -\sin^2 z dx(X)dz\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) + \sin z \cos z dx(X)dz\left(\frac{\partial}{\partial y}\right) - \sin z \cos z dx\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)dz(X) \\ &\quad - \sin^2 z dx\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)dz(X) + \cos^2 z dz(X)dy\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) + \cos z \sin z dz(X)dy\left(\frac{\partial}{\partial y}\right) \\ &\quad + \cos z \sin z dz\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)dy(X) - \cos^2 z dz\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)dy(X) \\ &= -\sin z \cos z dx\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)dz(X) + \cos z \sin z dz(X)dy\left(\frac{\partial}{\partial y}\right) \\ &= -\sin z \cos z dz(X) + \cos z \sin z dz(X) \end{aligned}$$

$$d\eta(X, \xi) = 0$$

olur.

$$\begin{aligned}\eta(\xi) &= [\cos z dx + \sin z dy](\xi) \\ &= [\cos z dx + \sin z dy](\cos z \frac{\partial}{\partial x} + \sin z \frac{\partial}{\partial y}) \\ &= \cos^2 z dx(\frac{\partial}{\partial x}) + \cos z \sin z dx(\frac{\partial}{\partial y}) + \sin z \cos z dy(\frac{\partial}{\partial x}) + \sin^2 z dy(\frac{\partial}{\partial y})\end{aligned}$$

ve

$$dx(\frac{\partial}{\partial x}) = 1, \quad dx(\frac{\partial}{\partial y}) = 0, \quad dy(\frac{\partial}{\partial x}) = 0, \quad dy(\frac{\partial}{\partial y}) = 1$$

olduğundan

$$\eta(\xi) = 1$$

dir. Dolayısıyla  $\xi, \eta$  kontak yapısının karakteristik vektör alanı olur.

**Sonuç 3.1.4.**  $(M, \eta)$  ikilisi  $(2n+1)$ -boyutlu kontak manifold,  $D$  ise  $\eta$  kontak formunun kontak distribisyonu olmak üzere  $\chi(M)$ ,  $D$  ile  $D^\perp$  in direk toplamı olarak yazılabilir.

Yani,

$$\chi(M) = D \oplus D^\perp$$

(3.1.14)

dır.

**Sonuç 3.1.5.**  $(M, \eta)$  ikilisi  $(2n+1)$  –boyutlu kontak manifold ve  $\text{Ker } \eta$ ,  $\eta$  kontak formunun çekirdeği olmak üzere aşağıdaki önermeler denktir.

i)  $\eta$  kontak formu bire birdir.

ii)  $\text{Ker } \eta = \{0\}$

**Sonuç 3.1.6.**  $(M, \eta)$  ikilisi  $(2n+1)$  –boyutlu kontak manifold ve  $\text{Ker } \eta, \eta$  kontak formunun çekirdeği olmak üzere

$$\text{Ker } \eta = D \quad (3.1.15)$$

dir.

### 3.2. Hemen Hemen Kontak Manifoldlar

**Tanım 3.2.1.**  $(2n+1)$ -boyutlu diferensiyellenebilir bir manifold  $M$  ve  $\varphi, \xi, \eta$ , sırasıyla,  $M$  üzerinde  $(1,1)$ ,  $(1,0)$ ,  $(0,1)$  tipinde tensör alanları olsun.  $\varphi, \xi, \eta$  için  $\forall X \in \chi(M)$  olmak üzere

$$\eta(\xi) = 1 \quad (3.2.1)$$

$$\varphi^2(X) = -X + \eta(X)\xi \quad (3.2.2)$$

koşullarını sağlayan  $(\varphi, \xi, \eta)$  üçlüsüne  $M$  de **hemen hemen kontak yapı** ve  $(M, \varphi, \xi, \eta)$  dörtlüsüne de **hemen hemen kontak manifold** denir (Yano ve Kon 1984).

Burada

$$\varphi : \chi(M) \xrightarrow[\text{anti-simetrik}]{\text{lineer}} \chi(M) \quad ; (1,1) \text{ tensör}$$

$$\eta : \chi(M) \xrightarrow[\text{dif. bilir}]{\text{lineer}} C^\infty(M, \square) \quad ; (1,0) \text{ tensör}$$

$$\xi : M \xrightarrow[\text{örten}]{1:1} \bigcup_{p \in M} T_M(P) \quad ; (0,1) \text{ tensör}$$

dır.

**Örnek 3.2.1**  $\mathbb{R}^3$  de standart koordinatlar  $(x, y, z)$  olmak üzere  $\eta$  kontak formu ,

$$\eta = \frac{1}{2}(dz - ydx)$$

$\xi$  vektör alanı,

$$\xi = 2\left(\frac{\partial}{\partial z}\right) \in \mathcal{X}(\mathbb{R}^3)$$

$\varphi$  lineer dönüşümü,

$$\varphi : \mathcal{X}(\mathbb{R}^3) \xrightarrow{\text{lineer}} \mathcal{X}(\mathbb{R}^3)$$

olsun.

$\varphi$  lineer dönüşümüne karşılık gelen matris,

$$\varphi = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \end{pmatrix}$$

olmak üzere,

$$\eta(\xi) = \frac{1}{2}(dz - ydx)\left(2\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)\right)$$

$$= dz\left(\frac{\partial}{\partial z}\right) - ydx\left(\frac{\partial}{\partial z}\right) \quad ; \quad dz\left(\frac{\partial}{\partial z}\right) = 1 \quad , \quad dx\left(\frac{\partial}{\partial z}\right) = 0$$

$$=1$$

olur.

Ayrıca

$$X = x_1 \left( \frac{\partial}{\partial x} \right) + x_2 \left( \frac{\partial}{\partial y} \right) + x_3 \left( \frac{\partial}{\partial z} \right) \in \mathcal{X}(\mathbb{R}^3) \quad ; \quad X = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} \eta(X) &= \frac{1}{2} (dz - ydx) \cdot \left( x_1 \frac{\partial}{\partial x} + x_2 \frac{\partial}{\partial y} + x_3 \frac{\partial}{\partial z} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left[ dz \left( x_1 \frac{\partial}{\partial x} + x_2 \frac{\partial}{\partial y} + x_3 \frac{\partial}{\partial z} \right) - ydx \left( x_1 \frac{\partial}{\partial x} + x_2 \frac{\partial}{\partial y} + x_3 \frac{\partial}{\partial z} \right) \right] \\ &= \frac{1}{2} (x_3 - yx_1) \end{aligned}$$

dır.

$\xi$  vektör alanına karşılık gelen matris  $\xi = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$  ve

$X \in \mathcal{X}(\mathbb{R}^3)$  in matris formu  $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$  olduğundan

$$\varphi^2(X) = \varphi(\varphi(X)) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$\varphi^2(X) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ -y & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$\varphi^2(X) = \left[ \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -y & 0 & 1 \end{pmatrix} \right] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$= -I_3(X) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -yx_1 + x_3 \end{bmatrix}$$

$$= -X + (x_3 - yx_1) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= -X + \frac{1}{2}(x_3 - yx_1) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$= -X + \eta(X)\xi.$$

Böylece  $(\mathbb{R}^3, \varphi, \xi, \eta)$  dörtlüsü hemen hemen kontak manifold olur.

**Teorem 3.2.1.**  $(M, \varphi, \xi, \eta)$  dörtlüsü hemen hemen kontak manifold olmak üzere  $X, \xi \in \chi(M)$ ,  $X \neq \xi$  ve

$$\varphi : \chi(M) \xrightarrow{\text{lineer}} \chi(M)$$

için

$$\text{i)} \quad \varphi(\xi) = 0 \quad (3.2.3)$$

$$\text{ii)} \quad \eta \circ \varphi = 0 \quad (3.2.4)$$

$$\text{iii)} \quad \text{rank } \varphi = 2n \quad (3.2.5)$$

dir (Yano ve Kon 1984).

**İspat :**

i)  $\forall X \in \chi(M)$  için (3.2.2) den  $\varphi^2(X) = -X + \eta(X)\xi$  eşitliğinde  $X = \xi$  alınırsa

$$\varphi^2(\xi) = -\xi + \eta(\xi)\xi \quad ; \quad \eta(\xi) = 1$$

$$= -\xi + \xi$$

$$= 0$$

Öncelikle  $\varphi(\xi) = 0$  eşitliğini Olmayana Ergi Yöntemi ile ispatlayalım.

Kabul edelim ki  $\varphi(\xi) \neq 0$  olsun.  $\varphi^2(\xi) = 0$  ifadesinde  $\xi$  yerine  $\varphi\xi$  alınırsa

$$\varphi^2(\varphi\xi) = 0$$

$$\varphi^2(\varphi\xi) = -\varphi\xi + \eta(\varphi\xi)\xi = 0$$

$$\varphi\xi = \eta(\varphi\xi)\xi \quad (3.2.6)$$

olur. Burada  $\eta(\varphi\xi) = 0$  ve  $\eta(\varphi\xi) \neq 0$  olmak üzere iki durum ortaya çıkar.

$\eta(\varphi\xi) = 0$  olduğunda  $\varphi\xi = 0$  olur. Bu ise  $\varphi(\xi) \neq 0$  kabulümüz ile çelişir. Demek ki kabulümüz yanlış olup  $\varphi\xi = 0$  olmak zorundadır.

$\eta(\varphi\xi) \neq 0$  olduğunda (3.2.6) eşitliği soldan  $\varphi$  ile çarpılırsa

$$\varphi^2(\xi) = \eta(\varphi(\xi))\varphi(\xi)$$

olur.  $\varphi^2(\xi) = 0$  ve  $\eta(\varphi\xi) \neq 0$  dolayısı ile  $\varphi(\xi) = 0$  olur. Bu ise  $\varphi(\xi) \neq 0$  kabulümüz ile çelişir. Demek ki kabulümüz yanlış olup  $\varphi\xi = 0$  olmak zorundadır.

Sonuç olarak her iki durumda da  $\varphi\xi = 0$  olur.

ii) (3.2.2) den  $\forall X \in \chi(M)$  için  $\varphi^2(X) = -X + \eta(X)\xi$  olduğundan  $X = \varphi(X)$  alınarak

$$\begin{aligned}\varphi^3(X) &= \varphi^2(\varphi X) = \varphi(\varphi^2(X)) \\ &= \varphi(-X + \eta(X)\xi) \quad ; \quad \varphi \text{ lineer olduğundan} \\ &= -\varphi(X) + \varphi(\eta(X)\xi) \\ &= -\varphi(X) + \eta(X)\varphi(\xi) \\ \varphi^3(X) &= -\varphi(X) + \eta(\varphi(X))\xi\end{aligned}\tag{3.2.7}$$

elde edilir.

$$\varphi(\xi) = 0$$

olduğundan

$$\varphi^3(X) = -\varphi(X)\tag{3.2.8}$$

(3.2.7) ve (3.2.8) den

$$\eta(\varphi(X))\xi = 0$$

olur. Ayrıca

$$\xi \neq 0$$

olduğundan

$$\eta(\varphi(X)) = 0$$

dır. Bu ise

$$(\eta \circ \varphi)(X) = 0(X)$$

olur ki  $\forall X \in \chi(M)$  için doğru olduğundan

$$\eta \circ \varphi = 0$$

olur.

**iii)**  $\varphi: \chi(M) \xrightarrow{\text{linear}} \chi(M)$  dönüşümünün çekirdeği  $\text{Ker } \varphi$  olmak üzere

$$\text{Ker } \varphi = \{X \in \chi(M) \mid \varphi(X) = 0\}$$

şeklindedir.

$\forall X \in \text{Ker } \varphi$  için

$$\varphi(X) = 0 \quad , \text{ eşitliğin her iki tarafına } \varphi \text{ uygulanırsa}$$

$$\varphi(\varphi(X)) = \varphi(0) \quad ,$$

$$\varphi^2(X) = 0$$

(3.2.2) den

$$-X + \eta(X)\xi = 0$$

$$X = \eta(X)\xi$$

olur. Böylece  $\forall X \in Ker\varphi$  için  $X \in Sp\{\xi\}$  olur ki bu da

$$Ker\varphi \subset Sp\{\xi\} \quad (3.2.9)$$

demektir.

$\forall X \in Sp\{\xi\}$  için

$$X = \lambda\xi \quad ,$$

$$\varphi(X) = \lambda\varphi(\xi) \quad ; \quad \varphi(\xi) = 0 \quad ,$$

$$\varphi(X) = 0$$

olur. Böylece  $\forall X \in Sp\{\xi\}$  için  $X \in Ker\varphi$  olur ki bu da

$$Sp\{\xi\} \subset Ker\varphi \quad (3.2.10)$$

(3.2.9) ve (3.2.10) dan  $Ker\varphi = Sp\{\xi\}$  demektir.

Sonuç olarak

$$rank\varphi + sifirlık\varphi = boy\chi(M)$$

ve

$$sifirlık\varphi = boy(Ker\varphi) = 1$$

olduğundan

$$\text{rank } \varphi = 2n$$

dır.

### 3.3. Hemen Hemen Kontak Metrik Manifold

**Tanım 3.3.1.**  $(2n+1)$ -boyutlu  $M$  diferensiyellenebilir Riemann Manifoldunu ele alalım.  $(\varphi, \xi, \eta)$  hemen hemen kontak yapısıyla birlikte  $M$  nin bir  $P$  noktasındaki  $g_P$  Riemann metriği

$$g_P : T_M(P) \times T_M(P) \xrightarrow[\text{poz. tanımlı}]{\substack{2\text{-lineer} \\ \text{simetrik}}} \square$$

dir.

$\forall X, Y \in \chi(M)$  ve  $\xi \in \chi(M)$  için

$$\eta(X) = g(X, \xi) \quad (3.3.1)$$

$$g(\varphi(X), \varphi(Y)) = g(X, Y) - \eta(X)\eta(Y) \quad (3.3.2)$$

koşullarını sağlayan  $g$  metriğine  $M$  üzerinde **hemen hemen kontak metrik**,  $(\varphi, \xi, \eta, g)$  yapısına da **hemen hemen kontak metrik yapı**,  $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$  beşlisine de **hemen hemen kontak metrik manifold** denir (Yano ve Kon 1984).

(3.3.2) eşitliğinde  $Y = \xi$  alınırsa

$$g(\varphi(X), \varphi(\xi)) = g(X, \xi) - \eta(X) \cdot \eta(\xi) \quad ; \quad \varphi(\xi) = 0 \quad , \quad \eta(\xi) = 1$$
$$\eta(X) = g(X, \xi)$$

olur.

$\varphi$  anti-simetrik olduğundan  $\varphi^* = -\varphi$  dir.

$$\begin{aligned}g(\varphi(X), \varphi(Y)) &= g(X, \varphi^*(\varphi(Y))) \\&= g(X, -\varphi(\varphi(Y))) \\&= -g(X, \varphi^2(Y)) \quad ; \quad \varphi^2(Y) = -Y + \eta(Y)\xi \\&= -g(X, -Y + \eta(Y)\xi) \quad ; \quad g \text{ lineer} \\&= g(X, Y) - \eta(Y)g(X, \xi) \quad ; \quad g(X, \xi) = \eta(X) \\&= g(X, Y) - \eta(X)\eta(Y)\end{aligned}$$

olur.

**Örnek 3.3.1.** Örnek (3.2.1) deki  $(\mathbb{R}^3, \varphi, \xi, \eta)$  hemen hemen kontak manifoldunda bir  $g$  metriği şöyle tanımlansın.

$$g = \frac{1}{4}((1 + y^2)dx^2 + dy^2 + dz^2 - 2ydx dz)$$

$\mathbb{R}^3$  de  $g$  metriğinin matris yazılımı

$$g = a_{11}dx^2 + a_{22}dy^2 + a_{33}dz^2 + 2a_{12}dxdy + 2a_{13}dxdz + 2a_{23}dydz$$

dir. Ayrıca  $g$  nin matrisi simetrik olduğundan  $g$  metriğinin matris yazılımı

$$g = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1+y^2 & 0 & -y \\ 0 & 1 & 0 \\ -y & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

şeklinde olup  $(\mathbb{R}^3, \varphi, \xi, \eta, g)$  beşlisi bir hemen hemen kontak metrik manifolddur.

$$\varphi(X) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ -x_1 \\ yx_2 \end{bmatrix} ,$$

$$\varphi(Y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_2 \\ -y_1 \\ yy_2 \end{bmatrix} ,$$

$$\eta(X) = \frac{1}{2}(x_3 - yx_1) ,$$

$$\eta(Y) = \frac{1}{2}(y_3 - yy_1) ,$$

$$g(\varphi(X), \varphi(Y)) = (\varphi(X))^T g(\varphi(Y))$$

olduğundan

$$g(\varphi(X), \varphi(Y)) = \begin{bmatrix} x_2 & -x_1 & yx_2 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1+y^2 & 0 & -y \\ 0 & 1 & 0 \\ -y & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_2 \\ -y_1 \\ yy_2 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \begin{bmatrix} x_2 & -x_1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_2 \\ -y_1 \\ yy_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{4}(x_2 y_2 + x_1 y_1) ,$$

$$\eta(X)\eta(Y) = \frac{1}{2}(x_3 - yx_1) \cdot \frac{1}{2}(y_3 - yy_1) \quad ,$$

$$\eta(X)\eta(Y) = \frac{1}{4}(x_3y_3 - yx_3y_1 - yx_1y_3 + y^2x_1y_1) \quad ,$$

$$g(X, Y) = \frac{1}{4}((1 + y^2)x_1y_1 - yx_1y_3 + x_2y_2 - yx_3y_1 + x_3y_3)$$

$$= \frac{1}{4}(x_1y_1 + x_2y_2) + \frac{1}{4}(x_3y_3 + y^2x_1y_1 - yx_1y_3 - yx_3y_1) \quad ,$$

$$g(\varphi(X), \varphi(Y)) = g(X, Y) - \eta(X)\eta(Y) \quad ,$$

$$g(X, Y) = g(\varphi(X), \varphi(Y)) + \eta(X)\eta(Y)$$

dır.

Şimdi  $\eta(X) = g(X, \xi)$  olduğunu gösterelim.

$$g(X, \xi) = [x_1 \ x_2 \ x_3] \cdot \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1+y^2 & 0 & -y \\ 0 & 1 & 0 \\ -y & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{4} [x_1 \ x_2 \ x_3] \cdot \begin{bmatrix} -2y \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \quad ,$$

$$g(X, \xi) = \frac{1}{2}(x_3 - yx_1)$$

$$\eta(X) = \frac{1}{2}(x_3 - yx_1)$$

olduğundan

$$\eta(X) = g(X, \xi)$$

olup  $(\mathbb{R}^3, \varphi, \xi, \eta, g)$  beşlisi bir hemen hemen kontak metrik manifold olur.

**Teorem 3.3.1.**  $(\varphi, \xi, \eta)$  hemen hemen kontak yapısıyla birlikte  $(2n+1)$  –boyutlu  $M$  diferensiyellenebilir manifoldu verilsin.

$\forall X, Y \in \chi(M)$  için

$$g(\varphi(X), \varphi(Y)) = g(X, Y) - \eta(X)\eta(Y)$$

olacak şekilde bir  $g$  Riemann metriği daima vardır (Blair 1976).

**İspat:** Her manifoldunda bir Riemann metriği vardır. O halde  $h'$ ,  $M$  de herhangi bir Riemann metrik olsun ve  $h$  metriğide  $\forall X, Y \in \chi(M)$  için

$$h(X, Y) = h'(\varphi^2(X), \varphi^2(Y)) + \eta(X)\eta(Y)$$

şeklinde tanımlansın. Önce  $h$  nın Riemann metriği olduğunu gösterelim.

- 1)  $h$  metriği simetriktir.
- 2)  $h$  nın bi-lineer olduğunu gösterelim.

$\forall X, Y, Z \in \chi(M)$  ve  $\forall a, b \in \mathbb{R}$  için  $h'$ ,  $\varphi$  ve  $\eta$  nın lineerliği kullanılarak,

$$\begin{aligned} h(aX + bY, Z) &= h'(\varphi^2(aX + bY), \varphi^2(Z)) + \eta(aX + bY)\eta(Z) \\ &= h'[a\varphi^2(X) + b\varphi^2(Y), \varphi^2(Z)] + a\eta(X)\eta(Z) + b\eta(Y)\eta(Z) \\ &= ah'(\varphi^2(X), \varphi^2(Z)) + bh'(\varphi^2(Y), \varphi^2(Z)) + a\eta(X)\eta(Z) + b\eta(Y)\eta(Z) \end{aligned}$$

$$= a[h'(\varphi^2(X), \varphi^2(Z)) + \eta(X)\eta(Z)] + b[h'(\varphi^2(Y), \varphi^2(Z)) + \eta(Y)\eta(Z)]$$

$$h(aX + bY, Z) = ah(X, Z) + bh(Y, Z)$$

dır.

$h$  simetrik olduğundan  $\forall X, Y, Z \in \chi(M)$  ve  $\forall a, b \in \mathbb{R}$  için

$$h(X, aY + bZ) = ah(X, Y) + bh(X, Z)$$

olur. O halde  $h$  **bi-lineerdir**.

**3)**  $\forall X \in \chi(M)$  için

$$h(X, X) = h'(\varphi^2(X), \varphi^2(X)) + \eta(X)\eta(X)$$

$$= h'(\varphi^2(X), \varphi^2(X)) + \eta^2(X)$$

dir.  $h'$  Riemann metrik olduğundan  $h'(\varphi^2(X), \varphi^2(X))$  ifadesi  $X \neq 0$  için pozitiftir.

Ayrıca  $\eta^2(X)$  de pozitif olduğundan

$$h(X, X) > 0 \quad ; \quad X \neq 0 \quad ,$$

$h(X, X) = 0$  ise

$$\eta(X) = 0 \quad ; \quad \eta(X) = g(X, \xi)$$

$$g(X, \xi) = 0 \quad \Rightarrow \quad X = 0.$$

Demek ki  $h$  metriği **pozitif definit**dir. O halde  $h$  bir Riemann metriği olur.

Şimdi  $g$  yi  $\forall X, Y \in \chi(M)$  için

$$g(X, Y) = \frac{1}{2}[h(X, Y) + h(\varphi(X), \varphi(Y)) + \eta(X)\eta(Y)] \quad (2.2.13)$$

şeklinde tanımlayalım ve  $g$  nin Riemann metriği olduğunu gösterelim.

**$g$  simetriktir:**

$$\begin{aligned} g(X, Y) &= \frac{1}{2}[h(X, Y) + h(\varphi(X), \varphi(Y)) + \eta(X)\eta(Y)] && ; h \text{ simetrik} \\ &= \frac{1}{2}[h(Y, X) + h(\varphi(Y), \varphi(X)) + \eta(Y)\eta(X)] \\ &= g(Y, X) . \end{aligned}$$

**$g$  bi-lineerdir:**

$\forall X, Y, Z \in \chi(M)$  ve  $\forall a, b \in \mathbb{R}$  için

$$\begin{aligned} g(aX + bY, Z) &= \frac{1}{2}[h(aX + bY, Z) + h(\varphi(aX + bY), \varphi(Z)) + \eta(aX + bY)\eta(Z)] \\ &= \frac{1}{2}[ah(X, Z) + bh(Y, Z) + h(a\varphi(X) + b\varphi(Y), \varphi(Z)) + a\eta(X)\eta(Z) + b\eta(Y)\eta(Z)] \\ &= ag(X, Z) + bg(Y, Z) . \end{aligned}$$

Ayrıca  $g$  simetrik olduğundan

$$g(X, aY + bZ) = ag(X, Y) + bg(X, Z) .$$

**$g$  pozitif-definitdir:**

$\forall X \in \chi(M)$  için  $g(X, X) = 0$  olsun.

$$g(X, X) = \frac{1}{2}[h(X, X) + h(\varphi(X), \varphi(X)) + \eta(X)\eta(X)]$$

$$\eta(X) = 0 \quad ; \quad \eta(X) = g(X, \xi)$$

$$g(X, \xi) = 0 \Rightarrow X = 0.$$

$X \neq 0$  için  $h(X, X) > 0$  ,  $h(\varphi(X), \varphi(X)) > 0$  ve  $\eta^2(X) > 0$  olduğu için  $g(X, X) > 0$  olur.

O halde  $g$  Riemann metriği olur.

(3.3.3) eşitliğinde  $X = \varphi(X)$  ve  $Y = \varphi(Y)$  alınırsa

$$g(\varphi(X), \varphi(Y)) = \frac{1}{2}[h(\varphi(X), \varphi(Y)) + h(\varphi^2(X), \varphi^2(Y)) + \eta(\varphi(X))\eta(\varphi(Y))] \quad ; \quad \eta \circ \varphi = 0$$

$$= \frac{1}{2}[h(\varphi(X), \varphi(Y)) + h(-X + \eta(X)\xi, -Y + \eta(Y)\xi)] \quad ; \quad h \text{ lineer}$$

$$g(\varphi(X), \varphi(Y)) = \frac{1}{2}[h(\varphi(X), \varphi(Y)) + h(X, Y) - \eta(Y)h(X, \xi) - \eta(X)h(\xi, Y) + \eta(X)\eta(Y)h(\xi, \xi)]$$

$$h(X, \xi) = \eta(X) \quad , \quad h(\xi, Y) = \eta(Y) \quad \text{ve} \quad h(\xi, \xi) = \eta(\xi) = 1$$

olduğundan

$$g(\varphi(X), \varphi(Y)) = \frac{1}{2}[h(\varphi(X), \varphi(Y)) + h(X, Y) - \eta(X)\eta(Y)]$$

$$= \frac{1}{2}[h(\varphi(X), \varphi(Y)) + h(X, Y) - \eta(X)\eta(Y) + 2\eta(X)\eta(Y)] - \eta(X)\eta(Y)$$

$$= \frac{1}{2}[h(X, Y) + h(\varphi(X), \varphi(Y)) + \eta(X)\eta(Y)] - \eta(X)\eta(Y)$$

$$= g(X, Y) - \eta(X)\eta(Y)$$

dır.

**Sonuç 3.3.1.**  $(2n+1)$  –boyutlu  $M$  Riemann manifoldu ve  $(\varphi, \xi, \eta, g)$  hemen hemen kontak metrik yapı olsun.  $\forall X, Y \in \chi(M)$  için

$$g(\varphi(X), Y) = -g(X, \varphi(Y)) . \quad (3.3.4)$$

Yani,  $\varphi$   $g$  ye göre anti-simetrik tensör alanıdır (Yano ve Kon 1984).

**İspat:**

$\forall X, Y \in \chi(M)$  için

$$g(\varphi(X), \varphi(Y)) = g(X, Y) - \eta(X)\eta(Y)$$

eşitliğinde  $X = \varphi(X)$  alınırsa

$$g(\varphi^2(X), \varphi(Y)) = g(\varphi(X), Y) - \eta(\varphi(X))\eta(Y) \quad ; \quad \eta \circ \varphi = 0$$

$$g(-X + \eta(X)\xi, \varphi(Y)) = g(\varphi(X), Y) \quad ; \quad g \text{ lineer}$$

$$-g(X, \varphi(Y)) + \eta(X)g(\xi, \varphi(Y)) = g(\varphi(X), Y) \quad ; \quad g(\xi, \varphi(Y)) = \eta(\varphi(Y)) = 0$$

$$g(\varphi(X), Y) = -g(X, \varphi(Y))$$

olur. Bu ise  $\varphi$  nin anti-simetrik bir tensör alanı olması demektir.

**Sonuç 3.3.2.**  $g$  metriğine karşılık gelen matris  $A$  ise  $\forall X, Y \in \chi(M)$  için

$$g(X, Y) = X^T A Y \quad (3.3.5)$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} \varphi: \chi(M) &\xrightarrow{\text{lineer}} \chi(M) \\ X &\longrightarrow \varphi(X) = BX \\ Y &\longrightarrow \varphi(Y) = BY \end{aligned}$$

için

$$B^T A = -AB \quad (3.3.6)$$

dır.

**İspat:**

$$g(BX, Y) = -g(X, BY)$$

$$(BX)^T A Y = -X^T A (BY)$$

$$X^T B^T A Y = -X^T A B Y \quad ; \text{ soldan } (X^T)^{-1}, \text{ sağdan } Y^{-1}$$

$$B^T A = -AB$$

dır. Özel olarak  $A = I$  olursa

$$B^T = -B$$

olur. Buda  $\varphi$  ye karşılık gelen matris anti-simetrik olur demektir.

**Teorem 3.3.2.**  $(2n+1)$  –boyutlu bir hemen hemen kontak manifoldu  $M$  verilsin.  $M$  nin kontak formu verildiğinde,  $\forall X, Y \in \chi(M)$  için

$$\varphi : \chi(M) \xrightarrow{\text{lineer}} \chi(M)$$

$$g(X, \varphi(Y)) = d\eta(X, Y) \quad (3.3.7)$$

olacak şekilde bir  $(\varphi, \xi, \eta, g)$  hemen hemen kontak metrik yapısı vardır (Yano ve Kon 1984).

**İspat:**

$\eta$  kontak formu için  $\forall X \in \chi(M)$  noktasında  $d\eta(\xi, T_X(M))=0$  olacak şekilde bir  $\xi$  vektör alanı vardır.

$\varphi$  anti-simetrik (1.1) tensör alanı olsun.

$\eta(X) = h(X, \xi)$  olacak şekilde bir  $h$  Riemann metriği her zaman vardır. Diğer yandan  $d\eta$  öyle bir simplektik formdur ki  $\xi$  nin ortogonal tümleyeni üzerindedir ve bu tümleyen üzerinde

$$g'(X, \varphi(Y)) = d\eta(X, Y)$$

ve

$$\varphi^2 = I$$

olacak şekilde bir  $g'$  metriği ve bir  $\varphi$  endomorfizmi vardır.

$\varphi(\xi) = 0$  koşulunu sağlayan  $\varphi$  yi genişleterek ve  $\xi$  nin doğrultusunda  $h$  ile uyumlu  $g$  metriğine  $g'$  genişletilirse

$$\varphi : \xi^\perp \longrightarrow \xi^\perp$$

dönüşümü için  $(\varphi, \xi, \eta, g)$  hemen hemen kontak metrik yapısına sahip oluruz. Bu ise

$$g(X, \varphi(Y)) = d\eta(X, Y)$$

demektir.

### 3.4 Kontak Manifoldlarda İkinci Temel Form

**Tanım 3.4.1.**  $M$  üzerinde bir  $(\varphi, \xi, \eta, g)$  hemen hemen kontak metrik yapısı verilsin.

$\forall X, Y \in \chi(M)$  için

$$\Phi(X, Y) = g(X, \varphi(Y)) = d\eta(X, Y) \quad (3.4.1)$$

şeklinde tanımlı  $\Phi$  dönüşümüne  $(\varphi, \xi, \eta, g)$  hemen hemen kontak metrik yapısının **II. Temel Formu** denir. Burada  $\eta$  kontak formu için yazılan  $\eta \wedge (d\eta)^n \neq 0$  koşulu  $\eta \wedge (\Phi)^n \neq 0$  halini alır (Yano ve Kon 1984).

**Örnek 3.4.1.** Örnek 3.3.1 deki  $(\mathbb{R}^3, \varphi, \xi, \eta, g)$  beşlisi bir hemen hemen kontak manifold olsun. Daha önce bu manifoldun hemen hemen kontak metrik manifold olduğunu gösterdik.

Şimdi  $(\varphi, \xi, \eta, g)$  hemen hemen kontak metrik yapısının II. Temel Formunu bulalım.

$$\eta = \frac{1}{2}(dz - ydx) \quad ,$$

$$d\eta = \frac{1}{2}[d(dz) - ydy \wedge dx - yd(dx)] \quad ; \quad d(dz) = 0 \quad , \quad d(dx) = 0$$

veya

$$d\eta = \frac{1}{2}(dx \wedge dy)$$

dan elde edilen

$$\Phi = \frac{1}{2}(dx \wedge dy)$$

ifadesi  $(\mathbb{R}^3, \varphi, \xi, \eta, g)$  hemen hemen kontak metrik manifoldunun II. Temel Formudur.

**Tanım 3.4.2.**  $(2n+1)$ -boyutlu hemen hemen kontak metrik manifoldu

$(M, \varphi, \xi, \eta, g)$  olsun. Eğer,  $\forall X, Y \in \chi(M)$  için

$$d\eta(X, Y) = g(X, \varphi(Y)) = \Phi(X, Y)$$

oluyorsa  $(\varphi, \xi, \eta, g)$  dörtlüsüne **kontak metrik yapı** ve  $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$  ye de **kontak metrik manifold** denir (Yano ve Kon 1984).

**Sonuç 3.4.1.**  $\Phi = d\eta$  eşitliğini sağlayan  $(\varphi, \xi, \eta, g)$  hemen hemen kontak metrik yapısı aynı zamanda kontak metrik yapıdır (Yano ve Kon 1984).

**Sonuç 3.4.2.** Her kontak metrik manifold aynı zamanda kontak manifolddur (Yano ve Kon 1984).

**Önerme 3.4.1.**  $w$  bir  $r$ -form olmak üzere  $\forall X_0, X_1, \dots, X_r \in \chi(M)$  için

$$\begin{aligned} dw(X_0, X_1, \dots, X_r) &= \frac{1}{r+1} \sum_{i=0}^r (-1)^i X_i (w(X_0, X_1, \dots, X_i, \dots, X_r)) \\ &\quad + \frac{1}{r+1} \sum_{0 \leq i < j \leq r} (-1)^{i+j} w([X_i, X_j], X_0, X_1, \dots, X_i, \dots, X_j, \dots, X_r) \end{aligned}$$

dir.

Özel olarak  $w$  bir 1-form ise

$$2dw(X, Y) = X(w(Y)) - Y(w(X)) - w([X, Y]) \quad (3.4.2)$$

dir.

**Teorem 3.4.1.**  $M$  üzerinde  $(\varphi, \xi, \eta, g)$  hemen hemen kontak metrik yapısı için

$$\Phi(X, Y) = \frac{1}{2}[g(D_X \xi, Y) - g(D_Y \xi, X)] \quad (3.4.3)$$

dir (Yano ve Kon 1984).

**İspat :**

$\eta$  1-form olduğundan  $\forall X, Y \in \chi(M)$  için

$$2d\eta(X, Y) = X(\eta(Y)) - Y(\eta(X)) - \eta([X, Y]) \quad (3.4.4)$$

dır.

$(\varphi, \xi, \eta, g)$  hemen hemen kontak metrik yapı olduğundan

$$\eta(X) = g(X, \xi) \quad , \quad \eta(Y) = g(Y, \xi) \quad , \quad \eta([X, Y]) = g([X, Y], \xi)$$

ifadeleri (3.4.4) de yerine yazılırsa

$$2d\eta(X, Y) = X(g(Y, \xi)) - Y(g(X, \xi)) - g([X, Y], \xi) \quad (3.4.5)$$

elde edilir, burada

$$X(g(Y, \xi)) = g(D_X Y, \xi) + g(Y, D_X \xi)$$

$$Y(g(X, \xi)) = g(D_Y X, \xi) + g(X, D_Y \xi)$$

eşitlikleri (3.4.5) de yerlerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
2d\eta(X, Y) &= g(D_X Y, \xi) + g(Y, D_X \xi) - g(D_Y X, \xi) - g(X, D_Y \xi) - g([X, Y], \xi) \\
&= g(D_X Y - D_Y X, \xi) + g(Y, D_X \xi) - g(X, D_Y \xi) - g([X, Y], \xi) \\
&= g(Y, D_X \xi) - g(X, D_Y \xi)
\end{aligned}$$

ve

$$d\eta(X, Y) = \Phi(X, Y)$$

olduğundan

$$\Phi(X, Y) = \frac{1}{2}[g(D_X \xi, Y) - g(D_Y \xi, X)]$$

olur.

**Teorem 3.4.2.**  $(2n+1)$ -boyutlu diferensiyellenebilir Riemann manifoldu  $M$ ,  $(\varphi, \xi, \eta, g)$  kontak metrik yapısıyla verilsin.  $\forall X, Y \in \chi(M)$  için

$$d\eta(X, \xi) = 0 \tag{3.4.6}$$

ve

$$d\eta(\varphi(X), Y) + d\eta(X, \varphi(Y)) = 0 \tag{3.4.7}$$

dır (Yano ve Kon 1984).

**İspat:**

(3.3.7) den  $\forall X, Y \in \chi(M)$  için

$$d\eta(X, Y) = g(X, \varphi(Y))$$

eşitliğinde  $Y = \xi$  alınırsa

$$d\eta(X, \xi) = g(X, \varphi(\xi)) \quad ; \quad \varphi(\xi) = 0$$

$$d\eta(X, \xi) = 0$$

olur.

Ayrıca (3.3.7) den

$$d\eta(\varphi(X), Y) = g(\varphi(X), \varphi(Y)) \quad (3.3.8)$$

$$\begin{aligned} d\eta(X, \varphi(Y)) &= g(X, \varphi^2(Y)) \quad ; \quad \varphi \text{ anti-simetrik} \\ &= -g(\varphi(X), \varphi(Y)) \end{aligned} \quad (3.3.9)$$

(3.3.8) ve (3.3.9) dan

$$d\eta(\varphi(X), Y) + d\eta(X, \varphi(Y)) = 0$$

dır.

### 3.5. Hemen Hemen Kontak Manifoldların Torsiyon Tensörü

**Tanım 3.5.1.**  $V$  bir vektör uzayı olmak üzere

$$J : V \rightarrow V$$

lineer dönüşümü

$$J^2 = -I$$

koşulunu sağlıyorsa  $J$  ye  $V$  üzerinde bir **kompleks yapı** denir (Yano ve Kon 1984).

$M$ ,  $(2n+1)$ -boyutlu hemen hemen kontak manifoldu verilsin.  $\square$  de bir manifold olduğundan  $M \times \square$  de bir manifolddur.

$$\chi(\square) = \left\{ f \frac{d}{dt} : f \in C^\infty(M, \square) \right\}$$

$$\chi(M \times \square) = \left\{ (X, f \frac{d}{dt}) \mid X \in \chi(M), f \frac{d}{dt} \in \chi(\square) \right\}$$

olmak üzere  $X$ ,  $M$  ye teğet bir vektör alanı,  $t$  de  $\square$  nin bir koordinatı ve

$f \frac{d}{dt}$ ,  $M \times \square$  üzerinde tanımlı bir fonksiyondur.  $M \times \square$  nin tanjant uzayındaki bir

$J$  lineer dönüşümü

$$J : \chi(M \times \square) \xrightarrow{\text{lineer}} \chi(M \times \square)$$

$$(X, f \frac{d}{dt}) \longrightarrow J(X, f \frac{d}{dt})$$

olmak üzere

$$J(X, f \frac{d}{dt}) = (\varphi(X) - f\xi, \eta(X) \frac{d}{dt}) \quad (3.5.1)$$

şeklinde tanımlanır (Yano ve Kon 1984).

**Teorem 3.5.1.**  $J$  dönüşümü

- i) Lineer bir dönüşümdür.
- ii)  $J^2 = -I$

dır (Yano ve Kon 1984).

**İspat:**

- i)  $\forall a, b \in \square$  ve  $\forall (X, f \frac{d}{dt}), (Y, g \frac{d}{dt}) \in \chi(M \times \square)$  için

$$\begin{aligned}
J\left(a\left(X, f \frac{d}{dt}\right) + b\left(Y, g \frac{d}{dt}\right)\right) &= J(aX + bY, (af + bg) \frac{d}{dt}) \\
&= (\varphi(aX + bY) - (af + bg)\xi, \eta(aX + bY) \frac{d}{dt}) \quad ; \quad \varphi \text{ ve } \eta \text{ lineer} \\
&= (a\varphi(X) + b\varphi(Y) - af\xi - bg\xi, a\eta(X) \frac{d}{dt} + b\eta(Y) \frac{d}{dt}) \\
&= (a\varphi(X) - af\xi, a\eta(X) \frac{d}{dt}) + (b\varphi(Y) - bg\xi, b\eta(Y) \frac{d}{dt}) \\
&= a\left(\varphi(X) - f\xi, \eta(X) \frac{d}{dt}\right) + b\left(\varphi(Y) - g\xi, \eta(Y) \frac{d}{dt}\right) \\
&= aJ\left(X, f \frac{d}{dt}\right) + bJ\left(Y, g \frac{d}{dt}\right)
\end{aligned}$$

O halde  $J$  lineer bir dönüşümdür.

ii)  $\forall \left(X, f \frac{d}{dt}\right) \in \mathcal{X}(M \times \square)$  için

$$\begin{aligned}
J^2\left(X, f \frac{d}{dt}\right) &= J\left(J\left(X, f \frac{d}{dt}\right)\right) = J\left(\varphi(X) - f\xi, \eta(X) \frac{d}{dt}\right) \\
&= \left(\varphi(\varphi(X) - f\xi) - \eta(X)\xi, \eta(\varphi(X) - f\xi) \frac{d}{dt}\right) \quad ; \quad \eta \text{ lineer} \\
&= \varphi^2(X) - f\varphi(\xi) - \eta(X)\xi, (\eta \circ \varphi)(X) \frac{d}{dt} - f\eta(\xi) \frac{d}{dt}
\end{aligned}$$

Tanım 3.2.1 ve Teorem 3.2.1 den

$$\begin{aligned}
J^2\left(X, f \frac{d}{dt}\right) &= (\varphi^2(X) - \eta(X)\xi, -f \frac{d}{dt}) \quad ; \quad \varphi^2(X) = -X + \eta(X)\xi \\
&= (-X + \eta(X)\xi - \eta(X)\xi, -f \frac{d}{dt}) \\
&= (-X, -f \frac{d}{dt}) \\
&= -I\left(X, f \frac{d}{dt}\right)
\end{aligned}$$

$\forall (X, f \frac{d}{dt}) \in \chi(M \times \square)$  için

$$J^2(X, f \frac{d}{dt}) = -I(X, f \frac{d}{dt})$$

olduğundan

$$J^2 = -I$$

olur.

**Sonuç 3.5.1.**  $(M \times \square)$  nin tanjant uzayında tanımlı  $J$  dönüşümü  $(M \times \square)$  üzerinde bir hemen hemen kompleks yapı oluşturur (Yano ve Kon 1984).

**Teorem 3.5.2.**  $V, W$  sırasıyla  $n$  ve  $m$  boyutlu iki vektör uzayı olsun.

$$A: V \longrightarrow W$$

dönüşümü lineer ise bu dönüşüm  $A \in F_n^m$  tipinde bir matrise karşılık gelir ve tersine her  $A \in F_n^m$  tipinde matrise bir lineer dönüşüm karşılık gelir (Hacısalıhoğlu 1998).

**Teorem 3.5.3 .**  $(2n+1)$ -boyutlu  $(M, \varphi, \xi, \eta)$  hemen hemen kontak metrik manifoldu verilsin. Teorem 3.5.2 uyarınca

$$J: \chi(M \times \square) \xrightarrow{\text{lineer}} \chi(M \times \square)$$

$$(X, f \frac{d}{dt}) \longrightarrow J(X, f \frac{d}{dt}) = (\varphi(X) - f \xi, \eta(X) \frac{d}{dt})$$

lineer dönüşümüne  $(2n+2) \times (2n+2)$  tipinde bir matris karşılık gelir ve bu matris

$$J = \begin{bmatrix} 0 & I_n & 0 & 0 \\ -I_n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

şeklindedir (Yıldırım 2004).

**İspat:**  $\chi(M) = Sp\{e_1, e_2, \dots, e_n, \varphi(e_1), \varphi(e_2), \dots, \varphi(e_n), \xi\}$

dır. Burada

$$E_i = (e_i, 0) \quad ; \quad 1 \leq i \leq n$$

$$\varphi(E_i) = (\varphi(e_i), 0) \quad ; \quad 1 \leq i \leq n$$

$$E_{2n+1} = (\xi, 0)$$

$$E_{2n+2} = \left(0, \frac{d}{dt}\right)$$

denilirse

$$\chi(M \times \square) = Sp\{E_1, E_2, \dots, E_n, \varphi(E_1), \varphi(E_2), \dots, \varphi(E_n), E_{2n+1}, E_{2n+2}\}$$

olur. Buna göre

$$J(E_i) = J(e_i, 0) = (\varphi(e_i) - 0 \cdot \xi, \eta(e_i) \frac{d}{dt}) \quad ; \quad 1 \leq i \leq n$$

$$J(E_i) = (\varphi(e_i), 0)$$

$$J(E_i) = \varphi(E_i) \quad ; \quad 1 \leq i \leq n \quad (3.5.2)$$

$$\begin{aligned}
J(\varphi(E_i)) &= (\varphi(e_i), 0) \\
&= (\varphi^2(e_i) - 0.\xi, \eta(\varphi(e_i))\frac{d}{dt}) \quad ; \quad \eta \circ \varphi = 0 \\
&= (-e_i + \eta(e_i)\xi, 0) \\
&= (-e_i, 0)
\end{aligned}$$

$$J(\varphi(E_i)) = -E_i \quad ; \quad 1 \leq i \leq n \quad (3.5.3)$$

$$\begin{aligned}
J(E_{2n+1}) &= J(\xi, 0) \\
&= (\varphi(\xi) - 0.\xi, \eta(\xi)\frac{d}{dt}) \\
&= (0, \frac{d}{dt}) \\
J(E_{2n+1}) &= E_{2n+2} \quad (3.5.4)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
J(E_{2n+2}) &= J(0, \frac{d}{dt}) \\
&= (\varphi(0) - \xi, \eta(0)\frac{d}{dt}) \\
&= (-\xi, 0) \\
J(E_{2n+2}) &= -E_{2n+1} \quad (3.5.5)
\end{aligned}$$

(3.5.2), (3.5.3), (3.5.4) ve (3.5.5) eşitlikleri yardımıyla  $J$  lineer dönüşümüne karşılık gelen matrisi bulalım.

$$\begin{aligned}
J(E_1) &= 0.E_1 + 0.E_2 + \dots + 0.E_n + 1.\varphi(E_1) + 0.\varphi(E_2) + \dots + 0.\varphi(E_n) + 0.E_{2n+1} + 0.E_{2n+2} \\
J(E_2) &= 0.E_1 + 0.E_2 + \dots + 0.E_n + 0.\varphi(E_1) + 1.\varphi(E_2) + \dots + 0.\varphi(E_n) + 0.E_{2n+1} + 0.E_{2n+2} \\
&\vdots \\
J(E_n) &= 0.E_1 + 0.E_2 + \dots + 0.E_n + 0.\varphi(E_1) + 0.\varphi(E_2) + \dots + 1.\varphi(E_n) + 0.E_{2n+1} + 0.E_{2n+2} \\
J(\varphi(E_1)) &= -1.E_1 + 0.E_2 + \dots + 0.E_n + 0.\varphi(E_1) + 0.\varphi(E_2) + \dots + 0.\varphi(E_n) + 0.E_{2n+1} + 0.E_{2n+2} \\
J(\varphi(E_2)) &= 0.E_1 - 1.E_2 + \dots + 0.E_n + 0.\varphi(E_1) + 0.\varphi(E_2) + \dots + 0.\varphi(E_n) + 0.E_{2n+1} + 0.E_{2n+2} \\
&\vdots \\
J(\varphi(E_n)) &= 0.E_1 + 0.E_2 + \dots - 1.E_n + 0.\varphi(E_1) + 0.\varphi(E_2) + \dots + 0.\varphi(E_n) + 0.E_{2n+1} + 0.E_{2n+2} \\
J(E_{2n+1}) &= 0.E_1 + 0.E_2 + \dots + 0.E_n + 0.\varphi(E_1) + 0.\varphi(E_2) + \dots + 0.\varphi(E_n) + 0.E_{2n+1} + 1.E_{2n+2} \\
J(E_{2n+2}) &= 0.E_1 + 0.E_2 + \dots + 0.E_n + 0.\varphi(E_1) + 0.\varphi(E_2) + \dots + 0.\varphi(E_n) - 1.E_{2n+1} + 0.E_{2n+2}
\end{aligned}$$

Buna göre

$$J = \begin{bmatrix} 0 & I_n & 0 & 0 \\ -I_n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

olur.

**Tanım 3.5.2.**  $(2n + 1)$ -boyutlu bir  $M$  manifoldu  $(\varphi, \xi, \eta, g)$  hemen hemen kontak yapısı ile verilsin.  $M \times \square$  de **Braket operatörü**

$$\begin{aligned}
[\ , \ ]: \chi(M \times \square) \times \chi(M \times \square) &\longrightarrow \chi(M \times \square) \\
((X, f \frac{d}{dt}), (Y, g \frac{d}{dt})) &\longrightarrow \left[ (X, f \frac{d}{dt}), (Y, g \frac{d}{dt}) \right]
\end{aligned}$$

olmak üzere

$$\left[ (X, f \frac{d}{dt}), (Y, g \frac{d}{dt}) \right] = ([X, Y], (X(g) - Y(f)) \frac{d}{dt}) \quad (3.5.6)$$

dır (Camcı 2003).

**Tanım 3.5.3.**  $M$  diferensiyellenebilir bir manifold olmak üzere  $F$ , (1,1) tipinde tensör alanı olsun.

$$\forall X, Y \in \chi(M)$$

için

$$N_F : \chi(M) \times \chi(M) \longrightarrow \chi(M)$$

$$(X, Y) \longrightarrow N_F(X, Y)$$

olmak üzere

$$N_F(X, Y) = F^2([X, Y]) + [F(X), F(Y)] - F([F(X), Y]) - F([X, F(Y)]) \quad (3.5.7)$$

şeklinde tanımlanan (1,2) tipinde  $N_F$  tensör alanına  **$F$  nin Nijenhuis torsiyon tensörü** denir.

Özel haller;

i)  $F = \varphi$  olması durumunda

$\forall X, Y \in \chi(M)$  için

$$N_\varphi(X, Y) = -[X, Y] + \eta[X, Y]\xi + [\varphi(X), \varphi(Y)] - \varphi[\varphi(X), Y] - \varphi[X, \varphi(Y)] \quad (3.5.8)$$

şeklinde tanımlanan  $N_\varphi$  tensör alanına  $\varphi$  nin **Nijenhuis torsiyon tensörü** denir.

ii)  $F = J$  olması halinde

$$\begin{aligned} N_j\left(\left(X, f \frac{d}{dt}\right), \left(Y, g \frac{d}{dt}\right)\right) = & -\left[\left(X, f \frac{d}{dt}\right), \left(Y, g \frac{d}{dt}\right)\right] + \left[J\left(X, f \frac{d}{dt}\right), J\left(Y, g \frac{d}{dt}\right)\right] \\ & - J\left[J\left(X, f \frac{d}{dt}\right), \left(Y, g \frac{d}{dt}\right)\right] - J\left[\left(X, f \frac{d}{dt}\right), J\left(Y, g \frac{d}{dt}\right)\right] \end{aligned} \quad (3.5.9)$$

şeklinde tanımlı  $N_j$  tensör alanına  $J$  hemen hemen kompleks yapısının **Nijenhuis torsiyon tensörü** denir (Kocayiğit 2004).

**Sonuç 3.5.2**  $N_F$  Nijenhuis torsiyon tensörü bi-lineer ve antisimetrik tensördür.

**Tanım 3.5.4.**  $(M \times \square, J)$  hemen hemen kontak manifoldu verilsin.  $N_j \equiv 0$  ise  $J$  hemen hemen kompleks yapısına **integrallenebilirdir** denir (Yano ve Kon 1984, Blair 2002).

**Tanım 3.5.5.**  $M$  üzerinde bir vektör alanı  $X$  ve  $X$  ile gerilmiş lokal dönüşümlü 1-parametrel grup  $\varphi_t$  olsun.  $X$  vektör alanına göre bir  $F$  tensör alanının  $L_x F$  ile gösterilen **Lie türevi** ;

$$L_x F = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} [F_p - (\varphi_t F)_p]$$

$$L_x F = [X, F] \quad (3.5.10)$$

olarak tanımlanır (Yano ve Kon 1984).

**Önerme 3.5.1.**  $L_x F = 0$  olması için gerek ve yeter koşul  $\forall t \in \square$  için  $\varphi_t$  nin  $F$  yi invariyant bırakmasıdır. (Yano ve Kon 1984).

**Önerme 3.5.2.**  $X$  vektör alanına  $L_x$  ile gösterilen Lie türevi, aşağıdaki özellikleri sağlar:

i)  $L_x(F \otimes F') = (L_x F) \otimes F' + F \otimes (L_x F')$  ;  $(F, F'$  herhengi tensör alanları)

ii)  $L_x f = X[f] = df(X)$  ;  $f \in C^\infty(M, \square)$

iii)  $L_x Y = [X, Y]$  ;  $X, Y \in \chi(M)$

iv)  $T : \chi(M) \times \chi(M) \times \dots \times \chi(M) \xrightarrow{r\text{-lineer}} C^\infty(M, \square)$

$$(X_1, X_2, \dots, X_r) \xrightarrow{r\text{-lineer}} T(X_1, X_2, \dots, X_r)$$

olmak üzere  $T, (1, r)$ -tipinden tensördür. Burada

$$(L_X T)(X_1, X_2, \dots, X_r) = X(T(X_1, X_2, \dots, X_r)) - \sum_{i=1}^r T(X_1, \dots, [X, X_i], \dots, X_r)$$

şeklindedir.

v)  $(L_X F)(Y) = X(F(Y)) - F([X, Y])$  ,  $\forall X, Y \in \chi(M)$  ve  $F, (0, 1)$ -tipinden tensör

vi)  $(L_X g)(Y, Z) = X(g(Y, Z)) - g([X, Y], Z) - g(Y, [X, Z])$  ,  $\forall X, Y, Z \in \chi(M)$

Burada  $g, (0, 2)$ -tipli geometrik (metrik) tensördür.

$$\begin{aligned} \text{vii) } (L_X T)(W^1, W^2, \dots, W^p, X_1, X_2, \dots, X_q) &= X(T(W^1, W^2, \dots, W^p, X_1, X_2, \dots, X_q)) \\ &\quad - \sum_{i=1}^p T(W^1, \dots, L_X W^i, \dots, W^p, X_1, X_2, \dots, X_q) \\ &\quad - \sum_{i=1}^q T(W^1, \dots, W^p, X_1, \dots, [X, X_i], \dots, X_q) \end{aligned}$$

burada  $T, (p, q)$ -tipli bir tensör alanıdır (Yano ve Kon 1984).

**Teorem 3.5.4.**  $(2n + 1)$ -boyutlu diferensiyellenebilir bir manifold  $M$ ,  $(\varphi, \xi, \eta)$  hemen hemen kontak yapısı verilmiş olsun.

$\forall X, Y \in \chi(M)$  için,

$$(L_{\varphi(x)} \eta)(Y) = \varphi(X)(\eta(Y)) - \eta([\varphi(X), Y]) \quad (3.5.11)$$

$$(L_{\xi} \eta)(X) = \xi \eta(X) - \eta([\xi, X]) \quad (3.5.12)$$

$$(L_{\xi} \varphi)(X) = [\xi, \varphi(X)] - \varphi([\xi, X]) \quad (3.5.13)$$

dır (Camcı 2003).

**Teorem 3.5.5.**  $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$  hemen hemen kontak metrik manifoldu verilsin.

$$(L_{\varphi(x)}\eta)(Y) = (L_{\varphi(Y)}\eta)(X) \quad (3.5.14)$$

dir (Yano ve Kon 1984).

**İspat:**  $\forall X, Y \in \chi(M)$  için,

$$2d_{\eta}(\varphi(X), Y) = \varphi(X)\eta(Y) - Y(\eta\varphi(X)) - \eta[\varphi(X), Y] \quad ; \eta \circ \varphi = 0$$

$$2d_{\eta}(X, \varphi(Y)) = X(\eta(\varphi(X))) - \varphi(Y)\eta(X) - \eta[X, \varphi(Y)] \quad ; \eta \circ \varphi = 0$$

eşitlikleri taraf tarafa toplanırsa

$$2\{d_{\eta}(\varphi(X), Y) + d_{\eta}(X, \varphi(Y))\} = \varphi(X)\eta(Y) - \eta[\varphi(X), Y] - \varphi(Y)\eta(X) - \eta[X, \varphi(Y)]$$

$$d_{\eta}(\varphi(X), Y) = -d_{\eta}(X, \varphi(Y))$$

olduğundan

$$\varphi(X)\eta(Y) - \eta[\varphi(X), Y] - \varphi(Y)\eta(X) - \eta[X, \varphi(Y)] = 0$$

eşitliği 3.5.11 e göre düzenlenirse

$$(L_{\varphi(x)}\eta)(Y) - (L_{\varphi(y)}\eta)(X) = 0$$

ve dolayısıyla

$$(L_{\varphi(x)}\eta)(Y) = (L_{\varphi(y)}\eta)(X)$$

olur.

**Teorem 3.5.6.**  $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$  hemen hemen kontak metrik manifoldu verilmiş olsun.

$$h : \chi(M) \longrightarrow \chi(M)$$

$$X \longrightarrow h(X) = \frac{1}{2}(L_\xi \varphi)(X) = \frac{1}{2}(L_\xi \varphi(X) - \varphi L_\xi(X)) \quad (3.5.15)$$

şeklinde tanımlı  $h$  metriği

- i) Lineerdir.
- ii)  $h, \varphi$  ile anti-komutatittir (Yıldırım 2004).

**İspat :** i)  $\forall X, Y \in \chi(M)$  için

$$\begin{aligned} h(X+Y) &= \frac{1}{2}(L_\xi \varphi)(X+Y) \\ &= \frac{1}{2}(L_\xi(\varphi(X+Y)) - \varphi L_\xi(X+Y)) \quad ; \quad \varphi \text{ ve } L_\xi \end{aligned}$$

lineer

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2}(L_\xi(\varphi(X) + \varphi(Y)) - \varphi L_\xi(X) - \varphi L_\xi(Y)) \\ &= \frac{1}{2}(L_\xi(\varphi(X)) + \varphi L_\xi(X)) + \frac{1}{2}(L_\xi(\varphi(Y)) - \varphi L_\xi(Y)) \end{aligned}$$

(3.5.15) eşitliğinden

$$h(X+Y) = \frac{1}{2}(L_\xi \varphi)(X) + \frac{1}{2}(L_\xi \varphi)(Y)$$

ve dolayısıyla

$$h(X+Y) = h(X) + h(Y)$$

olur.

$\forall k \in \mathbb{R}$  ve  $\forall X \in \chi(M)$  için

$$\begin{aligned}
 h(kX) &= \frac{1}{2}(L_\xi \varphi)(kX) \\
 &= \frac{1}{2}\{L_\xi \varphi(kX) - \varphi L_\xi(kX)\} \quad ; \varphi \text{ ve } L_\xi \text{ lineer} \\
 &= \frac{1}{2}\{k(L_\xi \varphi(X)) - k\varphi L_\xi(X)\} \\
 &= \frac{k}{2}\{L_\xi \varphi(X) - \varphi L_\xi(X)\}
 \end{aligned}$$

(3.5.15) eşitliğinden

$$h(kX) = kh(X)$$

olur.

ii)  $\forall X, Y \in \chi(M)$  için

$$\begin{aligned}
 g(X, \varphi(Y)) &= d_\eta(X, Y) \\
 &= \frac{1}{2}\{X \eta(Y) - Y \eta(X) - \eta[X, Y]\} \\
 &= \frac{1}{2}\{g(D_X Y, \xi) + g(Y, D_X \xi) - g(D_Y X, \xi) \\
 &\quad - g(X, D_Y \xi) - g(D_X Y, \xi) + g(D_Y X, \xi)\} \\
 &= \frac{1}{2}\{g(D_X \xi, Y) - g(D_Y \xi, X)\} \\
 &= \frac{1}{2}\{g(-\varphi(X) - \varphi(h(X)), Y) - g(-\varphi(Y) - \varphi(h(Y)), X)\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2}\{g(X, \varphi(Y) - g(\varphi(h(X)), Y) + g(X, \varphi(Y)) + g(\varphi(h(Y)), X)\} \\
 &= g(X, \varphi(Y)) - \frac{1}{2}g(\varphi(h(X)), Y) + \frac{1}{2}g(\varphi(h(Y)), X)
 \end{aligned}$$

olur. Buna göre

$$\begin{aligned}
g(\varphi(h(X), Y) &= g(\varphi(h(Y)), X) \\
&= -g(h(Y), \varphi(X)) \\
&= -g(Y, h(\varphi(X))) \\
&= g(-h(\varphi(X)), Y)
\end{aligned}$$

olduğundan

$$\begin{aligned}
\varphi(h(X)) &= -h(\varphi(X)) \\
(\varphi h)(X) &= (-h \varphi)(X)
\end{aligned}$$

ve sonuç olarak

$$\varphi h = -h \varphi$$

olur.

**Tanım 3.5.6.** Eğer  $M \times \mathbb{R}$  üzerinde bir  $J$  hemen hemen kompleks yapısı integrallenebilir ise  $(\varphi, \xi, \eta)$  hemen hemen kontak yapısına **normaldir** denir (Yano ve Kon 1984, Blair 2002).

**Teorem 3.5.7.**  $(2n+1)$ -boyutlu  $(M, \varphi, \xi, \eta)$  hemen hemen kontak manifoldu verilsin.  $\forall X, Y \in \chi(M)$  için,

$$N_j((X, 0)(Y, 0)) = \left( N^{(1)}(X, Y), N^{(2)}(X, Y) \frac{d}{dt} \right)$$

ve

$$N_j \left( (X, 0), \left( 0, \frac{d}{dt} \right) \right) = \left( N^{(3)}(X), N^{(4)}(X) \frac{d}{dt} \right)$$

dir. Burada

$$N^{(1)}(X, Y) = N_\varphi(X, Y) + 2d\eta(X, Y)\xi$$

$$N^{(2)}(X, Y) = (L_{\varphi(X)}\eta)(Y) - (L_{\varphi(Y)}\eta)(X)$$

$$N^{(3)}(X) = (L_\xi \varphi)(X)$$

$$N^{(4)}(X) = (L_\xi \eta)(X)$$

şeklindedir (Blair 2002).

**İspat:**  $N_j((X,0),(Y,0))$  ve  $N_j\left((X,0),(0,\frac{d}{dt})\right)$  torsiyon tensörlerini hesaplayalım.

$$N_j((X,0),(Y,0)) = -[(X,0),(Y,0)] + [J(X,0),J(Y,0)] - J[J(X,0),(Y,0)] - J[(X,0),J(Y,0)]$$

$$= -([X,Y],0) + [(\varphi(X),\eta(X)\frac{d}{dt}),(\varphi(Y),\eta(Y)\frac{d}{dt})] - J[(\varphi(X),\eta(X)\frac{d}{dt}), (Y,0)]$$

$$- J[(X,0),(\varphi(Y),\eta(Y)\frac{d}{dt})]$$

$$= -([X,Y],0) + \left( [\varphi(X),\varphi(Y)], (\varphi(X)\eta(Y) - \varphi(Y)\eta(X))\frac{d}{dt} \right)$$

$$- J\left( [\varphi(X),Y], -Y\eta(X)\frac{d}{dt} \right) - J\left( [X,\varphi(Y)], X\eta(Y)\frac{d}{dt} \right)$$

$$= -([X,Y],0) + \left( [\varphi(X),\varphi(Y)], (\varphi(X)\eta(Y) - \varphi(Y)\eta(X))\frac{d}{dt} \right)$$

$$- \left( \varphi[\varphi(X),Y] + Y\eta(X)\xi, \eta([\varphi(X),Y])\frac{d}{dt} \right)$$

$$- \left( \varphi[X,\varphi(Y)] - X\eta(Y)\xi, \eta([X,\varphi(Y)])\frac{d}{dt} \right)$$

$$= (-[X,Y] + [\varphi(X),\varphi(Y)] - \varphi[\varphi(X),Y] - \varphi[X,\varphi(Y)]$$

$$+ (X\eta(Y) - Y\eta(X))\xi, (\varphi(X)\eta(Y) - \varphi(Y)\eta(X) - \eta([\varphi(X),Y]) - \eta([X,\varphi(Y)])\frac{d}{dt})$$

$$= (-[X,Y] + [\varphi(X),\varphi(Y)] - \varphi[\varphi(X),Y] - \varphi[X,\varphi(Y)] + (X\eta(Y) - Y\eta(X))\xi$$

$$+ \eta[X,Y]\xi - \eta[X,Y]\xi, (\varphi(X)\eta(Y) - \varphi(Y)\eta(X) - \eta([\varphi(X),Y]) - \eta([X,\varphi(Y)])\frac{d}{dt}) \quad (2.3.16)$$

Ayrıca

$$2d\eta(X,Y) = X(\eta(Y)) - Y(\eta(X)) - \eta[X,Y]$$

$$(L_{\varphi(X)}\eta)Y = \varphi(X)(\eta(Y)) - \eta([\varphi(X),Y])$$

$$(L_{\varphi(Y)}\eta)X = \varphi(Y)(\eta(X)) - \eta([\varphi(Y),X])$$

oldukları düşünülür ve

$$N_\varphi(X, Y) = -[X, Y] + \eta[X, Y]\xi + [\varphi(X), \varphi(Y)] - \varphi[\varphi(X), Y] - \varphi[X, \varphi(Y)]$$

(3.5.16) da yerine yazılırsa

$$N_j((X, 0), (Y, 0)) = \left( \underbrace{N_\varphi(X, Y) + 2d\eta(X, Y)\xi}_{N^{(1)}(X, Y)}, \underbrace{((L_{\varphi(X)}\eta)Y - (L_{\varphi(Y)}\eta)X)}_{N^{(2)}(X, Y)} \frac{d}{dt} \right)$$

Benzer mantıkla

$$\begin{aligned} N_j((X, 0), (0, \frac{d}{dt})) &= - \left[ (X, 0), (0, \frac{d}{dt}) \right] + \left[ J(X, 0), J(0, \frac{d}{dt}) \right] \\ &\quad - J \left[ J(X, 0), (0, \frac{d}{dt}) \right] - J \left[ (X, 0), J(0, \frac{d}{dt}) \right] \\ &= \left[ (\varphi(X), \eta(X) \frac{d}{dt}), (-\xi, 0) \right] - J \left[ (\varphi(X), \eta(X) \frac{d}{dt}), (0, \frac{d}{dt}) \right] - J \left[ (X, 0), (-\xi, 0) \right] \\ &= (-[\varphi(X), \xi], \xi\eta(X) \frac{d}{dt}) - J([\varphi(X), 0], (\varphi(X)(1) - 0) \frac{d}{dt}) - J(-[X, \xi], 0) \\ &= (-[\varphi(X), \xi], \xi\eta(X) \frac{d}{dt}) - (-\varphi[X, \xi], -\eta[X, \xi] \frac{d}{dt}) \\ &= \left( (\varphi[X, \xi] - [\varphi X, \xi]), (\xi\eta(X) + \eta[X, \xi]) \frac{d}{dt} \right) \end{aligned} \quad (3.517)$$

$$(L_X \omega)(Y_1, \dots, Y_r) = L_X(\omega(Y_1, \dots, Y_r)) - \sum_{i=1}^r \omega(Y_1, \dots, [X, Y_i], \dots, Y_r)$$

olduğundan hareketle

$$(L_\xi \eta)X = L_\xi(\eta(X)) - \eta[\xi, X] \quad (3.5.18)$$

ve

$$(L_\xi \varphi)X = L_\xi(\varphi X) - \varphi[\xi, X] = [\xi, \varphi X] + \varphi[X, \xi]$$

$$= \varphi[X, \xi] - [\varphi(X), \xi] \quad (3.5.19)$$

olur.

(3.5.18) ve (3.5.19) eşitlikleri (3.5.17) de yazılırsa

$$N_j((X, 0), (0, \frac{d}{dt})) = \underbrace{((L_\xi \varphi)X)}_{N^{(3)}(X)}, \underbrace{(L_\xi \eta)X \frac{d}{dt}}_{N^{(4)}(X)}$$

olur. Sonuç olarak

$$N^{(1)}(X, Y) = N_\varphi(X, Y) + 2d\eta(X, Y)\xi \quad (3.5.20)$$

$$N^{(2)}(X, Y) = (L_{\varphi(X)}\eta)Y - (L_{\varphi(Y)}\eta)X$$

$$N^{(3)}(X, Y) = (L_\xi \eta)X$$

$$N^{(4)}(X, Y) = (L_\xi \eta)X$$

eşitlikleri göz önüne alınırsa

$$N_j((X, 0), (Y, 0)) = (N^{(1)}(X, Y), N^{(2)}(X, Y) \frac{d}{dt})$$

ve

$$N_j((X, 0), (0, \frac{d}{dt})) = (N^{(3)}(X), N^{(4)}(X) \frac{d}{dt})$$

olur.

**Teorem 3.5.8.**  $M$ ,  $(2n+1)$  boyutlu Riemann manifoldunda  $(\varphi, \xi, \eta)$  hemen hemen kontak yapısı verilsin. Bu yapının normal olabilmesi için gerek ve yeter şart  $N^{(1)}, N^{(2)}, N^{(3)}, N^{(4)}$  tensörlerinin sıfır olmasıdır (Camcı 2003).

**İspat:**  $(\Rightarrow)$  :  $N_j((X, f \frac{d}{dt}), (Y, g \frac{d}{dt})) = (N_j(X, 0) + (0, f \frac{d}{dt}), (Y, 0) + (0, g \frac{d}{dt}))$

Burada  $J$  nin lineerliği,  $N_j$  'nin bi-lineer ve antisimetrik oluşunu kullanırsak

$$N_j\left(\left(X, f \frac{d}{dt}\right), \left(Y, g \frac{d}{dt}\right)\right) = N_j\left(\left(X, 0\right), \left(Y, 0\right)\right) + gN_j\left(\left(X, 0\right), \left(0, \frac{d}{dt}\right)\right) \\ - fN_j\left(\left(Y, 0\right), \left(0, \frac{d}{dt}\right)\right) + fgN_j\left(\left(0, \frac{d}{dt}\right), \left(0, \frac{d}{dt}\right)\right)$$

elde edilir.

$$N_j\left(\left(0, \frac{d}{dt}\right), \left(0, \frac{d}{dt}\right)\right) = 0$$

olduğundan

$$N_j\left(\left(X, f \frac{d}{dt}\right), \left(Y, g \frac{d}{dt}\right)\right) = N_j\left(\left(X, 0\right), \left(Y, 0\right)\right) + gN_j\left(\left(X, 0\right), \left(0, \frac{d}{dt}\right)\right) - fN_j\left(\left(Y, 0\right), \left(0, \frac{d}{dt}\right)\right)$$

$$= (N^1(X, Y), N^2(X, Y)) + g(N^3(X), N^4(X)) - f(N^3(Y), N^4(Y))$$

$$= (N^1(X, Y) + gN^3(X) - fN^3(Y), N^2(X, Y) + gN^4(X) - fN^4(Y))$$

olur. Şayet  $N_j = 0$  ise

$$N^1(X, Y) + gN^3(X) - fN^3(Y) = 0 \quad (3.5.21)$$

$$N^2(X, Y) + gN^4(X) - fN^4(Y) = 0 \quad (3.5.22)$$

olur.

$N_\varphi$ ,  $d\eta$ ,  $N^1$  ve  $N^2$  antisimetrik olduğunu kolayca gösterebiliriz.

(3.5.21) eşitliğinde  $X = Y$  alırsak

$$N^1(X, X) = (f - g)N^3(X) \quad ; \quad (f \neq g)$$

elde edilir.

$$N^1 \text{ anti-simetrik olduğundan} \quad N^1(X, X) = 0$$

$$(f - g)N^3(X) = 0$$

$$N^3(X) = 0 \quad ; \quad (\forall X \in \chi(M) \text{ için})$$

$$N^3 = 0$$

(3.5.22) eşitliğinde  $X = Y$  alırsak

$$N^2(X, X) = (f - g)N^4(X)$$

$$(f \neq g)$$

elde edilir.

$$N^2 \text{ anti-simetrik olduğundan} \quad N^2(X, X) = 0$$

$$(f - g)N^4(X) = 0$$

$$N^4(X) = 0 \quad ; \quad (\forall X \in \chi(M) \text{ için})$$

$$N^4 = 0$$

Dikkat edilirse bu ispatı yaparken  $f \neq g$  aldık.

Şimdi de  $f = g$  olsun

(3.5.21) ve (3.5.22) eşitliklerinde  $Y = -X$  ve  $f = g$  alınırsa

$$N^1(X, -X) + fN^3(X) - fN^3(-X) = 0$$

$$N^1(X, X) = 0 \quad ; \quad N^1 \text{ anti-simetrik}$$

$$2fN^3(X) = 0$$

$\forall X \in \chi(M)$  ve  $f \neq 0$  olduğundan

$$N^3 = 0$$

$$N^2(X, -X) + fN^4(X) - fN^4(-X)$$

$$N^2(X, X) = 0 \quad ; \quad N^2 \text{ anti-simetrik}$$

$$2fN^4(X) = 0$$

$\forall X \in \chi(M)$  ve  $f \neq 0$  olduğundan

$$N^4 = 0$$

olur.

( $\Leftarrow$ ): Tersine kabul edelimki  $N^1(X, Y) = N^2(X, Y) = N^3(X) = N^4(X) = 0$  olsun.

$$N_J((X, f \frac{d}{dt}), (Y, g \frac{d}{dt})) = (N^1(X, Y) + gN^3(X) - fN^3(Y), N^2(X, Y) + gN^4(X) - fN^4(Y))$$

eşitliğinde  $N^1(X, Y) = N^2(X, Y) = N^3(X) = N^4(X) = 0$  olduğu göz önüne alınırsa

$$N_J((X, f \frac{d}{dt}), (Y, g \frac{d}{dt})) = (0, 0)$$

elde edilir. Bu  $\forall ((X, f \frac{d}{dt}), (Y, g \frac{d}{dt})) \in \chi(MX^{\square})$  için sağlandığından dolayı

$$N_J \equiv 0$$

olur. Dolayısıyla  $(\varphi, \xi, \eta)$  hemen hemen kontak yapısı normaldir.

**Teorem 3.5.9.**  $(2n+1)$ -boyutlu  $(M, \varphi, \xi, \eta)$  hemen hemen kontak manifoldu verilsin.

$N^1 = 0$  ise  $N^2 = N^3 = N^4 = 0$  dır (Camcı 2003).

**İspat:**  $\forall X, Y \in \chi(M)$  için

$$N^1(X, Y) = N_\varphi(X, Y) + 2d_\eta(X, Y)$$

ve  $Y = \xi$  alınırsa

$$N^1(X, \xi) = N_\varphi(X, \xi) + 2d_\eta(X, \xi)$$

olur.

(3.5.21) ve (3.5.8) den

$$N^1(X, \xi) = [X, \xi] + \varphi[\xi, \varphi(X)] - (\xi\eta(X))\xi \quad (3.5.23)$$

dır. Hipotezden için  $N^1 = 0$  olduğundan

$$[\xi, X] + \varphi[\xi, \varphi(X)] - (\xi\eta(X))\xi = 0 \quad (3.5.24)$$

elde edilir. Her iki tarafı “ $\eta$ ” altında görüntüsünü alırsak

$$\eta[\xi, X] + \eta(\varphi[\xi, \varphi(X)] - (\xi\eta(X))\eta(\xi)) = 0 \quad (3.5.25)$$

(3.2.1) ve (3.2.4) den

$$\eta[\xi, X] - (\xi\eta(X)) = 0 \quad (3.5.26)$$

olur.

$$(L_\xi\eta)(X) = 0$$

$$N^4(X) = 0$$

$\forall X \in \mathcal{X}(M)$  için doğru olduğundan

$$N^4 = 0$$

(3.5.26) da  $X$  yerine  $\varphi(X)$  alırsak

$$\eta[\xi, \varphi(X)] = 0$$

olur. (3.5.24) de her iki tarafa  $\varphi$  yi uygularsak

$$\varphi[\xi, X] + \varphi^2[\xi, \varphi(X)] - (\xi\eta(X))\varphi(\xi) = 0 \quad ; \quad \varphi(\xi) = 0$$

$$\varphi[\xi, X] - [\xi, \varphi(X)] + \eta[\xi, \varphi(X)]\xi = 0$$

$$\varphi[\xi, X] - [\xi, \varphi(X)] + \eta[\xi, \varphi(X)] = 0 \quad ; \quad \eta[\xi, \varphi(X)] = 0$$

$$\varphi[\xi, X] - [\xi, \varphi(X)] = 0$$

ise

$$N^3(X) = (L_\xi \varphi)X = \varphi[\xi, X] - [\xi, \varphi(X)] = 0$$

elde edilir. Ayrıca  $N^1 = 0$  dan  $N^1(\varphi(X), Y) = 0$  dır. Böylece

$$\begin{aligned}
N^1(\varphi(X), Y) &= -[\varphi(X), Y] + \eta[\varphi(X), Y]\xi + [-X + \eta(X)\xi, \varphi(Y)] \\
&\quad - \varphi[-X + \eta(X)\xi, Y] - \varphi[\varphi(X), \varphi(Y)] + \varphi(X)\eta(Y)\xi \\
&\quad - Y\eta(\varphi(X))\xi - \eta[\varphi(X), Y]\xi \\
0 &= -[\varphi(X), Y] - [X, \varphi(Y)] + [\eta(X)\xi, \varphi(Y)] - \varphi[-X + \eta(X)\xi, Y] \\
&\quad - \varphi[\varphi(X), \varphi(Y)] + \varphi(X)\eta(Y)\xi \\
0 &= -[\varphi(X), Y] - [X, \varphi(Y)] - \varphi(Y)\eta(X)\xi + \eta(X)[\xi, \varphi(Y)] - \varphi[-X + \eta(X)\xi, Y] \\
&\quad - \varphi[\varphi(X), \varphi(Y)] + \varphi(X)\eta(Y)\xi
\end{aligned}$$

her iki tarafa  $\eta$  yü uygulayıp  $\eta[\xi, \varphi(X)] = 0$  'ı göz önüne alırsak

$$\varphi(X)\eta(Y) - \varphi(Y)\eta(X) - \eta[\varphi(X), Y] - \eta[X, \varphi(Y)] = 0$$

elde edilir. Dolayısıyla  $N^2(X, Y) = 0$  dır. Böylece ispat biter.

**Sonuç 3.5.3.**  $(2n+1)$ -boyutlu  $M$  kontak manifoldunda  $(\varphi, \xi, \eta)$  hemen hemen kontak yapısı verilsin. Şayet  $N^2 = 0$  ise  $(\varphi, \xi, \eta)$  hemen hemen kontak yapısı  $\varphi$  altında  $d_\eta$  'yı invaryant bırakır (Camcı 2003) .

**İspat :** (3.4.4) de  $X$  yerine  $\varphi(X)$  alırsak

$$2d_\eta(\varphi(X), Y) = \varphi(X)\eta(Y) - Y\eta(\varphi(X)) - \eta[\varphi(X), Y] \quad (3.5.27)$$

olur. Benzer şekilde  $Y$  yerine  $\varphi(Y)$  alırsak

$$2d_\eta(X, \varphi(Y)) = X\eta(\varphi(Y)) - \varphi(Y)\eta(X) - \eta[X, \varphi(Y)] \quad (3.5.28)$$

(3.5.27) ve (3.5.28) eşitlikleri taraf tarafa toplanır

$$2d_\eta(\varphi(X), Y) + 2d_\eta(X, \varphi(Y)) = \varphi(X)\eta(Y) - \varphi(Y)\eta(X) - \eta[\varphi(X), Y] - \eta[X, \varphi(Y)]$$

$$2d_\eta(\varphi(X), Y) + 2d_\eta(X, \varphi(Y)) = N^2(X, Y)$$

$\forall X, Y \in \mathcal{X}(M)$  için  $N^1 = 0$  iken  $N^2 = 0$  olduğundan

$$d_\eta(\varphi(X), Y) + d_\eta(X, \varphi(Y)) = 0$$

olur. Burada  $Y$  yerine  $\varphi(Y)$  alırsak

$$d_\eta(\varphi(X), \varphi(Y)) + d_\eta(X, \varphi^2(Y)) = 0$$

$$d_\eta(\varphi(X), \varphi(Y)) + d_\eta(X, -Y + \eta(Y)\xi) = 0$$

$$d_\eta(\varphi(X), \varphi(Y)) - d_\eta(X, Y) + \eta(Y)d_\eta(X, \xi) = 0 \quad (3.5.29)$$

(3.4.4) eşitliğinde  $Y$  yerine  $\xi$  alınır

$$2d_\eta(X, \xi) = X_\eta(\xi) - \xi\eta(X) - \eta[X, \xi]$$

$$2d_\eta(X, \xi) = -\xi\eta(X) + \eta[\xi, X] \quad ; \quad \eta(\xi) = 1 \text{ ve } X(1) = 0$$

$$= -(L_\xi\eta)X$$

$$= 0$$

olur. Bu sonuç (3.5.29) da yerine yazılırsa

$$d_\eta(\varphi(X), \varphi(Y)) = d_\eta(X, Y)$$

olur ki bu da  $(\varphi, \xi, \eta)$  hemen hemen kontak yapısının  $\varphi$  altında  $d\eta$  yı invaryant (değişmez) bırakması demektir.

**Sonuç 3.5.4.**  $(2n+1)$ -boyutlu  $(M, \varphi, \xi, \eta)$  hemen hemen kontak manifoldu verilsin.

$(\varphi, \xi, \eta)$  yapısının normal olabilmesi için gerek ve yeter şart  $N^1 = 0$  olmasıdır (Yano ve Kon 1984, Blair 2002 ).

**Sonuç 3.5.5.**  $(2n+1)$ -boyutlu  $(M, \varphi, \xi, \eta)$  hemen hemen kontak manifoldu verilsin.

$(\varphi, \xi, \eta)$  yapısının normal olabilmesi için gerek ve yeter şart  $\forall X, Y \in \mathcal{X}(M)$  için

$$N_\varphi(X, Y) + 2d\eta(X, Y)\xi = 0$$

olmasıdır (Yano ve Kon 1984, Blair 2002 ).

**Teorem 3.5.10.**  $(2n+1)$ -boyutlu  $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$  hemen hemen kontak metrik manifoldunda

$$2g((D_X \varphi)Y, Z) = g(N^1(Y, Z), \varphi(X)) + 2d\eta(\varphi(Y), X)\eta(Z) - 2d\eta(\varphi(Z), X)\eta(Y)$$

ve özellikle herhangi bir kontak metrik yapı için

$$D_\xi \varphi = 0$$

olur (Yano ve Kon 1984).

**Sonuç 3.5.6.** Teorem 3.5.10 da  $\xi$  nin integral eğrileri geodeziklerdir. Çünkü  $D_\xi \xi = 0$  olduğu kolaylıkla gösterilebilir (Yano ve Kon 1984).

### 3.6. K-Kontak Manifolfları

**Tanım 3.6.1.**  $M$  bir Riemann manifoldu  $g$  Riemann metriği ile verilsin. Ayrıca  $M$  üzerinde bir  $X$  vektör alanını ele alalım.  $M$  nin her bir noktasının bir komşuluğunda  $X$  ile meydana gelen lokal dönüşümlerin lokal 1-parametrelili grubu lokal izometrilere oluşuyor ise  $X$  vektör alanına **Killing vektör alanı** denir.

Böylece ;  $X$  bir Killing vektör alanıdır.  $\Leftrightarrow L_X g = 0$  'dır, yani  $g$  metrik tensörünün  $X$  vektör alanı yönündeki Lie türevi sıfırdır (Yano ve Kon 1984, Kocayiğit 2004).

**Tanım 3.6.2.**  $(2n+1)$ -boyutlu kontak metrik manifoldu  $M$  verilsin. Eğer  $(\varphi, \xi, \eta, g)$  hemen hemen kontak metrik yapısında yer alan  $\xi$  vektör alanı  $g$  ye göre bir Killing vektör alanı ise o zaman  $M$  üzerindeki kontak yapıya K-kontak yapı ve  $M$  ye de **K-kontak manifoldu** denir (Yano ve Kon 1984).

**Teorem 3.6.1.**  $(2n+1)$ -boyutlu manifoldu  $M$  ,  $(\varphi, \xi, \eta, g)$  kontak metrik yapısı ile verilsin. Bu durumda aşağıda önermeler denktir.

i)  $M$  bir K-kontak manifolddur.

ii)  $\forall X, Y \in \chi(M)$  için

$$g(D_X \xi, Y) + g(D_Y \xi, X) = 0 \quad (3.6.1)$$

dır.

iii)  $\forall X \in \chi(M)$  için

$$D_X \xi = -\varphi(X) \quad (3.6.2)$$

dır (Camcı 2003, Yano ve Kon 1984) .

**İspat:** (ii)  $\Rightarrow$  (iii)  $M$  bir K-kontak manifold olsun. Dolayısıyla  $\xi$  bir Killing vektör alanıdır.  $M$  aynı zamanda kontak metrik manifold olduğundan

$$d\eta(X, Y) = g(X, \varphi(Y)) = -g(\varphi(X), Y) \quad (3.6.3)$$

dir.

Ayrıca

$$\begin{aligned} 2d\eta(X, Y) &= X\eta(Y) - Y\eta(X) - \eta([X, Y]) \\ &= Xg(Y, \xi) - Yg(X, \xi) - g([X, Y], \xi) \\ &= g(D_X Y, \xi) + g(Y, D_X \xi) - g(D_Y X, \xi) \\ &\quad - g(X, D_Y \xi) - g(D_X Y, \xi) - g(D_Y X, \xi) \end{aligned}$$

gerekli sadeleştirmeler yapılırsa

$$2d\eta(X, Y) = g(D_X \xi, Y) - g(X, D_Y \xi) \quad (3.6.4)$$

elde edilir. Ayrıca  $\xi$  Killing vektör alanı olduğundan

$$L_\xi g = 0 \quad (3.6.5)$$

olur.

Burada  $(L_\xi g)(X, Y)$  'yi hesaplırsak

$$\begin{aligned} (L_\xi g)(X, Y) &= \xi g(X, Y) - g([\xi, X], Y) - g(X, [\xi, Y]) \\ &= g(D_\xi X, Y) + g(D_\xi Y, X) - g(D_\xi X, Y) \\ &\quad + g(D_X \xi, Y) - g(D_\xi Y, X) + g(D_Y \xi, X) \\ (L_\xi g)(X, Y) &= g(D_X \xi, Y) + g(X, D_Y \xi) \end{aligned} \quad (3.6.6)$$

(3.6.5) ifadesi (3.6.6) da yerine yazılırsa

$$g(D_X \xi, Y) + g(X, D_Y \xi) = 0$$

elde ederiz.

(ii)  $\Rightarrow$  (iii)  $g(D_X \xi, Y) + g(X, D_Y \xi) = 0$  olsun. Dolayısıyla

$$g(D_X \xi, Y) = -g(X, D_Y \xi) \quad (3.6.7)$$

olur.

(3.6.7) ifadesi (3.6.4) de yerine yazılırsa

$$2d\eta(X, Y) = 2g(D_X \xi, (Y))$$

$$d\eta(X, Y) = g(D_X \xi, Y) = g(X, \varphi(Y)) \quad (3.6.8)$$

elde edilir.  $\varphi$  anti-simetrik olduğundan

$$g(X, \varphi(Y)) = -g(\varphi(X), Y) = g(D_X \xi, Y)$$

bu eşitlik  $\forall X, Y \in \chi(M)$  için sağlandığından

$$D_X \xi = -\varphi(X)$$

sonucuna ulaşılır.

(iii)  $\Rightarrow$  (i) :  $\forall X \in \chi(M)$  için hipotezden bildiğimiz  $D_X \xi = -\varphi X$  eşitliği (3.6.6) da yerine yazılırsa

$$(L_{\xi}g)(X, Y) = g(-\varphi(X), Y) + g(X, -\varphi(Y)) \quad ; \quad \varphi \text{ anti-simetrik}$$

$$(L_{\xi}g)(X, Y) = g(X, \varphi(Y)) - g(X, \varphi(Y))$$

$$(L_{\xi}g)(X, Y) = 0$$

$$\forall X \in \chi(M) \text{ için doğru olduğundan } L_{\xi}g = 0$$

dır. Böylece  $\xi$  Killing vektör alanı ve  $M$  manifoldu K-kontak manifolddur.

O halde (i)  $\Rightarrow$  (ii), (ii)  $\Rightarrow$  (iii), (iii)  $\Rightarrow$  (i) önermeleri doğru olduğundan (i), (ii), (iii) önermeleri denktir (Hacısalıhoğlu 1983).

**Teorem 3.6.2**  $(2n+1)$ -boyutlu manifoldu  $M$ ,  $(\varphi, \xi, \eta, g)$  kontak metrik yapısı ile verilsin. Bu durumda  $N^2 = N^4 = 0$  dır. Ayrıca,  $N^3 = 0 \Leftrightarrow \xi$  Killing vektördür (Camcı 2003).

**İspat** :  $M$ , kontak metrik manifold olduğundan

$$d\eta(X, Y) = g(X, \varphi(Y))$$

dir. Burada  $X$  yerine  $\varphi(X)$ ,  $Y$  yerinede  $\varphi(Y)$  yazılırsa

$$d\eta(\varphi(X), \varphi(Y)) = g(\varphi(X), \varphi^2(Y))$$

$$= -g(X, \varphi^3(Y)) \quad ; \quad \varphi^3(Y) = -\varphi(Y)$$

$$= -g(X, -\varphi(Y)) \quad ; \quad \varphi^3(Y) = -\varphi(Y)$$

$$= g(X, \varphi(Y))$$

Dolayısıyla

$$d\eta(\varphi(X), \varphi(Y)) = d\eta(X, Y) \quad (3.6.9)$$

elde edilir. Ayrıca (3.6.9) da  $Y$  yerine  $\varphi(Y)$  yazılırsa

$$d\eta(\varphi(X), \varphi^2(Y)) = d\eta(X, \varphi(Y))$$

$$d\eta(\varphi(X), -Y + \eta(Y)\xi) = d\eta(X, \varphi(Y))$$

$$-d\eta(\varphi(X), Y) + \eta(Y)d\eta(\varphi(X), \xi) = d\eta(X, \varphi(Y))$$

burada

$$d\eta(\varphi(X), \xi) = g(\varphi(X), \varphi(\xi))$$

ve

$$\varphi(\xi) = 0$$

olduğundan

$$d\eta(\varphi(X), Y) + (d\eta(X, \varphi(Y))) = 0 \quad (3.6.10)$$

elde edilir.

Ayrıca

$$N^2(X, Y) = 2d\eta(\varphi(X), Y) + 2d\eta(X, \varphi(Y))$$

olduğundan

$$N^2 = 0$$

olur. Diğer taraftan

$$d\eta(X, \xi) = g(X, \varphi(\xi)) = 0$$

ve

$$d\eta(X, \xi) = \frac{1}{2}(X\eta(\xi) - \xi\eta(X) - \eta([X, \xi])) ; \eta(\xi) = 1 \text{ ve } X(1) = 0$$

$$\xi\eta(X) - \eta([X, \xi]) = 0$$

elde edilir. Böylece

$$\begin{aligned} N^4(X) &= (L_\xi \eta)X \\ &= \xi\eta(X) - \eta([\xi, X]) \\ &= 0 \end{aligned}$$

olur. Böylece birinci kısmın ispatı biter. İkinci kısmın ispatı için bazı hazırlıklar yapalım.

$$\begin{aligned} (L_\xi g)(X, \xi) &= \xi g(\xi, X) - g([\xi, X], \xi) - g(X, [\xi, \xi]) \\ &= \xi\eta(X) - \eta([\xi, X]) \\ &= (L_\xi \eta)(X) \\ &= 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Biliyoruz ki  $\eta$  ile  $d\eta$  Lie türevi altında invaryant olduğundan  $L_\xi d\eta \equiv 0$  dır.

Dolayısıyla  $\forall X, Y \in \mathcal{X}(M)$  için

$$(L_{\xi}d\eta)(X, Y) = 0$$

$$\xi d\eta(X, Y) - d\eta([\xi, X], Y) - d\eta(X, [\xi, Y]) = 0$$

olur.

$$d\eta(X, Y) = g(X, \varphi(Y))$$

olduğundan

$$\xi g(X, \varphi(Y)) - g([\xi, X], \varphi(Y)) - g(X, \varphi([\xi, Y])) = 0 \quad (3.6.11)$$

olur. Diğer taraftan

$$(L_{\xi}g)(X, \varphi(Y)) = g(\varphi(Y), X) - g([\xi, X], \varphi(Y)) - g(X, [\xi, \varphi(Y)])$$

$$g(X, (L_{\xi}\varphi)(Y)) = g(X, [\xi, \varphi(Y)]) - g(X, \varphi([\xi, Y]))$$

eşitlikleri taraf tarafa toplarsak

$$(L_{\xi}g)(X, \varphi(Y)) + g(X, (L_{\xi}\varphi)(Y)) = \xi g(\varphi(Y), X) - g([\xi, X], \varphi(Y)) - g(X, \varphi([\xi, Y]))$$

elde edilir. (3.6.11) den

$$(L_{\xi}g)(X, \varphi(Y)) + g(X, (L_{\xi}\varphi)(Y)) = 0$$

olur.

( $\Rightarrow$ ):  $N^3 = 0$  ise

$$(L_\xi g)(X, \varphi(Y)) = 0$$

elde edilir. Bu eşitlik  $\forall X, Y \in \chi(M)$  için doğru olduğundan  $L_\xi g \equiv 0$ 'dır. Dolayısıyla  $\xi$  Killing vektör alanıdır.

( $\Leftarrow$ ):  $\xi$  Killing vektör alanı ise  $L_\xi g \equiv 0$  olacağından  $g(X, (L_\xi \varphi)(Y)) = 0$  olur. Bu eşitlik  $\forall X \in \chi(M)$  için sağlandığından  $N^3 = 0$  dır.

**Teorem 3.6.3**  $(2n+1)$ -boyutlu bir  $M$  Riemann manifoldunun bir K-kontak manifoldu olması için gerek ve yeter koşullar aşağıdadır:

- i)  $M$  bir birim  $\xi$  Killing vektör alanına sahiptir.
- ii)  $M$  nin herhangi bir noktasında  $\xi$ 'yi kapsayan düzlem kesitlerin kesitsel eğriliği 1 e eşittir (Yano ve Kon 1984).

**İspat :**  $M$  bir K-kontak manifold olsun. O zaman  $\xi$ 'ye dik bir birim vektör alanı  $X$  olmak üzere

$$g(R(X, \xi)\xi, X) = g(-\varphi^2(X), X) = g(X, X) = 1 \quad (3.6.12)$$

dir.

Tersine  $M$  nin (i) ve (ii) koşullarını sağladığını düşünelim.  $\xi$  bir Killing vektör alanı olduğundan

$$R(X, \xi)Y = D_X D_Y \xi - D_{D_X Y} \xi \quad (3.6.13)$$

olur.

$$\eta(X) = g(X, \xi)$$

ve

$$-D_X \xi = \varphi(X)$$

eşitlikleri göz önüne alındığında

$$\varphi(\xi) = 0$$

olur.  $\xi$  ye dik bir birim vektör alanı  $X \in \chi(M)$  olmak üzere (3.6.12) den

$$g(R(X, \xi)\xi, X) = 1 = -g(\varphi^2(X), X)$$

elde edilir. Bu yüzden  $\xi$  ye dik  $\forall X \in \chi(M)$  vektör alanı için

$$\varphi^2(X) = -X$$

olduğu görülür. Halbuki  $\forall Y \in \chi(M)$  vektör alanı için

$$\varphi^2(Y) = -Y + \eta(Y)\xi$$

dir. Üstelik

$$d\eta(X, Y) = \frac{1}{2}(g(D_X \xi, Y) - g(D_Y \xi, X))$$

$$= -g(D_Y \xi, X)$$

$$= g(X, \varphi(Y))$$

dir. Sonuç olarak  $(\varphi, \xi, \eta, g)$  yapısı  $M$  üzerinde bir K-kontak yapısıdır.

Ayrıca (3.6.12) den

$$R(X, \xi)\xi = -\frac{1}{2}\varphi^2 X = -X - \eta(X)\xi$$

elde edilir. Böylece  $M$  nin (3.6.12) eşitliğini sağlayan  $\xi$  birim Killing vektör alanına sahip olan  $(2n+1)$ -boyutlu bir K kontak manifold olduğu görülür.

## 4. MANİFOLDLAR ÜZERİNDE YÖNLENDİRME

### 4.1. Genel Anlamda Bir Manifoldun Yönlendirilmesi

**Tanım 4.1.1.**  $E^n$  deki  $k$ -boyutlu bir  $M$  manifoldunu ele alalım.

$M$  bir manifold olduğuna göre  $M$  nin her bir  $X$  n-katsayısındaki  $T_M(X)$  tanjant uzayında bir  $\mu_X$  yönlendirmesi tanımlamak istiyoruz. Bu işi bir  $V$  reel vektör uzayındaki gibi aynen yapabiliriz. Ancak manifoldun her bir noktasında  $T_M(X)$  için bir başka vektör uzayı söz konusudur. Bu nedenle her biri için bir yönlendirme söz konusudur; Eğer  $M$  nin her bir noktasındaki tanjant uzaylarda yönlendirme aynı ise  $M$  manifolduna **uygun yönlendirilmiş manifold** aksi halde ise  $M$  manifolduna **uygun yönlendirilmemiş manifold** denir.

Diğer bir ifade ile uygun yönlendirilmiş bir  $M$  manifoldu için diyebiliriz ki her bir

$$f : W \subset E^k \longrightarrow M \subset E^n$$

koordinat sisteminde  $a, b \in W$  için

$$\left[ f_*(e_1|_a), \dots, f_*(e_k|_a) \right] = \mu_{f(a)} \quad (4.1.1)$$

ile

$$\left[ f_*(e_1|_b), \dots, f_*(e_k|_b) \right] = \mu_{f(b)} \quad (4.1.2)$$

aynıdır.

$M$  üzerinde uygun bir yön tanımlanmış iken bir

$$F : M \longrightarrow M$$

fonksiyonu  $\forall X \in M$  için

$$\left[ F_*\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\Big|_X\right), \dots, F_*\left(\frac{\partial}{\partial x_k}\Big|_X\right) \right] = \left[ \frac{\partial}{\partial x_1}\Big|_{F(X)}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_k}\Big|_{F(X)} \right] \quad (4.1.3)$$

ise  $F$  dönüşümüne **yönü koruyordur** denir. Bu demektir ki  $F$  dönüşümü  $T_M(X)$  deki bir sağ sistemi (sol sistemi)  $T_M(F(X))$ deki bir diğer sağ sisteme (sol sisteme) dönüştürür.

Eğer  $F$  yönü koruyan cinsden değil ise o zaman  $\det T = -1$  olacak şekilde bir

$$T : E^k \longrightarrow E^k$$

lineer dönüşümü ile elde edilen

$$F \circ T : M \longrightarrow M$$

dönüşümü yönü korur. Demek oluyor ki  $M$  nin her noktasında daima yönü koruyan bir koordinat sistemi düşünülebilir (Hacısalıhoğlu 2004) .

**Tanım 4.1.2.** Üzerinde uygun bir yön seçilebilen  $M$  manifolduna **yönlendirilebilir manifold veya yönlenebilir manifold** denir. Böyle bir manifold üzerinde seçilmiş olan özel bir  $\mu$  yönüne  $M$  manifoldu üzerinde  $\mu$  **yönü** denir.  $(M, \mu)$  ikilisine de yönlendirilmiş manifold denir (Hacısalıhoğlu 2004) .

**Tanım 4.1.3.** Eğer  $M$  bir  $k$ -boyutlu ve sınırlı manifold ise  $X \in \partial M$  noktasındaki  $T_{\partial M}(X)$  tanjant uzayı  $(k-1)$ -boyutludur. Yani  $T_M(X)$  tanjant uzayının  $(k-1)$ -boyutlu alt uzayıdır. Dolayısıyla  $T_M(X)$  de  $T_{\partial M}(X)$  alt uzayına dik olan iki tane birim vektör vardır. Bu iki vektör aynı doğrultuda fakat zıt yönlüdür.

$M$  üzerinde bir koordinat sistemi

$$f : W \subset E^k \longrightarrow M \subset E^n$$

ve  $W \subset E^k$  ve  $f(0) = X \in M$  ise bu iki vektörden sadece biri  $v_k$  negatif olacak şekilde  $f_*(v|_0)$  dır. Bu birim vektöre  $M$  nin  $X$  noktasındaki dış birim normal denir ve  $n(X)$  ile gösterilir. Bu tanımın  $f$  koordinat sisteminin seçilişinden bağımsız olduğunu göstermek kolaydır.

$k$ -boyutlu ve sınırlı bir manifold  $M$  ve  $M$  üzerindeki yönlerden biri  $\mu$  olsun. Bir  $X \in \partial M$  noktasında

$v_1|_X, \dots, v_{k-1}|_X \in T_{\partial M}(X)$  vektörlerini öyle seçelim ki

$$\left[ n(X), v_1|_X, \dots, v_{k-1}|_X \right] = \mu_X$$

olsun. Eğer aynı zamanda

$$\left[ n(X), w_1|_X, \dots, w_{k-1}|_X \right] = \mu_X$$

ise  $\{v_1|_X, \dots, v_{k-1}|_X\}$  ve  $\{w_1|_X, \dots, w_{k-1}|_X\}$  bazları  $T_{\partial M}(X)$  için aynı yönlüdürler diyeceğiz ve bu yönü  $(\partial\mu)_X$  ile göstereceğiz.

$M$  yönlendirilmiş olduğundan  $X \in \partial M$  için  $(\partial\mu)_X$  yönlerinin uygun yönlendirmeler oldukları açıktır. Demek oluyor ki  $M$  yönlendirilmiş ise  $\partial M$  de yönlendirilmiş olur ve  $M$  de ki bir  $\mu$  yönü  $\partial M$  deki bir  $\partial\mu$  yönünü belirtir, bu  $\partial\mu$  yönüne **indirgenmiş yön** denir.

Eğer  $E^n$  de  $M$  yönlendirilmiş bir  $(n-1)$ -manifold ise  $M$  için dış birim normal vektörün seçilişi  $M$  nin bir sınır (yani  $n$ -boyutlu bir başka manifoldun sınırı) olmasını gerektirmez. Eğer

$$[v_1|_X, \dots, v_{n-1}|_X] = \mu_X$$

ise  $n(X)$  vektörünü  $T_{E^n}(X)$  de  $T_M(X)$  e dik bir birim vektör olarak öyle seçebilir ki

$$[n(X), v_1|_X, \dots, v_{n-1}|_X]$$

$T_{E^n}(X)$  deki adi yön olur. Bu durumda gene  $n(X)$  vektörüne  $M$  nin  $\mu$  ile belirtilmiş olan, **dış birim normal** denir.  $n(X)$  birim vektörleri  $M$  üzerinde noktadan noktaya sürekli olarak değişirler. Tersine,  $M$  nin bütün noktaları üzerinde, sürekli değişen  $n(X)$  birim vektörlerinin bir ailesi tanımlanmış ise  $n(X)$  ile  $M$  üzerinde bir yön belirtilebilir (Hacısalıhoğlu 2004) .

## 4.2. Kontak Manifolflarda Yönlendirme

**Teorem 4.2.1.**  $(2n+1)$ -boyutlu kontak manifold  $M$  olmak üzere  $n$  sayısı çift ise  $M$  kontak manifoldu yönlendirilebilir bir manifolddur (Blair 1976, Yano ve Kon 1984) .

**Teorem 4.2.2.**  $(2n+1)$ -boyutlu  $M$  Riemann manifoldu  $(\varphi, \xi, \eta)$  hemen hemen kontak yapısı ile birlikte verilsin bu durumda  $(M, \varphi, \xi, \eta)$  hemen hemen kontak manifoldu yönlendirilebilirdir (Yano ve Kon 1984) .

**Örnek 4.2.1.**  $\mathbb{R}^{4n+1}$  de

$$\eta = dz - \sum_{i=1}^{2n} y^i dx^i$$

kontak formu verilsin. Burada  $(x^i, y^i, z)$  kartezyen koordinatlar olmak üzere

karakteristik vektör alanı  $\xi = \frac{\partial}{\partial z}$  olmak üzere

$$x_i = \frac{\partial}{\partial x^i} + y^i \frac{\partial}{\partial z}, \quad x_{n+i} = \frac{\partial}{\partial y^i} \quad ; \quad i = 1, 2, \dots, 2n$$

şeklinde verildiğinde  $\mathbb{R}^{4n+1}$  yönlendirilebilirdir.

## KAYNAKLAR

- Baikoussis, C. and Blair, D. E. 1997. On Legendere curves in contact 3-manifolds  
Geom. Dedicata. 49:135-142.
- Blair, D.E.1976. Contact Manifolds in Riemanian Geometry, Lecture Notes in Mat.  
Vol. 509. Springer-Verlag.
- Blair, D.E.2002.Riemannian Geometry of Contact and Symplectic Manifolds,  
Birkhauser, Boston.
- Camcı, C.2003. Kontak Geometride Legendre Eğrileri, Doktora Seminer Notu, Ankara  
Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara.
- Hacısalıhoğlu, H.H. 1980. Yüksek Diferensiyel Geometriye Giriş, Fırat Üniversitesi  
Fen Fakültesi Yayınları, Turkey.
- Hacısalıhoğlu, H.H. 1985. Diferensiyel Geometri, Gazi Üniversitesi Basın Yayın Y.O.  
Basım Evi, Turkey.
- Hacısalıhoğlu, H.H. 2003. Tensör Geometri, Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi  
Yayınları, Turkey.
- Hacısalıhoğlu, H.H. 2004. Diferensiyel Geometri, Nobel Basım Evi, Turkey.
- Kocayığıt, H.2004. Biharmonic Curves in Lorentz 3-Manifolds and Contact Geometry,  
Doktora Tezi, A.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara.
- Sabuncuoğlu, A. 2004 Diferensiyel Geometri, Nobel Basım Evi, Turkey.
- Yano, K. and Kon, M. 1984. Structures on Manifolds, Series in Pure Mathematics, vol.  
3, Singapore

## **ÖZGEÇMİŞ**

1977 yılında Ankara'da doğdu. İlk, orta ve lise öğrenimini Ankara'da tamamladı. Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü'nden 2003 yılında Matematikçi ve Fakülte birincisi unvanıyla mezun oldu. Aynı yıl Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü'nde yüksek lisans öğrenimine başlayan İsmail GÖK halen yüksek lisans öğrenimini devam ettirmektedir.