ANKARA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

# FİBONACCİ VE LUCAS KUATERNİYONLARI ÜZERİNE BAZI GENELLEŞTİRMELER

Tuğba YAMAN

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ANKARA
2024

## ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

FİBONACCİ VE LUCAS KUATERNİYONLARI ÜZERİNE BAZI GENELLEŞTİRMELER

Tuğba YAMAN

Ankara Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Elif TAN

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölüm giriş kısmına ayrılmıştır.

İkinci bölümde tezde gerekli olan temel tanımlara, teoremlere ve bazı özelliklere yer verilmiştir.

Üçüncü bölümde, Fibonacci ve Lucas eliptik kuaterniyon dizileri tanımlanarak, bu diziler için Binet formülleri, üreteç fonksiyonları, Vajda özdeşliği, Honsberger özdeşliği ve toplam formülleri elde edilmiştir.

Dördüncü bölümde, Fibonacci ve Lucas hiperbolik split kuaterniyon dizileri tanımlanarak, bu diziler için Binet formülleri, üreteç fonksiyonları,Vajda özdeşliği, Honsberger özdeşliği ve toplam formülleri elde edilmiştir.

Beşinci bölüm tartışma ve sonuç bölümüne ayrılmıştır.

**Haziran 2024, 52 sayfa**

**Anahtar Kelimeler:** Eliptik kuaterniyonlar, Hiperbolik split kuaterniyonlar, Fibonacci sayısı, Lucas sayısı

# ABSTRACT

Master Thesis

SOME GENERALIZATIONS ON FIBONACCI AND LUCAS QUATERNIONS

Tuğba YAMAN

Ankara University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Elif TAN

This thesis consist of five chapters.

The first chapter is devoted to the introduction.

In the second chapter, the basic definitions, theorems and some properties required in the thesis are given.

In the third part, Fibonacci and Lucas elliptic quaternion sequences are defined and Binet formulas, generator functions, Vajda identity, Honsberger identity and summation formulas are obtained for these sequences.

In the fourth chapter, Fibonacci and Lucas hyperbolic split quaternion sequences are defined and Binet formulas, generator functions, Vajda identity, Honsberger identity and summation formulas are obtained for these sequences.

The fifth chapter is devoted to discussion and conclusion.

**June 2024, 52 pages**

**Key Words:** Elliptic quaternions, Hyperbolic split quaternions, Fibonacci number, Lucas number

## TEŞEKKÜR

Tanıştığımız günden beri desteklerini esirgemeyen, yüksek lisans eğitimim boyunca da bilgi ve tecrübeleriyle her zaman yol gösteren danışman hocam Sayın Prof. Dr. Elif TAN(Ankara Üniversitesi Matematik Anabilim Dalı)'a en içten teşekkürlerimi ve saygılarımı sunuyorum.

Bu süreçte her zaman yanımda bana destek olan Miray YAR'a aynı süreçlerden geçtiğim çalışma arkadaşlarım Arş.Gör.İrem ÖZGÖKKURT IŞIKDOĞAN(Ankara Üniversitesi Matematik Anabilim Dalı)'a, Büşra KÖSE'ye ve diğer çalışma arkadaşlarıma teşekkürlerimi sunuyorum.

Hayatım boyunca yanımda oldukları gibi eğitim sürecimde de beni cesaretlendiren, bana her daim destek olan dedem Hüseyin SAKİN'e, anneannem Hatice SAKİN'e ve babam Bekir YAMAN'a teşekkür ederim.

Eğitimim boyunca "2210-A Genel Yurt İçi Yüksek Lisans Burs Programı" kapsamında bana destek olan TÜBİTAK'a sonsuz teşekkürlerimi sunuyorum.

Yüksek Lisans tezimi, yaşasaydı bu günleri en çok görmek isteyen rahmetli annem Sevim YAMAN'a ve 6 Şubat 2023 Kahramanmaraş depremlerinde kaybettiğimiz tüm akademisyenlere armağan ediyorum.

Tuğba YAMAN
Ankara, Haziran 2024

# İÇİNDEKİLER

# SİMGELER DİZİNİ

| | |
|---|---|
| $\mathbb{H}$ | Reel kuaterniyonlar kümesi |
| $\mathbb{H}_{a_1,a_2,a_3}$ | Eliptik kuaterniyonlar kümesi |
| $\hat{\mathbb{H}}$ | Split kuaterniyonlar kümesi |
| $\hat{\mathbb{H}}_{a_1,a_2,a_3}$ | Hiperbolik split kuaterniyonlar kümesi |
| $\{F_n\}$ | Fibonacci dizisi |
| $\{L_n\}$ | Lucas dizisi |
| $\{Q_n\}$ | Fibonacci kuaterniyon dizisi |
| $\{K_n\}$ | Lucas kuaterniyon dizisi |
| $\left\{\hat{\mathbb{H}}Q_n\right\}$ | Fibonacci split kuaterniyon dizisi |
| $\left\{\hat{\mathbb{H}}K_n\right\}$ | Lucas split kuaterniyon dizisi |
| $\{Q_{E,n}\}$ | Fibonacci eliptik kuaterniyon dizisi |
| $\{K_{E,n}\}$ | Lucas eliptik kuaterniyon dizisi |
| $\{Q_{H,n}\}$ | Fibonacci hiperbolik split kuaterniyon dizisi |
| $\{K_{H,n}\}$ | Lucas hiperbolik split kuaterniyon dizisi |

## ÇİZELGELER DİZİNİ

# 1. GİRİŞ

İkinci dereceden bir fark denklemi olan doğal büyüme ve gelişmenin matematiksel formülasyonu için başlangıç teşkil eden Fibonacci ve Lucas dizileri matematik, bilgisayar bilimi, fizik, kimya, biyoloji, sosyoloji gibi birçok bilim dalında uygulama alanına sahiptir. Dolayısıyla bu dizilerin genelleştirilmeleri üzerine yapılan çalışmalar her branştaki bilim insanları tarafından oldukça ilgi görmektedir.
Diğer taraftan, Hamilton tarafından 1843 yılında kompleks sayıları genelleştirmek amacı ile keşfedilen kuaterniyonlar matematik, fizik, astronomi ve bilgisayar bilimi gibi birçok bilim dalında uygulama alanına sahiptir. Özellikle kuantum fiziği, diferensiyel geometri, kinematik, görüntü işleme, sinyalizasyon, kodlama, bilgisayar grafikleri, animasyon oluşturma ve katı cisim hareketlerinin incelenmesi gibi uygulama alanlarına sahip olan kuaterniyonlar üzerinde yapılan araştırmalar birçok bilim adamı tarafından ilgi görmektedir (Hamilton 1843, Özdemir ve Ergin 2006).

Kuaterniyonların en önemli uygulama alanlarından biri kinematikte katı cisim hareketlerinin incelenmesinde rol oynamasıdır. Daha açık bir deyiş ile 3-boyutlu Öklid uzayındaki dönme matrisleri, birim kuaterniyonlar ile ifade edilebilmektedir (Vicci 2001). Geometride birçok uygulama alanına sahip olan split kuaterniyonların en önemli özelliği ise 3-boyutlu Lorentz uzayındaki dönme matrislerinin birim timelike split kuaterniyonlar ile ifade edilebilmesidir.

3-boyutlu Öklid uzayı ve Lorentz uzaylarındaki dönmeler $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ küresi veya $-x^2 + y^2 + z^2 = \pm r^2$ hiperboloidi üzerinde meydana geldiğinden bu dönme matrisleri küresel ve hiperbolik hareketlerin incelenmesinde önemli bir rol oynar. Fakat yaşadığımız evrende çoğunlukla eliptik şekillere rastlanıldığından ve özellikle gezegenler eliptik yörüngelere sahip olduğundan elipsoid üzerindeki bir hareketi yorumlamak oldukça önemlidir. 2016 yılında Özdemir, $a_1x^2 + a_2y^2 + a_3z^2 = 1$ elipsoidi üzerindeki eliptik dönme matrislerini elde etmek amacı ile eliptik kuaterniyonları tanımlamıştır. Böylece verilen bir elipsoid için dönmeler birim eliptik kuaterniyonlar ile ifade edilebilmiştir (Özdemir 2016). Benzer şekilde $-a_1x^2 + a_2y^2 + a_3z^2 = \pm 1$ hiperboloidi üzerindeki hiperbolik dönme matrislerini tanımlamak amacıyla hiperbolik split kuaterniyonlar tanımlanmıştır ve böylece verilen bir hiperboloid için dönmeler birim timelike hiperbolik split kuaterniyonlar ile ifade edilebilmiştir (Şimşek ve Özdemir 2016).

Bu tezde ilk olarak, bileşenleri Fibonacci ve Lucas sayılarından oluşan Fibonacci ve Lucas eliptik kuaterniyon dizileri tanımlanarak bu kuaterniyon dizileri için rekürans bağıntıları, üreteç fonksiyonları ve Binet formülleri elde edilecektir. Binet formülü yardımıyla bu kuaterniyon dizileri için Vajda, Catalan, Cassini, d'Ocagne, Honsberger özdeşlikler ve bazı toplam formülleri elde edilecektir. Daha sonra Fibonacci ve Lucas hiperbolik split kuaterniyon dizileri tanımlanarak bu dizilerin özellikleri incelenecektir.

# 2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde ilk olarak reel kuaterniyonlar, eliptik kuaterniyonlar, split kuaterniyonlar ve hiperbolik split kuaterniyonların tanımları verilecektir. Daha sonra Fibonacci ve Lucas dizileri, Fibonacci ve Lucas kuaterniyon dizileri, Fibonacci ve Lucas split kuaterniyon dizileri hakkında ön bilgilere yer verilecektir.

## 2.1 Reel Kuaterniyonlar

**Tanım 2.1** Baz elemanları $\{1, i, j, k\}$

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1 \tag{2.1}$$

çarpım kuralını sağlamak üzere reel kuaterniyonlar kümesi

$$\mathbb{H} = \{q = q_1 + q_2 i + q_3 j + q_4 k \mid q_1, q_2, q_3, q_4 \in \mathbb{R}\}$$

şeklinde tanımlanır (Hamilton 1843).
Çizelge 2.1'den görüldüğü üzere reel kuaterniyonlar kümesi çarpma işlemine göre değişme özelliğine sahip olmayan bir cebirdir.

Çizelge 2.1 Reel kuaterniyon çarpım tablosu

| | $1$ | $i$ | $j$ | $k$ |
|---|---|---|---|---|
| $1$ | $1$ | $i$ | $j$ | $k$ |
| $i$ | $i$ | $-1$ | $k$ | $-j$ |
| $j$ | $j$ | $-k$ | $-1$ | $i$ |
| $k$ | $k$ | $j$ | $-i$ | $-1$ |

Daha açık bir şekilde $p$ ve $q$ kuaterniyonlarının çarpımı

$$\begin{aligned} pq &= p_1q_1 - p_2q_2 - p_3q_3 - p_4q_4 \\ &\quad (p_1q_2 + p_2q_1 - p_4q_3 + p_3q_4)\, i \\ &\quad (p_1q_3 + p_3q_1 - p_2q_4 + p_4q_2)\, j \\ &\quad (p_1q_4 + p_4q_1 - p_3q_4 + p_2q_3)\, k \end{aligned}$$

şeklindedir.

$p = p_1 + p_2 i + p_3 j + p_4 k$ ve $q = q_1 + q_2 i + q_3 j + q_4 k$ reel kuaterniyonlarının toplamı ve farkı

$$p \pm q = (p_1 \pm q_1) + (p_2 \pm q_2)\, i + (p_3 \pm q_3)\, j + (p_4 \pm q_4)\, k,$$

$p$ kuaterniyonunun $c \in \mathbb{R}$ skaleri ile çarpımı

$$cp = cp_1 + cp_2 i + cp_3 j + cp_4 k,$$

olarak tanımlanır.

$p$ kuaterniyonunun skaler ve vektörel kısmı sırasıyla

$$\begin{aligned} S_p &= p_1, \\ V_p &= p_2 i + p_3 j + p_4 k \end{aligned}$$

olarak gösterildiğinde, $S_p = 0$ ise $p$ kuaterniyonuna has kuaterniyon denir.

$p$ reel kuaterniyonunun normu

$$N(p) := \sqrt{p\bar{p}} = \sqrt{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + p_4^2}$$

olarak tanımlanır. Burada $p$ kuaterniyonunun eşleniği $\bar{p}$ ile gösterilir ve $\bar{p} := p_1 - p_2 i - p_3 j - p_4 k$ şeklinde tanımlanır.

$N(p) \neq 0$ olmak üzere

$$p_0 = \frac{p}{N(p)}$$

eşitliğine birim kuaterniyon denir. Her birim kuaterniyon üç boyutlu öklid uzayındaki bir dönmeye karşılık gelir ve reel kuaterniyonlar yardımıyla dönmeler incelenir (Özdemir 2020).

## 2.2 Eliptik Kuaterniyonlar

Reel kuaterniyonlar üzerinde bir genelleştirme yapılarak küre yerine elipsoid üzerindeki dönme hareketlerini incelemek mümkündür. Özdemir (Özdemir 2020) her elipsoid için uygun bir kuaterniyon tanımlanabildiğini göstermiştir. Bu kuaterniyonlar eliptik kuaterniyonlar olarak adlandırılacaktır.

**Tanım 2.2** $\mathbb{R}^3$ uzayında $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere

$$a_1x^2 + a_2y^2 + a_3z^2 = 1 \tag{2.2}$$

elipsoidine karşılık gelen eliptik kuaterniyonlar kümesi

$$\mathbb{H}_{a_1,a_2,a_3} = \left\{q_1 + q_2 i_e + q_3 j_e + q_4 k_e \mid i_e^2 = -a_1, j_e^2 = -a_2, k_e = -a_3, i_e j_e k_e = -\Delta\right\} \tag{2.3}$$

şeklinde tanımlanır. Burada $\Delta := \sqrt{a_1a_2a_3}$ dır (Özdemir 2016, Özdemir 2020). Eliptik kuaterniyonlar kümesi birleşme özelliğine sahip fakat değişme özelliğine sahip değildir. Özel olarak $a_1 = a_2 = a_3 = 1$ olarak alındığında $\mathbb{H}_{a_1,a_2,a_3}$ kümesi reel kuaterniyonlar kümesini vermektedir.

$\mathbb{H}_{a_1,a_2,a_3}$ kümesinde $i_e, j_e, k_e$ birimlerinin sağlamış olduğu çarpım kuralı eliptik kuaterniyon çarpımı olarak adlandırılır ve bu çarpım kuralı Çizelge 2.2'de verilmiştir.

Çizelge 2.2 Eliptik kuaterniyon çarpım tablosu

| | $1$ | $i_e$ | $j_e$ | $k_e$ |
|---|---|---|---|---|
| $1$ | $1$ | $i_e$ | $j_e$ | $k_e$ |
| $i_e$ | $i_e$ | $-a_1$ | $\frac{\Delta}{a_3}k_e$ | $-\frac{\Delta}{a_2}j_e$ |
| $j_e$ | $j_e$ | $-\frac{\Delta}{a_3}k_e$ | $-a_2$ | $\frac{\Delta}{a_1}i_e$ |
| $k_e$ | $k_e$ | $\frac{\Delta}{a_2}j_e$ | $-\frac{\Delta}{a_1}i_e$ | $-a_3$ |

Daha açık bir şekilde $p$ ve $q$ eliptik kuaterniyonlarının çarpımı

$$\begin{aligned} pq &= p_1q_1 - a_1p_2q_2 - a_2p_3q_3 - a_3p_4q_4 \\ &+ \left(p_1q_2 + p_2q_1 + \frac{\Delta}{a_1}p_3q_4 - \frac{\Delta}{a_1}p_4q_3\right) i_e \\ &+ \left(p_1q_3 + p_3q_1 + \frac{\Delta}{a_2}p_4q_2 - \frac{\Delta}{a_2}p_2q_4\right) j_e \\ &+ \left(p_1q_4 + p_4q_1 + \frac{\Delta}{a_3}p_2q_3 - \frac{\Delta}{a_3}p_3q_2\right) k_e. \end{aligned}$$

şeklindedir.

Reel kuaterniyonlara benzer şekilde $p$ eliptik kuaterniyonunun skaler kısmı sıfır ise $p$ kuaterniyonuna has eliptik kuaterniyon denir.

$p$ eliptik kuaterniyon olmak üzere normu

$$N_e(p) := \sqrt{p\bar{p}} = \sqrt{p_1^2 + a_1 p_2^2 + a_2 p_3^2 + a_3 p_4^2}$$

olarak tanımlanır. Burada $p$ kuaterniyonunun eşleniği $p_1 - p_2 i_e - p_3 j_e - p_4 k_e$ şeklindedir.

## 2.3 Split Kuaterniyonlar

Split kuaterniyonlar, 1849 yılında James Cockle tarafından tanımlanmıştır (Cockle 1849). Split kuaterniyonlar için coquaternionlar, para-kuaterniyon, anti-kuaterniyon ve pseudo(yarı)-kuaterniyon terimleri de kullanılmaktadır. Split kuaterniyonlar kullanılarak Lorentz uzayındaki dönmeleri incelemek mümkündür (Kula ve Yaylı 2007, Özdemir 2007)

**Tanım 2.3** Baz elemanları $\{\mathbf{1}, \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}\}$

$$\boldsymbol{i}^2 = -1, \boldsymbol{j}^2 = \boldsymbol{k}^2 = \boldsymbol{i}\boldsymbol{j}\boldsymbol{k} = 1 \tag{2.4}$$

çarpım kuralını sağlamak üzere split kuaterniyonlar kümesi

$$\hat{\mathbb{H}} = \{q = q_1 + q_2\boldsymbol{i} + q_3\boldsymbol{j} + q_4\boldsymbol{k} \mid q_1, q_2, q_3, q_4 \in \mathbb{R}\}$$

şeklinde tanımlanır (Cockle 1849).

Çizelge 2.3'den görüldüğü üzere split kuaterniyonlar kümesi çarpma işlemine göre değişme özelliğine sahip değildir.

Çizelge 2.3 Split kuaterniyon çarpım tablosu

| | 1 | $\boldsymbol{i}$ | $\boldsymbol{j}$ | $\boldsymbol{k}$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | $\boldsymbol{i}$ | $\boldsymbol{j}$ | $\boldsymbol{k}$ |
| $\boldsymbol{i}$ | $\boldsymbol{i}$ | $-1$ | $\boldsymbol{k}$ | $-\boldsymbol{j}$ |
| $\boldsymbol{j}$ | $\boldsymbol{j}$ | $-\boldsymbol{k}$ | 1 | $-\boldsymbol{i}$ |
| $\boldsymbol{k}$ | $\boldsymbol{k}$ | $\boldsymbol{j}$ | $\boldsymbol{i}$ | 1 |

$p = p_1 + p_2\boldsymbol{i} + p_3\boldsymbol{j} + p_4\boldsymbol{k}$ ve $q = q_1 + q_2\boldsymbol{i} + q_3\boldsymbol{j} + q_4\boldsymbol{k}$ split kuaterniyonların toplamı ve farkı

$$p \pm q = (p_1 \pm q_1) + (p_2 \pm q_2)\,\boldsymbol{i} + (p_3 \pm q_3)\,\boldsymbol{j} + (p_4 \pm q_4)\,\boldsymbol{k},$$

$p$ split kuateniyonunun $c \in \mathbb{R}$ skaleri ile çarpımı

$$cp = cp_1 + cp_2\boldsymbol{i} + cp_3\boldsymbol{j} + cp_4\boldsymbol{k},$$

şeklindedir. $p$ ve $q$ split kuaterniyonlarının çarpımı

$$\begin{aligned} pq &= p_1q_1 - p_2q_2 - p_3q_3 - p_4q_4 \\ &\quad (p_1q_2 + p_2q_1 + p_4q_3 - p_3q_4)\,\boldsymbol{i} \\ &\quad (p_1q_3 + p_3q_1 - p_2q_4 + p_4q_2)\,\boldsymbol{j} \\ &\quad (p_1q_4 + p_4q_1 - p_3q_4 + p_2q_3)\,\boldsymbol{k} \end{aligned}$$

şeklindedir.

$p$ split kuaterniyonunun skaler ve vektörel kısmı sırasıyla

$$\begin{aligned} S_p &= p_1, \\ V_p &= p_2\boldsymbol{i} + p_3\boldsymbol{j} + p_4\boldsymbol{k} \end{aligned}$$

olarak gösterildiğinde, $S_p = 0$ ise $p$ kuaterniyonuna has split kuaterniyon denir.

$p$ split kuaterniyonunun normu

$$N_s(p) := \sqrt{p\bar{p}} = \sqrt{p_1^2 + p_2^2 - p_3^2 - p_4^2}$$

şeklindedir. Burada $p$ kuaterniyonunun eşleniği $p_1^2 + p_2^2 - p_3^2 - p_4^2$ şeklindedir. Normu 1 olan split kuaterniyona birim split kuaterniyon denir.

Split kuaterniyonlarda,

$$I_p := p\bar{p} = \bar{p}p = p_1^2 + p_2^2 - p_3^2 - p_4^2$$

eşitliği göz önüne alındığında

$$\begin{aligned} I_p &> 0 \text{ ise } p\text{'ye timelike split kuaterniyon} \\ I_p &< 0 \text{ ise } p\text{'ye spacelike split kuaterniyon} \\ I_p &= 0 \text{ ise } p\text{'ye lightlike split kuaterniyon} \end{aligned}$$

sınıflandırılması yapılabilir (Özdemir 2007).

## 2.4 Hiperbolik Split Kuaterniyonlar

Split kuaterniyonlar üzerinde bir genelleştirme yapılarak birim hiperboloidler yerine herhangi bir hiperboloid üzerideki dönme hareketlerini incelemek mümkündür. Şimşek ve Özdemir (Şimşek ve Özdemir 2016) her hiperboloid için uygun bir split kuaterniyon tanımlanabildiğini göstermişlerdir. Bu kuaterniyonlar hiperboloik split kuaterniyonlar olarak adlandırılacaktır.

**Tanım 2.4** $\mathbb{R}^3$ uzayında $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere

$$-a_1x^2 + a_2y^2 + a_3z^2 = \pm 1 \tag{2.5}$$

hiperboloidine karşılık gelen hiperbolik split kuaterniyonlar kümesi

$$\hat{\mathbb{H}}_{a_1,a_2,a_3} = \left\{ q_1 + q_2 i_h + q_3 j_h + q_4 k_h \mid i_h^2 = -a_1, j_h^2 = a_2, k_h^2 = a_3, i_h j_h k_h = \Delta \right\} \tag{2.6}$$

şeklinde tanımlanır. Burada $\Delta = \sqrt{a_1a_2a_3}$ dır (Şimşek ve Özdemir 2016).
Hiperbolik split kuaterniyonlar kümesi birleşme özelliğine sahip fakat değişme özelliğine sahip olmayan bir cebirdir. Özel olarak $a_1 = a_2 = a_3 = 1$ olarak alındığında $\hat{\mathbb{H}}_{a_1,a_2,a_3}$ kümesi split kuaterniyonlar $\hat{\mathbb{H}}$ kümesini vermektedir.
$\hat{\mathbb{H}}_{a_1,a_2,a_3}$ kümesinde $i_h, j_h, k_h$ birimlerinin sağlamış olduğu çarpım kuralı hiperbolik split kuaterniyon çarpımı olarak adlandırılır ve bu çarpım kuralı Çizelge 2.4'de daha açık bir şekilde verilmiştir.

Çizelge 2.4 Hiperbolik split kuaterniyon çarpım tablosu

| | $1$ | $i_h$ | $j_h$ | $k_h$ |
|---|---|---|---|---|
| $1$ | $1$ | $i_h$ | $j_h$ | $k_h$ |
| $i_h$ | $i_h$ | $-a_1$ | $\frac{\Delta}{a_3}k_h$ | $-\frac{\Delta}{a_2}j_h$ |
| $j_h$ | $j_h$ | $-\frac{\Delta}{a_3}k_h$ | $a_2$ | $-\frac{\Delta}{a_1}i_h$ |
| $k_h$ | $k_h$ | $\frac{\Delta}{a_2}j_h$ | $\frac{\Delta}{a_1}i_h$ | $a_3$ |

$p = p_1 + p_2 i_h + p_3 j_h + p_4 k_h$ ve $q = q_1 + q_2 i_h + q_3 j_h + q_4 k_h$ hiperbolik split kuaterniyon olmak üzere, bu iki hiperbolik split kuaterniyonun toplamı ve farkı

$$p \pm q = (p_1 \pm q_1) + (p_2 \pm q_2)\, i_h + (p_3 \pm q_3)\, j_h + (p_4 \pm q_4)\, k_h$$

dır.

$p$ hiperbolik split kuaterniyonunun $c \in \mathbb{R}$ skaleri ile çarpımı

$$cp = cp_1 + cp_2 i_h + cp_3 j_h + cp_4 k_h$$

şeklindedir. $p$ ve $q$ hiperbolik split kuaterniyonlarının çarpımı

$$\begin{aligned} pq &= p_1q_1 - a_1p_2q_2 - a_2p_3q_3 - a_3p_4q_4 \\ &+ \left(p_1q_2 + p_2q_1 - \frac{\Delta}{a_1}p_3q_4 + \frac{\Delta}{a_1}p_4q_3\right) i_h \\ &+ \left(p_1q_3 + p_3q_1 + \frac{\Delta}{a_2}p_4q_2 - \frac{\Delta}{a_2}p_2q_4\right) j_h \\ &+ \left(p_1q_4 + p_4q_1 + \frac{\Delta}{a_3}p_2q_3 - \frac{\Delta}{a_3}p_3q_2\right) k_h. \end{aligned}$$

şeklindedir.

$p$ hiperbolik split kuaterniyonunun skaler kısmı ve vektörel kısmı sırasıyla,

$$\begin{aligned} S_p &= p_1, \\ V_p &= p_2 i_h + p_3 j_h + p_4 k_h \end{aligned}$$

olarak tanımlanır. Eğer $S_p = 0$ ise $p$ kuaterniyonuna has hiperbolik split kuaterniyon denir.

$p$ hiperbolik split kuaterniyonunun eşleniği $p_1 - p_2 i_h - p_3 j_h - p_4 k_h$ olmak üzere $p$ hiperbolik split kuaterniyonunun normu

$$N_h(p) := \sqrt{p\bar{p}} = \sqrt{p_1^2 + a_1 p_2^2 - a_2 p_3^2 - a_3 p_4^2}$$

olarak tanımlanır.

Hiperbolik split kuaterniyonlarda

$$J_p := p\bar{p} = \bar{p}p = p_1^2 + p_2^2 - p_3^2 - p_4^2$$

eşitliği göz önüne alındığında

$$\begin{aligned} J_p &> 0 \text{ ise } p\text{'ye timelike hiperbolik split kuaterniyon} \\ J_p &< 0 \text{ ise } p\text{'ye spacelike hiperbolik split kuaterniyon} \\ J_p &= 0 \text{ ise } p\text{'ye lightlike hiperbolik split kuaterniyon} \end{aligned}$$

sınıflandırması yapılabilir (Özdemir 2007).

## 2.5 Fibonacci ve Lucas Dizileri

Bu bölümde Fibonacci ve Lucas dizileri için verilen tanım ve özellikler (Vajda 1989) ve (Koshy 2001) kaynaklarından alınmıştır.

**Tanım 2.5 (Fibonaci dizisi)** : Başlangıç koşulları $F_0 = 0$ ve $F_1 = 1$ olmak üzere,

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, n \geq 2$$

rekürans bağıntısını sağlayan $\{F_n\}$ dizisine Fibonacci dizisi denir.
Negatif indisli Fibonacci sayıları

$$F_{-n} = (-1)^{n+1} F_n$$

eşitliği ile tanımlanır. Çizelge 2.5'de $F_n$ ve $F_{-n}$ için ilk 10 terim verilmiştir.

Çizelge 2.5 $F_n$ ve negatif indisli $F_n$ için ilk 10 terim

| $n$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $F_n$ | 0 | 1 | 1 | 2 | 3 | 5 | 8 | 13 | 21 | 34 |
| $F_{-n}$ | 0 | 1 | $-1$ | 2 | $-3$ | 5 | $-8$ | 13 | $-21$ | 34 |

Fibonacci dizisinin karakteristik denklemi,

$$x^2 - x - 1 = 0$$

olarak elde edilir. Bu karakteristik denklemin kökleri,

$$\varsigma = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ ve } \varkappa = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

dir.
Buradan kökler arasındaki ilişki

$$\begin{aligned} \varsigma + \varkappa &= 1 \\ \varsigma - \varkappa &= \sqrt{5} \\ \varsigma\varkappa &= -1 \end{aligned}$$

şeklindedir. Ayrıca

$$\begin{aligned} \varsigma^n &= \varsigma F_n + F_{n-1} \qquad (2.7) \\ \varkappa^n &= \varkappa F_n + F_{n-1} \end{aligned}$$

eşitlikleri sağlanır.

(2.7)'deki eşitlikler kullanılarak $\{F_n\}$ dizisinin genel terimi için

$$F_n = \frac{\varsigma^n - \varkappa^n}{\varsigma - \varkappa} \tag{2.8}$$

eşitliği elde edilir. Bu formülü ilk olarak Fransız matematikçi Binet 1843 yılında bulmuştur. Bu sebeple literatürde Binet formülü şeklinde adlandırılmaktadır.

Fibonaci dizisinin üreteç fonksiyonu

$$\sum_{n=0}^{\infty} F_n x^n = \frac{x}{1 - x - x^2}$$

şeklindedir.

**Tanım 2.6 (Lucas dizisi) :** Başlangıç koşulları $L_0 = 2$ ve $L_1 = 1$ olmak üzere,

$$L_n = L_{n-1} + L_{n-2}, n \geq 2$$

rekürans bağıntısını sağlayan $\{L_n\}$ dizisine Lucas dizisi denir.

Negatif indisli Lucas sayıları,

$$L_{-n} = (-1)^n L_n$$

eşitliği ile tanımlanır. Çizelge 2.6'da $L_n$ ve $L_{-n}$ için ilk 10 terim verilmiştir.

Çizelge 2.6 $L_n$ ve negatif indisli $L_n$ için ilk 10 terim

| $n$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $L_n$ | 2 | 1 | 3 | 4 | 7 | 11 | 18 | 29 | 47 | 76 |
| $L_{-n}$ | 2 | $-1$ | 3 | $-4$ | 7 | $-11$ | 18 | $-29$ | 47 | $-76$ |

Lucas dizisi için Binet formülü

$$L_n = \varsigma^n + \varkappa^n \tag{2.9}$$

şeklinde ifade edilir.

Lucas dizisinin üreteç fonksiyonu

$$\sum_{n=0}^{\infty} L_n x^n = \frac{2 - x}{1 - x - x^2}$$

şeklindedir.

Fibonacci ve Lucas dizileri için bazı teoremler ve sonuçlar verilecektir.

**Teorem 2.1 (Vajda Özdeşliği)** $n, r$ ve $s$ negatif olmayan tamsayılar olmak üzere

$$F_{n+r}F_{n+s} - F_nF_{n+r+s} = (-1)^n F_rF_s$$

özdeşliği sağlanır.

Teorem 2.1'de $r, s \to m$ ve $n \to n-m$ olarak alınırsa, aşağıdaki özdeşlik elde edilir.

**Sonuç 2.1 (Catalan Özdeşliği)** $n$ ile $m$ negatif olmayan tamsayılar ve $n \geq m$ olmak üzere

$$F_n^2 - F_{n-m}F_{n+m} = (-1)^{n-m}F_m^2$$

özdeşliği sağlanır.

Sonuç 2.1'de $m = 1$ olarak alındığında, aşağıdaki özdeşlik elde edilir.

**Sonuç 2.2 (Cassini Özdeşliği)** $n$ negatif olmayan tamsayı olmak üzere

$$F_n^2 - F_{n-1}F_{n+1} = (-1)^n$$

özdeşliği sağlanır.

Teorem 2.1'de $s = m - n$ ve $r = 1$ olarak alındığında aşağıdaki özdeşlik elde edilir.

**Sonuç 2.3 (d'Ocagne Özdeşliği)** $m$ ve $n$ negatif olmayan tamsayılar ve $m \geq n$ olmak üzere

$$F_{n+1}F_m - F_nF_{m+1} = (-1)^n F_{m-n}$$

özdeşliği sağlanır.

**Teorem 2.2 (Honsberger Özdeşliği)** $n$ ve $m$ pozitif tamsayılar olmak üzere

$$F_{m-1}F_n + F_mF_{n+1} = F_{m+n}$$

özdeşliği sağlanır.

## 2.6 Fibonacci ve Lucas Kuaterniyon Dizileri

Fibonacci kuaterniyon dizisi ilk olarak Horadam (Horadam 1963) tarafından tanımlanmıştır. Daha sonra Halıcı (Halıcı 2012) tarafından Fibonaccci ve Lucas kuaterniyonları için Binet formülleri yardımıyla Cassini özdeşliği, toplam formülleri gibi özelliklerin elde edilmesiyle bu diziler tekrar güncel çalışma alanına girmiştir. Son yıllarda bileşenleri özel tamsayı dizilerinin terimlerinden oluşan kuaterniyon dizileri üzerine yapılan çalışmalar büyük bir hız kazanmıştır. Tan vd. Fibonacci ve Lucas kuaterniyon dizilerinin bir genelleştirmesi olan iki periyodik Fibonacci ve Lucas kuaterniyon dizilerini tanımlamışlardır (Tan vd. 2016a, Tan vd. 2016b). Tan ve Leung Fibonacci ve Lucas dizileri için matris metodu kullanarak bu dizilerin özelliklerini elde etmişlerdir (Tan ve Leung 2020). Bu bölümde Fibonacci ve Lucas kuaterniyon dizileri için temel tanım ve teoremler verilecektir.

**Tanım 2.7** $n \geq 0$ olmak üzere

$$Q_n = F_n + F_{n+1}i + F_{n+2}j + F_{n+3}k$$

bağıntısı ile tanımlanan $\{Q_n\}$ dizisine Fibonacci kuaterniyon dizisi denir (Horadam 1963).

**Tanım 2.8** $n \geq 0$ olmak üzere

$$K_n = L_n + L_{n+1}i + L_{n+2}j + L_{n+3}k$$

bağıntısı ile tanımlanan $\{K_n\}$ dizisine Lucas kuaterniyon dizisi denir (Horadam 1963).
$Q_n$ ve $Q_m$ Fibonacci kuaterniyonlar toplamı ve farkı

$$Q_n \pm Q_m = (F_n \pm F_m) + (F_{n+1} \pm F_{m+1})\, i + (F_{n+2} \pm F_{m+2})\, j + (F_{n+3} \pm F_{m+3})\, k$$

$Q_n$ Fibonacci kuaterniyonunun $c \in \mathbb{R}$ skaleri ile çarpımı

$$cQ_n = cF_n + (cF_{n+1})\, i + (cF_{n+2})\, j + (cF_{n+3})\, k$$

olarak tanımlanır. $Q_n$ ve $Q_m$ Fibonacci kuaterniyonlar çarpımı

$$\begin{aligned} Q_nQ_m &= \left(F_n + F_{n+1}i + F_{n+2}j + F_{n+3}k\right)\left(F_m + F_{m+1}i + F_{m+2}j + F_{m+3}k\right) \\ &= F_nF_m - F_{n+1}F_{m+1} - F_{n+2}F_{m+2} - F_{n+3}F_{m+3} \\ &\quad + \left(F_nF_{m+1} + F_{n+1}F_m + F_{n+2}F_{m+3} - F_{n+3}F_{m+2}\right)i \\ &\quad + \left(F_nF_{m+2} + F_{n+2}F_m + F_{n+3}F_{m+1} - F_{n+1}F_{m+3}\right)j \\ &\quad + \left(F_nF_{m+3} + F_{n+3}F_m + F_{n+1}F_{m+2} - F_{n+2}F_{m+1}\right)k \end{aligned}$$

şeklindedir.

$Q_n$ Fibonacci kuaterniyonunun normu

$$\overline{Q_n} = F_n - F_{n+1}i - F_{n+2}j - F_{n+3}k$$

olmak üzere

$$N\left(Q_n\right) := \sqrt{Q_n\overline{Q_n}} = \sqrt{F_n^2 + F_{n+1}^2 + F_{n+2}^2 + F_{n+3}^2}$$

şeklindedir.

Fibonacci ve Lucas kuaterniyonları için Binet formülü $n \geq 0$ olmak üzere

$$Q_n = \frac{\varsigma^n\underline{\varsigma} - \varkappa^n\underline{\varkappa}}{\varsigma - \varkappa},\ K_n = \varsigma^n\underline{\varsigma} + \varkappa^n\underline{\varkappa}$$

şeklindedir. Burada $\underline{\varsigma} = 1+\varsigma i+\varsigma^2 j+\varsigma^3 k$ ve $\underline{\varkappa} = 1+\varkappa i+\varkappa^2 j+\varkappa^3 k$ dir (Halıcı 2012).

## 2.7 Fibonacci ve Lucas Split Kuaterniyon Dizileri

Fibonacci ve Lucas split kuaterniyon dizileri Akyiğit vd. (Akyiğit vd. 2013) tarafından tanımlanmıştır.

**Tanım 2.9** $n \geq 0$ olmak üzere

$$\hat{\mathbb{H}}Q_n = F_n + F_{n+1}\boldsymbol{i} + F_{n+2}\boldsymbol{j} + F_{n+3}\boldsymbol{k}$$

bağıntısını sağlayan $\left\{\hat{\mathbb{H}}Q_n\right\}$ dizisine Fibonacci split kuaterniyon dizisi denir (Akyiğit vd. 2013).

**Tanım 2.10** $n \geq 0$ olmak üzere

$$\hat{\mathbb{H}}K_n = L_n + L_{n+1}\boldsymbol{i} + L_{n+2}\boldsymbol{j} + L_{n+3}\boldsymbol{k}$$

bağıntısını sağlayan $\left\{\hat{\mathbb{H}}K_n\right\}$ dizisine Lucas split kuaterniyon dizisi denir (Akyiğit vd. 2013).

$\hat{\mathbb{H}}Q_n$ ve $\hat{\mathbb{H}}Q_m$ split kuaterniyonlarının toplamı ve farkı

$$\hat{\mathbb{H}}Q_n \pm \hat{\mathbb{H}}Q_m = (F_n \pm F_m) + (F_{n+1} \pm F_{m+1})\,\boldsymbol{i} + (F_{n+2} \pm F_{m+2})\,\boldsymbol{j} + (F_{n+3} \pm F_{m+3})\,\boldsymbol{k}$$

dır.

$\hat{\mathbb{H}}Q_n$ split kuaterniyonunun $c \in \mathbb{R}$ skaleri ile çarpımı

$$c\hat{\mathbb{H}}Q_n = cF_n + (cF_{n+1})\,\boldsymbol{i} + (cF_{n+2})\,\boldsymbol{j} + (cF_{n+3})\,\boldsymbol{k}$$

olarak tanımlanır. $\hat{\mathbb{H}}Q_n$ ve $\hat{\mathbb{H}}Q_m$ split kuaterniyonlarının çarpımı

$$\begin{aligned} \hat{\mathbb{H}}Q_n\hat{\mathbb{H}}Q_m &= (F_n + F_{n+1}\boldsymbol{i} + F_{n+2}\boldsymbol{j} + F_{n+3}\boldsymbol{k})\,(F_m + F_{m+1}\boldsymbol{i} + F_{m+2}\boldsymbol{j} + F_{m+3}\boldsymbol{k}) \\ &= F_nF_m - F_{n+1}F_{m+1} + F_{n+2}F_{m+2} + F_{n+3}F_{m+3} \\ &\quad + (F_nF_{m+1} + F_{n+1}F_m - F_{n+2}F_{m+3} + F_{n+3}F_{m+2})\,\boldsymbol{i} \\ &\quad + (F_nF_{m+2} + F_{n+2}F_m + F_{n+3}F_{m+1} - F_{n+1}F_{m+3})\,\boldsymbol{j} \\ &\quad + (F_nF_{m+3} + F_{n+3}F_m + F_{n+1}F_{m+2} - F_{n+2}F_{m+1})\,\boldsymbol{k} \end{aligned}$$

şeklindedir.

Fibonacci split kuaterniyon normu

$$\overline{\hat{\mathbb{H}}Q_n} = F_n - F_{n+1}\boldsymbol{i} - F_{n+2}\boldsymbol{j} - F_{n+3}\boldsymbol{k}$$

olmak üzere

$$N\left(\hat{\mathbb{H}}Q_n\right) := \sqrt{\hat{\mathbb{H}}Q_n\overline{\hat{\mathbb{H}}Q_n}} = \sqrt{F_n^2 + F_{n+1}^2 - F_{n+2}^2 - F_{n+3}^2}$$

şeklinde tanımlanır (Akyiğit vd. 2013).

# 3. FİBONACCİ VE LUCAS ELİPTİK KUATERNİYON DİZİLERİ

Bu bölümde bileşenleri Fibonacci ve Lucas sayılarından oluşan yeni bir eliptik kuaterniyon dizisi tanımlanacak ve bazı özellikleri incelecektir. Bu bölümde elde edilen sonuçlar Tan vd. (Tan vd. 2024) tarafından elde edilmiştir.

**Tanım 3.1** $n \geq 0$ olmak üzere

$$Q_{E,n} = F_n + F_{n+1} i_e + F_{n+2} j_e + F_{n+3} k_e$$

bağıntısını sağlayan $\{Q_{E,n}\}$ dizisine Fibonacci eliptik kuaterniyon dizisi denir.
Bu dizinin ilk iki terimi

$$Q_{E,0} = i_e + j_e + 2k_e,\ Q_{E,1} = 1 + i_e + 2j_e + 3k_e$$

şeklindedir.

**Tanım 3.2** $n \geq 0$ olmak üzere

$$K_{E,n} = L_n + L_{n+1} i_e + L_{n+2} j_e + L_{n+3} k_e$$

bağıntısını sağlayan $\{K_{E,n}\}$ dizisine Lucas eliptik kuaterniyon dizisi denir.
Bu dizinin ilk iki terimi

$$K_{E,0} = 2 + i_e + 3j_e + 4k_e,\ K_{E,1} = 1 + 3i_e + 4j_e + 7k_e$$

şeklindedir.
Burada $i_e, j_e, k_e$ birimleri eliptik kuaterniyon çarpım kuralını sağlamaktadır.
$Q_{E,n}$ ve $Q_{E,m}$ Fibonacci eliptik kuaterniyonlarının toplamı ve farkı

$$Q_{E,n} \pm Q_{E,m} = (F_n \pm F_m) + (F_{n+1} \pm F_{m+1})\, i_e + (F_{n+2} \pm F_{m+2})\, j_e + (F_{n+3} \pm F_{m+3})\, k_e$$

şeklindedir.
$Q_{E,n}$ Fibonacci kuaterniyonunun $c \in \mathbb{R}$ skaleri ile çarpımı

$$cQ_{E,n} = cF_n + (cF_{n+1})\, i_e + (cF_{n+2})\, j_e + (cF_{n+3})\, k_e$$

şeklindedir.

$Q_{E,n}$ ve $Q_{E,m}$ Fibonacci eliptik kuaterniyonlarının çarpımı

$$\begin{aligned} Q_{E,n}Q_{E,m} &= \left(F_n + F_{n+1}i_e + F_{n+2}j_e + F_{n+3}k_e\right)\left(F_m + F_{m+1}i_e + F_{m+2}j_e + F_{m+3}k_e\right) \\ &= F_nF_m - a_1F_{n+1}F_{m+1} - a_2F_{n+2}F_{m+2} - a_3F_{n+3}F_{m+3} \\ &\quad + \left(F_nF_{m+1} + F_{n+1}F_m + \frac{\Delta}{a_1}F_{n+2}F_{m+3} - \frac{\Delta}{a_1}F_{n+3}F_{m+2}\right) i_e \\ &\quad + \left(F_nF_{m+2} + F_{n+2}F_m + \frac{\Delta}{a_2}F_{n+3}F_{m+1} - \frac{\Delta}{a_2}F_{n+1}F_{m+3}\right) j_e \\ &\quad + \left(F_nF_{m+3} + F_{n+3}F_m + \frac{\Delta}{a_3}F_{n+1}F_{m+2} - \frac{\Delta}{a_3}F_{n+2}F_{m+1}\right) k_e \end{aligned}$$

şeklindedir. Ayrıca Fibonacci eliptik kuaterniyonlarının çarpımının matris gösterimi

$$Q_{E,n}Q_{E,m}= \begin{bmatrix} F_n & -a_1F_{n+1} & -a_2F_{n+2} & -a_3F_{n+3} \\ F_{n+1} & F_n & -\frac{\Delta}{a_1}F_{n+3} & \frac{\Delta}{a_1}F_{n+2} \\ F_{n+2} & \frac{\Delta}{a_2}F_{n+3} & F_n & -\frac{\Delta}{a_2}F_{n+1} \\ F_{n+3} & -\frac{\Delta}{a_3}F_{n+2} & \frac{\Delta}{a_3}F_{n+1} & F_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_m \\ F_{m+1} \\ F_{m+2} \\ F_{m+3} \end{bmatrix}$$

şeklindedir.

Fibonacci eliptik kuaterniyonun normu

$$\overline{Q_{E,n}} = F_n - F_{n+1}i_e - F_{n+2}j_e - F_{n+3}k_e$$

olmak üzere

$$N\left(Q_{E,n}\right) := \sqrt{Q_{E,n}\overline{Q_{E,n}}} = \sqrt{F_n^2 + a_1F_{n+1}^2 + a_2F_{n+2}^2 + a_3F_{n+3}^2}$$

şeklinde tanımlanır.

**Teorem 3.1** Fibonacci eliptik kuaterniyonlar

$$Q_{E,n} = Q_{E,n-1} + Q_{E,n-2}, n \geq 2$$

rekürans bağıntısını sağlar.

**İspat.** Fibonacci eliptik kuaterniyon dizisinin tanımından

$$\begin{aligned} Q_{E,n-1} + Q_{E,n-2} &= F_{n-1} + F_ni_e + F_{n+1}j_e + F_{n+2}k_e + F_{n-2} + F_{n-1}i_e + F_nj_e + F_{n+1}k_e \\ &= \left(F_{n-1} + F_{n-2}\right) + \left(F_n + F_{n-1}\right)i_e + \left(F_{n+1} + F_n\right)j_e + \left(F_{n+2} + F_{n+1}\right)k_e \\ &= F_n + F_{n+1}i_e + F_{n+2}j_e + F_{n+3}k_e \\ &= Q_{E,n} \end{aligned}$$

elde edilir. ■

**Teorem 3.2** $\{Q_{E,n}\}$ dizisinin ve $\{K_{E,n}\}$ dizisinin üreteç fonksiyonları sırasıyla

$$G(x) = \frac{i_e + j_e + 2k_e + (1 + j_e + k_e)\,x}{1 - x - x^2} \tag{3.1}$$

ve

$$H(x) = \frac{2 + i_e + 3j_e + 4k_e + (-1 + 2i_e + j_e + 3k_e)\,x}{1 - x - x^2} \tag{3.2}$$

şeklindedir.

**İspat.** $\{Q_{E,n}\}$ dizisinin üreteç fonksiyonu $G(x)$ olmak üzere $G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} Q_{E,n}x^n$ formal kuvvet serisini göz önüne alalım.

$$\begin{aligned}
\left(1 - x - x^2\right)\sum_{n=0}^{\infty} Q_{E,n}x^n &= \sum_{n=0}^{\infty} Q_{E,n}x^n - \sum_{n=0}^{\infty} Q_{E,n}x^{n+1} - \sum_{n=0}^{\infty} Q_{E,n}x^{n+2} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} Q_{E,n}x^n - \sum_{n=1}^{\infty} Q_{E,n-1}x^n - \sum_{n=2}^{\infty} Q_{E,n-2}x^n \\
&= Q_{E,0} + (Q_{E,1} - Q_{E,0})\,x + \sum_{n\geq 2}^{\infty}(Q_{E,n} - Q_{E,n-1} - Q_{E,n-2})x^n
\end{aligned}$$

elde edilir.

Teorem 3.1'den

$$G(x) = \frac{Q_{E,0} + (Q_{E,1} - Q_{E,0})\,x}{1 - x - x^2}$$

elde edilir. $Q_{E,0}$ ve $Q_{E,1}$ başlangıç koşullarını yerine yazarak

$$G(x) = \frac{i_e + j_e + 2k + (1 + j_e + k_e)\,x}{1 - x - x^2}$$

elde edilir.

$\{K_{E,n}\}$ dizisinin üreteç fonksiyonu $H(x)$ olmak üzere $H(x) = \sum_{n=0}^{\infty} K_{E,n}x^n$ göz önüne alınarak benzer şekilde ispat yapılır. ■

**Teorem 3.3** $\varsigma^* := 1 + \varsigma i_e + \varsigma^2 j_e + \varsigma^3 k_e$ ve $\varkappa^* := 1 + \varkappa i_e + \varkappa^2 j_e + \varkappa^3 k_e$ olmak üzere

$$Q_{E,n} = \frac{\varsigma^*\varsigma^n - \varkappa^*\varkappa^n}{\varsigma - \varkappa} \tag{3.3}$$

ve

$$K_{E,n} = \varsigma^*\varsigma^n + \varkappa^*\varkappa^n \tag{3.4}$$

dir.

**İspat.** Fibonacci eliptik kuaterniyon dizisinin tanımı ve Binet formülü kullanılarak

$$\begin{aligned}
Q_{E,n} &= F_n + F_{n+1}i_e + F_{n+2}j_e + F_{n+3}k_e \\
&= \frac{\varsigma^n - \varkappa^n}{\varsigma - \varkappa} + \left(\frac{\varsigma^{n+1} - \varkappa^{n+1}}{\varsigma - \varkappa}\right) i_e + \left(\frac{\varsigma^{n+2} - \varkappa^{n+2}}{\varsigma - \varkappa}\right) j_e + \left(\frac{\varsigma^{n+3} - \varkappa^{n+3}}{\varsigma - \varkappa}\right) k_e \\
&= \frac{\varsigma^n \left(1 + \varsigma i + \varsigma^2 j_e + \varsigma^3 k_e\right)}{\varsigma - \varkappa} - \frac{\varkappa^n \left(1 + \varkappa i + \varkappa^2 j_e + \varkappa^3 k_e\right)}{\varsigma - \varkappa} \\
&= \frac{\varsigma^* \varsigma^n - \varkappa^* \varkappa^n}{\varsigma - \varkappa}
\end{aligned}$$

elde edilir.

Benzer şekilde Lucas eliptik kuterniyon dizisinin tanımı ve Binet formülü kullanılarak

$$\begin{aligned}
K_{E,n} &= L_n + L_{n+1}i_e + L_{n+2}j_e + L_{n+3}k_e \\
&= \varsigma^n + \varkappa^n + \left(\varsigma^{n+1} + \varkappa^{n+1}\right) i_e + \left(\varsigma^{n+2} + \varkappa^{n+2}\right) j_e + \left(\varsigma^{n+3} + \varkappa^{n+3}\right) k_e \\
&= \varsigma^n \left(1 + \varsigma i + \varsigma^2 j_e + \varsigma^3 k_e\right) + \varkappa^n \left(1 + \varkappa i + \varkappa^2 j_e + \varkappa^3 k_e\right) \\
&= \varsigma^n \varsigma^* + \varkappa^n \varkappa^*
\end{aligned}$$

elde edilir. ■

**Teorem 3.4** Fibonacci ve Lucas eliptik kuaterniyon dizileri için üstel üreteç fonksiyonları sırasıyla

$$\sum_{n=0}^{\infty} Q_{E,n} \frac{x^n}{n!} = \frac{\varsigma^* e^{\varsigma x} - \varkappa^* e^{\varkappa x}}{\varsigma - \varkappa}$$

ve

$$\sum_{n=0}^{\infty} K_{E,n} \frac{x^n}{n!} = \varsigma^* e^{\varsigma x} + \varkappa^* e^{\varkappa x}$$

şeklindedir.

**İspat.** Fibonacci eliptik kuaterniyon dizisinin Binet formülü kullanılarak

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} Q_{E,n} \frac{x^n}{n!} &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\varsigma^* \varsigma^n - \varkappa^* \varkappa^n}{\varsigma - \varkappa}\right) \frac{x^n}{n!} \\
&= \frac{\varsigma^*}{\varsigma - \varkappa} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\varsigma x)^n}{n!} - \frac{\varkappa^*}{\varsigma - \varkappa} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\varkappa x)^n}{n!} \\
&= \frac{\varsigma^* e^{\varsigma x} - \varkappa^* e^{\varkappa x}}{\varsigma - \varkappa}
\end{aligned}$$

elde edilir.

Benzer şekilde Lucas eliptik kuaterniyon dizisinin Binet formülü kullanılarak

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} K_{E,n}\frac{x^n}{n!} &= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\varsigma^*\varsigma^n + \varkappa^*\varkappa^n\right)\frac{x^n}{n!}\\ &= \varsigma^*\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\varsigma x)^n}{n!} + \varkappa^*\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\varkappa x)^n}{n!}\\ &= \varsigma^* e^{\varsigma x} + \varkappa^* e^{\varkappa x}\end{aligned}$$

elde edilir. ■

Şimdi Fibonacci ve Lucas eliptik kuaterniyon dizilerinin bazı özelliklerini elde etmek için yararlanacağımız aşağıdaki lemmayı verelim.

**Lemma 3.1** $\omega := \frac{1}{a_1}i_e + \frac{1}{a_2}j_e - \frac{1}{a_3}k_e$, $t := 1 - a_1 + a_2 - a_3$, $t_1 := a_1F_1 + a_2F_3 + a_3F_5$, $t_2 := \frac{1}{2}\left(a_1F_2 + a_2F_4 + a_3F_6\right)$ olmak üzere aşağıdaki eşitlikler sağlanır.

$(i)$ $\varsigma^*\varkappa^* = K_{E,0} - t - \Delta\sqrt{5}\omega$,

$(ii)$ $\varkappa^*\varsigma^* = K_{E,0} - t + \Delta\sqrt{5}\omega$,

$(iii)$ $(\varsigma^*)^2 = K_{E,0} - (1 + t_1 + t_2) + \sqrt{5}\left(Q_{E,0} - t_2\right)$,

$(iv)$ $(\varkappa^*)^2 = K_{E,0} - (1 + t_1 + t_2) - \sqrt{5}\left(Q_{E,0} - t_2\right)$.

**İspat.** $(i)$ $\varsigma^*$ve $\varkappa^*$ tanımından

$$\begin{aligned}\varsigma^*\varkappa^* &= \left(1+\varsigma i_e+\varsigma^2 j_e+\varsigma^3 k_e\right)\left(1+\varkappa i_e+\varkappa^2 j_e+\varkappa^3 k_e\right)\\ &= \Bigg(1 - a_1(\varsigma\varkappa) - a_2(\varsigma\varkappa)^2 - a_3(\varsigma\varkappa)^3 + \left(\varkappa+\varsigma+\frac{\Delta}{a_1}\left(\varsigma^2\varkappa^3-\varsigma^3\varkappa^2\right)\right)i_e\\ &\quad + \left(\varkappa^2+\varsigma^2+\frac{\Delta}{a_2}\left(\varsigma^3\varkappa-\varsigma\varkappa^3\right)\right)j_e + \left(\varkappa^3+\varsigma^3+\frac{\Delta}{a_3}\left(\varsigma\varkappa^2-\varsigma^2\varkappa\right)\right)k_e\Bigg)\end{aligned}$$

elde edilir. Ardından gerekli işlemler yapıldıktan sonra

$$\begin{aligned}\varsigma^*\varkappa^* &= 1+a_1-a_2+a_3+\left(1-\frac{\Delta}{a_1}\sqrt{5}\right)i_e+\left(3-\frac{\Delta}{a_2}\sqrt{5}\right)j_e+\left(4+\frac{\Delta}{a_3}\sqrt{5}\right)k_e\\ &= 1+a_1-a_2+a_3+K_{E,0}-2-\Delta\sqrt{5}\omega\\ &= K_{E,0}-t-\Delta\sqrt{5}\omega\end{aligned}$$

elde edilir.

$(ii)$ $\varsigma^*$ve $\varkappa^*$ tanımından

$$\begin{aligned}\varkappa^*\varsigma^* &= \left(1+\varkappa i_e+\varkappa^2 j_e+\varkappa^3 k_e\right)\left(1+\varsigma i_e+\varsigma^2 j_e+\varsigma^3 k_e\right)\\ &= \Bigg(1 - a_1(\varkappa\varsigma) - a_2(\varkappa\varsigma)^2 - a_3(\varkappa\varsigma)^3 + \left(\varsigma+\varkappa+\frac{\Delta}{a_1}\left(\varkappa^2\varsigma^3-\varkappa^3\varsigma^2\right)\right)i_e\\ &\quad + \left(\varsigma^2+\varkappa^2+\frac{\Delta}{a_2}\left(\varkappa^3\varsigma-\varkappa\varsigma^3\right)\right)j_e + \left(\varsigma^3+\varkappa^3+\frac{\Delta}{a_3}\left(\varkappa\varsigma^2-\varkappa^2\varsigma\right)\right)k_e\Bigg)\end{aligned}$$

elde edilir. Ardından gerekli işlemler yapıldıktan sonra

$$\begin{aligned}
\varkappa^{*}\varsigma^{*} &= 1+a_1-a_2+a_3+\left(1+\frac{\Delta}{a_1}\sqrt{5}\right)i_e+\left(3+\frac{\Delta}{a_2}\sqrt{5}\right)j_e+\left(4-\frac{\Delta}{a_3}\sqrt{5}\right)k_e \\
&= 1+a_1-a_2+a_3+K_{E,0}-2+\Delta\sqrt{5}\omega \\
&= K_{E,0}-t+\Delta\sqrt{5}\omega
\end{aligned}$$

elde edilir.

$(iii)$ $\varsigma^{*}$ tanımından

$$\begin{aligned}
(\varsigma^{*})^{2} &= \left(1+\varsigma i_e+\varsigma^{2}j_e+\varsigma^{3}k_e\right)\left(1+\varsigma i_e+\varsigma^{2}j_e+\varsigma^{3}k_e\right) \\
&= 1-a_1\varsigma^{2}-a_2\varsigma^{4}-a_3\varsigma^{6}+(2\varsigma)\,i_e+\left(2\varsigma^{2}\right)j_e+\left(2\varsigma^{3}\right)k_e \\
&= 1-a_1\varsigma^{2}-a_2\varsigma^{4}-a_3\varsigma^{6}+2\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)i_e+2\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)j_e+2\left(2+\sqrt{5}\right)k_e \\
&= 1-a_1\varsigma^{2}-a_2\varsigma^{4}-a_3\varsigma^{6}+K_{E,0}-2+\sqrt{5}Q_{E,0} \\
&= K_{E,0}-(1+t_2+t_1)+\sqrt{5}\left(Q_{E,0}-t_2\right)
\end{aligned}$$

elde edilir.

$(iv)$ $\varkappa^{*}$ tanımından

$$\begin{aligned}
(\varkappa^{*})^{2} &= (1+\varkappa i_e+\varkappa^{2}j_e+\varkappa^{3}k_e)(1+\varkappa i_e+\varkappa^{2}j_e+\varkappa^{3}k_e) \\
&= 1-a_1\varkappa^{2}-a_2\varkappa^{4}-a_3\varkappa^{6}+(2\varkappa)i_e+(2\varkappa^{2})j_e+\left(2\varkappa^{3}\right)k_e \\
&= 1-a_1\varkappa^{2}-a_2\varkappa^{4}-a_3\varkappa^{6}+2(\frac{1-\sqrt{5}}{2})i_e+2\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)j_e+2(2-\sqrt{5})k_e \\
&= 1-a_1\varkappa^{2}-a_2\varkappa^{4}-a_3\varkappa^{6}+K_{E,0}-2-\sqrt{5}Q_{E,0} \\
&= K_{E,0}-(1+t_1+t_2)-\sqrt{5}(Q_{E,0}-t_2)
\end{aligned}$$

elde edilir ■

Lemma 3.1 kullanılarak aşağıdaki eşitlikler elde edilir.

**Sonuç 3.1**

$$(i)\,\varsigma^{*}\varkappa^{*}+\varkappa^{*}\varsigma^{*}=2\left(K_{E,0}-t\right)$$

$$(ii)\;\;\varsigma^{*}\varkappa^{*}-\varkappa^{*}\varsigma^{*}=-2\Delta\sqrt{5}\omega$$

$$(iii)\;\;(\varsigma^{*})^{2}+(\varkappa^{*})^{2}=2\left(K_{E,0}-(1+t_1+t_2)\right)$$

$$(iv)\;\;(\varsigma^{*})^{2}-(\varkappa^{*})^{2}=2\sqrt{5}\left(Q_{E,0}-t_2\right).$$

Şimdi Lemma 3.1 ve Teorem 3.3 yardımıyla Fibonacci eliptik kuaterniyon dizileri için Vajda özdeşliği verilecektir.

**Teorem 3.5 (Vajda Özdeşliği)** $n, r$ ve $s$ negatif olmayan tamsayılar olmak üzere

$$Q_{E,n+r}Q_{E,n+s} - Q_{E,n}Q_{E,n+r+s} = (-1)^n F_r \left[ (K_{E,0} - t) F_s + \Delta \omega L_s \right]$$

dir.

**İspat.** Fibonacci eliptik kuaterniyon dizisinin Binet formülü kullanılarak

$$\begin{aligned}
& 5\left(Q_{E,n+r}Q_{E,n+s} - Q_{E,n}Q_{E,n+r+s}\right) \\
= \; & \left(\varsigma^{n+r}\varsigma^* - \varkappa^{n+r}\varkappa^*\right)\left(\varsigma^{n+s}\varsigma^* - \varkappa^{n+s}\varkappa^*\right) - \left(\varsigma^n\varsigma^* - \varkappa^n\varkappa^*\right)\left(\varsigma^{n+r+s}\varsigma^* - \varkappa^{n+r+s}\varkappa^*\right) \\
= \; & \varsigma^n\varkappa^{n+r+s}\left(\varsigma^*\varkappa^*\right) + \varkappa^n\varsigma^{n+r+s}\left(\varkappa^*\varsigma^*\right) - \varsigma^{n+r}\varkappa^{n+s}\left(\varsigma^*\varkappa^*\right) - \varkappa^{n+r}\varsigma^{n+s}\left(\varkappa^*\varsigma^*\right) \\
= \; & (\varsigma\varkappa)^n\varkappa^{r+s}\left(\varsigma^*\varkappa^*\right) + \varsigma^{r+s}\left(\varkappa^*\varsigma^*\right) - (\varsigma\varkappa)^n\varsigma^r\varkappa^s\left(\varsigma^*\varkappa^*\right) + \varkappa^r\varsigma^s\left(\varkappa^*\varsigma^*\right) \\
= \; & (\varsigma\varkappa)^n\left(\left(\varkappa^{r+s} - \varsigma^r\varkappa^s\right)\varsigma^*\varkappa^* + \left(\varsigma^{r+s} - \varkappa^r\varsigma^s\right)\varkappa^*\varsigma^*\right) \\
= \; & (\varsigma\varkappa)^n\left(\varkappa^r - \varsigma^r\right)\varkappa^s\left(\varsigma^*\varkappa^*\right) + \left(\varsigma^r - \varkappa^r\right)\varsigma^s\left(\varkappa^*\varsigma^*\right) \\
= \; & (\varsigma\varkappa)^n\left(\varsigma^r - \varkappa^r\right)\left(\varsigma^s\left(\varkappa^*\varsigma^*\right) - \varkappa^s\left(\varsigma^*\varkappa^*\right)\right)
\end{aligned}$$

elde edilir. Lemma 3.1 $(i) - (ii)$ yerine yazılarak

$$\begin{aligned}
= \; & (-1)^n\left(F_r\sqrt{5}\left(\varsigma^s(K_{E,0} - t_E + \Delta\sqrt{5}\omega_E) - \varkappa^s(K_{E,0} - t_E - \Delta\sqrt{5}\omega_E)\right)\right) \\
= \; & (-1)^n\left(F_r\sqrt{5}((\varsigma^s - \varkappa^s)(K_{E,0} - t_E) + \Delta\sqrt{5}\omega_E(\varsigma^s + \varkappa^s))\right) \\
= \; & (-1)^n\left(F_r\sqrt{5}(F_s\sqrt{5}(K_{E,0} - t) + \Delta\sqrt{5}\omega L_s)\right) \\
= \; & (-1)^n F_r((K_{E,0} - t)F_s + \Delta\omega L_s)
\end{aligned}$$

elde edilir. ■

Teorem 3.5'de $r, s \to m$ ve $n \to n-m$ olarak alındığında, aşağıdaki sonuç elde edilir.

**Sonuç 3.2 (Catalan Özdeşliği)** $n$ ve $s$ negatif olmayn tamsayılar ve $n \geq m$ olmak üzere

$$Q_{E,n}^2 - Q_{E,n-m}Q_{E,n+m} = (-1)^{n-m} F_m \left( (K_{E,0} - t) F_m + \Delta\omega L_m \right)$$

dir.

Sonuç 3.2'de $m = 1$ olarak alındığında, aşağıdaki sonuç elde edilir.

**Sonuç 3.3 (Cassini Özdeşliği)** $n$ negatif olmayan bir tamsayı olmak üzere,

$$Q_{E,n}^2 - Q_{E,n-1}Q_{E,n+1} = (-1)^{n-1}\left((K_{E,0} - t) + \Delta\omega\right)$$

dir.

Teorem 3.5'de $s = m - n$ ve $r = 1$ olarak alındığında, aşağıdaki sonuç elde edilir.

**Sonuç 3.4 (d'Ocagne Özdeşliği)** $n$ ve $m$ negatif olmayan tamsayılar ve $m \geq n$ olmak üzere

$$Q_{E,n+1}Q_{E,m} - Q_{E,n}Q_{E,m+1} = (-1)^n\left((K_{E,0} - t)\, F_{m-n} + \Delta\omega L_{m-n}\right)$$

dir.

**Teorem 3.6 (Honsberger Özdeşliği)** $n$ ve $m$ negatif olmayan tamsayılar olmak üzere

$$Q_{E,m-1}Q_{E,n} + Q_{E,m}Q_{n+1} = F_{m+n}(K_{E,0} - (1 + t_1 + t_2)) + L_{m+n}(Q_{E,0} - t)$$

dir.

**İspat.** Fibonacci eliptik kuaterniyon dizisi Binet formülü ve Lemma 3.1 $(iii) - (iv)$ eşitlikleri kullanılarak

$$\begin{aligned}
&5\left(Q_{E,m-1}Q_{E,n} + Q_{E,m}Q_{E,n+1}\right)\\
&= \left(\varsigma^{m-1}\varsigma^* - \varkappa^{m-1}\varkappa^*\right)\left(\varsigma^n\varsigma^* - \varkappa^n\varkappa^*\right) + \left(\varsigma^m\varsigma^* - \varkappa^m\varkappa^*\right)\left(\varsigma^{n+1}\varsigma^* - \varkappa^{n+1}\varkappa^*\right)\\
&= \Big(\varsigma^{m+n-1}\left(\varsigma^*\right)^2 - \varsigma^{m-1}\varkappa^n\varsigma^*\varkappa^* - \varkappa^{m-1}\varsigma^n\varkappa^*\varsigma^* + \varkappa^{m+n-1}\left(\varkappa^*\right)^2\\
&\quad \varsigma^{m+n+1}\left(\varsigma^*\right)^2 - \varsigma^m\varkappa^{n+1}\varsigma^*\varkappa^* - \varkappa^m\varsigma^{n+1}\varkappa^*\varsigma^* + \varkappa^{m+n+1}\left(\varkappa^*\right)^2\Big)\\
&= \Big(\varsigma^{m+n-1}\left(\varsigma^*\right)^2 + \varkappa^{m+n-1}\left(\varkappa^*\right)^2 + \varsigma^{m+n+1}\left(\varsigma^*\right)^2 + \varkappa^{m+n+1}\left(\varkappa^*\right)^2\\
&\quad -\varsigma^{m-1}\varkappa^n\varsigma^*\varkappa^* - \varkappa^{m-1}\varsigma^n\varkappa^*\varsigma^* - \varsigma^m\varkappa^{n+1}\varsigma^*\varkappa^* - \varkappa^m\varsigma^{n+1}\varkappa^*\varsigma^*\Big)\\
&= \Big(\varsigma^{m+n}(\varsigma - \varkappa)\left(\varsigma^*\right)^2 - \varkappa^{m+n}(\varsigma - \varkappa)\left(\varkappa^*\right)^2\\
&\quad -\varsigma^m(\varsigma^{-1}\varkappa^n + \varkappa^{n+1})\varsigma^*\varkappa^* - \varkappa^m(\varkappa^{-1}\varsigma^n + \varsigma^{n+1})\varkappa^*\varsigma^*\Big)\\
&= (\varsigma - \varkappa)(\varsigma^{m+n}\left(\varsigma^*\right)^2 - \varkappa^{m+n}\left(\varkappa^*\right)^2)\\
&= \sqrt{5}\left(\varsigma^{m+n}\left(K_{E,0} - (1 + t_1 + t_2) + \sqrt{5}\left(Q_{E,0} - t_2\right)\right)\right.\\
&\quad \left.-\varkappa^{m+n}\left(K_{E,0} - (1 + t_1 + t_2) - \sqrt{5}\left(Q_{E,0} - t_2\right)\right)\right)\\
&= \sqrt{5}\left(\left(\varsigma^{m+n} - \varkappa^{m+n}\right)\left(K_{E,0} - (1 + t_1 + t_2)\right) + \left(\varsigma^{m+n} + \varkappa^{m+n}\right)\sqrt{5}\left(Q_{E,0} - t_2\right)\right)
\end{aligned}$$

$$= \sqrt{5}\left(F_{m+n}\sqrt{5}\left(K_{E,0}-(1+t_1+t_2)\right)+L_{m+n}\sqrt{5}\left(Q_{E,0}-t_2\right)\right)$$
$$= F_{m+n}\left(K_{E,0}-(1+t_1+t_2)\right)+L_{m+n}\left(Q_{E,0}-t_2\right)$$

elde edilir. ∎

Şimdi Fibonacci eliptik kuaterniyon ve Lucas eliptik kuaterniyon dizilerini içeren bazı teoremler verilecektir.

**Teorem 3.7** $n,r,s$ negatif olmayan tamsayılar ve $r\leq s$ olmak üzere

$$K_{E,n+r}Q_{E,n+s}-K_{E,n+s}Q_{E,n+r}=2\left(-1\right)^{n+r}F_{s-r}\left(K_{E,0}-t\right)$$

eşitliği sağlanır.

**İspat.** Fibonaci ve Lucas eliptik kuaterniyon dizileri Binet formülleri kullanılarak

$$\begin{aligned}
&\sqrt{5}\left(K_{E,n+r}Q_{E,n+s}-K_{E,n+s}Q_{E,n+r}\right)\\
=\;&\left(\varsigma^{*}\varsigma^{n+r}+\varkappa^{*}\varkappa^{n+r}\right)\left(\varsigma^{*}\varsigma^{n+s}-\varkappa^{*}\varkappa^{n+s}\right)\\
&-\left(\varsigma^{*}\varsigma^{n+s}+\varkappa^{*}\varkappa^{n+s}\right)\left(\varsigma^{*}\varsigma^{n+r}-\varkappa^{*}\varkappa^{n+r}\right)\\
=\;&\left(\varsigma^{*}\right)^{2}\varsigma^{2n+r+s}-\varsigma^{*}\varkappa^{*}\varsigma^{n+r}\varkappa^{n+s}+\varkappa^{*}\varsigma^{*}\varsigma^{n+s}\varkappa^{n+r}-\left(\varkappa^{*}\right)^{2}\varkappa^{2n+r+s}\\
&-\left(\varsigma^{*}\right)^{2}\varsigma^{2n+r+s}+\varsigma^{*}\varkappa^{*}\varsigma^{n+s}\varkappa^{n+r}-\varkappa^{*}\varsigma^{*}\varsigma^{n+r}\varkappa^{n+s}+\left(\varkappa^{*}\right)^{2}\varkappa^{2n+r+s}\\
=\;&\varsigma^{*}\varkappa^{*}\left(\varsigma\varkappa\right)^{n}\left(\varsigma^{s}\varkappa^{r}-\varsigma^{r}\varkappa^{s}\right)+\varkappa^{*}\varsigma^{*}\left(\varsigma\varkappa\right)^{n}\left(\varsigma^{s}\varkappa^{r}-\varsigma^{r}\varkappa^{s}\right)\\
=\;&\left(\varsigma\varkappa\right)^{n}\left(\varsigma^{s}\varkappa^{r}-\varsigma^{r}\varkappa^{s}\right)\left(\varsigma^{*}\varkappa^{*}+\varkappa^{*}\varsigma^{*}\right)\\
=\;&2\left(-1\right)^{n+r}\left(\varsigma^{s-r}-\varkappa^{s-r}\right)\left(K_{E,0}-t\right)\\
=\;&2(-1)^{n+r}\sqrt{5}F_{s-r}(K_{E,0}-t)\\
=\;&2(-1)^{n+r}F_{s-r}(K_{E,0}-t)
\end{aligned}$$

elde edilir. ∎

**Teorem 3.8** $n$ negatif olmayan bir tamsayı olmak üzere aşağıdaki eşitlikler sağlanır.

$$\begin{aligned}
(i)\; K_{E,n}^{2}+Q_{E,n}^{2} &= \frac{6}{5}\left(\left(K_{E,0}-(1+t_1+t_2)\right)L_{2n}+5\left(Q_{E,0}-t_2\right)F_{2n}\right)\\
&\quad+\frac{8}{5}\left(K_{E,0}-t\right)\left(-1\right)^{n},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(ii)\; K_{E,n}^{2}-Q_{E,n}^{2} &= \frac{4}{5}\left(\left(K_{E,0}-(1+t_1+t_2)\right)L_{2n}+5\left(Q_{E,0}-t_2\right)F_{2n}\right)\\
&\quad+\frac{12}{5}\left(K_{E,0}-t\right)\left(-1\right)^{n}.
\end{aligned}$$

**İspat.** $(i)$ Fibonacci eliptik kuaterniyon ve Lucas eliptik kuaterniyon dizilerinin Binet formülleri kullanılarak

$$
\begin{aligned}
K_{E,n}^{2}+Q_{E,n}^{2} &= \left(\varsigma^{*}\varsigma^{n}+\varkappa^{*}\varkappa^{n}\right)^{2}+\tfrac{1}{5}\left(\varsigma^{*}\varsigma^{n}-\varkappa^{*}\varkappa^{n}\right)^{2} \\
&= \left(\varsigma^{*}\varsigma^{n}+\varkappa^{*}\varkappa^{n}\right)\left(\varsigma^{*}\varsigma^{n}+\varkappa^{*}\varkappa^{n}\right)+\tfrac{1}{5}\left(\varsigma^{*}\varsigma^{n}-\varkappa^{*}\varkappa^{n}\right)\left(\varsigma^{*}\varsigma^{n}-\varkappa^{*}\varkappa^{n}\right) \\
&= \left(\varsigma^{*}\right)^{2}\varsigma^{2n}+\varsigma^{*}\varkappa^{*}\left(\varsigma\varkappa\right)^{n}+\varkappa^{*}\varsigma^{*}\left(\varsigma\varkappa\right)^{n}+\left(\varkappa^{*}\right)^{2}\varkappa^{2n} \\
&\quad +\tfrac{1}{5}\left(\left(\varsigma^{*}\right)^{2}\varsigma^{2n}-\varsigma^{*}\varkappa^{*}\left(\varsigma\varkappa\right)^{n}-\varkappa^{*}\varsigma^{*}\left(\varsigma\varkappa\right)^{n}+\left(\varkappa^{*}\right)^{2}\varkappa^{2n}\right) \\
&= \left(1+\tfrac{1}{5}\right)\left(\left(\varsigma^{*}\right)^{2}\varsigma^{2n}+\left(\varkappa^{*}\right)^{2}\varkappa^{2n}\right) \\
&\quad +\left(1-\tfrac{1}{5}\right)\left(\varsigma^{*}\varkappa^{*}+\varkappa^{*}\varsigma^{*}\right)\left(\varsigma\varkappa\right)^{n}
\end{aligned}
$$

Lemma 3.1 $(iii)-(iv)$ ve Sonuç 3.1 $(i)$ yerine yazıldığında

$$
\begin{aligned}
K_{E,n}^{2}+Q_{E,n}^{2} &= \left(1+\tfrac{1}{5}\right)\left(K_{E,0}-(1+t_1+t_2)+\sqrt{5}\left(Q_{E,0}-t_2\right)\right)\varsigma^{2n} \\
&\quad +\left(1+\tfrac{1}{5}\right)\left(K_{E,0}-(1+t_1+t_2)-\sqrt{5}\left(Q_{E,0}-t_2\right)\right)\varkappa^{2n} \\
&\quad +2\left(1-\tfrac{1}{5}\right)\left(K_{E,0}-t\right)(-1)^{n} \\
&= \left(1+\tfrac{1}{5}\right)\left(\left(K_{E,0}-(1+t_1+t_2)\right)L_{2n}+5\left(Q_{E,0}-t_2\right)F_{2n}\right) \\
&\quad +2\left(1-\tfrac{1}{5}\right)\left(K_{E,0}-t\right)(-1)^{n}
\end{aligned}
$$

ispat tamamlanır.

$(ii)$ Fibonacci eliptik kuaterniyon ve Lucas eliptik kuaterniyon dizilerinin Binet formüllerinden,

$$
\begin{aligned}
K_{E,n}^{2}-Q_{E,n}^{2} &= \left(\varsigma^{*}\varsigma^{n}+\varkappa^{*}\varkappa^{n}\right)^{2}-\tfrac{1}{5}\left(\varsigma^{*}\varsigma^{n}-\varkappa^{*}\varkappa^{n}\right)^{2} \\
&= \left(\varsigma^{*}\varsigma^{n}+\varkappa^{*}\varkappa^{n}\right)\left(\varsigma^{*}\varsigma^{n}+\varkappa^{*}\varkappa^{n}\right)-\tfrac{1}{5}\left(\varsigma^{*}\varsigma^{n}-\varkappa^{*}\varkappa^{n}\right)\left(\varsigma^{*}\varsigma^{n}-\varkappa^{*}\varkappa^{n}\right) \\
&= \left(\varsigma^{*}\right)^{2}\varsigma^{2n}+\varsigma^{*}\varkappa^{*}\left(\varsigma\varkappa\right)^{n}+\varkappa^{*}\varsigma^{*}\left(\varsigma\varkappa\right)^{n}+\left(\varkappa^{*}\right)^{2}\varkappa^{2n} \\
&\quad -\tfrac{1}{5}\left(\left(\varsigma^{*}\right)^{2}\varsigma^{2n}-\varsigma^{*}\varkappa^{*}\left(\varsigma\varkappa\right)^{n}-\varkappa^{*}\varsigma^{*}\left(\varsigma\varkappa\right)^{n}+\left(\varkappa^{*}\right)^{2}\varkappa^{2n}\right) \\
&= (1-\tfrac{1}{5})((\varsigma^{*})^{2}\varsigma^{2n}+(\varkappa^{*})^{2}\varkappa^{2n})+(1+\tfrac{1}{5})((\varsigma\varkappa)^{n}(\varsigma^{*}\varkappa^{*}+\varkappa^{*}\varsigma^{*})
\end{aligned}
$$

Lemma 3.1 $(iii)-(iv)$ ve Sonuç 3.1 $(i)$ yerine yazıldığında

$$\begin{aligned}
&= (1-\frac{1}{5})((\varsigma^*)^2\varsigma^{2n}+(\varkappa^*)^2\varkappa^{2n})+(1+\frac{1}{5})((\varsigma\varkappa)^n(\varsigma^*\varkappa^*+\varkappa^*\varsigma^*) \\
&\quad +(1+\frac{1}{5})((\varsigma\varkappa)^n(\varsigma^*\varkappa^*+\varkappa^*\varsigma^*) \\
&= \frac{4}{5}\left(\varsigma^{2n}(K_{E,0}-(1+t_1+t_2\right)+\sqrt{5}(Q_{E,0}-t_2)) \\
&\quad \varkappa^{2n}(K_{E,0}-(1+t_1+t_2)-\sqrt{5}(Q_{E,0}-t_2))+\frac{6}{5}\left((\varsigma\varkappa)^n 2\left(K_{E,0}-t\right)\right) \\
&= \frac{4}{5}((K_{E,0}-(1+t_1+t_2))\left(\varsigma^{2n}+\varkappa^{2n}\right) \\
&\quad +\sqrt{5}(Q_{E,0}-t_2)\left(\varsigma^{2n}-\varkappa^{2n}\right))+\frac{6}{5}\left(-1\right)^n 2\left(K_{E,0}-t\right) \\
&= \frac{4}{5}\left(K_{E,0}-(1+t_1+t_2)\right)L_{2n}+5(Q_{E,0}-t_2)F_{2n}) \\
&\quad +\frac{12}{5}\left(-1\right)^n\left(K_{E,0}-t\right)
\end{aligned}$$

elde edilir. ■

**Teorem 3.9** $n$ ve $m$ negatif olmayan tamsayılar ve $m \geq n$ olmak üzere

$$Q_{E,n}K_{E,m}-K_{E,m}Q_{E,n}=2\left(-1\right)^{n+1}\Delta\omega L_{m-n}$$

eşitliği sağlanır.

**İspat.** Fibonacci eliptik kuaterniyon ve Lucas eliptik kuaterniyon dizilerinin Binet formülleri kullanılarak

$$\begin{aligned}
&\sqrt{5}\left(Q_{E,n}K_m-K_{E,m}Q_{E,n}\right) \\
&= \left(\varsigma^*\varsigma^n-\varkappa^*\varkappa^n\right)\left(\varsigma^*\varsigma^m+\varkappa^*\varkappa^m\right) \\
&\quad -\left(\varsigma^*\varsigma^m+\varkappa^*\varkappa^m\right)\left(\varsigma^*\varsigma^n-\varkappa^*\varkappa^n\right) \\
&= \left(\varsigma^*\right)^2\varsigma^{n+m}+\varsigma^*\varkappa^*\varsigma^n\varkappa^m-\varkappa^*\varsigma^*\varsigma^m\varkappa^n-\left(\varkappa^*\right)^2\varkappa^{n+m} \\
&\quad -\left(\varsigma^*\right)^2\varsigma^{n+m}+\varsigma^*\varkappa^*\varsigma^m\varkappa^n-\varkappa^*\varsigma^*\varsigma^n\varkappa^m+\left(\varkappa^*\right)^2\varkappa^{n+m} \\
&= \varsigma^*\varkappa^*\varsigma^n\varkappa^m-\varkappa^*\varsigma^*\varsigma^m\varkappa^n+\varsigma^*\varkappa^*\varsigma^m\varkappa^n-\varkappa^*\varsigma^*\varsigma^n\varkappa^m \\
&= \left(\varsigma^*\varkappa^*-\varkappa^*\varsigma^*\right)\left(\varsigma^n\varkappa^m+\varsigma^m\varkappa^n\right)
\end{aligned}$$

Sonuç 3.1 $(ii)$ yerine yazıldığında

$$\begin{aligned}\sqrt{5}\left(Q_{E,n}K_m - K_{E,m}Q_{E,n}\right) &= \left(\varsigma^*\varkappa^* - \varkappa^*\varsigma^*\right)\left(\varsigma^n\varkappa^m + \varsigma^m\varkappa^n\right)\\ &= 2\left(-1\right)^{n+1}\Delta\sqrt{5}\omega\left(\varkappa^{m-n} + \varsigma^{m-n}\right)\\ &= 2\left(-1\right)^{n+1}\Delta\sqrt{5}\omega L_{m-n}\\ &= 2\left(-1\right)^{n+1}\Delta\omega L_{m-n}\end{aligned}$$

elde edilir. ■

Şimdi Fibonacci ve Lucas eliptik kuaterniyon dizileri için binom toplam formülleri verilecektir.

**Teorem 3.10**

$$\begin{aligned}(i)\sum_{c=0}^{v}\binom{v}{c}Q_{E,c+r} &= Q_{E,2v+r},\\ (ii)\sum_{c=0}^{v}\binom{v}{c}K_{E,c+r} &= K_{E,2v+r}.\end{aligned}$$

**İspat.** $(i)$ Fibonacci eliptik kuaterniyon dizisinin Binet formülü ve binom açılımı kullanılarak

$$\begin{aligned}\sum_{c=0}^{v}\binom{v}{c}Q_{E,c+r} &= \sum_{c=0}^{v}\binom{v}{c}\left(\frac{\varsigma^*\varsigma^{c+r} - \varkappa^*\varkappa^{c+r}}{\varsigma - \varkappa}\right)\\ &= \frac{\varsigma^*\varsigma^r}{\varsigma - \varkappa}\sum_{c=0}^{v}\binom{v}{c}\varsigma^c - \frac{\varkappa^*\varkappa^r}{\varsigma - \varkappa}\sum_{c=0}^{v}\binom{v}{c}\varkappa^c\\ &= \frac{\varsigma^*\varsigma^r}{\varsigma - \varkappa}\left(1+\varsigma\right)^v - \frac{\varkappa^*\varkappa^r}{\varsigma - \varkappa}\left(1+\varkappa\right)^v\\ &= \frac{\varsigma^*\varsigma^{2v+r} - \varkappa^*\varkappa^{2v+r}}{\varsigma - \varkappa} = Q_{E,2v+r}\end{aligned}$$

elde edilir.

$(ii)$ Lucas eliptik kuaterniyon dizisinin Binet formülü ve binom açılımı kullanılarak

$$\begin{aligned}\sum_{c=0}^{v}\binom{v}{c}K_{E,c+r} &= \sum_{c=0}^{v}\binom{v}{c}\left(\varsigma^*\varsigma^{c+r} + \varkappa^*\varkappa^{c+r}\right)\\ &= \varsigma^*\varsigma^r\sum_{c=0}^{v}\binom{v}{c}\varsigma^c + \varkappa^*\varkappa^r\sum_{c=0}^{v}\binom{v}{c}\varkappa^c\\ &= \varsigma^*\varsigma^r\left(1+\varsigma\right)^v + \varkappa^*\varkappa^r\left(1+\varkappa\right)^v\\ &= \varsigma^*\varsigma^{2v+r} + \varkappa^*\varkappa^{2v+r}\\ &= K_{E,2v+r}\end{aligned}$$

elde edilir. ■

**Teorem 3.11**

$$
\begin{aligned}
(i)\sum_{c=0}^{v}\binom{v}{c}Q_{E,2c+r} &= \begin{cases} 5^{\frac{v}{2}}Q_{E,v+r}, & v \text{ çift ise,} \\ 5^{\frac{v-1}{2}}K_{E,v+r}, & v \text{ tek ise,} \end{cases} \\
(ii)\sum_{c=0}^{v}\binom{v}{c}K_{E,2c+r} &= \begin{cases} 5^{\frac{v}{2}}K_{E,v+r}, & v \text{ çift ise,} \\ 5^{\frac{v+1}{2}}Q_{E,v+r}, & v \text{ tek ise,} \end{cases} \\
(iii)\sum_{c=0}^{v}\binom{v}{c}(-1)^{c}Q_{E,2c+r} &= (-1)^{v}Q_{E,v+r}, \\
(iv)\sum_{c=0}^{v}\binom{v}{c}(-1)^{c}K_{E,2c+r} &= (-1)^{v}K_{E,v+r}.
\end{aligned}
$$

**İspat.** $(i)$ Fibonacci eliptik kuaterniyon dizisinin Binet formülü ve binom açılımı kullanılarak

$$
\begin{aligned}
\sum_{c=0}^{v}\binom{v}{c}Q_{E,2c+r} &= \sum_{c=0}^{v}\binom{v}{c}\left(\frac{\varsigma^{*}\varsigma^{2c+r}-\varkappa^{*}\varkappa^{2c+r}}{\varsigma-\varkappa}\right) \\
&= \frac{\varsigma^{*}\varsigma^{r}}{\varsigma-\varkappa}\sum_{c=0}^{v}\binom{v}{c}\varsigma^{2c}-\frac{\varkappa^{*}\varkappa^{r}}{\varsigma-\varkappa}\sum_{c=0}^{v}\binom{v}{c}\varkappa^{2c} \\
&= \frac{\varsigma^{*}\varsigma^{r}}{\varsigma-\varkappa}\left(1+\varsigma^{2}\right)^{v}-\frac{\varkappa^{*}\varkappa^{r}}{\varsigma-\varkappa}\left(1+\varkappa^{2}\right)^{v} \\
&= \frac{\varsigma^{*}\varsigma^{r}\left(\varsigma\sqrt{5}\right)^{v}-\varkappa^{*}\varkappa^{r}\left(-\varkappa\sqrt{5}\right)^{v}}{\varsigma-\varkappa} \\
&= \begin{cases} 5^{\frac{v}{2}}Q_{E,v+r}, & v \text{ çift ise} \\ 5^{\frac{v-1}{2}}K_{E,v+r}, & v \text{ tek ise} \end{cases}
\end{aligned}
$$

elde edilir.

$(ii)$ Lucas eliptik kuaterniyon dizisinin Binet formülü ve binom açılımı kullanılarak

$$
\begin{aligned}
\sum_{c=0}^{v}\binom{v}{c}K_{E,2c+r} &= \sum_{c=0}^{v}\binom{v}{c}\left(\varsigma^{*}\varsigma^{2c+r}+\varkappa^{*}\varkappa^{2c+r}\right) \\
&= \varsigma^{*}\varsigma^{r}\sum_{c=0}^{v}\binom{v}{c}\varsigma^{2c}+\varkappa^{*}\varkappa^{r}\sum_{c=0}^{v}\binom{v}{c}\varkappa^{2c} \\
&= \varsigma^{*}\varsigma^{r}\left(1+\varsigma^{2}\right)^{v}+\varkappa^{*}\varkappa^{r}\left(1+\varkappa^{2}\right)^{v} \\
&= \varsigma^{*}\varsigma^{r}\left(\varsigma\sqrt{5}\right)^{v}+\varkappa^{*}\varkappa^{r}\left(-\varkappa\sqrt{5}\right)^{v} \\
&= \begin{cases} 5^{\frac{v}{2}}K_{E,v+r}, & v \text{ çift ise} \\ 5^{\frac{v+1}{2}}Q_{E,v+r}, & v \text{ tek ise} \end{cases}
\end{aligned}
$$

elde edilir.

$(iii)$ Fibonacci eliptik kuaterniyon dizisinin Binet formülü ve binom açılımı kullanılarak

$$
\begin{aligned}
\sum_{c=0}^{v}\binom{v}{c}(-1)^{c}Q_{E,2c+r} &= \sum_{c=0}^{v}\binom{v}{c}(-1)^{c}\left(\frac{\varsigma^{2c+r}\varsigma^{*}-\varkappa^{2c+r}\varkappa^{*}}{\varsigma-\varkappa}\right)\\
&= \frac{\varsigma^{*}\varsigma^{r}}{\varsigma-\varkappa}\sum_{c=0}^{v}\binom{v}{c}(-1)^{c}\varsigma^{2c}-\frac{\varkappa^{*}\varkappa^{r}}{\varsigma-\varkappa}\sum_{c=0}^{v}\binom{v}{c}(-1)^{c}\varkappa^{2c}\\
&= \frac{\varsigma^{*}\varsigma^{r}}{\varsigma-\varkappa}\left(1-\varsigma^{2}\right)^{v}-\frac{\varkappa^{*}\varkappa^{r}}{\varsigma-\varkappa}\left(1-\varkappa^{2}\right)^{v}\\
&= \frac{\varsigma^{*}\varsigma^{r}}{\varsigma-\varkappa}(-\varsigma)^{v}-\frac{\varkappa^{*}\varkappa^{r}}{\varsigma-\varkappa}(-\varkappa)^{v}\\
&= (-1)^{v}Q_{E,v+r}
\end{aligned}
$$

elde edilir.

$(iv)$ Lucas eliptik kuaterniyon dizisinin Binet formülü ve binom açılımı kullanılarak

$$
\begin{aligned}
\sum_{c=0}^{v}\binom{v}{c}(-1)^{c}K_{E,2c+r} &= \sum_{c=0}^{v}\binom{v}{c}(-1)^{c}\left(\varsigma^{2c+r}\varsigma^{*}+\varkappa^{2c+r}\varkappa^{*}\right)\\
&= \varsigma^{*}\varsigma^{r}\sum_{c=0}^{v}\binom{v}{c}(-1)^{c}\varsigma^{2c}+\varkappa^{*}\varkappa^{r}\sum_{c=0}^{v}\binom{v}{c}(-1)^{c}\varkappa^{2c}\\
&= \varsigma^{*}\varsigma^{r}\left(1-\varsigma^{2}\right)^{v}+\varkappa^{*}\varkappa^{r}\left(1-\varkappa^{2}\right)^{v}\\
&= \varsigma^{*}\varsigma^{r}(-\varsigma)^{v}+\varkappa^{*}\varkappa^{r}(-\varkappa)^{v}\\
&= (-1)^{v}K_{E,v+r}
\end{aligned}
$$

elde edilir.

Böylece teoremde verilen ifadelerin ispatları tamamlanmış olur. ■

Fibonacci ve Lucas eliptik kuaterniyon dizileri için bazı binom toplam formülleri verilecektir.

**Teorem 3.12**

$$(i)\sum_{c=0}^{v}\binom{v}{2c}Q_{E,4c} = \begin{cases} \frac{1}{2}\left(5^{\frac{v}{2}}+1\right)Q_{E,v}, & v \text{ çift ise},\\ \frac{1}{2}\left(5^{\frac{v-1}{2}}K_{E,v}-Q_{E,v}\right), & v \text{ tek ise},\end{cases}$$

$$(ii)\sum_{c=0}^{v}\binom{v}{2c}K_{E,4c} = \begin{cases} \frac{1}{2}\left(5^{\frac{v}{2}}+1\right)K_{E,v}, & v \text{ çift ise},\\ \frac{1}{2}\left(5^{\frac{v+1}{2}}Q_{E,v}-K_{E,v}\right), & v \text{ tek ise},\end{cases}$$

$$(iii)\sum_{c=0}^{v}\binom{v}{2c+1}Q_{E,4c+1} = \begin{cases} \frac{1}{2}\left(5^{\frac{v}{2}}-1\right)Q_{E,v}, & v \text{ çift ise},\\ \frac{1}{2}\left(5^{\frac{v-1}{2}}K_{E,v}+Q_{E,v}\right), & v \text{ tek ise},\end{cases}$$

$$(iv)\sum_{c=0}^{v}\binom{v}{2c+1}K_{E,4c+1} = \begin{cases} \frac{1}{2}\left(5^{\frac{v}{2}}-1\right)K_{E,v}, & v \text{ çift ise},\\ \frac{1}{2}\left(5^{\frac{v+1}{2}}Q_{E,v}+K_{E,v}\right), & v \text{ tek ise}.\end{cases}$$

**İspat.** $(i)$ Fibonacci eliptik kuaterniyon dizisinin Binet formülü kullanılarak

$$\begin{aligned}
\sum_{c=0}^{v}\binom{v}{2c}Q_{E,4c} &= \frac{1}{2}\sum_{c=0}^{v}\binom{v}{c}\left(1+(-1)^c\right)Q_{E,2c}\\
&= \frac{1}{2}\left(\sum_{c=0}^{v}\binom{v}{c}Q_{E,2c}+\sum_{c=0}^{v}\binom{v}{c}(-1)^c Q_{E,2c}\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(\sum_{c=0}^{v}\binom{v}{c}\frac{\varsigma^{2c}\varsigma^*-\varkappa^{2c}\varkappa^*}{\varsigma-\varkappa}+\sum_{c=0}^{v}\binom{v}{c}(-1)^c\frac{\varsigma^{2c}\varsigma^*-\varkappa^{2c}\varkappa^*}{\varsigma-\varkappa}\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{\varsigma^*}{\varsigma-\varkappa}\sum_{c=0}^{v}\binom{v}{c}\varsigma^{2c}-\frac{\varkappa^*}{\varsigma-\varkappa}\sum_{c=0}^{v}\binom{v}{c}\varkappa^{2c}\right.\\
&\quad\left.+\frac{\varsigma^*}{\varsigma-\varkappa}\sum_{c=0}^{v}\binom{v}{c}(-1)^c\varsigma^{2c}-\frac{\varkappa^*}{\varsigma-\varkappa}\sum_{c=0}^{v}\binom{v}{c}(-1)^c\varkappa^{2c}\right)
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan binom açılımı yardımıyla ifade tekrar düzenlenerek

$$\begin{aligned}
\sum_{c=0}^{v}\binom{v}{2c}Q_{E,4c} &= \frac{1}{2}\left(\left(\frac{\varsigma^*(1+\varsigma^2)^v-\varkappa^*(1+\varkappa^2)^v}{\varsigma-\varkappa}\right)+\left(\frac{\varsigma^*(1-\varsigma^2)^v-\varkappa^*(1-\varkappa^2)^v}{\varsigma-\varkappa}\right)\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(\left(\frac{\varsigma^*(\varsigma\sqrt{5})^v-\varkappa^*(-\varkappa\sqrt{5})^v}{\varsigma-\varkappa}\right)+\left(\frac{\varsigma^*(-\varsigma)^v-\varkappa^*(-\varkappa)^v}{\varsigma-\varkappa}\right)\right)
\end{aligned}$$

elde edilir. $v$'nin tek ve çift olma durumları göz önüne alınarak istenilen sonuç elde edilir.

$(ii)$ Lucas eliptik kuaterniyon dizisinin Binet formülü kullanılarak

$$\begin{aligned}
\sum_{c=0}^{v}\binom{v}{2c}K_{E,4c} &= \frac{1}{2}\sum_{c=0}^{v}\binom{v}{c}\left(1+(-1)^{c}\right)K_{E,2c} \\
&= \frac{1}{2}\left(\sum_{c=0}^{v}\binom{v}{c}K_{E,2c}+\sum_{c=0}^{v}\binom{v}{c}(-1)^{c}K_{E,2c}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\sum_{c=0}^{v}\binom{v}{c}\left(\varsigma^{*}\varsigma^{2c}+\varkappa^{*}\varkappa^{2c}\right)+\sum_{c=0}^{v}\binom{v}{c}(-1)^{c}\left(\varsigma^{*}\varsigma^{2c}+\varkappa^{*}\varkappa^{2c}\right)\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\varsigma^{*}\sum_{c=0}^{v}\binom{v}{c}\varsigma^{2c}+\varkappa^{*}\sum_{c=0}^{v}\binom{v}{c}\varkappa^{2c}\right. \\
&\quad \left.+\varsigma^{*}\sum_{c=0}^{v}\binom{v}{c}(-1)^{c}\varsigma^{2c}+\varkappa^{*}\sum_{c=0}^{v}\binom{v}{c}(-1)^{c}\varkappa^{2c}\right)
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan binom açılımı yardımıyla ifade tekrar düzenlenerek

$$\begin{aligned}
\sum_{c=0}^{v}\binom{v}{2c}K_{E,4c} &= \frac{1}{2}\left(\varsigma^{*}\left(1+\varsigma^{2}\right)^{v}+\varkappa^{*}\left(1+\varkappa^{2}\right)^{v}+\varsigma^{*}\left(1-\varsigma^{2}\right)^{v}+\varkappa^{*}\left(1-\varkappa^{2}\right)^{v}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\varsigma^{*}\left(\varsigma\sqrt{5}\right)^{v}+\varkappa^{*}\left(-\varkappa\sqrt{5}\right)^{v}+\varsigma^{*}(-\varsigma)^{v}+\varkappa^{*}(-\varkappa)^{v}\right)
\end{aligned}$$

elde edilir. $v$'nin tek ve çift olma durumları göz önüne alınarak istenilen sonuç elde edilir.

$(iii)$ Fibonacci eliptik kuaterniyon dizisinin Binet formülü kullanılarak

$$\begin{aligned}
\sum_{c=0}^{v}\binom{v}{2c+1}Q_{E,4c+1} &= \frac{1}{2}\sum_{c=0}^{v}\binom{v}{c}\left(1-(-1)^{c}\right)Q_{E,2c} \\
&= \frac{1}{2}\left(\sum_{c=0}^{v}\binom{v}{c}Q_{E,2c}-\sum_{c=0}^{v}\binom{v}{c}(-1)^{c}Q_{E,2c}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\sum_{c=0}^{v}\binom{v}{c}\frac{\varsigma^{2c}\varsigma^{*}-\varkappa^{2c}\varkappa^{*}}{\varsigma-\varkappa}-\sum_{c=0}^{v}\binom{v}{c}(-1)^{c}\frac{\varsigma^{2c}\varsigma^{*}-\varkappa^{2c}\varkappa^{*}}{\varsigma-\varkappa}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{\varsigma^{*}}{\varsigma-\varkappa}\sum_{c=0}^{v}\binom{v}{c}\varsigma^{2c}-\frac{\varkappa^{*}}{\varsigma-\varkappa}\sum_{c=0}^{v}\binom{v}{c}\varkappa^{2c}\right. \\
&\quad \left.-\frac{\varsigma^{*}}{\varsigma-\varkappa}\sum_{c=0}^{v}\binom{v}{c}(-1)^{c}\varsigma^{2c}+\frac{\varkappa^{*}}{\varsigma-\varkappa}\sum_{c=0}^{v}\binom{v}{c}(-1)^{c}\varkappa^{2c}\right)
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan binom açılımı yardımıyla ifade tekrar düzenlenerek

$$\begin{aligned}
\sum_{c=0}^{v}\binom{v}{2c+1}Q_{E,4c+1} &= \frac{1}{2}\left(\left(\frac{\varsigma^{*}(1+\varsigma^{2})^{v}-\varkappa^{*}(1+\varkappa^{2})^{v}}{\varsigma-\varkappa}\right)-\left(\frac{\varsigma^{*}(1-\varsigma^{2})^{v}-\varkappa^{*}(1-\varkappa^{2})^{v}}{\varsigma-\varkappa}\right)\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\left(\frac{\varsigma^{*}(\varsigma\sqrt{5})^{v}-\varkappa^{*}(-\varkappa\sqrt{5})^{v}}{\varsigma-\varkappa}\right)-\left(\frac{\varsigma^{*}(-\varsigma)^{v}-\varkappa^{*}(-\varkappa)^{v}}{\varsigma-\varkappa}\right)\right)
\end{aligned}$$

elde edilir. $v$'nin tek ve çift olma durumları göz önüne alınarak istenilen sonuç elde edilir.

$(iv)$ Lucas eliptik kuaterniyon dizisinin Binet formülü kullanılarak

$$\begin{aligned}
\sum_{c=0}^{v}\binom{v}{2c+1}K_{E,4c+1} &= \frac{1}{2}\sum_{c=0}^{v}\binom{v}{c}\left(1-(-1)^{c}\right)K_{E,2c} \\
&= \frac{1}{2}\left(\sum_{c=0}^{v}\binom{v}{c}K_{E,2c}-\sum_{c=0}^{v}\binom{v}{c}(-1)^{c}K_{E,2c}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\sum_{c=0}^{v}\binom{v}{c}\left(\varsigma^{*}\varsigma^{2c}+\varkappa^{*}\varkappa^{2c}\right)-\sum_{c=0}^{v}\binom{v}{c}(-1)^{c}\left(\varsigma^{*}\varsigma^{2c}+\varkappa^{*}\varkappa^{2c}\right)\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\varsigma^{*}\sum_{c=0}^{v}\binom{v}{c}\varsigma^{2c}+\varkappa^{*}\sum_{c=0}^{v}\binom{v}{c}\varkappa^{2c}\right. \\
&\quad \left.-\varsigma^{*}\sum_{c=0}^{v}\binom{v}{c}(-1)^{c}\varsigma^{2c}-\varkappa^{*}\sum_{c=0}^{v}\binom{v}{c}(-1)^{c}\varkappa^{2c}\right)
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan binom açılımı yardımıyla ifade tekrar düzenlenerek

$$\begin{aligned}
\sum_{c=0}^{v}\binom{v}{2c+1}K_{E,4c+1} &= \frac{1}{2}\left(\left(\varsigma^{*}\left(1+\varsigma^{2}\right)^{v}+\varkappa^{*}\left(1+\varkappa^{2}\right)^{v}\right)-\left(\varsigma^{*}\left(1-\varsigma^{2}\right)^{v}+\varkappa^{*}\left(1-\varkappa^{2}\right)^{v}\right)\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\left(\varsigma^{*}\left(\varsigma\sqrt{5}\right)^{v}+\varkappa^{*}\left(-\varkappa\sqrt{5}\right)^{v}\right)-\left(\varsigma^{*}(-\varsigma)^{v}+\varkappa^{*}(-\varkappa)^{v}\right)\right)
\end{aligned}$$

elde edilir. $v$'nin tek ve çift olma durumları göz önüne alınarak istenilen sonuç elde edilir. ■

# 4. FİBONACCİ VE LUCAS HİPERBOLİK SPLİT KUATERNİYON DİZİLERİ

Bu bölümde bileşenleri Fibonacci ve Lucas sayılarından oluşan yeni bir hiperbolik split kuaterniyon dizisi tanımlanacak ve bazı özellikleri incelenecektir. Bu bölümde elde edilen sonuçlar tezimizin orjinal sonuçlarıdır.

**Tanım 4.1** $n \geq 0$ olmak üzere

$$Q_{H,n} = F_n + F_{n+1} i_h + F_{n+2} j_h + F_{n+3} k_h$$

bağıntısını sağlayan $\{Q_{H,n}\}$ dizisine Fibonacci hiperbolik split kuaterniyon dizisi denir.
Bu dizinin ilk iki terimi

$$Q_{H,0} = i_h + j_h + 2k_h, \ Q_{H,1} = 1 + i_h + 2j_h + 3k_h$$

şeklindedir.

**Tanım 4.2** $n \geq 0$ olmak üzere

$$K_{H,n} = L_n + L_{n+1} i_h + L_{n+2} j_h + L_{n+3} k_h$$

bağıntısını sağlayan $\{K_{H,n}\}$ dizisine Lucas hiperbolik split kuaterniyon dizisi denir.
Bu dizinin ilk iki terimi

$$K_{H,0} = 2 + i_h + 3j_h + 4k_h, \ K_{H,1} = 1 + 3i_h + 4j_h + 7k_h$$

Burada $i_h, j_h, k_h$ birimleri hiperbolik split kuaterniyon çarpım kuralını sağlamaktadır.
$Q_{H,n}$ ve $Q_{H,m}$ Fibonacci hiperbolik split kuaterniyonlarının toplamı ve farkı

$$Q_{H,n} \pm Q_{H,m} = (F_n \pm F_m) + (F_{n+1} \pm F_{m+1}) i_h + (F_{n+2} \pm F_{m+2}) j_h + (F_{n+3} \pm F_{m+3}) k_h$$

$Q_{H,n}$ Fibonacci hiperbolik split kuaterniyonunun $c \in \mathbb{R}$ skaleri ile çarpımı

$$cQ_{H,n} = cF_n + (cF_{n+1}) i_h + (cF_{n+2}) j_h + (cF_{n+3}) k_h$$

şeklindedir.

$Q_{H,n}$ ve $Q_{H,m}$ Fibonacci hiperbolik split kuaterniyonlarının çarpımı

$$\begin{aligned}
Q_{H,n}Q_{H,m} &= (F_n + F_{n+1}i_h + F_{n+2}j_h + F_{n+3}k_h)(F_m + F_{m+1}i_h + F_{m+2}j_h + F_{m+3}k_h) \\
&= F_nF_m - a_1F_{n+1}F_{m+1} + a_2F_{n+2}F_{m+2} + a_3F_{n+3}F_{m+3} \\
&\quad +(F_nF_{m+1} + F_{n+1}F_m - \frac{\Delta}{a_1}F_{n+2}F_{m+3} + \frac{\Delta}{a_1}F_{n+3}F_{m+2})i_h \\
&\quad +(F_nF_{m+2} + F_{n+2}F_m - \frac{\Delta}{a_2}F_{n+1}F_{m+3} + \frac{\Delta}{a_2}F_{n+3}F_{m+1})j_h \\
&\quad +(F_nF_{m+3} + F_{n+3}F_m - \frac{\Delta}{a_3}F_{n+2}F_{m+1} + \frac{\Delta}{a_3}F_{n+1}F_{m+2})k_h
\end{aligned}$$

şeklindedir.

Fibonacci hiperbolik split kuaterniyonlarının çarpımının matrisi gösterimi

$$Q_{H,n}Q_{H,m} = \begin{bmatrix} F_n & -a_1F_{n+1} & a_2F_{n+2} & a_3F_{n+3} \\ F_{n+1} & F_n & \frac{\Delta}{a_1}F_{n+3} & -\frac{\Delta}{a_1}F_{n+2} \\ F_{n+2} & \frac{\Delta}{a_2}F_{n+3} & F_n & -\frac{\Delta}{a_2}F_{n+1} \\ F_{n+3} & -\frac{\Delta}{a_3}F_{n+2} & \frac{\Delta}{a_3}F_{n+1} & F_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_m \\ F_{m+1} \\ F_{m+2} \\ F_{m+3} \end{bmatrix}$$

şeklindedir.

Fibonacci hiperbolik split kuaterniyon normu

$$\overline{Q_{H,n}} = F_n - F_{n+1}i_h - F_{n+2}j_h - F_{n+3}k_h$$

olmak üzere

$$N\left(Q_{H,n}\right) := \sqrt{Q_{H,n}\overline{Q_{H,n}}} = \sqrt{F_n^2 + a_1F_{n+1}^2 - a_2F_{n+2}^2 - a_3F_{n+3}^2}$$

şeklinde tanımlanır.

**Teorem 4.1** Fibonacci hiperbolik split kuaterniyonları

$$Q_{H,n} = Q_{H,n-1} + Q_{H,n-2}, n \geq 2$$

rekürans bağıntısını sağlar.

**İspat.** Fibonacci hiperbolik split kuaterniyon dizisinin tanımından

$$\begin{aligned}
Q_{H,n-1} + Q_{H,n-2} &= F_{n-1} + F_ni_h + F_{n+1}j_h + F_{n+2}k_h + F_{n-2} + F_{n-1}i_h + F_nj_h + F_{n+1}k_h \\
&= \left(F_{n-1} + F_{n-2}\right) + \left(F_n + F_{n-1}\right)i_h + \left(F_{n+1} + F_n\right)j_h + \left(F_{n+2} + F_{n+1}\right)k_h \\
&= F_n + F_{n+1}i_h + F_{n+2}j_h + F_{n+3}k_h \\
&= Q_{H,n}
\end{aligned}$$

elde edilir. ■

**Teorem 4.2** $\{Q_{H,n}\}$ dizisinin ve $\{K_{H,n}\}$ dizisinin üreteç fonksiyonları sırasıyla

$$G\left(x\right)=\frac{i_h+j_h+k_h+\left(1+j_h+k_h\right)x}{1-x-x^2} \tag{4.1}$$

ve

$$H(x)=\frac{2+i_h+3i_h+4k_h+\left(-1+2i_h+j_h+3k_h\right)x}{1-x-x^2} \tag{4.2}$$

şeklindedir.

**İspat.** $\{Q_{H,n}\}$ dizisinin üreteç fonksiyonu $G(x)$ olmak üzere $G(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}Q_{H,n}x^n$ formal serisini göz önüne alalım.

$$\begin{aligned}\left(1-x-x^2\right)\sum_{n=0}^{\infty}Q_{H,n}x^n &= \sum_{n=0}^{\infty}Q_{H,n}x^n-\sum_{n=0}^{\infty}Q_{H,n}x^{n+1}-\sum_{n=0}^{\infty}Q_{H,n}x^{n+2}\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}Q_{H,n}x^n-\sum_{n=1}^{\infty}Q_{H,n-1}x^n-\sum_{n=2}^{\infty}Q_{H,n-2}x^n\\ &= Q_{H,0}+\left(Q_{H,1}-Q_{H,0}\right)x+\sum_{n\geq 2}\left(Q_{H,n}-Q_{H,n-1}-Q_{H,n-2}\right)x^n\end{aligned}$$

elde edilir.

Teorem 4.1'den

$$G\left(x\right)=\frac{Q_{H,0}+\left(Q_{H,1}-Q_{H,0}\right)x}{1-x-x^2}$$

elde edilir. $Q_{H,0}$ ve $Q_{H,1}$ başlangıç koşullarını yerine yazarak

$$G\left(x\right)=\frac{i_h+j_h+k_h+\left(1+j_h+k_h\right)x}{1-x-x^2}$$

elde edilir.

$\{K_{H,n}\}$ dizisinin üreteç fonksiyonu $H(x)$ olmak üzere $H(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}K_{H,n}x^n$ göz önüne alınarak benzer şekilde ispat yapılır. ■

**Teorem 4.3** $\varsigma' := 1+\varsigma i_h+\varsigma^2 j_h+\varsigma^3 k_h$ ve $\varkappa' := 1+\varkappa i_h+\varkappa^2 j_h+\varkappa^3 k_h$

$$Q_{H,n}=\frac{\varsigma'\varsigma^n-\varkappa'\varkappa^n}{\varsigma-\varkappa} \tag{4.3}$$

ve

$$K_{H,n}=\varsigma'\varsigma^n+\varkappa'\varkappa^n \tag{4.4}$$

dir.

**İspat.** Fibonacci hiperbolik split kuaterniyon dizisinin tanımı ve Binet formülü kullanılarak

$$\begin{aligned} Q_{H,n} &= F_n + F_{n+1} i_h + F_{n+2} j_h + F_{n+3} k_h \\ &= \frac{\varsigma^n - \varkappa^n}{\varsigma - \varkappa} + \left(\frac{\varsigma^{n+1} - \varkappa^{n+1}}{\varsigma - \varkappa}\right) i_h + \left(\frac{\varsigma^{n+2} - \varkappa^{n+2}}{\varsigma - \varkappa}\right) j_h + \left(\frac{\varsigma^{n+3} - \varkappa^{n+3}}{\varsigma - \varkappa}\right) k_h \\ &= \frac{\varsigma^n \left(1 + \varsigma i_h + \varsigma^2 j_h + \varsigma^3 k_h\right)}{\varsigma - \varkappa} - \frac{\varkappa^n \left(1 + \varkappa i_h + \varkappa^2 j_h + \varkappa^3 k_h\right)}{\varsigma - \varkappa} \\ &= \frac{\varsigma' \varsigma^n - \varkappa' \varkappa^n}{\varsigma - \varkappa} \end{aligned}$$

elde edilir.

Benzer şekilde Lucas hiperbolik split kuaterniyon dizisinin tanımı ve Binet formülü kullanılarak

$$\begin{aligned} K_{H,n} &= L_n + L_{n+1} i_h + L_{n+2} j_h + L_{n+3} k_h \\ &= \varsigma^n + \varkappa^n + \left(\varsigma^{n+1} + \varkappa^{n+1}\right) i_h + \left(\varsigma^{n+2} + \varkappa^{n+2}\right) j_h + \left(\varsigma^{n+3} + \varkappa^{n+3}\right) k_h \\ &= \varsigma^n \left(1 + \varsigma i_h + \varsigma^2 j_h + \varsigma^3 k_h\right) + \varkappa^n \left(1 + \varkappa i_h + \varkappa^2 j_h + \varkappa^3 k_h\right) \\ &= \varsigma^n \varsigma' + \varkappa^n \varkappa' \end{aligned}$$

elde edilir. ■

**Teorem 4.4** Fibonacci ve Lucas hiperbolik split kuaterniyon dizileri için üstel üreteç fonksiyonları sırasıyla

$$\sum_{n=0}^{\infty} Q_{H,n} \frac{x^n}{n!} = \frac{\varsigma' e^{\varsigma x} - \varkappa' e^{\varkappa x}}{\varsigma - \varkappa}$$

ve

$$\sum_{n=0}^{\infty} K_{H,n} \frac{x^n}{n!} = \varsigma' e^{\varsigma x} + \varkappa' e^{\varkappa x}$$

şeklindedir.

**İspat.** Fibonacci hiperbolik split kuaterniyon dizisinin Binet formülü kullanılarak

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} Q_{H,n} \frac{x^n}{n!} &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\varsigma' \varsigma^n - \varkappa' \varkappa^n}{\varsigma - \varkappa}\right) \frac{x^n}{n!} \\ &= \frac{\varsigma'}{\varsigma - \varkappa} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\varsigma x)^n}{n!} - \frac{\varkappa'}{\varsigma - \varkappa} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\varkappa x)^n}{n!} \\ &= \frac{\varsigma' e^{\varsigma x} - \varkappa' e^{\varkappa x}}{\varsigma - \varkappa} \end{aligned}$$

elde edilir.

Benzer şekilde Lucas hiperbolik split kuaterniyon dizisinin Binet formülü kullanılarak

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} K_{H,n}\frac{x^n}{n!} &= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\varsigma'\varsigma^n+\varkappa'\varkappa^n\right)\frac{x^n}{n!}\\ &= \varsigma'\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\varsigma x)^n}{n!}+\varkappa'\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\varkappa x)^n}{n!}\\ &= \varsigma' e^{\varsigma x}+\varkappa' e^{\varkappa x}\end{aligned}$$

elde edilir. ■

Şimdi Fibonacci ve Lucas hiperbolik split kuaterniyon dizilerinin bazı özelliklerini elde etmek için yararlanacağımız aşağıdaki lemmayı verelim.

**Lemma 4.1** $b := \frac{1}{a_1}i_h - \frac{1}{a_2}j_h + \frac{1}{a_3}k_h$, $d := 1-a_1-a_2+a_3$, $d_1 := a_1F_1 - a_2F_3 - a_3F_5$, $d_2 := \frac{1}{2}\left(a_1F_2 - a_2F_4 - a_3F_6\right)$ olmak üzere aşağıdaki eşitlikler sağlanır.

$(i)$ $\varsigma'\varkappa' = K_{H,0} - d + \Delta\sqrt{5}b$,

$(ii)$ $\varkappa'\varsigma' = K_{H,0} - d - \Delta\sqrt{5}b$,

$(iii)$ $(\varsigma')^2 = K_{H,0} - (1+d_1+d_2) + \sqrt{5}\left(Q_{H,0} - d_2\right)$,

$(iv)$ $(\varkappa')^2 = K_{H,0} - (1+d_1+d_2) - \sqrt{5}\left(Q_{H,0} - d_2\right)$.

**İspat.** $(i)$ $\varsigma'$ve $\varkappa'$ tanımından

$$\begin{aligned}\varsigma'\varkappa' &= \left(1+\varsigma i_h+\varsigma^2 j_h+\varsigma^3 k_h\right)\left(1+\varkappa i_h+\varkappa^2 j_h+\varkappa^3 k_h\right)\\ &= 1-a_1(\varsigma\varkappa)+a_2(\varsigma\varkappa)^2+a_3(\varsigma\varkappa)^3+\left(\varkappa+\varsigma+\frac{\Delta}{a_1}\left(\varsigma^3\varkappa^2-\varsigma^2\varkappa^3\right)\right)i_h\\ &\quad+\left(\varkappa^2+\varsigma^2+\frac{\Delta}{a_2}\left(\varsigma^3\varkappa-\varsigma\varkappa^3\right)\right)j_h+\left(\varkappa^3+\varsigma^3+\frac{\Delta}{a_3}\left(\varsigma\varkappa^2-\varsigma^2\varkappa\right)\right)k_h\end{aligned}$$

elde edilir. Ardından gerekli işlemler yapıldıktan sonra

$$\begin{aligned}\varsigma'\varkappa' &= 1+a_1+a_2-a_3+\left(1+\frac{\Delta}{a_1}\sqrt{5}\right)i_h+\left(3-\frac{\Delta}{a_2}\sqrt{5}\right)j_h+\left(4+\frac{\Delta}{a_3}\sqrt{5}\right)k_h\\ &= 1+a_1+a_2-a_3+K_{H,0}-2+\Delta\sqrt{5}b.\\ &= K_{H,0}-d+\Delta\sqrt{5}b\end{aligned}$$

ispat tamamlanır.

$(ii)$ $\varsigma'$ ve $\varkappa'$ tanımından

$$\begin{aligned}
\varkappa'\varsigma' &= \left(1+\varkappa i_h+\varkappa^2 j_h+\varkappa^3 k_h\right)\left(1+\varsigma i_h+\varsigma^2 j_h+\varsigma^3 k_h\right)\\
&= 1-a_1(\varkappa\varsigma)+a_2(\varkappa\varsigma)^2+a_3(\varkappa\varsigma)^3+\left(\varsigma+\varkappa+\frac{\Delta}{a_1}\left(\varkappa^3\varsigma^2-\varkappa^2\varsigma^3\right)\right)i_h\\
&\quad+\left(\varsigma^2+\varkappa^2+\frac{\Delta}{a_2}\left(\varkappa^3\varsigma-\varkappa\varsigma^3\right)\right)j_h+\left(\varsigma^3+\varkappa^3+\frac{\Delta}{a_3}\left(\varkappa\varsigma^2-\varkappa^2\varsigma\right)\right)k_h
\end{aligned}$$

elde edilir. Ardından gerekli işlemler yapıldıktan sonra

$$\begin{aligned}
\varkappa'\varsigma' &= 1+a_1+a_2-a_3+\left(1-\frac{\Delta}{a_1}\sqrt{5}\right)i_h++\left(3+\frac{\Delta}{a_2}\sqrt{5}\right)j_h+\left(4-\frac{\Delta}{a_3}\sqrt{5}\right)k_h\\
&= 1+a_1+a_2-a_3+K_{H,0}-2-\Delta\sqrt{5}b\\
&= K_{H,0}-d-\Delta\sqrt{5}b
\end{aligned}$$

ispat tamamlanır.

$(iii)$ $\varsigma'$ tanımından

$$\begin{aligned}
(\varsigma')^2 &= \left(1+\varsigma i_h+\varsigma^2 j_h+\varsigma^3 k_h\right)\left(1+\varsigma i_h+\varsigma^2 j_h+\varsigma^3 k_h\right)\\
&= 1-a_1\varsigma^2+a_2\varsigma^4+a_3\varsigma^6+(2\varsigma)\,i_h+\left(2\varsigma^2\right)j_h+\left(2\varsigma^3\right)k_h\\
&= 1-a_1\varsigma^2+a_2\varsigma^4+a_3\varsigma^6+2\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)i_h+2\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)j_h+2\left(2+\sqrt{5}\right)k_h\\
&= 1-a_1\varsigma^2+a_2\varsigma^4+a_3\varsigma^6+K_{H,0}-2+\sqrt{5}Q_{H,0}\\
&= K_{H,0}-(1+d_1+d_2)+\sqrt{5}\left(Q_{H,0}-d_2\right)
\end{aligned}$$

elde edilir.

$(iv)$ $\varkappa'$tanımından

$$\begin{aligned}
(\varkappa')^2 &= (1+\varkappa i_h+\varkappa^2 j_h+\varkappa^3 k_h)(1+\varkappa i_h+\varkappa^2 j_h+\varkappa^3 k_h)\\
&= 1-a_1\varkappa^2+a_2\varkappa^4+a_3\varkappa^6+(2\varkappa)i_h+(2\varkappa^2)j_h+\left(2\varkappa^3\right)k_h\\
&= 1-a_1\varkappa^2+a_2\varkappa^4+a_3\varkappa^6+2(\frac{1-\sqrt{5}}{2})i_h+2\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)j_h+2(2-\sqrt{5})k_h\\
&= 1-a_1\varkappa^2+a_2\varkappa^4+a_3\varkappa^6+K_{H,0}-2-\sqrt{5}Q_{H,0}\\
&= K_{H,0}-(1+d_1+d_2)-\sqrt{5}(Q_{H,0}-d_2)
\end{aligned}$$

elde edilir. ■

Lemma 4.1 kullanılarak aşağıdaki eşitlikler elde edilir

**Sonuç 4.1**

$$
\begin{aligned}
(i)\varsigma'\varkappa' + \varkappa'\varsigma' &= 2\left(K_{H,0} - d\right) \\
(ii)\varsigma'\varkappa' - \varkappa'\varsigma' &= 2\Delta\sqrt{5}b \\
(iii)\left(\varsigma'\right)^2 + \left(\varkappa'\right)^2 &= 2\left(K_{H,0} - (1 + d_1 + d_2)\right) \\
(iv)\left(\varsigma'\right)^2 - \left(\varkappa'\right)^2 &= 2\sqrt{5}\left(Q_{H,0} - d_2\right).
\end{aligned}
$$

Şimdi Lemma 4.1 ve Teorem 4.3 yardımıyla Fibonacci hiperbolik split kuaterniyon dizileri için Vajda özdeşliği verilecektir.

**Teorem 4.5 (Vajda Özdeşliği)** $n, r$ ve $s$ negatif olmayan tamsayılar olmak üzere

$$
Q_{H,n+r}Q_{H,n+s} - Q_{H,n}Q_{H,n+r+s} = (-1)^n F_r\left[\left(K_{H,0} - d\right)F_s - \Delta b L_s\right]
$$

dir.

**İspat.** Fibonacci hiperbolik split kuaterniyon dizisinin Binet formülü kullanılarak

$$
\begin{aligned}
&5\left(Q_{H,n+r}Q_{H,n+s} - Q_{H,n}Q_{H,n+r+s}\right) \\
= \;& \left(\varsigma^{n+r}\varsigma' - \varkappa^{n+r}\varkappa'\right)\left(\varsigma^{n+s}\varsigma' - \varkappa^{n+s}\varkappa'\right) - \left(\varsigma^{n}\varsigma' - \varkappa^{n}\varkappa'\right)\left(\varsigma^{n+r+s}\varsigma' - \varkappa^{n+r+s}\varkappa'\right) \\
= \;& \left(\varsigma^{n}\varkappa^{n+r+s}\left(\varsigma'\varkappa'\right) + \varkappa^{n}\varsigma^{n+r+s}\left(\varkappa'\varsigma'\right) - \varsigma^{n+r}\varkappa^{n+s}\left(\varsigma'\varkappa'\right) - \varkappa^{n+r}\varsigma^{n+s}\left(\varkappa'\varsigma'\right)\right) \\
= \;& \left(\varsigma\varkappa\right)^n\left(\varkappa^{r+s}\left(\varsigma'\varkappa'\right) + \varsigma^{r+s}\left(\varkappa'\varsigma'\right)\right) - \left(\varsigma\varkappa\right)^n\left(\varsigma^{r}\varkappa^{s}\left(\varsigma'\varkappa'\right) + \varkappa^{r}\varsigma^{s}\left(\varkappa'\varsigma'\right)\right) \\
= \;& \left(\varsigma\varkappa\right)^n\left(\left(\varkappa^{r+s} - \varsigma^{r}\varkappa^{s}\right)\varsigma'\varkappa' + \left(\varsigma^{r+s} - \varkappa^{r}\varsigma^{s}\right)\varkappa'\varsigma'\right) \\
= \;& \left(\varsigma\varkappa\right)^n\left(\varkappa^{r} - \varsigma^{r}\right)\varkappa^{s}\left(\varsigma'\varkappa'\right) + \left(\varsigma^{r} - \varkappa^{r}\right)\varsigma^{s}\left(\varkappa'\varsigma'\right) \\
= \;& \left(\varsigma\varkappa\right)^n\left(\varsigma^{r} - \varkappa^{r}\right)\left(\varsigma^{s}\left(\varkappa'\varsigma'\right) - \varkappa^{s}\left(\varsigma'\varkappa'\right)\right)
\end{aligned}
$$

elde edilir. Lemma 4.1 $(i) - (ii)$ yerine yazılarak

$$
\begin{aligned}
&5\left(Q_{H,n+r}Q_{H,n+s} - Q_{H,n}Q_{H,n+r+s}\right) \\
= \;& \left(\varsigma\varkappa\right)^n\left(\varsigma^{r} - \varkappa^{r}\right)\left(\varsigma^{s}\left(\varkappa'\varsigma'\right) - \varkappa^{s}\left(\varsigma'\varkappa'\right)\right) \\
= \;& (-1)^n\left(F_r\sqrt{5}\left(\varsigma^{s}(K_{H,0} - t_H + \Delta\sqrt{5}b) - \varkappa^{s}(K_{H,0} - t_H - \Delta\sqrt{5}b)\right)\right) \\
= \;& (-1)^n\left(F_r\sqrt{5}((\varsigma^{s} - \varkappa^{s})(K_{H,0} - d) + \Delta\sqrt{5}b(\varsigma^{s} + \varkappa^{s}))\right) \\
= \;& (-1)^n\left(F_r\sqrt{5}(F_s\sqrt{5}(K_{H,0} - d) + \Delta\sqrt{5}bL_s)\right) \\
= \;& (-1)^n F_r((K_{H,0} - d)F_s - \Delta bL_s)
\end{aligned}
$$

elde edilir. ■

Yukarıda ispatı yapılan teoremde $r, s \to m$ ve $n \to n-m$ olarak alındığında, aşağıdaki sonuç elde edilir.

**Sonuç 4.2 (Catalan Özdeşliği)** $n$ ve $m$ negatif olmayan tamsayılar olmak üzere

$$Q_{H,n}^2 - Q_{H,n-m}Q_{H,n+m} = (-1)^{n-m} F_m \left(\left(K_{H,0} - d\right) F_m - \Delta b L_m\right)$$

dir.

Sonuç 4.2'de $m = 1$ olarak alındığında, aşağıdaki sonuç elde edilir.

**Sonuç 4.3 (Cassini Özdeşliği)** $n$ negatif olmayan bir tamsayı olmak üzere,

$$Q_{H,n}^2 - Q_{H,n-1}Q_{H,n+1} = (-1)^{n-1} \left(\left(K_{H,0} - d\right) - \Delta b\right)$$

dir.

Teorem 4.5'de $s = m - n$ ve $r = 1$ olarak alındığında, aşağıdaki sonuç elde edilir.

**Sonuç 4.4 (d'Ocagne Özdeşliği)** $n$ ve $m$ negatif olmayan tamsayılar ve $m \geq n$ olmak üzere

$$Q_{H,n+1}Q_{H,m} - Q_{H,n}Q_{H,m+1} = (-1)^{n} \left(\left(K_{H,0} - d\right) F_{m-n} - \Delta b L_{m-n}\right)$$

dir.

**Teorem 4.6 (Honsberger Özdeşliği)** $n$ ve $m$ negatif olmayan tamsayılar olmak üzere,

$$Q_{H,m-1}Q_{H,n} + Q_{H,m}Q_{H,n+1} = F_{m+n}(K_{H,0} - (1 + d_1 + d_2)) + L_{m+n}(Q_{H,0} - d_2)$$

dir

**İspat.** Fibonacci hiperbolik split kuaterniyon dizisinin Binet formülü ve Lemma 4.1 $(iii) - (iv)$ eşitlikleri kullanılarak

$$\begin{aligned}
& 5\left(Q_{H,m-1}Q_{H,n} + Q_{H,m}Q_{H,n+1}\right) \\
= \; & \left(\varsigma^{m-1}\varsigma' - \varkappa^{m-1}\varkappa'\right)\left(\varsigma^{n}\varsigma' - \varkappa^{n}\varkappa'\right) + \left(\varsigma^{m}\varsigma' - \varkappa^{m}\varkappa'\right)\left(\varsigma^{n+1}\varsigma' - \varkappa^{n+1}\varkappa'\right) \\
= \; & \varsigma^{m+n-1}\left(\varsigma'\right)^2 - \varsigma^{m-1}\varkappa^{n}\varsigma'\varkappa' - \varkappa^{m-1}\varsigma^{n}\varkappa'\varsigma' + \varkappa^{m+n-1}\left(\varkappa'\right)^2 \\
& + \varsigma^{m+n+1}\left(\varsigma'\right)^2 - \varsigma^{m}\varkappa^{n+1}\varsigma'\varkappa' - \varkappa^{m}\varsigma^{n+1}\varkappa'\varsigma' + \varkappa^{m+n+1}\left(\varkappa'\right)^2
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \Big(\varsigma^{m+n-1}\left(\varsigma'\right)^2+\varkappa^{m+n-1}\left(\varkappa'\right)^2+\varsigma^{m+n+1}\left(\varsigma'\right)^2+\varkappa^{m+n+1}\left(\varkappa'\right)^2 \\
&\quad -\varsigma^{m-1}\varkappa^{n}\varsigma'\varkappa'-\varkappa^{m-1}\varsigma^{n}\varkappa'\varsigma'-\varsigma^{m}\varkappa^{n+1}\varsigma'\varkappa'-\varkappa^{m}\varsigma^{n+1}\varkappa'\varsigma'\Big) \\
&= \varsigma^{m+n}(\varsigma-\varkappa)\left(\varsigma'\right)^2-\varkappa^{m+n}(\varsigma-\varkappa)\left(\varkappa'\right)^2-\varsigma^{m}(\varsigma^{-1}\varkappa^{n}+\varkappa^{n+1})\varsigma'\varkappa'-\varkappa^{m}(\varkappa^{-1}\varsigma^{n}+\varsigma^{n+1}) \\
&= (\varsigma-\varkappa)(\varsigma^{m+n}\left(\varsigma'\right)^2-\varkappa^{m+n}\left(\varkappa'\right)^2)
\end{aligned}
$$

Lemma 4.1 $(iii)-(iv)$ eşitlikleri kullanılarak

$$
\begin{aligned}
&= \sqrt{5}\Big(\varsigma^{m+n}\Big(K_{H,0}-(1+d_1+d_2)+\sqrt{5}\left(Q_{H,0}-d_2\right)\Big) \\
&\quad -\varkappa^{m+n}\Big(K_{H,0}-(1+d_1+d_2)-\sqrt{5}\left(Q_{H,0}-d_2\right)\Big)\Big) \\
&= \sqrt{5}\Big(\left(\varsigma^{m+n}-\varkappa^{m+n}\right)\left(K_{H,0}-(1+d_1+d_2)\right)+\left(\varsigma^{m+n}+\varkappa^{m+n}\right)\sqrt{5}\left(Q_{H,0}-d_2\right)\Big) \\
&= \sqrt{5}\Big(F_{m+n}\sqrt{5}\left(K_{H,0}-(1+d_1+d_2)\right)+L_{m+n}\sqrt{5}\left(Q_{H,0}-d_2\right)\Big) \\
&= F_{m+n}\left(K_{H,0}-(1+d_1+d_2)\right)+L_{m+n}\left(Q_{H,0}-d_2\right)
\end{aligned}
$$

elde edilir. ■

Şimdi Fibonacci hiperbolik split kuaterniyon ve Lucas hiperbolik split kuaterniyon dizilerini içeren bazı teoremler verilecektir.

**Teorem 4.7** $n,r,s$ negatif olmayan tamsayılar ve $r\leq s$ olmak üzere

$$K_{H,n+r}Q_{H,n+s}-K_{H,n+s}Q_{H,n+r}=2\left(-1\right)^{n+r}F_{s-r}\left(K_{H,0}-d\right)$$

**İspat.** Fibonaci ve Lucas hiperbolik split kuaterniyon dizilerinin Binet formülleri kullanılarak

$$
\begin{aligned}
&\sqrt{5}\left(K_{H,n+r}Q_{H,n+s}-K_{H,n+s}Q_{H,n+r}\right) \\
&= \left(\varsigma'\varsigma^{n+r}+\varkappa'\varkappa^{n+r}\right)\left(\varsigma'\varsigma^{n+s}-\varkappa'\varkappa^{n+s}\right) \\
&\quad -\left(\varsigma'\varsigma^{n+s}+\varkappa'\varkappa^{n+s}\right)\left(\varsigma'\varsigma^{n+r}-\varkappa'\varkappa^{n+r}\right) \\
&= \left(\varsigma'\right)^2\varsigma^{2n+r+s}-\varsigma'\varkappa'\varsigma^{n+r}\varkappa^{n+s}+\varkappa'\varsigma'\varsigma^{n+s}\varkappa^{n+r}-\left(\varkappa'\right)^2\varkappa^{2n+r+s} \\
&\quad -\left(\varsigma'\right)^2\varsigma^{2n+r+s}+\varsigma'\varkappa'\varsigma^{n+s}\varkappa^{n+r}-\varkappa'\varsigma'\varsigma^{n+r}\varkappa^{n+s}+\left(\varkappa'\right)^2\varkappa^{2n+r+s} \\
&= \varsigma'\varkappa'\left(\varsigma\varkappa\right)^n\left(\varsigma^s\varkappa^r-\varsigma^r\varkappa^s\right)+\varkappa'\varsigma'\left(\varsigma\varkappa\right)^n\left(\varsigma^s\varkappa^r-\varsigma^r\varkappa^s\right) \\
&= \left(\varsigma\varkappa\right)^n\left(\varsigma^s\varkappa^r-\varsigma^r\varkappa^s\right)\left(\varsigma'\varkappa'+\varkappa'\varsigma'\right) \\
&= 2\left(-1\right)^{n+r}\left(\varsigma^{s-r}-\varkappa^{s-r}\right)\left(K_{H,0}-d\right). \\
&= 2\left(-1\right)^{n+r}\sqrt{5}F_{s-r}\left(K_{H,0}-d\right). \\
&= 2(-1)^{n+r}F_{s-r}\left(K_{H,0}-d\right)
\end{aligned}
$$

elde edilir. ■

**Teorem 4.8** $n$ negatif olmayan bir tamsayı olmak üzere aşağıdaki eşitlikler sağlanır.

$$\begin{aligned}(i)\ K_{H,n}^2+Q_{H,n}^2 &= \frac{6}{5}\left(\left(K_{H,0}-(1+d_1+d_2)\right)L_{2n}+5\left(Q_{H,0}-d_2\right)F_{2n}\right)\\ &+\frac{8}{5}\left(K_{H,0}-d\right)(-1)^n,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(ii)\ K_{H,n}^2-Q_{H,n}^2 &= \frac{4}{5}\left(\left(K_{H,0}-(1+d_1+d_2)\right)L_{2n}+5\left(Q_{H,0}-d_2\right)F_{2n}\right)\\ &+\frac{12}{5}\left(K_{H,0}-d\right)(-1)^n.\end{aligned}$$

**İspat.** $(i)$Fibonaci hiperbolik split kuaterniyon ve Lucas hiperbolik split kuaterniyon dizilerinin Binet formülleri kullanılarak

$$\begin{aligned}K_{H,n}^2+Q_{H,n}^2 &= \left(\varsigma'\varsigma^n+\varkappa'\varkappa^n\right)^2+\frac{1}{5}\left(\varsigma'\varsigma^n-\varkappa'\varkappa^n\right)^2\\ &= \left(\varsigma'\varsigma^n+\varkappa'\varkappa^n\right)\left(\varsigma'\varsigma^n+\varkappa'\varkappa^n\right)+\frac{1}{5}\left(\varsigma'\varsigma^n-\varkappa'\varkappa^n\right)\left(\varsigma'\varsigma^n-\varkappa'\varkappa^n\right)\\ &= \Big(\left(\varsigma'\right)^2\varsigma^{2n}+\varsigma'\varkappa'\left(\varsigma\varkappa\right)^n+\varkappa'\varsigma'\left(\varsigma\varkappa\right)^n+\left(\varkappa'\right)^2\varkappa^{2n}\\ &\quad+\frac{1}{5}\Big(\left(\varsigma'\right)^2\varsigma^{2n}-\varsigma'\varkappa'\left(\varsigma\varkappa\right)^n-\varkappa'\varsigma'\left(\varsigma\varkappa\right)^n+\left(\varkappa'\right)^2\varkappa^{2n}\Big)\Big)\\ &= \left(\varsigma'\right)^2\varsigma^{2n}\left(1+\frac{1}{5}\right)+\left(\varkappa'\right)^2\varkappa^{2n}\left(1+\frac{1}{5}\right)+\left(\varsigma'\varkappa'+\varkappa'\varsigma'\right)\left(\varsigma\varkappa\right)^n\left(1-\frac{1}{5}\right)\end{aligned}$$

elde edilir.

Lemma 4.1 $(iii)-(iv)$ ve Sonuç 4.1 $(i)$ yerine yazılarak

$$\begin{aligned}&= \left(1+\frac{1}{5}\right)\left(\left(\varsigma'\right)^2\varsigma^{2n}+\left(\varkappa'\right)^2\varkappa^{2n}\right)+\left(1-\frac{1}{5}\right)\left(\varsigma'\varkappa'+\varkappa'\varsigma'\right)\left(\varsigma\varkappa\right)^n\\ &= \left(1+\frac{1}{5}\right)\left(K_{H,0}-(1+d_1+d_2)+\sqrt{5}\left(Q_{H,0}-d_2\right)\right)\varsigma^{2n}\\ &\quad+\left(1+\frac{1}{5}\right)\left(K_{H,0}-(1+d_1+d_2)-\sqrt{5}\left(Q_{H,0}-d_2\right)\right)\varkappa^{2n}\\ &\quad+2\left(1-\frac{1}{5}\right)\left(K_{H,0}-d\right)(-1)^n\\ &= \left(1+\frac{1}{5}\right)\left(\left(K_{H,0}-(1+d_1+d_2)\right)L_{2n}+5\left(Q_{H,0}-d_2\right)F_{2n}\right)\\ &\quad+2\left(1-\frac{1}{5}\right)\left(K_{H,0}-d\right)(-1)^n\end{aligned}$$

elde edilir.

$(ii)$Fibonacci hiperbolik split kuaterniyon ve Lucas hiperbolik split kuaterniyon dizilerinin Binet formülleri kullanılarak

$$\begin{aligned}
K_{H,n}^2 - Q_{H,n}^2 &= (\varsigma'\varsigma^n + \varkappa'\varkappa^n)^2 - \frac{1}{5}(\varsigma'\varsigma^n - \varkappa'\varkappa^n)^2 \\
&= (\varsigma'\varsigma^n + \varkappa'\varkappa^n)(\varsigma'\varsigma^n + \varkappa'\varkappa^n) \\
&\quad -\frac{1}{5}(\varsigma'\varsigma^n - \varkappa'\varkappa^n)(\varsigma'\varsigma^n - \varkappa'\varkappa^n) \\
&= (\varsigma')^2\varsigma^{2n} + \varsigma'\varkappa'(\varsigma\varkappa)^n + \varkappa'\varsigma'(\varsigma\varkappa)^n + (\varkappa')^2\varkappa^{2n} \\
&\quad -\frac{1}{5}\left((\varsigma')^2\varsigma^{2n} - \varsigma'\varkappa'(\varsigma\varkappa)^n - \varkappa'\varsigma'(\varsigma\varkappa)^n + (\varkappa')^2\varkappa^{2n}\right) \\
&= (1-\frac{1}{5})((\varsigma')^2\varsigma^{2n} + (\varkappa')^2\varkappa^{2n}) \\
&\quad +(1+\frac{1}{5})((\varsigma\varkappa)^n(\varsigma'\varkappa' + \varkappa'\varsigma')
\end{aligned}$$

elde edilir.

Lemma 4.1 $(iii)-(iv)$ ve Sonuç 4.1 $(i)$ yerine yazılarak

$$\begin{aligned}
&= (1-\frac{1}{5})((\varsigma')^2\varsigma^{2n} + (\varkappa')^2\varkappa^{2n}) \\
&\quad +(1+\frac{1}{5})((\varsigma\varkappa)^n(\varsigma'\varkappa' + \varkappa'\varsigma') \\
&= \frac{4}{5}\left(\varsigma^{2n}(K_{H,0} - (1+d_1+d_2\right) + \sqrt{5}(Q_{H,0} - d_2)) \\
&\quad +\varkappa^{2n}(K_{H,0} - (1+d_1+d_2) - \sqrt{5}(Q_{H,0} - d_2)) \\
&\quad +\frac{6}{5}((\varsigma\varkappa)^n 2(K_{H,0} - d)) \\
&= \frac{4}{5}((K_{H,0} - (1+d_1+d_2))\left(\varsigma^{2n} + \varkappa^{2n}\right) \\
&\quad +\sqrt{5}(Q_{H,0} - d)\left(\varsigma^{2n} - \varkappa^{2n}\right)) + \frac{6}{5}(-1)^n 2(K_{H,0} - d) \\
&= \frac{4}{5}(K_{H,0} - (1+d_1+d_2))L_{2n} + 5(Q_{H,0} - d)F_{2n}) \\
&\quad +\frac{12}{5}(-1)^n(K_{H,0} - d)
\end{aligned}$$

elde edilir. ∎

**Teorem 4.9** $n$ ve $m$ negatif olmayan tamsayılar ve $m \geq n$ olmak üzere

$$Q_{H,n}K_{H,m} - K_{H,m}Q_{H,n} = 2(-1)^{n+1}\Delta b L_{m-n}$$

eşitliği sağlanır.

**İspat.** Fibonacci hiperbolik split kuaterniyon ve Lucas hiperbolik split kuaterniyon dizilerinin Binet formülleri kullanılarak

$$\begin{aligned}
& \sqrt{5}\left(Q_{H,n}K_{H,m} - K_{H,m}Q_{H,n}\right) \\
= & \left(\varsigma'\varsigma^{n} - \varkappa'\varkappa^{n}\right)\left(\varsigma'\varsigma^{m} + \varkappa'\varkappa^{m}\right) \\
& -\left(\varsigma'\varsigma^{m} + \varkappa'\varkappa^{m}\right)\left(\varsigma'\varsigma^{n} - \varkappa'\varkappa^{n}\right) \\
= & \left(\varsigma'\right)^{2}\varsigma^{n+m} + \varsigma'\varkappa'\varsigma^{n}\varkappa^{m} - \varkappa'\varsigma'\varsigma^{m}\varkappa^{n} - \left(\varkappa'\right)^{2}\varkappa^{n+m} \\
& -\left(\varsigma'\right)^{2}\varsigma^{n+m} + \varsigma'\varkappa'\varsigma^{m}\varkappa^{n} - \varkappa'\varsigma'\varsigma^{n}\varkappa^{m} + \left(\varkappa'\right)^{2}\varkappa^{n+m} \\
= & \varsigma'\varkappa'\varsigma^{n}\varkappa^{m} - \varkappa'\varsigma'\varsigma^{m}\varkappa^{n} + \varsigma'\varkappa'\varsigma^{m}\varkappa^{n} - \varkappa'\varsigma'\varsigma^{n}\varkappa^{m} \\
= & \left(\varsigma'\varkappa' - \varkappa'\varsigma'\right)\left(\varsigma^{n}\varkappa^{m} + \varsigma^{m}\varkappa^{n}\right)
\end{aligned}$$

Sonuç 4.1 $(ii)$ yerine yazılarak

$$\begin{aligned}
= & \; 2\left(-1\right)^{n}\Delta\sqrt{5}b\left(\varkappa^{m-n} + \varsigma^{m-n}\right) \\
= & \; 2\left(-1\right)^{n}\Delta\sqrt{5}bL_{m-n} \\
= & \; 2\left(-1\right)^{n}\Delta bL_{m-n}
\end{aligned}$$

elde edilir. ■

Fibonacci ve Lucas hiperbolik split kuaterniyon dizileri için binom toplam formülleri verilecektir.

**Teorem 4.10**

$$\begin{aligned}
(i)\sum_{c=0}^{v}\binom{v}{c}Q_{H,c+r} &= Q_{H,2v+r}, \\
(ii)\sum_{c=0}^{v}\binom{v}{c}K_{H,c+r} &= K_{H,2v+r}.
\end{aligned}$$

**İspat.** $(i)$ Fibonacci hiperbolik split kuaterniyon dizisinin Binet formülü ve binom açılımı kullanılarak

$$\begin{aligned}
\sum_{c=0}^{v}\binom{v}{c}Q_{H,c+r} &= \sum_{c=0}^{v}\binom{v}{c}\left(\frac{\varsigma'\varsigma^{c+r} - \varkappa'\varkappa^{c+r}}{\varsigma - \varkappa}\right) \\
&= \frac{\varsigma'\varsigma^{r}}{\varsigma - \varkappa}\sum_{c=0}^{v}\binom{v}{c}\varsigma^{c} - \frac{\varkappa'\varkappa^{r}}{\varsigma - \varkappa}\sum_{c=0}^{v}\binom{v}{c}\varkappa^{c} \\
&= \frac{\varsigma'\varsigma^{r}}{\varsigma - \varkappa}\left(1+\varsigma\right)^{v} - \frac{\varkappa'\varkappa^{r}}{\varsigma - \varkappa}\left(1+\varkappa\right)^{v} \\
&= \frac{\varsigma'\varsigma^{2v+r} - \varkappa'\varkappa^{2v+r}}{\varsigma - \varkappa} = Q_{H,2v+r}
\end{aligned}$$

elde edilir.

$(ii)$ Lucas hiperbolik split kuaterniyon dizisinin Binet formülü ve binom açılımı kullanılarak

$$\begin{aligned}
\sum_{c=0}^{v}\binom{v}{c}K_{H,c+r} &= \sum_{c=0}^{v}\binom{v}{c}\left(\varsigma'\varsigma^{c+r}+\varkappa'\varkappa^{c+r}\right)\\
&= \varsigma'\varsigma^{r}\sum_{c=0}^{v}\binom{v}{c}\varsigma^{c}+\varkappa'\varkappa^{r}\sum_{c=0}^{v}\binom{v}{c}\varkappa^{c}\\
&= \varsigma'\varsigma^{r}\left(1+\varsigma\right)^{v}+\varkappa'\varkappa^{r}\left(1+\varkappa\right)^{v}\\
&= \varsigma'\varsigma^{2v+r}+\varkappa'\varkappa^{2v+r}\\
&= K_{H,2v+r}
\end{aligned}$$

elde edilir. ■

**Teorem 4.11**

$$\begin{aligned}
(i)\sum_{c=0}^{v}\binom{v}{c}Q_{H,2c+r} &= \begin{cases} 5^{\frac{v}{2}}Q_{H,v+r}, & v \text{ çift ise,}\\ 5^{\frac{v-1}{2}}K_{H,v+r}, & v \text{ tek ise,}\end{cases}\\
(ii)\sum_{c=0}^{v}\binom{v}{c}K_{H,2c+r} &= \begin{cases} 5^{\frac{v}{2}}K_{H,v+r}, & v \text{ çift ise,}\\ 5^{\frac{v+1}{2}}Q_{H,v+r}, & v \text{ tek ise,}\end{cases}\\
(iii)\sum_{c=0}^{v}\binom{v}{c}\left(-1\right)^{c}Q_{H,2c+r} &= \left(-1\right)^{v}Q_{H,v+r},\\
(iv)\sum_{c=0}^{v}\binom{v}{c}\left(-1\right)^{c}K_{H,2c+r} &= \left(-1\right)^{v}K_{H,v+r}.
\end{aligned}$$

**İspat.** $(i)$Fibonacci hiperbolik split kuaterniyon dizisi Binet formülü ve binom açılımı kullanılarak

$$\begin{aligned}
\sum_{c=0}^{v}\binom{v}{c}Q_{H,2c+r} &= \sum_{c=0}^{v}\binom{v}{c}\left(\frac{\varsigma'\varsigma^{2c+r}-\varkappa'\varkappa^{2c+r}}{\varsigma-\varkappa}\right)\\
&= \frac{\varsigma'\varsigma^{r}}{\varsigma-\varkappa}\sum_{c=0}^{v}\binom{v}{c}\varsigma^{2c}-\frac{\varkappa'\varkappa^{r}}{\varsigma-\varkappa}\sum_{c=0}^{v}\binom{v}{c}\varkappa^{2c}\\
&= \frac{\varsigma'\varsigma^{r}}{\varsigma-\varkappa}\left(1+\varsigma^{2}\right)^{v}-\frac{\varkappa'\varkappa^{r}}{\varsigma-\varkappa}\left(1+\varkappa^{2}\right)^{v}\\
&= \frac{\varsigma'\varsigma^{r}\left(\varsigma\sqrt{5}\right)^{v}-\varkappa'\varkappa^{r}\left(-\varkappa\sqrt{5}\right)^{v}}{\varsigma-\varkappa}\\
&= \begin{cases} 5^{\frac{v}{2}}Q_{H,v+r}, & v \text{ çift ise}\\ 5^{\frac{v-1}{2}}K_{H,v+r}, & v \text{ tek ise}\end{cases}
\end{aligned}$$

elde edilir.

$(ii)$ Lucas hiperbolik split kuaterniyon dizisinin Binet formülü ve binom açılımı kullanılarak

$$\begin{aligned}
\sum_{c=0}^{v}\binom{v}{c}K_{H,2c+r} &= \sum_{c=0}^{v}\binom{v}{c}\left(\varsigma'\varsigma^{2c+r}+\varkappa'\varkappa^{2c+r}\right)\\
&= \varsigma'\varsigma^{r}\sum_{c=0}^{v}\binom{v}{c}\varsigma^{2c}+\varkappa'\varkappa^{r}\sum_{c=0}^{v}\binom{v}{c}\varkappa^{2c}\\
&= \varsigma'\varsigma^{r}\left(1+\varsigma^{2}\right)^{v}+\varkappa'\varkappa^{r}\left(1+\varkappa^{2}\right)^{v}\\
&= \varsigma'\varsigma^{r}\left(\varsigma\sqrt{5}\right)^{v}+\varkappa'\varkappa^{r}\left(-\varkappa\sqrt{5}\right)^{v}\\
&= \begin{cases} 5^{\frac{v}{2}}K_{H,v+r}, & v \text{ çift ise}\\ 5^{\frac{v+1}{2}}Q_{H,v+r}, & v \text{ tek ise}\end{cases}
\end{aligned}$$

elde edilir.

$(iii)$ Fibonacci hiperbolik split kuaterniyon dizisinin Binet formülü ve binom açılımı kullanılarak

$$\begin{aligned}
\sum_{c=0}^{v}\binom{v}{c}(-1)^{c}Q_{H,2c+r} &= \sum_{c=0}^{v}\binom{v}{c}(-1)^{c}\left(\frac{\varsigma^{2c+r}\varsigma'-\varkappa^{2c+r}\varkappa'}{\varsigma-\varkappa}\right)\\
&= \frac{\varsigma'\varsigma^{r}}{\varsigma-\varkappa}\sum_{c=0}^{v}\binom{v}{c}(-1)^{c}\varsigma^{2c}-\frac{\varkappa'\varkappa^{r}}{\varsigma-\varkappa}\sum_{c=0}^{v}\binom{v}{c}(-1)^{c}\varkappa^{2c}\\
&= \frac{\varsigma'\varsigma^{r}}{\varsigma-\varkappa}\left(1-\varsigma^{2}\right)^{v}-\frac{\varkappa'\varkappa^{r}}{\varsigma-\varkappa}\left(1-\varkappa^{2}\right)^{v}\\
&= \frac{\varsigma'\varsigma^{r}}{\varsigma-\varkappa}(-\varsigma)^{v}-\frac{\varkappa'\varkappa^{r}}{\varsigma-\varkappa}(-\varkappa)^{v}\\
&= (-1)^{v}K_{H,v+r}
\end{aligned}$$

elde edilir.

$(iv)$ Lucas hiperbolik split kuaterniyon dizisinin Binet formülü ve binom açılımı kullanılarak

$$\begin{aligned}
\sum_{c=0}^{v}\binom{v}{c}(-1)^{c}K_{H,2c+r} &= \sum_{c=0}^{v}\binom{v}{c}(-1)^{c}\left(\varsigma^{2c+r}\varsigma'+\varkappa^{2c+r}\varkappa'\right)\\
&= \varsigma'\varsigma^{r}\sum_{c=0}^{v}\binom{v}{c}(-1)^{c}\varsigma^{2c}+\varkappa'\varkappa^{r}\sum_{c=0}^{v}\binom{v}{c}(-1)^{c}\varkappa^{2c}\\
&= \varsigma'\varsigma^{r}\left(1-\varsigma^{2}\right)^{v}+\varkappa'\varkappa^{r}\left(1-\varkappa^{2}\right)^{v}\\
&= \varsigma'\varsigma^{r}(-\varsigma)^{v}+\varkappa'\varkappa^{r}(-\varkappa)^{v}\\
&= (-1)^{v}K_{H,v+r}
\end{aligned}$$

sonuç elde edilir. ■

Fibonacci ve Lucas hiperbolik split kuaterniyon dizileri için bazı binom toplam formülleri verilecektir.

**Teorem 4.12**

$$(i)\sum_{c=0}^{v}\binom{v}{2c}Q_{H,4c} = \begin{cases} \frac{1}{2}\left(5^{\frac{v}{2}}+1\right)Q_{H,v}, & v \text{ çift ise},\\ \frac{1}{2}\left(5^{\frac{v-1}{2}}K_{H,v}-Q_{H,v}\right), & v \text{ tek ise},\end{cases}$$

$$(ii)\sum_{c=0}^{v}\binom{v}{2c}K_{H,4c} = \begin{cases} \frac{1}{2}\left(5^{\frac{v}{2}}+1\right)K_{H,v}, & v \text{ çift ise},\\ \frac{1}{2}\left(5^{\frac{v+1}{2}}Q_{H,v}-K_{H,v}\right), & v \text{ tek ise},\end{cases}$$

$$(iii)\sum_{c=0}^{v}\binom{v}{2c+1}Q_{H,4c+1} = \begin{cases} \frac{1}{2}\left(5^{\frac{v}{2}}-1\right)Q_{H,v}, & v \text{ çift ise},\\ \frac{1}{2}\left(5^{\frac{v-1}{2}}K_{H,v}+Q_{H,v}\right), & v \text{ tek ise},\end{cases}$$

$$(iv)\sum_{c=0}^{v}\binom{v}{2c+1}K_{H,4c+1} = \begin{cases} \frac{1}{2}\left(5^{\frac{v}{2}}-1\right)K_{H,v}, & v \text{ çift ise},\\ \frac{1}{2}\left(5^{\frac{v+1}{2}}Q_{H,v}+K_{H,v}\right), & v \text{ tek ise}.\end{cases}$$

**İspat.** $(i)$ Fibonacci hiperbolik split kuaterniyon dizisinin Binet formülü kullanılarak

$$\begin{aligned}\sum_{c=0}^{v}\binom{v}{2c}Q_{H,4c} &= \frac{1}{2}\sum_{c=0}^{v}\binom{v}{c}\left(1+(-1)^{c}\right)Q_{H,2c}\\ &= \frac{1}{2}\left(\sum_{c=0}^{v}\binom{v}{c}Q_{H,2c}+\sum_{c=0}^{v}\binom{v}{c}(-1)^{c}Q_{H,2c}\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(\sum_{c=0}^{v}\binom{v}{c}\frac{\varsigma^{2c}\varsigma'-\varkappa^{2c}\varkappa'}{\varsigma-\varkappa}+\sum_{c=0}^{v}\binom{v}{c}(-1)^{c}\frac{\varsigma^{2c}\varsigma'-\varkappa^{2c}\varkappa'}{\varsigma-\varkappa}\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{\varsigma'}{\varsigma-\varkappa}\sum_{c=0}^{v}\binom{v}{c}\varsigma^{2c}-\frac{\varkappa'}{\varsigma-\varkappa}\sum_{c=0}^{v}\binom{v}{c}\varkappa^{2c}\right.\\ &\quad\left.+\frac{\varsigma'}{\varsigma-\varkappa}\sum_{c=0}^{v}\binom{v}{c}(-1)^{c}\varsigma^{2c}-\frac{\varkappa'}{\varsigma-\varkappa}\sum_{c=0}^{v}\binom{v}{c}(-1)^{c}\varkappa^{2c}\right)\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan binom açılımı yardımıyla ifade tekrar düzenlenerek

$$\begin{aligned}\sum_{c=0}^{v}\binom{v}{2c}Q_{H,4c} &= \frac{1}{2}\left(\left(\frac{\varsigma'(1+\varsigma^{2})^{v}-\varkappa'(1+\varkappa^{2})^{v}}{\varsigma-\varkappa}\right)+\left(\frac{\varsigma'(1-\varsigma^{2})^{v}-\varkappa'(1-\varkappa^{2})^{v}}{\varsigma-\varkappa}\right)\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(\left(\frac{\varsigma'(\varsigma\sqrt{5})^{v}-\varkappa'(-\varkappa\sqrt{5})^{v}}{\varsigma-\varkappa}\right)+\left(\frac{\varsigma'(-\varsigma)^{v}-\varkappa'(-\varkappa)^{v}}{\varsigma-\varkappa}\right)\right)\end{aligned}$$

elde edilir. $v$'nin tek ve çift olma durumları göz önüne alınarak istenilen sonuç elde edilir

$(ii)$ Lucas hiperbolik split kuaterniyon dizisinin Binet formülü kullanılarak

$$\begin{aligned}
\sum_{c=0}^{v}\binom{v}{2c}K_{H,4c} &= \frac{1}{2}\sum_{c=0}^{v}\binom{v}{c}\left(1+(-1)^c\right)K_{H,2c}\\
&= \frac{1}{2}\left(\sum_{c=0}^{v}\binom{v}{c}K_{H,2c}+\sum_{c=0}^{v}\binom{v}{c}(-1)^c K_{H,2c}\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(\sum_{c=0}^{v}\binom{v}{c}\left(\varsigma'\varsigma^{2c}+\varkappa'\varkappa^{2c}\right)+\sum_{c=0}^{v}\binom{v}{c}(-1)^c\left(\varsigma'\varsigma^{2c}+\varkappa'\varkappa^{2c}\right)\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(\varsigma'\sum_{c=0}^{v}\binom{v}{c}\varsigma^{2c}+\varkappa'\sum_{c=0}^{v}\binom{v}{c}\varkappa^{2c}\right.\\
&\quad\left.+\varsigma'\sum_{c=0}^{v}\binom{v}{c}(-1)^c\varsigma^{2c}+\varkappa'\sum_{c=0}^{v}\binom{v}{c}(-1)^c\varkappa^{2c}\right)
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan binom açılımı yardımıyla ifade tekrar düzenlenerek

$$\begin{aligned}
\sum_{c=0}^{v}\binom{v}{2c}K_{H,4c} &= \frac{1}{2}\left(\varsigma'\left(1+\varsigma^2\right)^v+\varkappa'\left(1+\varkappa^2\right)^v+\varsigma'\left(1-\varsigma^2\right)^v+\varkappa'\left(1-\varkappa^2\right)^v\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(\varsigma'\left(\varsigma\sqrt{5}\right)^v+\varkappa'\left(-\varkappa\sqrt{5}\right)^v+\varsigma'(-\varsigma)^v+\varkappa'(-\varkappa)^v\right)
\end{aligned}$$

elde edilir. $v$'nin tek ve çift olma durumları göz önüne alınarak istenilen sonuç elde edilir.

$(iii)$ Fibonacci hiperbolik split kuaterniyon dizisi Binet formülü kullanılarak

$$\begin{aligned}
\sum_{c=0}^{v}\binom{v}{2c+1}Q_{H,4c+1} &= \frac{1}{2}\sum_{c=0}^{v}\binom{v}{c}\left(1-(-1)^c\right)Q_{H,2c}\\
&= \frac{1}{2}\left(\sum_{c=0}^{v}\binom{v}{c}Q_{H,2c}-\sum_{c=0}^{v}\binom{v}{c}(-1)^c Q_{H,2c}\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(\sum_{c=0}^{v}\binom{v}{c}\frac{\varsigma^{2c}\varsigma'-\varkappa^{2c}\varkappa'}{\varsigma-\varkappa}-\sum_{c=0}^{v}\binom{v}{c}(-1)^c\frac{\varsigma^{2c}\varsigma'-\varkappa^{2c}\varkappa'}{\varsigma-\varkappa}\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{\varsigma'}{\varsigma-\varkappa}\sum_{c=0}^{v}\binom{v}{c}\varsigma^{2c}-\frac{\varkappa'}{\varsigma-\varkappa}\sum_{c=0}^{v}\binom{v}{c}\varkappa^{2c}\right.\\
&\quad\left.-\frac{\varsigma'}{\varsigma-\varkappa}\sum_{c=0}^{v}\binom{v}{c}(-1)^c\varsigma^{2c}+\frac{\varkappa'}{\varsigma-\varkappa}\sum_{c=0}^{v}\binom{v}{c}(-1)^c\varkappa^{2c}\right)
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan binom açılımı yardımıyla ifade tekrar düzenlenerek

$$\begin{aligned}
\sum_{c=0}^{v}\binom{v}{2c+1}Q_{H,4c+1} &= \frac{1}{2}\left(\left(\frac{\varsigma'(1+\varsigma^2)^v-\varkappa'(1+\varkappa^2)^v}{\varsigma-\varkappa}\right)-\left(\frac{\varsigma'(1-\varsigma^2)^v-\varkappa'(1-\varkappa^2)^v}{\varsigma-\varkappa}\right)\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(\left(\frac{\varsigma'(\varsigma\sqrt{5})^v-\varkappa'(-\varkappa\sqrt{5})^v}{\varsigma-\varkappa}\right)-\left(\frac{\varsigma'(-\varsigma)^v-\varkappa'(-\varkappa)^v}{\varsigma-\varkappa}\right)\right)
\end{aligned}$$

elde edilir. $v$'nin tek ve çift olma durumları göz önüne alınarak istenilen sonuç elde edilir.

$(iv)$ Lucas hiperbolik split kuaterniyon dizisinin Binet formülü kullanılarak

$$\begin{aligned}
\sum_{c=0}^{v}\binom{v}{2c+1}K_{H,4c+1} &= \frac{1}{2}\sum_{c=0}^{v}\binom{v}{c}\left(1-(-1)^{c}\right)K_{H,2c}\\
&= \frac{1}{2}\left(\sum_{c=0}^{v}\binom{v}{c}K_{H,2c}-\sum_{c=0}^{v}\binom{v}{c}(-1)^{c}K_{H,2c}\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(\sum_{c=0}^{v}\binom{v}{c}\left(\varsigma'\varsigma^{2c}+\varkappa'\varkappa^{2c}\right)-\sum_{c=0}^{v}\binom{v}{c}(-1)^{c}\left(\varsigma'\varsigma^{2c}+\varkappa'\varkappa^{2c}\right)\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(\varsigma'\sum_{c=0}^{v}\binom{v}{c}\varsigma^{2c}+\varkappa'\sum_{c=0}^{v}\binom{v}{c}\varkappa^{2c}\right.\\
&\qquad\left.-\varsigma'\sum_{c=0}^{v}\binom{v}{c}(-1)^{c}\varsigma^{2c}-\varkappa'\sum_{c=0}^{v}\binom{v}{c}(-1)^{c}\varkappa^{2c}\right)
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan binom açılımı yardımıyla ifade tekrar düzenlenerek

$$\begin{aligned}
\sum_{c=0}^{v}\binom{v}{2c+1}K_{H,4c+1} &= \frac{1}{2}\left(\left(\varsigma'\left(1+\varsigma^{2}\right)^{v}+\varkappa'\left(1+\varkappa^{2}\right)^{v}\right)-\left(\varsigma'\left(1-\varsigma^{2}\right)^{v}+\varkappa'\left(1-\varkappa^{2}\right)^{v}\right)\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(\left(\varsigma'\left(\varsigma\sqrt{5}\right)^{v}+\varkappa'\left(-\varkappa\sqrt{5}\right)^{v}\right)-\left(\varsigma'(-\varsigma)^{v}+\varkappa'(-\varkappa)^{v}\right)\right)
\end{aligned}$$

elde edilir. $v$'nin tek ve çift olma durumları göz önüne alınarak istenilen sonuç elde edilir ■

# 5. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu tezde ilk olarak gerekli tanım ve teoremler verildikten sonra Fibonacci ve Lucas eliptik kuaterniyon dizileri, Fibonacci ve Lucas hiperbolik split kuaterniyon dizileri tanımlanmıştır. Binet formülü yardımıyla Fibonacci ve Lucas eliptik kuaterniyon dizileri ve Fibonacci ve Lucas hiperbolik split kuaterniyon dizileri için Vajda özdeşliği, Catalan özdeşliği, Cassini özdeşliği, d'Ocagne özdeşliği, Honsberger özdeşliği ve bazı toplam formülleri elde edilmiştir.

Bu tez ile beraber literatürde var olan çalışmaların bir genelleştirilmesi elde edilmiştir. Bu sonuçlara benzer olarak bileşenleri özel tamsayı dizilerinin terimlerinden oluşan eliptik ve hiperbolik split kuaterniyon dizileri tanımlanabilir ve özellikleri incelenebilir.

## KAYNAKLAR


Akyiğit, M., Kösal, H. H., & Tosun, M. (2013). Split fibonacci quaternions. Advances in applied Clifford algebras, 23, 535-545.

Cockle, J. (1849). III. On a new imaginary in algebra. The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science, 34(226), 37-47.

Erdoğdu, M., & Özdemir, M. (2016). Matrices over hyperbolic split quaternions. Filomat, 30(4), 913-920.

Halici, S. (2012). On fibonacci quaternions. Adv. Appl. Clifford Algebras, 22(2), 321-327.

Hamilton, W.R. 1843. Lectures on quaternions. Dublin: Hodges and Smith.

Horadam, A. F. (1963). Complex Fibonacci numbers and Fibonacci quaternions. The American Mathematical Monthly, 70(3), 289-291.

Koshy, T. 2001. Fibonacci and Lucas Numbers with Applications. New York: Wiley.

Kula, L., & Yayli, Y. (2007). Split quaternions and rotations in semi Euclidean space E 4 2. Journal of the Korean Mathematical Society, 44(6), 1313-1327.

Ozdemir, M., & Ergin, A. A. (2007). Spacelike Darboux curves in Minkowski 3-space. Differ. Geom. Dyn. Syst, 9, 131-137.

Özdemir, M. (2016). An alternative approach to elliptical motion. Advances in Applied Clifford Algebras, 26, 279-304.

Özdemir, M. (2020). Kuaterniyonlar ve Geometri. Mustafa Özdemir.

Özdemir, M., & Ergin, A. A. (2006). Rotations with unit timelike quaternions in Minkowski 3-space. Journal of geometry and physics, 56(2), 322-336.

Simsek, H., & Özdemir, M. (2016). Generating hyperbolical rotation matrix for a given hyperboloid. Linear Algebra and Its Applications, 496, 221-245.

Tan, E., Yilmaz, S., & Sahin, M. (2016). On a new generalization of Fibonacci quaternions. Chaos, Solitons & Fractals, 82, 1-4.

Tan, E., Yilmaz, S., & Sahin, M. (2016). A note on bi-periodic Fibonacci and Lucas quaternions. Chaos, Solitons & Fractals, 85, 138-142.

Tan, E., Yaman T., Gök İ. (2024) On elliptic Fibonacci and Lucas elliptic quaternions (Submitted)

Tan, E., & Leung, H. H. (2020). Some results on Horadam quaternions. Chaos, Solitons & Fractals, 138, 109961.

Vajda, S. (2008). Fibonacci and Lucas numbers, and the golden section: theory and applications. Courier Corporation.

Vicci, L. (2001). Quaternions and rotations in 3-space: The algebra and its geometric interpretation. Chapel Hill, NC, USA, Tech. Rep.

## ÖZGEÇMİŞ

**Adı Soyadı** : Tuğba YAMAN

**Doğum Yeri** : Seyhan/ADANA

**Doğum Tarihi** : 16/08/1994

**Medeni Hali** : Bekar

**Yabancı Dili** : İngilizce

**Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl):**

**Lise** : İsmail Safa Özler Almanca Anadolu Lisesi (2013)

**Lisans** : Ankara Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü (2021)

**Yüksek Lisans** : Ankara Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı (2021-2024)

**Çalıştığı Kurum/Kurumlar ve Yıl:**

**SCI Yayınları:**

**Diğer Yayınları:**