

**ANKARA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

DOKTORA TEZİ

**İKİ VE ÜÇ BOYUTLU SÜREKLİ DAĞILIMLARDAN TEK BOYUTLU SÜREKLİ
DAĞILIM ELDE EDİLMESİNE İLİŞKİN BİR YÖNTEM**

Monireh HAMELDARBANDI

İSTATİSTİK ANABİLİM DALI

ANKARA

2019

Her hakkı saklıdır

TEZ ONAYI

Monireh HAMELDARBANDI tarafından hazırlanan “İki ve Üç Boyutlu Sürekli Dağılımlardan Tek Boyutlu Sürekli Dağılım Elde Edilmesine İlişkin Bir Yöntem” adlı tez çalışması 27/06/2019 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği / ~~oy çokluğu~~ ile Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü İstatistik Anabilim Dalı’nda **DOKTORA TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Danışman : Prof. Dr. Mehmet YILMAZ
Ankara Üniversitesi / İstatistik Anabilim Dalı



Jüri Üyeleri:

Başkan: Prof. Dr. Serpil AKTAŞ ALTUNAY
Hacettepe Üniversitesi / İstatistik Anabilim Dalı



Üye : Prof. Dr. Halil AYDOĞDU
Ankara Üniversitesi / İstatistik Anabilim Dalı



Üye : Prof. Dr. Mehmet YILMAZ
Ankara Üniversitesi / İstatistik Anabilim Dalı



Üye : Doç. Dr. Murat OLGUN
Ankara Üniversitesi / Matematik Anabilim Dalı



Üye : Dr. Öğr. Üyesi Emel KIZILOK KARA
Kırıkkale Üniversitesi / Aktüerya Bilimleri Anabilim Dalı



Yukarıdaki sonucu onaylarım.

Prof. Dr. Özlem YILDIRIM
Enstitü Müdürü Vekili

ETİK

Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez içindeki bütün bilgilerin doğru ve tam olduğunu, bilgilerin üretilmesi aşamasında bilimsel etiğe uygun davrandığımı, yararlandığım bütün kaynakları atıf yaparak belirttiğimi beyan ederim.

27/06/2019



Monireh HAMELDARBANDI

ÖZET

Doktora Tezi

İKİ VE ÜÇ BOYUTLU SÜREKLİ DAĞILIMLARDAN TEK BOYUTLU SÜREKLİ DAĞILIM ELDE EDİLMESİNE İLİŞKİN BİR YÖNTEM

Monireh HAMELDARBANDI

Ankara Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
İstatistik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Mehmet YILMAZ

Günümüzde, literatürde bilinen ve kullanılan dağılımlara bir veya daha fazla parametre eklenip genişletilerek birkaç yeni dağılım ailesi önerilmektedir. Bu amaç doğrultusunda, tezde önerilerin dağılımlar da daha fazla parametreye sahip olup bazı karmaşık veri setlerini iyi modellenebilmektedir ve analiz etme konusunda daha fazla esneklik sağlamaktadır. Böylece geleceğe dair tahminler daha güvenli ve gerçeğe yakın olacaktır. Bu yeni dağılımlar ailesinden biri de dönüştürülmüş dağılımlar ailesidir. Karesel dönüşüm yöntemi ilk defa Shaw ve Buckley (2007) tarafından önerilmiştir. Bu yöntemde iki bileşenli seri ve paralel sistemin başarısızlık olasılıklarının konveks kombinasyonuna parametre dönüşümü yapıp karesel dönüşüm dağılımı elde edilir. Sistemin iki bileşeninin dağılımı üç durumda (bağımsız ve aynı dağılımlı, bağımsız ve farklı dağılımlı ve bağımlı ve aynı marjinallere sahip olarak) ele alınıp üç tane tek boyutlu dönüştürülmüş dağılımı elde edilmiştir. Sonraki bölümde benzer şekilde, üç bileşenli sistemler ele alınarak dönüşüm yönteminin kübik hali anlatılmıştır. Burada bileşenlerin dağılımı üç farklı durum için ele alınarak, üç tane tek boyutlu dağılım elde edilmiştir. Elde edilen altı dağılımın özel durumu için temel dağılımlar üstel, iki boyutlu üstel (Gumbel) dağılımı ve Farlie-Gumbel-Morgenstern dağılımı elde edilir. Daha sonra, elde edilen tek boyutlu dağılımların matematiksel özellikleri incelenip en çok olabilirlik yöntemi ile parametre tahminleri elde edilmeye çalışılmıştır. Son olarak, literatürde mevcut olan bazı gerçek veri setleri ele alınarak elde edilen dağılımların bu veriler için uygunluğu gösterilir.

Haziran 2019, 162 sayfa

Anahtar Kelimeler: Dönüşüm Yöntemi, İki Değişkenli Üstel Dağılımı (Gumbel), Karma Dağılımlar, Farlie-Gumbel-Morgenstern Dağılımı.

ABSTRACT

Ph.D. Thesis

A METHOD FOR OBTAINING UNIVARIATE CONTINUOUS DISTRIBUTION FROM BIVARIATE AND TRIVARIATE CONTINUOUS DISTRIBUTION

Monireh HAMELDARBANDI

Ankara University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Statistics

Supervisor: Prof. Dr. Mehmet YILMAZ

Recently, a number of new distribution families have been proposed by adding one or more parameters to the known and used distributions in the literature. In parallel with this purpose, new proposed distributions in this thesis have more parameters, and model the complex data sets better and also provide more flexibility in analyzing process. Thus, future estimates will be more secure and realistic. One of the new distribution families is the family of transmuted distributions. The quadratic transmutation method was first proposed by Shaw and Buckley (2007). In this method, convex combinations of the failure probabilities of the two-component series and the parallel system will be obtained and quadratic transmuted distribution is obtained with parameter transformation. The distribution of the two components of the system in three cases (independent and identically distribution, independent and different distribution and dependent and have the same marginal) three univariate transmuted distribution is obtained.

In the next section similarly, the three-component system is considered and the cubic transmutation method is described. Here, the distribution of the components is considered for three different situations, and three univariate distribution is obtained. For the specific case of the six obtained distributions, the components distributions are taken as exponential, bivariate exponential (Gumbel) distribution and Farlie-Gumbel-Morgenstern distribution. Then, the mathematical properties of these distributions are examined and parameter estimations have been tried to be obtained with the maximum likelihood method. Finally, by using the real data available in the literature the appropriateness of these distributions is shown.

June 2019, 162 pages

Key Words: Transmutation Method, Bivariate Exponential Distribution (Gumbel), Mixture Distributions, Farlie-Gumbel-Morgenstern Distribution.

TEŞEKKÜR

Bu çalışmanın oluşmasında yakın ilgi ile beni yönlendiren, araştırmalarımın her aşamasında değerli zamanın büyük bir kısmını bana ayırarak bilgi, öneri ve yardımlarını esirgemeyerek çalışmamın ilerlemesinde büyük bir katkıda bulunan danışman hocam Sayın Prof. Dr. Mehmet YILMAZ'a (Bölüm Başkanı, Ankara Üniversitesi İstatistik Anabilim Dalı), ister ders aşamasında ister tez aşamasında hep bir baba sevgisiyle bize istatistik ve istatistiğin matematik temellerini öğretip tezimi büyük bir sabırla okuyup yardımları için Sayın Prof. Dr. Halil AYDOĞDU'ya (Ankara Üniversitesi İstatistik Anabilim Dalı) kalpten minnetlerimi sunarım. Sayın Doç. Dr. Murat OLGUN (Ankara Üniversitesi Matematik Anabilim Dalı) hocama tez aşamamda jüri üyem olup hep güler yüzle sorularımı cevaplayıp, tezimi incelemesi ve desteklerinden dolayı saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

Hayatım boyunca yanımda olup manevi desteklerini esirgemeyen fedakârlıklar göstererek beni hep destekleyen anne ve babama en içten duygularımınla saygı ve teşekkürlerimi sunarım. Ayrıca hayatımın en büyük şansı olan Aziz HAMEL DARBANDI canım ağabeyime hayatımın tüm aşamalarında her anlamda arkamda olup beni benden daha çok düşünüp, bilgilerini cömertçe benle paylaşan ağabeyime tüm kalbimle teşekkür ederim. En son da doktora sürecimde hep yanımda olup varlıklarıyla destekleriyle çalışmalarımı daha azim ve özveriyle yapmama sebep olan istatistik ve matematik bölümündeki tüm değerli hocalarıma ve sevgili arkadaşlarıma minnetlerimi sunarım.

Bu tez "TÜBİTAK-2215 Uluslararası Öğrenciler İçin Lisansüstü Burs Programı" tarafından desteklenmiştir.

Monireh HAMELDARBANDI

Ankara, Haziran 2019

İÇİNDEKİLER

TEZ ONAY SAYFASI

ETİK	i
ÖZET	ii
ABSTRACT	iii
TEŞEKKÜR	iv
SİMGELER DİZİNİ	viii
ŞEKİLLER DİZİNİ	ix
ÇİZELGELER DİZİNİ	x
1. GİRİŞ	1
2. TEMEL KAVRAMLAR	4
2.1 Rasgele Değişken, Olasılık Yoğunluk Fonksiyonu, Dağılım Fonksiyonu ve Yaşam Fonksiyonu	4
2.2 Bozulma Oranı Fonksiyonu ve Ortalama Kalan Ömür Fonksiyonu	11
2.3 Çarpıklık ve Basıklık Katsayıları	14
2.4 Rasgele Sayı Üretme	16
2.4.1 Ters dönüşüm yöntemi ile rasgele sayı üretme	16
2.4.2 Çok değişkenli dağılımlardan rasgele sayı üretme	18
2.4.3 Karma yöntem ile rasgele sayı üretme	21
2.5 Rényi Entropi Fonksiyonu	21
2.6 Sıra İstatistikleri	22
2.7 Deneyisel dağılım	23
2.8 Model Seçim Kriterleri	23
2.9 Dönüşümler	26
2.9.1 Sıra dönüşümlerin farklı çeşitleri	28
2.10 Kullanılan Dağılımlar	29
2.11 Sistemler	32
2.11.1 İki bileşenli sistemler	33
2.11.2 Üç bileşenli sistemler	35
3. İKİ BİLEŞENLİ SİSTEMLER İLE ÖNERİLEN DÖNÜŞÜM	42
3.1 Bağımsız Aynı Dağılıma Sahip İki Bileşenli Sistemler ile Önerilen Dağılım	42
3.1.1 G_1 – dağılımın yaşam fonksiyonu ve bozulma oranı fonksiyonu	43
3.1.2 G_1 – dağılımının moment çıkaran fonksiyonu, momentleri ve çarpıklık ve basıklık katsayıları	45
3.1.3 G_1 – dağılımından rasgele sayı üretme	46
3.1.4 G_1 – dağılımının Rényi entropisi	47
3.1.5 G_1 – dağılımı için özel durum	48
3.1.6 G_1 – dağılımın özel durumu için matematiksel özellikleri	49
3.1.7 G_1 – dağılımının özel durumu için moment çıkaran fonksiyonu, momentleri, çarpıklık ve basıklık katsayıları	52
3.1.8 G_1 – dağılımın özel durumu için en çok olabilirlik tahmini ve Fisher bilgi Matrisi	56

3.1.9 G_1 – dağılımının özel durumu için Rényi entropisi	58
3.1.10 G_1 – dağılımın özel durumu için sıra istatistikleri	59
3.2 Bağımsız Farklı Dağılıma Sahip İki Bileşenli Sistemler ile Önerilen Dağılım	59
3.2.1 G_2 – dağılımın yaşam fonksiyonu ve bozulma oranı fonksiyonu	61
3.2.2 G_2 – dağılımın moment çıkaran fonksiyonu, momentleri, çarpıklık ve basıklık katsayıları	61
3.2.3 G_2 – dağılımdan rasgele sayı üretme	63
3.2.4 G_2 – dağılımın Rényi entropisi	63
3.2.5 G_2 – dağılımı için özel durum	64
3.2.6 G_2 – dağılımın özel durumu için matematiksel özellikleri	65
3.2.7 G_2 – dağılımın özel durumu için moment çıkaran fonksiyonu, momentleri, çarpıklık ve basıklık katsayıları	68
3.2.8 G_2 – dağılımın özel durumu için en çok olabilirlik tahmini ve Fisher bilgi matrisi	72
3.2.9 G_2 – dağılımın özel durumu için Rényi entropisi	76
3.2.10 G_2 – dağılımının özel durumu için sıra istatistikleri	77
3.3 Bağımlı, Aynı Marjinallere Sahip İki Bileşenli Sistemler ile Önerilen Dağılım	78
3.3.1 G_3 – dağılımının yaşam fonksiyonu ve bozulma oranı fonksiyonu	80
3.3.2 G_3 – dağılımından rasgele sayı üretme	81
3.3.3 G_3 – dağılımı için özel durum	82
3.3.4 G_3 – dağılımın özel durumu için matematiksel özellikleri	83
3.3.5 G_3 – dağılımın özel durumu için moment çıkaran fonksiyonu, momentleri, çarpıklık ve basıklık katsayıları	87
03.3.6 G_3 – dağılımın özel durumu için en çok olabilirlik tahmini ve Fisher bilgi matrisi	90
3.3.7 G_3 – dağılımın özel durumu için Rényi entropisi	93
3.3.8 G_3 – dağılımın özel durumu için sıra istatistikleri	96
4. ÜÇ BİLEŞENLİ SİSTEMLER İLE ÖNERİLEN DÖNÜŞÜM	97
4.1 Bağımsız Aynı Dağılıma Sahip Üç Bileşenli Sistemler ile Önerilen Dönüşüm	97
4.1.1 G_4 – dağılımın yaşam fonksiyonu ve bozulma oranı fonksiyonu	101
4.1.2 G_4 – dağılımının moment çıkaran fonksiyonu, momentleri, çarpıklık ve basıklık katsayıları	104
4.1.3 G_4 – dağılımından rasgele sayı üretme	106
4.1.4 G_4 – dağılımın Rényi entropisi	106
4.1.5 G_4 – dağılımı için özel durum	108
4.1.6 G_4 – dağılımın özel durumu için matematiksel özellikleri	109
4.1.7 G_4 – dağılımın özel durumu için moment çıkaran fonksiyon, momentler ve çarpıklık ve basıklık katsayıları	111
4.1.8 G_4 – dağılımın özel durumu için en çok olabilirlik tahmini ve Fisher bilgi matrisi	112
4.1.9 G_4 – dağılımın özel durumu için Rényi entropisi	115
4.1.10 G_4 – dağılımın özel durumu için sıra istatistikleri	116
4.2 Bağımsız Farklı Dağılıma Sahip Üç Bileşenli Sistemler ile Önerilen Dönüşüm ..	116
4.2.1 G_5 – dağılımın moment çıkaran fonksiyonu, momentleri ve çarpıklık ve	

basıklık katsayıları	118
4.2.2 G_5 – dağılımdan rasgele sayı üretme	119
4.2.3 G_5 – dağılımı için özel durum	120
4.2.4 G_5 – dağılımın özel durumu için moment çıkaran fonksiyon, momentler ve çarpıklık ve basıklık katsayıları	121
4.2.5 G_5 – dağılımın özel durumu için en çok olabilirlik tahmini ve Fisher bilgi matrisi	122
4.2.6 G_5 – dağılımın özel durumu için Rényi entropisi	125
4.2.7 G_5 – dağılımın özel durumu için sıra istatistikleri	126
4.3 Bağımlı Birbirleri ile Yer Değiştirilebilir Özelliğine Sahip Üç Bileşenli Sistemler ile Önerilen Dönüşüm	127
4.3.1 G_6 – dağılımın yaşam fonksiyonu ve bozulma oranı fonksiyonu	130
4.3.2 G_6 – dağılımı için özel durum	130
4.3.3 G_6 – dağılımın özel durumu için matematiksel özellikleri	132
4.3.4 G_6 – dağılımın özel durumu için moment çıkaran fonksiyon, momentler ve çarpıklık ve basıklık katsayıları	134
4.3.5 G_6 – dağılımın özel durumu için en çok olabilirlik tahmini ve Fisher bilgi matrisi	135
4.3.6 G_6 – dağılımın özel durumu için Rényi entropisi	137
4.3.7 G_6 – dağılımın özel durumu için sıra istatistikleri	138
5. UYGULAMA	139
5.1 Birinci Veri Seti (B Bankasındaki Müşteri Hizmetleri Öncesi Bekleme Süresi) ..	140
5.2 İkinci Veri Seti (Wheaton Nehri Taşkın Verilerinin İhlalleri)	142
5.3 Üçüncü Veri Seti (Mesane Kanseri Verileri)	144
5.4 Dördüncü Veri Seti (Kevlar 373/epoksi'nin yorulma kırılma ömrü)	146
5.5 Beşinci Veri Seti (Elli maddenin $t = 0$ 'da kullanılmış ve hata verme süreleri)	148
5.6 Altıncı Veri Seti (Karbon liflerinin kırılması verileri)	150
5.7 Yedinci Veri Seti (128 Mesane kanseri hastalarının iyileşme süreçleri)	151
6. TARTIŞMA ve SONUÇ	154
KAYNAKLAR	156
EKLER	160
Ek 1. Erf Fonksiyonu	160
Ek 2. Tamamlanmamış Beta Fonksiyonu	161
ÖZGEÇMİŞ	162

SİMGELER DİZİNİ

β	Üstel dağılımının ölçek parametresi
θ	Bağımlılık parametresi
λ	Konveks kombinasyon parametresi
δ	Dönüşüm parametresi

Kısaltmalar

BK	Basıklık Katsayısı
ÇK	Çarpıklık Katsayısı
FGM	Farlie-Gumbel-Morgenstern
AIC	Akaike Bilgi Kriteri
BIC	Bayesian Bilgi Kriteri
KS	Kolmogorov-Smirnov Testi

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 2.1 Kolmogorov-Smirnov Test İstatistiği Örnek Grafiği	26
Şekil 2.2 İki Bileşenli Seri Sistem	33
Şekil 2.3 İki Bileşenli Paralel Sistem	34
Şekil 2.4 Üç Bileşenli Seri Sistem	35
Şekil 2.5 Üç Bileşenli Seri ve Paralel Sistem	37
Şekil 2.6 Üç Bileşenli Seri ve Paralel Sistem	38
Şekil 2.7 Üç Bileşenli Seri ve Paralel Sistem	39
Şekil 2.8 Üç Bileşenli Paralel Sistem	40
Şekil 3.1 G_1 — dağılımın olasılık yoğunluk fonksiyonu	49
Şekil 3.2 G_1 — dağılımın bozulma oranı fonksiyonu	50
Şekil 3.3 G_1 — dağılımın ortalama kalan ömür fonksiyonu	52
Şekil 3.4 G_1 — dağılımın çarpıklık katsayısı ile üstel dağılımın çarpıklık katsayısının karşılaştırılması	54
Şekil 3.5 G_1 — dağılımın basıklık katsayısı ile üstel dağılımın basıklık katsayısının karşılaştırılması	55
Şekil 3.6 G_2 — dağılımın olasılık yoğunluk fonksiyonu	65
Şekil 3.7 G_2 — dağılımın bozulma oranı fonksiyonu	67
Şekil 3.8 G_2 — dağılımın ortalama kalan ömür fonksiyonu	68
Şekil 3.9 G_2 — dağılımın çarpıklık katsayısı ile üstel dağılımın çarpıklık katsayısının karşılaştırılması	70
Şekil 3.10 G_2 — dağılımın basıklık katsayısı ile üstel dağılımın basıklık katsayısının karşılaştırılması	72
Şekil 3.11 G_3 — dağılımın olasılık yoğunluk fonksiyonu	83
Şekil 3.12 G_3 — dağılımın bozulma oranı fonksiyonu	85
Şekil 3.13 G_3 — dağılımın ortalama kalan ömür fonksiyonu	86
Şekil 3.14 G_3 — dağılımın çarpıklık katsayısı ile üstel dağılımın çarpıklık katsayısının karşılaştırılması	88
Şekil 3.15 G_3 — dağılımın basıklık katsayısı ile üstel dağılımın basıklık katsayısının karşılaştırılması	90
Şekil 4.1 Şekil üzerinde farklı dönüşüm parametreler için yeni dağılımdan elde edilen Sistemler	99
Şekil 4.2 G_4 — dağılımın olasılık yoğunluk fonksiyonu	109
Şekil 4.3 G_4 — dağılımın bozulma oranı fonksiyonu	110
Şekil 4.4 G_4 — dağılımın ortalama kalan fonksiyonu	111
Şekil 4.5 G_6 — dağılımın olasılık yoğunluk fonksiyonu	131
Şekil 4.6 G_6 — dağılımın bozulma oranı fonksiyonu	133
Şekil 4.7 G_3 — dağılımın ortalama kalan ömür fonksiyonu	134

ÇİZELGELER DİZİNİ

Çizelge 4.1 Farklı dönüşüm parametreler için yeni dağılımdan elde edilen sistemlerin Dağılımı	100
Çizelge 5.1 Önerilen altı dağılımın parametreleri için alınan başlangıç değerleri	140
Çizelge 5.2 B Bankasındaki müşteri hizmetleri öncesi bekleme süresi (dakika olarak).....	141
Çizelge 5.3 B Bankası verileri için parametre tahminleri	141
Çizelge 5.4 Banka B verileri için model seçim kriterleri	142
Çizelge 5.5 Wheaton Nehri taşkın verilerinin ihlalleri	142
Çizelge 5.6 Nehir taşkınlığı verileri için parametre tahminleri	143
Çizelge 5.7 Nehir taşkınlığı verileri için model seçim kriterleri	144
Çizelge 5.8 Mesane kanseri verileri	144
Çizelge 5.9 Mesane kanseri verileri için parametre tahminleri	145
Çizelge 5.10 Mesane kanseri verileri için model seçim kriterleri	146
Çizelge 5.11 Kevlar 373/epoksi'nin kırılma ömrü	147
Çizelge 5.12 Kevlar verileri için parametre tahminleri	147
Çizelge 5.13 Banka B verileri için model seçim kriterleri	148
Çizelge 5.14 Elli maddenin $t = 0$ 'da kullanılmış ve hata verme süreleri (hafta olarak)	148
Çizelge 5.15 Elli maddenin hata verme verileri için parametre tahminleri	149
Çizelge 5.16 Elli maddenin hata verme verileri için model seçim kriterleri	149
Çizelge 5.17 Karbon liflerinin kırılması verileri	150
Çizelge 5.18 Karbon liflerinin kırılması verileri için parametre tahminleri	150
Çizelge 5.19 Karbon liflerinin kırılması verileri için model seçim kriterleri	151
Çizelge 5.20 Mesane kanseri hastalarının iyileşme süreçleri (ay olarak)	152
Çizelge 5.21 Mesane kanseri hastalarının iyileşme süreçleri verilerinin parametre tahminleri	152
Çizelge 5.22 Mesane kanseri hastaları verileri için model seçim kriterleri	153

1. GİRİŞ

Bir deney yapıldığında bir takım belirsizlikler ortaya çıkar ve bu belirsizlikleri modellemek için farklı dağılımlar kullanılır. Daha önce yapılan çalışmalara bakıldığında, standart ve bilinen tek değişkenli dağılımlar bu belirsizlikleri ortadan kaldırmak için yeterli olmayıp farklı veri setleri için iyi modelleme yapamamaktadır. Bununla birlikte, son yıllarda farklı yöntemler kullanılarak karmaşık veri setlerine daha uygun tek boyutlu dağılımlar elde edilmiştir. Örneğin karma dağılımlar, bileşik dağılımlar ve dönüştürülmüş dağılımlar ile elde edilen yeni dağılımlar diğer dağılımlara göre daha fazla esneklik göstermektedir. Dolayısıyla, yeni dağılımları geliştirmek istatistik teorisinin önemli uygulamalarından biri olduğu açıkça gözükmemektedir. Bu tez çalışmasında, dönüşüm yöntemi ele alınarak karesel ve kübik dönüşüm yöntemleri anlatılıp, iki ve üç boyutlu dağılımlardan yeni tek boyutlu dağılımlar elde edilecektir. Dönüştürülmüş dağılımlarda, mevcut olan dağılımların parametrelerine dönüşüm parametresi eklenerek daha esnek hale getirilecektir.

Literatür incelemesi yapıldığında, kullanılacak olan dönüşüm yönteminin tanıtılması ilk olarak Shaw ve Buckley (2007) tarafından yapılmıştır. Shaw ve Buckley (2007) çalışmalarında farklı dönüşüm yöntemlerini (sıra dönüşümleri, karesel dönüşümler ve karesel sıra dönüşümleri) tanıtmışlardır. Sonraki yıllarda, bu makaleden yola çıkılarak bu yöntem doğrultusunda birçok çalışma yapılmıştır. Bu çalışmalardan bazıları Aryal ve Tsokos (2011), Merovci (2013a,b) ve Luguterah ve Nasiru (2015) olarak yayınlanmıştır. Daha sonra birkaç araştırmacı tarafından bu teknik kullanılıp dönüşüm ailesi zenginleştirilmiştir. Kübik dönüşüm aileleri ise, Granzotto vd. (2017) tarafından verilmiştir. Bu çalışmada kübik dönüştürülmüş Weibull ve kübik dönüştürülmüş log-Lojistik dağılımları ele alınmıştır. AL-Kadim ve Mohammed (2017) makalesinde kübik dönüştürülmüş Weibull dağılımını dönüşüm parametreleri eşit alınarak incelenmiştir. Kübik dönüştürülmüş Pareto dağılımı Rahman vd. (2018), kübik dönüştürülmüş Gompertz-Makeham dağılımı ise Riffi ve Hamdan (2018) tarafından incelenmiştir. Rahman vd. (2019) makalesinde kübik dönüştürülmüş Weibull dağılımı verilmiştir. Yukarıda önerilen kübik dönüştürülmüş aileler kullanılarak farklı parametre uzayı ile tanıtılmıştır.

Bahsedilen tüm çalışmalarda kullanılan dönüşüm yöntemi tek boyutlu dağılımlar için önerilmiş olup, bu tez çalışmasında ise yeni önerilecek olan dönüşüm yöntemi iki ve üç boyutlu dağılımlardan tek boyutlu dağılım elde etme üzerinde kullanılmıştır. Önerilmiş dönüşüm yöntemi farklı özellikteki dağılımlar üzerinde uygulanabilir olduğundan literatürde birçok çalışma yapabilme olanağı sağlayacaktır. Bu dönüşüm yöntemi iki ve üç boyutlu dağılımlara uygulandığında elde edilen yeni tek boyutlu dağılımların parametre sayısı artacağından dağılımın şeklini etkileyebilecektir. Dolayısıyla dağılım daha esnek bir hale gelip bazı veri setlerinin modellenmesinde daha iyi sonuçlar elde edilebileceği düşünülmektedir. Bu araştırmanın amacı, mühendislik, biyolojik, finansal, çevresel ve diğer yaşam alanlarındaki verilerin uyumluluğunu artıran ve karmaşıklığı yakalayabilen daha esnek dağılımlar üretmektir. Böylece birçok uygulamalı bilimlerin bazı ömür verilerinin analiz ve modellemelerine daha uygun olması beklenmektedir.

Tez altı bölümden oluşmaktadır. İkinci bölümde tez için gerekli olan bazı tanımlar ve temel kavramlar verilmiştir. Tezde kullanılacak olan dağılımlardan bahsedilmiştir. Ayrıca, Shaw ve Buckley (2007)'de anlatılan dönüşüm yöntemi de anlatılmıştır. Son olarak, iki ve üç bileşenli sistemler incelenmiştir.

Üçüncü ve dördüncü bölümde ise, iki ve üç bileşenli sistemlerin bozulma olasılıklarından elde edilen dönüşüm anlatılacaktır. Bu bölümlerde, dönüşüm ailesinde kullanılacak olan sistem bileşenlerinin dağılımları üç farklı durum için elde edilecektir. Üçüncü bölümün ilk kısmında, iki bileşenli sistemin bileşenleri ilk olarak bağımsız aynı dağılıma sahip olarak alınmıştır. İkinci kısımda ise, sistem bileşenleri bağımsız farklı dağılıma sahip olarak alınacaktır. Son kısımda, sistem bileşenleri bağımlı aynı marjinal dağılımlara sahip olarak alınmıştır. Dördüncü bölüm de üç kısımdan oluşmaktadır. İlk kısımda, üçlü sistemin bileşenleri bağımsız aynı dağılıma sahip olarak alınacaktır. İkinci kısmında, sistem bileşenleri bağımsız farklı dağılıma sahip olup üçüncü alt bölümde de, sistem bileşenleri bağımlı birbirleri ile yer değiştirilebilir özelliğe sahip olarak alınmıştır. Böylece altı tane dağılım ailesi elde edilmiştir. Bu dağılım ailelerin matematiksel özelliklerinden yani yaşam fonksiyonu, bozulma oranı fonksiyonu ve ortalama kalan ömür fonksiyonundan bahsedilmiştir. Ayrıca, bu dağılımlar için moment çıkaran fonksiyonu, momentler ve

Çarpıklık ve basıklık elde edilecektir. Bunlara ek olarak, rasgele sayı üretme, Rényi entropi, en çok olabilirlik tahminleri ve sıra istatistikleri bulunmaya çalışılmıştır. Elde edilen altı dağılım ailesinde temel dağılımlar üstel, iki değişkenli üstel (Gumbel) ve Farlie-Gumbel-Morgenstern (FGM) dağılımı olarak ele alınmıştır, böylece altı dağılım elde edilmiştir. Bu dağılımların matematiksel özellikleri incelenmiştir, yani olasılık yoğunluk fonksiyonu, yaşam fonksiyonu, bozulma oranı fonksiyonu ve ortalama kalan ömür fonksiyonu verilip bu fonksiyonların monotonlukları incelenip grafikleri verilmiştir. Daha sonra, bu dağılımlar için moment çıkaran fonksiyonu, momentleri, arpıklık ve basıklık katsayısı, en çok olabilirlik tahmini, Fisher bilgi matrisi, Rényi entropisi ve sıra istatistikleri elde edilmiştir.

Beşinci bölümde ise, söz konusu olan altı dağılım literatürde mevcut olan farklı yedi gerçek veri seti için uygulanmıştır. Bu dağılımların veri setlerine uygun olup olmadıklarını anlamak için Akaike bilgi kriteri (AIC), Bayesian bilgi kriteri (BIC) ve Kolmogorov-Smirnov (*KS*) değerleri kullanılmıştır ve hangi veri setine hangi dağılımın uygun olduğu gösterilmiştir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde, çalışma için gerekli olan temel tanımlar ve bilgiler verilmiştir.

2.1 Rasgele Değişken, Olasılık Yoğunluk Fonksiyonu, Dağılım Fonksiyonu ve Yaşam Fonksiyonu

Aşağıdaki tanımlarda $\Omega \neq \emptyset$ örnek uzayı, $\mathcal{U}$ ise Ω uzayında bir σ – cebir olarak alınacaktır. $(\Omega, \mathcal{U})$ ikilisine ölçülebilir uzay denir. $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, Borel σ – cebiri $\mathbb{R}$ deki açık aralıkların ürettiği σ – cebirdir ve $\sigma(\{(a, b); a, b \in \mathbb{R}, a < b\})$ olarak tanımlanmıştır. $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ ise $\mathbb{R}^n$ deki Borel σ – cebir olup $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) = \sigma(\{(a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \times \dots \times (a_n, b_n); (a_i, b_i) \subset \mathbb{R}, a_i < b_i, i = 1, 2, \dots, n\})$ olduğu bilinmektedir.

Tanım 2.1 (Olasılık Ölçüsü) $(\Omega, \mathcal{U})$ ölçülebilir uzay olmak üzere,

$$P: \mathcal{U} \rightarrow [0, 1]$$

$$A \rightarrow P(A)$$

küme fonksiyonu için,

- (i) Her $A \in \mathcal{U}$ için $P(A) \geq 0$,
- (ii) $P(\Omega) = 1$,
- (iii) $\mathcal{U}$ σ – cebirinden alınmış ayrık olayların her $\{A_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ dizisi için,
$$P(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k) = \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k),$$

özellikleri sağlanıyor ise, P küme fonksiyonuna $(\Omega, \mathcal{U})$ ölçülebilir uzayında bir olasılık ölçüsü, $(\Omega, \mathcal{U}, P)$ üçlüsüne ise bir olasılık uzayı denir.

Tanım 2.2 (Rasgele Değişken) $(\Omega, \mathcal{U})$ bir ölçülebilir uzay ve $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ Borel σ – cebir olsun.

$$T: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\omega \rightarrow T(\omega)$$

olmak üzere, her $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ için $T^{-1}(B) \in \mathcal{U}$ şartı sağlanıyor ise, T fonksiyonuna bir rasgele değişken denir. Burada $T^{-1}(\cdot)$ ters görüntü kümesini ifade etmektedir.

Tanım 2.3 (n-Boyutlu Rasgele Değişken veya Rasgele Vektör) $(\Omega, \mathcal{U})$ ölçülebilir uzay ve $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ Borel σ -cebiri olsun ve

$$(T_1, T_2, \dots, T_n): \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$\omega \rightarrow (T_1, T_2, \dots, T_n)(\omega) = (T_1(\omega), T_2(\omega), \dots, T_n(\omega))$$

olmak üzere, her $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ için $(T_1, T_2, \dots, T_n)^{-1}(B) \in \mathcal{U}$ ölçülebilirlik şartı sağlanıyor ise, $(T_1, T_2, \dots, T_n)$ n-boyutlu rasgele değişken veya rasgele vektördür.

Tanım 2.4 (Bir Boyutlu Dağılım Fonksiyonu) $(\Omega, \mathcal{U}, P)$ bir olasılık uzayı olmak üzere,

$$F: \mathbb{R} \rightarrow [0,1]$$

$$t \rightarrow F(t) = P(\{\omega \in \Omega: T(\omega) \leq t\}) = P(T^{-1}(-\infty, t]) = P_T((-\infty, t])$$

şeklinde tanımlı F veya F_T fonksiyonuna, T rasgele değişkenin dağılım fonksiyonu denir.

Teorem 2.1 $F(t)$, T rasgele değişkeninin dağılım fonksiyonu ise,

- (i) $\lim_{t \rightarrow -\infty} F(t) = 0$ ve $\lim_{t \rightarrow \infty} F(t) = 1$,
- (ii) $F(t)$ azalmayan bir fonksiyondur,
- (iii) $F(t)$ sağdan sürekli bir fonksiyondur, yani $h > 0$ sayısı için,

$$\lim_{h \rightarrow 0} F(t + h) = F(t)$$

özellikleri sağlanır.

Tanım 2.5 (n-Değişkenli Dağılım Fonksiyonu) $(\Omega, \mathcal{U}, P)$ bir olasılık uzayı olsun ve

$$\begin{aligned} F_{T_1, T_2, \dots, T_n} : \quad \mathbb{R}^n &\rightarrow [0, 1] \\ (t_1, t_2, \dots, t_n) &\rightarrow F_{T_1, T_2, \dots, T_n}(t_1, t_2, \dots, t_n) = P(\{\omega \in \Omega : T_1(\omega) \leq t_1, T_2(\omega) \leq t_2, \dots, T_n(\omega) \leq t_n\}) \\ &= P\left((T_1, T_2, \dots, T_n)^{-1}((-\infty, t_1] \times (-\infty, t_2] \times \dots \times (-\infty, t_n])\right) \\ &= P_{T_1, T_2, \dots, T_n}((-\infty, t_1] \times (-\infty, t_2] \times \dots \times (-\infty, t_n]) \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan $F_{T_1, T_2, \dots, T_n}$ fonksiyonuna, $T_1, T_2, \dots, T_n$ rasgele değişkenlerinin ortak dağılım fonksiyonu veya $(T_1, T_2, \dots, T_n)$ n-boyutlu rasgele vektörün dağılım fonksiyonu denir.

Teorem 2.2 $F(t_1, t_2)$, (T_1, T_2) rasgele vektörünün dağılım fonksiyonu olmak üzere,

- (i) $\lim_{t_1 \vee t_2 \rightarrow -\infty} F(t_1, t_2) = 0$ ve $\lim_{t_1 \wedge t_2 \rightarrow \infty} F(t_1, t_2) = 1$,
- (ii) $\lim_{t_1 \rightarrow \infty} F(t_1, t_2) = F(\infty, t_2) = F(t_2)$, $\forall t_2$, $\lim_{t_2 \rightarrow \infty} F(t_1, t_2) = F(t_1, \infty) = F(t_1)$, $\forall t_1$
- (iii) $F(t_1, t_2)$ bileşenlere göre azalmayan bir fonksiyondur,
- (iv) $F(t_1, t_2)$ bileşenlere göre sağdan sürekli bir fonksiyondur,
- (v) Fréchet sınırlarına göre $F^-(t_1, t_2) \leq F(t_1, t_2) \leq F^+(t_1, t_2)$ olmalıdır, burada $F^-(t_1, t_2) = \max\{F(t_1) + F(t_2) - 1, 0\}$ ve $F^+(t_1, t_2) = \min\{F(t_1), F(t_2)\}$,

özellikleri sağlanmaktadır. Bu teoremin tersi doğru değildir. Bu dört özelliğe sahip her fonksiyonun bir dağılım fonksiyonu olması için, o fonksiyonun $\mathbb{R}^2$ uzayında monoton bir fonksiyon olması gerekmektedir.

Tanım 2.6 (Süreklilik) $f(t)$ fonksiyonunun tanım aralığının bir t_0 noktasında sürekli bir fonksiyon olabilmesi için,

- (i) $\lim_{t \rightarrow t_0} f(t) = l$ mevcut olması,

- (ii) $f(t)$ fonksiyonunun t_0 noktasında tanımlı olması,
- (iii) $f(t_0) = l$ olması,

özelliklerini sağlamalıdır.

Tanım 2.7 (Süreklili Rasgele Değişken) T bir rasgele değişken ve $F(t)$ bu rasgele değişkenin dağılım fonksiyonu olsun. Bir $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ fonksiyonu yardımıyla

$$F(t) = \int_{-\infty}^t f(u) du, \quad t \in \mathbb{R}$$

tanımlanan T ye sürekli rasgele değişken ve dağılımına sürekli dağılım adı verilir. $F(t)$ fonksiyonu da $f(t)$ fonksiyonu da T nin olasılık yoğunluk fonksiyonu olarak adlandırılır.

Bu çalışma boyunca, ele alınan rasgele değişkenler $[0, \infty)$ değerli sürekli rasgele değişkenlerdir.

T sürekli rasgele değişkenin olasılık yoğunluk fonksiyonu, $F(t)$ dağılım fonksiyonu için $f(t)$ olasılık yoğunluk fonksiyonu t noktasında sürekli iken,

$$f(t) = \frac{d}{dt} F(t),$$

dır.

T_1, T_2 sürekli rasgele değişkenlerinin ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu aşağıdaki gibi verilir,

$$f(t_1, t_2) = \frac{\partial^2}{\partial t_1 \partial t_2} F(t_1, t_2) = \lim_{\Delta t_2 \rightarrow 0} \lim_{\Delta t_1 \rightarrow 0} \frac{P(t_1 < T_1 < t_1 + \Delta t_1, t_2 < T_2 < t_2 + \Delta t_2)}{\Delta t_1 \Delta t_2}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{\Delta t_2 \rightarrow 0} \frac{\lim_{\Delta t_1 \rightarrow 0} \frac{F(t_1 + \Delta t_1, t_2 + \Delta t_2) - F(t_1, t_2 + \Delta t_2)}{\Delta t_1} - \lim_{\Delta t_1 \rightarrow 0} \frac{F(t_1 + \Delta t_1, t_2) - F(t_1, t_2)}{\Delta t_1}}{\Delta t_2} \\
&= \lim_{\Delta t_2 \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial}{\partial t_1} F(t_1, t_2 + \Delta t_2) - \frac{\partial}{\partial t_1} F(t_1, t_2)}{\Delta t_2}
\end{aligned}$$

Ayrıca

$$F(t_1, t_2) = P(T_1 \leq t_1, T_2 \leq t_2) = \int_{-\infty}^{t_1} \int_{-\infty}^{t_2} f(u, v) dv du, \quad t_1, t_2 \in \mathbb{R}$$

dır.

Tanım 2.8 (Koşullu Dağılım Fonksiyonu) (T_1, T_2) rasgele vektörünün dağılım fonksiyonu $F_{T_1, T_2}(t_1, t_2)$ olmak üzere $T_2 \leq t_2$ verilmişken T_1 rasgele değişkeninin koşullu dağılım fonksiyonu,

$$F_{T_1|T_2 \leq t_2}(t_1) = P(T_1 \leq t_1 | T_2 \leq t_2) = \frac{F(t_1, t_2)}{F(t_2)}, \quad F(t_2) > 0.$$

şeklince verilmiştir. Burada $F(t_2)$, T_2 rasgele değişkeninin marjinal dağılım fonksiyonudur. Benzer biçimde, $T_2 = t_2$ verilmişken T_1 rasgele değişkeninin koşullu dağılım fonksiyonu,

$$F_{T_1|T_2=t_2}(t_1) = P(T_1 \leq t_1 | T_2 = t_2) = \frac{\frac{\partial}{\partial t_2} F_{T_1, T_2}(t_1, t_2)}{f_{T_2}(t_2)}.$$

olarak bulunur.

Tanım 2.9 (Koşullu Olasılık Yoğunluk Fonksiyonu) $T_2 = t_2$ verildiğinde, T_1 rasgele değişkeninin koşullu olasılığı,

$$f_{T_1|T_2=t_2}(t_1) = \frac{f(t_1, t_2)}{f(t_2)}, f(t_2) > 0$$

olarak tanımlanmaktadır.

Tanım 2.10 (Birbirleri ile Yer Değiştirebilir Rasgele Değişkenler) $\{T_i\}_{i=1}^{\infty}$ rasgele değişkenleri birbirleri ile yer değiştirebilmesi için, $S(n)$ tüm permütasyonların kümesi iken, her $n = 1, 2, \dots$ için,

$$T_1, T_2, \dots, T_k \stackrel{d}{=} T_{\pi(1)}, T_{\pi(2)}, \dots, T_{\pi(n)}, \forall \pi \in S(n)$$

olması gerekir. (Lauritzen 2007)

Örneğin, T_1, T_2 ve T_3 rasgele değişkenlerinin birbirleri ile yer değiştirebilmeleri için aşağıdaki üç özellik sağlanmalıdır.

$$F(t_1, t_2, t_3) = F(t_1, t_3, t_2) = F(t_2, t_1, t_3) = F(t_2, t_3, t_1) = F(t_3, t_1, t_2) = F(t_3, t_2, t_1),$$

$$F(t_1, t_2, \infty) = F(t_1, \infty, t_3) = F(\infty, t_2, t_3),$$

$$F(t_1, \infty, \infty) = F(\infty, t_2, \infty) = F(\infty, \infty, t_3).$$

Eğer, $T_1, T_2, \dots, T_n$ rasgele değişkenleri bağımsız ve aynı dağılımlı ise o zaman birbirleri ile yer değiştirebilirdir ama tersi geçerli değildir.

Tanım 2.11 (Yaşam Fonksiyonu) T bir yaşam süresini gösteren rasgele değişken olsun. T rasgele değişkenin t zamanından daha büyük değer alma olasılığına yaşam fonksiyonu denir ve $\bar{F}(t)$ ile gösterilir. Başka bir deyişle, bileşenin t zamanından daha fazla yaşama

olasılığını ifade etmektedir. Yaşam fonksiyonu,

$$\bar{F}(t) = P(T > t) = 1 - F(t) = \int_t^{\infty} f(u)du,$$

şeklinde gösterilir. Burada f olasılık yoğunluk fonksiyonu ve F dağılım fonksiyonudur. Yaşam fonksiyonu, monoton azalan bir fonksiyondur ve $\bar{F}(0) := \lim_{t \rightarrow 0} \bar{F}(t) = 1$, $\bar{F}(\infty) := \lim_{t \rightarrow \infty} \bar{F}(t) = 0$ özelliklerini sağlar (Leemis 1986).

Bu çalışmada sadece iki ve üç değişkenli yaşam fonksiyonu kullanıldığı için sadece bu iki durum incelenecektir.

Tanım 2.12 (İki Değişkenli Yaşam Fonksiyonu) T_1 ve T_2 iki bileşenin yaşam sürelerini gösteren rasgele değişkenler olsun. Bu rasgele değişkenlerin marjinal dağılım fonksiyonları $F_{T_1}(t_1)$ ve $F_{T_2}(t_2)$, ortak dağılım fonksiyonu ise $F_{T_1, T_2}(t_1, t_2)$ olsun. T_1 ve T_2 rasgele değişkenlerinin sırası ile t_1 ve t_2 zamanından daha çok yaşama olasılığına iki boyutlu yaşam fonksiyonu adı verilip, $\bar{F}_{T_1, T_2}(t_1, t_2)$ ile gösterilir ve,

$$\bar{F}_{T_1, T_2}(t_1, t_2) = P(T_1 > t_1, T_2 > t_2) = 1 - F_{T_1}(t_1) - F_{T_2}(t_2) + F_{T_1, T_2}(t_1, t_2).$$

olarak tanımlanır. Yaşam fonksiyonu, monoton azalan bir fonksiyondur ve $\bar{F}(0,0) := \lim_{t_1, t_2 \rightarrow 0} \bar{F}_{T_1, T_2}(t_1, t_2) = 1$, $\bar{F}_{T_1, T_2}(\infty, \infty) := \lim_{t_1, t_2 \rightarrow \infty} \bar{F}_{T_1, T_2}(t_1, t_2) = 0$ özelliklerini sağlar.

Tanım 2.13 (Üç Değişkenli Yaşam Fonksiyonu) T_1, T_2 ve T_3 bileşenlerin yaşam sürelerini gösteren rasgele değişkenler olsun. Bu rasgele değişkenlerin marjinal dağılım fonksiyonları $F_{T_i}(t_i), i = 1, 2, 3$, ikili ortak dağılım fonksiyonları ise $F_{t_i, T_j}(t_i, t_j), i, j = 1, 2, 3, i \neq j$ ve ikili ortak yaşam fonksiyonları $\bar{F}_{T_i, T_j}(t_i, t_j), i, j = 1, 2, 3, i \neq j$ olarak yazılabilir. Üç rasgele değişkenin ortak dağılım fonksiyonu ise $F(t_1, t_2, t_3)$ ve üçlü ortak

yaşam fonksiyonu ise,

$$\begin{aligned}\bar{F}_{T_1, T_2, T_3}(t_1, t_2, t_3) &= 1 - F_{T_1}(t_1) - F_{T_2}(t_2) - F_{T_3}(t_3) + F_{T_1, T_2}(t_1, t_2) + F_{T_1, T_3}(t_1, t_3) + F_{T_2, T_3}(t_2, t_3) \\ &\quad - F_{T_1, T_2, T_3}(t_1, t_2, t_3),\end{aligned}$$

olarak tanımlanır, Yaşam fonksiyonu, monoton azalan bir fonksiyondur ve

$$\bar{F}(0,0,0) := \lim_{t_1, t_2, t_3 \rightarrow 0} \bar{F}_{T_1, T_2, T_3}(t_1, t_2, t_3) = 1, \quad \bar{F}_{T_1, T_2, T_3}(\infty, \infty, \infty) := \lim_{t_1, t_2, t_3 \rightarrow \infty} \bar{F}_{T_1, T_2, T_3}(t_1, t_2, t_3) = 0$$

özelliklerini sağlar (Leemis 1986).

Tanım 2.14 (Koşullu Yaşam Fonksiyonu) İki değişkenli koşullu yaşam fonksiyonu,

$$\bar{F}_{T_1|T_2=t_2}(t_1) = P(T_1 > t_1 | T_2 = t_2).$$

şeklinde tanımlanır. İkinci bileşenin t_2 zamanında bozulduğu bilindiğinde, birinci bileşenin t_1 zamanından daha fazla yaşama olasılığına koşullu yaşam fonksiyonu denir.

2.2 Bozulma Oranı Fonksiyonu ve Ortalama Kalan Ömür Fonksiyonu

Tanım 2.15 (Bozulma Oranı Fonksiyonu) Bozulma oranı fonksiyonu, bir bileşenin t zamanında yaşadığı bilindiğinde, bu bileşenin çok küçük bir zaman aralığında bozulması oranına denir ve,

$$\begin{aligned}r(t) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{P(t \leq T < t + \Delta t | T > t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \frac{P(t \leq T < t + \Delta t, T > t)}{P(T > t)} \\ &= \frac{1}{\bar{F}(t)} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{P(t \leq T < t + \Delta t)}{\Delta t} = \frac{1}{\bar{F}(t)} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{F(t + \Delta t) - F(t)}{\Delta t} = \frac{f(t)}{\bar{F}(t)},\end{aligned}$$

olarak tanımlanır. Başka bir ifade ile,

$$r(t) = \frac{f(t)}{\bar{F}(t)} = \frac{\frac{d}{dt}F(t)}{1 - F(t)} = -\frac{d}{dt} \log(1 - F(t)) = -\frac{d}{dt} \log \bar{F}(t).$$

dır. Böylece olasılık yoğunluk fonksiyonu ve yaşam fonksiyonu, bozulma oranı fonksiyonundan aşağıdaki gibi elde edilir,

$$\bar{F}(t) = e^{-\int_0^t r(t)dt}, \quad f(t) = r(t)e^{-\int_0^t r(t)dt}.$$

Yukarıda görüldüğü gibi bozulma oranı fonksiyonu, dağılım fonksiyonunu tek olarak belirler.

Tanım 2.16 (İki Değişkenli Bozulma Oranı Fonksiyonu) İki değişkenin arasındaki ortak bozulma oranı fonksiyonu,

$$\begin{aligned} r(t_1, t_2) &= \lim_{\Delta t_1, \Delta t_2 \rightarrow 0} \frac{P(t_1 < T_1 < t_1 + \Delta t_1, t_2 < T_2 < t_2 + \Delta t_2 | T_1 > t_1, T_2 > t_2)}{\Delta t_1 \Delta t_2} \\ &= \lim_{\Delta t_1, \Delta t_2 \rightarrow 0} \frac{P(t_1 < T_1 < t_1 + \Delta t_1, t_2 < T_2 < t_2 + \Delta t_2)}{\Delta t_1 \Delta t_2} \frac{1}{P(T_1 > t_1, T_2 > t_2)} \\ &= \frac{\frac{\partial^2 F(t_1, t_2)}{\partial t_1 \partial t_2}}{\bar{F}(t_1, t_2)} = \frac{f(t_1, t_2)}{\bar{F}(t_1, t_2)}. \end{aligned}$$

şeklinde tanımlıdır.

Tanıma göre T_1 bileşenin t_1 zamanı ve T_2 bileşenin t_2 zamanından önce yaşadıkları bilindiğinde, bu bileşenlerin sırasıyla t_1 ve t_2 zamanında bozulması ani bir risktir ki ona iki değişkenli bozulma oranı fonksiyonu denir. (Rodriguez 2010)

Tanım 2.17 (Monoton bozulma oranı) Monoton bozulma oranı, yaşam zamanı geçtikçe bozulma oranının sabit kalması, artması ya da azalması şeklinde üç durum olarak ifade edilmektedir. Sabit bozulma oranı için, erişkin insanların geçirdiği yaşam süreleri örnek olarak verilebilir. Elektronik aletlerin yaşam sürelerinin dağılımı azalan bozulma oranı için örnektir. Son olarak belirli bir zamandan sonra ele alınan yaşlı insan grupların ömrü de artan bozulma oranına örnek olarak gösterilebilir.

Tanım 2.18 (Koşullu Bozulma Oranı Olasılığı) İki bileşenin sırası ile t_1 ve t_2 zamanlarından sonra yaşadıkları bilindiğinde, bir bileşenin $(t_i, t_i + \Delta t)$ aralığında bozulma olasılığına koşullu bozulma oranı olasılığı denir ve,

$$\begin{aligned}\psi_{T_1|T_1>t_1, T_2>t_2}(t_1) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{P(t_1 < T_1 < t_1 + \Delta t | T_1 > t_1, T_2 > t_2)}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{P(t_1 < T_1 < t_1 + \Delta t, T_2 > t_2)}{\Delta t} \frac{1}{P(T_1 > t_1, T_2 > t_2)} \\ &= \frac{-\frac{d}{dt_1} \bar{F}(t_1, t_2)}{\bar{F}(t_1, t_2)}.\end{aligned}$$

şeklinde elde edilir.

Tanım 2.19 (Ortalama Kalan Ömür Fonksiyonu) T bir parçanın ömrünü göstermek üzere, bu parçanın en az t kadar yaşadığı bilinsin. Bu durumda, en az x süre kadar daha çalışması olasılığı,

$$P(T - t > x | T > t) = \frac{P(T - t > x, T > t)}{P(T > t)} = \frac{P(T > t + x)}{P(T > t)} = \frac{\bar{F}(t + x)}{\bar{F}(t)}.$$

şeklinde ifade edilir. Ortalama kalan ömür fonksiyonu t yaşındaki bir bileşenin geriye kalan ortalama ömrüdür, böylece

$$\begin{aligned}
m(t) &= E(T - t | T > t) = \int_0^{\infty} P(T - t > x | T > t) dx = \int_0^{\infty} \frac{\bar{F}(t+x)}{\bar{F}(t)} dx \\
&= \frac{\int_0^{\infty} \bar{F}(t+x) dx}{\bar{F}(t)} = \frac{\int_t^{\infty} \bar{F}(x) dx}{\bar{F}(t)} = \frac{\int_t^{\infty} u f(u) du}{\bar{F}(t)} - t,
\end{aligned}$$

olarak tanımlanır. Zahedi (1991), türevlenebilir $m(t)$ fonksiyonunun aşağıdaki koşulları sağlaması gerektiğini göstermiştir,

- (i) $m(t) > 0, \forall t \in [0, \infty)$,
- (ii) $m(0) = E(T) < \infty$,
- (iii) $m'(t) > -1, \forall t \in (0, \infty)$,
- (iv) $\int_0^{\infty} \frac{1}{m(u)} du = \infty$.

Ortalama kalan ömür fonksiyonun mevcut olabilmesi için ikinci koşul sağlanmalıdır.

2.3 Çarpıklık ve Basıklık Katsayıları

Tanım 2.20 (Çarpıklık Katsayısı-ÇK): Çarpıklık katsayısı, bir dağılımın simetrik olup olmadığını sayısal bir değer ile vermektedir. Ancak istatistiksel özellikler bakımından çok güçlü ölçümler değildirler.

Bir dağılımın,

- (i) Ortalama, mod ve medyan konumları farklı noktalarda ise,
- (ii) Çeyreklikleri medyana eşit uzaklıkta değilse,
- (iii) Veriler yardımıyla çizilen eğrisi simetrik değilse, yani bir tarafa diğer tarafa göre daha fazla yaslanmışsa,

o dağılıma çarpık denir. Çarpıklık ölçüsü,

$$\zeta K = E \left[\left(\frac{T - E(T)}{\sqrt{Var(T)}} \right)^3 \right] = \frac{1}{(Var(T))^{\frac{3}{2}}} \left[E(T^3) - 3E(T)E(T^2) + 2(E(T))^3 \right]$$

şeklinde hesaplanmaktadır. (Gupta ve Kapoor 2000)

Bu değer $-\infty$ ve ∞ arasında değişir. Negatif, sıfır ve pozitif olmak üzere üç tür çarpıklıktan söz edilebilir.

Sola Çarpık: Eğer ortalama medyandan ve medyan değeri moddan küçük ise, çarpıklık değeri negatif olur. Yani, dağılımın çarpıklığı ne kadar büyük ise ortalama ile mod arasındaki uzaklık o kadar fazladır. Dağılımın kütlesi grafiğin sağ tarafında toplanıp soldaki kuyruk daha uzun olur. Bu durumda, dağılım sola çarpıktır denir. Yaşa göre tasarruf eğilimi örneği sola çarpık dağılım için bir örnek olabilir. Genç bireylerin tasarrufu az olup, orta yaşa doğru giderek artmakta ancak ileri yaşta tekrar azalmaktadır.

Simetrik: Eğer ortalama ve mod eşit ise, çarpıklık değeri sıfır olur ve simetrik dağılım denir. (Genelde çarpıklık ölçüsü ± 3 veya ± 2 aralığındayken, Normal dağılım olarak kabul edilmektedir.)

Sağa Çarpık: Eğer ortalama değeri medyandan ve medyan mod değerinden büyük ise, çarpıklık değeri pozitif olur. Dağılımın kütlesi grafiğin sol tarafında toplanıp sağdaki kuyruk daha uzun olur. Bu durumda, dağılım sağa çarpıktır denir. Örneğin hastaların iyileşme sürelerinin dağılımının sağa çarpık olması iyidir.

Tanım 2.21 (Basıklık Katsayısı-BK): Bir rasgele değişken için gözlem değerlerinin dağılım yapısı çarpıklık haricinde, basıklık katsayısı ile de özetlenebilir. Bir dağılımda rasgele değişken için alınan gözlemlerin varyansı artar ise, gözlemlerin dağılımı basık olur, ve varyans azaldıkça da sivrileşir. Bir dağılımın sivriliği veya basıklığı ölçüsüne basıklık katsayısı adı verilir ve,

$$\begin{aligned}
BK &= E \left[\left(\frac{T - E(T)}{\sqrt{Var(T)}} \right)^4 \right] \\
&= \frac{1}{(Var(T))^2} \left[E(T^4) - 4E(T)E(T^3) + 6(E(T))^2 E(T^2) - 4(E(T))^3 E(T) + (E(T))^4 \right]
\end{aligned}$$

olarak tanımlanır. Basık veya sivri olmayan eğriye normal eğri denir. Normalden daha yassı olan eğriye basık denir. Normale göre zirveye sahip olan eğriye sivri denir. (Gupta ve Kapoor 2000)

Basıklık katsayısı en küçük -2 değeri alabilir. Negatif, sıfır ve pozitif olmak üzere üç tür basıklıktan söz edilebilir.

Basık: Basıklık katsayısı negatif ise ($-2 < BK < 0$), dağılımın grafiği ortalama etrafında daha basık olup daha büyük varyansa sahiptir. Eğri normal dağılıma göre daha basıktır.

Simetrik: Eğer basıklık katsayısı sıfır ise, bu dağılıma simetrik dağılım denir.

Sivri: Basıklık katsayısı pozitif ise, dağılımın grafiği ortalama değerinde toplanıp daha sivri olur, bu dağılımın varyansı küçüktür ve dağılım eğrisi normal dağılıma göre daha diktir.

2.4 Rasgele Sayı Üretme

Bu kısımda dağılımlardan sayı üretme yöntemleri anlatılacaktır.

2.4.1 Ters dönüşüm yöntemi ile rasgele sayı üretme

F dağılım fonksiyonuna sahip bir T rasgele değişkeninin dağılımından sayı üretmek için en kullanışlı yöntem, F dağılım fonksiyonunun genelleştirilmiş tersi olan,

$$F^{-}: (0,1) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$u \rightarrow \inf\{t: F(t) \geq u\} = F^{-}(u)$$

dan yola çıkmaktır. Burada U rasgele değişkeni $(0,1)$ aralığında tanımlı düzgün dağılıma sahiptir ve, $U = F(T)$ olarak alındığında yukarıda tanımlanan fonksiyondan yola çıkarak,

$$T = F^{-}(U)$$

dönüşümü kullanılmaktadır. $F^{-}(U)$ rasgele değişkeninin dağılım fonksiyonu F dir, yani $F^{-}(U)$ dönüşümü ile ortaya çıkan rasgele değişken, T rasgele değişkeninin kendisidir.

$T = F^{-}(U)$ dönüşümü integral dönüşümü olarak bilinmektedir. Sonuç olarak, $(0,1)$ aralığında tanımlı olan düzgün dağılımdan üretilen sayılar, integral dönüşümü sonucunda T rasgele değişkenin dağılımından üretilmiş sayılar olacaktır.

Algoritma 1. Ters dönüşüm yöntem ile rasgele sayı üretme

Adım 1: $F(t)$ dağılım fonksiyonunu belirle,

Adım 2: U rasgele değişkenini düzgün $(0,1)$ dağılımından üret,

Adım 3: $T = F^{-}(U)$ hesapla.

Örneğin β parametrelili üstel dağılımı göz önüne alınsın.

$$F(t; \beta) = 1 - e^{-\beta t}, t \geq 0$$

ve $U \sim U(0,1)$ düzgün dağılımına sahip ve $U = F(T)$ alındığında, dönüşüm uygulanınca,

$$F^{-1}(u) = \frac{-1}{\beta} \ln(1 - u), 0 < u < 1$$

olmak üzere,

$$T = F^{-1}(U) = \frac{-1}{\beta} \ln(1 - U)$$

dönüşümü ile T rasgele sayıları üstel dağılımdan üretilmiş sayılardır. Burada $1 - U$ rasgele değişkeni de U rasgele değişkeni gibi düzgün $(0,1)$ dağılımına sahiptir. Böylece β parametrelili üstel dağılımdan sayı üretmek için $T = \frac{-1}{\beta} \ln(U)$ dönüşümü de kullanılabilir.

2.4.2 Çok değişkenli dağılımlardan rasgele sayı üretme

$T_1, T_2, \dots, T_n$ rasgele değişkenlerinin ortak dağılım fonksiyonu $F_{T_1, T_2, \dots, T_n}(t_1, t_2, \dots, t_n)$ olsun. Bu rasgele değişkenler bağımsız ise,

$$\begin{aligned} f_{T_1, T_2, \dots, T_n}(t_1, t_2, \dots, t_n) &= f_{T_1}(t_1) f_{T_2}(t_2) \cdots f_{T_n}(t_n) \\ F_{T_1, T_2, \dots, T_n}(t_1, t_2, \dots, t_n) &= F_{T_1}(t_1) F_{T_2}(t_2) \cdots F_{T_n}(t_n) \end{aligned}$$

dır. $U_1, U_2, \dots, U_n$ birbirinden bağımsız $(0,1)$ aralığına sahip düzgün dağılımdan alınmış olsun, o zaman,

$$T_1 = F_{T_1}^{-1}(U_1), T_2 = F_{T_2}^{-1}(U_2), \dots, T_n = F_{T_n}^{-1}(U_n)$$

ters dönüşüm yöntemi ile $T_1, T_2, \dots, T_n$ rasgele değişkenleri üretilebilir.

$T_1, T_2, \dots, T_n$ rasgele değişkenleri bağımlı ise, o zaman,

$$\begin{aligned}
F_{T_1}(t_1) &= P(T_1 \leq t_1), \\
F_{T_2}(t_2|t_1) &= P(T_2 \leq t_2|T_1 = t_1), \\
&\vdots \\
F_{T_n}(t_n|t_1, t_2, \dots, t_{n-1}) &= P(T_n \leq t_n|T_1 = t_1, T_2 = t_2, \dots, T_{n-1} = t_{n-1})
\end{aligned}$$

ve ilişkili olasılık yoğunluk fonksiyonu ve koşullu olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f_{T_1}(t_1), f_{T_2}(t_2|t_1), \dots, f_{T_n}(t_n|t_1, t_2, \dots, t_{n-1})$$

şeklinde yazılabilir. Rosenblatt (1952) çalışmasında bu konuyu anlatmıştır. Böylece,

$$\begin{aligned}
U_1 &= F_{T_1}(T_1), \\
U_2 &= F_{T_2}(T_2|T_1), \\
&\vdots \\
U_n &= F_{T_n}(T_n|T_1, T_2, \dots, T_{n-1})
\end{aligned}$$

Burada U_i rasgele değişkenleri birbirinden bağımsız (0,1) aralığına sahip düzgün dağılımdan alınmıştır. $(T_1, T_2, \dots, T_n)$ rasgele vektörünün çok değişkenli dağılım fonksiyonu,

$$\begin{aligned}
T_1 &= F_{T_1}^{-1}(U_1), \\
T_2 &= F_{T_2}^{-1}(U_2|T_1) = F_{T_2}^{-1}\left(U_2|F_{T_1}^{-1}(U_1)\right), \\
&\vdots \\
T_n &= F_{T_n}^{-1}(U_n|T_1, T_2, \dots, T_{n-1}) \\
&= F_{T_n}^{-1}\left(U_n|F_{T_1}^{-1}(U_1), F_{T_2}^{-1}\left(U_2|F_{T_1}^{-1}(U_1)\right) \dots, F_{T_{n-1}}^{-1}\left(U_{n-1}|F_{T_1}^{-1}(U_1), \dots, F_{T_{n-2}}^{-1}(U_{n-2})\right)\right)
\end{aligned}$$

Böylece $T_1, T_2, \dots, T_n$ rasgele değişkenlerinden dağılımlarından rasgele sayı üretilmiştir.

İki değişkenli dağılım için de benzer şekilde,

$$F_{T_1}(t_1) = P(T_1 \leq t_1),$$

$$F_{T_2}(t_2|t_1) = P(T_2 \leq t_2|T_1 = t_1),$$

yazılabilir ve ilişkili olasılık yoğunluk fonksiyonu ve koşullu olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f_{T_1}(t_1), f_{T_2}(t_2|t_1)$$

ilk adım olarak U_1 rasgele sayısı (0,1) aralığında tanımlı olan düzgün dağılımdan üretilip ve $F_{T_1}(T_1) = U_1$ alınarak, $T_1 = F_{T_1}^{-1}(U_1)$ den üretilir. İkinci adım olarak, U_1 rasgele değişkeninden bağımsız olarak (0,1) aralığı üzerinde tanımlı düzgün dağılımdan U_2 rasgele sayısı üretililecektir. Böylece $F_{T_2}(T_2|T_1) = U_2$ dönüşümü yapılarak $T_2 = F_{T_2}^{-1}(U_2|T_1) = F_{T_2}^{-1}(U_2|F_{T_1}^{-1}(U_1))$ eşitliği alınarak üretilir.

Örnek olarak aşağıdaki iki değişkenli dağılım ele alınsın,

$$f_{T_1, T_2}(t_1, t_2) = \begin{cases} \frac{1}{6}(t_1 + 4t_2), & 0 < t_1 < 2, 0 < t_2 < 1 \\ 0, & \text{Diğer durumlar} \end{cases}$$

Şimdi bu dağılımdan sayı üretmek için aşağıdaki adımlar takip edilecektir,

$$f_{T_1}(t_1) = \frac{1}{6}(t_1 + 2), \quad f_{T_2}(t_2|t_1) = \frac{t_1 + 4t_2}{t_1 + 2}$$

U_1 rasgele sayısı Düzgün (0,1) dağılımından üretilip ve $U_1 = \frac{1}{6}\left(\frac{T_1^2}{2} + 2T_1\right)$ alınıp, $T_1 = -2 \pm 2\sqrt{1 + 3U_1}$ den üretilir. U_2 rasgele sayısı ise U_1 rasgele değişkeninden bağımsız olarak Düzgün(0,1) dağılımından üretililecektir. Koşullu dağılım fonksiyonu ise,

$$F_{T_2}(t_2|t_1) = \int_0^{t_2} \frac{t_1 + 4t_2}{t_1 + 2} dt_2 = \frac{t_2(t_1 + 2t_2)}{t_1 + 2}$$

Böylece $U_2 = \frac{T_2(T_1+2T_2)}{T_1+2}$ dönüşümü yapılarak $T_2 = \frac{-6U_1+2 \pm \sqrt{36U_1^2-24U_1+48U_1U_2-16U_2+2U_2+4}}{4}$ eşitliğinde alınarak üretilebilir.

2.4.3 Karma yöntem ile rasgele sayı üretme

Başka bir rasgele sayı üretme yöntemi de karma yöntemdir. Bu yöntem karma dağılımlar için kullanılmaktadır. x rasgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu, $p(x)$, iki olasılık yoğunluk fonksiyonunun karması olarak verilsin,

$$p(x) = w_1p_1(x) + w_2p_2(x)$$

burada $w_1 + w_2 = 1$ dir. w_1p_1 yi genişleten bir g olasılık yoğunluk fonksiyonu varsayılır ise, yani tüm x ler için $g(x) \geq w_1p_1(x)$ dir. Böylece bu karma dağılımdan rasgele sayı üretmek için aşağıdaki adımlar takip edilmelidir. (Gentle 2013)

Algoritma 2. Karma yöntem ile rasgele sayı üretme

- | | |
|----------------|---|
| Adım 1: | Y yi olasılık yoğunluk fonksiyonu g olan dağılımdan üret |
| Adım 2: | U rasgele değişkenini düzgün $(0,1)$ dağılımından üret, |
| Adım 3: | Eğer $u > w_1p_1(y)/g(y)$ ise, o zaman y yi p_2 den üret, |
| Adım 4: | Diğer durumda y yi P_1 den üret. |
-

2.5 Rényi Entropi Fonksiyonu

Rényi entropiden bahsetmek için genel olarak entropilerin ne işe yaradığı anlatılacaktır. Bir sistemin belirsizliği ve rasgeleliğini ölçmek için entropi kavramları ortaya çıkmıştır. Bir

sistemin entropi ölçüsü ne kadar düşük ise bilgi oranı bir o kadar çoktur. Rényi entropi ise diğer entropilerin özel bir durumudur ve Alfréd Rényi (1961) tarafından tanımlanmıştır. Bir deney yapıldığında ne kadar sonuç belirsiz ise, Rényi entropi o kadar artar.

Örneğin bir zar atıldığında 6 sayısının gelme olasılığı diğer sayılara göre daha fazlaysa, o zaman belirsizlik az olacaktır ve böylece Rényi entropi daha küçük olacaktır. Bu örnekten yola çıkarak, bir olayın belirsizliğini ortadan kaldırmak için o olay hakkında detaylı ve gerekli bilgi açığına Rényi entropi denilir. ρ parametresinin Rényi entropisi, $\rho > 0$ ve $\rho \neq 1$ iken aşağıdaki gibi tanımlanmıştır,

$$I_\rho(T) = \frac{1}{1-\rho} \log \int_0^\infty (g(t))^\rho dt, \quad (2.1)$$

Bu entropi ρ 'ya göre artmayandır.

2.6 Sıra İstatistikleri

$T_1, T_2, \dots, T_n$ bağımsız ve aynı dağılımlı rasgele değişkenler olsun. Bu rasgele değişkenler, olasılık yoğunluk fonksiyonu $f(t)$ ve dağılım fonksiyonu $F(t)$ olan sürekli bir dağılımdan alınmış olsun. $T_1, T_2, \dots, T_n$ rasgele değişkenlerin sıra istatistikleri $X_{1:n} < X_{2:n} < \dots < X_{n:n}$ ile gösterilsin. Buna göre, $X_{j:n}$ n hacimli bir rasgele örneklemin j .sıra istatistiğidir. $h_{j:n}(t)$, $X_{j:n}$ sıra istatistiğinin olasılık yoğunluk fonksiyonunu göstermek üzere,

$$h_{j:n}(t) = \frac{n!}{(j-1)!(n-j)!} f(t) (F(t))^{j-1} (\bar{F}(t))^{n-j}, \quad j = 1, 2, \dots, n$$

olarak tanımlanır. En küçük ve en büyük sıra istatistikleri ($X_{1:n} := \min\{T_1, T_2, \dots, T_n\}$ ve $X_{n:n} := \max\{T_1, T_2, \dots, T_n\}$) olasılık yoğunluk fonksiyonları sırası ile,

$$h_{1:n}(t) = nf(t)(\bar{F}(t))^{n-1}, \quad h_{n:n}(t) = nf(t)(F(t))^{n-1}$$

dir.

2.7 Deneyisel dağılım

$(T_1, T_2, \dots, T_n)$ ortak dağılım fonksiyonu $G(t)$ olan bağımsız aynı dağılıma sahip rastgele değişkenler olsun. O zaman ampirik dağılım fonksiyonu aşağıdaki gibi verilmiştir,

$$\hat{G}_n(t) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n I_{T_i \leq t}$$

burada,

$$I_{T_i \leq t} = \begin{cases} 1, & T_i \leq t \\ 0, & \text{diğer durumlar} \end{cases}$$

(Yani I gösterge fonksiyonudur).

Bir t sabiti için, $I_{T_i \leq t}$ gösterge fonksiyonu $p = G(t)$ parametresine sahip bir bernolli rasgele değişkenidir. Çünkü, $n\hat{G}_n(t)$ ortalaması ve varyansı sırasıyla $nG(t)$ ve $nG(t)(1 - G(t))$ olan bir binom rasgele değişkenidir. Sonuç olarak $\hat{G}_n(t)$ ise $G(t)$ için bir yansız tahmin edicidir.

2.8 Model Seçim Kriterleri

Akaike bilgi kriteri: AIC (Akaike Information Criterion) ilk defa Akaike (1973) tarihinde farklı modelleri, verilen sonuçlara göre karşılaştırmak maksadıyla kullanılmıştır. En iyi modeli bulmak maksadıyla model ile sonuçlar arasındaki ilişkiye bakarak bir değer (ceza) hesaplanır. Bu değer şu şekilde hesaplanır,

$$AIC = -2LL + 2k$$

Burada k tahmin edilebilir parametre sayısı ve $LL = \log L(\theta; t_i)$ için kullanılan fonksiyon en çok olabilirlik fonksiyonudur. Eğer örnekleme ait gözlenen sayı fazla ise yukarıdaki AIC değeri yeterli olacaktır (Snipes ve Taylorn, 2014). Aksi halde, eğer n örneklem sayısı yeteri kadar büyük değil ise daha genel bir ifade olan $AICc$ kullanılır. En küçük AIC veya $AICc$ değerine sahip olan model en iyi modeldir. AIC geniş bir şekilde biyolojik incelemelerde, çevre bilimleri, şu ve deniz araştırmalarında ve medikal bilimlerde kullanılmaktadır.

Bayesian bilgi kriteri: BIC (Bayesian Information Criterion/Schwarz Criterion) model seçim kriteridir ve aşağıdaki gibi tanımlanır, (McQuarrie ve Tsai, 1998)

$$BIC = -2LL + k \log(n)$$

Burada n örneklem boyutudur. Fakat AIC ve BIC arasındaki benzerliğe rağmen, daha sonraları bayes yapısı içinde farklılıklar gösterdiği ortaya çıkmıştır.

Literatür içindeki çalışmalara bakacak olursak BIC faktörün daha fazla kullanılmaktadır. Bunun da sebeplerinden biri analiz sonrasında büyük hesaplamalara ihtiyaç duyulmasıdır.

Kolmogorov-Smirnov testi: Kolmogorov-Smirnov testini, Kolmogorov (1933) önermiştir. Kolmogorov, tek örnek için uyum iyiliği testini önermiştir. 1939 yılında ise bir Rus matematikçisi olan Simirnov tarafından iki bağımsız örnek için uyum iyiliği testi geliştirilmiştir. Kolmogorov ve Simirnov testi benzerlik nedeniyle, uygulamada, Kolmogorov-Smirnov uyum iyiliği testleri olarak bilinirler. Bu çalışmada Kolmogorov-Smirnov tek örnek testi kullanılacaktır.

İstatistikte Kolmogorov-Smirnov testi sürekli eşitliği ölçen parametrik olmayan bir test olup, referans alınan bir dağılım ile örneklemin karşılaştırılmasına dayanır. Kolmogorov-Smirnov istatistiği örnekleme ilişkin ampirik dağılım fonksiyonu ile karşılaştırılacak dağılım fonksiyonu arası bir uzaklığı ölçer. Eğer H_0 test istatistiği red edilemez olarak elde edilirse

örneklem ile referans dağılımının aynı olduğu değerlendirilebilir.

Şimdi elimizde birbirinden bağımsız aynı P dağılımlı $T_1, T_2, \dots, T_n$ örneklemini olsun ve biz de bu dağılımının belirgin bir P_0 dağılımına eşit olup olmadığını test etmek için, aşağıdaki hipotezler belirlensin,

$$\begin{cases} H_0: P = P_0 \\ H_A: P \neq P_0 \end{cases}$$

$G(t) = P(T \leq t)$ olarak veriye ait dağılım fonksiyonu tanımlansın. Ampirik dağılımı ise $\hat{G}_n(t) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n I(T_i \leq t)$ olsun,

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} |\hat{G}_n(t) - G(t)| \rightarrow 0$$

$\hat{G}_n$ ile G arasındaki en büyük fark olasılıkla sıfıra yaklaşmaktadır. $n\hat{G}_n(t)$ ortalaması ve varyansı sırasıyla $nG(t)$ ve $nG(t)(1 - G(t))$ olan bir Binom rasgele değişkenidir.

$$\sqrt{n}(\hat{G}_n(t) - G(t)) \xrightarrow{d} N(0, G(t)(1 - G(t)))$$

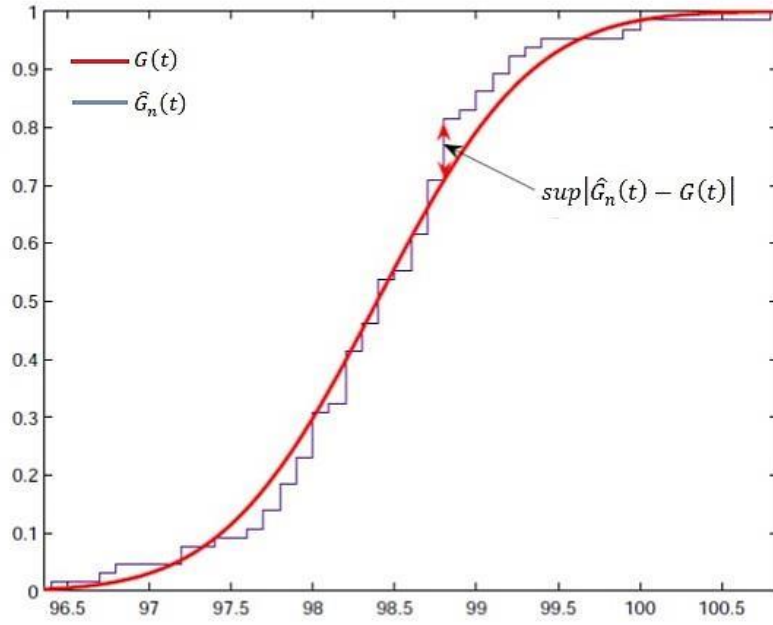
ve

$$P(\sqrt{n} \sup |\hat{G}_n(t) - G(t)| \leq x) \rightarrow H(x) = 1 - 2 \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i-1} e^{-2i^2 x}$$

Burada $H(t)$ Kolmogorov-Smirnov dağılım fonksiyonudur. Kolmogorov-Smirnov testi ise aşağıdaki gibi tanımlanır,

$$D_n = \sup_{t \in \mathbb{R}} |\hat{G}_n(t) - G(t)|.$$

Kolmogorov-Smirnov test istatistiğinin örnek grafiği aşağıdaki grafikte verilmiştir.



Şekil 2.1 Kolmogorov-Smirnov Test İstatistiği Örnek Grafiği

2.9 Dönüşümler

İlk olarak sürekli rasgele değişkenlerin dağılım fonksiyonu ile ilgili iki özellikten bahsedilecektir. Birincisi, T rasgele değişkeninin dağılım fonksiyonu $F_T(T)$ olmak üzere; $U = F_T(T)$ iken,

$$T = F_T^{-1}(U)$$

şeklinde yazılabilir. Burada U , $(0,1)$ aralığında tanımlı olan düzgün dağılımdan alınmış bir rasgele değişkendir. İkinci özellik, eğer rasgele değişkenlerden biri örneğin T değişkeni $Y = h(T)$ olarak değişir ise, Y rasgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonunu elde etmek için en kolay ve güvenilir yöntem; rasgele değişkenlerin değişimini dağılım fonksiyonu ile yapmayı olasılık yoğunluk fonksiyonu ile yapmaya tercih etmektir.

$$f_Y(y) = f_T(h^{-1}(y)) \left| \frac{dh^{-1}(y)}{dy} \right|$$

Burada tezde önerilecek olan dönüşümü kavramak için Shaw ve Buckley (2007) makalesinde tanımladığı dönüşüm anlatılacaktır.

Sıra dönüşümleri: T_1 ve T_2 iki bağımsız rasgele değişken olsun. Bu rasgele değişkenlerin dağılım fonksiyonu F_{T_1} ve F_{T_2} olmak üzere, S_{12} ve S_{21} sıra dönüşümleri,

$$S_{12}(u) = F_{T_2}(F_{T_1}^{-1}(u)), \quad S_{21}(u) = F_{T_1}(F_{T_2}^{-1}(u)), \quad (2.2)$$

olarak tanımlanır. Tanımlanan sıra dönüşümleri $I = [0,1]$ birim aralığında değişip $S_{ij}(0) = 0$ ve $S_{ij}(1) = 1$ değerlerini alır. Sıra dönüşüm yöntemi ile kesin bir dağılım geçişi elde edilmektedir. Sıra dönüşümleri için en kolay örnek, her $|\delta| \leq 1$ için $S_{12}(u) = F_2(F_1^{-1}(u)) = u + \delta u(1 - u) = (1 + \delta)u - \delta u^2$ olarak alınabilir ve bu örnek karesel dönüşüm yöntemi ile elde edilecektir.

Karesel dönüşümleri: Karesel dönüşümler, sıra dönüşümlerin en basit örneğidir. F_{T_1} ve F_{T_2} aynı destek kümesine sahip iki dağılım fonksiyonu ise, karesel dönüşüm bu iki dağılım fonksiyonu için, $|\delta| \leq 1$ iken,

$$F_{T_2}(x) = (1 + \delta)F_{T_1}(x) - \delta (F_{T_1}(x))^2, \quad (2.3)$$

ifadesi ile tanımlanır. Dolayısıyla (2.3) de tanımlanan $F_{T_2}(x)$ dağılım fonksiyonunun tanımı dikkate alınır ise,

$$(1 + \delta)F_{T_1}(x) - \delta (F_{T_1}(x))^2 - F_{T_2}(x) = 0$$

ifadesinden $F_{T_1}(x) = \frac{(1+\delta) - \sqrt{(1+\delta)^2 - 4\delta F_{T_2}(x)}}{2\delta}$ olarak bulunmaktadır.

Bu durumda sıra dönüşümlerindeki eşitliklerden yola çıkarak $S_{12}(u)$ ve $S_{21}(u)$ sıra dönüşümleri,

$$\begin{aligned} S_{12}(u) &= F_{T_2}(F_{T_1}^{-1}(u)) = (1+\delta)F_{T_1}(F_{T_1}^{-1}(u)) - \delta(F_{T_1}(F_{T_1}^{-1}(u)))^2 \\ &= (1+\delta)u - \delta u^2 = u + \delta u - \delta u^2 = u + \delta u(1-u) \end{aligned}$$

$$S_{21}(u) = F_{T_1}(F_{T_2}^{-1}(u)) = \frac{(1+\delta) - \sqrt{(1+\delta)^2 - 4\delta u}}{2\delta}$$

olarak elde edilir.

2.9.1 Sıra dönüşümlerin farklı çeşitleri

Karesel dönüşüm bölümünde, $S_{12}(u) = u + u(1-u)\delta = (1+\delta)u - \delta u^2$ şeklinde ifade edilmişti. Burada sıra dönüşümlerinin farklı bir çeşidi,

$$S_{12}(u) = u + u(1-u)\pi(u) = (1+\pi(u))u - u^2\pi(u),$$

dır. Burada π , farklı parametrelere sahip bir polinomdur. Bu sıra dönüşümü medyan değerini koruması için, polinom $\frac{1}{2}$ noktasında sıfır değer almalıdır, yani

$$S_{12}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2}\right)\pi\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\pi\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}(0) = \frac{1}{2}$$

olur. Ayrıca polinom $\pi(1 - u) = -\pi(u)$ ise,

$$S_{12}(1 - u) = 1 - u + u(1 - u)\pi(1 - u) = 1 - u - u(1 - u)\pi(u) = 1 - S_{12}(u)$$

olur, yani sıra dönüşümü simetrik olur. Bunun için en basit örnek, bazı sabit γ lar için $\pi(u) = \gamma \left(u - \frac{1}{2}\right)$ olabilir. Böylece, tanımlanan sıra dönüşümü aşağıdaki gibi olacaktır.

$$S_{12}(u) = u + u(1 - u)\pi(u) = \left(1 - \frac{1}{2}\gamma\right)u + \frac{3}{2}\gamma u^2 - \gamma u^3$$

Elde edilen sıra dönüşümü bu çalışmanın dördüncü bölümünde verilen kübik dönüşümün özel halidir.

2.10 Kullanılan Dağılımlar

Bu çalışmada kullanılacak olan dağılımlar bu bölümde kısaca anlatılacaktır.

İki Değişkenli Üstel (Gumbel) Dağılımı: İki değişkenli üstel dağılım ilk olarak Gumbel (1960) makalesinde tanımlanmıştır. Gumbel bu dağılımın yaşam fonksiyonunu,

$$\bar{F}_{T_1, T_2}(t_1, t_2) = e^{-(\beta_1 t_1 + \beta_2 t_2 + \theta t_1 t_2)}, \quad t_1, t_2 > 0, \quad (2.4)$$

Şeklinde vermiştir. Burada β_1 ve β_2 ölçek parametreleri olup, θ bağımlılık parametresidir ve parametrelerin arasındaki ilişki $\beta_1, \beta_2 > 0, 0 \leq \theta \leq \beta_1 \beta_2$ olarak tanımlanmıştır. T_1 ve T_2 rasgele değişkenlerinin marjinal yaşam fonksiyonları sırası ile $e^{-\beta_1 t_1}$ ve $e^{-\beta_2 t_2}$ dir. Yani, T_1 ve T_2 üstel dağılıma sahiptir. (2.4) ifadesinde bahsedilen yaşam fonksiyonundan yola çıkarak olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$\begin{aligned}
f_{T_1, T_2}(t_1, t_2) &= \frac{\partial^2}{\partial t_1 \partial t_2} \bar{F}_{T_1, T_2}(t_1, t_2) = \frac{\partial}{\partial t_1} \left(\frac{\partial}{\partial t_2} e^{-(\beta_1 t_1 + \beta_2 t_2 + \theta t_1 t_2)} \right) \\
&= (\beta_1 + \theta t_2)(\beta_2 + \theta t_1) e^{-(\beta_1 t_1 + \beta_2 t_2 + \theta t_1 t_2)}, \quad t_1, t_2 > 0.
\end{aligned}$$

olarak elde edilmiştir.

Gumbel'in tanımladığı iki boyutlu üstel dağılımında $\beta_1 = \beta_2$ alınıp ve $t_1 = t_2 = t$ kabul edilir ise, yaşam fonksiyonu,

$$\bar{F}_{T_1, T_2}(t, t) = e^{-(2\beta t + \theta t^2)}, \quad t > 0, \beta > 0, 0 \leq \theta \leq \beta^2. \quad (2.5)$$

şeklinde tanımlanır. (2.5) ifadesinde verilen yaşam fonksiyonundan yola çıkarak, (T_1, T_2) rasgele değişkenin dağılım fonksiyonu,

$$F_{T_1, T_2}(t, t) = 1 - \bar{F}_{T_1}(t) - \bar{F}_{T_2}(t) + \bar{F}_{T_1, T_2}(t, t) = 1 - 2e^{-\beta t} + e^{-(2\beta t + \theta t^2)}$$

şeklinde bulunmuştur. Dağılım fonksiyonundan türev alınarak olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$\begin{aligned}
f_{T_1, T_2}(t, t) &= 2\beta e^{-\beta t} - (2\beta + 2\theta t) e^{-(2\beta t + \theta t^2)} \\
&= 2\beta(e^{-\beta t} - e^{-(2\beta t + \theta t^2)}) - 2\theta t e^{-(2\beta t + \theta t^2)}.
\end{aligned} \quad (2.6)$$

olarak elde edilmiştir. Bu dağılımının ortalama kalan ömür fonksiyonu aşağıdaki gibi elde edilir,

$$\begin{aligned}
m(t; \beta, \theta) &= \frac{\int_t^\infty \bar{F}(k, k) dk}{\bar{F}(t, t)} = \frac{\int_t^\infty e^{-(2\beta k + \theta k^2)} dk}{e^{-(2\beta t + \theta t^2)}} \\
&= \frac{\left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\theta}} e^{\frac{\beta^2}{\theta}} \operatorname{erf} \left(\frac{\beta + \theta k}{\sqrt{\theta}} \right) \right) \Big|_t^\infty}{e^{-(2\beta t + \theta t^2)}} = \frac{\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\theta}} e^{\frac{\beta^2}{\theta}} \operatorname{erfc} \left(\frac{\beta + \theta t}{\sqrt{\theta}} \right)}{e^{-(2\beta t + \theta t^2)}}
\end{aligned}$$

Şimdi bu dağılımın özelliklerinden bahsedilecektir. İlk olarak moment çıkaran fonksiyonu bulunacaktır ve tez boyunca $\xi(\beta, \theta) = \sqrt{\frac{\pi}{\theta}} e^{\frac{\beta^2}{\theta}} \operatorname{erfc}\left(\frac{\beta}{\sqrt{\theta}}\right)$ olarak alınacaktır. (erf fonksiyonu EK 1’de anlatılmıştır.)

$$M_T(k) = E(e^{kT}) = \int_0^\infty e^{kt} f_{T_1, T_2}(t, t) dt = \frac{\beta + k}{\beta - k} - \frac{k}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\theta}} e^{\frac{(2\beta - k)^2}{4\theta}} \operatorname{erfc}\left(\frac{2\beta - k}{\sqrt{\theta}}\right), k < \beta$$

İlk dört moment aşağıdaki gibi elde edilmiştir,

$$\begin{aligned} E(T) &= 2 \left(-te^{-\beta t} \Big|_0^\infty + \int_0^\infty e^{-\beta t} dt + te^{-(2\beta t + \theta t^2)} \Big|_0^\infty - \int_0^\infty e^{-(2\beta t + \theta t^2)} dt \right) \\ &= 2 \left(\frac{-1}{\beta} e^{-\beta t} \Big|_0^\infty - e^{\frac{\beta^2}{\theta}} \int_0^\infty e^{-\left(\sqrt{\theta}\left(t + \frac{\beta}{\theta}\right)\right)^2} dt \right) = \frac{2}{\beta} - \xi(\beta, \theta), \end{aligned}$$

$$E(T^2) = \frac{4}{\beta^2} - \frac{1}{\theta} + \frac{1}{\theta} \xi(\beta, \theta),$$

$$E(T^3) = \frac{12}{\beta^3} - \frac{3\beta}{\theta^2} + \frac{3}{4\theta} \left(1 + \frac{2\beta^2}{\theta} \right) \xi(\beta, \theta),$$

$$E(T^4) = \frac{48}{\beta^4} - \frac{1}{2\theta^2} \left(4 + 12\beta - \frac{4\beta^2}{\theta} \right) + \left(3 \frac{\beta}{\theta^2} e^{\frac{\beta^2}{\theta}} + \frac{2\beta^3}{\theta^3} \xi(\beta, \theta) \right).$$

Farlie-Gumbel-Morgenstern Dağılımı (FGM): T_1, T_2, T_3 üç tane sürekli rasgele değişken olsun. Bu rasgele değişkenlerin ortak dağılım fonksiyonu F_{T_1, T_2, T_3} ve marjinal dağılım fonksiyonları $F_{T_i}, i = 1, 2, 3$ olsun. Üç boyutlu FGM dağılımı aşağıdaki gibi tanımlanmıştır,

$$F_{T_1, T_2, T_3}(t_1, t_2, t_3) = F_{T_1}(t_1)F_{T_2}(t_2)F_{T_3}(t_3) \left(1 + \theta \bar{F}_{T_1}(t_1)\bar{F}_{T_2}(t_2)\bar{F}_{T_3}(t_3) \right),$$

burada $\theta \in [-1, 1]$ aralığında değer alır. (Nelsen 1998, Bairamov vd. 2001, Tank ve

Gebizlioğlu 2004).

Bu dağılımın olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f_{T_1, T_2, T_3}(t_1, t_2, t_3) = f_{T_1}(t_1)f_{T_2}(t_2)f_{T_3}(t_3) \left[1 + \theta \left(1 - 2F_{T_1}(t_1) \right) \left(1 - 2F_{T_2}(t_2) \right) \left(1 - 2F_{T_3}(t_3) \right) \right]$$

şeklinde bulunmuştur. Burada marjinal dağılımlar sırasıyla $\beta_i, i = 1, 2, 3$ parametrelerine sahip üstel dağılımdan alınır ise, ortak dağılım fonksiyonu,

$$F_{T_1, T_2, T_3}(t_1, t_2, t_3) = (1 - e^{-\beta_1 t_1})(1 - e^{-\beta_2 t_2})(1 - e^{-\beta_3 t_3})(1 + \theta e^{-(\beta_1 t_1 + \beta_2 t_2 + \beta_3 t_3)})$$

olarak elde edilir ve $\beta_1, \beta_2, \beta_3 > 0$ ve $\theta \in [-1, 1]$ aralığındadır. Eğer $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \beta$ alınır ise,

$$F_{T_1, T_2, T_3}(t_1, t_2, t_3) = (1 - e^{-\beta t_1})(1 - e^{-\beta t_2})(1 - e^{-\beta t_3})(1 + \theta e^{-\beta(t_1 + t_2 + t_3)})$$

dır. $t_1 = t_2 = t_3 = t$ alınır ise,

$$\begin{aligned} F(t, t, t) &= (1 - e^{-\beta t})^3 (1 + \theta e^{-3\beta t}) \\ &= 1 - 3e^{-\beta t} + 3e^{-2\beta t} - (1 - \theta)e^{-3\beta t} - 3\theta e^{-4\beta t} + 3\theta e^{-5\beta t} - \theta e^{-6\beta t}, \quad (2.7) \end{aligned}$$

şeklinde yazılır.

2.11 Sistemler

Tanım 2.22 (Yaşam Zamanı) Bir sistemin, bir nesnenin veya bir canlının yaşam zamanı (lifetime) veya bozulma zamanı (failure time), negatif olmayan sürekli T rasgele değişkeni ile gösterilmektedir.

Tanım 2.23 (Sistem) Birkaç parçadan oluşan bir küme göz önüne alındığında, bu parçalar belirli bir amaç doğrultusunda bir araya gelmiş ise, bu kümeye sistem adı verilir. Sistemi oluşturan parçalara bileşen adı verilir. Bu bileşenlerin sistemde ne şekilde ve nasıl çalışacağına sistemin yapısı karar verir. Sistemdeki bileşenler birbirlerine seri, paralel ve bunların karışımı olarak bağlanabilmektedir. Bu çalışmada iki ve üç bileşenli sistemler ele alınacaktır. Aşağıdaki alt bölümlerde $A_i, i = 1,2,3$ olayları bileşenlerin bozulma olayları olarak alınacaktır.

2.11.1 İki bileşenli sistemler

İlk olarak iki bileşenden oluşan seri ve paralel sistem anlatılacaktır. Sonra bu sistemler incelenip sistemlerin bozulma veya başarısızlık olasılıkları elde edilecektir.

İki Bileşenli Seri Sistem: Seri sistemin çalışması için bileşenlerin hepsinin çalışması gerekir, bileşenlerden herhangi birisi çalışmaz ise sistem çalışmaz. A_1, A_2 bu bileşenlerin bozulma olayları ise, bu sistemin çalışmaması için bu iki olaydan birinin gerçekleşmesi yeterli olacaktır.



Şekil 2.2 İki Bileşenli Seri Sistem

Seri sistemin yaşam zamanı $X_{1:2}$ ile gösterilmek üzere, $X_{1:2} = \min\{T_1, T_2\}$ şeklinde tanımlanır ve T_1 ve T_2 sırası ile bileşenlerin yaşam zamanlarını gösteren rasgele değişkenler olsun. Bu rasgele değişkenler bağımsız ve aynı dağılımlı olarak alındığında, sistemin başarısızlık olasılığı,

$$P(X_{1:2} \leq t) = P(\min\{T_1, T_2\} \leq t) = 1 - P(\min\{T_1, T_2\} > t)$$

$$\begin{aligned}
&= 1 - P(T_1 > t, T_2 > t) = 1 - P(T_1 > t)P(T_2 > t) \\
&= 1 - (1 - F(t))^2 = 2F(t) - F^2(t)
\end{aligned}$$

biçimindedir. T_1 ve T_2 sırası ile $F_{T_1}(t)$ ve $F_{T_2}(t)$ farklı dağılımlarına sahip bağımsız rasgele değişkenler olarak alınır ise, bu sistemin başarısızlık olasılığı,

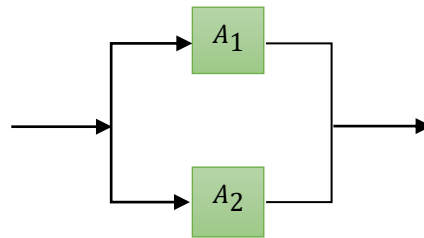
$$P(X_{1:2} \leq t) = 1 - (1 - F_{T_1}(t))(1 - F_{T_2}(t)) = F_{T_1}(t) + F_{T_2}(t) - F_{T_1}(t)F_{T_2}(t)$$

olarak elde edilir. T_1 ve T_2 bileşenlerinin ömürleri bağımlı dağılıma sahip ise, bu sistemin bozulma olasılığı,

$$P(X_{1:2} \leq t) = 1 - P(T_1 > t, T_2 > t) = 1 - \bar{F}(t, t) = F(t, \infty) + F(\infty, t) - F(t, t)$$

şeklinde yazılır.

İki Bileşenli Paralel Sistem: Paralel bağlanan bileşenlerden oluşan bir sistemin çalışması için bileşenlerden en az birinin çalışması yeterlidir. Bu sistemin çalışmaması için A_1 ve A_2 olayı gerçekleşmelidir.



Şekil 2.3 İki Bileşenli Paralel Sistem

Paralel sistemin yaşam zamanı $X_{2:2}$ ile gösterilmek üzere, $X_{2:2} = maks\{T_1, T_2\}$ şeklinde tanımlanır. Bileşenlerin ömürleri birbirinden bağımsız aynı dağılıma sahip ise, paralel

sistemin başarısızlık olasılığı,

$$P(X_{2:2} \leq t) = P(\max\{T_1, T_2\} \leq t) = P(T_1 \leq t, T_2 \leq t) = P(T_1 \leq t)P(T_2 \leq t) = F^2(t),$$

dır. T_1 ve T_2 rasgele değişkenleri bağımsız ve farklı dağılımlı olarak alınır ise, bu sistemin başarısızlık olasılığı,

$$P(X_{2:2} \leq t) = P(T_1 \leq t, T_2 \leq t) = P(T_1 \leq t)P(T_2 \leq t) = F_{T_1}(t)F_{T_2}(t)$$

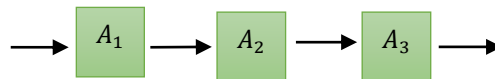
şeklinde elde edilir. Bileşenlerin ömürleri bağımlı dağılıma sahip ise, bu sistemin başarısızlık olasılığı aşağıda verilmiştir;

$$P(X_{2:2} \leq t) = P(\max\{T_1, T_2\} \leq t) = P(T_1 \leq t, T_2 \leq t) = F(t, t).$$

2.11.2 Üç bileşenli sistemler

Bu kısımda üç bileşenden oluşan sistemlerden bahsedilecektir ve bu sistemlerin farklı bağlanma durumları anlatılacaktır. Sonra bu sistemler incelenip, sistemlerin bozulma veya başarısızlık olasılıkları elde edilecektir. A_1 , A_2 ve A_3 sistemi oluşturan bileşenlerin bozulma olayları olarak alınacaktır.

Üç bileşenli Seri Sistem: Burada her üç bileşenin seri bağlandığı sistem ele alınacaktır. Seri sistemin bozulması için bu üç olaydan birinin gerçekleşmesi yeterli olacaktır.



Şekil 2.4 Üç Bileşenli Seri Sistem

T_1, T_2 ve T_3 bileşenlerin yaşam zamanlarını gösteren rasgele değişkenler olsun. Üçlü seri sistemin yaşam zamanı $X_{1:3}$ ile gösterilmek üzere, $X_{1:3} = \min\{T_1, T_2, T_3\}$ şeklinde tanımlanır. Böylece, T_1, T_2 ve T_3 rasgele değişkenleri bağımsız ve aynı $F(t)$ dağılımına sahip ise, sistemin başarısızlık olasılığı,

$$\begin{aligned} P(X_{1:3} \leq t) &= P(\min\{T_1, T_2, T_3\} \leq t) = 1 - P(\min\{T_1, T_2, T_3\} > t) \\ &= 1 - P(T_1 > t, T_2 > t, T_3 > t) = 1 - P(T_1 > t)P(T_2 > t)P(T_3 > t) \\ &= 1 - (1 - F(t))^3 = 3F(t) - 3F^2(t) + F^3(t) \end{aligned}$$

şeklinde elde edilir. T_1, T_2 ve T_3 rasgele değişkenleri bağımsız ve farklı dağılımlara sahip olarak alınır ise, bu sistemin başarısızlık olasılığı,

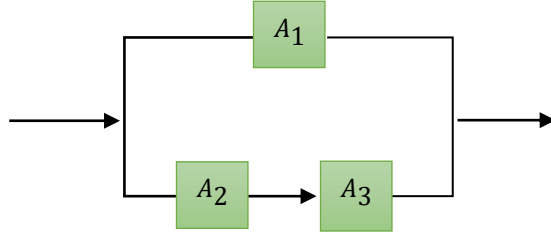
$$\begin{aligned} P(X_{1:3} \leq t) &= 1 - P(T_1 > t, T_2 > t, T_3 > t) = 1 - P(T_1 > t)P(T_2 > t)P(T_3 > t) \\ &= F_{T_1}(t) + F_{T_2}(t) + F_{T_3}(t) - F_{T_1}(t)F_{T_2}(t) - F_{T_1}(t)F_{T_3}(t) - F_{T_2}(t)F_{T_3}(t) \\ &\quad + F_{T_1}(t)F_{T_2}(t)F_{T_3}(t) \end{aligned}$$

şekline yazılır. Bileşenlerin ömürleri bağımlı dağılıma sahip ise, sistemin bozulma olasılığı,

$$\begin{aligned} P(X_{1:3} \leq t) &= 1 - \bar{F}(t, t, t) \\ &= F(t, \infty, \infty) + F(\infty, t, \infty) + F(\infty, \infty, t) - F(t, t, \infty) - F(t, \infty, t) \\ &\quad - F(\infty, t, t) + F(t, t, t) \end{aligned}$$

olarak bulunur.

Üç Bileşenli Seri ve Paralel Karma Sistemin Birinci Türü: Burada iki bileşenin seri bağlanıp diğer bileşenin bunlara paralel bağlandığı durum ele alınacaktır.



Şekil 2.5 Üç Bileşenli Seri ve Paralel Karma Sistemin Birinci Türü

Bu sistemin yaşam zamanı X_2 ile gösterilmek üzere, $X_2 = \max\{T_1, \min(T_2, T_3)\}$ şeklinde tanımlanır. Böylece, T_1, T_2 ve T_3 rasgele değişkenleri aynı dağılımlı ve bağımsız ise, bu sistemin başarısızlık olasılığı,

$$\begin{aligned}
 P(X_2 \leq t) &= P(\max\{T_1, \min(T_2, T_3)\} \leq t) = P(T_1 \leq t, \min(T_2, T_3) \leq t) \\
 &= P(T_1 \leq t)(1 - P(\min(T_2, T_3) > t)) \\
 &= P(T_1 \leq t)(1 - (1 - P(T_2 \leq t))(1 - P(T_3 \leq t))) \\
 &= F(t)(1 - (1 - F(t))^2) = 2F^2(t) - F^3(t)
 \end{aligned}$$

şekline verilmektedir. T_1, T_2 ve T_3 rasgele değişkenleri farklı dağılımlı ve bağımsız alınırsa, sistemin başarısızlık olasılığı,

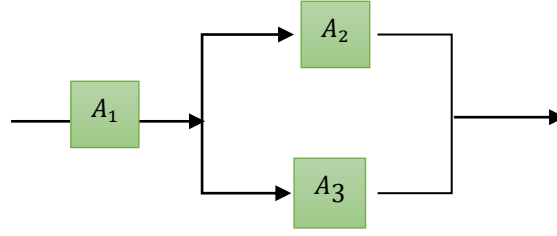
$$\begin{aligned}
 P(X_2 \leq t) &= P(T_1 \leq t)(1 - (1 - P(T_2 \leq t))(1 - P(T_3 \leq t))) \\
 &= F_{T_1}(t)(1 - (1 - F_{T_2}(t))(1 - F_{T_3}(t))) \\
 &= F_{T_1}(t)F_{T_2}(t) + F_{T_1}(t)F_{T_3}(t) - F_{T_1}(t)F_{T_2}(t)F_{T_3}(t)
 \end{aligned}$$

ve bileşenlerin ömürleri bağımlı dağılıma sahip ise, bu sistemin bozulma olasılığı,

$$P(X_2 \leq t) = P(\max\{T_1, \min(T_2, T_3)\} \leq t) = F(t, t, \infty) + F(t, \infty, t) - F(t, t, t)$$

şeklinde elde edilir.

Üç Bileşenli Seri ve Paralel Karma Sistemi İkinci Türü: Burada iki bileşenin birbirine paralel bağlanıp diğer bileşenin bunlara seri bağlandığı durum ele alınacaktır.



Şekil 2.6 Üç Bileşenli Seri ve Paralel Karma Sistemin İkinci Türü

Bu sistemin yaşam zamanı X_3 ile gösterilir ise, $X_3 = \min\{T_1, \max(T_2, T_3)\}$ şeklinde tanımlanır. Böylece, T_1, T_2 ve T_3 rasgele değişkenleri aynı dağılımlı ve bağımsız ise, sistemin başarısızlık olasılığı,

$$\begin{aligned}
 P(X_3 \leq t) &= P(\min\{T_1, \max(T_2, T_3)\} \leq t) = 1 - P(T_1 > t, \max(T_2, T_3) > t) \\
 &= 1 - P(T_1 > t)P(\max(T_2, T_3) > t) \\
 &= 1 - (1 - P(T_1 \leq t))(1 - P(T_2 \leq t, T_3 \leq t)) \\
 &= 1 - ((1 - F(t))(1 - F^2(t))) \\
 &= F(t) + F^2(t) - F^3(t)
 \end{aligned}$$

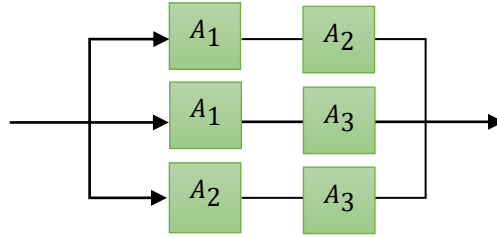
olarak bulunur. T_1, T_2 ve T_3 rasgele değişkenleri farklı dağılımlı ve bağımsız alınırsa, bu sistemin başarısızlık olasılığı,

$$\begin{aligned}
 P(X_3 \leq t) &= 1 - (1 - F_{T_1}(t)) \left(1 - (F_{T_2}(t)F_{T_3}(t))\right) \\
 &= F_{T_1}(t) + F_{T_2}(t)F_{T_3}(t) - F_{T_1}(t)F_{T_2}(t)F_{T_3}(t)
 \end{aligned}$$

dır ve bileşenlerin ömürleri bağımlı dağılıma sahip ise, bu sistemin bozulma olasılığı aşağıdaki gibi elde edilir;

$$\begin{aligned}
 P(X_3 \leq t) &= 1 - P(T_1 > t, maks(T_2, T_3) > t) - P(T_1 > t, maks(T_2, T_3) \leq t) \\
 &\quad + P(T_1 > t, maks(T_2, T_3) \leq t) \\
 &= P(T_1 \leq t) + P(T_2 \leq t, T_3 \leq t) - P(T_1 \leq t, T_2 \leq t, T_3 \leq t) \\
 &= F(t, \infty, \infty) + F(\infty, t, t) - F(t, t, t).
 \end{aligned}$$

Üçte İki Çıkışlı Sistem: Bu sistemde üç bileşenden en az ikisi çalışmadığında sistem çalışmaz.



Şekil 2.7 Üçte iki Çıkışlı Bileşenli Seri ve Paralel Sistem

Bu sistemin yaşam zamanı $X_{2:3}$ ile gösterilmek üzere,

$$X_{2:3} = maks\{min\{T_1, T_2\}, min\{T_1, T_3\}, min\{T_2, T_3\}\}$$

şeklinde tanımlanır. Böylece, T_1, T_2 ve T_3 rasgele değişkenleri aynı dağılımlara sahip ve bağımsız olarak alınır ise, bu sistemin başarısızlık olasılığı,

$$P(X_{2:3} \leq t) = P(maks\{min\{T_1, T_2\}, min\{T_1, T_3\}, min\{T_2, T_3\}\} \leq t)$$

$$\begin{aligned}
&= 1 - P(\min\{T_1, T_3\} > t) - P(\min\{T_2, T_3\} > t) + P(\min\{T_1, T_3\} > t, \min\{T_2, T_3\} > t) \\
&\quad - P(\min\{T_1, T_2\} > t) + P(\min\{T_1, T_2\} > t, \min\{T_2, T_3\} > t) \\
&\quad + P(\min\{T_1, T_2\} > t, \min\{T_1, T_3\} > t) \\
&\quad - P(\min\{T_1, T_2\} > t, \min\{T_1, T_3\} > t, \min\{T_2, T_3\} > t) \\
&= 1 - P(T_1 > t, T_3 > t) - P(T_2 > t, T_3 > t) + P(T_1 > t, T_2 > t, T_3 > t) - P(T_1 > t, T_2 > t) \\
&\quad + P(T_1 > t, T_2 > t, T_3 > t) + P(T_1 > t, T_2 > t, T_3 > t) - P(T_1 > t, T_2 > t, T_3 > t) \\
&= 3F^2(t) - 2F^3(t)
\end{aligned}$$

şeklinde elde edilir. T_1, T_2 ve T_3 rasgele değişkenleri farklı dağılımlara sahip ve bağımsız olarak alınır ise, bu sistemin başarısızlık olasılığı,

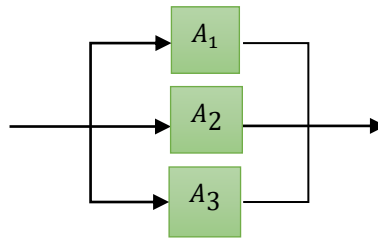
$$\begin{aligned}
P(X_{2:3} \leq t) &= 1 - (1 - F_{T_1}(t))(1 - F_{T_2}(t)) - (1 - F_{T_1}(t))(1 - F_{T_3}(t)) - (1 - F_{T_2}(t))(1 - F_{T_3}(t)) \\
&\quad + 2(1 - F_{T_1}(t))(1 - F_{T_2}(t))(1 - F_{T_3}(t)) \\
&= F_{T_1}(t)F_{T_2}(t) + F_{T_1}(t)F_{T_3}(t) + F_{T_2}(t)F_{T_3}(t) - 2F_{T_1}(t)F_{T_2}(t)F_{T_3}(t)
\end{aligned}$$

olarak bulunur ve T_1, T_2 ve T_3 bileşenlerin ömürleri bağımlı dağılıma sahip ise, bu sistemin bozulma olasılığı,

$$\begin{aligned}
P(X_{2:3} \leq t) &= 1 - P(T_1 > t, T_2 > t) - P(T_1 > t, T_3 > t) - P(T_2 > t, T_3 > t) + 2P(T_1 > t, T_2 > t, T_3 > t) \\
&= 1 - \bar{F}(t, t, 0) - \bar{F}(t, 0, t) - \bar{F}(0, t, t) + 2\bar{F}(t, t, t) \\
&= F(t, t, \infty) + F(t, \infty, t) + F(\infty, t, t) - 2F(t, t, t)
\end{aligned}$$

olarak elde edilir.

Üç bileşenli Paralel Sistem: Paralel bağlanan bileşenlerden oluşan bu sistemin çalışmaması için A_1 olayı, A_2 olayı ve A_3 olayı gerçekleşmelidir.



Şekil 2.8 Üç Bileşenli Paralel Sistem

Paralel sistemin yaşam zamanı $X_{3:3}$ ile gösterilmek üzere, $X_{3:3} = \max\{T_1, T_2, T_3\}$ şeklinde tanımlanır. T_1, T_2 ve T_3 bileşenlerinin ömürleri aynı dağılımlı ve birbirinden bağımsız dağılıma sahip ise, paralel sistemin başarısızlık olasılığı,

$$\begin{aligned} P(X_{3:3} \leq t) &= P(\max\{T_1, T_2, T_3\} \leq t) = P(T_1 \leq t, T_2 \leq t, T_3 \leq t) \\ &= P(T_1 \leq t)P(T_2 \leq t)P(T_3 \leq t) = F^3(t) \end{aligned}$$

dır. T_1, T_2 ve T_3 rasgele değişkenleri farklı dağılımlara sahip ve bağımsız olarak alınır ise, bu sistemin başarısızlık olasılığı,

$$P(X_{3:3} \leq t) = P(T_1 \leq t)P(T_2 \leq t)P(T_3 \leq t) = F_{T_1}(t)F_{T_2}(t)F_{T_3}(t)$$

şeklinde verilir. T_1, T_2 ve T_3 bileşenlerin ömürleri bağımlı dağılıma ise, bu sistemin başarısızlık olasılığı,

$$P(X_{3:3} \leq t) = P(T_1 \leq t, T_2 \leq t, T_3 \leq t) = F(t, t, t)$$

olarak bulunur.

3. İKİ BİLEŞENLİ SİSTEMLER İLE ÖNERİLEN DÖNÜŞÜM

Bu bölümde, ilk olarak Shaw ve Buckley (2007) makalesinde tanımladığı ve bu çalışmanın ikinci bölümünde bahsedilen karesel dönüşüm yöntemi olarak adlandırılan yöntemin ana fikri, iki bileşenli sistemlerden yola çıkarak anlatılacaktır. Daha sonra karesel dönüşüm yöntemiyle yeni dağılımlar elde edilecektir. Sistemlerin bileşenleri üç farklı durum için ele alınacaktır. İlk olarak bileşenler bağımsız ve aynı dağılıma sahip olarak alınacaktır, ikinci alt bölümde ise bağımsız ve farklı dağılımlara sahip alınacaktır. Üçüncü alt bölümde bağımlı ve aynı marjinal dağılımlara sahip olarak alınacaktır. Son olarak, bu bileşenlerin dağılımı üstel ve tek boyutlu üstel (Gumbel) olarak alınıp özellikleri incelenecektir.

3.1 Bağımsız Aynı Dağılıma Sahip İki Bileşenli Sistemler ile Dağılım

İlk olarak iki bileşenden oluşan sistemler kullanılarak karesel dönüşüm yönteminin nasıl elde edildiği ve alt yapısının ne olduğu anlatılacaktır.

Karesel Dönüşüm Yönteminin Ana Fikri: İki bileşenli sistemlerin bileşenleri bağımsız ve aynı dağılımlara sahip olarak alındığında, bir önceki bölümde elde edilen başarısızlık olasılıklarının,

$$H_{1:2}(t) = 2F(t) - F^2(t), \quad H_{2:2}(t) = F^2(t)$$

olduğu gözönüne alınsın. Burada $X_{1:2} \leq T_i \leq X_{2:2}, i = 1, 2$ sıralaması geçerlidir. Herhangi bir dağılım fonksiyonu için; $H_{2:2}(t) \leq F(t) \leq H_{1:2}(t)$ sıralaması geçerlidir. Burada $P(T_i \leq t) = F(t)$ olarak alınmıştır. Bu durumda, $F(t)$, $2F(t) - F^2(t)$ ile $F^2(t)$ ifadelerinin $\frac{1}{2}$ ağırlığı ile konveks kombinasyonudur. Öte yandan $\lambda \in [0,1]$ için,

$$G(t) = \lambda H_{1:2}(t) + (1 - \lambda) H_{2:2}(t)$$

$$\begin{aligned}
&= \lambda(2F(t) - F^2(t)) + (1 - \lambda)F^2(t) \\
&= 2\lambda F(t) + (1 - 2\lambda)F^2(t),
\end{aligned} \tag{3.1}$$

konveks kombinasyonu yazılırsa $2F(t) - F^2(t)$ ile $F^2(t)$ arasında birçok dağılım fonksiyonu elde etmek mümkündür. Şimdi $\lambda = \frac{1+\delta}{2}$ olarak alınır ise, dönüşüm parametresi $\delta \in [-1,1]$ aralığında elde edilir. δ için (3.1) ifadesi yeniden yazılır ise,

$$\begin{aligned}
G_1(t; \delta) &= (1 + \delta)F(t) - \delta F^2(t), \\
&= \frac{1 + \delta}{2} H_{1:2}(t) + \frac{1 - \delta}{2} H_{2:2}(t)
\end{aligned} \tag{3.2}$$

şekline dönüşür. Hemen görüleceği gibi $\delta = 0$ iken, $\lambda = \frac{1}{2}$ olur. Bu dağılım fonksiyonu Shaw ve Buckley (2007) makalesinde (48) denkleminde önermiş olduğu karesel dönüşümü ile aynıdır. Burada $\delta = 0$ değeri alır ise, temel dağılım yani F elde edilecektir. (3.2) denkleminde elde edilen dağılım fonksiyonundan faydalanarak olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$\begin{aligned}
g_1(t; \delta) &= f(t)((1 + \delta) - 2\delta F(t)), \quad \delta \in [-1,1] \\
&= \frac{1 + \delta}{2} h_{1:2}(t) + \frac{1 - \delta}{2} h_{2:2}(t)
\end{aligned} \tag{3.3}$$

biçiminde elde edilir.

3.1.1 G_1 – dağılımın yaşam fonksiyonu ve bozulma oranı fonksiyonu

Bu kısımda elde edilen dağılımın yaşam fonksiyonu ise,

$$\bar{G}_1(t; \delta) = 1 - (1 + \delta)F(t) + \delta F^2(t)$$

$$\begin{aligned}
&= (1 - \delta)\bar{F}(t) + \delta\bar{F}^2(t) \\
&= \bar{F}(t)(1 - \delta F(t)),
\end{aligned}$$

olarak elde edilir. Ayrıca bozulma oranı fonksiyonu,

$$\begin{aligned}
r_{G_1}(t; \delta) &= r_F(t) \frac{(1 + \delta) - 2\delta F(t)}{1 - \delta F(t)} \\
&= r_F(t) \left(3 + \frac{-2 + \delta(1 + F(t))}{1 - \delta F(t)} \right) \\
&= r_F(t) \left(1 + \frac{\delta\bar{F}(t)}{1 - \delta F(t)} \right), \quad t > 0,
\end{aligned} \tag{3.4}$$

biçiminde yazılır. Burada $r_{G_1}(0; \delta) = (1 + \delta)r_F(0)$ ve $r_F(t)$ temel dağılım yani F dağılımının bozulma oranı fonksiyonudur. Çarpan değer yani $((1 + \delta) - 2\delta F(t))/(1 - \delta F(t))$, temel bozulma oranı fonksiyonunun düzenleme faktörüdür. (3.4) denkleminde, $r_{G_1}(t; \delta)/r_F(t)$ ifadesi pozitif δ değerleri için t değişkenine göre azalan ve negatif δ değerleri için t değişkenine göre artandır. Ayrıca (3.4) denklemi aşağıdaki gibi de ifade edilebilmektedir,

$$\begin{aligned}
r_{G_1}(t; \delta) &= \left(\frac{(1 + \delta)\bar{F}(t)}{1 - (1 + \delta)F(t) + \delta F^2(t)} \right) \frac{f(t)}{\bar{F}(t)} + \left(\frac{\delta(F^2(t) - 1)}{1 - (1 + \delta)F(t) + \delta F^2(t)} \right) \frac{2f(t)F(t)}{1 - F^2(t)} \\
&= w(t)r_F(t) + (1 - w(t))r_{H_{2:2}}(t)
\end{aligned}$$

burada $w(t) = (1 + \delta)(1 - F(t))/1 - (1 + \delta)F(t) + \delta F^2(t)$ dir. Böylece bozulma oranı fonksiyonu $r_F(t)$ ve $r_{H_{2:2}}(t)$ (yani $X_{2:2} = \max\{T_1, T_2\}$ sıra istatistiğinin bozulma oranı fonksiyonunun) ağırlandırılmışı olarak yazılabilmektedir. Şimdi bozulma oranı fonksiyonunun monotonluk özelliği incelenecektir. Bunun için bozulma oranı fonksiyonu aşağıdaki gibi yazılacaktır,

$$r_{G_1}(t; \delta) = r_F(t) + \frac{d}{dt}(-\log(1 - \delta F(t))) = \frac{f(t)}{\bar{F}(t)} + \frac{\delta f(t)}{1 - \delta F(t)}, \quad (3.5)$$

Dolayısıyla, $r_{G_1}(t; \delta)$ bozulma oranı fonksiyonunun ilk türevi, temel dağılımın bozulma oranı fonksiyonunun türevine ve $-\log(1 - \delta F(t))$ ifadesinin ikinci türevine bağlıdır, Yani (3.5) denkleminin sağ tarafındaki ifadenin ikinci türevi aşağıdaki denklemle verilmiştir,

$$f'(t) \frac{\delta}{1 - \delta F(t)} + f^2(t) \frac{\delta^2}{(1 - \delta F(t))^2}, \quad (3.6)$$

- i) $f'(t) < 0, \delta < 0$ iken veya $f'(t) > 0, \delta > 0$ iken, (3.6) ifadesinin pozitifliği sağlanmıştır. Dolayısıyla, G dağılımı artan bir bozulma oranıdır ve böylece monotonluk sağlanmıştır.
- ii) $f'(t) > 0, \delta < 0$ iken veya $f'(t) < 0, \delta > 0$ iken, (3.6) ifadesinin negatifliği sağlanmıştır. Dolayısıyla, G dağılımı azalan bir bozulma oranıdır ve böylece monotonluk sağlanmıştır.

3.1.2 G_1 – dağılımının moment çıkaran fonksiyonu, momentleri ve çarpıklık ve basıklık katsayıları

T rasgele değişkeninin moment çıkaran fonksiyonu,

$$M_T(k) = (1 + \delta)M_{T_1}(k) - \delta M_{X_{2:2}}(k),$$

biçiminde elde edilir. Bu rasgele değişkenin k . momentini aşağıdaki gibi bulunur,

$$E(T^k) = (1 + \delta)E(T_1^k) + \delta E(X_{2:2}^k),$$

Bu denklemde $k = 1, 2, 3, 4$ alındığında, bu rasgele değişkenin ilk dört momentini, çarpıklık ve

basıklık katsayılarını hesaplamak için elde edilir ve varyans aşağıdaki gibi bulunur,

$$Var(T) = (1 + \delta)E(T_1^2) + \delta E(X_{2:2}^2) - ((1 + \delta)E(T_1) + \delta E(X_{2:2}))^2$$

Bu rasgele değişkenin çarpıklık katsayısı,

$$\zeta_K = \frac{1}{(Var(T))^{\frac{3}{2}}} \left(\begin{array}{l} (1 + \delta)E(T_1^3) + \delta E(X_{2:2}^3) \\ -3((1 + \delta)E(T_1) + \delta E(X_{2:2}))((1 + \delta)E(T_1^2) + \delta E(X_{2:2}^2)) \\ +2((1 + \delta)E(T_1) + \delta E(X_{2:2}))^3 \end{array} \right),$$

şeklinde hesaplanır ve bu dağılımın basıklık katsayısı ise,

$$BK = \frac{1}{(Var(T))^2} \left(\begin{array}{l} (1 + \delta)E(T_1^4) + \delta E(X_{2:2}^4) \\ -4((1 + \delta)E(T_1) + \delta E(X_{2:2}))((1 + \delta)E(T_1^3) + \delta E(X_{2:2}^3)) \\ +6((1 + \delta)E(T_1) + \delta E(X_{2:2}))^2((1 + \delta)E(T_1^2) + \delta E(X_{2:2}^2)) \\ -3((1 + \delta)E(T_1) + \delta E(X_{2:2}))^4 \end{array} \right),$$

olarak elde edilir.

3.1.3 G_1 – dağılımından rasgele sayı üretme

İlk olarak önceki bölümde tanımlanan dağılım fonksiyonunun, $X_{1:2} = \min\{t_1, t_2\}$ ve $X_{2:2} = \max\{t_1, t_2\}$ dağılım fonksiyonlarının bir karışımı olarak,

$$G_1(t; \delta) = \frac{1 + \delta}{2} H_{1:2}(t) + \frac{1 - \delta}{2} H_{2:2}(t)$$

şeklinde yazıldığı hatırlansın. Karma yöntem ile sayı üretmek için aşağıdaki adımlar takip

edilmelidir.

Algoritma	Karma yöntem ile rasgele sayı üretme
Adım 1:	Bağımsız olarak $t_1 \sim H_{1:2}$ den ve $t_2 \sim H_{2:2}$ den üret,
Adım 2:	U rasgele değişkenini düzgün $(0,1)$ dağılımından üret,
Adım 3:	Eğer $u < \frac{1+\delta}{2}$ ise, o zaman $t = \min\{t_1, t_2\}$ den üret,
Adım 4:	Eğer $u > \frac{1-\delta}{2}$ ise, o zaman $t = \max\{t_1, t_2\}$ den üret.

3.1.4 G_1 – dağılımının Rényi entropisi

G_1 – dağılımın Rényi entropisini elde etmek için temel dağılımı standart düzgün dağılımı (yani $F(t) = u$ ve $f(t) = 1$) olarak alınacaktır, böylece Rényi entropi fonksiyonu,

$$I_\rho(T) = \frac{1}{1-\rho} \log \int_0^1 ((1+\delta) - 2\delta u)^\rho du$$

İntegrali çözümünde ise, $z = ((1+\delta) - 2\delta u)$ değişken değişmesi yapıldığında,

$$\int_0^1 ((1+\delta) - 2\delta u)^\rho du = \frac{1}{-2\delta} \int_{1+\delta}^{1-\delta} z^\rho dz = \frac{1}{-2\delta} \frac{(1-\delta)^{\rho+1} - (1+\delta)^{\rho+1}}{\rho+1}$$

olduğundan,

$$I_\rho(T) = \begin{cases} \frac{1}{-2\delta} \frac{1}{1-\rho} \log \left(\frac{(1+\delta)^\rho - (1-\delta)^\rho}{\rho+1} \right), & -1 \leq \delta < 0 \\ 0, & \delta = 0 \\ \frac{1}{-2\delta} \frac{1}{1-\rho} \log \left(\frac{(1-\delta)^\rho - (1+\delta)^\rho}{\rho+1} \right), & 0 < \delta \leq 1 \end{cases}$$

biçiminde hesaplanır.

3.1.5 G_1 – dağılımı için özel durum

Burada T_1 ve T_2 rasgele değişkenleri bağımsız β parametresine sahip üstel dağılımından alınsın. Daha önce (3.2) deki dönüşümlü dağılım fonksiyonunu hatırlayalım. $|\delta| \leq 1$ için,

$$G_1(t; \Theta) = 1 - (1 - \delta)e^{-\beta t} - \delta e^{-2\beta t}, \quad t > 0, \beta > 0 \quad (3.8)$$

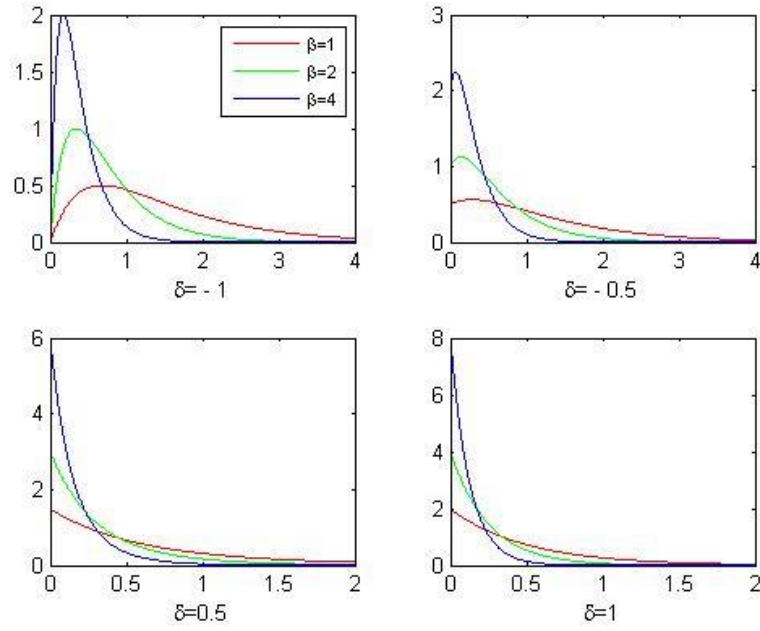
dönüşümlü yeni tek boyutlu dağılım fonksiyonu elde edilmiştir. Burada parametre uzayı $\Theta = \{(\delta, \beta): -1 \leq \delta \leq 1, \beta > 0\}$ dir. Dağılım fonksiyonundan t değişkenine göre türev alarak olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$\begin{aligned} g_1(t; \Theta) &= \beta e^{-\beta t} \left((1 - \delta) + 2\delta e^{-\beta t} \right), \\ &= (1 - \delta)f_{\text{üstel}(\beta)}(t) + \delta f_{\text{üstel}(2\beta)}(t) \end{aligned} \quad (3.9)$$

şeklinde bulunur. Görüldüğü gibi bu olasılık yoğunluk fonksiyonu β ve 2β parametrelerine sahip üstel dağılımların olasılık yoğunluk fonksiyonunun kombinasyonu olarak yazılabiliyor. Tanımlanan olasılık yoğunluk fonksiyonu aşağıdaki gibi analiz edilebilir;

$$g'_1(t; \Theta) = -(1 - \delta)\beta^2 e^{-\beta t} - 4\delta\beta^2 e^{-2\beta t},$$

Bu türevi inceleyerek, $\delta \geq 0$ olduğunda $g'_1(t; \Theta) < 0$ olup, olasılık yoğunluk fonksiyonu azalandır. Ayrıca, (3.9) de tanımlanan olasılık yoğunluk fonksiyonunun tek modlu olması için, $\delta < 0$ olmalıdır. Bu fonksiyonun farklı parametreler için grafiği çizilmiş ve aynı sonuçlar görülmüştür.



Şekil 3.1 G_1 – dağılımın olasılık yoğunluk fonksiyonu

3.1.6 G_1 – dağılımın özel durumu için matematiksel özellikleri

Bu kısımda, T rasgele değişkenin yaşam fonksiyonu,

$$\bar{G}_1(t; \Theta) = e^{-\beta t} \left((1 - \delta) + \delta e^{-\beta t} \right), \quad \beta > 0, \delta \in [-1, 1]$$

olarak bulunur ve bozulma oranı fonksiyonu ise;

$$r_{G_1}(t; \Theta) = \beta \frac{(1 - \delta) + 2\delta e^{-\beta t}}{(1 - \delta) + \delta e^{-\beta t}} = \beta \left(1 + \frac{\delta e^{-\beta t}}{(1 - \delta) + \delta e^{-\beta t}} \right), \quad (3.10)$$

şeklinde bulunur. Şimdi bozulma oranı fonksiyonu incelenecektir,

$$r'_{G_1}(t; \Theta) = \frac{-\delta(1 - \delta)\beta^2 e^{-\beta t}}{((1 - \delta) + \delta e^{-\beta t})^2}$$

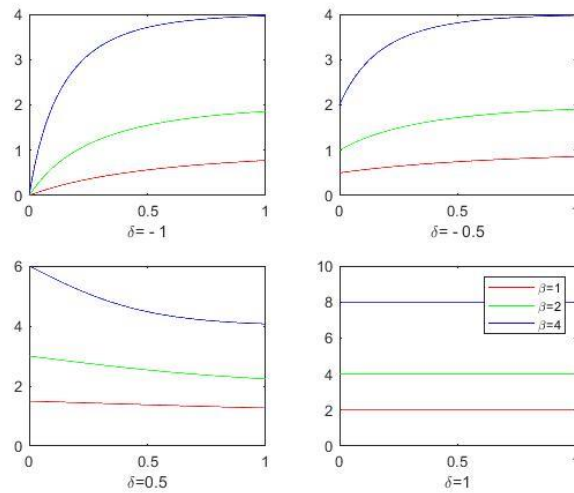
Yukarıdaki türevli ifadenin işaretinin negatif olabilmesi için δ pozitif olmalıdır. Böylece, bozulma oranı fonksiyonu azalmaktadır. Ayrıca, bozulma oranı fonksiyonunun artan olması için, $\delta < 0$ olmalıdır. Şimdi (3.10) ifadesinde elde edilen bozulma oranı fonksiyonunu,

$$r_{G_1}(0; \Theta) = (1 + \delta)\beta, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} r_{G_1}(t; \Theta) = \beta$$

değerlerine sahiptir. Böylece bozulma oranı fonksiyonu $(1 + \delta)\beta$ değeri ile β değeri aralığında değişir. Dönüşüm parametresinin uç değerlerinde bozulma oranı fonksiyonu incelenmiştir,

$$r_{G_1}(t; \Theta) = \begin{cases} \beta \frac{2(1 - e^{-\beta t})}{2 - e^{-\beta t}}, & \delta = -1 \\ \beta, & \delta = 0 \\ 2\beta, & \delta = 1 \end{cases}$$

$\delta = 0$ ve $\delta = 1$ iken, bozulma oranı fonksiyonu sabittir.



Şekil 3.2 G_1 – dağılımının bozulma oranı fonksiyonu

Şekil 3.2’de görüldüğü gibi, $\delta > 0$ için dağılım azalan bir bozulma oranı fonksiyonuna sahiptir. $\delta < 0$ ise, bozulma oranı fonksiyonu artan ve $\delta = 1$ için sabittir.

Ortalama kalan ömür fonksiyonu,

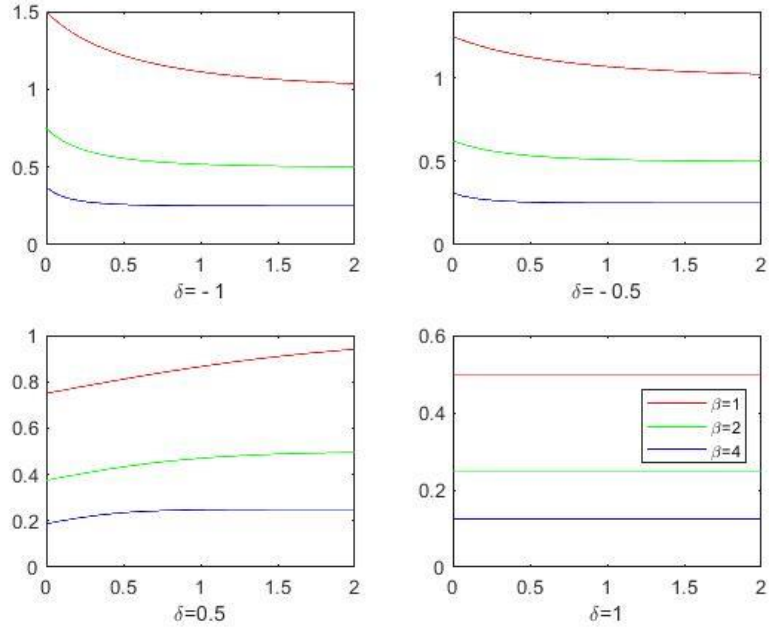
$$m(t; \Theta) = \frac{1}{\beta} \frac{(1 - \delta) + \frac{\delta}{2} e^{-\beta t}}{(1 - \delta) + \delta e^{-\beta t}}$$

biçiminde bulunur. Elde edilen ortalama kalan ömür fonksiyonu,

$$m(0; \Theta) = \frac{2 - \delta}{2\beta}$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} m(t; \delta, \beta) = \frac{1}{\beta}$$

değerlerini almaktadır. Bazı parametre değerleri için ortalama kalan ömür fonksiyonu aşağıdaki şekillerde verilmiştir.



Şekil 3.3 G_1 – dağılımın ortalama kalan ömür fonksiyonu

Böylece görüldüğü gibi ortalama kalan ömür fonksiyonu negatif δ değerleri için azalan ve pozitif δ değerleri için artan olmaktadır.

3.1.7 G_1 – dağılımının özel durumu için moment çıkaran fonksiyonu, momentleri, çarpıklık ve basıklık katsayıları

Bu kısımda (3.9) ifadesinde olasılık yoğunluk fonksiyonu dikkate alınır ise, moment çıkaran fonksiyonu,

$$\begin{aligned} M_T(k) &= (1 - \delta) \frac{\beta}{\beta - k} + \delta \frac{2\beta}{2\beta - k} \\ &= (1 - \delta) M_{\text{üstel}(\beta)}(k) + \delta M_{\text{üstel}(2\beta)}(k) \end{aligned}$$

olarak bulunur. Bu moment çıkaran fonksiyon, β ve 2β parametrelerine sahip üstel

dağılımlı rasgele değişkenlerin moment çıkaran fonksiyonlarının ağırlıklandırılmış bir ifadesi olarak elde edildi ve burada $k < \beta$ dır. G_1 – dağılımına sahip T rasgele değişkenin k . momenti,

$$\begin{aligned} E(T^k) &= \Gamma(k+1) \left(\frac{1-\delta}{\beta^k} + \frac{\delta}{(2\beta)^k} \right) \\ &= (1-\delta)E(T_{\text{üstel}(\beta)}^k) + \delta E(T_{\text{üstel}(2\beta)}^k) \end{aligned}$$

olarak bulunur ve $k = 1,2,3,4$ alınır ise, ilk dört moment aşağıdaki gibi hesaplanır,

$$E(T) = \frac{2-\delta}{2\beta}, E(T^2) = \frac{4-3\delta}{2\beta^2}, E(T^3) = \frac{3(8-7\delta)}{4\beta^3}, E(T^4) = \frac{3(16-15\delta)}{2\beta^4}$$

Bu dağılımın çarpıklık katsayısı,

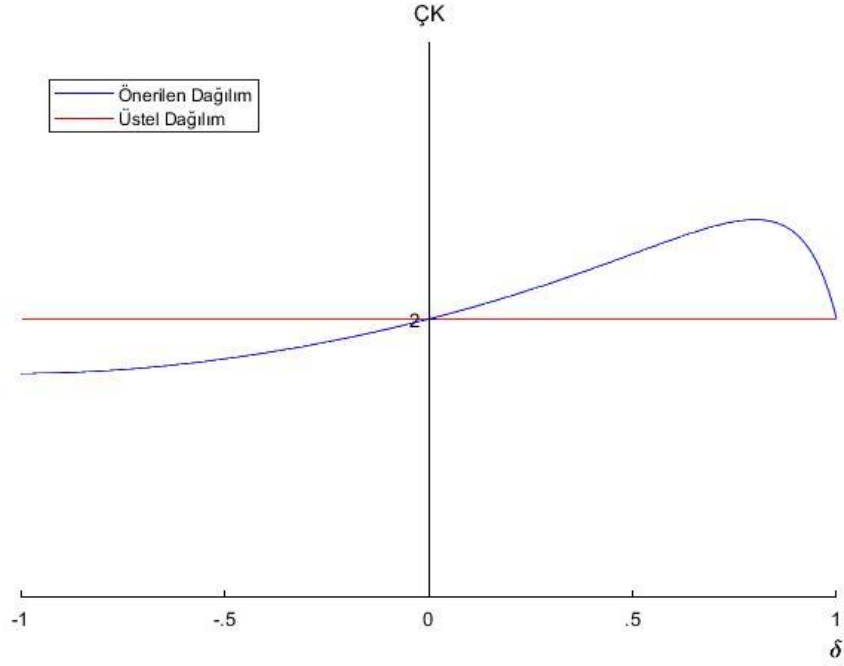
$$\zeta K = \frac{2(8-3\delta-3\delta^2-\delta^3)}{(4-2\delta-\delta^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad -1 \leq \delta \leq 1$$

biçiminde hesaplanır. Elde edilen çarpıklık katsayısının, δ parametresinin uç değerlerinde,

$$\zeta K = \begin{cases} \frac{18}{5\sqrt{5}} \approx 1.6, & \delta = -1 \\ 2, & \delta = 0,1 \end{cases}$$

değerlerini alır. Bu dağılımın çarpıklık katsayısı ile üstel dağılımın çarpıklık katsayısı aşağıdaki grafik ile kıyaslanmıştır.

$$\begin{cases} \text{Maksimum Noktası: } \delta = 0.8 \rightarrow \zeta K = 2.71 \\ \text{Minimum Noktası: } \delta = -1 \rightarrow \zeta K = 1.61 \end{cases}$$



Şekil 3.4 G_1 – dağılımının çarpıklık katsayısı ile üstel dağılımın çarpıklık katsayısının karşılaştırılması

Şekilde görüldüğü gibi G_1 – dağılımının çarpıklık değeri her δ için pozitiftir, yani dağılımın kütlesi grafiğin sol tarafında toplanmıştır ve dağılım sağa çarpıktır. Ayrıca, çarpıklık katsayısının pozitif δ değerleri için üstel dağılımın çarpıklık katsayısından büyük olup üstel dağılıma göre daha sağa çarpıktır ve negatif δ değerleri için üstel dağılımın çarpıklık katsayısından daha küçüktür. $\delta = -1, \delta = 0$ ve $\delta = 1$ değerleri için dağılımın çarpıklık ölçüsü üstel dağılımın çarpıklık ölçüsüne eşittir.

Bu dağılımın basıklık katsayısı ise,

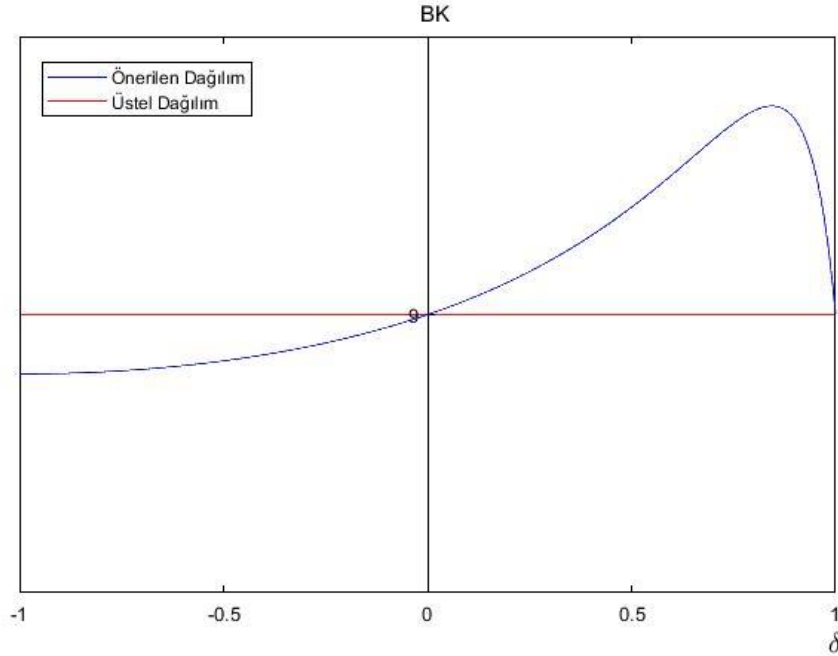
$$BK = \frac{144 - 72\delta - 48\delta^2 - 12\delta^3 - 3\delta^4}{16 - 16\delta - 4\delta^2 + 4\delta^3 + \delta^4}, \quad -1 \leq \delta \leq 1$$

şeklinde hesaplanır. Elde edilen basıklık katsayısının, δ parametresinin uç değerlerinde aldığı değerler,

$$BK = \begin{cases} 7.08, & \delta = -1 \\ 9, & \delta = 0,1 \end{cases}$$

olarak elde edilir. Bu dağılımın basıklık katsayısı ile üstel dağılımın basıklık katsayısı aşağıdaki grafikte kıyaslanmıştır.

$$\begin{cases} \text{Maksimum Noktası: } \delta = 0.844 \rightarrow BK = 15.75 \\ \text{Minimum Noktası: } \delta = -1 \rightarrow BK = 7.08 \end{cases}$$



Şekil 3.5 G_1 – dağılımının basıklık katsayısı ile üstel dağılımın basıklık katsayısının karşılaştırılması

Yukarıdaki şekilde görüldüğü gibi G_1 – dağılımının basıklık katsayısı her δ için pozitiftir, yani dağılımın grafiği ortalama değerinde toplanıp daha sivri olur ve dağılım eğrisi normal dağılıma göre daha dik olacaktır. Ayrıca basıklık katsayısı pozitif δ değerleri için üstel dağılımın basıklık katsayısından büyük olup üstel dağılıma göre daha sivri ve diktir ve

negatif δ değerleri için üstel dağılımın basıklık katsayısından küçük olup üstele göre daha basık olacaktır. $\delta = 0, \delta = 1$ değerleri için dağılımın basıklık katsayısı üstel dağılımın basıklık ölçüsüne eşittir.

3.1.8 G_1 – dağılımın özel durumu için en çok olabilirlik tahmini ve Fisher bilgi matrisi

$(t_1, t_2, \dots, t_n)$, G_1 – dağılımdan gözlenen değerler olsun. $\Theta = \{\delta, \beta\}$ parametre uzayı için olabilirlik fonksiyonu,

$$L(\Theta; t_i) = \prod_{i=1}^n \left((1 - \delta)\beta e^{-\beta t_i} + 2\delta\beta e^{-2\beta t_i} \right),$$

olarak yazılır. Bu çalışma boyunca, log-olabilirlik fonksiyonu kısaltması $\ell := \log L(\Theta; t_i)$ ile gösterilecektir. ℓ fonksiyonu δ ve β parametrelerine göre aşağıdaki gibi ayırt edilir,

$$\frac{\partial \ell}{\partial \delta} = - \sum_{i=1}^n \frac{\beta e^{-\beta t_i} (1 - 2e^{-\beta t_i})}{g_1(t_i; \Theta)}. \quad (3.11)$$

$$\frac{\partial \ell}{\partial \beta} = - \sum_{i=1}^n \frac{(1 - \delta)\beta^2 e^{-\beta t_i} - 2\delta(1 - 2\beta t_i)e^{-2\beta t_i}}{g_1(t_i; \Theta)}, \quad (3.12)$$

$\hat{\delta}$ ve $\hat{\beta}$ parametrelerinin en çok olabilirlik tahmin edicileri, (3.11) ve (3.12) denklemlerini sıfıra eşitleyerek ve eşitlikleri aynı anda çözerek elde edilir. Bu iki parametre için, bilgi matris elemanlarını elde etmek için log-olabilirlik fonksiyonunun ikinci dereceden türevleri alınır.

$$I_{\delta\delta} = \frac{\partial^2 \ell}{\partial \delta^2} = - \sum_{i=1}^n \left(\frac{-\beta e^{-\beta t_i} + 2\beta e^{-2\beta t_i}}{g_1(t_i; \Theta)} \right)^2,$$

$$I_{\beta\beta} = \frac{\partial^2 \ell}{\partial \beta^2} = - \sum_{i=1}^n \frac{\left((1-\delta)e^{-\beta t_i} + 2\delta e^{-2\beta t_i} \right)^2 - 2\delta(1-\delta)(\beta t_i)^2 e^{-3\beta t_i}}{(g_1(t_i; \Theta))^2},$$

$$I_{\delta\beta} = I_{\beta\delta} = \frac{\partial^2 \ell}{\partial \delta \partial \beta} = - \sum_{i=1}^n \frac{2\beta(1+t_i)t_i e^{-3\beta t_i}}{(g_1(t_i; \Theta))^2}.$$

Böylece, δ ve β parametreleri örnek büyüklüğü n olan Fisher bilgi matrisi,

$$I_n(\Theta) = -E \begin{pmatrix} I_{\delta\delta} & I_{\delta\beta} \\ I_{\beta\delta} & I_{\beta\beta} \end{pmatrix}$$

dır. Tek gözlemlili Fisher bilgi matrisinin tersi, yani $I_1^{-1}(\Theta)$, Θ parametre uzayının en çok olabilirlik tahminlerinin asimptotik varyans-kovaryans matrisini gösterir. Dolayısıyla, Θ için en çok olabilirlik tahmincisinin ortak dağılımı, ortalaması Θ ve varyans-kovaryans matrisi $I_1^{-1}(\Theta)$ olan asimptotik normaldir. Yani,

$$\sqrt{n} \left(\begin{bmatrix} \hat{\delta} \\ \hat{\beta} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \delta \\ \beta \end{bmatrix} \right) \xrightarrow{D} N \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, I_1^{-1}(\Theta) \right). \quad (3.13)$$

Bu ters dağılım matrisi çözümlerse, bu çözümler bu parametreler için en çok olabilirlik tahmincilerinin asimptotik varyansı ve kovaryanslarını verecektir. Buradan parametreler için asimptotik normal dağılım ise,

$$\hat{\delta} \sim AN \left(\delta, \frac{2\delta^3}{\log \left(\frac{1+\delta}{1-\delta} \right) - \delta} \right)$$

$$\hat{\beta} \sim AN \left(\beta, \frac{1}{E \left(\frac{1}{\beta^2} - \frac{2\delta(1-\delta)t_1^2 e^{-\beta t_1}}{((1-\delta) + 2\delta e^{-\beta t_1})^2} \right)} \right)$$

dır. δ ve β parametreleri için yaklaşık olarak $100(1 - \gamma)\%$ güven aralıkları sırasıyla,

$$\left(\hat{\delta} - z_{1-\frac{\gamma}{2}} \sqrt{I_{\delta\delta}^{-1}}, \hat{\delta} + z_{1-\frac{\gamma}{2}} \sqrt{I_{\delta\delta}^{-1}} \right), \quad \left(\hat{\beta} - z_{1-\frac{\gamma}{2}} \sqrt{I_{\beta\beta}^{-1}}, \hat{\beta} + z_{1-\frac{\gamma}{2}} \sqrt{I_{\beta\beta}^{-1}} \right),$$

olarak verilmiştir.

3.1.9 G_1 – dağılımının özel durumu için Rényi entropisi

(3.7) ve (3.9) denklemlerinde tanımlanan olasılık yoğunluk fonksiyonu ve dağılımın genel durum için elde edilen Rényi entropi göz önüne alınsın, genelleştirilmiş Binom teoremini uygulayarak,

$$\begin{aligned} (g_1(t; \Theta))^\rho &= ((1-\delta)\beta e^{-\beta t} + 2\delta\beta e^{-2\beta t})^\rho \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \binom{\rho}{j} ((1-\delta)\beta e^{-\beta t})^{\rho-j} (2\delta\beta e^{-2\beta t})^j \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \binom{\rho}{j} (1-\delta)^{\rho-j} (2\delta)^j \beta^\rho e^{-(\rho+j)\beta t} \end{aligned}$$

açılımı yazılabilir. Böylece, Rényi entropi fonksiyonu,

$$I_\rho(T) = \frac{1}{1-\rho} \log \left(\sum_{j=0}^{\infty} \binom{\rho}{j} (1-\delta)^{\rho-j} (2\delta)^j \frac{\beta^\rho}{(\rho+j)\beta} \right)$$

olarak hesaplanır.

3.1.10 G_1 – dağılımın özel durumu için sıra istatistikleri

$T_1, T_2, \dots, T_n$ bağımsız ve aynı dağılımlı rasgele değişkenlerin j . sıra istatistiği, $X_{j:n}$ ile gösterilmek üzere bu sıra istatistiğin olasılık yoğunluk fonksiyonu, $j = 1, 2, \dots, n$ için,

$$h_{j:n}(t) = \frac{n!}{(j-1)!(n-j)!} \left((1-\delta)\beta e^{-\beta t} + 2\delta\beta e^{-2\beta t} \right) \times \left(1 - (1-\delta)e^{-\beta t} - \delta e^{-2\beta t} \right)^{j-1} \left((1-\delta)e^{-\beta t} + \delta e^{-2\beta t} \right)^{n-j},$$

şeklinde bulunmuştur. Böylece, birinci ve sonuncu sıra istatistiklerinin olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$h_{1:n}(t) = n \left((1-\delta)\beta e^{-\beta t} + 2\delta\beta e^{-2\beta t} \right) \left((1-\delta)e^{-\beta t} + \delta e^{-2\beta t} \right)^{n-1}$$

$$h_{n:n}(t) = n \left((1-\delta)\beta e^{-\beta t} + 2\delta\beta e^{-2\beta t} \right) \left(1 - (1-\delta)e^{-\beta t} - \delta e^{-2\beta t} \right)^{j-1}.$$

olarak bulunur.

3.2 Bağımsız Farklı Dağılıma Sahip İki Bileşenli Sistemler ile Önerilen Dağılım

Bu alt bölümde bileşenlerin ömürleri bağımsız ve farklı dağılımlara sahip olarak alınacaktır. İkinci bölümde elde edilen seri ve paralel sistemlerin başarısızlık olasılıkları sırasıyla,

$$H_{1:2}(t) = F_{T_1}(t) + F_{T_2}(t) - F_{T_1}(t)F_{T_2}(t), \quad H_{2:2}(t) = F_{T_1}(t)F_{T_2}(t),$$

olduğu göz önüne alınsın. Burada sistemlerin bileşenleri $X_{1:2} \leq T_i \leq X_{2:2}, i = 1,2$ olarak sıralanabilir. Yani, $H_{2:2}(t) \leq F(t) \leq H_{1:2}(t)$ sıralaması geçerlidir. Böylece, önceki alt bölümde anlatıldığı gibi, her konveks kombinasyon parametresi $\lambda \in [0,1]$ için,

$$\begin{aligned} G(t) &= \lambda H_{1:2}(t) + (1 - \lambda)H_{2:2}(t) \\ &= \lambda (F_{T_1}(t) + F_{T_2}(t)) + (1 - 2\lambda)F_{T_1}(t)F_{T_2}(t), \end{aligned} \quad (3.14)$$

yazılabilir. Eğer $\lambda = \frac{\delta+1}{2}$ dönüşümü yapılır ise, $[0,1]$ aralığından $[-1,1]$ aralığına geçiş sağlanacaktır, yani yeni dönüşüm parametresi $\delta = 2\lambda - 1 \in [-1,1]$ olup böylece $|\delta| \leq 1$ için,

$$\begin{aligned} G_2(t; \delta) &= \left(\frac{1+\delta}{2}\right) (F_{T_1}(t) + F_{T_2}(t)) - \delta F_{T_1}(t)F_{T_2}(t), \\ &= \frac{1+\delta}{2} H_{1:2}(t) + \frac{1-\delta}{2} H_{2:2}(t) \end{aligned} \quad (3.15)$$

olarak tanımlanır. Dolayısıyla, bu yöntemle dönüştürülmüş dağılıma benzeyen yeni tek değişkenli bir dağılım elde edilmiştir. Eğer temel dağılımlar özdeş, yani ikinci denklemde $F_{T_1}(t) = F_{T_2}(t)$ alınırsa, son yıllarda çok popüler hale gelen dönüştürülmüş dağılımı elde edebiliriz. Önerilen dağılım için parametre uzayı $P = \{\theta_{f_{T_1}} \cup \theta_{f_{T_2}} \cup \{\delta\}\}$ olarak tanımlanmaktadır. Bilinen dönüştürülmüş dağılımların parametre uzayıyla karşılaştırılması yapıldığında, bu yeni dağılımın fazladan bir parametre kümesi yani $\theta_{f_{T_2}}$ vardır. Şimdi (3.15) deki dağılım fonksiyonunun türevi alınır ise, olasılık yoğunluk fonksiyonu aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\begin{aligned} g_2(t; \delta) &= \left(\frac{1+\delta}{2}\right) (f_{T_1}(t) + f_{T_2}(t)) - \delta (f_{T_1}(t)F_{T_2}(t) + F_{T_1}(t)f_{T_2}(t)), \\ &= \frac{1+\delta}{2} h_{1:2}(t) + \frac{1-\delta}{2} h_{2:2}(t). \end{aligned} \quad (3.16)$$

3.2.1 G_2 – dağılımın yaşam fonksiyonu ve bozulma oranı fonksiyonu

Bu kısımda, (3.14) ifadesinde elde edilen dağılım göz önüne alınırsa, yaşam fonksiyonu,

$$\begin{aligned}\bar{G}_2(t; \delta) &= 1 - \left(\frac{1+\delta}{2}\right) \left(F_{T_1}(t) + F_{T_2}(t)\right) + \delta F_{T_1}(t) F_{T_2}(t) \\ &= \left(\frac{1-\delta}{2}\right) \left(\bar{F}_{T_1}(t) + \bar{F}_{T_2}(t)\right) + \delta \bar{F}_{T_1}(t) \bar{F}_{T_2}(t)\end{aligned}$$

olarak elde edilir. Ayrıca, bozulma oranı fonksiyonu,

$$r_{G_2}(t; \delta) = \frac{\left(\frac{1+\delta}{2}\right) \left(f_{T_1}(t) + f_{T_2}(t)\right) - \delta \left(f_{T_1}(t) F_{T_2}(t) + F_{T_1}(t) f_{T_2}(t)\right)}{\left(\frac{1-\delta}{2}\right) \left(\bar{F}_{T_1}(t) + \bar{F}_{T_2}(t)\right) + \delta \bar{F}_{T_1}(t) \bar{F}_{T_2}(t)}, \quad (3.17)$$

dır. (3.17)'de önerilen dağılımın bozulma oranı fonksiyonu, temel dağılımların bozulma oranlarının bir fonksiyonu olarak aşağıdaki şekilde elde edilir.

$$r_{G_2}(t; \delta) = r_{F_1}(t) + r_{F_2}(t) - \frac{\frac{1-\delta}{2} \left(r_{F_1}(t) \bar{F}_{T_2}(t) + r_{F_2}(t) \bar{F}_{T_1}(t)\right)}{\frac{1-\delta}{2} \left(\bar{F}_{T_1}(t) + \bar{F}_{T_2}(t)\right) + \delta \bar{F}_{T_1}(t) \bar{F}_{T_2}(t)}.$$

Burada $r_{G_2}(0; \delta) = \frac{1+\delta}{2} \left(r_{F_1}(0) + r_{F_2}(0)\right)$ ki $r_{F_1}(t)$ ve $r_{F_2}(t)$ temel dağılımların bozulma oranı fonksiyonlarıdır.

3.2.2 G_2 – dağılımın moment çıkaran fonksiyonu, momentleri, çarpıklık ve basıklık katsayıları

T rasgele değişkeninin moment çıkaran fonksiyonu,

$$M_T(k) = \left(\frac{1+\delta}{2}\right) (M_{T_1}(k) + M_{T_2}(k)) - \delta M_{X_{2:2}}(k),$$

olarak bulunur. Bu rasgele değişkenin k. momenti aşağıda verilmiştir,

$$E(T^k) = \frac{1+\delta}{2} (E(T_1^k) + E(T_2^k)) - \delta E(X_{2:2}^k).$$

Böylece yukarıda elde edilen k. momentte $k = 1,2,3,4$ alınırsa ilk dört moment ve varyans elde edilecektir. Böylece, önerilen rasgele değişkenin çarpıklık ve basıklık katsayısı,

$$\zeta_K = \frac{1}{(Var(T))^{\frac{3}{2}}} \left(\begin{aligned} &\frac{1+\delta}{2} (E(T_1^3) + E(T_2^3)) - \delta E(X_{2:2}^3) \\ &-3 \left(\frac{1+\delta}{2} (E(T_1) + E(T_2)) - \delta E(X_{2:2}) \right) \left(\frac{1+\delta}{2} (E(T_1^2) + E(T_2^2)) - \delta E(X_{2:2}^2) \right) \\ &+2 \left(\frac{1+\delta}{2} (E(T_1) + E(T_2)) - \delta E(X_{2:2}) \right)^3 \end{aligned} \right)$$

$$BK = \frac{1}{(Var(T))^2} \left(\begin{aligned} &\frac{1+\delta}{2} (E(T_1^4) + E(T_2^4)) - \delta E(X_{2:2}^4) \\ &-4 \left(\frac{1+\delta}{2} (E(T_1) + E(T_2)) - \delta E(X_{2:2}) \right) \left(\frac{1+\delta}{2} (E(T_1^3) + E(T_2^3)) - \delta E(X_{2:2}^3) \right) \\ &+6 \left(\frac{1+\delta}{2} (E(T_1) + E(T_2)) - \delta E(X_{2:2}) \right)^2 \left(\frac{1+\delta}{2} (E(T_1^2) + E(T_2^2)) - \delta E(X_{2:2}^2) \right) \\ &-3 \left(\frac{1+\delta}{2} (E(T_1) + E(T_2)) - \delta E(X_{2:2}) \right)^4 \end{aligned} \right)$$

olarak hesaplanır.

3.2.3 G_2 – dağılımdan rasgele sayı üretme

Bu bölümde, önerilen dağılımdan rasgele sayı üretmek için ikinci bölümde tanımlanan karma yöntemi kullanılacaktır. (3.15) fonksiyonunda tanımlanan dağılım fonksiyonu, $X_{1:2} = \min\{T_1, T_2\}$ ve $X_{2:2} = \max\{T_1, T_2\}$ dağılım fonksiyonlarının bir kombinasyonu olarak yazılmıştır. Böylece, rasgele sayı aşağıdaki adımlarla üretilir.

Algoritma	Karma yöntem ile rasgele sayı üretme
Adım 1:	Bağımsız olarak $t_1 \sim H_{1:2}$ den ve $t_2 \sim H_{2:2}$ den üret,
Adım 2:	U rasgele değişkenini düzgün $(0,1)$ dağılımından üret,
Adım 3:	Eğer $u < \frac{1+\delta}{2}$ ise, o zaman $t = \min\{t_1, t_2\}$ den üret,
Adım 4:	Aksi takdirde, $t = \max\{t_1, t_2\}$ den üret.

3.2.4 G_2 – dağılımın Rényi entropisi

(3.15) denkleminde önerilen dağılım için Rényi entropiyi elde etmek için genelleştirilmiş Binom teoremini uygulayarak,

$$\begin{aligned}
 (g_2(t; \delta))^\rho &= \left(\left(\frac{1+\delta}{2} \right) h_{1:2}(t) + \left(\frac{1-\delta}{2} \right) h_{2:2}(t) \right)^\rho \\
 &= \sum_{j=0}^{\infty} \binom{\rho}{j} \left(\left(\frac{1+\delta}{2} \right) (f_{T_1}(t) + f_{T_2}(t)) \right)^{\rho-j} \left(-\delta (f_{T_1}(t)F_{T_2}(t) + F_{T_1}(t)f_{T_2}(t)) \right)^j \\
 &= \sum_{j=0}^{\infty} \binom{\rho}{j} \left(\frac{1+\delta}{2} \right)^{\rho-j} (-\delta)^j \left(\sum_{k=0}^{\infty} \binom{\rho-j}{k} (f_{T_1}(t))^{\rho-j-k} (f_{T_2}(t))^k \right) \\
 &\quad \times \left(\sum_{m=0}^{\infty} \binom{j}{m} (f_{T_1}(t)F_{T_2}(t))^{j-m} (F_{T_1}(t)f_{T_2}(t))^m \right) \\
 &= \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^j \binom{\rho}{j} \binom{\rho-j}{k} \binom{j}{m} \left(\frac{1+\delta}{2} \right)^{\rho-j} \delta^j \\
 &\quad \times (f_{T_1}(t))^{\rho-k-m} (f_{T_2}(t))^{k+m} (F_{T_1}(t))^m (F_{T_2}(t))^{j-m}
 \end{aligned}$$

açılımı yapılmıştır. Rényi entropi ise,

$$I_\rho(T) = \frac{1}{1-\rho} \log \left[\sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^j \binom{\rho}{j} \binom{\rho-j}{k} \binom{j}{m} \left(\frac{1+\delta}{2} \right)^{\rho-j} \delta^j \times \int_0^{\infty} (f_{T_1}(t))^{\rho-k-m} (f_{T_2}(t))^{k+m} (F_{T_1}(t))^m (F_{T_2}(t))^{j-m} dt \right], \quad (3.18)$$

dir.

3.2.5 G_2 – dağılımı için özel durum

Bu kısımda, T_1 ve T_2 rasgele değişkenleri sırası ile β_1 ve β_2 parametrelerine sahip üstel dağılımdan alınsın. Böylece dağılım fonksiyonu,

$$G_2(t; \Theta) = 1 - \frac{1-\delta}{2} (e^{-\beta_1 t} + e^{-\beta_2 t}) - \delta e^{-(\beta_1 + \beta_2)t}, \quad (3.19)$$

olarak elde edilir. Burada parametre uzayı $\Theta = \{(\delta, \beta_1, \beta_2) : -1 \leq \delta \leq 1, \beta_1, \beta_2 > 0\}$ dir. Böylece yeni tek boyutlu dağılım fonksiyonu elde edilmiştir. Bu dağılım, farklı parametrelere sahip iki üstel dağılımın konveks kombinasyonu olarak adlandırılır. Böylece (3.19) de tanımlanan dağılımın olasılık yoğunluk fonksiyonu,

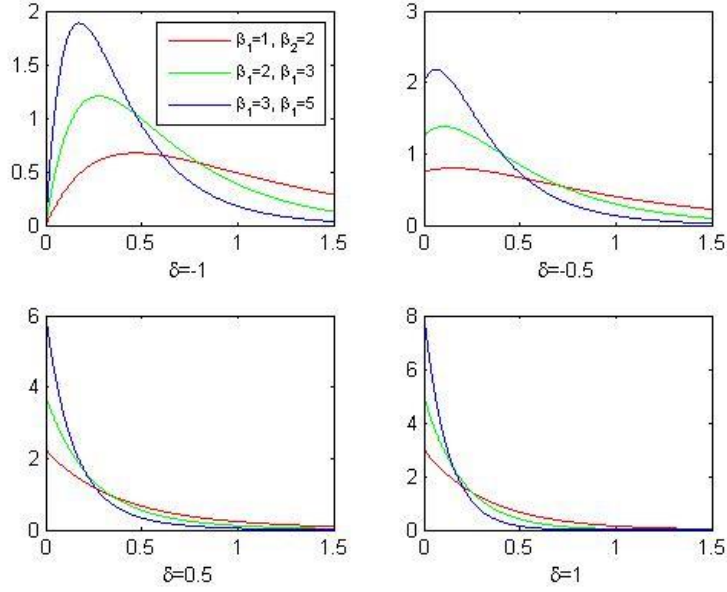
$$g_2(t; \Theta) = \frac{1-\delta}{2} (\beta_1 e^{-\beta_1 t} + \beta_2 e^{-\beta_2 t}) + \delta(\beta_1 + \beta_2) e^{-(\beta_1 + \beta_2)t}, \quad t > 0, \beta_1, \beta_2 > 0, \quad (3.20)$$

olarak verilir. Bu olasılık yoğunluk fonksiyonu analiz edilecektir.

$$g'_2(t; \Theta) = -\frac{1-\delta}{2} (\beta_1^2 e^{-\beta_1 t} + \beta_2^2 e^{-\beta_2 t}) - \delta(\beta_1 + \beta_2)^2 e^{-(\beta_1 + \beta_2)t},$$

Bu türevli ifade incelendiğinde, $\delta \geq 0$ için $g'_2(t; \Theta) < 0$ elde edildiği ve olasılık yoğunluk

fonksiyonunun azalan olduğu söylenebilir. Ayrıca, olasılık yoğunluk fonksiyonunun Tek modlu olması için $\delta < 0$ olmalıdır.



Şekil 3.6 G_2 – dağılımın olasılık yoğunluk fonksiyonu

Şekil 3.6’de görüldüğü gibi, önerilen dağılımın olasılık yoğunluk fonksiyonu farklı şekiller alabilmektedir.

3.2.6 G_2 – dağılımın özel durumu için matematiksel özellikleri

Bu kısımda, (3.19) ifadesinde verilen dağılım fonksiyonu göz önüne alınarak, bu dağılımın yaşam fonksiyonu,

$$\bar{G}_2(t; \Theta) = \frac{1 - \delta}{2} (e^{-\beta_1 t} + e^{-\beta_2 t}) + \delta e^{-(\beta_1 + \beta_2)t}$$

olarak verilir. Önerilen dağılım fonksiyonun bozulma oranı fonksiyonu ise,

$$\begin{aligned}
r_{G_2}(t; \Theta) &= \frac{\frac{1-\delta}{2}(\beta_1 e^{-\beta_1 t} + \beta_2 e^{-\beta_2 t}) + \delta(\beta_1 + \beta_2)e^{-(\beta_1 + \beta_2)t}}{\frac{1-\delta}{2}(e^{-\beta_1 t} + e^{-\beta_2 t}) + \delta e^{-(\beta_1 + \beta_2)t}} \\
&= (\beta_1 + \beta_2) - \frac{\frac{1-\delta}{2}(\beta_2 e^{-\beta_1 t} + \beta_1 e^{-\beta_2 t})}{\frac{1-\delta}{2}(e^{-\beta_1 t} + e^{-\beta_2 t}) + \delta e^{-(\beta_1 + \beta_2)t}}, \tag{3.21}
\end{aligned}$$

dır. Bozulma oranı fonksiyonu incelenecektir.

$$r'_{G_2}(t; \Theta) = \frac{-\left(\frac{1-\delta}{2}\right)^2 (\beta_1 + \beta_2)^2 e^{-(\beta_1 + \beta_2)t} - \delta \left(\frac{1-\delta}{2}\right) (\beta_2^2 e^{-(2\beta_1 + \beta_2)t} + \beta_1^2 e^{-(\beta_1 + 2\beta_2)t})}{\left(\frac{1-\delta}{2}(e^{-\beta_1 t} + e^{-\beta_2 t}) + \delta e^{-(\beta_1 + \beta_2)t}\right)^2}$$

Bu türevli ifade göz önüne alındığında, türevin işaretinin negatif olması için δ pozitif olmalıdır ve bozulma oranı fonksiyonu azalan olacaktır. Ayrıca, bozulma oranının tek modlu olması için, $r'_{G_2}(t; \Theta) = 0$ nin tek kökü olmalıdır, yani $\delta < 0$ olmalıdır.

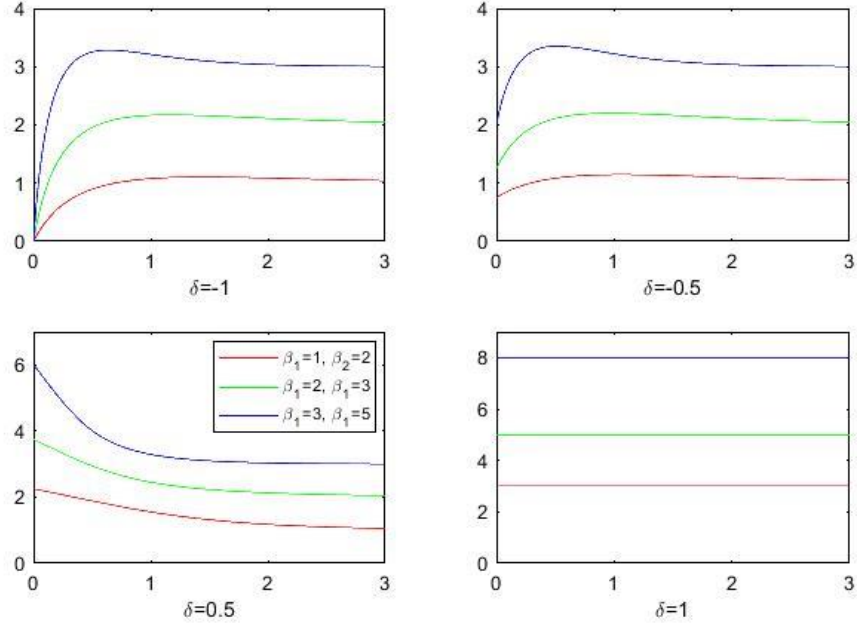
Böylece (3.21) ifadesinde elde edilen bozulma oranı fonksiyonu,

$$r_{G_2}(0; \Theta) = \frac{1+\delta}{2}(\beta_1 + \beta_2), \quad \lim_{t \rightarrow \infty} r_{G_2}(t; \Theta) = \min\{\beta_1, \beta_2\}$$

değerlerini alır. Ayrıca, bozulma oranı fonksiyonu $\frac{1+\delta}{2}(\beta_1 + \beta_2)$ değeri ile $\min\{\beta_1, \beta_2\}$ değeri aralığında değişir. Bozulma oranı fonksiyonu dönüşüm parametresinin uç değerlerinde,

$$r_{G_2}(t; \Theta) = \begin{cases} \frac{(\beta_1 e^{-\beta_1 t} + \beta_2 e^{-\beta_2 t}) - (\beta_1 + \beta_2)e^{-(\beta_1 + \beta_2)t}}{(e^{-\beta_1 t} + e^{-\beta_2 t}) - e^{-(\beta_1 + \beta_2)t}}, & \delta = -1 \\ \frac{\beta_1 e^{-\beta_1 t} + \beta_2 e^{-\beta_2 t}}{e^{-\beta_1 t} + e^{-\beta_2 t}}, & \delta = 0 \\ \beta_1 + \beta_2, & \delta = 1 \end{cases}$$

dır. $\delta = 1$ iken, bozulma oranı fonksiyonu sabittir.



Şekil 3.7 G_2 – dağılımın bozulma oranı fonksiyonu

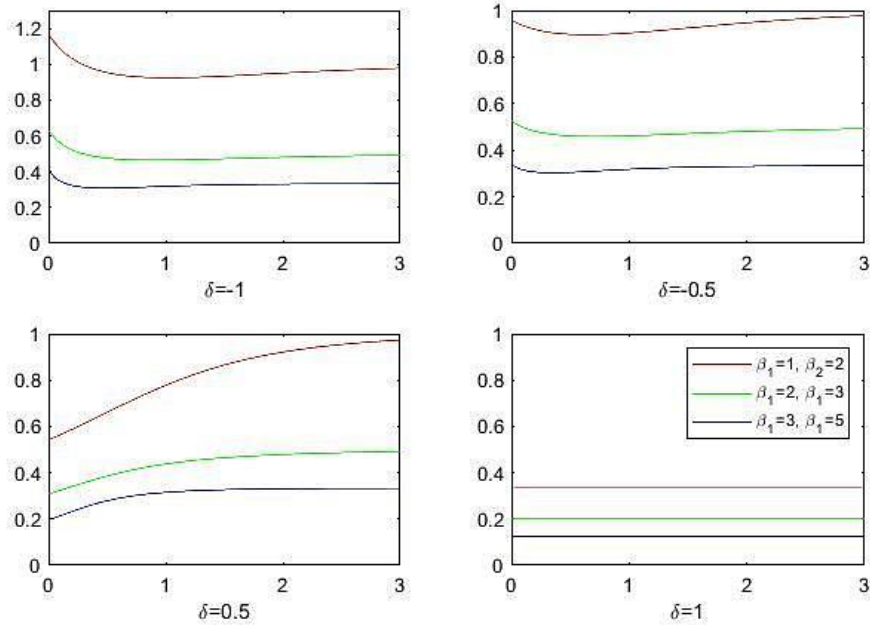
Şekil 3.9’de önerilen dağılımın bozulma oranı fonksiyonu farklı parametreler için gösterilmiştir. Negatif δ değerleri için bu dağılım tek modlu bozulma oranı fonksiyonuna sahiptir. Pozitif δ değerleri için bu dağılım monoton azalan bozulma oranı fonksiyonu özelliğine sahiptir. $\delta = 1$ iken bu fonksiyon sabittir. Önerilen dağılımın ortalama kalan ömür fonksiyonu,

$$\begin{aligned}
 m(t; \Theta) &= \frac{\left(\frac{1-\delta}{2}\right) \left(\frac{1}{\beta_1} e^{-\beta_1 t} + \frac{1}{\beta_2} e^{-\beta_2 t}\right) + \delta \left(\frac{1}{\beta_1 + \beta_2}\right) e^{-(\beta_1 + \beta_2)t}}{\frac{1-\delta}{2} (e^{-\beta_1 t} + e^{-\beta_2 t}) + \delta e^{-(\beta_1 + \beta_2)t}} \\
 &= \frac{1}{\beta_1 + \beta_2} - \frac{\frac{1-\delta}{2} \left(\frac{1}{\beta_2} e^{-\beta_1 t} + \frac{1}{\beta_1} e^{-\beta_2 t}\right)}{\frac{1-\delta}{2} (e^{-\beta_1 t} + e^{-\beta_2 t}) + \delta e^{-(\beta_1 + \beta_2)t}}
 \end{aligned}$$

olarak elde edilir. Bu fonksiyon,

$$m(0; \Theta) = \left(\frac{1 - \delta}{2} \right) \frac{\beta_1 + \beta_2}{\beta_1 \beta_2} + \delta \frac{1}{\beta_1 + \beta_2}, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} m(t; \Theta) = \min\{\beta_1, \beta_2\}$$

değerlerini alır. Bu ortalama kalan ömür fonksiyonu farklı parametreler için aşağıdaki şekilde gösterilmiştir.



Şekil 3.8 G_2 – dağılımın ortalama kalan ömür fonksiyonu

3.2.7 G_2 – dağılımın özel durumu için moment çıkaran fonksiyonu, momentleri, çarpıklık ve basıklık katsayıları

Bu kısımda (3.20)'de önerilen olasılık yoğunluk fonksiyonu ele alınarak moment çıkaran fonksiyonu,

$$\begin{aligned}
M_T(k) &= \frac{1-\delta}{2} \left(\frac{\beta_1}{\beta_1-k} + \frac{\beta_2}{\beta_2-k} \right) + \delta \left(\frac{\beta_1 + \beta_2}{\beta_1 + \beta_2 - k} \right) \\
&= \frac{1-\delta}{2} \left(M_{\text{Üstel}(\beta_1)}(k) + M_{\text{Üstel}(\beta_2)}(k) \right) + \delta M_{\text{Üstel}(\beta_1+\beta_2)}(k)
\end{aligned}$$

şeklinde elde edilmiştir, burada $k < \min\{\beta_1, \beta_2\}$ dir. Bu moment çıkaran fonksiyon β_1, β_2 ve $\beta_1 + \beta_2$ parametrelili üstel dağılımlarına sahip rasgele değişkenlerin moment çıkaran fonksiyonlarının ağırlıklandırılmış bir ifadesi olarak verilmiştir. T rasgele değişkeninin k . momenti ise,

$$\begin{aligned}
E(T^k) &= \frac{1-\delta}{2} \left(\frac{\Gamma(k+1)}{\beta_1^k} + \frac{\Gamma(k+1)}{\beta_2^k} \right) + \delta \frac{\Gamma(k+1)}{(\beta_1 + \beta_2)^k} \\
&= \frac{1-\delta}{2} \left(E(T_{\text{Üstel}(\beta_1)}^k) + E(T_{\text{Üstel}(\beta_2)}^k) \right) + \delta E(T_{\text{Üstel}(\beta_1+\beta_2)}^k)
\end{aligned}$$

dır ve $k = 1, 2, 3, 4$ alınır ise, ilk dört moment elde edilecektir. Önerilen dağılımın çarpıklık katsayısı;

$$\begin{aligned}
\zeta_K &= \frac{1}{(Var(T))^{\frac{3}{2}}} \left(\begin{aligned} &\Gamma(4) \left(\frac{1-\delta}{2} \left(\frac{1}{\beta_1^3} + \frac{1}{\beta_2^3} \right) + \frac{\delta}{(\beta_1 + \beta_2)^3} \right) \\ &- \Gamma(4) \left(\frac{1-\delta}{2} \left(\frac{1}{\beta_1} + \frac{1}{\beta_2} \right) + \frac{\delta}{\beta_1 + \beta_2} \right) \left(\frac{1-\delta}{2} \left(\frac{1}{\beta_1^2} + \frac{1}{\beta_2^2} \right) + \frac{\delta}{(\beta_1 + \beta_2)^2} \right) \\ &+ \Gamma(3) \left(\frac{1-\delta}{2} \left(\frac{1}{\beta_1} + \frac{1}{\beta_2} \right) + \frac{\delta}{\beta_1 + \beta_2} \right)^3 \end{aligned} \right)
\end{aligned}$$

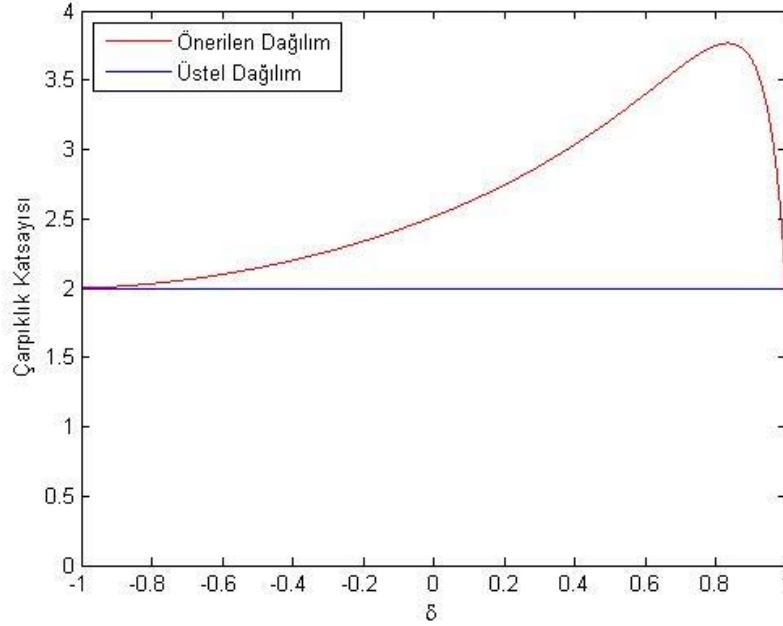
olarak hesaplanır. Bu çarpıklık katsayısı, δ parametresinin uç değerlerinde aldığı değerler ise,

$$\zeta_K = \begin{cases} 2, & \delta = -1, 1 \\ 2.51, & \delta = 0 \end{cases}$$

dır. Bu dağılımın çarpıklık katsayısı ile üstel dağılımın çarpıklık katsayısı aşağıdaki grafikte

kıyaslanacaktır.

$$\begin{cases} \text{Minimum Noktası: } \delta = -1, \delta = 1 \rightarrow \zeta K = 2 \\ \text{Maksimum Noktası: } \delta = 0.919 \rightarrow \zeta K = 3.7666 \end{cases}$$



Şekil 3.9 G_2 – dağılımının çarpıklık katsayısı ile üstel dağılımının çarpıklık katsayısının karşılaştırılması

Şekilde görüldüğü gibi G_2 – dağılımının çarpıklık değeri her δ için pozitiftir, yani dağılımın kütlesi grafiğin sol tarafında toplanmıştır ve dağılım sağa çarpıktır. Ayrıca, bu çarpıklık katsayısı üstel dağılımının çarpıklık katsayısından büyük olup üstel dağılıma göre sağa çarpıktır. $\delta = -1$ ve $\delta = 1$ için üstel dağılımının çarpıklık katsayısı ile eşittir. Bu dağılımın basıklık katsayısı,

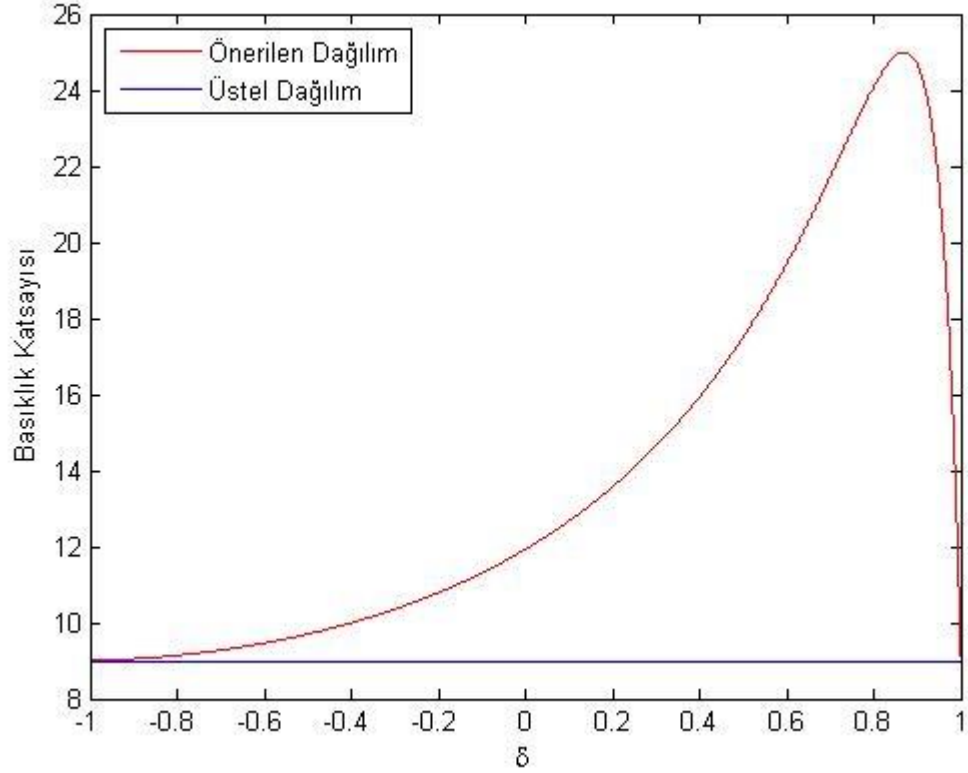
$$BK = \frac{1}{(Var(T))^2} \begin{pmatrix} \Gamma(5) \left(\frac{1-\delta}{2} \left(\frac{1}{\beta_1^4} + \frac{1}{\beta_2^4} \right) + \frac{\delta}{(\beta_1 + \beta_2)^4} \right) \\ -\Gamma(5) \left(\frac{1-\delta}{2} \left(\frac{1}{\beta_1} + \frac{1}{\beta_2} \right) + \frac{\delta}{\beta_1 + \beta_2} \right) \left(\frac{1-\delta}{2} \left(\frac{1}{\beta_1^3} + \frac{1}{\beta_2^3} \right) + \frac{\delta}{(\beta_1 + \beta_2)^3} \right) \\ -\Gamma(4) \left(\frac{1-\delta}{2} \left(\frac{1}{\beta_1} + \frac{1}{\beta_2} \right) + \frac{\delta}{\beta_1 + \beta_2} \right)^4 \end{pmatrix}$$

dır. Bu basıklık katsayısı δ parametresinin uç değerlerinde,

$$BK = \begin{cases} 9, & \delta = -1, 1 \\ 11.96, & \delta = 0 \end{cases}$$

değerlerini alır. Bu dağılımın basıklık katsayısı ile üstel dağılımın basıklık katsayısı aşağıdaki grafikte kıyaslanacaktır.

$$\begin{cases} \text{Maksimum Noktası: } \delta = 0.919 \rightarrow BK = 22.2099 \\ \text{Minimum Noktası: } \delta = -1, \delta = 1 \rightarrow BK = 9 \end{cases}$$



Şekil 3.10 G_2 – dağılımın basıklık katsayısı ile üstel dağılımın basıklık katsayısının karşılaştırılması

Şekil 3.10’de görüldüğü gibi, G_2 – dağılımının basıklık katsayısı her δ için pozitifdir, yani dağılımın grafiği ortalama değerinde toplanıp daha sivri olur. Ayrıca, basıklık katsayısı üstel dağılımın basıklık katsayısından büyük olup üstel dağılıma göre daha sivri ve diktir. $\delta = -1$ ve $\delta = 1$ için üstel dağılımın basıklık katsayısına eşittir.

3.2.8 G_2 – dağılımın özel durumu için en çok olabilirlik tahmini ve Fisher bilgi matrisi

$(t_1, t_2, \dots, t_n)$ önerilen dağılımdan gözlenen değerler olsun. $\Theta = \{\delta, \beta_1, \beta_2\}$ parametre uzayı için olabilirlik fonksiyonu,

$$L(\Theta; t_i) := \prod_{i=1}^n \left(\frac{1-\delta}{2} (\beta_1 e^{-\beta_1 t_i} + \beta_2 e^{-\beta_2 t_i}) + \delta (\beta_1 + \beta_2) e^{-(\beta_1 + \beta_2) t_i} \right).$$

olarak yazılır. Log-olabilirlik fonksiyonu δ, β_1 ve β_2 parametrelerine göre aşağıdaki gibi ayırt edilir,

$$\frac{\partial \ell}{\partial \delta} = \sum_{i=1}^n \frac{\frac{-1}{2} (\beta_1 e^{-\beta_1 t_i} + \beta_2 e^{-\beta_2 t_i}) + (\beta_1 + \beta_2) e^{-(\beta_1 + \beta_2) t_i}}{g_2(t_i; \Theta)}, \quad (3.22)$$

$$\frac{\partial \ell}{\partial \beta_1} = \sum_{i=1}^n \frac{\frac{1-\delta}{2} (1 - \beta_1 t_i) e^{-\beta_1 t_i} + \delta (1 - \beta_1 t_i - \beta_2 t_i) e^{-(\beta_1 + \beta_2) t_i}}{g_2(t_i; \Theta)}, \quad (3.23)$$

$$\frac{\partial \ell}{\partial \beta_2} = \sum_{i=1}^n \frac{\frac{1-\delta}{2} (1 - \beta_2 t_i) e^{-\beta_2 t_i} + \delta (1 - \beta_1 t_i - \beta_2 t_i) e^{-(\beta_1 + \beta_2) t_i}}{g_2(t_i; \Theta)}, \quad (3.24)$$

$\hat{\delta}, \hat{\beta}_1$ ve $\hat{\beta}_2$ parametrelerinin en çok olabilirlik tahmin edicileri, (3.22), (3.23) ve (3.24) denklemlerini sıfıra eşitleyerek ve eşitlikleri aynı anda çözerek elde edilir. Bu üç parametre için, bilgi matris elemanlarını elde etmek için log-olabilirlik fonksiyonunun parametrelere göre ikinci dereceden türevleri elde edilecektir.

$$I_{\delta\delta} = \frac{\partial^2 \ell}{\partial \delta^2} = - \sum_{i=1}^n \left(\frac{\frac{-1}{2} (\beta_1 e^{-\beta_1 t_i} + \beta_2 e^{-\beta_2 t_i}) + (\beta_1 + \beta_2) e^{-(\beta_1 + \beta_2) t_i}}{g_2(t_i; \Theta)} \right)^2$$

$$I_{\beta_1 \beta_1} = \frac{\partial^2 \ell}{\partial \beta_1^2} = - \sum_{i=1}^n \frac{\left(\frac{1-\delta}{2} e^{-\beta_1 t_i} + \delta e^{-(\beta_1 + \beta_2) t_i} \right)^2 - \left(\frac{1-\delta}{2} \right)^2 (2 - \beta_1 t_i) \beta_2 t_i e^{-(\beta_1 + \beta_2) t_i}}{(g_2(t_i; \Theta))^2} \\ - \frac{\frac{1-\delta}{2} \delta (2 - \beta_1 t_i - \beta_2 t_i) \beta_2 t_i e^{-(\beta_1 + 2\beta_2) t_i}}{(g_2(t_i; \Theta))^2}$$

$$I_{\beta_2\beta_2} = \frac{\partial^2 \ell}{\partial \beta_2^2} = - \sum_{i=1}^n \frac{\left(\frac{1-\delta}{2} e^{-\beta_2 t_i} + \delta e^{-(\beta_1+\beta_2)t_i} \right)^2 - \left(\frac{1-\delta}{2} \right)^2 (2 - \beta_2 t_i) \beta_1 t_i e^{-(\beta_1+\beta_2)t_i}}{(g_2(t_i; \Theta))^2} - \frac{\frac{1-\delta}{2} \delta (2 - \beta_1 t_i - \beta_2 t_i) \beta_1 t_i e^{-(2\beta_1+\beta_2)t_i}}{(g_2(t_i; \Theta))^2}$$

$$I_{\delta\beta_1} = I_{\beta_1\delta} = \frac{\partial^2 \ell}{\partial \delta \partial \beta_1} = - \sum_{i=1}^n \frac{\beta_2 e^{-(2\beta_1+\beta_2)t_i} - (1 - \beta_1 t_i - \beta_2 t_i) \beta_2 e^{-(\beta_1+2\beta_2)t_i}}{(g_2(t_i; \Theta))^2}$$

$$I_{\delta\beta_2} = I_{\beta_2\delta} = \frac{\partial^2 \ell}{\partial \delta \partial \beta_2} = - \sum_{i=1}^n \frac{\beta_1 e^{-(\beta_1+2\beta_2)t_i} - (1 - \beta_1 t_i - \beta_2 t_i) \beta_1 e^{-(2\beta_1+\beta_2)t_i}}{(g_2(t_i; \Theta))^2}$$

$$\begin{aligned} I_{\beta_1\beta_2} &= I_{\beta_2\beta_1} = \frac{\partial^2 \ell}{\partial \beta_2 \partial \beta_1} \\ &= - \sum_{i=1}^n \left(\frac{\frac{1-\delta}{2} \delta \left((1 - \beta_1 t_i) e^{-(\beta_1+2\beta_2)t_i} + (1 - \beta_2 t_i) e^{-(2\beta_1+\beta_2)t_i} \right)}{(g_2(t_i; \Theta))^2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\delta^2 (e^{-2(\beta_1+\beta_2)t_i} - (1 - \beta_1 t_i)(1 - \beta_2 t_i) e^{-(\beta_1+\beta_2)t_i})}{(g_2(t_i; \Theta))^2} \right) \end{aligned}$$

Böylece, $\Theta = \{\delta, \beta_1, \beta_2\}$ parametre uzayı için örnek büyüklüğü n olan Fisher bilgi matrisi,

$$I_n(\Theta) = -E \begin{pmatrix} I_{\delta\delta} & I_{\delta\beta_1} & I_{\delta\beta_2} \\ I_{\beta_1\delta} & I_{\beta_1\beta_1} & I_{\beta_1\beta_2} \\ I_{\beta_2\delta} & I_{\beta_2\beta_1} & I_{\beta_2\beta_2} \end{pmatrix}$$

dır. Dolayısıyla, Θ parametre uzayı için en çok olabilirlik tahmincisinin ortak dağılımı, ortalaması Θ ve varyans-kovaryans matrisi $I_1^{-1}(\Theta)$ olan asimptotik normaldir. Yani,

$$\sqrt{n} \left(\begin{bmatrix} \hat{\delta} \\ \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \delta \\ \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix} \right) \xrightarrow{D} N \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, I_1^{-1}(\Theta) \right). \quad (3.25)$$

dır. Bu ters dağılım matrisi çözülmüşse, bu çözümler parametreler için en çok olabilirlik tahmincilerinin asimptotik varyansı ve kovaryanslarını verecektir. Buradan parametreler için asimptotik normal dağılım ise,

$$\begin{aligned} \hat{\delta} &\sim AN \left(\delta, \frac{1}{E \left(\frac{\left(\frac{-1}{2} (\beta_1 e^{-\beta_1 t_i} + \beta_2 e^{-\beta_2 t_i}) + (\beta_1 + \beta_2) e^{-(\beta_1 + \beta_2) t_i} \right)^2}{g_2(t_i; \Theta)} \right)} \right) \\ \hat{\beta}_1 &\sim AN \left(\beta_1, \frac{1}{E \left(\frac{\left(\left(\frac{1-\delta}{2} e^{-\beta_1 t_i} + \delta e^{-(\beta_1 + \beta_2) t_i} \right)^2 - \left(\frac{1-\delta}{2} \right)^2 (2 - \beta_1 t_i) \beta_2 t_i e^{-(\beta_1 + \beta_2) t_i} - \frac{1-\delta}{2} \delta (2 - \beta_1 t_i - \beta_2 t_i) \beta_2 t_i e^{-(\beta_1 + \beta_2) t_i} \right)}{\left(g_2(t_i; \Theta) \right)^2} \right)} \right) \\ \hat{\beta}_2 &\sim AN \left(\beta_2, \frac{1}{E \left(\frac{\left(\left(\frac{1-\delta}{2} e^{-\beta_2 t_i} + \delta e^{-(\beta_1 + \beta_2) t_i} \right)^2 - \left(\frac{1-\delta}{2} \right)^2 (2 - \beta_2 t_i) \beta_1 t_i e^{-(\beta_1 + \beta_2) t_i} - \frac{1-\delta}{2} \delta (2 - \beta_1 t_i - \beta_2 t_i) \beta_1 t_i e^{-(2\beta_1 + \beta_2) t_i} \right)}{\left(g_2(t_i; \Theta) \right)^2} \right)} \right) \end{aligned}$$

dır. δ, β_1 ve β_2 parametreleri için yaklaşık olarak $100(1 - \gamma)\%$ güven aralıkları sırasıyla aşağıdaki gibidir.

$$\begin{aligned} & \left(\hat{\delta} - z_{1-\frac{\gamma}{2}} \sqrt{I_{\delta\delta}^{-1}}, \hat{\delta} + z_{1-\frac{\gamma}{2}} \sqrt{I_{\delta\delta}^{-1}} \right), \quad \left(\hat{\beta}_1 - z_{1-\frac{\gamma}{2}} \sqrt{I_{\beta_1\beta_1}^{-1}}, \hat{\beta}_1 + z_{1-\frac{\gamma}{2}} \sqrt{I_{\beta_1\beta_1}^{-1}} \right), \\ & \left(\hat{\beta}_2 - z_{1-\frac{\gamma}{2}} \sqrt{I_{\beta_2\beta_2}^{-1}}, \hat{\beta}_2 + z_{1-\frac{\gamma}{2}} \sqrt{I_{\beta_2\beta_2}^{-1}} \right). \end{aligned}$$

3.2.9 G_2 – dağılımın özel durumu için Rényi entropisi

(3.18) ve (3.20) denklemlerinde tanımlanan olasılık yoğunluk fonksiyonu ve önerilen dağılımın genel durumu için elde edilen Rényi entropi göz önüne alınsın, genelleştirilmiş Binom teoremini uygulayarak,

$$\begin{aligned} (g_2(t; \Theta))^\rho &= \sum_{j=0}^{\infty} \binom{\rho}{j} \left(\frac{1-\delta}{2} (\beta_1 e^{-\beta_1 t} + \beta_2 e^{-\beta_2 t}) \right)^{\rho-j} (\delta(\beta_1 + \beta_2) e^{-(\beta_1 + \beta_2)t})^j \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2} \right)^{\rho-j} \binom{\rho}{j} (1-\delta)^{\rho-j} \delta^j \left(\sum_{k=0}^{\infty} \binom{\rho-j}{k} (\beta_1 e^{-\beta_1 t})^{\rho-j-k} (\beta_2 e^{-\beta_2 t})^k \right) (\beta_1 \\ &\quad + \beta_2)^j e^{-j(\beta_1 + \beta_2)t} \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2} \right)^{\rho-j} \binom{\rho}{j} \binom{\rho-j}{k} (1-\delta)^{\rho-j} \delta^j \beta_1^{\rho-j-k} \beta_2^k (\beta_1 \\ &\quad + \beta_2)^j e^{-(\rho-j-k)\beta_1 t} e^{-k\beta_2 t} e^{-j(\beta_1 + \beta_2)t} \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2} \right)^{\rho-j} \binom{\rho}{j} \binom{\rho-j}{k} (1-\delta)^{\rho-j} \delta^j \beta_1^{\rho-j-k} \beta_2^k (\beta_1 \\ &\quad + \beta_2)^j e^{-((\rho-k)\beta_1 + (k+j)\beta_2)t}. \end{aligned}$$

açılımı verilir. Rényi entropi ise,

$$I_\rho(T) = \frac{1}{1-\rho} \log \left[\sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2} \right)^{\rho-j} \binom{\rho}{j} \binom{\rho-j}{k} (1-\delta)^{\rho-j} \delta^j \frac{\beta_1^{\rho-j-k} \beta_2^k (\beta_1 + \beta_2)^j}{(\rho-k)\beta_1 + (k+j)\beta_2} \right].$$

biçiminde hesaplanır.

3.2.10 G_2 – dağılımının özel durumu için sıra istatistikleri

(3.19) ve (3.20) de önerilen olasılık yoğunluk fonksiyonu ve dağılım fonksiyonu dikkate alındığında, $T_1, T_2, \dots, T_n$ rasgele değişkenlerin sıra istatistikleri $X_{1:n} \leq X_{2:n} \leq \dots \leq X_{n:n}$ olmak üzere, $X_{j:n}$ yani j . sıra istatistiğinin olasılık yoğunluk fonksiyonu, $j = 1, 2, \dots, n$ için;

$$\begin{aligned} h_{j:n}(t) &= \frac{n!}{(j-1)!(n-j)!} \left(\frac{1-\delta}{2} (\beta_1 e^{-\beta_1 t} + \beta_2 e^{-\beta_2 t}) + \delta(\beta_1 + \beta_2) e^{-(\beta_1 + \beta_2)t} \right) \\ &\quad \times \left(1 - \frac{1-\delta}{2} (e^{-\beta_1 t} + e^{-\beta_2 t}) - \delta e^{-(\beta_1 + \beta_2)t} \right)^{j-1} \\ &\quad \times \left(\frac{1-\delta}{2} (e^{-\beta_1 t} + e^{-\beta_2 t}) + \delta e^{-(\beta_1 + \beta_2)t} \right)^{n-j} \end{aligned}$$

olarak bulunur. Böylece, $X_{1:n}$ ve $X_{n:n}$ nin olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$\begin{aligned} h_{1:n}(t) &= n \left(\frac{1-\delta}{2} (\beta_1 e^{-\beta_1 t} + \beta_2 e^{-\beta_2 t}) + \delta(\beta_1 + \beta_2) e^{-(\beta_1 + \beta_2)t} \right) \\ &\quad \times \left(\frac{1-\delta}{2} (e^{-\beta_1 t} + e^{-\beta_2 t}) + \delta e^{-(\beta_1 + \beta_2)t} \right)^{n-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h_{n:n}(t) &= n \left(\frac{1-\delta}{2} (\beta_1 e^{-\beta_1 t} + \beta_2 e^{-\beta_2 t}) + \delta(\beta_1 + \beta_2) e^{-(\beta_1 + \beta_2)t} \right) \\ &\quad \times \left(1 - \frac{1-\delta}{2} (e^{-\beta_1 t} + e^{-\beta_2 t}) - \delta e^{-(\beta_1 + \beta_2)t} \right)^{j-1} \end{aligned}$$

olarak bulunuyor. $\delta = 1$ için, $(\beta_1 + \beta_2)$ parametresine sahip üstel dağılımın sıra istatistiğini verir.

3.3 Bağımlı, Aynı Marjinallere Sahip İki Bileşenli Sistemler ile Önerilen Dağılım

Önceki alt bölümlerde bağımsız rasgele değişkenler ele alınarak tek boyutlu dağılım elde edildi, burada ise tek boyutlu dağılım bağımlılık yapısı altında yani sistemin parçalarını oluşturan bileşenler bağımlı alınarak elde edilecektir. Bileşenler bağımlı olarak alındığında bu bileşenler ortak dağılıma sahip olacaklar. Yani burada iki boyutlu dağılım yardımıyla tek boyutlu bir dağılım elde edilecektir. Burada şunu belirtmeliyim ki iki boyutlu dağılımlarda $t_1 = t_2$ alındığı zaman tek boyutlu bir dağılım elde etmek mümkündür ve bu yöntem uygulanmıştır.

Bu alt bölümde yeni tek boyutlu dağılım elde etmek için bileşenlerin ömürleri bağımlı ve aynı marjinal dağılımlara sahip olarak alınmaktadır, böylece seri ve paralel sistemin başarısızlık olasılıkları,

$$H_{1:2}(t) = F_{T_1}(t) + F_{T_2}(t) - F_{T_1, T_2}(t, t), \quad H_{2:2}(t) = F_{T_1, T_2}(t, t),$$

olarak yazılır. T_1 ve T_2 aynı marjinallere sahip, sürekli ve birbirleri ile bağımlı iki rasgele değişken olmak üzere, $X_{1:2} \leq T_i \leq X_{2:2}$ sıralaması geçerlidir, yani $F_{T_1}(t) = F_{T_2}(t) = F_{T_i}(t)$ dır. Böylece,

$$F_{T_1, T_2}(t, t) \leq F_{T_i}(t) \leq 2F_{T_i}(t) - F_{T_1, T_2}(t, t)$$

sıralaması geçerlidir. Son eşitsizlikte $F_{T_i}(t)$ dağılımının alt ve üst sınırına ağırlık vererek dağılım fonksiyonu,

$$\begin{aligned} G(t) &= \lambda H_{1:2}(t) + (1 - \lambda) H_{2:2}(t) \\ &= \lambda (2F_{T_i}(t) - F_{T_1, T_2}(t, t)) + (1 - \lambda) F_{T_1, T_2}(t, t) \\ &= 2\lambda F_{T_i}(t) + (1 - 2\lambda) F_{T_1, T_2}(t, t), \end{aligned} \tag{3.26}$$

şeklinde yazılır. Burada λ , $[0,1]$ aralığında değer alır. $\delta = 2\lambda - 1 \in [-1,1]$ dönüşümü yapılır ise, $|\delta| \leq 1$ için,

$$\begin{aligned} G_3(t; \delta) &= (1 + \delta)F_{T_i}(t) - \delta F_{T_1, T_2}(t, t), \\ &= (1 - \delta) \left(1 - \bar{F}_{T_i}(t)\right) + \delta \left(1 - \bar{F}_{T_1, T_2}(t, t)\right) \\ &= \frac{1 + \delta}{2} H_{1:2}(t) + \frac{1 - \delta}{2} H_{2:2}(t). \end{aligned} \quad (3.27)$$

elde edilir. (3.27) ifadesinin birinci denkleminde $F_{T_1, T_2}(t, t) = \left(F_{T_i}(t)\right)^2$ olarak alınırsa, son yıllarda çok popüler hale gelen Shaw ve Buckley (2007) 'in ikinci dereceden dönüşüm yöntemiyle oluşturulan dönüştürülmüş dağılımı elde edilir. Burada $\delta = 0$ iken, temel dağılım yani $F_{T_i}(t)$ elde edilir. $\delta = -1$ iken, bağımlı iki rasgele değişkenin ortak dağılım fonksiyonu $\left(F_{T_1, T_2}(t, t)\right)$ elde edilir ve $\delta = 1$ için T_1 ve T_2 rasgele değişkenlerinin minimumunun dağılımı elde edilir.

Teorem 3.1 T rasgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu aşağıdaki gibidir,

$$g_3(t; \delta) = (1 - \delta)f_{T_i}(t) + \delta \bar{F}_{T_1, T_2}(t, t)(\psi_1(t) + \psi_2(t)). \quad (3.28)$$

burada ψ_1 ve ψ_2 , her iki bileşenin de t zamanında yaşadığı bilindiğinde, ilgili bileşenlerin başarısızlık oranlarını gösterir.

İspat. Önerilen rasgele değişkenin olasılık yoğunluk fonksiyonu, (3.27)'de tanımlanan dağılım fonksiyonunun türevi alınarak,

$$g_3(t; \delta) = (1 - \delta) \left(\frac{-d}{dt} \bar{F}_{T_i}(t) \right) + \delta \left(\frac{-d}{dt} \bar{F}_{T_1, T_2}(t, t) \right)$$

şeklinde yazılır. Ayrıca,

$$\begin{aligned}
\frac{-d}{dt} \bar{F}_{T_1, T_2}(t, t) &= \frac{-d}{dt} \int_t^\infty \int_t^\infty f_{T_1, T_2}(u, v) dv du = - \int_t^\infty f_{T_1, T_2}(u, t) du - \int_t^\infty f_{T_1, T_2}(t, v) dv \\
&= -f_{T_2}(t)P(T_1 \leq t | T_2 = t) - f_{T_1}(t)P(T_2 \leq t | T_1 = t) \\
&= \frac{-d}{dt_2} \bar{F}_{T_1, T_2}(t, t_2) \Big|_{t_2=t} + \frac{-d}{dt_1} \bar{F}_{T_1, T_2}(t_1, t) \Big|_{t_1=t} \\
&= \psi_2(t) \bar{F}_{T_1, T_2}(t, t) + \psi_1(t) \bar{F}_{T_1, T_2}(t, t),
\end{aligned}$$

olarak elde edilir ki burada ψ_1 ve ψ_2 , her iki bileşenin de t zamanında yaşadığı bilindiğinde, ilgili bileşenlerin başarısızlık oranlarını gösterilir ve aşağıdaki şekildedir,

$$\psi_1(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0^+} \frac{P(t < T_1 \leq t + \Delta t | T_1 > t, T_2 > t)}{\Delta t} = \frac{\frac{-d}{dt_1} \bar{F}_{T_1, T_2}(t_1, t) \Big|_{t_1=t}}{\bar{F}_{T_1, T_2}(t, t)}, \quad t \geq 0$$

$$\psi_2(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0^+} \frac{P(t < T_2 \leq t + \Delta t | T_1 > t, T_2 > t)}{\Delta t} = \frac{\frac{-d}{dt_2} \bar{F}_{T_1, T_2}(t, t_2) \Big|_{t_2=t}}{\bar{F}_{T_1, T_2}(t, t)}. \quad t \geq 0$$

(Shaked ve Shanthikumar 2015, Johnson ve Kotz 1975).

3.3.1 G_3 – dağılımının yaşam fonksiyonu ve bozulma oranı fonksiyonu

(3.27) ifadesinde elde edilen dağılım ele alınarak yaşam fonksiyonu,

$$\begin{aligned}
\bar{G}_3(t; \delta) &= 1 - (1 + \delta)F_{T_i}(t) + \delta F_{T_1, T_2}(t, t) \\
&= (1 - \delta)\bar{F}_{T_i}(t) + \delta \bar{F}_{T_1, T_2}(t, t).
\end{aligned}$$

olarak yazılır. Buradan elde edilen dağılımın bozulma oranı fonksiyonu,

$$\begin{aligned}
r_{G_3}(t; \delta) &= \frac{(1 - \delta)r_{F_i}(t)\bar{F}_{T_i}(t) + \delta\bar{F}_{T_1, T_2}(t, t)(\psi_1(t) + \psi_2(t))}{(1 - \delta)\bar{F}_{T_i}(t) + \delta\bar{F}_{T_1, T_2}(t, t)}, \\
&= \psi_1(t) + \psi_2(t) + \frac{(1 - \delta)\bar{F}_{T_i}(t)(r_{F_i}(t) - (\psi_1(t) + \psi_2(t)))}{(1 - \delta)\bar{F}_{T_i}(t) + \delta\bar{F}_{T_1, T_2}(t, t)} \\
&= w_1(t)r_{F_1}(t) + w_2(t)(\psi_1(t) + \psi_2(t)),
\end{aligned} \tag{3.29}$$

olarak elde edilir. Burada $w_1(t) = ((1 - \delta)\bar{F}_{T_i}(t)) / ((1 - \delta)\bar{F}_{T_i}(t) + \delta\bar{F}_{T_1, T_2}(t, t))$ ve $w_1(t) + w_2(t) = 1$ dir. Böylece, bozulma oranı fonksiyonu, T rasgele değişkeninin bozulma oranı fonksiyonunun ve koşullu bozulma oranlarının toplamalarının, ağırlıklı bir toplamı olarak yazılmıştır.

3.3.2 G_3 – dağılımından rasgele sayı üretme

İlk olarak önceki bölümde tanımlanan dağılım fonksiyonunun, $X_{1:2} = \min\{T_1, T_2\}$ ve $X_{2:2} = \max\{T_1, T_2\}$ dağılım fonksiyonlarının bir karışımı olarak,

$$G_1(t; \delta) = \frac{1 + \delta}{2} H_{1:2}(t) + \frac{1 - \delta}{2} H_{2:2}(t)$$

şeklinde yazıldığı hatırlansın. Karma yöntem ile sayı üretmek için aşağıdaki adımlar takip edilmelidir.

Algoritma	Karma yöntem ile rasgele sayı üretme
Adım 1:	Bağımsız olarak $t_1 \sim H_{1:2}$ den ve $t_2 \sim H_{2:2}$ den üret,
Adım 2:	U rasgele değişkenini düzgün (0,1) dağılımından üret,
Adım 3:	Eğer $u < \frac{1+\delta}{2}$ ise, o zaman $t = \min\{t_1, t_2\}$ den üret,
Adım 4:	Eğer $u > \frac{1-\delta}{2}$ ise, o zaman $t = \max\{t_1, t_2\}$ den üret.

3.3.3 G_3 – dağılımı için özel durum

T_1 ve T_2 rasgele değişkenleri β parametrelili üstel dağılıma sahip olsun. Ayrıca (T_1, T_2) , Gumbel dağılımına sahip iken, $|\delta| \leq 1$ için,

$$G_3(t; \Theta) = 1 - (1 - \delta)e^{-\beta t} - \delta e^{-(2\beta t + \theta t^2)}, \quad (3.30)$$

şeklindedir. $\Theta = \{(\delta, \beta, \theta) : -1 \leq \delta \leq 1, \beta > 0, \theta < \beta^2\}$ parametre uzayına sahip, dönüşümlü tek boyutlu dağılım fonksiyonu elde edilmiştir. (3.30) ifadesinde önerilen dağılım fonksiyonundan ve (3.24) de elde edilen olasılık yoğunluk fonksiyonundan,

$$\psi_1(t) = \frac{\left. \frac{-d}{dt_1} e^{-(\beta t_1 + \beta t + \theta t_1 t)} \right|_{t_1=t}}{e^{-(2\beta t + \theta t^2)}} = \beta + \theta t, \psi_2(t) = \beta + \theta t, \quad \theta \leq \beta^2$$

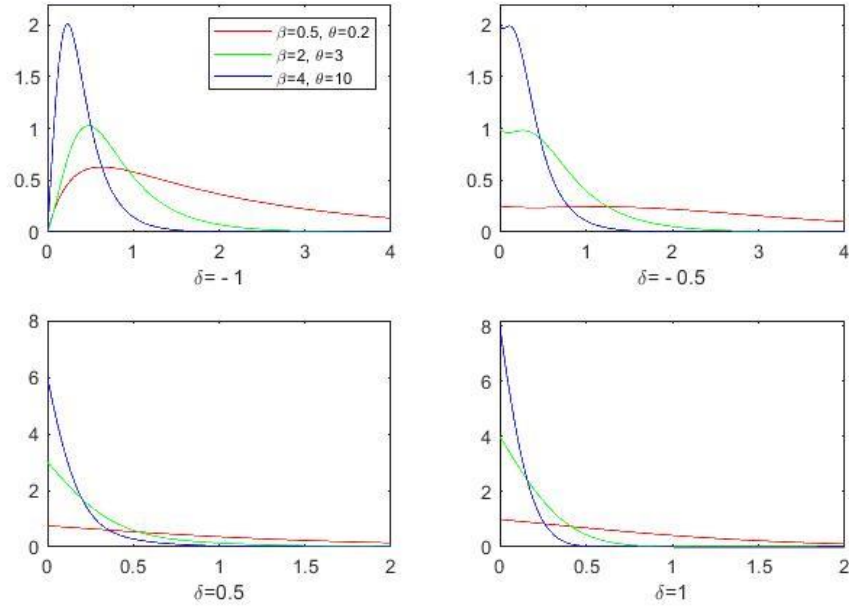
olarak elde edilir. Sonuç olarak, önerilen rasgele değişkenin olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$g_3(t; \Theta) = (1 - \delta)\beta e^{-\beta t} + 2\delta(\beta + \theta t)e^{-(2\beta t + \theta t^2)}, \quad t > 0, \beta > 0, 0 \leq \theta \leq \beta^2, \quad (3.31)$$

olarak bulunur. Önerilen olasılık yoğunluk fonksiyonu aşağıdaki gibi analiz edilir.

$$g'_3(t; \Theta) = -(1 - \delta)\beta^2 e^{-\beta t} - 4\delta(\beta + \theta t)^2 e^{-(2\beta t + \theta t^2)},$$

Bu türevli ifadeyi inceleyerek, $0 \leq \delta \leq 1$ olduğunda, $g'_3(t; \Theta) < 0$ elde edildiği açıktır ve olasılık yoğunluk fonksiyonu azalandır. Ayrıca, olasılık yoğunluk fonksiyonunun tek modlu olması için $-1 \leq \delta \leq 0$ olmalıdır ve olasılık yoğunluk fonksiyonunun grafiği aşağıdaki gibidir.



Şekil 3.11 G_3 – dağılımın olasılık yoğunluk fonksiyonu

Şekil 3.11’de görüldüğü gibi önerilen dağılımın olasılık yoğunluk fonksiyonu $\delta = -1$ için tek modlu olmaktadır.

3.3.4 G_3 – dağılımın özel durumu için matematiksel özellikleri

Dağılımın yaşam fonksiyonu,

$$\bar{G}_3(t; \theta) = (1 - \delta)e^{-\beta t} + \delta e^{-(2\beta t + \theta t^2)}.$$

olarak elde edilir. Bozulma oranı fonksiyonu ise,

$$\begin{aligned} r_{G_3}(t; \theta) &= \frac{(1 - \delta)\beta e^{-\beta t} + 2\delta(\beta + \theta t)e^{-(2\beta t + \theta t^2)}}{(1 - \delta)e^{-\beta t} + \delta e^{-(2\beta t + \theta t^2)}} \\ &= \beta + \frac{\delta(\beta + 2\theta t)e^{-(2\beta t + \theta t^2)}}{(1 - \delta)e^{-\beta t} + \delta e^{-(2\beta t + \theta t^2)}}, \end{aligned} \quad (3.32)$$

biçiminde yazılır. Bu bozulma oranı fonksiyonu incelenecektir.

$$r'_{G_3}(t; \Theta) = \frac{-\delta(1-\delta)(\beta + 2\theta t)^2 e^{-(3\beta t + \theta t^2)}}{\left((1-\delta)e^{-\beta t} + \delta e^{-(2\beta t + \theta t^2)}\right)^2}.$$

Yukarıdaki türevden açıkça görüldüğü gibi, $-1 \leq \delta \leq 0$ olduğunda bozulma oranı fonksiyonu artandır, yani $r'_{G_3}(t; \Theta) \geq 0$. $0 \leq \delta \leq 1$ olduğunda bozulma oranı fonksiyonu azalandır ($r'_{G_3}(t; \Theta) \leq 0$). Burada bozulma oranı fonksiyonunun dönüşüm parametresinin uç noktalarında aldığı değerler aşağıda verilmiştir.

$$r_{G_3}(0; \Theta) = (1 + \delta)\beta$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} r_{G_3}(t; \Theta) = \begin{cases} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{(1-\delta)\beta + \delta(2\beta + 2\theta t)e^{-(\beta t + \theta t^2)}}{(1-\delta) + \delta e^{-(\beta t + \theta t^2)}} = \beta \\ \lim_{t \rightarrow \infty} (2\beta + 2\theta t) = \infty \end{cases}$$

Ayrıca, bozulma oranı fonksiyonu parametrenin uç değerlerinde aşağıdaki gibi elde edilir,

- (i) $\delta = 0$ iken, bu bozulma oranı fonksiyonu üstel dağılımın bozulma oranı fonksiyonu ile aynıdır;

$$r_{G_3}(t; \Theta) = \beta$$

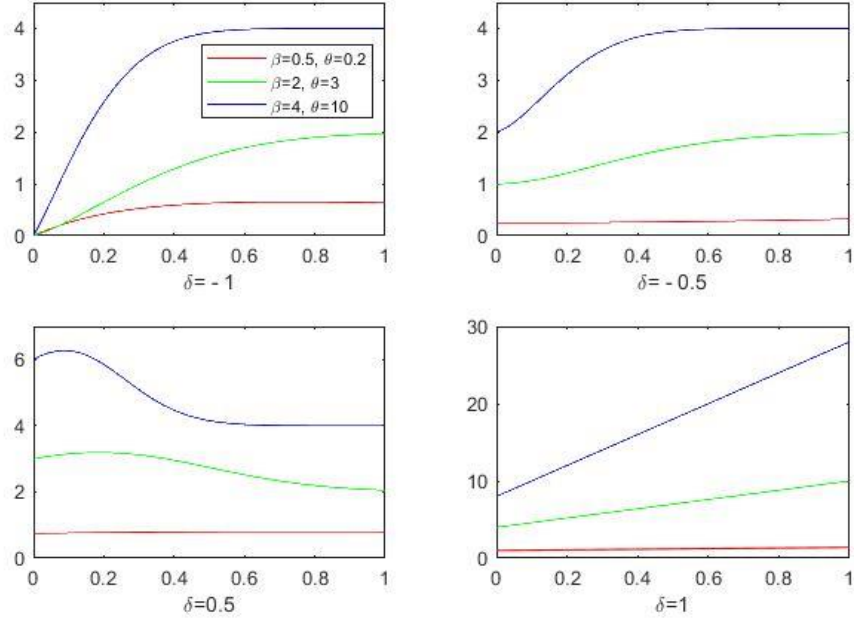
- (ii) $\delta = 1$ iken, bu bozulma oranı fonksiyonu lineer bozulma oranı fonksiyonudur;

$$r_{G_3}(t; \Theta) = 2(\beta + \theta t)$$

- (iii) $\theta = 0$ iken, bu bozulma oranı fonksiyonu dönüştürülmüş üstel dağılımın bozulma oranı fonksiyonu ile aynıdır;

$$r_{G_3}(t; \Theta) = \frac{(1-\delta)\beta e^{-\beta t} + 2\delta\beta}{(1-\delta)e^{-\beta t} + \delta}.$$

Önerilen bozulma oran fonksiyonun grafiği aşağıdaki gibidir.



Şekil 3.12 G_3 – dağılımın bozulma oranı fonksiyonu

Şekil 3.12’de önerilen dağılımın bozulma oranı fonksiyonu farklı parametreler için gösterilmiştir. Görüldüğü gibi, negatif δ değerleri için bozulma oranı fonksiyonu artan ve pozitif δ değerleri için azalandır. Ortalama kalan ömür fonksiyonu,

$$\begin{aligned}
 m(t; \theta) &= \frac{\int_t^\infty (1 - \delta)e^{-\beta k} + \delta e^{-(2\beta k + \theta k^2)} dk}{(1 - \delta)e^{-\beta t} + \delta e^{-(2\beta t + \theta t^2)}} \\
 &= \frac{(1 - \delta) \frac{-1}{\beta} e^{-\beta k} + \frac{\delta}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\theta}} e^{\frac{\beta^2}{\theta}} \left(\operatorname{erf} \left(\frac{\beta + \theta k}{\sqrt{\theta}} \right) \right) \Big|_t^\infty}{(1 - \delta)e^{-\beta t} + \delta e^{-(2\beta t + \theta t^2)}} \\
 &= \frac{(1 - \delta) \frac{1}{\beta} e^{-\beta t} + \frac{\delta}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\theta}} e^{\frac{\beta^2}{\theta}} \operatorname{erfc} \left(\frac{\beta + \theta t}{\sqrt{\theta}} \right)}{(1 - \delta)e^{-\beta t} + \delta e^{-(2\beta t + \theta t^2)}}.
 \end{aligned}$$

dır. Ortalama kalan ömür fonksiyonu aşağıdaki özelliklere sahiptir:

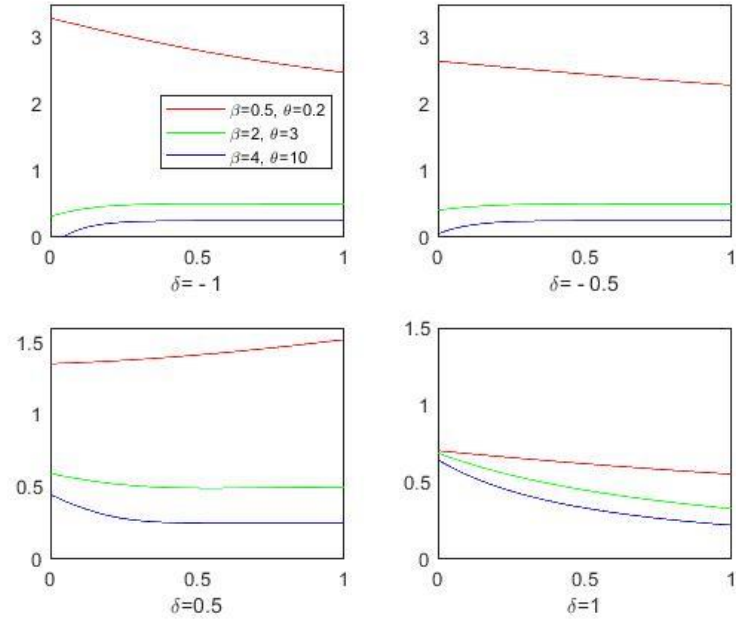
- (i) $\delta = 0$ iken, önerilen dağılımın ortalama kalan ömür fonksiyonu üstel dağılımın ortalama kalan ömür fonksiyonu ile aynıdır;

$$m(t; \Theta) = \frac{1}{\beta}$$

- (ii) $\delta = 1$ iken, ortalama kalan ömür fonksiyonu aşağıdaki gibidir;

$$m(t; \Theta) = -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\theta}} \operatorname{erfc} \left(\frac{\beta + \theta t}{\sqrt{\theta}} \right) e^{\frac{\beta^2}{\theta} + 2\beta t + \theta t^2},$$

Tanımlanan ortalama kalan ömür fonksiyonu bazı parametre değerleri için aşağıda verilmiştir.



Şekil 3.13 G_3 – dağılımın ortalama kalan ömür fonksiyonu

3.3.5 G_3 – dağılımın özel durumu için moment çıkaran fonksiyonu, momentleri, çarpıklık ve basıklık katsayıları

Bu rasgele değişkenin moment çıkaran fonksiyonu,

$$M_T(k) = (1 - \delta) \frac{\beta}{\beta - k} + \delta \left(1 + \frac{k}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\theta}} e^{\frac{(2\beta - k)^2}{4\theta}} \operatorname{erfc} \left(\frac{2\beta - k}{\sqrt{\theta}} \right) \right)$$

olarak bulunmuştur. Çarpıklık ve basıklık katsayıların elde edilmesi için ilk dört moment ve varyans aşağıdaki şekildedir.

$$E(T) = (1 - \delta) \frac{1}{\beta} - \delta \xi(\beta, \theta)$$

$$E(T^2) = (1 - \delta) \frac{2}{\beta^2} + \delta \left(\frac{1}{\theta} - \frac{\beta}{\theta} \xi(\beta, \theta) \right)$$

$$E(T^3) = (1 - \delta) \frac{6}{\beta^3} + \delta \left(\frac{6\beta^2 + 3\theta}{4\theta^2} \xi(\beta, \theta) - \frac{3\beta}{2\theta^2} \right)$$

$$E(T^4) = (1 - \delta) \frac{24}{\beta^4} + \delta \left(\frac{-2\beta^3 - 3\beta\theta}{\theta^3} \xi(\beta, \theta) + \frac{2\beta^2}{\theta^3} + \frac{2}{\theta^2} \right)$$

$$\operatorname{Var}(T) = (1 - \delta) \frac{2}{\beta^2} + \delta \left(\frac{1}{\theta} - \frac{\beta}{\theta} \xi(\beta, \theta) \right) - \left((1 - \delta) \frac{1}{\beta} - \frac{\delta}{2} \xi(\beta, \theta) \right)^2$$

Bu dağılımın çarpıklık katsayısı;

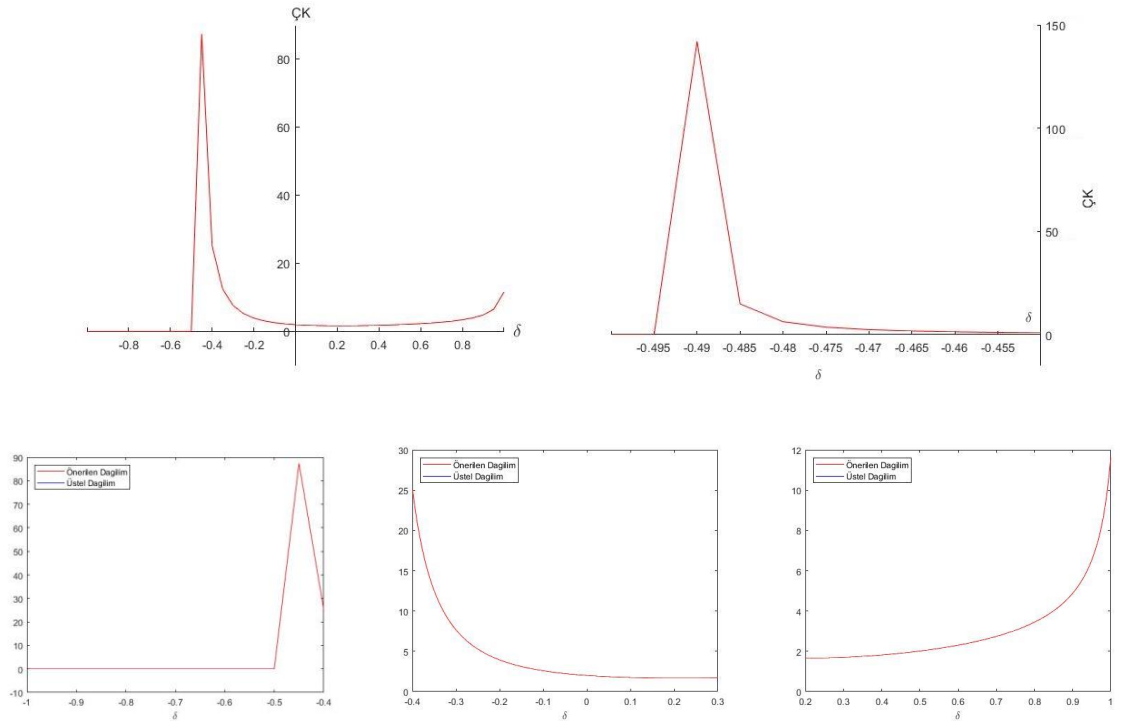
$$\zeta_K = \frac{1}{(\operatorname{Var}(T))^{\frac{3}{2}}} \left(\begin{aligned} & (1 - \delta) \frac{6}{\beta^3} + \delta \left(\frac{6\beta^2 + 3\theta}{4\theta^2} \xi(\beta, \theta) - \frac{3\beta}{2\theta^2} \right) \\ & - 3 \left((1 - \delta) \frac{1}{\beta} - \frac{\delta}{2} \xi(\beta, \theta) \right) \left((1 - \delta) \frac{2}{\beta^2} + \delta \left(\frac{1}{\theta} - \frac{\beta}{\theta} \xi(\beta, \theta) \right) \right) \\ & + 2 \left((1 - \delta) \frac{1}{\beta} - \frac{\delta}{2} \xi(\beta, \theta) \right)^3 \end{aligned} \right)$$

olarak elde edilmiştir. Burada $-1 \leq \delta \leq 1$ aralığında değer almaktadır, böylece elde edilen çarpıklık katsayısının δ parametresinin uç noktalarda aldığı değerler,

$$\zeta K = \begin{cases} 0, & \delta = -1 \\ 2, & \delta = 0 \\ 11.62, & \delta = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{Maksimum Noktası: } \delta = -0.492 \rightarrow \zeta K = 58067.389 \\ \text{Minimum Noktası: } \delta = 0.215 \rightarrow \zeta K = 1.668 \end{cases}$$

olarak hesaplanmıştır ve grafiği aşağıda verilmiştir.



Şekil 3.14 G_3 – dağılımının çarpıklık katsayısı ile üstel dağılımının çarpıklık katsayısının karşılaştırılması

Çarpıklık katsayı grafiğinden de görüldüğü gibi, önerilen dağılımın çarpıklık değeri her δ için pozitifdir, yani dağılımın kütlesi grafiğin sol tarafında toplanmıştır ve dağılım sağa çarpıktır.

Dağılımın basıklık katsayısı ise,

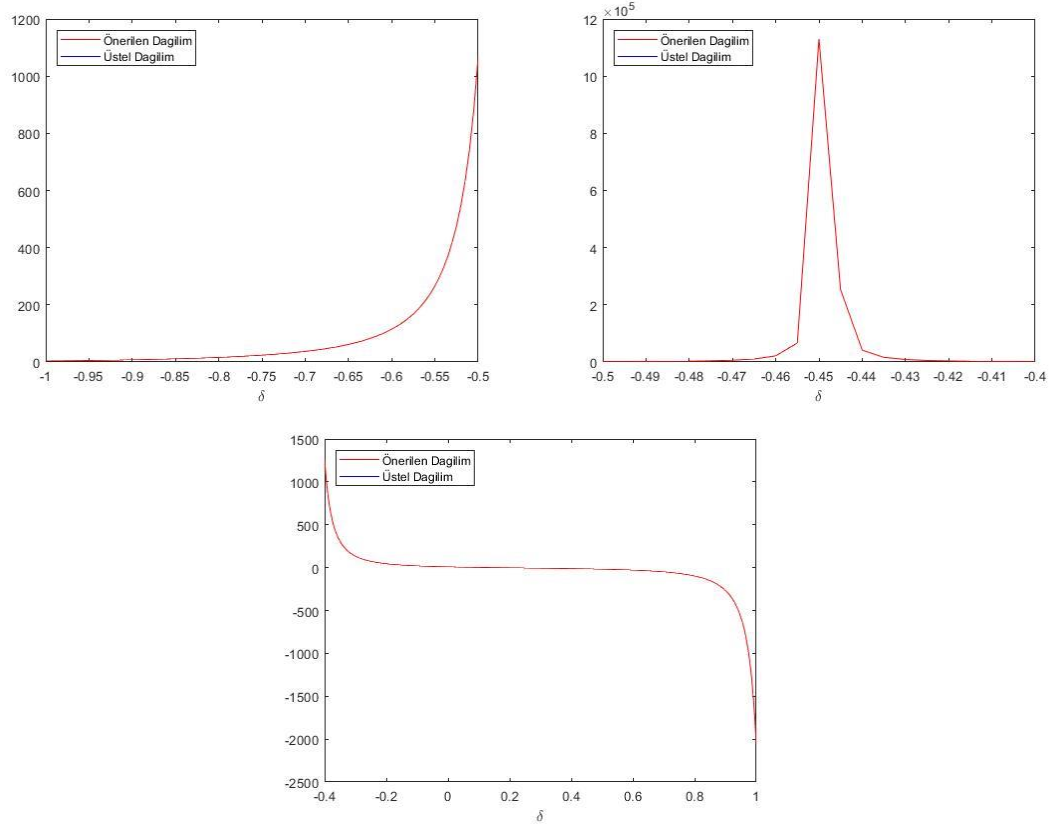
$$BK = \frac{1}{(Var(T))^2} \begin{pmatrix} (1-\delta) \frac{24}{\beta^4} + \delta \left(\frac{-2\beta^3 - 3\beta\theta}{\theta^3} \xi(\beta, \theta) + \frac{2\beta^2}{\theta^3} + \frac{2}{\theta^2} \right) \\ -4 \left((1-\delta) \frac{1}{\beta} - \frac{\delta}{2} \xi(\beta, \theta) \right) \left((1-\delta) \frac{6}{\beta^3} + \delta \left(\frac{6\beta^2 + 3\theta}{4\theta^2} \xi(\beta, \theta) - \frac{3\beta}{2\theta^2} \right) \right) \\ +6 \left((1-\delta) \frac{1}{\beta} - \frac{\delta}{2} \xi(\beta, \theta) \right)^2 \left((1-\delta) \frac{2}{\beta^2} + \delta \left(\frac{1}{\theta} - \frac{\beta}{\theta} \xi(\beta, \theta) \right) \right) \\ -3 \left((1-\delta) \frac{1}{\beta} - \frac{\delta}{2} \xi(\beta, \theta) \right)^4 \end{pmatrix}$$

olarak hesaplanır. Elde edilen basıklık katsayısının δ parametresinin uç değerlerinde aldığı değerler ise,

$$BK = \begin{cases} 3.5104, & \delta = -1 \\ 9, & \delta = 0 \\ -2062.2, & \delta = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{Maksimum Noktası: } \delta = -0.448 \rightarrow BK = 1.1307e + 07 \\ \text{Minimum Noktası: } \delta = 1 \rightarrow BK = -2062.2 \end{cases}$$

dır ve grafiği aşağıda verilmiştir.



Şekil 3.15 G_3 – dağılımın basıklık katsayısı ile üstel dağılımın basıklık katsayısının karşılaştırılması

Şekil 5.7 de görüldüğü gibi önerilen dağılımın basıklık katsayısı negatif δ 'lar için pozitifdir, yani dağılımın grafiği ortalama değerinde toplanıp daha sivri olur ve dağılım eğrisi normal dağılıma göre daha dik olacaktır. Basıklık katsayısı pozitif δ 'lar için negatif değerler verildiği görülmektedir, yani dağılımın grafiği ortalama etrafında daha basık olup daha büyük varyansa sahiptir. Eğri normal dağılıma göre daha basıktır.

3.3.6 G_3 – dağılımın özel durumu için en çok olabilirlik tahmini ve Fisher bilgi matrisi

$(t_1, t_2, \dots, t_n)$ önerilen dağılımdan gözlenen değerler olsun. $\theta = \{\delta, \beta, \theta\}$ parametre uzayı

için olabilirlik fonksiyonu,

$$L(\Theta; t_i) = \prod_{i=1}^n \left((1 - \delta)\beta e^{-\beta t_i} + 2\delta(\beta + \theta t_i)e^{-(2\beta t_i + \theta t_i^2)} \right).$$

olarak yazılır. Log-olabilirlik fonksiyonu β, θ ve δ parametrelerine göre aşağıdaki gibi ayrıt edilir.

$$\frac{\partial \ell}{\partial \delta} = \sum_{i=1}^n \frac{-\beta e^{-\beta t_i} + 2(\beta + \theta t_i)e^{-(2\beta t_i + \theta t_i^2)}}{g_3(t_i; \Theta)}, \quad (3.33)$$

$$\frac{\partial \ell}{\partial \beta} = \sum_{i=1}^n \frac{-(1 - \delta)\beta^2 e^{-\beta t_i} + 2\delta(1 - 2\beta t_i - 2\theta t_i^2)e^{-(2\beta t_i + \theta t_i^2)}}{g_3(t_i; \Theta)}, \quad (3.34)$$

$$\frac{\partial \ell}{\partial \theta} = \sum_{i=1}^n \frac{2\delta t_i(1 - \beta t_i - \theta t_i^2)e^{-(2\beta t_i + \theta t_i^2)}}{g_3(t_i; \Theta)}. \quad (3.35)$$

$\hat{\delta}, \hat{\beta}$ ve $\hat{\theta}$ parametrelerinin en çok olabilirlik tahmin edicileri, (3.33), (3.34) ve (3.35) denklemlerini sıfıra eşitleyerek ve eşitlikleri aynı anda çözerek elde edilir. Bu üç parametre için, Fisher bilgi matrisi elemanlarını elde etmek için log-olabilirlik fonksiyonunun parametrelere göre ikinci dereceden türevleri,

$$I_{\delta\delta} = \frac{\partial^2 \ell}{\partial \delta^2} = - \sum_{i=1}^n \left(\frac{-\beta e^{-\beta t_i} + 2(\beta + \theta t_i)e^{-(2\beta t_i + \theta t_i^2)}}{g_3(t_i; \Theta)} \right)^2,$$

$$I_{\beta\beta} = \frac{\partial^2 \ell}{\partial \beta^2} = - \sum_{i=1}^n \frac{\left((1 - \delta)e^{-\beta t_i} + 2\delta e^{-(2\beta t_i + \theta t_i^2)} \right)^2 - 2\delta(1 - \delta)(\beta\theta t_i + (\beta^2 + 2\theta))t_i^2 e^{-(3\beta t_i + \theta t_i^2)}}{(g_3(t_i; \Theta))^2},$$

$$I_{\theta\theta} = \frac{\partial^2 \ell}{\partial \theta^2} = - \sum_{i=1}^n \frac{2\delta(1-\delta)\beta t_i^3(2-\beta t_i-\theta t_i^2)e^{-(3\beta t_i+\theta t_i^2)} + 4\delta^2 t_i^2 e^{-2(2\beta t_i+\theta t_i^2)}}{(g_3(t_i; \Theta))^2},$$

$$I_{\delta\beta} = I_{\beta\delta} = \frac{\partial^2 \ell}{\partial \delta \partial \beta} = - \sum_{i=1}^n \frac{2((\beta + \theta) + \beta t_i)t_i e^{-(3\beta t_i+\theta t_i^2)}}{(g_3(t_i; \Theta))^2},$$

$$I_{\delta\theta} = I_{\theta\delta} = \frac{\partial^2 \ell}{\partial \delta \partial \theta} = - \sum_{i=1}^n \frac{-2\beta t_i(1-\beta t_i-\theta t_i^2)e^{-(3\beta t_i+\theta t_i^2)}}{(g_3(t_i; \Theta))^2}.$$

$$\begin{aligned} I_{\beta\theta} &= I_{\theta\beta} = \frac{\partial^2 \ell}{\partial \theta \partial \beta} \\ &= - \sum_{i=1}^n \left(\frac{2\delta(1-\delta)t_i(1+\beta t_i-(\beta^2+\theta)t_i^2-\beta\theta t_i^3)e^{-(3\beta t_i+\theta t_i^2)} + 4\delta^2 t_i e^{-2(2\beta t_i+\theta t_i^2)}}{(g_3(t_i; \Theta))^2} \right), \end{aligned}$$

olarak elde edilir. Böylece, Θ parameter uzayı için örnek boyutu n olan,

$$I_n(\Theta) = -E \begin{pmatrix} I_{\delta\delta} & I_{\delta\beta} & I_{\delta\theta} \\ I_{\beta\delta} & I_{\beta\beta} & I_{\beta\theta} \\ I_{\theta\delta} & I_{\theta\beta} & I_{\theta\theta} \end{pmatrix}$$

biçiminde verilir. Böylece, Θ parametre uzayı için en çok olabilirlik tahmincisinin dağılımı, ortalaması Θ ve varyans-kovaryans matrisi $I_1^{-1}(\Theta)$ olan asimptotik normaldir. Yani,

$$\sqrt{n} \left(\begin{bmatrix} \hat{\delta} \\ \hat{\beta} \\ \hat{\theta} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \delta \\ \beta \\ \theta \end{bmatrix} \right) \xrightarrow{D} N \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, I_1^{-1}(\Theta) \right). \quad (3.36)$$

dır. Buradan parametreler için asimptotik normal dağılım ise,

$$\hat{\delta} \sim AN \left(\delta, \frac{1}{E \left(\frac{-\beta e^{-\beta t_1} + 2(\beta + \theta t_1) e^{-(2\beta t_1 + \theta t_1^2)}}{g_3(t_1; \Theta)} \right)^2} \right)$$

$$\hat{\beta} \sim AN \left(\beta, \frac{1}{E \left(\frac{\left(((1 - \delta) e^{-\beta t_1} + 2\delta e^{-(2\beta t_1 + \theta t_1^2)})^2 - 2\delta(1 - \delta)(\beta \theta t_1 + (\beta^2 + 2\theta)) t_1^2 e^{-(3\beta t_1 + \theta t_1^2)} \right)}{(g_3(t_1; \Theta))^2} \right)} \right)$$

$$\hat{\theta} \sim AN \left(\theta, \frac{1}{E \left(\frac{2\delta(1 - \delta)\beta t_1^3(2 - \beta t_1 - \theta t_1^2) e^{-(3\beta t_1 + \theta t_1^2)} + 4\delta^2 t_1^2 e^{-2(2\beta t_1 + \theta t_1^2)}}{(g_3(t_1; \Theta))^2} \right)} \right)$$

dır. δ, β ve θ parametreleri için yaklaşık olarak $100(1 - \gamma)\%$ güven aralıkları (3.36) deki yaklaşım yardımıyla sırasıyla,

$$\left(\hat{\delta} - z_{1-\frac{\gamma}{2}} \sqrt{I_{\delta\delta}^{-1}}, \hat{\delta} + z_{1-\frac{\gamma}{2}} \sqrt{I_{\delta\delta}^{-1}} \right), \quad \left(\hat{\beta} - z_{1-\frac{\gamma}{2}} \sqrt{I_{\beta\beta}^{-1}}, \hat{\beta} + z_{1-\frac{\gamma}{2}} \sqrt{I_{\beta\beta}^{-1}} \right),$$

$$\left(\hat{\theta} - z_{1-\frac{\gamma}{2}} \sqrt{I_{\theta\theta}^{-1}}, \hat{\theta} + z_{1-\frac{\gamma}{2}} \sqrt{I_{\theta\theta}^{-1}} \right),$$

dır. burada $z_{\frac{\gamma}{2}}$, standart normal dağılımın 100γ üst kantilidir.

3.3.7 G_3 – dağılımın özel durumu için Rényi entropisi

(3.31) ifadesinde tanımlanan olasılık yoğunluk fonksiyonu göz önüne alındığında, genelleştirilmiş Binom teoremini uygulayarak sonsuz seri açılımı,

$$\begin{aligned}
(g_3(t; \Theta))^\rho &= \sum_{j=0}^{\infty} \binom{\rho}{j} \left((1-\delta)\beta e^{-\beta t} \right)^{\rho-j} (\delta(2\beta + 2\theta t)e^{-(2\beta t + \theta t^2)})^j \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} \binom{\rho}{j} (1-\delta)^{\rho-j} \beta^{\rho-j} e^{-(\rho-j)\beta t} \delta^j (2\beta + 2\theta t)^j e^{-j(2\beta t + \theta t^2)} \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} \binom{\rho}{j} (1-\delta)^{\rho-j} \delta^j \beta^{\rho-j} (2\beta + 2\theta t)^j e^{-(\rho+j)\beta t - j\theta t^2}
\end{aligned}$$

olarak yazılır. Son denklemde, $e^{-(\rho+j)\beta t - j\theta t^2}$ ifadesi, $e^{-j\theta\left(t+\frac{(\rho+j)\beta}{2j\theta}\right)^2 + \frac{(\rho+j)^2\beta^2}{4j\theta}}$ olarak yazılabilir. Ayrıca, $(2\beta + 2\theta t)^j$ Binom serisi uygulanır ise,

$$\begin{aligned}
(g_3(t; \Theta))^\rho &= \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{l=0}^j \binom{\rho}{j} \binom{j}{l} (1-\delta)^{\rho-j} \delta^j 2^j \beta^{\rho-j} \beta^{j-l} \theta^l t^l e^{-j\theta\left(t+\frac{(\rho+j)\beta}{2j\theta}\right)^2 + \frac{(\rho+j)^2\beta^2}{4j\theta}} \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{l=0}^j \binom{\rho}{j} \binom{j}{l} (1-\delta)^{\rho-j} \delta^j 2^j \beta^{\rho-l} \theta^l e^{\frac{(\rho+j)^2\beta^2}{4j\theta}} t^l e^{-j\theta\left(t+\frac{(\rho+j)\beta}{2j\theta}\right)^2}
\end{aligned}$$

dır. Böylece, Rényi entropi,

$$I_\rho(T) = \frac{1}{1-\rho} \log \left[\sum_{j=0}^{\infty} \sum_{l=0}^j \binom{\rho}{j} \binom{j}{l} (1-\delta)^{\rho-j} \delta^j 2^j \beta^{\rho-l} \theta^l e^{\frac{(\rho+j)^2\beta^2}{4j\theta}} \int_0^\infty t^l e^{-j\theta\left(t+\frac{(\rho+j)\beta}{2j\theta}\right)^2} dt \right]$$

olarak yazılır. $z = j\theta\left(t + \frac{(\rho+j)\beta}{2j\theta}\right)^2$ dönüşümü yapıldığında son denklemde integral,

$$\int_0^\infty t^l e^{-j\theta\left(t+\frac{(\rho+j)\beta}{2j\theta}\right)^2} dt = \int_{\frac{(\rho+j)^2\beta^2}{4j\theta}}^\infty \frac{1}{2\sqrt{j\theta z}} \left(\sqrt{\frac{z}{j\theta}} - \frac{(\rho+j)\beta}{2j\theta} \right)^l e^{-z} dz, \quad (3.37)$$

biçiminde yazılır ve tekrar Binom açılımı $\left(\sqrt{\frac{z}{j\theta}} - \frac{(\rho+j)\beta}{2j\theta}\right)^l$ ifadesi için uygulanır ise,

$$\left(\sqrt{\frac{z}{j\theta}} - \frac{(\rho+j)\beta}{2j\theta}\right)^l = \sum_{k=0}^l \binom{l}{k} \left(\sqrt{\frac{z}{j\theta}}\right)^k \left(\frac{-(\rho+j)\beta}{2j\theta}\right)^{l-k}$$

eşitliği sağlanır. Böylece, (3.37) integral yeniden yazılır ise,

$$\int_{\frac{(\rho+j)^2\beta^2}{4j\theta}}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{j\theta}z} \left(\sqrt{\frac{z}{j\theta}} - \frac{(\rho+j)\beta}{2j\theta}\right)^l e^{-z} dz = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^l \binom{l}{k} \left(\frac{-(\rho+j)\beta}{2j\theta}\right)^{l-k} j\theta^{-\frac{k+1}{2}} \int_{\frac{(\rho+j)^2\beta^2}{4j\theta}}^{\infty} z^{\frac{k-1}{2}} e^{-z} dz$$

dır ve son integral tamamlanmamış Gamma fonksiyonu ile ifade edilebilir, yani,

$$\int_{\frac{(\rho+j)^2\beta^2}{4j\theta}}^{\infty} z^{\frac{k-1}{2}} e^{-z} dz = \Gamma\left(\frac{k+1}{2}, \frac{(\rho+j)^2\beta^2}{4j\theta}\right)$$

Sonuç olarak, Rényi entropi,

$$I_R(\rho) = \frac{1}{1-\rho} \log \left[\sum_{j=0}^{\infty} \sum_{l=0}^j \sum_{k=0}^l \binom{\rho}{j} \binom{j}{l} \binom{l}{k} (-1)^{l-k} (1-\delta)^{\rho-j} \delta^j 2^{j+k-l-1} \beta^{\rho-k} \theta^{\frac{k-1}{2}} (\rho + j)^{l-k} j^{\frac{k-1}{2}} e^{\frac{(\rho+j)^2\beta^2}{4j\theta}} \Gamma\left(\frac{k+1}{2}, \frac{(\rho+j)^2\beta^2}{4j\theta}\right) \right]$$

olarak elde edilir.

3.3.8 G_3 – dağılımın özel durumu için sıra istatistikleri

(3.30) ve (3.31) ifadelerinde tanımlanan olasılık yoğunluk fonksiyonu $g_3(t; \Theta)$ ve dağılım fonksiyonu $G_3(t; \Theta)$ olan $T_1, T_2, \dots, T_n$ rasgele değişkenlerin sıra istatistikleri $X_{1:n}, X_{2:n}, \dots, X_{n:n}$ olmak üzere, j . sıra istatistiğinin olasılık yoğunluk fonksiyonu, $j = 1, 2, \dots, n$ için,

$$h_{j:n}(t) = \frac{n!}{(j-1)!(n-j)!} \left((1-\delta)\beta e^{-\beta t} + \delta(2\beta + 2\theta t)e^{-(2\beta t + \theta t^2)} \right) \\ \times \left(1 - (1-\delta)e^{-\beta t} - \delta e^{-(2\beta t + \theta t^2)} \right)^{j-1} \left((1-\delta)e^{-\beta t} + \delta e^{-(2\beta t + \theta t^2)} \right)^{n-j}$$

dır. Buradan, birinci sıra istatistiğinin olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$h_{1:n}(t) = n \left((1-\delta)\beta e^{-\beta t} + \delta(2\beta + 2\theta t)e^{-(2\beta t + \theta t^2)} \right) \left((1-\delta)e^{-\beta t} + \delta e^{-(2\beta t + \theta t^2)} \right)^{n-1}$$

olarak verilir ve n . sıra istatistiğinin olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$h_{n:n}(t) = n \left((1-\delta)\beta e^{-\beta t} + \delta(2\beta + 2\theta t)e^{-(2\beta t + \theta t^2)} \right) \left(1 - (1-\delta)e^{-\beta t} - \delta e^{-(2\beta t + \theta t^2)} \right)^{n-1}$$

olarak bulunur.

4. ÜÇ BİLEŞENLİ SİSTEMLER İLE ÖNERİLEN DÖNÜŞÜM

Bu bölümde, üç bileşenden oluşan sistemlerden yola çıkarak dönüşüm yöntemini kullanıp yeni tek boyutlu dağılımlar elde edilecektir. Bu dönüşüm yöntemi, kübik dönüşümü diye adlandırılacaktır. Sistemlerin bileşenleri üç farklı durum için ele alınacaktır. İlk olarak bileşenler bağımsız ve aynı dağılıma sahip olarak alınacaktır, bir sonraki alt bölümde ise bileşenler bağımsız ve farklı dağılımlara sahip alınacaktır. Üçüncü kısımda ise, bileşenlerin dağılımı bağımlı ve birbirleri ile yer değiştirilebilir özelliğine sahip olarak ele alınacaktır. Son olarak, bu bileşenlerin dağılımı üstel ve Farlie-Gumbel-Morgenstern olarak alınıp özellikleri incelenecektir.

4.1 Bağımsız Aynı Dağılıma Sahip Üç Bileşenli Sistemler ile Önerilen Dönüşüm

Burada üç bileşenden oluşan sistemleri ele alarak kübik dönüşüm yöntemi elde edilip üç boyutlu dağılımlardan tek boyutlu dağılım elde edilip özellikleri incelenecektir.

Kübik Dönüşüm Yöntemi: Bu yöntemin tanıtılması ile, kübik dönüşüm yöntemini kullanarak tanımlanmış olan dağılımlara ek olarak daha fazla dağılım fonksiyonu ortaya çıkacaktır. Önerilen kübik dönüşüm yönteminde, dönüşüm parametrelerinin uzayı karışıktır. Bu karışıklığı ortadan kaldırmak için, hem Shaw ve Buckley (2007)'in karesel form yapısını hem de Yılmaz (2015)'in üçlü sistemler için yazmış olduğu bölümünden esinlenerek aşağıdaki gibi bir düşünce ortaya çıkmıştır. Bölüme 2.9'da üç bileşenli sistemlerin bileşenlerinin bağımsız ve aynı dağılımlı olduğunda elde edilen başarısızlık olasılıklarından üçü göz önüne alınıp,

$$H_{1:3}(t) = 3F(t) - 3F^2(t) + F^3(t), \quad H_{2:3}(t) = 3F^2(t) - 2F^3(t), \quad H_{3:3}(t) = F^3(t),$$

olarak hatırlanmıştır. Yılmaz (2015) de bahsettiği üzere, $H_{3:3}(t) \leq H_{2:3}(t) \leq H_{1:3}(t)$ sıralaması geçerlidir. Bunun yanı sıra, $F(t) = \frac{1}{3}H_{3:3}(t) + \frac{1}{3}H_{2:3}(t) + \frac{1}{3}H_{1:3}(t)$ eşitliği de geçerlidir. Öte yandan, $H_{3:3}(t) \leq F(t) \leq H_{1:3}(t)$ sıralamasının geçerliliği açıktır. Eğer $H_{2:3}(t)$ bu sıralamaya dahil edilir ise, $F(t) \geq \frac{1}{2}$ için $H_{3:3}(t) \leq F(t) \leq H_{2:3}(t) \leq H_{1:3}(t)$ ve $F(t) < \frac{1}{2}$ için $H_{3:3}(t) \leq H_{2:3}(t) \leq F(t) \leq H_{1:3}(t)$ olarak sıralanır. O zaman bu iki sıralamayı içeren bir konveks kombinasyon önerilecektir. Bu öneri $F(t)$ dağılım fonksiyonunun tam olarak nerede olduğunu belirlemektedir. Bu durumda, $H_{1:3}(t)$ ile $H_{2:3}(t)$ arasında $G^*(t)$ gibi bir konveks bileşim yazılabilir. $\lambda_1 \in [0,1]$ olmak üzere,

$$G^*(t) = \lambda_1 H_{1:3}(t) + (1 - \lambda_1) H_{2:3}(t), \quad (4.1)$$

kombinasyonu geçerlidir. Tekrar, $G^*(t)$ ile $H_{3:3}(t)$ arasındaki konveks bileşime $G(t)$ denilir ise, $\lambda_2 \in [0,1]$ için,

$$G(t) = \lambda_2 G^*(t) + (1 - \lambda_2) H_{3:3}(t), \quad (4.2)$$

şeklinde elde edilir. Denklem (4.1) ve (4.2) birlikte ele alındığında,

$$G(t) = \lambda_1 \lambda_2 H_{1:3}(t) + (1 - \lambda_1) \lambda_2 H_{2:3}(t) + (1 - \lambda_2) H_{3:3}(t), \quad (4.3)$$

biçimine dönüşür. Sistemlerin dağılım fonksiyonları önüne alındığında (4.3) ifadesini yeniden yazıp $F(t)$ fonksiyonunun polinom derecesine göre düzenlenir ise,

$$G(t) = 3\lambda_1 \lambda_2 F(t) + 3\lambda_2 (1 - 2\lambda_1) F^2(t) + (1 - 3\lambda_2 + 3\lambda_1 \lambda_2) F^3(t), \quad (4.4)$$

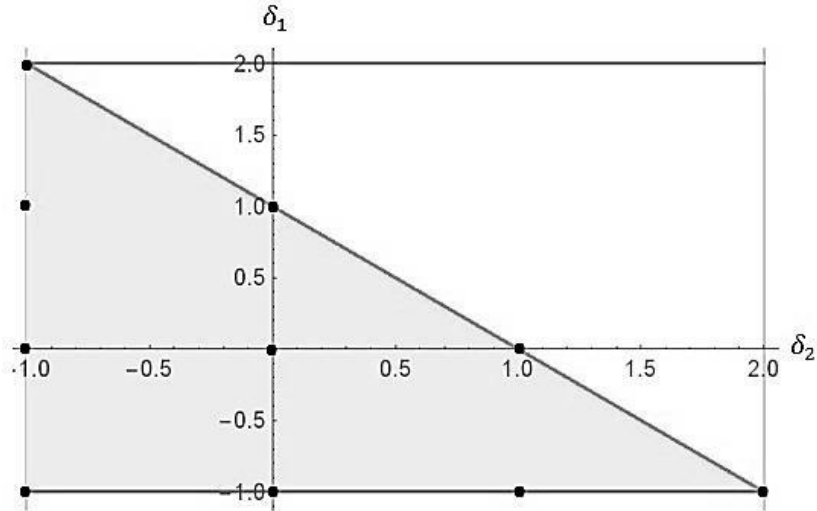
olarak elde edilir. $G(t)$ fonksiyonunun dağılım fonksiyonu olduğu biliniyor. Karesel dönüşüm yöntemine benzer bir yapıyı kurabilmek adına yeniden parametrelendirme yapılacaktır. Öyle ki, $w_1 = \lambda_1 \lambda_2$ ve $w_2 = \lambda_2 - \lambda_1 \lambda_2$ alınıp denklem (4.4) aşağıdaki gibi tekrar yazılabilir,

$$G(t) = 3w_1F(t) + 3(w_2 - w_1)F^2(t) + (1 - 3w_2)F^3(t), \quad (4.5)$$

burada $w_1, w_2 \in [0,1]$ dir. Denklem (4.5) da tekrardan $w_1 = \frac{1+\delta_1}{3}$ ve $w_2 = \frac{1+\delta_2}{3}$ parametrelendirmesi yapılırsa aşağıdaki eşitlik bulunur ve elde edilen dağılım fonksiyonu $G_4(t; \delta_1, \delta_2)$ olarak adlandırılır, böylece

$$\begin{aligned} G_4(t; \delta_1, \delta_2) &= (1 + \delta_1)F(t) + (\delta_2 - \delta_1)F^2(t) - \delta_2F^3(t) \\ &= \frac{1 + \delta_1}{3}H_{1:3}(t) + \frac{1 + \delta_2}{3}H_{2:3}(t) + \frac{1 - \delta_1 - \delta_2}{3}H_{3:3}(t), \end{aligned} \quad (4.6)$$

burada $\delta_1, \delta_2 \in [-1,2]$ dir. Ayrıca $\lambda_2 = w_1 + w_2$ olduğundan, $\delta_1 + \delta_2 \leq 1$ koşulu da parametreler üzerine gelmektedir, Şekil 4.1 ile verilen parametre uzayı daha basit halde sunulmuştur. (4.6) denkleminde tanımlanan dağılım fonksiyonuna, kübik dönüşümü adı verilir. Hemen görüleceği üzere, $\delta_2 = 0$ için karesel dönüşüm, $\delta_1 = \delta_2 = 0$ için temel dağılım yani $F(t)$ dağılımı elde edilir. Kübik dönüşüm yöntemi karesel dönüşüm yönteminin genelleştirilmiş halidir. δ_1 ve δ_2 parametreleri için parametre uzayı ise, $\{(\delta_1, \delta_2): \delta_1, \delta_2 \in [-1,2], \delta_1 + \delta_2 \leq 1\}$ şeklinde tanımlanır ve Çizelge 4.1 de verilmiştir.



Şekil 4.1 Şekil üzerinde farklı dönüşüm parametreleri için yeni dağılımdan elde edilen sistemler

Şekil 4.1 de görüldüğü gibi üçgenin ağırlık merkezi (0,0) noktasıdır ve bu noktada elde edilen dağılım $F(t)$ olup, böylece temel dağılım $F(t)$ olarak alınır. Aşağıdaki tabloda dönüşüm parametreleri, tam değerler aldıklarında üretilen dağılım fonksiyonları tanımlanmaya çalışılmıştır.

Çizelge 4.1 Farklı dönüşüm parametreler için yeni dağılımdan elde edilen sistemlerin dağılımı

δ_1	δ_2	Dağılımlar	Tanım
-1	-1	$F^3(t)$	$X_{3:3}$ 'ün dağılımı ($H_{3:3}(t)$)
-1	0	$F^2(t)$	$X_{2:2}$ 'ün dağılımı ($H_{2:2}(t)$)
-1	1	$2F^2(t) - F^3(t)$	$\max\{T_1, \min(T_2, T_3)\}$ 'ün dağılımı
-1	2	$3F^2(t) - 2F^3(t)$	$X_{2:3}$ 'ün dağılımı ($H_{2:3}(t)$)
0	-1	$F^3(t) - F^2(t) + F(t)$	$\frac{1}{3}H_{1:3}(t) + \frac{2}{3}H_{3:3}(t)$
0	0	$F(t)$	Temel dağılım
0	1	$F^2(t) + F(t) - F^3(t)$	$\min\{T_1, \max(T_2, T_3)\}$ 'ün dağılımı
1	-1	$F^3(t) - 2F^2(t) + 2F(t)$	$\frac{2}{3}H_{1:3}(t) + \frac{1}{3}H_{3:3}(t)$
1	0	$2F(t) - F^2(t)$	$X_{1:2}$ 'ün dağılımı ($H_{1:2}(t)$)
2	-1	$F^3(t) - 3F^2(t) + 3F(t)$	$X_{1:3}$ 'ün dağılımı ($H_{1:3}(t)$)

Çizelge 4.1'de verilen tanımlamalara bakıldığında, Shaw ve Buckley (2009)'un Çizelge 4.1'deki dönüşümlü parametrelerinin özel değerlerine göre verilen dağılımları kapsadığı görünüyor.

Granzotto vd. (2017) makalesinde kübik dönüşüm yönteminden bahsedilmiştir. Ancak bu makalede birçok sayıda yanlış var. Bu tez çalışmasında o yanlışların bazılarından tartışma bölümünde bahsedilmiştir.

Şimdi önerilen T rasgele değişkenin olasılık yoğunluk fonksiyonu aşağıdaki gibi elde edilecektir,

$$\begin{aligned} g_4(t; \delta_1, \delta_2) &= f(t)((1 + \delta_1) + 2(\delta_2 - \delta_1)F(t) - 3\delta_2 F^2(t)) \\ &= \frac{1 + \delta_1}{3} h_{1:3}(t) + \frac{1 + \delta_2}{3} h_{2:3}(t) + \frac{1 - \delta_1 - \delta_2}{3} h_{3:3}(t). \end{aligned} \quad (4.7)$$

4.1.1 G_4 – dağılımın yaşam fonksiyonu ve bozulma oranı fonksiyonu

Bu dağılımın yaşam fonksiyonu,

$$\begin{aligned} \bar{G}_4(t; \delta_1, \delta_2) &= 1 - (1 + \delta_1)F(t) - (\delta_2 - \delta_1)F^2(t) + \delta_2 F^3(t) \\ &= (1 - \delta_1 - \delta_2)\bar{F}(t) + (\delta_1 + 2\delta_2)\bar{F}^2(t) - \delta_2 \bar{F}^3(t) \\ &= \bar{F}(t)(1 - \delta_1 F(t) - \delta_2 F^2(t)), \end{aligned} \quad (4.8)$$

olarak yazılır. Yaşam fonksiyonun üçüncü denkleminde yola çıkarak bozulma oranı fonksiyonu,

$$\begin{aligned} r_{G_4}(t; \delta_1, \delta_2) &= r_F(t) \left(1 + \frac{\delta_1 + (2\delta_2 - \delta_1)F(t) - 2\delta_2 F^2(t)}{1 - \delta_1 F(t) - \delta_2 F^2(t)} \right) \\ &= r_F(t) \left(3 + \frac{-2 + \delta_1 + (\delta_1 + 2\delta_2)F(t)}{1 - \delta_1 F(t) - \delta_2 F^2(t)} \right) \\ &= r_F(t) \left(1 + \bar{F}(t) \frac{\delta_1 + 2\delta_2 F(t)}{1 - \delta_1 F(t) - \delta_2 F^2(t)} \right), \end{aligned} \quad (4.9)$$

biçiminde elde edilir. Burada $r_{G_4}(0; \delta_1, \delta_2) = (1 + \delta_1)r_F(0)$ ve $r_{G_4}(\infty; \delta_1, \delta_2) = r_F(\infty)$ dir. Aşağıdaki önerme ve teorem, önerilen G_4 – dağılımının bozulma oranı fonksiyonunun monotonluk özelliğini vermektedir.

Önerme 4.1

- i) Eğer $r_F(t)$, $f'(t) \geq 0$ ve $\delta_1, \delta_2 \geq 0$ koşulları altında t değişkenine göre artan ise, $r_{G_4}(t; \delta_1, \delta_2)$ de t ye göre artandır.

- ii) Eğer $r_F(t)$, $f'(t) \geq 0$, ve $\delta_2 < 0$ ve $\delta_1 \geq 2\sqrt{-\delta_2}$ koşulları altında t değişkenine göre artan ise, $r_{G_4}(t; \delta_1, \delta_2)$ de t ye göre artandır.
- iii) Eğer $r_F(t)$, $f'(t) \leq 0$, ve $\delta_2 \geq 0$ ve $\delta_1 \leq 2\delta_2$ koşulları altında t değişkenine göre artan ise, $r_{G_4}(t; \delta_1, \delta_2)$ de t ye göre artandır.
- iv) Eğer $r_F(t)$, $f'(t) \leq 0$, ve $\delta_2 \leq 0$ ve $\delta_1 \leq -2\sqrt{-\delta_2}$ koşulları altında t değişkenine göre artan ise, $r_{G_4}(t; \delta_1, \delta_2)$ de t ye göre artandır.
- v) $r_F(t)$, $f'(t) \leq 0$, ve $-0.5 \leq \delta_2 \leq 0$ ve $-2\delta_2 \leq \delta_1 \leq \sqrt{-2\delta_2}$ koşulları altında t değişkenine göre azalan ise, $r_{G_4}(t; \delta_1, \delta_2)$ de t değişkenine göre azalandır.

İspat. (4.8) denkleminde $G_4(t)$ için bozulma oranı fonksiyonu aşağıdaki gibi yazılabilmektedir,

$$r_{G_4}(t; \delta_1, \delta_2) = r_F(t) + \frac{d}{dt} \left(-\log(1 - \delta_1 F(t) - \delta_2 F^2(t)) \right), \quad (4.10)$$

$$= \frac{f(t)}{F(t)} + \frac{f(t)(\delta_1 + 2\delta_2 F(t))}{1 - \delta_1 F(t) - \delta_2 F^2(t)}.$$

Dolayısıyla, $r_{G_4}(t; \delta_1, \delta_2)$ bozulma oranı fonksiyonunun monotonluk özelliğini incelemek için birinci türevi alınacaktır. Bu fonksiyonun ilk türevi, temel dağılımın bozulma oranı fonksiyonunun türevine ve $-\log(1 - \delta_1 F(t) - \delta_2 F^2(t))$ ifadesinin ikinci türevine bağlıdır. (4.10) denkleminin sağ tarafındaki ifadenin ikinci türevi aşağıdaki denklemle verilmiştir,

$$f'(t) \frac{\delta_1 + 2\delta_2 F(t)}{1 - \delta_1 F(t) - \delta_2 F^2(t)} + f^2(t) \frac{2\delta_2(1 - \delta_1 F(t) - \delta_2 F^2(t)) + (\delta_1 + 2\delta_2 F(t))^2}{(1 - \delta_1 F(t) - \delta_2 F^2(t))^2}. \quad (4.11)$$

- i) $f'(t) \geq 0$ ve $\delta_1, \delta_2 \geq 0$ iken, (4.11) denkleminin pozitifliği sağlanmıştır. Dolayısıyla, G dağılımı IHR (Increasing Hazard Rate) özelliğini sağlayıp artan bir bozulma oranıdır ve böylece monotonluk sağlanmıştır.

- ii) $f'(t) \geq 0$ ve $\delta_2 < 0$ iken, (4.11) denkleminin birinci toplamının pozitifliği $\delta_1 \geq -2\delta_2$ olduğunda sağlanır. Bunun yanı sıra, ikinci toplamın pozitif olabilmesi $\rho(u) = 2\delta_2(1 - \delta_1 u - \delta_2 u^2) + (\delta_1 + 2\delta_2 u)^2, u \in [0,1]$ ifadesinin pozitif olmasına bağlıdır. Bu ifade açıldığında, $\rho(u) = 2\delta_2^2 u^2 + 2\delta_1 \delta_2 u + \delta_1^2 + 2\delta_2$ elde edilir. Hemen görüleceği üzere bu ifade u nun konveks bir fonksiyonudur. O halde $\rho(u)$ fonksiyonu minimum noktasındaki değeri pozitif ise, ikinci toplam kesinlikle pozitif olacaktır. $\rho(u) = 0$ alındığında, bu fonksiyonun minimum noktası $u^* = -\frac{\delta_1}{2\delta_2}$ olarak elde edilir ki bu noktada fonksiyon minimum değerine ulaşır yani $\rho\left(-\frac{\delta_1}{2\delta_2}\right) = 2\delta_2 + \frac{\delta_1^2}{2}$ ve $\delta_1^2 \geq -4\delta_2$ olması durumunda minimum değer pozitif olması sağlanır. $\delta_1 \geq -2\delta_2$ koşulu ile birleştirildiğinde $\delta_1 < 0$ olamayacağı sonucuna varılır. Buradan $\delta_1 \in [2\sqrt{-\delta_2}, 2]$ elde edilir.
- iii) İspat (ii) deki gibidir.
- iv) İspat (ii) deki gibidir.
- v) $f'(t) \leq 0$ iken, (4.11) denkleminin birinci toplamının negatifliği $\delta_1 \geq -2\delta_2$ olduğunda sağlanır. Bunun yanı sıra, ikinci toplamın negatif olabilmesi $\rho(u) = 2\delta_2^2 u^2 + 2\delta_1 \delta_2 u + \delta_1^2 + 2\delta_2, u \in [0,1]$ ifadesinin konveks bir fonksiyon olmasından dolayı, uç noktalardaki değerlerinin negatif olmasına bağlıdır. Yani, $\rho(0) = \delta_1^2 + 2\delta_2 \leq 0$ ve $\rho(1) = 2\delta_2^2 + 2\delta_1 \delta_2 + \delta_1^2 + 2\delta_2 = (\delta_1 + \delta_2)^2 + \delta_2(2 + \delta_2) \leq 0$ olması için gerekli koşullar $\delta_1 \leq \sqrt{-2\delta_2}$ ve $0 \leq \delta_1 \leq -\delta_2 + \sqrt{-\delta_2(2 + \delta_2)}$ dır. $\delta_1 \geq -2\delta_2$ koşulu ile birleştirildiğinde, $\max\{0, -2\delta_2\} \leq \delta_1 \leq \min\{\sqrt{-2\delta_2}, -\delta_2 + \sqrt{-\delta_2(2 + \delta_2)}\}$ olup, $-2\delta_2 \leq \delta_1 \leq \sqrt{-2\delta_2}$ sonucu elde edilir.

Aşağıdaki Teorem, bozulma oranının dönüşüm parametrelerine göre monotonluğu ile ilgilidir.

Teorem 4.1 $r_{G_4}(t; \Theta)$ bozulma oranı δ_1 ve δ_2 parametrelerinin azalmayan bir fonksiyonudur. Θ parametre uzayı $\left\{ \left(\underline{\theta}, \delta_1, \delta_2 \right), \underline{\theta} \in \mathbb{R}^k, \delta_1, \delta_2 \in [-1, 2], \delta_1 + \delta_2 \leq 1 \right\}$ şeklinde tanımlanmaktadır.

İspat. (4.9) denklemin son eşitliği göz önüne alındığında, $\frac{\partial}{\partial \delta_j} r_{G_4}(t; \Theta)$ ifadesinin işareti $\frac{\partial}{\partial \delta_j} \eta(\delta_1, \delta_2)$, $j = 1, 2$ ifadesinin işaretine bağlıdır, burada $\eta(\delta_1, \delta_2) = \frac{\delta_1 + 2\delta_2 u}{1 - \delta_1 u - \delta_2 u^2}$ olmaktadır. Böylece,

$$\frac{\partial}{\partial \delta_1} \eta(\delta_1, \delta_2) = \frac{1 + \delta_2 u^2}{(1 - \delta_1 u - \delta_2 u^2)^2} \geq 0,$$

buradan $\delta_2 \geq -1$ olur, ve

$$\frac{\partial}{\partial \delta_2} \eta(\delta_1, \delta_2) = \frac{u(2 - \delta_2 u)}{(1 - \delta_1 u - \delta_2 u^2)^2} \geq 0,$$

eşitsizliğinden $\delta_2 \leq 2$ sonucu elde edilir. Böylece $\delta_2 \in [-1, 2]$ dir. Aynı sonuç δ_1 için de geçerlidir.

4.1.2 G_4 – dağılımının moment çıkaran fonksiyonu, momentleri, çarpıklık ve basıklık katsayıları

T rasgele değişkeninin moment çıkaran fonksiyonu,

$$M_T(k) = \frac{1 + \delta_1}{3} M_{X_{1:3}}(t) + \frac{1 + \delta_2}{3} M_{X_{2:3}}(t) + \frac{1 - \delta_1 - \delta_2}{3} M_{X_{3:3}}(t),$$

olarak elde edilir. Bu rasgele değişkenin k. momenti ise,

$$E(T^k) = \frac{1 + \delta_1}{3} E(X_{1:3}^k) + \frac{1 + \delta_2}{3} E(X_{2:3}^k) + \frac{1 - \delta_1 - \delta_2}{3} E(X_{3:3}^k),$$

dır. Son denklemde $k = 1, 2, 3, 4$ alınır ise, o zaman bu rasgele değişkenin ilk dört momenti çarpıklık ve basıklık katsayılarını hesaplamak için elde edilir. Bu rasgele değişkenin çarpıklık katsayısı,

$$\zeta K = \frac{1}{var(T)^{\frac{3}{2}}} \left(\begin{aligned} & \frac{1 + \delta_1}{3} E(X_{1:3}^3) + \frac{1 + \delta_2}{3} E(X_{2:3}^3) + \frac{1 - \delta_1 - \delta_2}{3} E(X_{3:3}^3) \\ & - 3 \left(\frac{1 + \delta_1}{3} E(X_{1:3}) + \frac{1 + \delta_2}{3} E(X_{2:3}) + \frac{1 - \delta_1 - \delta_2}{3} E(X_{3:3}) \right) \\ & \times \left(\frac{1 + \delta_1}{3} E(X_{1:3}^2) + \frac{1 + \delta_2}{3} E(X_{2:3}^2) + \frac{1 - \delta_1 - \delta_2}{3} E(X_{3:3}^2) \right) \\ & + 2 \left(\frac{1 + \delta_1}{3} E(X_{1:3}) + \frac{1 + \delta_2}{3} E(X_{2:3}) + \frac{1 - \delta_1 - \delta_2}{3} E(X_{3:3}) \right)^3 \end{aligned} \right)$$

biçiminde hesaplanır. Basıklık katsayısı ise,

$$BK = \frac{1}{Var(T)^2} \left(\begin{aligned} & \frac{1 + \delta_1}{3} E(X_{1:3}^4) + \frac{1 + \delta_2}{3} E(X_{2:3}^4) + \frac{1 - \delta_1 - \delta_2}{3} E(X_{3:3}^4) \\ & - 4 \left(\frac{1 + \delta_1}{3} E(X_{1:3}) + \frac{1 + \delta_2}{3} E(X_{2:3}) + \frac{1 - \delta_1 - \delta_2}{3} E(X_{3:3}) \right) \\ & \times \left(\frac{1 + \delta_1}{3} E(X_{1:3}^3) + \frac{1 + \delta_2}{3} E(X_{2:3}^3) + \frac{1 - \delta_1 - \delta_2}{3} E(X_{3:3}^3) \right) \\ & + 6 \left(\frac{1 + \delta_1}{3} E(X_{1:3}) + \frac{1 + \delta_2}{3} E(X_{2:3}) + \frac{1 - \delta_1 - \delta_2}{3} E(X_{3:3}) \right)^2 \\ & \times \left(\frac{1 + \delta_1}{3} E(X_{1:3}^2) + \frac{1 + \delta_2}{3} E(X_{2:3}^2) + \frac{1 - \delta_1 - \delta_2}{3} E(X_{3:3}^2) \right) \\ & - 3 \left(\frac{1 + \delta_1}{3} E(X_{1:3}) + \frac{1 + \delta_2}{3} E(X_{2:3}) + \frac{1 - \delta_1 - \delta_2}{3} E(X_{3:3}) \right)^4 \end{aligned} \right)$$

olarak bulunur.

4.1.3 G_4 – dağılımından rasgele sayı üretme

Bu dağılımdan rasgele sayı üretmek için, denklem (4.6) da verilen dağılımın karma olduğu biliniyor. Karma dağılımda ağırlıklar sırasıyla $\frac{1+\delta_1}{3}$, $\frac{1+\delta_2}{3}$ ve $\frac{1-(\delta_1+\delta_2)}{3}$ olup, $\delta_1, \delta_2 \in [-1,2]$ ve $\delta_1 + \delta_2 \in [-2,1]$ olarak elde edilmişti. Buna göre, önerilen dağılımdan sayı üretmek için aşağıdaki adımlar takip edilecektir.

Algoritma Karma yöntem ile rasgele sayı üretme

Adım 1: T_1, T_2, T_3 rasgele sayılar bağımsız olarak F temel dağılımından üret,
Adım 2: U rasgele değişkenini düzgün $(0,1)$ dağılımından üret,
Adım 3: Eğer $u \leq \frac{1+\delta_1}{3}$ ise, o zaman $t = \min\{T_1, T_2, T_3\}$ den üret,
Adım4: Eğer $u \leq \frac{1+\delta_2}{3}$ ise, o zaman $t = \max\{\min\{T_1, T_2\}, \min\{T_1, T_3\}, \min\{T_2, T_3\}\}$ den üret,
Aksi takdirde, $t = \max\{T_1, T_2, T_3\}$ den üret.

4.1.4 G_4 – dağılımın Rényi entropisi

Denklem (4.7) yani olasılık yoğunluk fonksiyonunda, temel dağılım standart düzgün dağılımı olarak düşünülür ise, $F(t) = u$ ve dolayısıyla $f(t) = 1$ olup böylece Rényi entropi,

$$I_\rho(T) = \frac{1}{1-\rho} \log \int_0^1 ((1+\delta_1) + 2(\delta_2 - \delta_1)u - 3\delta_2 u^2)^\rho du$$

olarak bulunur. Burada integral ifadesi, u 'nun ikinci dereceden bir polinomudur. Bundan dolayı, m_1 ve m_2 noktaları polinomun kökleri olarak alındığında polinom $(-3\delta_2)(u - m_1)(u - m_2)$ olarak yeniden yazılabilir. Burada $m_1 \leq m_2$ dir. Böylece yukarıdaki integral,

$$(-3\delta_2)^\rho \int_0^1 (u - m_1)^\rho (u - m_2)^\rho du$$

olarak yazılır. $z = \frac{u-m_1}{m_2-m_1}$ değişken değişmesi yapılır ise,

$$(-3\delta_2)^\rho (m_2 - m_1)^{2\rho+1} \int_{\frac{-m_1}{m_2-m_1}}^{\frac{1-m_1}{m_2-m_1}} z^\rho (1-z)^\rho dz$$

m_1 ve m_2 kökleri (0,1) aralığında değildir. Dolayısıyla, $m_1 \geq 1$ veya $m_1 \leq 0$ olmalıdır. İntegralin alt ve üst sınırları hem pozitif hem de negatif olabilir. Bu tür integralin değerlendirilmesi tamamlanmamış Beta fonksiyonu kullanılarak başarılabılır (Tamamlanmamış Beta fonksiyonu Ek 3’de anlatılmıştır). Böylece,

$$(-3\delta_2)^\rho (m_2 - m_1)^{2\rho+1} \left[B_{\frac{1-m_1}{m_2-m_1}}(\rho+1, \rho+1) - B_{\frac{-m_1}{m_2-m_1}}(\rho+1, \rho+1) \right]$$

olarak yazılır. Rényi entropisi ise,

$$I_\rho(T) = \frac{\rho}{1-\rho} \log(-3\delta_2) + \frac{2\rho+1}{1-\rho} \log(m_2 - m_1) + \frac{1}{1-\rho} \log \left(\left[B_{\frac{1-m_1}{m_2-m_1}}(\rho+1, \rho+1) - B_{\frac{-m_1}{m_2-m_1}}(\rho+1, \rho+1) \right] \right)$$

şeklinde hesaplanır. Burada

$$m_{1,2} = \frac{(\delta_2 - \delta_1) \pm \sqrt{(\delta_1 + \delta_2)^2 + 3\delta_2(1 + \delta_1)}}{3\delta_2}$$

Ve bunlar kompleks veya gerçekteğer alabilmektedir.

4.1.5 G_4 – dağılımı için özel durum

Bu bölümde, kübik dönüşümün temel dağılımı üstel dağılım olarak alınacaktır. Bu özel dağılımın kısa bir tarifi, olasılık yoğunluk fonksiyonunun ve bozulma oranı fonksiyonunun grafiği verilecek, böylece çalışma çok fazla hacimli olmayacaktır.

T rasgele değişkeni β parametrelili üstel dağılımına sahip olsun. Denklem (4.6) de önerilen dağılım göz önüne alındığında dönüşümlü yeni dağılım fonksiyonu,

$$G_4(t; \Theta) = 1 - (1 - \delta_1 - \delta_2)e^{-\beta t} - (\delta_1 + 2\delta_2)e^{-2\beta t} + \delta_2 e^{-3\beta t}, \quad (4.12)$$

olarak elde edilir. Şimdi bu dağılımın olasılık yoğunluk fonksiyonu verilecektir,

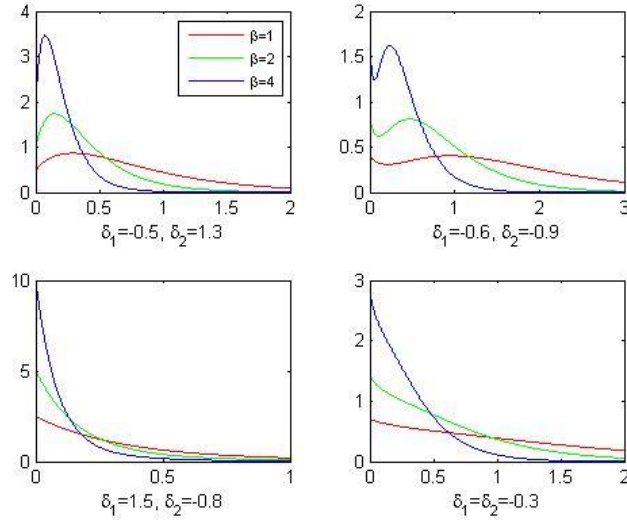
$$\begin{aligned} g_4(t; \Theta) &= \beta e^{-\beta t} (1 - \delta_1 - \delta_2 + 2(\delta_1 + 2\delta_2)e^{-\beta t} - 3\delta_2 e^{-2\beta t}) \\ &= (1 - \delta_1 - \delta_2)f_{\text{üstel}(\beta)}(t) + (\delta_1 + 2\delta_2)f_{\text{üstel}(2\beta)}(t) - \delta_2 f_{\text{üstel}(3\beta)}(t). \end{aligned} \quad (4.13)$$

Burada parametre uzayı $\Theta = \{(\delta_1, \delta_2, \beta): \delta_1, \delta_2 \in [-1, 2], \beta > 0, \delta_1 + \delta_2 \leq 1\}$ olarak tanımlanmaktadır. Denklem (4.13) 'de önerilen olasılık yoğunluk fonksiyonunun son gösteriminden yola çıkarak, $\beta, 2\beta$ ve 3β parametreleri ile üstel olasılık yoğunluk fonksiyonlarının toplamı ile ifade edilebileceği gösterilmiştir. Yukarıda tanımlanan olasılık yoğunluk fonksiyonu aşağıdaki gibi analiz edilebilir,

$$g'_4(t; \Theta) = -(1 - \delta_1 - \delta_2)\beta^2 e^{-\beta t} - 4(\delta_1 + 2\delta_2)\beta^2 e^{-2\beta t} + 9\delta_2 \beta^2 e^{-3\beta t}$$

Bu türevin negatif olması için, birinci toplamda $-(1 - \delta_1 - \delta_2) < 0$ olup $\delta_1 + \delta_2 < 1$ olmalıdır, üçüncü toplamın negatif olması için $\delta_2 < 0$ olmalıdır ve böylece ikinci toplam da negatif olması için $\delta_1 > -2\delta_2$ olmalıdır yani $\delta_1 > 0$ olmalıdır. Böylece bu fonksiyonun azalan olması için yani türevin negatif olması için koşullar $\delta_1 > 0, \delta_2 < 0$ ve $\delta_1 + \delta_2 < 1$

olarak elde edilmiştir. Ayrıca $\delta_1 = \delta_2$ iken de türevin işareti negatif olup fonksiyon azalan olmaktadır. Şimdi türevin pozitif olması incelenecektir. Bu türevin pozitif olması için ilk olarak üçüncü toplama bakılırsa $\delta_2 > 0$ olması gerektiği gözükmemektedir. İkinci toplamın pozitif olması için de $\delta_1 < 0$ olmalıdır. Birinci toplam hep negatif değerler almaktadır. Böylece türevin sıfırdan büyük olması için $\delta_1 < 0$ ve $\delta_2 > 0$ olmalıdır. Şimdi bahsedilen olasılık yoğunluk fonksiyonu farklı parametreler için çizilecektir;



Şekil 4.2 G_4 – dağılımın olasılık yoğunluk fonksiyonu

4.1.6 G_4 – dağılımın özel durumu için matematiksel özellikleri

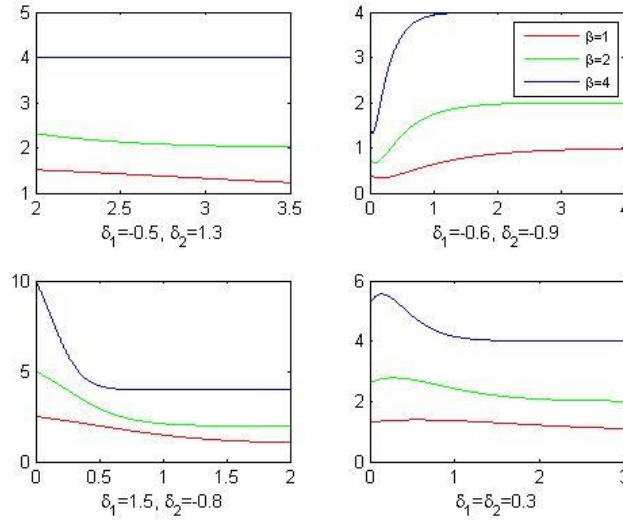
Bu dağılım için yaşam fonksiyonu aşağıdaki gibi bulunur,

$$\bar{G}_4(t; \Theta) = e^{-\beta t} (1 - \delta_1 - \delta_2 + (\delta_1 + 2\delta_2)e^{-\beta t} - \delta_2 e^{-2\beta t}),$$

burada $\beta > 0$, $\delta_1, \delta_2 \in [-1, 2]$, $\delta_1 + \delta_2 \leq 1$ dir. Denklem (4.9)'de verilen bozulma oranı fonksiyonundan yola çıkılır ise,

$$r_{G_4}(t; \Theta) = \beta \left(3 - \frac{2(1 - \delta_1 - \delta_2) + (\delta_1 + 2\delta_2)e^{-\beta t}}{1 - \delta_1 - \delta_2 + (\delta_1 + 2\delta_2)e^{-\beta t} - \delta_2 e^{-2\beta t}} \right), \quad (4.14)$$

olarak bulunur. Bozulma oranı fonksiyonunun bazı özel durumları $r_{G_4}(0; \Theta) = (1 + \delta_1)\beta$ ve $\lim_{t \rightarrow \infty} r_{G_4}(t; \Theta) = \beta$ olarak verilebilir. Böylece bozulma oranı fonksiyonu $(1 + \delta_1)\beta$ değerinden β değerine değişiyor. $\delta_1 = \delta_2 = 0$ iken, bozulma oranı sabit olup β ya eşit olmaktadır ve $\delta_1 = 1, \delta_2 = 0$ iken, bozulma oranı fonksiyonu 2β değerine sahip ve sabit oluyor. Şimdi (4.14)'de verilen bozulma oranı fonksiyonu grafiği çizilecektir;



Şekil 4.3 G_4 – dağılımın bozulma oranı fonksiyonu

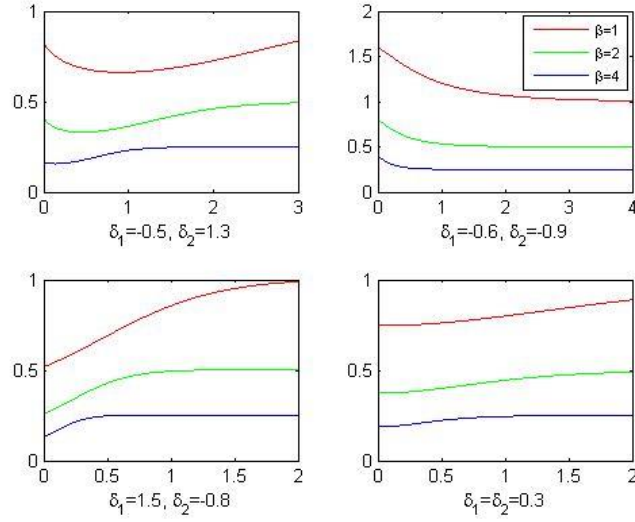
Şimdi ortalama kalan ömür fonksiyonu elde edecektir,

$$m(t; \Theta) = \frac{1}{\beta} \left(1 + \frac{-3(\delta_1 + 2\delta_2)e^{-\beta t} + 4\delta_2 e^{-2\beta t}}{6((1 - \delta_1 - \delta_2) + (\delta_1 + 2\delta_2)e^{-\beta t} - \delta_2 e^{-2\beta t})} \right).$$

Elde edilen ortalama kalan ömür fonksiyonun özelliklerine bakılacaktır,

$$m(0; \Theta) = \frac{1}{\beta} \left(1 - \frac{\delta_1}{2} - \frac{\delta_2}{3} \right), \quad \lim_{t \rightarrow \infty} m(t; \Theta) = \frac{1}{\beta}$$

ve bazı parametre değerleri için ortalama kalan ömür fonksiyonu aşağıdaki şekillerde verilmiştir.



Şekil 4.4 G_4 – dağılımın ortalama kalan fonksiyonu

4.1.7 G_4 – dağılımın özel durumu için moment çıkaran fonksiyon, momentler ve çarpıklık ve basıklık katsayıları

Önerilen rasgele değişkenin moment çıkaran fonksiyonu bulunacaktır,

$$\begin{aligned} M_T(k) &= (1 - \delta_1 - \delta_2) \frac{\beta}{\beta - k} + (\delta_1 + 2\delta_2) \frac{2\beta}{2\beta - k} - \delta_2 \frac{3\beta}{3\beta - k} \\ &= (1 - \delta_1 - \delta_2) M_{\text{Üstel}(\beta)}(k) + (\delta_1 + 2\delta_2) M_{\text{Üstel}(2\beta)}(k) - \delta_2 M_{\text{Üstel}(3\beta)}(k) \end{aligned}$$

burada $k < \beta$ dir. Şimdi elde edilen dağılımın özelliklerine bakılacaktır. İlk olarak k. moment bulunacaktır,

$$E(T^k) = \Gamma(k+1) \left(\frac{1 - \delta_1 - \delta_2}{\beta^k} + \frac{\delta_1 + 2\delta_2}{(2\beta)^k} - \frac{\delta_2}{(3\beta)^k} \right)$$

Burada $k = 1, 2, 3, 4$ alınırsa ilk dört moment elde edilecektir. Beklenen değer ise,

$$E(T) = \frac{1}{6\beta} (6 - 3\delta_1 - 2\delta_2)$$

Burada $\delta_1 < -\frac{2}{3}\delta_2$ iken, bu rasgele değişken, üstel rasgele değişkenden daha uzun ömür beklentisine sahip olacaktır. Bu rasgele değişkenin varyansı aşağıdaki gibi bulunmaktadır,

$$Var(T) = \frac{1}{\beta^2} - \frac{18\delta_1 - 20\delta_2 - 9\delta_1^2 - 12\delta_1\delta_2 - 4\delta_2^2}{36\beta^2}.$$

Bu dağılımın çarpıklık ve basıklık katsayıları sırasıyla,

$$\zeta_K = \frac{2(216 - 21\delta_1^3 - 114\delta_2 - 60\delta_2^2 - 8\delta_2^3 - 27\delta_1^2(3 + 2\delta_2) - 9\delta_1(9 + 16\delta_2 + 4\delta_2^2))}{(-9\delta_1^2 - 6\delta_1(3 + 2\delta_2) - 4(-9 + 5\delta_2 + \delta_2^2))^{\frac{3}{2}}}$$

$$BK = -6 \left(\frac{1}{2} + \frac{810\delta_1^2 + 1176\delta_1\delta_2 + 1620\delta_1 + 392\delta_2^2 + 1960\delta_2 - 2592}{(9\delta_1^2 + 6\delta_1(3 + 2\delta_2) + 4(-9 + 5\delta_2 + \delta_2^2))^2} \right).$$

elde edilir.

4.1.8 G_4 – dağılımın özel durumu için en çok olabilirlik tahmini ve Fisher bilgi matrisi

$(t_1, t_2, \dots, t_n)$ önerilen dağılımdan n-boyutlu gözlenen örneklem olsun. $\theta = \{\delta_1, \delta_2, \beta\}$

parametrelerin olabilirlik fonksiyonu,

$$L(\Theta; t_i) = \prod_{i=1}^n ((1 - \delta_1 - \delta_2)\beta e^{-\beta t_i} + (\delta_1 + 2\delta_2)2\beta e^{-2\beta t_i} - 3\delta_2\beta e^{-3\beta t_i}).$$

olarak yazılır. Bu alt bölüm boyunca, log-olabilirlik fonksiyonu kısaltması $\ell = \log L(\Theta; t_i)$ ile gösterilir. ℓ fonksiyonu δ_1, δ_2 ve β parametrelerine göre aşağıdaki gibi ayırt edilir,

$$\frac{\partial \ell}{\partial \delta_1} = \sum_{i=1}^n \frac{-(1 - 2e^{-\beta t_i})\beta e^{-\beta t_i}}{g_4(t_i; \Theta)}, \quad (4.15)$$

$$\frac{\partial \ell}{\partial \delta_2} = \sum_{i=1}^n \frac{-(1 - e^{-\beta t_i})(1 - 3e^{-\beta t_i})\beta e^{-\beta t_i}}{g_4(t_i; \Theta)}, \quad (4.16)$$

$$\frac{\partial \ell}{\partial \beta} = \frac{n}{\beta} - \sum_{i=1}^n t_i - 2 \sum_{i=1}^n \frac{((\delta_1 + 2\delta_2) - 3\delta_2 e^{-\beta t_i})\beta t_i e^{-2\beta t_i}}{g_4(t_i; \Theta)}, \quad (4.17)$$

$\hat{\delta}_1, \hat{\delta}_2$ ve $\hat{\beta}$ parametrelerinin en çok olabilirlik tahmin edicileri, (4.15), (4.16) ve (4.17) denklemlerini sıfıra eşitleyerek ve eşitlikleri aynı anda çözerek elde edilir. Bu üç parametre için, bilgi matris elemanlarını elde etmek için olasılık yoğunluk fonksiyonunun logaritmasının ikinci dereceden türevleri elde edilecektir,

$$I_{\delta_1 \delta_1} = \frac{\partial^2 \ell}{\partial \delta_1^2} = - \sum_{i=1}^n \left(\frac{(1 - 2e^{-\beta t_i})\beta e^{-\beta t_i}}{g_4(t_i; \Theta)} \right)^2$$

$$I_{\delta_2 \delta_2} = \frac{\partial^2 \ell}{\partial \delta_2^2} = - \sum_{i=1}^n \left(\frac{(1 - e^{-\beta t_i})(1 - 3e^{-\beta t_i})\beta e^{-\beta t_i}}{g_4(t_i; \Theta)} \right)^2$$

$$\begin{aligned}
I_{\beta\beta} &= \frac{\partial^2 \ell}{\partial \beta^2} \\
&= -\frac{n}{\beta^2} + 2 \sum_{i=1}^n \frac{\left((1 - \delta_1 - \delta_2)(\delta_1 + 2\delta_2) - 6(1 - \delta_1 - \delta_2)\delta_2 e^{-\beta t_i} - 3(\delta_1 + 2\delta_2)\delta_2 e^{-2\beta t_i} \right) (\beta t_i)^2 e^{-3\beta t_i}}{(g_4(t_i; \Theta))^2} \\
I_{\delta_2 \delta_1} &= I_{\delta_1 \delta_2} = \frac{\partial^2 \ell}{\partial \delta_2 \partial \delta_1} = \sum_{i=1}^n \frac{-(1 - e^{-\beta t_i})(1 - 2e^{-\beta t_i})(1 - 3e^{-\beta t_i})(\beta e^{-\beta t_i})^2}{(g_4(t_i; \Theta))^2} \\
I_{\beta \delta_1} &= I_{\delta_1 \beta} = \frac{\partial^2 \ell}{\partial \beta \partial \delta_1} = \sum_{i=1}^n \frac{-2((1 + \delta_2) - 3\delta_2 e^{-\beta t_i} + 3\delta_2 e^{-2\beta t_i})\beta^2 t_i e^{-3\beta t_i}}{(g_4(t_i; \Theta))^2} \\
I_{\delta_2 \beta} &= I_{\beta \delta_2} = \frac{\partial^2 \ell}{\partial \delta_2 \partial \beta} = \sum_{i=1}^n \frac{-2((2 - \delta_1) - 3(1 - \delta_1)e^{-\beta t_i} - 3\delta_1 e^{-2\beta t_i})\beta^2 t_i e^{-3\beta t_i}}{(g_4(t_i; \Theta))^2}
\end{aligned}$$

$\Theta = \{\delta_1, \delta_2, \beta\}$ için n boyutunda örneğin Fisher bilgi matrisi $I_n(\Theta)$ aşağıdaki gibidir,

$$I_n(\Theta) = -E \begin{pmatrix} I_{\delta_1 \delta_1} & I_{\delta_1 \delta_2} & I_{\delta_1 \beta} \\ I_{\delta_2 \delta_1} & I_{\delta_2 \delta_2} & I_{\delta_2 \beta} \\ I_{\beta \delta_1} & I_{\beta \delta_2} & I_{\beta \beta} \end{pmatrix}$$

Tek gözlemin bilgi matrisinin tersi, yani $I_1^{-1}(\Theta)$, Θ 'nın en çok olabilirlik tahminlerinin asimptotik varyans-kovaryans matrisini gösterir. Dolayısıyla, Θ için en çok olabilirlik tahmincisinin ortak dağılımı, ortalama Θ ve varyans-kovaryans matrisi $I_1^{-1}(\Theta)$ ile asimptotik olarak normaldir. Yani

$$\sqrt{n} \left(\begin{bmatrix} \hat{\delta}_1 \\ \hat{\delta}_2 \\ \hat{\beta} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \beta \end{bmatrix} \right) \xrightarrow{D} N \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, I_1^{-1}(\delta_1, \delta_2, \beta) \right). \quad (4.18)$$

Bu ters dağılım matrisi çözülmüşse, bu çözümler bu parametreler için en çok olabilirlik tahmincilerinin asimptotik varyansı ve kovaryanslarını verecektir. $\delta_1, \delta_2, \beta$ parametreleri

için yaklaşık olarak $100(1 - \gamma)\%$ güven aralıkları sırasıyla aşağıdaki gibidir,

$$\begin{aligned} & \left(\hat{\delta}_1 - z_{1-\frac{\gamma}{2}} \sqrt{I_{\delta_1 \delta_1}^{-1}}, \hat{\delta}_1 + z_{1-\frac{\gamma}{2}} \sqrt{I_{\delta_1 \delta_1}^{-1}} \right), \quad \left(\hat{\delta}_2 - z_{1-\frac{\gamma}{2}} \sqrt{I_{\delta_2 \delta_2}^{-1}}, \hat{\delta}_2 + z_{1-\frac{\gamma}{2}} \sqrt{I_{\delta_2 \delta_2}^{-1}} \right), \\ & \left(\hat{\beta} - z_{1-\frac{\gamma}{2}} \sqrt{I_{\beta \beta}^{-1}}, \hat{\beta} + z_{1-\frac{\gamma}{2}} \sqrt{I_{\beta \beta}^{-1}} \right), \end{aligned}$$

burada $z_{\frac{\gamma}{2}}$, standart normal dağılımın 100γ üst kantilidir.

4.1.9 G_4 – dağılımın özel durumu için Rényi entropisi

(4.13) denkleminde tanımlanan olasılık yoğunluk fonksiyonu göz önüne alınsın. Rényi entropiyi elde etmek için $(g_4(t; \Theta))^\rho$ genelleştirilmiş Binom açılımı yazılacaktır,

$$\begin{aligned} (g_4(t; \Theta))^\rho &= ((1 - \delta_1 - \delta_2)\beta e^{-\beta t} + 2(\delta_1 + 2\delta_2)\beta e^{-2\beta t} - 3\delta_2\beta e^{-3\beta t})^\rho \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \binom{\rho}{j} ((1 - \delta_1 - \delta_2)\beta e^{-\beta t} + 2(\delta_1 + 2\delta_2)\beta e^{-2\beta t})^{\rho-j} (-3\delta_2\beta e^{-3\beta t})^j \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \binom{\rho}{j} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \binom{\rho-j}{k} ((1 - \delta_1 - \delta_2)\beta e^{-\beta t})^{\rho-j-k} (2(\delta_1 + 2\delta_2)\beta e^{-2\beta t})^k \right) (-3)^j \delta_2^j \beta^j e^{-3j\beta t} \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} (-3)^j 2^k \binom{\rho}{j} \binom{\rho-j}{k} (1 - \delta_1 - \delta_2)^{\rho-j-k} (\delta_1 + 2\delta_2)^k \delta_2^j \beta^\rho e^{-(\rho-4j-3k)\beta t} \end{aligned}$$

açılımı verilir ve Rényi entropi ise,

$$I_\rho(T) = \frac{1}{1-\rho} \log \left[\sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} (-3)^j 2^k \binom{\rho}{j} \binom{\rho-j}{k} (1 - \delta_1 - \delta_2)^{\rho-j-k} (\delta_1 + 2\delta_2)^k \delta_2^j \frac{\beta^\rho}{(\rho - 4j - 3k)\beta} \right].$$

şeklinde hesaplanır.

4.1.10 G_4 – dağılımın özel durumu için sıra istatistikleri

$T_1, T_2, \dots, T_n$ bağımsız ve aynı dağılımlı rasgele değişkenlerin j . sıra istatistiği, $X_{j:n}$ ile gösterilmek üzere bu sıra istatistiğin olasılık yoğunluk fonksiyonu, $j = 1, 2, \dots, n$ için,

$$\begin{aligned} h_{j:n}(t) &= \frac{n!}{(j-1)!(n-j)!} \left(\beta e^{-\beta t} (1 - \delta_1 - \delta_2 + 2(\delta_1 + 2\delta_2)e^{-\beta t} - 3\delta_2 e^{-2\beta t}) \right) \\ &\quad \times \left(1 - (1 - \delta_1 - \delta_2)e^{-\beta t} - (\delta_1 + 2\delta_2)e^{-2\beta t} + \delta_2 e^{-3\beta t} \right)^{j-1} \\ &\quad \times \left(e^{-\beta t} (1 - \delta_1 - \delta_2 + (\delta_1 + 2\delta_2)e^{-\beta t} - \delta_2 e^{-2\beta t}) \right)^{n-j}, \end{aligned}$$

şeklinde bulunmuştur. Böylece, birinci ve sonuncu sıra istatistiklerinin olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$\begin{aligned} h_{1:n}(t) &= n \left(\beta e^{-\beta t} (1 - \delta_1 - \delta_2 + 2(\delta_1 + 2\delta_2)e^{-\beta t} - 3\delta_2 e^{-2\beta t}) \right) \\ &\quad \times \left(e^{-\beta t} (1 - \delta_1 - \delta_2 + (\delta_1 + 2\delta_2)e^{-\beta t} - \delta_2 e^{-2\beta t}) \right)^{n-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h_{n:n}(t) &= n \left(\beta e^{-\beta t} (1 - \delta_1 - \delta_2 + 2(\delta_1 + 2\delta_2)e^{-\beta t} - 3\delta_2 e^{-2\beta t}) \right) \\ &\quad \times \left(1 - (1 - \delta_1 - \delta_2)e^{-\beta t} - (\delta_1 + 2\delta_2)e^{-2\beta t} + \delta_2 e^{-3\beta t} \right)^{j-1}. \end{aligned}$$

olarak bulunur.

4.2 Bağımsız Farklı Dağılıma Sahip Üç Bileşenli Sistemler ile Önerilen Dönüşüm

2.9.2 bölümünde üç bileşenli sistemlerde elde edilen bileşenlerin ömürleri bağımsız aynı dağılıma sahip alındığında, sistemlerin başarısızlık olasılıkları aşağıdaki gibi özetlenebilir:

$$H_{1:3}(t) = F_{T_1}(t) + F_{T_2}(t) + F_{T_3}(t) - F_{T_1}(t)F_{T_2}(t) - F_{T_1}(t)F_{T_3}(t) - F_{T_2}(t)F_{T_3}(t) + F_{T_1}(t)F_{T_2}(t)F_{T_3}(t),$$

$$H_{2:3}(t) = F_{T_1}(t)F_{T_2}(t) + F_{T_1}(t)F_{T_3}(t) + F_{T_2}(t)F_{T_3}(t) - 2F_{T_1}(t)F_{T_2}(t)F_{T_3}(t),$$

$$H_{3:3}(t) = F_{T_1}(t)F_{T_2}(t)F_{T_3}(t).$$

Önceki bölümde anlatılan sıralama bu bölüm için de geçerlidir yani $H_{3:3}(t) < H_{2:3}(t) < H_{1:3}(t)$ olup, böylece aynı şekilde $H_{2:3}(t) < G^*(t) < H_{1:3}(t)$ olduğundan denklem (4.1) de anlatıldığı gibi $G^*(t)$ tanımlanacaktır. Şimdi $H_{3:3}(t) < G(t) < G^*(t)$ olacak biçimde $G(t)$ yi $G^*(t)$ ve $H_{3:3}(t)$ fonksiyonların bir konveks kombinasyonu olarak yazılabilir;

$$\begin{aligned} G(t) &= \lambda_1 \lambda_2 H_{1:3}(t) + (1 - \lambda_1) \lambda_2 H_{2:3}(t) + (1 - \lambda_2) H_{3:3}(t), \\ &= \lambda_1 \lambda_2 (F_{T_1}(t) + F_{T_2}(t) + F_{T_3}(t)) + (1 - 2\lambda_1) \lambda_2 (F_{T_1}(t)F_{T_2}(t) + F_{T_1}(t)F_{T_3}(t) + F_{T_2}(t)F_{T_3}(t)) \\ &\quad + (1 - 3\lambda_2 + 3\lambda_1 \lambda_2) (F_{T_1}(t)F_{T_2}(t)F_{T_3}(t)) \end{aligned} \quad (4.19)$$

burada bu dağılım fonksiyonu Shaw ve Buckley (2007) makalesinde tanıttığı dönüşümlü dağılım şeklinde yazabilmemiz için ilk olarak, $\frac{\lambda_1 \lambda_2}{3} = w_1$, $\frac{\lambda_2 - \lambda_1 \lambda_2}{3} = w_2$ tanımlanır. Burada $w_1 \in [0,1]$ ve $w_2 \in [0,1]$ aralığında değer alıyor. Böylece dönüşümlü dağılım fonksiyonumuz;

$$\begin{aligned} G(t) &= 3w_1 (F_{T_1}(t) + F_{T_2}(t) + F_{T_3}(t)) + 3(w_2 - w_1) (F_{T_1}(t)F_{T_2}(t) + F_{T_1}(t)F_{T_3}(t) + F_{T_2}(t)F_{T_3}(t)) \\ &\quad + (1 - 9w_2) (F_{T_1}(t)F_{T_2}(t)F_{T_3}(t)) \end{aligned}$$

olarak bulunur. Dönüşüm parametrelerini aşağıdaki gibi tanımlanacaktır; $w_1 = \frac{1+\delta_1}{3}$, $w_2 = \frac{1+\delta_2}{3}$, $\delta_1, \delta_2 \in [-1,2]$ ve buradan $\delta_1 + \delta_2 \leq 1$ olarak elde edilir. Böylece dönüşümlü dağılım aşağıdaki gibi yazılmıştır,

$$\begin{aligned}
G_5(t; \delta_1, \delta_2) &= (1 + \delta_1) \left(F_{T_1}(t) + F_{T_2}(t) + F_{T_3}(t) \right) \\
&\quad + (\delta_2 - \delta_1) \left(F_{T_1}(t)F_{T_2}(t) + F_{T_1}(t)F_{T_3}(t) + F_{T_2}(t)F_{T_3}(t) \right) \\
&\quad - (2 + 3\delta_2) \left(F_{T_1}(t)F_{T_2}(t)F_{T_3}(t) \right) \\
&= (1 + \delta_1)H_{1:3}(t) + (1 + \delta_2)H_{2:3}(t) - (1 + \delta_1 + \delta_2)H_{3:3}(t), \tag{4.20}
\end{aligned}$$

Böylece (4.20) fonksiyonundan önerilen T rasgele değişkenin olasılık yoğunluk fonksiyonu aşağıdaki gibi elde edilecektir;

$$\begin{aligned}
g_5(t; \delta_1, \delta_2) &= (1 + \delta_1) \left(f_{T_1}(t) + f_{T_2}(t) + f_{T_3}(t) \right) \\
&\quad + (\delta_2 - \delta_1) \left(f_{T_1}(t)F_{T_2}(t) + F_{T_1}(t)f_{T_2}(t) + f_{T_1}(t)F_{T_3}(t) + F_{T_1}(t)f_{T_3}(t) \right. \\
&\quad \left. + f_{T_2}(t)F_{T_3}(t) + F_{T_2}(t)f_{T_3}(t) \right) \\
&\quad - (2 + 3\delta_2) \left(f_{T_1}(t)F_{T_2}(t)F_{T_3}(t) + F_{T_1}(t)f_{T_2}(t)F_{T_3}(t) \right. \\
&\quad \left. + F_{T_1}(t)F_{T_2}(t)f_{T_3}(t) \right) \\
&= (1 + \delta_1)h_{1:3}(t) + (1 + \delta_2)h_{2:3}(t) - (1 + \delta_1 + \delta_2)h_{3:3}(t), \tag{4.21}
\end{aligned}$$

Şimdi yaşam fonksiyonu ve bozulma oranı fonksiyonunu elde edilecektir;

$$\begin{aligned}
\bar{G}_5(t; \delta_1, \delta_2) &= -(1 + 4\delta_1 - 2\delta_2) \left(\bar{F}_{T_1}(t) + \bar{F}_{T_2}(t) + \bar{F}_{T_3}(t) \right) \\
&\quad + (2 + \delta_1 + 2\delta_2) \left(\bar{F}_{T_1}(t)\bar{F}_{T_2}(t) + \bar{F}_{T_1}(t)\bar{F}_{T_3}(t) + \bar{F}_{T_2}(t)\bar{F}_{T_3}(t) \right) \\
&\quad - (2 + 3\delta_2)\bar{F}_{T_1}(t)\bar{F}_{T_2}(t)\bar{F}_{T_3}(t).
\end{aligned}$$

4.2.1 G_5 – dağılımın moment çıkaran fonksiyonu, momentleri ve çarpıklık ve basıklık katsayıları

T rasgele değişkeninin moment çıkaran fonksiyonu aşağıdaki gibi elde etmektedir;

$$M_T(k) = (1 + \delta_1)M_{X_{1:3}}(t) + (1 + \delta_2)M_{X_{2:3}}(t) - (1 + \delta_1 + \delta_2)M_{X_{3:3}}(t)$$

Bu rasgele değişkenin k. momenti aşağıda verilmektedir,

$$E(T^k) = (1 + \delta_1)E(X_{1:3}^k) + (1 + \delta_2)E(X_{2:3}^k) - (1 + \delta_1 + \delta_2)E(X_{3:3}^k)$$

Son denklemde $k = 1, 2, 3, 4$ alınır ise, o zaman bu rasgele değişkenin ilk dört momenti çarpıklık ve basıklık hesaplamak için elde ediliyor. İlk olarak bu rasgele değişkenin çarpıklık katsayısı aşağıdaki gibi bulunmaktadır;

$$\zeta_K = \frac{1}{var(T)^{\frac{3}{2}}} \left(\begin{aligned} & (1 + \delta_1)E(X_{1:3}^3) + (1 + \delta_2)E(X_{2:3}^3) - (1 + \delta_1 + \delta_2)E(X_{3:3}^3) \\ & - 3((1 + \delta_1)E(X_{1:3}) + (1 + \delta_2)E(X_{2:3}) - (1 + \delta_1 + \delta_2)E(X_{3:3})) \\ & \times ((1 + \delta_1)E(X_{1:3}^2) + (1 + \delta_2)E(X_{2:3}^2) - (1 + \delta_1 + \delta_2)E(X_{3:3}^2)) \\ & + 2((1 + \delta_1)E(X_{1:3}) + (1 + \delta_2)E(X_{2:3}) - (1 + \delta_1 + \delta_2)E(X_{3:3}))^3 \end{aligned} \right)$$

Şimdi bu dağılımın basıklık katsayısı bulunacaktır;

$$BK = \frac{1}{Var(T)^2} \left(\begin{aligned} & (1 + \delta_1)E(X_{1:3}^4) + (1 + \delta_2)E(X_{2:3}^4) - (1 + \delta_1 + \delta_2)E(X_{3:3}^4) \\ & - 4((1 + \delta_1)E(X_{1:3}) + (1 + \delta_2)E(X_{2:3}) - (1 + \delta_1 + \delta_2)E(X_{3:3})) \\ & \times ((1 + \delta_1)E(X_{1:3}^3) + (1 + \delta_2)E(X_{2:3}^3) - (1 + \delta_1 + \delta_2)E(X_{3:3}^3)) \\ & + 6((1 + \delta_1)E(X_{1:3}) + (1 + \delta_2)E(X_{2:3}) - (1 + \delta_1 + \delta_2)E(X_{3:3}))^2 \\ & \times ((1 + \delta_1)E(X_{1:3}^2) + (1 + \delta_2)E(X_{2:3}^2) - (1 + \delta_1 + \delta_2)E(X_{3:3}^2)) \\ & - 3((1 + \delta_1)E(X_{1:3}) + (1 + \delta_2)E(X_{2:3}) - (1 + \delta_1 + \delta_2)E(X_{3:3}))^4 \end{aligned} \right)$$

4.2.2 G_5 – dağılımdan rasgele sayı üretme

Bu dağılımdan rasgele sayı üretmek için, denklem (4.20) de verilen dağılımın karma olduğu hatırlansın. Bu karma dağılımın bileşenleri sırasıyla, 3'lü sistemin 3.sinin ömür dağılımı, 3'lü sistemin 2.sinin ömür dağılımı ve 3'lü sistemin 1.sinin ömrü dağılımıdır.

Karma ağırlıkları sırasıyla $1 + \delta_1$, $1 + \delta_2$ ve $-(1 + \delta_1 + \delta_2)$ olup, $\delta_1, \delta_2 \in [-1, 2]$ ve

$\delta_1 + \delta_2 \in [-2,1]$ dır. Buna göre, önerilen dağılımdan sayı üretmek için aşağıdaki adımlar takip edilecektir:

Algoritma	Karma yöntemi ile rasgele sayı üretme
Adım 1:	T_1, T_2, T_3 rasgele sayılar bağımsız olarak F temel dağılımından üret,
Adım 2:	U rasgele değişkenini düzgün $(0,1)$ dağılımından üret,
Adım 3:	Eğer $u \leq 1 + \delta_1$ ise, o zaman $t = \min\{T_1, T_2, T_3\}$ den üret,
Adım 4:	Eğer $u \leq 1 + \delta_2$ ise, o zaman $t = \max\{\min\{T_1, T_2\}, \min\{T_1, T_3\}, \min\{T_2, T_3\}\}$ den üret,
Adım 5:	Aksi takdirde, $t = \max\{T_1, T_2, T_3\}$ den üret.

4.2.3 G_5 – dağılımı için özel durum

Bu kısımda $T_i, i = 1,2,3$ rasgele değişkenleri bağımsız sırası ile $\beta_i, i = 1,2,3$ parametreleri ile üstel dağılımına sahip olsun. Yani denklem (4.20)'deki temel dağılımlar, iki farklı üstel dağılım olarak düşünülür, böylece;

$$\begin{aligned}
 G_5(t; \Theta) = & 1 + (1 + \delta_1 + \delta_2)(e^{-\beta_1 t} + e^{-\beta_2 t} + e^{-\beta_3 t}) \\
 & - (2 + \delta_1 + 2\delta_2)(e^{-(\beta_1 + \beta_2)t} + e^{-(\beta_1 + \beta_3)t} + e^{-(\beta_2 + \beta_3)t}) \\
 & + (2 + 3\delta_2)e^{-(\beta_1 + \beta_2 + \beta_3)t}, \quad (4.22)
 \end{aligned}$$

burada parametre uzayı $\Theta = \{(\delta_1, \delta_2, \beta_1, \beta_2, \beta_3): \delta_1, \delta_2 \in [-1,2], \delta_1 + \delta_2 \leq 1, \beta_1, \beta_2, \beta_3 > 0\}$ olarak tanımlanır. Şimdi bu dağılımın olasılık yoğunluk fonksiyonunu elde edelim;

$$\begin{aligned}
 g_5(t; \Theta) = & -(1 + \delta_1 + \delta_2)(\beta_1 e^{-\beta_1 t} + \beta_2 e^{-\beta_2 t} + \beta_3 e^{-\beta_3 t}) \\
 & + (2 + \delta_1 + 2\delta_2) \left((\beta_1 + \beta_2)e^{-(\beta_1 + \beta_2)t} + (\beta_1 + \beta_3)e^{-(\beta_1 + \beta_3)t} \right. \\
 & \left. + (\beta_2 + \beta_3)e^{-(\beta_2 + \beta_3)t} \right) - (2 + 3\delta_2)(\beta_1 + \beta_2 + \beta_3)e^{-(\beta_1 + \beta_2 + \beta_3)t}, \quad (4.23)
 \end{aligned}$$

burada $\delta_1, \delta_2 \in [-1,2], \delta_1 + \delta_2 \leq 1$ olarak tanımlanmıştır. Yukarıda tanımlanan olasılık

yoğunluk fonksiyonu aşağıdaki gibi analiz edilebilir,

$$\begin{aligned} g'_5(t; \Theta) = & (1 + \delta_1 + \delta_2)(\beta_1^2 e^{-\beta_1 t} + \beta_2^2 e^{-\beta_2 t} + \beta_3^2 e^{-\beta_3 t}) \\ & - (2 + \delta_1 + 2\delta_2)((\beta_1 + \beta_2)^2 e^{-(\beta_1 + \beta_2)t} + (\beta_1 + \beta_3)^2 e^{-(\beta_1 + \beta_3)t} \\ & + (\beta_2 + \beta_3)^2 e^{-(\beta_2 + \beta_3)t}) + (2 + 3\delta_2)(\beta_1 + \beta_2 + \beta_3)^2 e^{-(\beta_1 + \beta_2 + \beta_3)t} \end{aligned}$$

Bu türevin negatif olması için, birinci toplamın negatif olması için $\delta_1 + \delta_2 < -1$ olmalıdır, üçüncü toplamın negatif olması için $\delta_2 < -\frac{2}{3}$ olmalıdır ve böylece ikinci toplam da negatif olması için $2 + \delta_1 + 2\delta_2$ olmalıdır yani $\delta_1 < -\frac{2}{3}$ olmalıdır. Böylece bu fonksiyonun azalan olması için yani türevin negatif olması için koşullar $\delta_1 > -\frac{2}{3}, \delta_2 < -\frac{2}{3}$ ve $\delta_1 + \delta_2 < -1$ olmasıdır. Ayrıca $\delta_1 = \delta_2$ iken de türevin işareti negatif olup fonksiyon azalan olmaktadır.

Şimdi türevin pozitif olması incelenecektir. Bu türevin pozitif olması için $\delta_1 < -\frac{2}{3}, \delta_2 > -\frac{2}{3}$ ve $\delta_1 + \delta_2 > -1$ olmalıdır.

Bu dağılımın yaşam fonksiyonu ve bozulma oranı fonksiyonu aşağıdaki gibi bulunur;

$$\begin{aligned} \bar{G}_5(t; \Theta) = & -(1 + \delta_1 + \delta_2)(e^{-\beta_1 t} + e^{-\beta_2 t} + e^{-\beta_3 t}) \\ & + (2 + \delta_1 + 2\delta_2)(e^{-(\beta_1 + \beta_2)t} + e^{-(\beta_1 + \beta_3)t} + e^{-(\beta_2 + \beta_3)t}) \\ & - (2 + 3\delta_2)e^{-(\beta_1 + \beta_2 + \beta_3)t} \end{aligned}$$

burada $\beta > 0, \delta_1, \delta_2 \in [-1, 2], \delta_1 + \delta_2 \leq 1$ dır.

4.2.4 G_5 – dağılımın özel durumu için moment çıkaran fonksiyon, momentler ve çarpıklık ve basıklık katsayıları

Önerilen rasgele değişkenin moment çıkaran fonksiyonu bulunacaktır,

$$\begin{aligned}
M_T(k) = & -(1 + \delta_1 + \delta_2) \left(\frac{\beta_1}{\beta_1 - k} + \frac{\beta_2}{\beta_2 - k} + \frac{\beta_3}{\beta_3 - k} \right) \\
& + (2 + \delta_1 + 2\delta_2) \left(\frac{\beta_1 + \beta_2}{\beta_1 + \beta_2 - k} + \frac{\beta_1 + \beta_3}{\beta_1 + \beta_3 - k} + \frac{\beta_2 + \beta_3}{\beta_2 + \beta_3 - k} \right) \\
& - (2 + 3\delta_2) \frac{\beta_1 + \beta_2 + \beta_3}{\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 - k}
\end{aligned}$$

burada $k < \min\{\beta_1, \beta_2, \beta_3\}$ dir. Şimdi elde edilen dağılımın özelliklerine bakılacaktır. İlk olarak k. moment bulunacaktır,

$$\begin{aligned}
E(T^k) = & -\Gamma(k+1)(1 + \delta_1 + \delta_2) \left(\frac{1}{\beta_1^k} + \frac{1}{\beta_2^k} + \frac{1}{\beta_3^k} \right) \\
& + \Gamma(k+1)(2 + \delta_1 + 2\delta_2) \left(\frac{1}{(\beta_1 + \beta_2)^k} + \frac{1}{(\beta_1 + \beta_3)^k} + \frac{1}{(\beta_2 + \beta_3)^k} \right) \\
& - (2 + 3\delta_2) \frac{\Gamma(k+1)}{(\beta_1 + \beta_2 + \beta_3)^k}
\end{aligned}$$

Burada $k = 1, 2, 3, 4$ alınır ise, ilk dört momenti ve çarpıklık ve basıklık katsayıları elde edilecektir.

4.2.5 G_5 – dağılımın özel durumu için en çok olabilirlik tahmini ve Fisher bilgi matrisi

$(t_1, t_2, \dots, t_n)$ önerilen dağılımdan gözlenen değerler olsun. $\Theta = \{\delta_1, \delta_2, \beta_1, \beta_2, \beta_3\}$ parametre uzayı için olabilirlik fonksiyonu,

$$\begin{aligned}
L(\Theta; t_i) = & \prod_{i=1}^n \left(-(1 + \delta_1 + \delta_2) (\beta_1 e^{-\beta_1 t} + \beta_2 e^{-\beta_2 t} + \beta_3 e^{-\beta_3 t}) \right. \\
& + (2 + \delta_1 + 2\delta_2) \left((\beta_1 + \beta_2) e^{-(\beta_1 + \beta_2)t} + (\beta_1 + \beta_3) e^{-(\beta_1 + \beta_3)t} \right. \\
& \left. \left. + (\beta_2 + \beta_3) e^{-(\beta_2 + \beta_3)t} \right) - (2 + 3\delta_2) (\beta_1 + \beta_2 + \beta_3) e^{-(\beta_1 + \beta_2 + \beta_3)t} \right).
\end{aligned}$$

olarak yazılır. Log-olabilirlik fonksiyonu $\delta_1, \delta_2, \beta_1, \beta_2$ ve β_3 parametrelerine göre aşağıdaki gibi ayırt edilir,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ell}{\partial \delta_1} = & - \sum_{i=1}^n \frac{\beta_1 e^{-\beta_1 t} + \beta_2 e^{-\beta_2 t} + \beta_3 e^{-\beta_3 t}}{g_5(t_i; \Theta)} \\ & + \sum_{i=1}^n \frac{(\beta_1 + \beta_2) e^{-(\beta_1 + \beta_2)t} + (\beta_1 + \beta_3) e^{-(\beta_1 + \beta_3)t} + (\beta_2 + \beta_3) e^{-(\beta_2 + \beta_3)t}}{g_5(t_i; \Theta)}, \end{aligned} \quad (4.24)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ell}{\partial \delta_2} = & - \sum_{i=1}^n \frac{(\beta_1 e^{-\beta_1 t} + \beta_2 e^{-\beta_2 t} + \beta_3 e^{-\beta_3 t}) + 3(\beta_1 + \beta_2 + \beta_3) e^{-(\beta_1 + \beta_2 + \beta_3)t}}{g_5(t_i; \Theta)} \\ & + \sum_{i=1}^n \frac{2 \left((\beta_1 + \beta_2) e^{-(\beta_1 + \beta_2)t} + (\beta_1 + \beta_3) e^{-(\beta_1 + \beta_3)t} + (\beta_2 + \beta_3) e^{-(\beta_2 + \beta_3)t} \right)}{g_5(t_i; \Theta)}, \end{aligned} \quad (4.25)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ell}{\partial \beta_1} = & - \sum_{i=1}^n \frac{(1 + \delta_1 + \delta_2)(1 - \beta_1 t) e^{-\beta_1 t}}{g_5(t_i; \Theta)} \\ & + \sum_{i=1}^n \frac{(2 + \delta_1 + 2\delta_2) \left((1 - (\beta_1 + \beta_2)t) e^{-(\beta_1 + \beta_2)t} + (1 - (\beta_1 + \beta_3)t) e^{-(\beta_1 + \beta_3)t} \right)}{g_5(t_i; \Theta)} \\ & - \sum_{i=1}^n \frac{(2 + 3\delta_2)(1 - (\beta_1 + \beta_2 + \beta_3)t) e^{-(\beta_1 + \beta_2 + \beta_3)t}}{g_5(t_i; \Theta)}, \end{aligned} \quad (4.26)$$

$$\frac{\partial \ell}{\partial \beta_2} = - \sum_{i=1}^n \frac{(1 + \delta_1 + \delta_2)(1 - \beta_2 t) e^{-\beta_2 t}}{g_5(t_i; \Theta)}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{i=1}^n \frac{(2 + \delta_1 + 2\delta_2) \left((1 - (\beta_1 + \beta_2)t)e^{-(\beta_1 + \beta_2)t} + (1 - (\beta_2 + \beta_3)t)e^{-(\beta_2 + \beta_3)t} \right)}{g_5(t_i; \Theta)} \\
& - \sum_{i=1}^n \frac{(2 + 3\delta_2)(1 - (\beta_1 + \beta_2 + \beta_3)t)e^{-(\beta_1 + \beta_2 + \beta_3)t}}{g_5(t_i; \Theta)}, \tag{4.27}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \ell}{\partial \beta_3} = & - \sum_{i=1}^n \frac{(1 + \delta_1 + \delta_2)(1 - \beta_3 t)e^{-\beta_3 t}}{g_5(t_i; \Theta)} \\
& + \sum_{i=1}^n \frac{(2 + \delta_1 + 2\delta_2) \left((1 - (\beta_1 + \beta_3)t)e^{-(\beta_1 + \beta_3)t} + (1 - (\beta_2 + \beta_3)t)e^{-(\beta_2 + \beta_3)t} \right)}{g_5(t_i; \Theta)} \\
& - \sum_{i=1}^n \frac{(2 + 3\delta_2)(1 - (\beta_1 + \beta_2 + \beta_3)t)e^{-(\beta_1 + \beta_2 + \beta_3)t}}{g_5(t_i; \Theta)}, \tag{4.28}
\end{aligned}$$

$\hat{\delta}_1, \hat{\delta}_2, \hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2$ ve $\hat{\beta}_3$ parametrelerinin en çok olabilirlik tahmin edicileri, (4.24), (4.25), (4.26), (4.27) ve (4.28) denklemlerini sıfıra eşitleyerek ve eşitlikleri aynı anda çözerek elde edilir. Bu üç parametre için, bilgi matris elemanlarını elde etmek için log-olabilirlik fonksiyonunun parametrelere göre ikinci dereceden türevleri elde edilerek $\Theta = \{\delta, \beta_1, \beta_2\}$ parametre uzayı için örnek büyüklüğü n olan Fisher bilgi matrisi,

$$I_n(\Theta) = -E \begin{pmatrix} I_{\delta_1 \delta_1} & I_{\delta_1 \delta_2} & I_{\delta_1 \beta_1} & I_{\delta_1 \beta_2} & I_{\delta_1 \beta_3} \\ I_{\delta_2 \delta_1} & I_{\delta_2 \delta_2} & I_{\delta_2 \beta_1} & I_{\delta_2 \beta_2} & I_{\delta_2 \beta_3} \\ I_{\beta_1 \delta_1} & I_{\beta_1 \delta_2} & I_{\beta_1 \beta_1} & I_{\beta_1 \beta_2} & I_{\beta_1 \beta_3} \\ I_{\beta_2 \delta_1} & I_{\beta_2 \delta_2} & I_{\beta_2 \beta_1} & I_{\beta_2 \beta_2} & I_{\beta_2 \beta_3} \\ I_{\beta_3 \delta_1} & I_{\beta_3 \delta_2} & I_{\beta_3 \beta_1} & I_{\beta_3 \beta_2} & I_{\beta_3 \beta_3} \end{pmatrix}$$

dır. Dolayısıyla, Θ parametre uzayı için en çok olabilirlik tahmincisinin ortak dağılımı,

ortalaması Θ ve varyans-kovaryans matrisi $I_1^{-1}(\Theta)$ olan asimptotik normaldir. Yani,

$$\sqrt{n} \left(\begin{bmatrix} \hat{\delta}_1 \\ \hat{\delta}_2 \\ \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \\ \hat{\beta}_3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix} \right) \xrightarrow{D} N \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, I_1^{-1}(\Theta) \right). \quad (4.29)$$

dır. Bu ters dağılım matrisi çözülrse, bu çözümler parametreler için en çok olabilirlik tahmincilerinin asimptotik varyansı ve kovaryanslarını verecektir. $\delta_1, \delta_2, \beta_1, \beta_2$ ve β_3 parametreleri için yaklaşık olarak $100(1 - \gamma)\%$ güven aralıkları sırasıyla aşağıdaki gibidir.

$$\begin{aligned} & \left(\hat{\delta}_1 - z_{1-\frac{\gamma}{2}} \sqrt{I_{\delta_1 \delta_1}^{-1}}, \hat{\delta}_1 + z_{1-\frac{\gamma}{2}} \sqrt{I_{\delta_1 \delta_1}^{-1}} \right), \left(\hat{\delta}_2 - z_{1-\frac{\gamma}{2}} \sqrt{I_{\delta_2 \delta_2}^{-1}}, \hat{\delta}_2 + z_{1-\frac{\gamma}{2}} \sqrt{I_{\delta_2 \delta_2}^{-1}} \right), \\ & \left(\hat{\beta}_1 - z_{1-\frac{\gamma}{2}} \sqrt{I_{\beta_1 \beta_1}^{-1}}, \hat{\beta}_1 + z_{1-\frac{\gamma}{2}} \sqrt{I_{\beta_1 \beta_1}^{-1}} \right), \quad \left(\hat{\beta}_2 - z_{1-\frac{\gamma}{2}} \sqrt{I_{\beta_2 \beta_2}^{-1}}, \hat{\beta}_2 + z_{1-\frac{\gamma}{2}} \sqrt{I_{\beta_2 \beta_2}^{-1}} \right), \\ & \left(\hat{\beta}_3 - z_{1-\frac{\gamma}{2}} \sqrt{I_{\beta_3 \beta_3}^{-1}}, \hat{\beta}_3 + z_{1-\frac{\gamma}{2}} \sqrt{I_{\beta_3 \beta_3}^{-1}} \right). \end{aligned}$$

4.2.6 G_5 – dağılımın özel durumu için Rényi entropisi

(4.23) denkleminde tanımlanan olasılık yoğunluk fonksiyonu göz önüne alınsın. Rényi entropiyi elde etmek için $(g_5(t; \Theta))^{\rho}$ genelleştirilmiş Binom açılımı yazılacaktır,

$$\begin{aligned}
(g_5(t; \Theta))^\rho &= \left(-(1 + \delta_1 + \delta_2)(\beta_1 e^{-\beta_1 t} + \beta_2 e^{-\beta_2 t} + \beta_3 e^{-\beta_3 t}) \right. \\
&\quad + (2 + \delta_1 + 2\delta_2) \left((\beta_1 + \beta_2) e^{-(\beta_1 + \beta_2)t} + (\beta_1 + \beta_3) e^{-(\beta_1 + \beta_3)t} \right. \\
&\quad \left. \left. + (\beta_2 + \beta_3) e^{-(\beta_2 + \beta_3)t} \right) - (2 + 3\delta_2)(\beta_1 + \beta_2 + \beta_3) e^{-(\beta_1 + \beta_2 + \beta_3)t} \right)^\rho \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \binom{\rho}{j} \binom{\rho-j}{k} \binom{\rho-j-k}{n} \binom{\rho-j-k-n}{r} \binom{j}{l} \binom{j-l}{m} (-1)^{\rho-j} (1 + \delta_1 \\
&\quad + \delta_2)^{\rho-j-k} (2 + \delta_1 + 2\delta_2)^j (2 + 3\delta_2)^k \beta_1^{\rho-j-k-n-r} \beta_2^r \beta_3^n (\beta_1 + \beta_2)^{j-l-m} (\beta_1 \\
&\quad + \beta_3)^m (\beta_2 + \beta_3)^l (\beta_1 + \beta_2 + \beta_3)^k e^{-(\rho-n-r-l)\beta_1 + (r+k+j-m)\beta_2 + (n+k+l-m)\beta_3} t
\end{aligned}$$

açılımı verilir ve Rényi entropi ise,

$$\begin{aligned}
I_\rho(T) &= \frac{1}{1-\rho} \log \left[\sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \binom{\rho}{j} \binom{\rho-j}{k} \binom{\rho-j-k}{n} \binom{\rho-j-k-n}{r} \binom{j}{l} \binom{j-l}{m} (-1)^{\rho-j} (1 + \delta_1 + \delta_2)^{\rho-j-k} (2 + \delta_1 \right. \\
&\quad \left. + 2\delta_2)^j (2 + 3\delta_2)^k \frac{\beta_1^{\rho-j-k-n-r} \beta_2^r \beta_3^n (\beta_1 + \beta_2)^{j-l-m} (\beta_1 + \beta_3)^m (\beta_2 + \beta_3)^l (\beta_1 + \beta_2 + \beta_3)^k}{(\rho-n-r-l)\beta_1 + (r+k+j-m)\beta_2 + (n+k+l-m)\beta_3} \right]
\end{aligned}$$

şeklinde hesaplanır.

4.2.7 G_5 – dağılımın özel durumu için sıra istatistikleri

$T_1, T_2, \dots, T_n$ bağımsız ve aynı dağılımlı rasgele değişkenlerin j . sıra istatistiği, $X_{j:n}$ ile gösterilmek üzere bu sıra istatistiğin olasılık yoğunluk fonksiyonu, $j = 1, 2, \dots, n$ için,

$$\begin{aligned}
h_{j:n}(t) &= \frac{n!}{(j-1)!(n-j)!} \left(-(1 + \delta_1 + \delta_2)(\beta_1 e^{-\beta_1 t} + \beta_2 e^{-\beta_2 t} + \beta_3 e^{-\beta_3 t}) \right. \\
&\quad + (2 + \delta_1 + 2\delta_2) \left((\beta_1 + \beta_2) e^{-(\beta_1 + \beta_2)t} + (\beta_1 + \beta_3) e^{-(\beta_1 + \beta_3)t} + (\beta_2 + \beta_3) e^{-(\beta_2 + \beta_3)t} \right) \\
&\quad - (2 + 3\delta_2)(\beta_1 + \beta_2 + \beta_3) e^{-(\beta_1 + \beta_2 + \beta_3)t} \left(1 + (1 + \delta_1 + \delta_2)(e^{-\beta_1 t} + e^{-\beta_2 t} + e^{-\beta_3 t}) \right. \\
&\quad \left. - (2 + \delta_1 + 2\delta_2)(e^{-(\beta_1 + \beta_2)t} + e^{-(\beta_1 + \beta_3)t} + e^{-(\beta_2 + \beta_3)t}) \right) \\
&\quad + (2 + 3\delta_2) e^{-(\beta_1 + \beta_2 + \beta_3)t} \left. \right)^{j-1} \left(-(1 + \delta_1 + \delta_2)(e^{-\beta_1 t} + e^{-\beta_2 t} + e^{-\beta_3 t}) \right. \\
&\quad \left. + (2 + \delta_1 + 2\delta_2)(e^{-(\beta_1 + \beta_2)t} + e^{-(\beta_1 + \beta_3)t} + e^{-(\beta_2 + \beta_3)t}) - (2 + 3\delta_2) e^{-(\beta_1 + \beta_2 + \beta_3)t} \right)^{n-j},
\end{aligned}$$

şeklinde bulunmuştur. Böylece, birinci ve sonuncu sıra istatistiklerinin olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$\begin{aligned} h_{1:n}(t) = n & \left(-(1 + \delta_1 + \delta_2)(\beta_1 e^{-\beta_1 t} + \beta_2 e^{-\beta_2 t} + \beta_3 e^{-\beta_3 t}) \right. \\ & + (2 + \delta_1 + 2\delta_2) \left((\beta_1 + \beta_2) e^{-(\beta_1 + \beta_2)t} + (\beta_1 + \beta_3) e^{-(\beta_1 + \beta_3)t} + (\beta_2 + \beta_3) e^{-(\beta_2 + \beta_3)t} \right) \\ & - (2 + 3\delta_2)(\beta_1 + \beta_2 + \beta_3) e^{-(\beta_1 + \beta_2 + \beta_3)t} \left. \right) \left(-(1 + \delta_1 + \delta_2)(e^{-\beta_1 t} + e^{-\beta_2 t} + e^{-\beta_3 t}) \right. \\ & + (2 + \delta_1 + 2\delta_2)(e^{-(\beta_1 + \beta_2)t} + e^{-(\beta_1 + \beta_3)t} + e^{-(\beta_2 + \beta_3)t}) - (2 + 3\delta_2) e^{-(\beta_1 + \beta_2 + \beta_3)t} \left. \right)^{n-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h_{n:n}(t) = n & \left(-(1 + \delta_1 + \delta_2)(\beta_1 e^{-\beta_1 t} + \beta_2 e^{-\beta_2 t} + \beta_3 e^{-\beta_3 t}) \right. \\ & + (2 + \delta_1 + 2\delta_2) \left((\beta_1 + \beta_2) e^{-(\beta_1 + \beta_2)t} + (\beta_1 + \beta_3) e^{-(\beta_1 + \beta_3)t} + (\beta_2 + \beta_3) e^{-(\beta_2 + \beta_3)t} \right) \\ & - (2 + 3\delta_2)(\beta_1 + \beta_2 + \beta_3) e^{-(\beta_1 + \beta_2 + \beta_3)t} \left. \right) \left(1 + (1 + \delta_1 + \delta_2)(e^{-\beta_1 t} + e^{-\beta_2 t} + e^{-\beta_3 t}) \right. \\ & - (2 + \delta_1 + 2\delta_2)(e^{-(\beta_1 + \beta_2)t} + e^{-(\beta_1 + \beta_3)t} + e^{-(\beta_2 + \beta_3)t}) + (2 + 3\delta_2) e^{-(\beta_1 + \beta_2 + \beta_3)t} \left. \right)^{j-1}. \end{aligned}$$

olarak bulunur.

4.3 Bağımlı Birbirleri ile Yer Değiştirilebilir Özelliğine Sahip Üç Bileşenli Sistemler ile Önerilen Dönüşüm

2.9.2 alt bölümünde üç bileşenli sistemlerde sistemlerin başarısızlık olasılıkları elde edilmiştir ve bu bileşenlerin ömürleri bağımlı dağılıma sahip iken başarısızlık olasılıkları verilmiştir. Tanım 2.10 de anlatıldığı gibi tanımlanan dağılımlar birbirleri ile yer değiştirilebilir dağılım alınacaktır, yani $F(t, \infty, \infty) = F(\infty, t, \infty) = F(\infty, \infty, t) = F_{T_i}(t)$ ve $F(t, t, \infty) = F(t, \infty, t) = F(\infty, t, t) = F_{T_1, T_2}(t, t)$ alınır ve başarısızlık olasılıkları,

$$H_{1:3}(t) = 3F_{T_i}(t) - 3F_{T_1, T_2}(t, t) + F_{T_1, T_2, T_3}(t, t, t), \quad H_{2:3}(t) = 3F_{T_1, T_2}(t, t) - 2F_{T_1, T_2, T_3}(t, t, t)$$

$$H_{3:3}(t) = F_{T_1, T_2, T_3}(t, t, t)$$

olarak hesaplanır. Önceki bölümlerde gözüktüğü gibi aşağıdaki konveks kombinasyonu burada da geçerlidir;

$$\begin{aligned} G(t) &= \lambda_1 \lambda_2 H_{1:3}(t) + (1 - \lambda_1) \lambda_2 H_{2:3}(t) + (1 - \lambda_2) H_{3:3}(t) \\ &= 3\lambda_1 \lambda_2 F_{T_i}(t) + 3(1 - 2\lambda_1) \lambda_2 F_{T_1, T_2}(t, t) + (1 - 3\lambda_2 + 3\lambda_1 \lambda_2) F_{T_1, T_2, T_3}(t, t, t) \end{aligned}$$

burada $3\lambda_1 \lambda_2 = w_1$, $3(1 - \lambda_1) \lambda_2 = w_2$ olarak tanımlanınca,

$$G(t) = w_1 F_{T_i}(t) + (w_2 - w_1) F_{T_1, T_2}(t, t) + (1 - w_2) F_{T_1, T_2, T_3}(t, t, t)$$

ki $w_1, w_2 \in [0, 1]$ dir. Dönüşüm parametreleri aşağıdaki gibi tanımlansın,

$$w_1 = 1 + \delta_1, w_2 = 1 + \delta_2, \quad \delta_1, \delta_2 \in [-1, 2]$$

Şimdi δ_1 ve δ_2 parametreleri arasındaki ilişki bulunacaktır, $0 \leq w_1 + w_2 \leq 1$ aralığında değer alır ve buradan $\delta_1 + \delta_2 \leq 1$ olarak elde edilir. Böylece dönüşümlü dağılımı,

$$\begin{aligned} G_6(t; \delta_1, \delta_2) &= (1 + \delta_1) F_{T_i}(t) + (\delta_2 - \delta_1) F_{T_1, T_2}(t, t) - \delta_2 F_{T_1, T_2, T_3}(t, t, t) \\ &= 1 - (1 - \delta_1 - \delta_2) \bar{F}_{T_i}(t) - (\delta_1 + 2\delta_2) \bar{F}_{T_1, T_2}(t, t) + \delta_2 \bar{F}_{T_1, T_2, T_3}(t, t, t) \\ &= \frac{1 + \delta_1}{3} H_{1:3}(t) + \frac{1 + \delta_2}{3} H_{2:3}(t) + \frac{1 - \delta_1 - \delta_2}{3} H_{3:3}(t), \end{aligned} \quad (4.30)$$

olarak yazılır ve $\delta_1, \delta_2 \in [-1, 2]$ aralığında değerler alır, ayrıca $\delta_1 + \delta_2 \leq 1$ olarak tanımlanmıştır.

Teorem 4.2 Önerilen dağılımın olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$\begin{aligned} g_6(t; \delta) &= (1 - \delta_1 - \delta_2) f_{T_i}(t) + (\delta_1 + 2\delta_2) \bar{F}_{T_1, T_2}(t, t) (\psi_1(t) + \psi_2(t)) \\ &\quad - \delta_2 \bar{F}_{T_1, T_2, T_3}(t, t, t) (\tau_{1,2}(t, t) + \tau_{1,3}(t, t) + \tau_{2,3}(t, t)). \end{aligned} \quad (4.31)$$

şeklinde tanımlanır, burada $\tau_{1,2}, \tau_{1,3}$ ve $\tau_{2,3}$ her bileşenin t zamanında yaşadığı bilindiğinde, ilgili bileşenlerin başarısızlık oranlarıdır.

İspat. Önerilen rasgele değişkenin olasılık yoğunluk fonksiyonu, (4.30) denkleminde tanımlanan dağılım fonksiyonunun türevi ile aşağıdaki gibi elde edilebilir,

$$g_6(t; \delta) = (1 - \delta_1 - \delta_2) \left(\frac{-d}{dt} \bar{F}_{T_i}(t) \right) + (\delta_1 + 2\delta_2) \left(\frac{-d}{dt} \bar{F}_{T_1, T_2}(t, t) \right) - \delta_2 \left(\frac{-d}{dt} \bar{F}_{T_1, T_2, T_3}(t, t, t) \right)$$

(4.31) denkleminde gösterilen fonksiyon aşağıdaki yöntem ile elde edilecektir,

$$\begin{aligned} \frac{-d}{dt} \bar{F}_{T_1, T_2, T_3}(t, t, t) &= \frac{-d}{dt} \int_t^\infty \int_t^\infty \int_t^\infty f_{T_1, T_2, T_3}(u, v, z) dz dv du \\ &= - \int_t^\infty f_{T_1, T_2, T_3}(u, t, t) du - \int_t^\infty f_{T_1, T_2, T_3}(t, v, t) dv - \int_t^\infty f_{T_1, T_2, T_3}(t, t, z) dz \\ &= -f_{T_2, T_3}(t, t) P(T_1 \leq t | T_2 = t, T_3 = t) - f_{T_1, T_3}(t) P(T_2 \leq t | T_1 = t, T_3 = t) \\ &\quad - f_{T_1, T_2}(t) P(T_3 \leq t | T_1 = t, T_2 = t) \\ &= \frac{-d^2}{dt_1 dt_2} \bar{F}_{T_1, T_2, T_3}(t_1, t_2, t) \Big|_{t_1=t}^{t_2=t} + \frac{-d^2}{dt_1 dt_3} \bar{F}_{T_1, T_2, T_3}(t_1, t, t_3) \Big|_{t_1=t}^{t_3=t} \\ &\quad + \frac{-d^2}{dt_2 dt_3} \bar{F}_{T_1, T_2, T_3}(t, t_2, t_3) \Big|_{t_2=t}^{t_3=t} \\ &= \tau_{1,2}(t, t) \bar{F}_{T_1, T_2, T_3}(t, t, t) + \tau_{1,3}(t, t) \bar{F}_{T_1, T_2, T_3}(t, t, t) + \tau_{2,3}(t, t) \bar{F}_{T_1, T_2, T_3}(t, t, t), \end{aligned}$$

burada $\tau_{1,2}, \tau_{1,3}$ ve $\tau_{2,3}$ her bileşenin t zamanında yaşadığı bilindiğinde, ilgili bileşenlerin başarısızlık oranlarını aşağıdaki gibi belirlenir,

$$\begin{aligned} \tau_{1,2}(t, t) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0^+} \frac{P(t < T_1 \leq t + \Delta t, t < T_2 \leq t + \Delta t | T_1 > t, T_2 > t, T_3 > t)}{\Delta t} \\ &= \frac{\frac{-d^2}{dt_1 dt_2} \bar{F}_{T_1, T_2, T_3}(t_1, t_2, t) \Big|_{t_1=t}^{t_2=t}}{\bar{F}_{T_1, T_2, T_3}(t, t, t)}, \quad t \geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tau_{1,3}(t, t) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0^+} \frac{P(t < T_1 \leq t + \Delta t, t < T_3 \leq t + \Delta t | T_1 > t, T_2 > t, T_3 > t)}{\Delta t} \\ &= \frac{\frac{-d^2}{dt_1 dt_3} \bar{F}_{T_1, T_2, T_3}(t_1, t, t_3) \Big|_{t_1=t}^{t_3=t}}{\bar{F}_{T_1, T_2, T_3}(t, t, t)}. \quad t \geq 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tau_{2,3}(t, t) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0^+} \frac{P(t < T_2 \leq t + \Delta t, t < T_3 \leq t + \Delta t | T_1 > t, T_2 > t, T_3 > t)}{\Delta t} \\ &= \frac{\frac{-d^2}{dt_2 dt_3} \bar{F}_{T_1, T_2, T_3}(t, t_2, t_3) \Big|_{t_2=t}^{t_3=t}}{\bar{F}_{T_1, T_2, T_3}(t, t, t)}. \quad t \geq 0\end{aligned}$$

4.3.1 G_6 – dağılımın yaşam fonksiyonu ve bozulma oranı fonksiyonu

(3.27) ifadesinde elde edilen dağılım ele alınarak yaşam fonksiyonu,

$$\bar{G}_6(t; \delta_1, \delta_2) = (1 - \delta_1 - \delta_2) \bar{F}_{T_1}(t) + (\delta_1 + 2\delta_2) \bar{F}_{T_1, T_2}(t, t) - \delta_2 \bar{F}_{T_1, T_2, T_3}(t, t, t).$$

olarak yazılır. Buradan elde edilen dağılımın bozulma oranı fonksiyonu,

$$r_{G_6}(t; \delta) = \frac{(1 - \delta_1 - \delta_2) r_{F_1}(t) \bar{F}_{T_1}(t) + (\delta_1 + 2\delta_2) \bar{F}_{T_1, T_2}(t, t) (\psi_1(t) + \psi_2(t)) - \delta_2 \bar{F}_{T_1, T_2, T_3}(t, t, t) (\tau_{1,2}(t, t) + \tau_{1,3}(t, t) + \tau_{2,3}(t, t))}{(1 - \delta_1 - \delta_2) \bar{F}_{T_1}(t) + (\delta_1 + 2\delta_2) \bar{F}_{T_1, T_2}(t, t) - \delta_2 \bar{F}_{T_1, T_2, T_3}(t, t, t)}$$

şeklinde elde edilmiştir.

4.3.2 G_6 – dağılımı için özel durum

Bu kısımda özel dağılım olarak 2.8 alt bölümünde anlatılan FGM dağılımı ele alınacaktır.

Denklem (2.7) den yola çıkarak, (4.30) de elde edilen yeni üç boyutlu dağılım,

$$G_6(t; \Theta) = 1 - (1 - \delta_1 - \delta_2)e^{-\beta t} - (\delta_1 + 2\delta_2)e^{-2\beta t} + \delta_2 e^{-3\beta t} \left((1 - \theta) + 3\theta e^{-\beta t} - 3\theta e^{-2\beta t} + \theta e^{-3\beta t} \right), \quad (4.32)$$

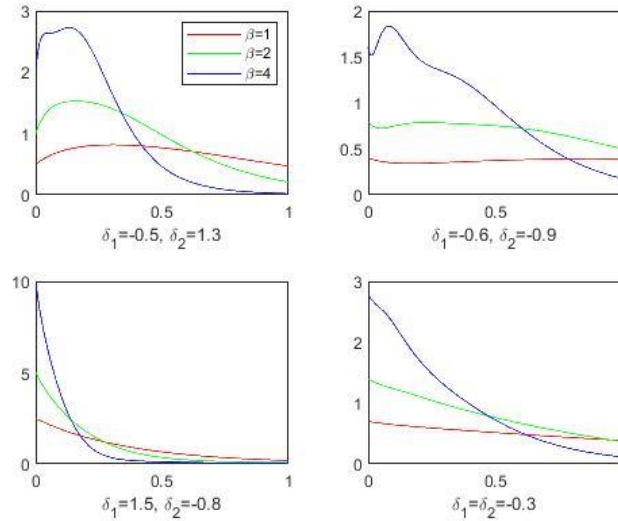
olarak bulunur. Burada parametre uzayı,

$$\Theta = \{(\delta_1, \delta_2, \beta, \theta): \delta_1, \delta_2 \in [-1, 2], \delta_1 + \delta_2 \leq 1, \beta > 0, \theta \in [-1, 1]\}$$

olarak tanımlanır. Şimdi bu dağılımın olasılık yoğunluk fonksiyonunu elde edelim;

$$g_6(t; \Theta) = (1 - \delta_1 - \delta_2)\beta e^{-\beta t} + 2(\delta_1 + 2\delta_2)\beta e^{-2\beta t} - 3\delta_2\beta e^{-3\beta t} \left((1 - \theta) + 4\theta e^{-\beta t} - 5\theta e^{-2\beta t} + 2\theta e^{-3\beta t} \right), \quad (4.33)$$

Şimdi bahsedilen olasılık yoğunluk fonksiyonu farklı parametreler için çizilecektir;



Şekil 4.5 G_6 – dağılımın olasılık yoğunluk fonksiyonu

4.3.3 G_6 – dağılımın özel durumu için matematiksel özellikleri

Bu dağılımın yaşam fonksiyonu ve bozulma oranı fonksiyonu aşağıdaki gibi bulunur;

$$\begin{aligned}\bar{G}_6(t; \Theta) &= (1 - \delta_1 - \delta_2)e^{-\beta t} + (\delta_1 + 2\delta_2)e^{-2\beta t} \\ &\quad - \delta_2 e^{-3\beta t} \left((1 - \theta) + 3\theta e^{-\beta t} - 3\theta e^{-2\beta t} + \theta e^{-3\beta t} \right)\end{aligned}$$

Bozulma oranı fonksiyonu ise,

$$\begin{aligned}r_{G_6}(t; \theta) &= \beta \frac{(1 - \delta_1 - \delta_2) + 2(\delta_1 + 2\delta_2)e^{-\beta t} - 3\delta_2 e^{-2\beta t} \left((1 - \theta) + 4\theta e^{-\beta t} - 5\theta e^{-2\beta t} + 2\theta e^{-3\beta t} \right)}{(1 - \delta_1 - \delta_2) + (\delta_1 + 2\delta_2)e^{-\beta t} - \delta_2 e^{-2\beta t} \left((1 - \theta) + 3\theta e^{-\beta t} - 3\theta e^{-2\beta t} + \theta e^{-3\beta t} \right)}, \quad (4.34)\end{aligned}$$

Burada bozulma oranı fonksiyonunun dönüşüm parametresinin uç noktalarında aldığı değerler aşağıda verilmiştir.

$$r_{G_6}(0; \theta) = \beta(1 + \delta_1)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} r_{G_6}(t; \theta) = \beta$$

Ayrıca, bozulma oranı fonksiyonu parametrenin uç değerlerinde aşağıdaki gibi elde edilir,

- (i) $\delta_1 = 0$ ve $\delta_2 = 0$ iken, bu bozulma oranı fonksiyonu üstel dağılımın bozulma oranı fonksiyonu ile aynıdır;

$$r_{G_6}(t; \theta) = \beta$$

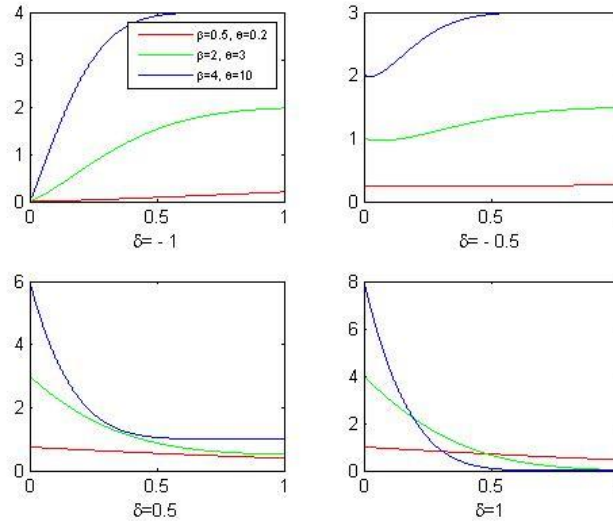
- (ii) $\delta_1 = 1$ ve $\delta_2 = 1$ iken, bu bozulma oranı fonksiyonu lineer bozulma oranı fonksiyonudur;

$$r_{G_6}(t; \theta) = \beta \frac{-e^{-\beta t} + 6e^{-2\beta t} - 3e^{-3\beta t} \left((1 - \theta) + 4\theta e^{-\beta t} - 5\theta e^{-2\beta t} + 2\theta e^{-3\beta t} \right)}{-e^{-\beta t} + 3e^{-2\beta t} - e^{-3\beta t} \left((1 - \theta) + 3\theta e^{-\beta t} - 3\theta e^{-2\beta t} + \theta e^{-3\beta t} \right)}$$

(iii) $\theta = 0$ iken, bu bozulma oranı fonksiyonu dönüştürülmüş üstel dağılımın bozulma oranı fonksiyonu ile aynıdır;

$$r_{G_6}(t; \Theta) = \beta \left(1 + \frac{(\delta_1 + 2\delta_2)e^{-2\beta t} - 2\delta_2 e^{-3\beta t}}{(1 - \delta_1 - \delta_2)e^{-\beta t} + (\delta_1 + 2\delta_2)e^{-2\beta t} - \delta_2 e^{-3\beta t}} \right)$$

Önerilen bozulma oran fonksiyonun grafiği aşağıdaki gibidir.



Şekil 4.6 G_3 – dağılımın bozulma oranı fonksiyonu

Şekil 4.8’de önerilen dağılımın bozulma oranı fonksiyonu farklı parametreler için gösterilmiştir. Görüldüğü gibi, negatif δ değerleri için bozulma oranı fonksiyonu artan ve pozitif δ değerleri için azalandır. Ortalama kalan ömür fonksiyonu,

$$\begin{aligned} m(t; \theta) &= \frac{\int_t^\infty (1 - \delta_1 - \delta_2)e^{-\beta k} + (\delta_1 + 2\delta_2)e^{-2\beta k} - \delta_2 e^{-3\beta k} (1 - \theta + 3\theta e^{-\beta k} - 3\theta e^{-2\beta k} + \theta e^{-3\beta k}) dk}{(1 - \delta_1 - \delta_2)e^{-\beta t} + (\delta_1 + 2\delta_2)e^{-2\beta t} - \delta_2 e^{-3\beta t} ((1 - \theta) + 3\theta e^{-\beta t} - 3\theta e^{-2\beta t} + \theta e^{-3\beta t})} \\ &= \frac{\frac{1 - \delta_1 - \delta_2}{\beta} e^{-\beta t} + \frac{\delta_1 + 2\delta_2}{2\beta} e^{-2\beta t} - \delta_2 \left(\frac{1 - \theta}{3\beta} e^{-3\beta t} + \frac{3\theta}{4\beta} e^{-4\beta t} - \frac{3\theta}{5\beta} e^{-5\beta t} + \frac{\theta}{6\beta} e^{-6\beta t} \right)}{(1 - \delta_1 - \delta_2)e^{-\beta t} + (\delta_1 + 2\delta_2)e^{-2\beta t} - \delta_2 e^{-3\beta t} ((1 - \theta) + 3\theta e^{-\beta t} - 3\theta e^{-2\beta t} + \theta e^{-3\beta t})} \end{aligned}$$

dır. Ortalama kalan ömür fonksiyonu aşağıdaki özelliklere sahiptir:

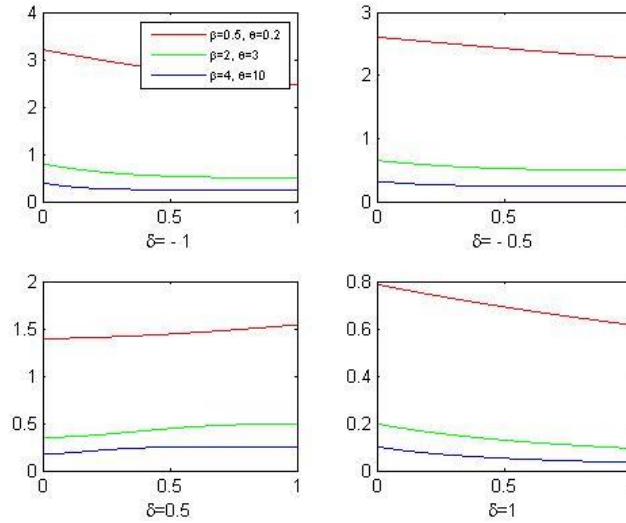
- (iii) $\delta = 0$ iken, önerilen dağılımın ortalama kalan ömür fonksiyonu üstel dağılımın ortalama kalan ömür fonksiyonu ile aynıdır;

$$m(t; \Theta) = \frac{1}{\beta}$$

- (iv) $\delta = 1$ iken, ortalama kalan ömür fonksiyonu aşağıdaki gibidir;

$$m(t; \Theta) = -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\theta}} \operatorname{erfc} \left(\frac{\beta + \theta t}{\sqrt{\theta}} \right) e^{\frac{\beta^2}{\theta} + 2\beta t + \theta t^2},$$

Tanımlanan ortalama kalan ömür fonksiyonu bazı parametre değerleri için aşağıda verilmiştir.



Şekil 4.7 G_3 – dağılımın ortalama kalan ömür fonksiyonu

4.3.4 G_6 – dağılımın özel durumu için moment çıkaran fonksiyon, momentler ve çarpıklık ve basıklık katsayıları

Önerilen rasgele değişkenin moment çıkaran fonksiyonu bulunacaktır,

$$M_T(k) = (1 - \delta_1 - \delta_2) \frac{\beta}{\beta - k} + (\delta_1 + 2\delta_2) \frac{2\beta}{2\beta - k} - 3\delta_2\beta \left(\frac{(1 - \theta)}{3\beta - k} + \frac{4\theta}{4\beta - k} - \frac{5\theta}{5\beta - k} + \frac{2\theta}{6\beta - k} \right).$$

burada $k < \beta$ dir. Şimdi elde edilen dağılımın özelliklerine bakılacaktır. İlk olarak k . moment bulunacaktır,

$$E(T^k) = (1 - \delta_1 - \delta_2) \frac{\Gamma(k+1)}{\beta^k} + 2(\delta_1 + 2\delta_2) \frac{\Gamma(k+1)}{(2\beta)^k} - 3\Gamma(k+1)\delta_2 \left(\frac{1 - \theta}{(3\beta)^k} + \frac{4\theta}{(4\beta)^k} - \frac{5\theta}{(5\beta)^k} + \frac{2\theta}{(6\beta)^k} \right).$$

Burada $k = 1, 2, 3, 4$ alınırsa ilk dört moment elde edilecektir.

4.3.5 G_6 – dağılımın özel durumu için en çok olabilirlik tahmini ve Fisher bilgi matrisi

$(t_1, t_2, \dots, t_n)$ önerilen dağılımdan gözlenen değerler olsun. $\theta = \{\delta_1, \delta_2, \beta, \theta\}$ parametre uzayı için olabilirlik fonksiyonu,

$$L(\theta; t_i) = \prod_{i=1}^n \left((1 - \delta_1 - \delta_2)\beta e^{-\beta t_i} + 2(\delta_1 + 2\delta_2)\beta e^{-2\beta t_i} - 3\delta_2\beta \left((1 - \theta)e^{-3\beta t_i} + 4\theta e^{-4\beta t_i} - 5\theta e^{-5\beta t_i} + 2\theta e^{-6\beta t_i} \right) \right),$$

olarak yazılır. Log-olabilirlik fonksiyonu $\delta_1, \delta_2, \beta$ ve θ parametrelerine göre aşağıdaki gibi ayırt edilir.

$$\frac{\partial \ell}{\partial \delta_1} = \sum_{i=1}^n \frac{-\beta e^{-\beta t_i} (1 - 2e^{-\beta t_i})}{g_6(t_i; \theta)}, \quad (4.35)$$

$$\frac{\partial \ell}{\partial \delta_2} = \sum_{i=1}^n \frac{-\beta e^{-\beta t_i} + 4\beta e^{-2\beta t_i} - 3\beta \left((1-\theta)e^{-3\beta t_i} + 4\theta e^{-4\beta t_i} - 5\theta e^{-5\beta t_i} + 2\theta e^{-6\beta t_i} \right)}{g_6(t_i; \Theta)}, \quad (4.36)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ell}{\partial \beta} = & \sum_{i=1}^n \frac{(1-\delta_1-\delta_2)(1-\beta t_i)e^{-\beta t_i} + 2(\delta_1+2\delta_2)(1-2\beta t_i)e^{-2\beta t_i}}{g_6(t_i; \Theta)} \\ & - \sum_{i=1}^n \frac{3\delta_2 e^{-3\beta t_i} \left((1-\theta)(1-3\beta t_i) + 4\theta(1-4\beta t_i)e^{-\beta t_i} - 5\theta(1-5\beta t_i)e^{-2\beta t_i} + 2\theta(1-6\beta t_i)e^{-3\beta t_i} \right)}{g_6(t_i; \Theta)}, \end{aligned} \quad (4.37)$$

$$\frac{\partial \ell}{\partial \theta} = \sum_{i=1}^n \frac{-3\delta_2 \beta e^{-3\beta t_i} (-1 + 4e^{-\beta t_i} - 5e^{-2\beta t_i} + 2e^{-3\beta t_i})}{g_6(t_i; \Theta)}. \quad (4.38)$$

$\hat{\delta}_1, \hat{\delta}_2, \hat{\beta}$ ve $\hat{\theta}$ parametrelerinin en çok olabilirlik tahmin edicileri, (4.35) – (4.38) denklemlerini sıfıra eşitleyerek ve eşitlikleri aynı anda çözülerek elde edilir. Bu üç parametre için, Fisher bilgi matrisi elemanlarını elde etmek için log-olabilirlik fonksiyonunun parametrelere göre ikinci dereceden türevleri alınarak Θ parametre uzayı için örnek boyutu n olan,

$$I_n(\Theta) = -E \begin{pmatrix} I_{\delta_1 \delta_1} & I_{\delta_1 \delta_2} & I_{\delta_1 \beta} & I_{\delta_1 \theta} \\ I_{\delta_2 \delta_1} & I_{\delta_2 \delta_2} & I_{\delta_2 \beta} & I_{\delta_2 \theta} \\ I_{\beta \delta_1} & I_{\beta \delta_2} & I_{\beta \beta} & I_{\beta \theta} \\ I_{\theta \delta_1} & I_{\theta \delta_2} & I_{\theta \beta} & I_{\theta \theta} \end{pmatrix}$$

biçiminde verilir. Böylece, Θ parametre uzayı için en çok olabilirlik tahmincisinin dağılımı, ortalaması Θ ve varyans-kovaryans matrisi $I_1^{-1}(\Theta)$ olan asimptotik normaldir. Yani,

$$\sqrt{n} \left(\begin{bmatrix} \hat{\delta}_1 \\ \hat{\delta}_2 \\ \hat{\beta} \\ \hat{\theta} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \beta \\ \theta \end{bmatrix} \right) \xrightarrow{D} N \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, I_1^{-1}(\Theta) \right). \quad (4.39)$$

dır. $\delta_1, \delta_2, \beta$ ve θ parametreleri için yaklaşık olarak $100(1 - \gamma)\%$ güven aralıkları (4.39) deki yaklaşım yardımıyla sırasıyla,

$$\begin{aligned} & \left(\hat{\delta}_1 - z_{1-\frac{\gamma}{2}} \sqrt{I_{\delta_1 \delta_1}^{-1}}, \hat{\delta}_1 + z_{1-\frac{\gamma}{2}} \sqrt{I_{\delta_1 \delta_1}^{-1}} \right), & \left(\hat{\delta}_2 - z_{1-\frac{\gamma}{2}} \sqrt{I_{\delta_2 \delta_2}^{-1}}, \hat{\delta}_2 + z_{1-\frac{\gamma}{2}} \sqrt{I_{\delta_2 \delta_2}^{-1}} \right) \\ & \left(\hat{\beta} - z_{1-\frac{\gamma}{2}} \sqrt{I_{\beta \beta}^{-1}}, \hat{\beta} + z_{1-\frac{\gamma}{2}} \sqrt{I_{\beta \beta}^{-1}} \right), & \left(\hat{\theta} - z_{1-\frac{\gamma}{2}} \sqrt{I_{\theta \theta}^{-1}}, \hat{\theta} + z_{1-\frac{\gamma}{2}} \sqrt{I_{\theta \theta}^{-1}} \right), \end{aligned}$$

dır. Burada $z_{\frac{\gamma}{2}}$, standart normal dağılımın 100γ üst kantilidir.

4.3.6 G_6 – dağılımın özel durumu için Rényi entropisi

(4.33) denkleminde tanımlanan olasılık yoğunluk fonksiyonu göz önüne alınsın. Rényi entropiyi elde etmek için $(g_6(t; \theta))^\rho$ genelleştirilmiş Binom açılımı yazılacaktır,

$$\begin{aligned} (g_6(t; \theta))^\rho &= \left((1 - \delta_1 - \delta_2) \beta e^{-\beta t} + 2(\delta_1 + 2\delta_2) \beta e^{-2\beta t} \right. \\ &\quad \left. - 3\delta_2 \beta e^{-3\beta t} \left((1 - \theta) + 4\theta e^{-\beta t} - 5\theta e^{-2\beta t} + 2\theta e^{-3\beta t} \right) \right)^\rho \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \binom{\rho}{j} \binom{\rho-j}{k} \binom{j}{l} \binom{j-l}{n} \binom{l}{m} 2^k 4^n (-5)^{l-m} 2^m (1 + \delta_1 \\ &\quad + \delta_2)^{\rho-j-k} (\delta_1 + 2\delta_2)^k \delta_2^j \beta^\rho (1 - \theta)^{j-l-n} \theta^{l+n} e^{-(\rho+2j+k+2l+n+m)\beta t} \end{aligned}$$

açılımı verilir ve Rényi entropi ise,

$$\begin{aligned} I_\rho(T) &= \frac{1}{1-\rho} \log \left[\sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \binom{\rho}{j} \binom{\rho-j}{k} \binom{j}{l} \binom{j-l}{n} \binom{l}{m} 2^k 4^n (-5)^{l-m} 2^m (1 + \delta_1 \right. \\ &\quad \left. + \delta_2)^{\rho-j-k} (\delta_1 + 2\delta_2)^k \delta_2^j \frac{\beta^\rho (1 - \theta)^{j-l-n} \theta^{l+n}}{(\rho + 2j + k + 2l + n + m) \beta} \right]. \end{aligned}$$

şeklinde hesaplanır.

4.3.7 G_6 – dağılımın özel durumu için sıra istatistikleri

$T_1, T_2, \dots, T_n$ bağımsız ve aynı dağılımlı rasgele değişkenlerin j . sıra istatistiği, $X_{j:n}$ ile gösterilmek üzere bu sıra istatistiğin olasılık yoğunluk fonksiyonu, $j = 1, 2, \dots, n$ için,

$$h_{j:n}(t) = \frac{n!}{(j-1)!(n-j)!} \left((1 - \delta_1 - \delta_2)\beta e^{-\beta t} + 2(\delta_1 + 2\delta_2)\beta e^{-2\beta t} \right. \\ \left. - 3\delta_2\beta e^{-3\beta t} \left((1 - \theta) + 4\theta e^{-\beta t} - 5\theta e^{-2\beta t} + 2\theta e^{-3\beta t} \right) \right) \left(1 - (1 - \delta_1 - \delta_2)e^{-\beta t} - (\delta_1 + 2\delta_2)e^{-2\beta t} \right. \\ \left. + \delta_2 e^{-3\beta t} \left((1 - \theta) + 3\theta e^{-\beta t} - 3\theta e^{-2\beta t} + \theta e^{-3\beta t} \right) \right)^{j-1} \left((1 - \delta_1 - \delta_2)e^{-\beta t} \right. \\ \left. + (\delta_1 + 2\delta_2)e^{-2\beta t} - \delta_2 e^{-3\beta t} \left((1 - \theta) + 3\theta e^{-\beta t} - 3\theta e^{-2\beta t} + \theta e^{-3\beta t} \right) \right)^{n-j},$$

şeklinde bulunmuştur. Böylece, birinci ve sonuncu sıra istatistiklerinin olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$h_{1:n}(t) = n \left((1 - \delta_1 - \delta_2)\beta e^{-\beta t} + 2(\delta_1 + 2\delta_2)\beta e^{-2\beta t} \right. \\ \left. - 3\delta_2\beta e^{-3\beta t} \left((1 - \theta) + 4\theta e^{-\beta t} - 5\theta e^{-2\beta t} + 2\theta e^{-3\beta t} \right) \right) \left((1 - \delta_1 - \delta_2)e^{-\beta t} \right. \\ \left. + (\delta_1 + 2\delta_2)e^{-2\beta t} - \delta_2 e^{-3\beta t} \left((1 - \theta) + 3\theta e^{-\beta t} - 3\theta e^{-2\beta t} + \theta e^{-3\beta t} \right) \right)^{n-1}$$

$$h_{n:n}(t) = n \left((1 - \delta_1 - \delta_2)\beta e^{-\beta t} + 2(\delta_1 + 2\delta_2)\beta e^{-2\beta t} \right. \\ \left. - 3\delta_2\beta e^{-3\beta t} \left((1 - \theta) + 4\theta e^{-\beta t} - 5\theta e^{-2\beta t} + 2\theta e^{-3\beta t} \right) \right) \left(1 - (1 - \delta_1 - \delta_2)e^{-\beta t} - (\delta_1 + 2\delta_2)e^{-2\beta t} \right. \\ \left. + \delta_2 e^{-3\beta t} \left((1 - \theta) + 3\theta e^{-\beta t} - 3\theta e^{-2\beta t} + \theta e^{-3\beta t} \right) \right)^{j-1}$$

olarak bulunur.

5. UYGULAMA

Bu çalışmanın son kısmı olarak, daha önceki bölümlerde elde edilen 6 tane tek boyutlu dağılımları kıyaslamak amacıyla 3 farklı veri seti kullanılacaktır. Bu dağılımların olasılık yoğunluk fonksiyonları,

$$g_1(t) = (1 - \delta)\beta e^{-\beta t} + 2\delta\beta e^{-2\beta t}, \quad t \geq 0, \beta \geq 0$$

$$g_2(t) = \frac{1 - \delta}{2}(\beta_1 e^{-\beta_1 t} + \beta_2 e^{-\beta_2 t}) + \delta(\beta_1 + \beta_2) e^{-(\beta_1 + \beta_2)t}, \quad t \geq 0, \beta_1, \beta_2 \geq 0$$

$$g_3(t) = (1 - \delta)\beta e^{-\beta t} + 2\delta(\beta + \theta t)e^{-(2\beta t + \theta t^2)}, \quad t > 0, \beta > 0, 0 \leq \theta \leq \beta^2$$

$$g_4(t; \delta_1, \delta_2, \beta) = (1 - \delta_1 - \delta_2)\beta e^{-\beta t} + (\delta_1 + 2\delta_2)2\beta e^{-2\beta t} + (-\delta_2)3\beta e^{-3\beta t}, \quad t > 0, \beta > 0$$

$$\begin{aligned} g_5(t; \Theta) = & -(1 + \delta_1 + \delta_2)(\beta_1 e^{-\beta_1 t} + \beta_2 e^{-\beta_2 t} + \beta_3 e^{-\beta_3 t}) \\ & + (2 + \delta_1 + 2\delta_2) \left((\beta_1 + \beta_2) e^{-(\beta_1 + \beta_2)t} + (\beta_1 + \beta_3) e^{-(\beta_1 + \beta_3)t} \right. \\ & \left. + (\beta_2 + \beta_3) e^{-(\beta_2 + \beta_3)t} \right) - (2 + 3\delta_2)(\beta_1 + \beta_2 + \beta_3) e^{-(\beta_1 + \beta_2 + \beta_3)t}, \\ & t > 0, \beta_1, \beta_2, \beta_3 > 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g_6(t; \Theta) = & (1 - \delta_1 - \delta_2)\beta e^{-\beta t} + 2(\delta_1 + 2\delta_2)\beta e^{-2\beta t} \\ & - 3\delta_2\beta e^{-3\beta t} \left((1 - \theta) + 4\theta e^{-\beta t} - 5\theta e^{-2\beta t} + 2\theta e^{-3\beta t} \right), \\ & t > 0, \beta > 0, \theta \in [-1, 1] \end{aligned}$$

olarak düşünölsün. Bu altı dağılımın farklı veri setlerine uygun olup olmadığını ortaya koymak amacıyla çeşitli testler uygulanacaktır. Böylece, hangi dağılımın hangi veri grubu için etkili olarak kullanılabileceğı belirlenecektir. Bu testler arasında en bilinenleri olarak, Akaike bilgi kriteri (Akaike Information Criterion) $AIC = -2LL + 2k$, Bayesian bilgi kriteri (Bayesian Information Criterion/Schwarz Criterion) $BIC = -2LL + k \log(n)$ ve

Kolmogorov-Smirnov (KS) $D_n = \sup_{t \in \mathbb{R}} |\hat{G}_n(t) - G(t)|$ değerleri kullanılacaktır. Burada k tahmin edilebilir parametre sayısı, n örneklem boyutudur ve $LL = \log L(\theta; t_i)$ en çok olabilirlik fonksiyonudur. Ayrıca, $\hat{G}_n(t) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n I_{T_i \leq t}$ ampirik dağılım fonksiyonudur ve $G(t)$ dağılım fonksiyonudur.

Yapılan uygulamalarda parametreler için alınan başlangıç değerler aşağıdaki çizelgede verilmiştir.

Çizelge 5.1 Önerilen altı dağılımın parametreleri için alınan başlangıç değerleri

G_1 – Dağılımı	$\beta = 0.9, \delta = 0.4$
G_2 – Dağılımı	$\beta_1 = 0.9, \beta_2 = 2.8, \delta = 0.4$
G_3 – Dağılımı	$\beta = 0.9, \theta = 0.4, \delta = 0.4$
G_4 – Dağılımı	$\beta = 0.9, \delta_1 = -0.5, \delta_2 = -0.8$
G_5 – Dağılımı	$\beta_1 = 0.9, \beta_2 = 0.3, \beta_3 = 0.7, \delta_1 = -0.5, \delta_2 = -0.8$
G_6 – Dağılımı	$\beta = 0.9, \theta = 0.4, \delta_1 = -0.5, \delta_2 = -1.1$

5.1 Birinci Veri Seti (B Bankasındaki Müşteri Hizmetleri Öncesi Bekleme Süresi)

Birinci veri seti banka B'deki 60 müşterinin işlemleri başlayana kadarki müşteri hizmetleri öncesi bekleme süresini dakika olarak Çizelge 5.1'de vermiştir. İlk olarak Al-Mutairi vd. (2013) tarafından kullanılmış olan bu veriler daha sonra Singh vd. (2014) makalesinde ele alınmıştır.

Çizelge 5.2 B Bankasındaki müşteri hizmetleri öncesi bekleme süresi (dakika olarak)

0.1	0.2	0.3	0.7	0.9	1.1	1.2	1.8	1.9	2.0	2.2	2.3
2.3	2.3	2.5	2.6	2.7	2.7	2.9	3.1	3.1	3.2	3.4	3.4
3.5	3.9	4.0	4.2	4.5	4.7	5.3	5.6	5.6	6.2	6.3	6.6
6.8	7.3	7.5	7.7	7.7	8.0	8.0	8.5	8.5	8.7	9.5	10.7
10.9	11.0	12.1	12.3	12.8	12.9	13.2	13.7	14.5	16.0	16.5	28.0

Bu veri seti altı dağılım ile modellenmeye çalışılacaktır. En çok olabilirlik yöntemiyle parametre tahminleri bulunup aşağıdaki çizelgede verilmiştir.

Çizelge 5.3 B Bankası verileri için parametre tahminleri

G_1 – Dağılımı	$\hat{\beta} = 0.208, \hat{\delta} = -0.656$
G_2 – Dağılımı	$\hat{\beta}_1 = 0.157, \hat{\beta}_2 = 3.399, \hat{\delta} = 0.000$
G_3 – Dağılımı	$\hat{\beta} = 0.185, \hat{\theta} = 0.472, \hat{\delta} = -0.222$
G_4 – Dağılımı	$\hat{\beta} = 0.218, \hat{\delta}_1 = -0.633, \hat{\delta}_2 = -0.227$
G_5 – Dağılımı	$\hat{\beta}_1 = 1.132, \hat{\beta}_2 = 0.196, \hat{\beta}_3 = 0.267, \hat{\delta}_1 = -0.877, \hat{\delta}_2 = -0.743$
G_6 – Dağılımı	$\hat{\beta} = 0.220, \hat{\theta} = 1.000, \hat{\delta}_1 = -0.633, \hat{\delta}_2 = -0.279$

Böylece hangi dağılım bu veri setine daha çok esneklik göstereceğini bilmek için model seçim kriterleri incelenecektir.

Çizelge 5.4 Banka B verileri için model seçim kriterleri

Dağılım	KS	-2LL	AIC	BIC
G_1 – Dağılımı	0.063	338.142	342.142	346.330
G_2 – Dağılımı	0.129	342.221	348.221	354.504
G_3 – Dağılımı	0.067	336.777	342.777	349.060
G_4 – Dağılımı	0.069	338.071	344.071	350.354
G_5 – Dağılımı	0.070	338.070	348.070	358.542
G_6 – Dağılımı	0.069	338.036	346.036	354.413

Model seçim kriterlerine göre KS değerine bakılırsa önerilen dağılımlardan G_1 –dağılımı bu verilerin modellenmesinde en uygun dağılım olarak karşımıza çıkmıştır. Çizelge 5.4’de AIC değerine bakılırsa, G_1 ve G_3 – dağılımı daha küçük ceza değerine sahip olup bu veriyi daha iyi modellemekteler.

5.2 İkinci Veri Seti (Wheaton Nehri Taşkın Verilerinin İhlalleri)

Önerilen dağılımları test etmek için sıradaki veriler Kanada’da Yukon bölgesinde Carcross yakınlarında bulunan Wheaton Nehrine ilişkin (m^3/s) olarak ölçülen sel taşma miktarlarına ilişkin 1958-1984 yılları arasındaki 72 taşmaya ait verilerdir. Bu veriler Choulakian ve Stephens (2001), Akinsete vd. (2008), Mahmoudi (2011) ve Bourguignon vd. (2013) tarafından kullanılmıştır. Son yıllarda bu veri seti Yılmaz vd. (2016) ele alınmıştır.

Çizelge 5.5 Wheaton Nehri taşkın verilerinin ihlalleri

1.7	2.2	14.4	1.1	0.4	20.6	5.3	0.7
13.0	12.0	9.3	1.4	18.7	8.5	25.5	11.6
14.1	22.1	1.1	2.5	14.4	1.7	37.6	0.6
2.2	39.0	0.3	15.0	11.0	7.3	22.9	1.7

Çizelge 5.5 Wheaton Nehri taşkın verilerinin ihlalleri (Devam)

0.1	1.1	0.6	9.0	1.7	7.0	20.1	0.4
14.1	9.9	10.4	10.7	30.0	3.6	5.6	30.8
13.3	4.2	25.5	3.4	11.9	21.5	27.6	36.4
2.7	64.0	1.5	2.5	27.4	1.0	27.1	20.2
16.8	5.3	9.7	27.5	2.5	27.0	1.9	2.8

Parametre tahminleri en çok olabilirlik yöntemiyle elde edilip aşağıdaki çizelgede verilmiştir.

Çizelge 5.6 Nehir taşkınlığı verileri için parametre tahminleri

G_1 – Dağılımı	$\hat{\beta} = 0.075, \hat{\delta} = 0.167$
G_2 – Dağılımı	$\hat{\beta}_1 = 0.071, \hat{\beta}_2 = 0.909, \hat{\delta} = 0.154$
G_3 – Dağılımı	$\hat{\beta} = 0.067, \hat{\theta} = 0.297, \hat{\delta} = 0.198$
G_4 – Dağılımı	$\hat{\beta} = 0.106, \hat{\delta}_1 = 0.803, \hat{\delta}_2 = -1.000$
G_5 – Dağılımı	$\hat{\beta}_1 = 1.216, \hat{\beta}_2 = 0.068, \hat{\beta}_3 = 1.216, \hat{\delta}_1 = -0.994, \hat{\delta}_2 = -0.820$
G_6 – Dağılımı	$\hat{\beta} = 0.101, \hat{\theta} = -1.000, \hat{\delta}_1 = 0.401, \hat{\delta}_2 = -0.157$

Son olarak bu veri setinin hangi dağılım ile en iyi şekilde modellediğimizi bilmek için KS, AIC ve BIC değerleri incelenecektir. Bu değerleri kıyaslayabilmek için aşağıdaki Çizelge 5.7 verilmiştir.

Çizelge 5.7 Nehir taşkınılığı verileri için model seçim kriterleri

Dağılım	KS	-2LL	AIC	BIC
G_1 – Dağılımı	0.131	503.930	507.930	512.483
G_2 – Dağılımı	0.079	499.164	505.164	511.994
G_3 – Dağılımı	0.089	496.314	502.314	509.144
G_4 – Dağılımı	0.056	495.065	501.065	507.895
G_5 – Dağılımı	0.087	497.029	507.029	518.413
G_6 – Dağılımı	0.090	501.556	506.556	512.262

Sonuçlar incelediği zaman her açıdan bakıldığında önerilen dağılımların, nehir taşma verileri için iyi sonuçlar verdiği değerlendirilebilir. KS test istatistiğine bakıldığında G_4 ve G_6 Dağılımları daha küçük bir değerle uygunluk sağlanmıştır. AIC değerleri incelendiğinde de önerilen dağılımlar küçük ceza puanına sahip olarak daha iyi uygunluk gösterdiği belirlenmiştir. Örneklem sayısı yeteri kadar büyük olduğundan AIC değeri yeterli olacaktır ancak; BIC değerine bakılırsa da G_4 – Dağılımı daha iyi değerlerle sonuç verdiği gözlenmektedir.

5.3 Üçüncü Veri Seti (Mesane Kanseri Verileri)

Diğer dağılımlarla bu çalışmada önerilen dağılımların karşılaştırılması maksadıyla kullanılan üçüncü veri grubu mesane kanseri hastalarının sansürlenmemiş aylık olarak elde edilmiş iyileşme (hafifleme) zamanlarına ait 128 hastanın verileriyle önerilen dağılımlar test edilecektir. Veriler ilk olarak Lee ve Wang tarafından kitaplarında kullanılmış (Lee ve Wang 2013), daha sonra Merovci bu verileri Lindley (L) ve Transmuted Lindley (TL) dağılımların uygunluğunu ölçmek için kullanmıştır (Merovci 2013b). Son yıllarda, Acik Kemalolu ve Yilmaz mesane kanseri veri setini iki parametrelili Lindley (TPL) dağılımı ve transmuted iki parametrelili Lindley (TTL) dağılımı için test etmişlerdir (Acik Kemalolu ve Yilmaz 2017). Bu veri seti aşağıdaki çizelgede verilmiştir.

Çizelge 5.8 Mesane kanseri verileri

3.52	0.08	0.20	0.40	0.50	0.51	0.81	0.90	1.05	1.19	1.26	1.35
1.40	1.46	1.76	2.02	2.02	2.07	2.09	2.23	2.26	2.46	2.54	2.62
2.64	2.69	2.69	2.75	2.83	2.87	3.02	3.25	3.31	3.36	3.36	3.48
3.57	3.64	3.70	3.82	3.88	4.18	4.23	4.26	4.33	4.34	4.40	4.50
4.51	4.87	4.98	5.06	5.09	5.17	5.32	5.32	5.34	5.41	5.41	5.49
5.62	5.71	5.85	6.25	6.54	6.76	6.93	6.94	6.97	7.09	7.26	7.28
7.32	7.39	7.59	7.62	7.63	7.66	7.87	7.93	8.26	8.37	8.53	8.65
8.66	9.02	9.22	9.47	9.74	10.06	10.34	10.66	10.75	11.25	11.64	11.79
11.98	12.02	12.03	12.07	12.63	13.11	13.29	13.8	14.24	14.76	14.77	14.83
15.96	16.62	17.12	17.14	17.36	18.1	19.13	20.28	21.73	22.69	23.63	25.74
25.82	26.31	32.15	34.26	36.66	43.01	46.12	79.05				

Parametre tahminleri en çok olabilirlik yöntemiyle elde edilip aşağıdaki çizelgede verilmiştir.

Çizelge 5.9 Mesane kanseri verileri için parametre tahminleri

$G_1 - \text{Dağılımı}$	$\hat{\beta} = 0.061, \hat{\delta} = 0.862$
$G_2 - \text{Dağılımı}$	$\hat{\beta}_1 = 0.107, \hat{\beta}_2 = 3.912, \hat{\delta} = 0.000$
$G_3 - \text{Dağılımı}$	$\hat{\beta} = 0.116, \hat{\theta} = 0.585, \hat{\delta} = -0.099$
$G_4 - \text{Dağılımı}$	$\hat{\beta} = 0.099, \hat{\delta}_1 = -0.391, \hat{\delta}_2 = 0.873$
$G_5 - \text{Dağılımı}$	$\hat{\beta}_1 = 0.209, \hat{\beta}_2 = 0.058, \hat{\beta}_3 = 0.136, \hat{\delta}_1 = -0.909, \hat{\delta}_2 = -0.311$
$G_6 - \text{Dağılımı}$	$\hat{\beta} = 0.097, \hat{\theta} = -1.000, \hat{\delta}_1 = -0.415, \hat{\delta}_2 = 0.941$

Son olarak bu veri setinin hangi dağılım ile en uygun modellediğimizi bulmak için model seçim değerleri yani KS, AIC ve BIC değerleri incelenecektir.

Çizelge 5.10 Mesane kanseri verileri için model seçim kriterleri

Dağılım	KS	-2LL	AIC	BIC
G_1 – Dağılımı	0.095	826.994	830.994	836.698
G_2 – Dağılımı	0.085	828.758	834.758	843.314
G_3 – Dağılımı	0.065	824.080	830.080	838.636
G_4 – Dağılımı	0.058	823.313	829.313	837.869
G_5 – Dağılımı	0.032	818.694	828.694	842.955
G_6 – Dağılımı	0.054	822.420	830.420	841.828
L	0.074	839.040	841.040	843.911
TL	0.226	830.310	834.310	840.018
TPL	0.084	828.684	832.684	---
TTL	0.064	825.884	831.884	---

Sonuçlar incelediği zaman her açıdan bakıldığında elde edilen dağılımların mesane kanseri hastalarının iyileşme zamanlarına ait verilerde daha önce modellemede kullanılmış olan dört dağılıma göre daha iyi sonuçlar verdiği belirtilebilir. AIC değerlerine bakıldığında her dört dağılıma karşı açık bir şekilde incelendiğinde bu çalışmada önerilen dağılımlar daha küçük ceza puanına sahiplerdir. Ayrıca KS değerine bakıldığında önerilen dağılımların arasında G_4, G_5 ve G_6 dağılımları bu verileri modellemek için uygun dağılımlar olduğu gözükmemektedir.

5.4 Dördüncü Veri Seti (Kevlar 373/epoksi'nin yorulma kırılma ömrü)

Bu veri seti, %90 basınç seviyesinde sabit basınca maruz kalan ve başarısız olana kadar sürekli veri deposu yapan Kevlar 373/epoksi'nin kırılma ömrünü temsil eden bir veri setidir. Veriler Abdul-Moniem ve Seham (2015) çalışmasından çıkarıldı ve daha önce Barlow vd. (1984) makalesinde incelenmiştir. Bu veri seti aşağıda verilmiştir;

Çizelge 5.11 Kevlar 373/epoksi'nin kırılma ömrü

0.0251	0.0886	0.0891	0.2501	0.3113	0.3451	0.4763	0.5650	0.5671
0.6566	0.6748	0.6751	0.6753	0.7696	0.8375	0.8391	0.8425	0.8645
0.8851	0.9113	0.9120	0.9836	1.0483	1.0596	1.0773	1.1733	1.2570
1.2766	1.2985	1.3211	1.3503	1.3551	1.4595	1.4880	1.5728	1.5733
1.7083	1.7263	1.7460	1.7630	1.7746	1.8275	1.8375	1.8503	1.8808
1.8878	1.8881	1.9316	1.9558	2.0048	2.0408	2.0903	2.1093	2.1330
2.2100	2.2460	2.2878	2.3203	2.3470	2.3513	2.4951	2.5260	2.9911
3.0256	3.2678	3.4045	3.4846	3.7433	3.7455	3.9143	4.8073	5.4005
5.4435	5.5295	6.5541	9.0960					

Bu veri seti elde edilen altı dağılım için uygulandığında elde edilen parametre tahminleri aşağıdaki çizelgede verilmiştir.

Çizelge 5.12 Kevlar verileri için parametre tahminleri

G_1 – Dağılımı	$\hat{\beta} = 0.727, \hat{\delta} = -0.849$
G_2 – Dağılımı	$\hat{\beta}_1 = 0.639, \hat{\beta}_2 = 0.861, \hat{\delta} = 0.070$
G_3 – Dağılımı	$\hat{\beta} = 0.713, \hat{\theta} = 1.549, \hat{\delta} = -0.557$
G_4 – Dağılımı	$\hat{\beta} = 0.879, \hat{\delta}_1 = 0.791, \hat{\delta}_2 = 1.559$
G_5 – Dağılımı	$\hat{\beta}_1 = 0.440, \hat{\beta}_2 = 0.440, \hat{\beta}_3 = 0.440, \hat{\delta}_1 = -0.921, \hat{\delta}_2 = -0.148$
G_6 – Dağılımı	$\hat{\beta} = 0.865, \hat{\theta} = -1.000, \hat{\delta}_1 = -0.746, \hat{\delta}_2 = -0.875$

Aşağıdaki çizelgede ise bu altı dağılım için model seçim değerleri verilmiştir.

Çizelge 5.13 Banka B verileri için model seçim kriterleri

Dağılım	KS	-2LL	AIC	BIC
G_1 – Dağılımı	0.096	243.033	247.033	251.695
G_2 – Dağılımı	0.094	242.986	248.986	255.978
G_3 – Dağılımı	0.081	239.604	245.604	252.596
G_4 – Dağılımı	0.089	242.757	248.757	255.749
G_5 – Dağılımı	0.090	242.757	252.757	264.410
G_6 – Dağılımı	0.093	241.369	249.369	258.692

Yukarıdaki tablo incelendiğinde KS ve AIC değerlerine bakıldığında önerilen dağılımlardan G_3 –dağılımı bu verileri daha iyi modelleyeceği gözükmemektedir.

5.5 Beşinci Veri Seti (Elli maddenin $t = 0$ 'da kullanılmış ve hata verme süreleri)

Bu bölümde de, bu çalışmadaki dağılımların daha iyi bir model olabileceklerini göstermek için gerçek bir veri seti kullanıyoruz. Aşağıda çizelge Murthy vd. (2004) sayfa 180'den alınmıştır, $t = 0$ 'da kullanılan 50 maddeyi temsil edip başarısızlık zamanlarını hafta olarak vermiştir.

Çizelge 5.14 Elli maddenin $t = 0$ 'da kullanılmış ve hata verme süreleri (hafta olarak)

0.013	0.065	0.111	0.111	0.163	0.309	0.426	0.535
0.684	0.747	0.997	1.284	1.304	1.647	1.829	2.336
2.838	3.269	3.977	3.981	4.520	4.789	4.849	5.202
5.291	5.349	5.911	6.018	6.427	6.456	6.572	7.023
7.087	7.291	7.787	8.596	9.388	10.261	10.713	11.658
13.006	13.388	13.842	17.152	17.283	19.418	23.471	24.777
32.795	48.105						

Parametre tahminleri bu altı dağılım için aşağıdaki çizelgede verilmiştir:

Çizelge 5.15 Elli maddenin hata verme verileri için parametre tahminleri

G_1 – Dağılımı	$\hat{\beta} = 0.094, \hat{\delta} = 0.549$
G_2 – Dağılımı	$\hat{\beta}_1 = 0.114, \hat{\beta}_2 = 5.340, \hat{\delta} = 0.111$
G_3 – Dağılımı	$\hat{\beta} = 0.118, \hat{\theta} = 87.271, \hat{\delta} = 0.075$
G_4 – Dağılımı	$\hat{\beta} = 0.101, \hat{\delta}_1 = 0.639, \hat{\delta}_2 = -0.320$
G_5 – Dağılımı	$\hat{\beta}_1 = 0.468, \hat{\beta}_2 = 0.117, \hat{\beta}_3 = 0.468, \hat{\delta}_1 = -0.970, \hat{\delta}_2 = -0.909$
G_6 – Dağılımı	$\hat{\beta} = 0.166, \hat{\theta} = -0.988, \hat{\delta}_1 = 0.296, \hat{\delta}_2 = -0.536$

Çizelge 5.16 Elli maddenin hata verme verileri için model seçim kriterleri

Dağılım	KS	-2LL	AIC	BIC
G_1 – Dağılımı	0.098	304.420	308.420	312.244
G_2 – Dağılımı	0.075	298.981	304.981	310.717
G_3 – Dağılımı	0.070	299.082	305.082	310.818
G_4 – Dağılımı	0.089	304.123	310.123	315.859
G_5 – Dağılımı	0.079	298.811	308.811	318.371
G_6 – Dağılımı	0.086	304.579	312.579	320.227

Model seçim kriterlerine göre KS değerine bakıldığında G_3 – dağılımı bu verilerin modellenmesinde en uygun dağılım olarak karşımıza çıkmıştır. Ayrıca, AIC değerine de bakılırsa da G_2 ve G_3 – dağılımı daha küçük değere sahipler ve bu veriyi modellemek için daha uygundurlar.

5.6 Altıncı Veri Seti (Karbon liflerinin kırılması verileri)

Nichols ve Padgett (2006) karbon fiberlerin (Gba'da) kırılması konusunda yüz tane gözlem kullanmıştır.

Çizelge 5.17 Karbon liflerinin kırılması verileri

3.7	2.74	2.73	2.5	3.6	3.11	3.27	2.87
1.47	3.11	4.42	2.41	3.19	3.22	1.69	3.28
3.09	1.87	3.15	4.9	3.75	2.43	2.95	2.97
3.39	2.96	2.53	2.67	2.93	3.22	3.39	2.81
4.2	3.33	2.55	3.31	3.31	2.85	2.56	3.56
3.15	2.35	2.55	2.59	2.38	2.81	2.77	2.17
2.83	1.92	1.41	3.68	2.97	1.36	0.98	2.76
4.91	3.68	1.84	1.59	3.19	1.57	0.81	5.56
1.73	1.59	2 1.22	1.12	1.71	2.17	1.17	5.08
2.48	1.18	3.51	2.17	1.69	1.25	4.38	1.84
0.39	3.68	2.48	0.85	1.61	2.79	4.7	2.03
1.8	1.57	1.08	2.03	1.61	2.12	1.89	2.88
2.82	2.05	3.65					

Parametre tahminleri Çizelge 5.18 de özetlenmiştir,

Çizelge 5.18 Karbon liflerinin kırılması verileri için parametre tahminleri

$G_1 - \text{Dağılımı}$	$\hat{\beta} = 0.558, \hat{\delta} = -1$
$G_2 - \text{Dağılımı}$	$\hat{\beta}_1 = 0.558, \hat{\beta}_2 = 0.560, \hat{\delta} = 0.000$
$G_3 - \text{Dağılımı}$	$\hat{\beta} = 0.577, \hat{\theta} = 0.473, \hat{\delta} = -1.000$

Çizelge 5.18 Karbon liflerinin kırılması verileri için parametre tahminleri (Devam)

G_4 – Dağılımı	$\hat{\beta} = 0.679, \hat{\delta}_1 = -1.000, \hat{\delta}_2 = -0.997$
G_5 – Dağılımı	$\hat{\beta}_1 = 0.716, \hat{\beta}_2 = 0.465, \hat{\beta}_3 = 0.763, \hat{\delta}_1 = -1.000, \hat{\delta}_2 = -1.000$
G_6 – Dağılımı	$\hat{\beta} = 0.673, \hat{\theta} = -0.997, \hat{\delta}_1 = -0.992, \hat{\delta}_2 = -0.973$

Böylece önerilen dağılımların karbon liflerinin kırılması verileri için uygunluğu aşağıda verilmiştir.

Çizelge 5.19 Karbon liflerinin kırılması verileri için model seçim kriterleri

Dağılım	KS	-2LL	AIC	BIC
G_1 – Dağılımı	0.210	338.209	342.209	347.419
G_2 – Dağılımı	0.211	338.210	344.210	352.025
G_3 – Dağılımı	0.134	312.722	312.722	326.538
G_4 – Dağılımı	0.152	315.576	321.576	329.392
G_5 – Dağılımı	0.195	321.802	331.802	344.828
G_6 – Dağılımı	0.142	313.937	321.937	332.357

Model seçim kriterlerine göre AIC değerine bakılırsa önerilen dağılımlardan G_3 –dağılımı bu verilerin modellenmesinde en uygun dağılım olarak karşımıza çıkmıştır.

5.7 Yedinci Veri Seti (128 Mesane kanseri hastalarının iyileşme süreçleri)

Çizelge 5.20'de verilen veriler, Lee ve Wang (2003) makalesinde rapor edilen 128 mesane kanseri hastalarının rastgele bir örneğinin iyileşme sürelerini (ay olarak) göstermektedir. Daha sonra bu veri seti Merovci (2013b) tarafından kullanılmıştır.

Çizelge 5.20 Mesane kanseri hastalarının iyileşme süreçleri (ay olarak)

0.08	2.09	3.48	4.87	6.94	8.66	13.11	23.63	0.20	2.23
3.52	4.98	6.97	9.02	13.29	0.40	2.26	3.57	5.06	7.09
9.22	13.80	25.74	0.50	2.46	3.64	5.09	7.26	9.47	14.24
25.82	0.51	2.54	3.70	5.17	7.28	9.74	14.76	26.31	0.81
2.62	3.82	5.32	7.32	10.06	14.77	32.15	2.64	3.88	5.32
7.39	10.34	14.83	34.26	0.90	2.69	4.18	5.34	7.59	10.66
15.96	36.66	1.05	2.69	4.23	5.41	7.62	10.75	16.62	43.01
1.19	2.75	4.26	5.41	7.63	17.12	46.12	1.26	2.83	4.33
7.66	11.25	17.14	79.05	1.35	2.87	5.62	7.87	11.64	17.36
1.40	3.02	4.34	5.71	7.93	11.79	18.10	1.46	4.40	5.85
8.26	11.98	19.13	1.76	3.25	4.50	6.25	8.37	12.02	2.02
3.31	4.51	6.54	8.53	12.03	20.28	2.02	3.36	6.76	12.07
21.73	2.07	3.36	6.93	8.65	12.63	22.69	5.49		

Şimdi elde edilen altı dağılım için parametre tahminleri verilmiştir;

Çizelge 5.21 Mesane kanseri hastalarının iyileşme süreçleri verilerinin parametre tahminleri

G_1 – Dağılımı	$\hat{\beta} = 0.061, \quad \hat{\delta} = 0.862$
G_2 – Dağılımı	$\hat{\beta}_1 = 0.107, \hat{\beta}_2 = 3.912, \hat{\delta} = 0.000$
G_3 – Dağılımı	$\hat{\beta} = 0.116, \hat{\theta} = 0.585, \hat{\delta} = -0.098$
G_4 – Dağılımı	$\hat{\beta} = 0.099, \hat{\delta}_1 = -0.391, \hat{\delta}_2 = 0.873$
G_5 – Dağılımı	$\hat{\beta}_1 = 0.209, \hat{\beta}_2 = 0.058, \hat{\beta}_3 = 0.135, \hat{\delta}_1 = -0.909, \hat{\delta}_2 = -0.311$
G_6 – Dağılımı	$\hat{\beta} = 0.097, \hat{\theta} = -0.998, \hat{\delta}_1 = -0.415, \hat{\delta}_2 = 0.941$

Böylece bu verileri önerilen dağılımlara uygunluğu aşağıda verilmiştir.

Çizelge 5.22 Mesane kanseri hastaları verileri için model seçim kriterleri

Dağılım	KS	-2LL	AIC	BIC
G_1 – Dağılımı	0.095	826.994	830.994	836.699
G_2 – Dağılımı	0.085	828.758	834.758	843.314
G_3 – Dağılımı	0.065	824.080	830.080	838.636
G_4 – Dağılımı	0.058	823.314	829.314	837.869
G_5 – Dağılımı	0.032	818.694	828.694	842.955
G_6 – Dağılımı	0.054	822.420	830.420	841.828

Model seçim kriterlerine göre KS değerine bakılırsa önerilen dağılımlardan G_5 –dağılımı bu verilerin modellenmesinde en uygun dağılım olarak karşımıza çıkmıştır.

Bu veri setlerine genel olarak bakıldığında G_6 – dağılımı veri setleri için daha iyi sonuçlar verip bu verilerin analizi için en uygun dağılım diye kabul edilebilir.

6. TARTIŞMA ve SONUÇ

Bu çalışmanın en önemli amacı literatürde mevcut olan dağılımlara parametre ilave ederek daha esnek hale getirip gerçek veri setlerini daha iyi modellenmesini sağlamaktır.

Shaw and Buckley (2007)'de karesel dönüşüm yöntemi, sıra dönüşümü yöntemi anlatılarak verilmiştir. Aslında karesel dönüşüm yöntemi, iki bileşenin minimum ve maksimumların dağılımlarının konveks kombinasyonu olarak yazılıp yeniden parametrelendirilerek elde edilmektedir. Ayrıca, iki bileşenin minimum ve maksimum dağılımları, iki bileşenli paralel ve seri sistemlerin başarısızlık olasılıklarına eşittir. Yani sistemlerden yola çıkarak dönüşüm yöntemi çok açık ve kolay bir şekilde elde edildiği görüldü. Benzer şekilde, kübik dönüşüm yöntemi de üç bileşenli sistemlerin paralel sistem, üçte iki çıkışlı sistem ve seri sistemlerin başarısızlık olasılıklarının konveks kombinasyonu yapılarak parametre değişikliği yapılarak elde edilir.

Granzotto vd. (2017) makalesinde kübik dönüşüm yöntemi ilk defa tanıtılmıştır. Bu tez çalışmasında kübik dönüşüm yöntemi için parametre uzayı detaylıca incelenmiştir, ama adı geçen makalede parametre uzayı doğru tanımlanmamıştır. (Teorem 2.1 denklem (3) ile verilen kübik dönüşümünde, örnek olarak $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = -1$ alındığında dağılım özellikleri yansıtılmamaktadır). Son bir yılda kübik dönüştürülmüş dağılım adı altında bir kaç çalışma yapılmıştır. AL-Kadim ve Mohammed (2017) makalesinde kübik dönüştürülmüş Weibull dağılımını dönüşüm parametreleri eşit alınarak incelenmiştir. Kübik dönüştürülmüş Pareto Rahman vd. (2018), kübik dönüştürülmüş Gompertz-Makeham dağılımı ise Riffi ve Hamdan (2018) tarafından incelenmiştir. Rahman vd. (2019) makalesinde kübik dönüştürülmüş Weibull dağılımı verilmiştir. Yukarıda önerilen kübik dönüştürülmüş aileler kullanılarak daha dar bir parametre uzayı ile tanıtılmıştır.

Bu araştırmanın amaçları karesel ve kübik dönüşüm yöntemlerini kullanarak yeni dağılımlar üretmek, bu önerilen dağılımların özelliklerini incelemek, bazı gerçek veri setlerine uygulamaktır. Ayrıca, literatürdeki tüm makalelerde tek de+ğişkenli dağılımlar ele alınarak

dönüşüm yöntemi ile yeni tek değişkenli dağılımlar elde edilmiştir. Bu tez gelecekteki araştırmacılara iki ve üç boyutlu dağılımları da ele alarak yeni tek değişkenli dağılım elde etme fırsatı vermektedir. Ayrıca, bu tez gelecekteki araştırmacılar için en çok olabilirlik yöntemi dışında momentler tahmini, en küçük kareler tahmini ve L-moment tahmini yöntemleri gibi birçok yeni çalışma alanı için fırsat sağlayabilir. Bu tez çalışmasını okuyan araştırmacılar için, yeni karesel ve kübik dönüştürülmüş dağılımlar önermek, dörtlenik (quartic) dönüştürülmüş dağılımları tanıtmak ve çok değişkenli dönüştürülmüş dağılımlar geliştirmek gelecekteki çalışmalar için kayda değer öneriler olabilir.

KAYNAKLAR

- Abdul-Moniem, I. B., and Seham, M. 2015. Transmuted gompertz distribution. *Comput Appl Math J*, 1(3), 88-96.
- Acik Kemaloglu, S., and Yilmaz, M. 2017. Transmuted two-parameter lindley distribution. *Communications in Statistics-Theory and Methods*, (just-accepted).
- Akaikei, H. 1973. Information theory and an extension of maximum likelihood principle. In *Proc. 2nd Int. Symp. on Information Theory*, 267-281.
- Akinsete, A., Famoye, F., and Lee, C. 2008. The beta-Pareto distribution. *Statistics*, 42(6), 547-563.
- AL-Kadim, K. A., and Mohammed, M. H. 2017. The cubic transmuted Weibull distribution. *Journal of University of Babylon*, 3, 862-876.
- Al-Mutairi, D. K., Ghitany, M. E., and Kundu, D. 2013. Inferences on stress-strength reliability from Lindley distributions. *Communications in Statistics-Theory and Methods*, 42(8); 1443-1463.
- Aryal, G. R. and Tsokos, C. P. 2011. Transmuted Weibull Distribution: A Generalization of the Weibull Probability Distribution. *European Journal of Pure and Applied Mathematics*, 4(2); 89-102.
- Aryal, G. R. 2013. Transmuted log-logistic distribution. *Journal of Statistics Applications and Probability*, 2(1); 11-20.
- Ashour, S. K., and Eltehiwy, M. A. 2013. Transmuted lomax distribution. *American Journal of Applied Mathematics and Statistics*, 1(6); 121-127.
- Bairamov, I., Kotz, S. and Gebizlioglu, O.L. 2001. On a Generalization of FGM and Sarmanov Class of Distributions. *South African Statistical Journal*, 35, 205-224.
- Barlow, R. E., Toland, R. H., and Freeman, T. 1984. A Bayesian analysis of stress-rupture life of kevlar 49/epoxy spherical pressure vessels. In *Proc. Conference on Applications of Statistics*, Marcel Dekker, New York.
- Basu, A. P. 1988. 23 Multivariate Exponential Distributions and their Applications in Reliability. *Handbook of Statistics*, 7; 467-477.
- Bourguignon, M., Silva, M.B., Zea, L.M., Cordeiro, G.M. 2013. The Kumaraswamy Pareto distribution. *Journal of Statistical Theory and Applications* 12:129–144.

- Choulakian, V., Stephens, M.A. 2001. Goodness-of-fit for the generalized Pareto distribution. *Technometrics* 43:478–484.
- Elbatal, I., Asha, G., and Raja, A. V. 2014. Transmuted Exponentiated Fréchet Distribution: Properties and Applications. *J. Stat. Appl. Prob.* 3; 379-394.
- Elbatal, I., and Aryal, G. 2016. On the Transmuted AdditiveWeibull Distribution. *Austrian Journal of Statistics*, 42(2); 117-132.
- Eltehiwy, M., and Ashour, S. 2013. Transmuted exponentiated modified Weibull distribution. *International Journal of Basic and Applied Sciences*, 2(3); 258-269.
- Gentle, J. E. 2013. Random number generation and Monte Carlo methods. Springer Science and Business Media.
- Granzotto, D. C. T., Louzada, F., and Balakrishnan, N. 2017. Cubic rank transmuted distributions: inferential issues and applications. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, 87(14), 2760-2778.
- Gumbel, E.J. 1960. Bivariate Exponential Distributions. *Journal of the American Statistical Association*, 55(292); 698-707.
- Gupta, S. C., and Kapoor, D. V. 2000. *Fundamentals of mathematical statistics: A modern approach*. Sultan Chand.
- Gupta, R. C. 2003. On Some Association Measures in Bivariate Distributions and their Relationships. *Journal of Statistical Planning and Inference*, 117(1); 83-98.
- Hameldarbandi, M and Yilmaz, M. 2018. A New Perspective of Transmuted Distribution. *Communications Faculty of Sciences University of Ankara Series A1 Mathematics and Statistics*, 68 (1), 1144-1162.
- Johnson, N. L., and Kotz, S. 1975. A vector multivariate hazard rate. *Journal of Multivariate Analysis*, 5(1); 53-66.
- Khan, M. S., and King, R. 2013. Transmuted modified Weibull distribution: A generalization of the modified Weibull probability distribution. *European Journal of Pure and Applied Mathematics*, 6(1); 66-88.
- Kolmogorov, A. N. 1933. Foundations of probability.
- Lauritzen, S. 2007. Exchangeability and de Finetti's Theorem. URL <http://www.stats.ox.ac.uk/~steffen/teaching/grad/definetti.pdf>.

- Lee, E. T., and Wang, J. 2003. Statistical Methods for Survival Data Analysis, Vol. 476. John Wiley and Sons.
- Leemis, L. M. 1986. Lifetime distribution identities. *IEEE Transactions on Reliability*, 35(2); 170-174.
- Luguterah, A., and Nasiru, S. 2015. Transmuted Exponential Pareto Distribution. *Far East Journal of Theoretical Statistics*, 50(1); 31.
- Mahmoudi, E. 2011. The beta generalized Pareto distribution with application to lifetime data. *Mathematics and Computers in Simulation* 81:2414–2430.
- Marshall, A. W., and Olkin, I. 1967. A Multivariate Exponential Distribution. *Journal of the American Statistical Association*, 62(317); 30-44.
- McQuarrie, A. D., and Tsai, C. L. 1998. *Regression and time series model selection*. World Scientific.
- Merovci, F. 2013a. Transmuted Rayleigh Distribution. *Austrian Journal of Statistics*, 42(1); 21-31.
- Merovci, F. 2013b. Transmuted Lindley Distribution. *International Journal of Open Problems in Computer Science and Mathematics*, 6.
- Murthy, D. P., Xie, M., and Jiang, R. 2004. Weibull models (Vol. 505). John Wiley and Sons.
- Nelsen, R.B. 1998. An Introduction to Copulas. Springer, New York.
- Nichols, M. D., and Padgett, W. J. 2006. A bootstrap control chart for Weibull percentiles. *Quality and reliability engineering international*, 22(2); 141-151.
- Rahman, M. M., Al-Zahrani, B., and Shahbaz, M. Q. 2018. Cubic Transmuted Pareto Distribution. *Annals of Data Science*, 1-18.
- Rahman, M. M., Al-Zahrani, B., and Shahbaz, M. Q. 2019. Cubic Transmuted Weibull Distribution: Properties and Applications. *Annals of Data Science*, 6(1), 83-102.
- Rényi, A. 1961. On measures of entropy and information. In *Proceedings of the fourth Berkeley symposium on mathematical statistics and probability* (Vol. 1, pp. 547-561).
- Riffi, M. I., and Hamdan, M. S. 2018. Cubic Transmuted Gompertz-Makeham Distribution. *European Journal of Advances in Engineering and Technology*, 5(12); 1001-1010.
- Rodriguez, G. 2010. Multivariate Survival Models.

- Rosenblatt, M. 1952. Remarks on a multivariate transformation. *The annals of mathematical statistics*, 23(3), 470-472.
- Sarhan, A. M., and Balakrishnan, N. 2007. A New Class of Bivariate Distributions and its Mixture. *Journal of Multivariate Analysis*, 98(7); 1508-1527.
- Shaked, M., and Shanthikumar, J. G. 2015. Multivariate conditional hazard rate functions—an overview. *Applied Stochastic Models in Business and Industry*, 31(3); 285-296.
- Shaw, W. T., and Buckley, I. R. 2007. The alchemy of probability distributions: Beyond gram-charlier and cornish-fisher expansions, and skew-normal or kurtotic-normal distributions. *Submitted, Feb*, 7; 64.
- Shaw, W. T., and Buckley, I. R. 2009. The alchemy of probability distributions: beyond Gram-Charlier expansions, and a skew-kurtotic-normal distribution from a rank transmutation map. *arXiv preprint arXiv:0901.0434*.
- Singh, S. K., Singh, U., and Sharma, V. K. 2014. Estimation on System Reliability in Generalized Lindley Stress-Strength Model. *J. Stat. Appl. Prob*, 3; 61-75.
- Snipes, M., and Taylor, D. C. 2014. Model selection and Akaike Information Criteria: An example from wine ratings and prices. *Wine Economics and Policy*, 3(1), 3-9.
- Tank, F. and Gebizlioglu, O.L. 2004. Sarmanov distribution class for dependent risks and its applications. *Belgian Actuarial Bulletin*, 4, 50-52.
- Yilmaz, M., Potas, N., and Topçu, B. 2015. Reliability Properties of Systems with Three Dependent Components. In *Chaos, Complexity and Leadership 2013* (pp. 117-127). Springer, Cham.
- Yilmaz, M., Hameldarbandi, M., and Kemaloglu, S. A. 2016. Exponential-modified discrete Lindley distribution. *SpringerPlus*, 5(1); 1660.
- Zahedi, H. 1991. Proportional mean remaining life model. *Journal of statistical planning and inference*, 29(1-2); 221-228.

EKLER

Ek 1. Erf Fonksiyonu

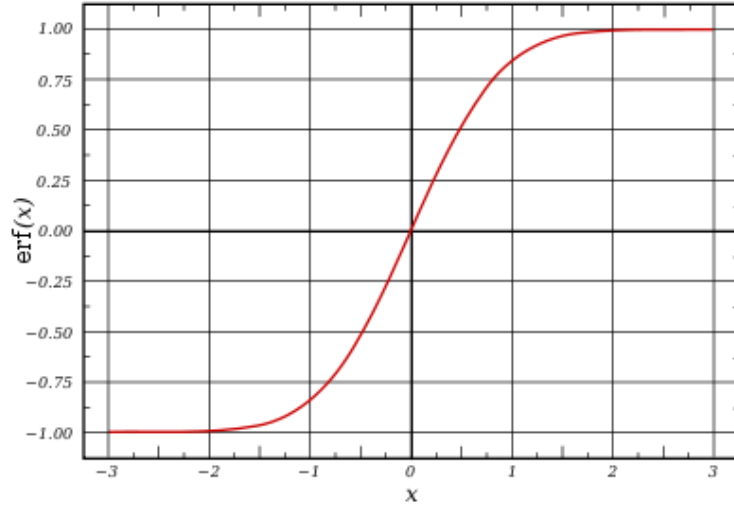
Matematikte, hata fonksiyonu (ayrıca Gauss hata fonksiyonu olarak da adlandırılır) özel fonksiyondur. Olasılık, istatistik ve kısmi diferansiyel denklem içinde temel olmayan bir fonksiyondur. Hata fonksiyonu erf olarak tanımlanıp,

$$erf(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$$

Eğer x negatif ise, integral x değerinden sıfıra tanımlanır.

$$erfc(x) = 1 - erf(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^{\infty} e^{-t^2} dt$$

Hata fonksiyonunun özelliklerinden $erf(-x) = -erf(x)$ olduğunu söyleyebiliriz.



Ek 2. Tam olmayan Beta Fonksiyonu

Beta fonksiyonunun bir genellemesi Tam olmayan veya Tamamlanmamış Beta fonksiyonudur ve aşağıdaki gibi tanımlanır,

$$B_z(\alpha, \beta) = \int_0^z t^{\alpha-1} (1-t)^{\beta-1} dt$$

burada $\alpha, \beta > 0$ dır. $z = 1$ iken tamamlanmamış Beta fonksiyonu, Beta fonksiyonuna eşit oluyor. (Tamamlanmamış demek integralin bir sınırı kapalı diğer sınırı ise açık olması demektir.)

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Monireh HAMELDARBANDI
Doğum Yeri : Ardebil
Doğum Tarihi : 06.05.1987
Medeni Hali : Bekar
Yabancı Dili : İngilizce

Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl)

Lise : Hajar Kız Öğrenci Fen Lisesi
Lisans : Tebriz Üniversitesi Matematik Fakültesi İstatistik Bölümü
(2009)
Yüksek Lisans : Tebriz Üniversitesi Matematik Fakültesi İstatistik Bölümü
(2010-2012)
Doktora : Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü İstatistik
Anabilim Dalı (2013-2019)

Yayınlar (SCI ve diğer)

- 1) Yilmaz, M., **Hameldarbandi, M.**, and Kemalolu, S. A. 2016. Exponential-modified discrete Lindley distribution. *SpringerPlus*, 5(1), 1660.
- 2) **Hameldarbandi, M.**, and YILMAZ, M. 2018. A new perspective of transmuted distribution. Communications Faculty of Sciences University of Ankara Series A1 Mathematics and Statistics, 68(1), 1144-1162.
- 3) Yilmaz, M., **Hameldarbandi, M.** 2015. Üstel-Uyarlanmış Kesikli Lindley Dağılımı, 9. Ululararası İstatistik Kongresi.