

ANKARA ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

KUANTUM MEKANİĞİ, FONKSİYONEL ANALİZ VE NORMLU  
BÖLMELİ CEBİRLER

Gökmen ERDEM

FİZİK ANABİLİM DALI

ANKARA  
2025

Her hakkı saklıdır

# ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

## KUANTUM MEKANİĞİ, FONKSİYONEL ANALİZ VE NÖRMLÜ BÖLMELİ CEBİRLER

Gökmen ERDEM

Ankara Üniversitesi  
Fen Bilimleri Enstitüsü  
Fizik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Özgür AÇIK

Bu çalışmada kuantum mekaniğinin aksiyomatini desteklemek için bazı arkaplan matematiksel materyaller ele alındı. Bu sebeple sembolik mantık, küme teorisi ve gönderimler, topolojik uzaylar, metrik uzaylar, Banach uzayları ve Hilbert uzayları çalışıldı. Sonrasında, kuantum mekaniğinin postülalarını modern fonksiyonel analiz teorisinde bulunan matematiksel yapılara uygun olarak sunuldu. Bunları takiben normlu bölmeli cebirlerin (reel sayılar, kompleks sayılar, kuaternionlar ve oktonionlar) özellikleri çalışıldı ve üç katmanlı yolun ana şeması verildi. Bu, karşılaşılan problemlerin, karşılık gelen Hilbert uzaylarını temsillerle ve sırasıyla reel ve kuaternionik olarak sınıflandırılan yapılarla donatarak çözülebileceği anlamına gelmektedir.

**Aralık 2025, 101 sayfa**

**Anahtar Kelimeler:** Kuantum Mekaniği, Kuantum Mekaniksel Hareketler, Reel ve Karmaşık Sayılar, Kuaternionlar ve Oktonionlar, Hilbert Uzayları ve Fonksiyonel Analiz, Topoloji

# ABSTRACT

Master Thesis

QUANTUM MECHANICS, FUNCTIONAL ANALYSIS AND NORMED DIVISION  
ALGEBRAS

Gökmen ERDEM

Ankara University  
Graduate School of Natural and Applied Sciences  
Department of Physics

Supervisor: Prof. Dr. Özgür AÇIK

In this work, some mathematical background materials have been introduced in order to support the axiomatic formulation of quantum mechanics. Accordingly, symbolic logic, set theory and mappings, topological spaces, metric spaces, Banach spaces, and Hilbert spaces have been studied. Later on the postulates of quantum theory have been prescribed in accordance with the given mathematical structures residing in the theory of modern functional analysis. Followingly the properties of normed division algebras (real numbers, complex numbers, quaternions and octonions) have been worked on, and the main scheme called the three-fold way has been given. This means that the problems faced upon real and quaternionic quantum theory can be solved by seeing the corresponding Hilbert spaces as equipped with representations and the structures that are classified respectively as real and quaternionic.

**December 2025, 101 pages**

**Key Words:** Quantum Mechanics, Quantum Mechanical Motions, Real and Complex Numbers, Quaternions and Octonions, Hilbert Spaces and Functional Analysis, Topology

## TEŞEKKÜR

Yüksek lisans tez çalışmam boyunca bilgisini esirgemeyen, öğrendiğim her bilgide emeği olan danışmanım Prof. Dr. Özgür AÇIK'a, çalışmalarımız boyunca yardımını ve bilgisini paylaşan Doç. Dr. Ümit ERTEM'e, öneri ve katkıları için Doç. Dr. Özgür KELEKÇİ'ye ve hayatım boyunca maddi ve manevi destek veren aileme teşekkürü bir borç bilirim.

Bu çalışma, 123F261 Numaralı proje kapsamında Türkiye Bilimsel ve Teknolojik Araştırma Kurumu (TÜBİTAK) tarafından desteklenmiştir. TÜBİTAK'a çalışmam boyunca destekleri için teşekkür ederim.

Gökmen ERDEM  
Ankara, Aralık 2025

## İÇİNDEKİLER

### TEZ ONAY SAYFASI

ETİK . . . . .	i
ÖZET . . . . .	ii
ABSTRACT . . . . .	iii
TEŞEKKÜR . . . . .	iv
SİMGELER DİZİNİ . . . . .	vii
ŞEKİLLER DİZİNİ . . . . .	viii
ÇİZELGELER DİZİNİ . . . . .	ix
1. GİRİŞ . . . . .	1
2. MANTIKSAL İFADELER . . . . .	6
2.1 Önermeler . . . . .	7
2.2 Kontrapozitif ve Ters. . . . .	7
2.3 Bağlam ve Niceleyiciler . . . . .	7
2.4 Doğrudan İspatlar . . . . .	8
2.5 Doğrudan Olmayan İspatlar . . . . .	9
3. KÜMELER VE GÖNDERİMLER . . . . .	11
3.1 Elemanlar ve Kümeler . . . . .	11
3.2 Boole Cebri . . . . .	12
3.3 İki Kümenin Çarpımı . . . . .	13
3.4 Gönderimler: Üzerine, Bire Bir ve Terslenebilir Gönderimler . . .	13
3.5 Doğrudan, Ters Görüntüler ve Gönderimlerin Bileşimi . . . . .	15
3.6 Aileler . . . . .	16
4. GENEL TOPOLOJİ . . . . .	18
4.1 Topolojik Uzay . . . . .	18
4.2 Kompakt Topolojik Uzaylar . . . . .	21
4.3 Bağlantılı Uzaylar . . . . .	23
4.4 Bölüm Topolojisi . . . . .	24
5. METRİK UZAYLAR . . . . .	26
5.1 Metrik Uzay . . . . .	26
5.2 İzometri . . . . .	28
5.3 Yoğun Altkümeler ve Ayrılabilir Uzaylar . . . . .	28
5.4 Bir Metrik Uzayın Altuzayları . . . . .	29
5.5 Metrik Uzaylarda Sürekli Gönderimler ve Eşdeğer Mesafeler . . .	30
5.6 Limitler . . . . .	31
5.7 Cauchy Dizileri ve Tam Uzaylar . . . . .	31
5.8 Metrik Uzaylarda Kompaktlık . . . . .	32
5.9 İki Metrik Uzayın Çarpımı . . . . .	33

6. NORMLU UZAYLAR . . . . .	36
6.1 Normlu Uzaylar . . . . .	36
6.2 Normlu Uzayda Seriler ve Mutlak Yakınsak Seriler . . . . .	37
6.3 Normlu Uzayların Altuzayları ve Sonlu Çarpımları . . . . .	38
6.4 Çoklu-çizgisel Gönderimlerin Sürekliliği . . . . .	39
6.5 Eşdeğer Normlar . . . . .	40
6.6 Kapalı Hiperdüzlemler ve Sürekli Çizgisel Formlar . . . . .	40
6.7 Sonlu Boyutlu Normlu Uzaylar . . . . .	40
7. HILBERT UZAYLARI . . . . .	42
7.1 Hermit-sel Formlar . . . . .	42
7.2 Pozitif Hermit-sel Formlar . . . . .	45
7.3 Tam Bir Altuzay Üzerinde Ortogonal Projeksiyon . . . . .	47
7.4 Ortonormal Sistemler ve Ortonormalleştirme . . . . .	47
7.5 Uygulamalar: Sürekli Fonksiyonlar Uzayı . . . . .	50
7.5.1 Sınırlı fonksiyonlar uzayı . . . . .	50
7.5.2 Sınırlı sürekli fonksiyonlar uzayı . . . . .	50
7.5.3 Stone-Weierstrass yaklaşım teoremi . . . . .	51
7.5.4 Regüle edilmiş fonksiyonlar . . . . .	51
8. KUANTUM MEKANİĞİ . . . . .	53
8.1 Matematiksel Yapısı . . . . .	55
8.2 Süperpozisyon İlkesi . . . . .	58
8.3 Operatörler . . . . .	59
8.4 Operatörlerin Toplanmaları ve Çarpımları . . . . .	64
8.5 Sürekli Spektrumlar . . . . .	65
8.6 Dalga Fonksiyonu ve Ölçümler . . . . .	66
8.7 Yoğunluk Matrisi . . . . .	68
8.8 Spektral Teorem . . . . .	71
8.9 Stone Teoremi . . . . .	73
8.10 Gelfand-Neumark-Segal Kurulumu . . . . .	75
9. NORMLU BÖLMELİ CEBİRLER . . . . .	78
9.1 Normlu Bölmeli Cebirler . . . . .	78
9.2 Cayley-Dickson Süreci . . . . .	81
9.3 Sorunlar . . . . .	82
10. ÜÇ KATMANLI YOL . . . . .	84
10.1 Üç Katmanlı Yol . . . . .	84
11. TARTIŞMA VE SONUÇ . . . . .	89
KAYNAKLAR . . . . .	91
EK 1 KATEGORİ TEORİSİ . . . . .	94
EK 2 TEMSİL TEORİSİ . . . . .	96
EK 3 FONKSİYONEL ANALİZDE BAZI TEOREMLER . . . . .	100
ÖZGEÇMİŞ . . . . .	101

## SİMGELER DİZİNİ

$\mathbb{k}$	Sayı alanı
$d$	Mesafe fonksiyonu
$V$	Vektör uzayı
$V^*$	Dual vektör uzayı
$N$	Normlu vektör uzayı
$\mathcal{H}$	Hilbert uzayı
$\langle \cdot, \cdot \rangle, \langle   \rangle$	Hermit-sel iç çarpım
$P_V$	$V$ üzerine ortogonal projeksiyon
$\ell_{\mathbb{k}}^2$	Mutlak karesi toplanabilir dizilerin $\mathbb{k}$ -Hilbert uzayı
$L^2$	Mutlak karesi integrallenebilir fonksiyonlar uzayı
$\mathcal{S}$	Durumlar kümesi
$\mathcal{O}$	Gözlenebilirler kümesi
$\psi$	Saf durum vektörü
$\hat{f}$	$\mathcal{H}$ üzerindeki bir operatör
$\hat{f} = \hat{f}^*(\hat{f}^\dagger)$	Gözlenebilir
$\langle \psi, \hat{f}\psi \rangle$	$\hat{f}$ operatörünün $\psi$ durumundaki beklenen değeri
$\hat{H}$	Hamilton operatörü
$\hat{\rho}$	Yoğunluk matrisi
$(U_t)_{t \in \mathbb{R}}$	$\mathcal{H}$ üzerindeki üniter operatörler ailesi
$\omega$	Cebir üzerindeki durum
$\mu$	Ölçü
$\mathcal{B}(X)$	Keyfi bir $X$ kümesi üzerindeki sınırlı Borel fonksiyonlarının kümesi

## ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 9.1	Kuaternion çarpım kuralı . . . . .	79
Şekil 9.2	Fano düzlemi . . . . .	80

## ÇİZELGELER DİZİNİ

Çizelge 9.1	Oktonion çarpım tablosu . . . . .	80
Çizelge 10.1	Üç katmanlı yol . . . . .	87

## 1. GİRİŞ

Galilei kovaryant (göresiz) kütleli noktasal parçacıkların Newtonsal klasik mekaniğinin Hamiltonsal formülasyonunun kanonik kuantumlanması yapıldığında, bu parçacıkların matris mekaniği ile verilen kuantum hareketlerinin teorisi elde edilir (Dirac 1930) (Jauch 1973) (Zwiebach 2022) (Waarden 1967). Heisenberg tarafından ortaya atılan bu kuram (Heisenberg 1925), Schrödinger'in dalga mekaniği (Schrödinger 1926) ile verilen kuantum teorisine eşdeğerdir (Schrödinger 1926) ve bunlar sırasıyla (standart) kuantum mekaniğinin *Heisenberg resmi* ve *Schrödinger resmi* olarak isimlendirilmekte ve aynı teoriye farklı bakış açıları olarak görülmektedirler. Kuantum mekaniğinin altında yatan matematiksel yapıların, kompleks Hilbert uzayları ve bunlar üzerindeki kompleks çizgisel işlemcilerin cebri oldukları iyi bilinmektedir (von Neumann 1932); yani ilk adımda bu yeni mekanik, matematiksel açıdan cebirsel bir içeriğe haizdir ancak hareketlerin tanımlanmasını sağlayan parametre mutlak olan (evrensel) Newtonsal zaman niceliğidir ve bu nicelik ilgili soyut uzaylardaki noktaları sürerek eğriler teşkil eder. İşte Heisenberg ve Schrödinger denklemleri bu eğriler ile ilgili zamana göre 1. mertebeden geometrik (yani koordinat bağımsız) diferensiyel denklemlerdir ve elbette global incelemeler yapabilmek ve korunumlu yükler elde edebilmek için integral denklemler gerekmektedir. Bu aşamada fiziksel teori soyut geometrik özellikler de kazanmış olur ki cebir ve geometri arasındaki iletişimi sağlayan nümerikleştirme prosedürünü gerçekleştiren koordinatlar devreye sokularak lokal analiz yapma imkanı oluşur. Lokal analiz, çizgisel olmayan matematiksel yapıların çizgisel yaklaşımlar ile incelenmesine verilen addır (Dieudonné 1968); dolayısıyla sonsuz küçükler ve onların hesabı da artık incelemeye dahil edilmiş olur. Bu metodoloji klasik alan teorilerinden sürekli ortamlar mekaniğine, diferensiyel geometriden cebirsel topolojiye çok derin bir şekilde sirayet etmiş durumdadır. Kuantum mekaniğindeki olasılık yoğunluğu kavramı da bu metodolojinin önemli bir bileşenidir ki bir kompleks Hilbert uzayındaki bir klasik eğrinin Euclides-sel geometriye sahip fiziksel (Newtonsal) uzay üzerine kavramsal izdüşümü klasik eğriler ile temsil edilen yörüngeler kategorisinin dışında bir yörünge kavramına götürmektedir.

Kuantum mekaniğinin, Dirac tarafından ortaya atılan (Dirac 1933) ve Feynman'ın yol integralleri (Feynman 1942) ile son halini alan Lagrange-sal formülasyonunun yörüngeler üzerinden toplam fikrine karşılık gelen "yörünge" kavramı da bu yeni kategorinin bir üyesi olarak düşünülebilir. Bu aşamada maddeyi anlatan noktasal parçacık düşüncesi her iki hareket teorisi (hem klasik hem kuantal teori) için de aynıdır fakat bu maddesel noktaları tarif eden parametreler kümesine, klasik karşılığı olmayan (spin gibi) nicelikler de kuantum teorisinde eklenmektedir. Kuantumlanmış klasik parçacıkların klasik anlamda yörüngelere sahip olmamaları esasen onların dual (ikili) bir davranış sergilemelerine eşdeğerdir ve bu özellik dalga-parçacık dualitesi olarak bilinmektedir. Dolayısıyla, bir kuantum sistemini betimleyen nicelikler arasında, parçacık özelliklerini anlatan kütle ve elektrik yükü gibi nicelikler sadece parametreler olarak düşünülmelidir (Landau ve Lifshitz 1958); bu parametreler Schrödinger'in dalga denkleminde de açık olarak görünmektedirler.

Sürekli anlamda çizgisel üst-üste gelme ile kesikli karşılığı sırasıyla integral ve toplam işlemleri ile verilir, dolayısıyla bir çizgisel denklem sisteminin süreklilik limiti bir integral denklemle verilebilmektedir. Bu düşüncelerin sonucu olarak modern çizgisel fonksiyonel analiz, modern çizgisel cebirin boyutu hem kesikli hem de sürekli anlamda sonsuza götüren genellemeleri içermesinin yanı sıra, fonksiyonları noktaları olarak kabul eden çizgisel uzayların varlığı nedeniyle daha somut incelemeler yapabileme imkanı sağlamaktadır. Böylelikle fonksiyonlara etki eden fonksiyonlar yani fonksiyonel kavramı da doğal bir şekilde modern analizin temellerinden biri haline gelmektedir. Bilindiği üzere değişimler hesabı bu kavram üzerine kuruludur ve fizikte eylem integrallerinin de dayanağı budur (Lanczos 1949). Boyutun sonsuzlaşması nedeniyle, sonlu boyutta var olan çizgisel dualite artık küme teorisel bir dualiteye (üçlülük) dönüşmektedir ki bu üçlülük, fonksiyonları, çizgisel fonksiyonelleri ve çizgisel fonksiyonellerin çizgisel fonksiyonellerini birbirleri ile ilişkilendirir (Bohm 1993).  $\mathcal{H}$ , sonsuz boyutlu bir Hilbert uzayı ve  $\mathcal{H}^*$ , onun üzerindeki sürekli çizgisel fonksiyonellerin uzayı olmak üzere  $\mathcal{H} \simeq \mathcal{H}^*$ 'dir.  $\mathcal{H}$ 'nin yoğun bir altuzayı  $\Phi$  için

$$\Phi \subset \mathcal{H} \subset \Phi^*$$

ilişkisi geçerlidir ve  $(\Phi, \mathcal{H}, \Phi^*)$  üçlüsüne Gelfand üçlüsü denir (Bohm 1993). Fonk-

siyonel analiz sayesinde, fonksiyonları sürekli indislerle etiketlenmiş sonsuz bileşenli vektörler olarak düşünebilmenin faydaları sadece kuantum mekaniğinde değil kuantum alan teorisinde de ön plana çıkmaktadır (Weinberg 1995).

Modern analizin temelinde iki önemli unsur yatar, bunlardan ilki spektral teori ikincisi ise (yine kendini gösteren) dualite kavramıdır (Dieudonné 1981). Spektral analiz özdeğerler, özfonksiyonlar ve fonksiyonların özfonksiyonların seri açılımları vasıtasıyla yaklaşımları ile ilgilenir ki bu yaklaşımların önemi Fourier teorisi nedeniyle daha evvelden iyi bilinmektedir (Jauch 1965). Dualite ise sonlu boyuttan kesikli ve sürekli anlamda sonsuza götürülmesi durumunda sırasıyla karşılaşılan ilk somut örnekler olan  $\ell^p$  ve  $L^p$  uzayları ile çok sade bir şekilde şöyle ifade edilebilir:  $1 \leq p, q \leq \infty$  olmak üzere  $1/p + 1/q = 1$  eşitliği sağlandığında  $\ell^p$  ve  $\ell^q$  Banach uzayları olmaktadır.  $p = q = 2$  özel durumunda  $\ell^p$  ve  $\ell^q$ , paralelkenar yasasını sağladıklarından  $\mathbb{k}$ -Hilbert uzayları olurlar (benzer şekilde  $L^p$  için de öyledir ve  $\mathbb{k} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ 'dir) ve her iki uzay tipi için de *kendine-dual* durumlara karşılık gelmekte iken özel olarak  $\ell^2$  ve  $L^2$  uzayları izometrikler; bu özel durum matris mekaniği ile dalga mekaniğinin eşdeğerliğinin altında yatan matematiksel eşdeğerliği vermektedir. Yani Heisenberg teorisi  $\ell^2$  uzayını kullanırken, Schrödinger teorisi  $L^2$  uzayını kullanmaktadır (Kolmogorov ve Fomin 1958). Şu da söylenmelidir ki bu dualite üstte değinilen dualitedeki her bir tek sektör için vardır. Bu dualitenin fizikte ve matematikte ortaya çıkan diğer dualiteler ile ilişkisinin incelenmesi de yeni fikirler sunabilir. Bunlardan bazıları, fizikteki Yang-Mills tipi ve Einstein tipi ayar teorilerinde ortaya çıkan instanton ve monopol çözümleri, elektromagnetik dualite, süper kütleçekim ve süpersimetrik sicim teorilerindeki  $S$  ve  $T$  dualiteleri iken matematikte projektif dualite, Euclides-sel düzlemin düzgün kaplanması ile ilişkili dualite, Hodge-Grassmann dualitesi ve Poincaré dualitesi ile verilebilir (Atiyah 2007). Ayrıca kompleks sayı alanı durumunda  $\ell^p$  uzaylarının, kompleks sayı dizilerinin uzayı olan  $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ 'nin normlu altuzayları oldukları bilgisi de kayda değerdir.

Sonlu karakteristikli ve sıfır karakteristikli sayı alanları (Albert 1939) fizikte bir çok yerde ortaya çıkmaktadırlar. Bunlardan ilkinin temsil eden Galois alanları ile bilhassa

kuantum bilişim kuramında ve dolayısıyla kara delik termodinamiğinde karşılaşılmaktadır (Harlow 2022) (Lévy vd. 2008). Sıfır karakteristikli iki farklı sayı alanı vardır ve bunlar sırasıyla  $\mathbb{R}$  reel sayıları ve  $\mathbb{C}$  kompleks sayıları ile verilmektedirler. Komütatiflik (sıradеğişme) özelliği kaybolduğu zaman karşılaşılan sayılar  $\mathbb{H}$  kuaternionik sayıları olurken, bir de asosyatifik (birleşme) özelliği kaybolursa karşılaşılan sayılara da  $\mathbb{O}$  oktonionik sayılar denir. Bu son iki sayı sistemi artık sayı alanları olmamalarına rağmen üzerlerinde homomorfizm olma özelliğine sahip bir norm kabul eden bölmeli cebirlerdir. İyi bilinmektedir ki reel sayılar üzerindeki normlu bölmeli alternatif cebirler sadece 1,2,4 veya 8 reel boyutlu olabilirler; bunlar sırasıyla  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{C}$ ,  $\mathbb{H}$  ve  $\mathbb{O}$  ile temsil edilirler (Porteous 1995) (Dray ve Manogue 2015).

Kuantum mekaniği söz konusu olduğuunda esrarengiz de olsa Doğa kompleks sayı alanını seçmektedir (Stewart ve Tall 2018); ancak bu gizemi kâfi miktarda ortadan kaldıran bir bilgi kompleks sayıların  $\mathbb{R}$ -tensör çarpımı altında  $\{\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}\}$  kümesinin baskın elemanı olmasıdır ki bu onların reel boyutunun 2 oluşu ile ilgilidir. Ancak yine de kuantum mekaniğinin, altta yatan sayı sisteminin değiştirilmesi ile elde edilen formülasyonları da literatürde çeşitli sebeplerle çalışılmışlardır. Stueckelberg ve çalışma arkadaşları da bir seri makalede, reel Hilbert uzayları üzerinde kuantum teorisi ve kuantum alan teorisinin özellikleri üzerine çalışmalar yapmışlardır (Stueckelberg 1959) (Stueckelberg 1960) (Stueckelberg 1961) (Stueckelberg vd. 1961) (Stueckelberg ve Guenin 1962). Mesela standart kuantum mekaniği ile farkı görmek açısından kompleks Hilbert uzaylarının saf durumlarının reel Hilbert uzaylarının karışık durumlarına karşılık geliyor olması örnek olarak verilebilir (Myrheim 2018). Finkelstein vd. kuaternionik Hilbert uzayları üzerine yaptıkları bir çalışmada ise bileşik sistemlerin tasvirinde sıradan tensör çarpımında kuaternionik sıradеğişimsizlik nedeniyle çıkan zorlukları ortadan kaldırmaya çalışmışlardır. Hiperyük ve izospin gibi fazladan serbestlik derecelerinin var olduğu varsayımı yapıldığında bu zorlukların üstesinden doğal bir şekilde gelinebilmektedir. Schrödinger denkleminde hangi imajiner sayının kullanılacağı sorusunun ise Stone'nun teoreminin genellenmesi ile cevaplanabileceğini de göstermişlerdir (Finkelstein vd. 1961). Oktonionik sayıların kuantum mekaniğindeki kullanımı daha ziyade kuantum man-

tık konusunda varlığını göstermektedir (Baez 2002). Normlu bölmeli cebirlerin sicim teorisi çerçevesine oturtulması ile ilgili çalışmalar da literatürde mevcuttur (Baez ve Huerta 2007).

Tezde amaçlanan incelemelerin yapılabilmesi için kullanılan matematiksel ve fiziksel altyapı konuları sırası ile şöyledirler: Mantık (Bartle ve Sherbert 1992), Küme-ler ve Gönderimler (Dieudonné 1960), Genel Topolojinin Temelleri (Kelley 1955) (Hatcher 2005) (Abraham ve Marsden 1978), Metrik Uzaylar, Normlu Uzaylar, Hilbert Uzayları (Dieudonné 1960), Normlu Bölmeli Cebirler (Baez 1989) (Baez 2002) (Baez 2012), Kuantum Mekaniğinin Temelleri ve Kuruluşu (Landau ve Lifshitz 1958) (Lanczos 1949).

Bu adımlar atılarak elde edilecek olan bilgilerle, kuantum mekaniği ile modern fonksiyonel analiz ve normlu bölmeli cebirleri zarif ve titiz bir şekilde ilişkilendiren üç önemli makale (Baez 1989) (Baez 2002) (Baez 2012) çalışılacak ve tezde geliştirilen matematiksel dil ve fiziksel anlayış çerçevesinde orijinal bir resim, yeni ilişkiler ve yeni bakış açıları ortaya koyulacaktır.

## 2. MANTIKSAL İFADELER

Bütün matematiksel ispatlar ifade temellidir. Bu ifadeler doğru veya yanlış olarak sınıflandırılabilen cümleler veya anlamlı semboller dizinleridir. Bu ifadelerin gerçekten doğru veya yanlış olduğunun bilinmesi gerekli değildir ama ikisinden biri olmalıdır, ikisi aynı anda olamaz. Her zaman doğru olan ifadelere totoloji; her zaman yanlış olan ifadelereyse çelişki denir. Bazı ifadeler bazen doğru, bazen yanlıştır. Bunun bir örneği  $x$  tamsayısı için  $x^2 = 1$  ifadesi  $x = 1$  veya  $x = -1$  iken doğru, diğer türlü yanlıştır. İfadelerin düzgünce anlaşılabilmesi için bağlamın düzgün kurulmuş olması ve sembollerin düzgünce tanımlanmış olması gereklidir.  $P$  ve  $Q$  iki ifade olsun.  $Q$  doğru iken  $P$  doğru ise (ve dolayısıyla  $Q$  yanlışken  $P$  yanlış ise)  $P$  ve  $Q$  ifadeleri mantıksal eşdeğerdir denir ve  $P \equiv Q$  olarak yazılır. Mantıksal bağlantılar kullanılarak verilmiş ifadelerden yeni ifadeler kurmanın birkaç değişik yolu vardır.  $P$  bir ifade ise, olumsuzlaması  $\neg P$  olarak gösterilir öyle ki  $P$  yanlış iken  $\neg P$  doğrudur. Kolayca görülebilir ki  $P \equiv \neg\neg P$ 'dir.

$P$  ve  $Q$  iki ifadeyse **bağlaçları**  $P \wedge Q$  ile gösterilir.  $P$  ve  $Q$ 'nun her ikisi de doğru iken doğrudur, diğer durumlarda yanlıştır. Açıkça

$$(P \wedge Q) \equiv (Q \wedge P).$$

Benzer olarak  $P$  ve  $Q$ 'nun **ayrılmaları** (Bartle ve Sherbert 1992)

$$P \vee Q$$

ile gösterilir. İkisinden biri doğruyken doğru, her ikisi de yanlışken yanlıştır. Açıkça

$$(P \vee Q) \equiv (Q \vee P)'dir.$$

Olumsuzlama, bağlaç ve ayrılma De Morgan Kanunu (Bartle ve Sherbert 1992) ile ilişkilidir:

$$\neg(P \wedge Q) \equiv (\neg P) \vee (\neg Q),$$

$$\neg(P \vee Q) \equiv (\neg P) \wedge (\neg Q).$$

## 2.1 Önermeler

Önermelerle verilmiş ifadelerden yenisi oluşturulabilir.

$$(P \Rightarrow Q), (P \text{ ise } Q) \text{ veya } (P, Q' \text{ yu ima eder}).$$

Yukarıdaki ifadede  $P$ 'ye sonucun hipotezi,  $Q$ 'ya çıkarımı denir (Bartle ve Sherbert 1992). Matematiksel argümanlarda hipotez doğruyken önermeler ile ilgilenilir ama yanlışlarken değil. Kabul edilmiş yöntem  $P \Rightarrow Q$  ifadesini sadece  $P$  doğru ve  $Q$  yanlışken yanlışdır; diğer durumlarda  $P \Rightarrow Q$  doğrudur.

$$P \Rightarrow Q \equiv \neg(P \wedge (\neg Q)) \equiv \neg P \vee Q$$

## 2.2 Kontrapozitif ve Ters

$P \Rightarrow Q$  önermesi,  $(\neg Q) \Rightarrow (\neg P)$  önermesine mantıksal eşdeğerdir ve  $P \Rightarrow Q$  önermesinin kontrapozitif denir. Eger bir  $P \Rightarrow Q$  önermesi verilmiş ise o zaman

$$Q \Rightarrow P$$

ifadesi kurulabilir ve buna  $P \Rightarrow Q$ 'nun tersi denir. İfade kurmanın ikili önerme ifadesi adlı son bir yolu vardır ve

$$P \Leftrightarrow Q \text{ (} P \text{ ancak ve ancak } Q \text{)}$$

olarak gösterilir ve tanımı şöyle verilir:

$$(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P).$$

Yani  $P \Leftrightarrow Q$ ,  $P$  ve  $Q$ 'nun her ikisi de doğruyken veya yanlışken doğrudur.

## 2.3 Bağlam ve Niceleyiciler

Bağlam matematikte önemlidir.  $x^2 = 1$ 'deki 1 doğal sayı, birim fonksiyon, birim matris veya bir grubun aşikâr altgrubu olabilir. Dolayısıyla bağlamın düzgün verilmiş olması gerekir.

Her  $x$  tamsayısı için  $x^2 = 1$ ,

Bir  $x$  vardır öyle ki  $x^2 = 1$ .

İlk ifade yanlış ama ikinci ifade  $x = 1$  veya  $x = -1$  için doğrudur. İlk önerme evrensel niceleyici olan "her ... için"; ikinci önerme varoluşsal niceleyici olan "vardır" içeriyor.

$\forall x$  : "her  $x$  için",

$\exists x$  : "bir  $x$  vardır".

anlamlarına gelmektedir. Bunların hangisinin önce verildiği anlamı değiştirir, dolayısıyla daha önce de belirtildiği üzere verilmek istenen anlama göre, ifade düzgün bir biçimde kurulmalıdır. Örneğin  $x, y$  tamsayıları için

$$(\forall x)(\exists y)(x + y = 0)$$

ifadesinin okuması: Her  $x$  tamsayısı için bir  $y$  tamsayısı vardır öyle ki  $x + y = 0$ 'dır.

Bir ifadeyi niceleyeciler içerecek şekilde olumsuzlamanın anlaşılması önemlidir.

(i). Bir kümedeki her  $x$  elemanının belli bir  $P$  özelliğini sağlamadığını göstermek için tek bir karşıt örnek ortaya koymak yeterlidir;

(ii). Bir kümedeki belli bir  $P$  özelliğini sağlamayan bir  $y$  elemanının var olduğunu göstermek için, o kümedeki her  $y$  elemanının o özelliği sağlamadığını göstermek gereklidir. Olumsuzlama

$$\neg(\forall x)P, (\exists x)\neg P,$$

ve benzer olarak

$$\neg(\exists y)P, (\forall y)\neg P \text{ olur.}$$

## 2.4 Doğrudan İspatlar

$P$  ve  $Q$  ifadeler olsun.  $P \iff Q$ 'nun direkt bir ispatını kurmak  $R_1, R_2, \dots, R_n$  gibi bir dizi önermeler içerir:

$$P \Rightarrow R_1 \Rightarrow R_2, \dots, R_n \Rightarrow Q$$

$R_1 \Rightarrow R_2$  ve  $R_2 \Rightarrow R_3$  doğruysa  $R_1 \Rightarrow R_3$  de doğrudur ve bu böyle devam eder.

**Teorem 2.1** Tek tamsayının karesi de tek sayıdır.

**İspat.**  $n$  bir tamsayı olmak üzere:

$P$ :  $n$  tek tamsayıdır.

Teoremin çıkarımı:

$Q$ :  $n^2$  tek tamsayıdır.

Tek tamsayının tanımına ihtiyaç var

$$R_1 : n = 2k - 1, \text{ (bir } k \text{ tamsayısı için)}$$

$$R_2 : n^2 = (2k - 1)^2 = 4k^2 - 4k + 1,$$

$$R_3 : n^2 = (4k^2 - 4k + 2) - 1,$$

$$R_4 : n^2 = 2(2k^2 - 2k + 1) - 1,$$

$$R_5 : n^2 = 2m - 1 \quad (m = 2k^2 - 2k + 1).$$

Bu yüzden  $P \Rightarrow R_1 \Rightarrow R_2 \Rightarrow R_3 \Rightarrow R_4 \Rightarrow R_5 \Rightarrow Q$  olur ve teorem ispatlanır. ■

## 2.5 Doğrudan Olmayan İspatlar

İki çeşit doğrudan olmayan ispat vardır:

- (i) Kontrapozitif ispatlar,
- (ii) Çelişkiden oluşan ispatlar.

Her ikisi de  $Q$  çıkarımının yanlış olduğu varsayımı ile başlar, diğer bir deyişle  $\neg Q$  doğrudur.

**Kontrapozitif ispatlar:**  $P \Rightarrow Q$  ispatının yerine mantıksal olarak eşdeğeri olan " $\neg Q \Rightarrow \neg P$ " ispatlanabilir.

**Teorem 2.2**  $n$  tamsayı ve  $n^2$  çift ise  $n$  çifttir.

**İspat.**  $P : n^2$  çift  $\Rightarrow Q : n$  çifttir ifadesiyle  $\neg Q : n$  tektir  $\Rightarrow \neg P : n^2$  tektir ifadesi mantıksal eşdeğerdir. Yani " $n$  tek ise  $n^2$  tektir" ki bu 2.1'de ispatlandı. ■

**Çelişkiden Oluşan İspatlar:** Bir çelişki her zaman yanlış olan bir ifadedir (" $1=0$ "

gibi).  $C$  bir çelişkiyse o zaman  $P$  ve  $Q$  gibi iki tane ifade ile kurulan aşağıdaki ifade birbirinin mantıksal eşdeğeridir:

$$(P \wedge (\neg Q)) \Rightarrow C \equiv P \Rightarrow Q$$

**Teorem 2.3**  $a > 0$  bir reel sayı olsun.  $a > 0$  ise  $1/a > 0$ 'dır.

**İspat.**  $a > 0$  ifadesinin doğru olduğu,  $1/a > 0$  ifadesinin yanlış olduğu varsayalım. Dolayısıyla,  $1/a \leq 0$  olur ama  $a > 0$  doğru olduğundan  $\mathbb{R}$ 'nin sıralı olma özelliğinden dolayı  $a(1/a) \leq 0$  elde edilir.  $1 = a(1/a)$  olduğundan  $1 \leq 0$  çıkarımı yapılır ama bu sonuç,  $1 > 0$  sonucuyla çelişir (Bartle ve Sherbert 1992). ■

### 3. KÜMELER VE GÖNDERİMLER

Bu bölümde matematiğin önemli konularından biri olan kümeler ve onların arasındaki ilişkileri incelendi. Farklı kümeler, bir ilişki neticesinde birbirleriyle bir gönderimle ilişkilendirilebilen matematiksel nesnelere.

#### 3.1 Elemanlar ve Kümeler

Küme denen matematiksel nesnelere ilgilenecektir. Kümelerin özellikleri ve birbirleriyle ilişkileri vardır. Kümeler, onlara ait olan elemanlarla belirlenir ve genelde kümeler büyük harflerle gösterilirken elemanları küçük harflerle gösterilecektir.  $x$  ve  $y$  nesnelere eleman, veya nokta, denilir.  $x = y$  ilişkisi,  $x$  ve  $y$  nesnelere birbirine eşittir anlamına gelmektedir.  $X$  bir küme ise " $x \in X$ " ifadesi  $x$  noktasının,  $X$  kümesinin elemanıdır veya  $x$  noktası  $X$ 'e aittir diye okunur. Bu ifadenin olumsuzlaması  $x \notin X$  olarak yazılır.

$X_1$  ve  $X_2$  iki küme ise  $X_1 \subset X_2$  ilişkisi  $X_1$ 'in her elemanının  $X_2$ 'nin de bir elemanı olduğu anlamına gelmektedir ve  $(\forall x)(x \in X_1 \Rightarrow x \in X_2)$  ile gösterilir.  $X_1 \subset X_2$ ,  $X_1$ 'in  $X_2$ 'nin bir altkümesi olması demektir.  $X_1 \subset X_2$  ve  $X_2 \subset X_1$  içindelikleri sağlanıyor ise  $X_1$  ve  $X_2$  kümeleri birbirine eşittir denir, yani  $X_1 = X_2$ .  $X$  kümesi ve bir  $P$  ilişkisi için  $P(x)$ 'in her  $x \in X$  için doğru olduğu  $X$ 'in bir altkümesi var ise o küme  $\{x \in X | P(x)\}$  olarak gösterilir.  $X$ 'in  $P$  özelliğini sağlayan bir altkümesi,  $Q$  özelliğini sağlayan bir altkümesi tarafından içerilmesi  $\{x \in X | P(x)\} \subset \{x \in X | Q(x)\}$  olarak gösterilir ve  $(\forall x \in X)(P(x) \Rightarrow Q(x))$  ifadesi ile eşdeğerdir. Eşit olma durumundaysa  $(\forall x \in X)(P(x) \iff Q(x))$  ifadesi geçerlidir (Dieudonné 1960).

Çokça kullanılan bazı özel kümeler şöyledir: Boş küme ve herhangi bir  $X$  kümesinin kuvvet kümesi.  $X$ 'in hiçbir eleman içermeyen altkümesine boş küme denir.  $X$ 'in boş kümesi  $\emptyset_X = \{x \in X | x \neq x\}$ 'dir. Her boş kümenin birbirine eşit olmasından dolayı sadece  $\emptyset$  ile gösterilir.  $X$ 'in kuvvet kümesi ise şöyle tanımlanır:  $X$ 'in bütün altkümelerini eleman olarak içeren, kardinalitesi her ne olursa olsun, bir kümedir ve

$\wp(X)$  veya  $2^X$  olarak gösterilir, yani her  $X_1 \subset X_2$  için  $X_1 \in 2^{X_2}$ .

### 3.2 Boole Cebri

$X_1$  ve  $X_2$  iki küme ve  $X_2 \subset X_1$  olsun.  $X_2$ 'nin  $X_1$ 'e göre tümleyeni, veya  $X_1$ 'in ve  $X_2$ 'nin farkı,  $X_2^c = X_1 - X_2 = \{x|x \in X_1 \text{ ve } x \notin X_2\}$  olarak gösterilir (Dieudonné 1960).

$X_1$  ve  $X_2$  kümeleri için, hem  $X_1$ 'in hem de  $X_2$ 'nin ortak elemanlarının kümesine  $X_1$  ve  $X_2$ 'nin kesişimi denir ve  $X_1 \cap X_2 = \{x|x \in X_1 \text{ ve } x \in X_2\}$  olarak gösterilir.  $X_1$  veya  $X_2$  kümelerinden en az birinde olan elemanların kümesine  $X_1$  ve  $X_2$  kümelerinin birleşimi denir. Bu  $X_1 \cup X_2 = \{x|x \in X_1 \text{ veya } x \in X_2\}$  olarak gösterilir (Dieudonné 1960).

Tanımlardan şu özellikler çıkar:

$$X - X = \emptyset, \quad X - \emptyset = X$$

$$X \cap X = X, \quad X \cup X = X$$

$$X \cap Y = Y \cap X, \quad X \cup Y = Y \cup X$$

$$X \subset Z, Y \subset Z \iff X \cup Y \subset Z$$

$$Z \subset X, Z \subset Y \iff Z \subset X \cap Y$$

$$X \cup (Y \cup Z) = (X \cup Y) \cup Z = X \cup Y \cup Z$$

$$X \cap (Y \cap Z) = (X \cap Y) \cap Z = X \cap Y \cap Z$$

$$X \cup (Y \cap Z) = (X \cup Y) \cap (X \cup Z)$$

$$X \cap (Y \cup Z) = (X \cap Y) \cup (X \cap Z)$$

Son olarak önemli olan bir işlem olan ayrık birleşim vardır. Ayrık birleşim iki ayrık kümenin birleşimi anlamına gelir ve  $\sqcup$  ile gösterilir. Yani  $X_1$  ve  $X_2$  kümeleri için  $X_1 \sqcup X_2 = \{x|(x \in X_1 \text{ veya } x \in X_2) \text{ ve } (X_1 \cap X_2 = \emptyset)\}$ . Yani eğer bu kümenin bir  $x$  elemanı varsa ya  $X_1$ 'in ya da  $X_2$ 'nin elemanıdır ama ikisinin de aynı anda elemanı olamaz.

### 3.3 İki Kümenin Çarpımı

Herhangi  $x \in X$  ve  $y \in Y$  objesi,  $(x, y)$  sıralı ikilisi denilen başka bir objeye tekabül ederler. Böyle iki tane sıralı ikili için  $(x, y) = (x', y')$  ilişkisi  $x = x'$  ve  $y = y'$  demektir.  $z = (x, y)$  sıralı ikilisi için  $z$ 'nin ilk elemanına (sırasıyla ikinci)  $z$ 'nin birinci (sırasıyla ikinci) projeksiyonu denir ve  $pr_1z = x$  (sırasıyla  $pr_2z = y$ ) olarak gösterilir (Dieudonné 1960).  $X_1$  ve  $X_2$  kümeleri için bütün  $(x_1, x_2)$  sıralı ikililerini içeren eşsiz bir küme vardır ve bu kümeye  $X_1$  ve  $X_2$ 'nin çarpımı veya kartezyen çarpımı denir (Kelley 1955).  $X_1$  ve  $X_2$ 'nin çarpımı  $X_1 \times X_2 = \{(x_1, x_2) | x_1 \in X_1 \text{ ve } x_2 \in X_2\}$  olarak gösterilir.  $x \in X_1$  ve  $y \in X_2$  arasındaki bir  $R(x, y)$  ilişkisi  $z \in X_1 \times X_2$ 'nin  $R(pr_1z, pr_2z)$  ilişkisi ile ilişkilidir.  $X_1 \times X_2$  kümesinin her  $(x, y)$  elemanı için  $R(x, y)$  ilişkisinin doğru olduğu bir altkümesine  $R$  ilişkisinin grafiği denir. Herhangi  $f \subset X_1 \times X_2$  bir ilişkinin grafiğidir, yani  $f = \{(x, y) \in X_1 \times X_2 | y = f(x)\}$ .

$$X \times Y = \emptyset \iff (X = \emptyset) \vee (Y = \emptyset), \quad (3.3.1)$$

$$X \times Y \neq \emptyset \iff (X \neq \emptyset) \wedge (Y \neq \emptyset). \quad (3.3.2)$$

$X_1 \subset X_2$  ve  $Y_1 \subset Y_2$  olmak üzere,

$$(X_2 \times Y_2) \cup (X_1 \times Y_2) = (X_2 \cup X_1) \times (Y_2 \cup Y_2) = X_2 \times Y_2, \quad (3.3.3)$$

$$(X_2 \times Y_2) \cap (X_1 \times Y_1) = (X_2 \cap X_1) \times (Y_2 \cap Y_1) = X_1 \times Y_1. \quad (3.3.4)$$

$X, Y$  ve  $Z$  üç küme olsun.  $X \times Y \times Z = \{(x, y, z) | x \in X \text{ ve } y \in Y \text{ ve } z \in Z\}$ 'dir. Tümevarımdan,  $n$  tane kümenin çarpımı  $X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) | x_i \in X_i\}$  olarak gösterilir. Her  $i$  için  $X_i = X$  ise çarpım  $X^n$  olarak gösterilir. Herhangi  $x \in X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$ 'nin  $i$ -inci,  $i \in \{1, \dots, n\}$ , izdüşümü  $pr_i x = x_i$ 'dir.

### 3.4 Gönderimler: Üzerine, Bire Bir ve Terslenebilir Gönderimler

$X_1$  ve  $X_2$  iki küme ve  $R(x_1, x_2)$ ,  $x_1 \in X_1$  ile  $x_2 \in X_2$  arasında bir ilişki olsun. Her  $x_1 \in X$  için  $R(x_1, x_2)$  ilişkisinin doğru olduğu ancak ve sadece bir  $x_2 \in X_2$  var ise  $R$  ilişkisine  $x_2$ 'ye fonksiyoneldir denir. Böyle bir ilişkinin grafiğine  $X_1 \times X_2$ 'de fonksiyonel grafik (veya sadece grafik) denir. Böyle bir  $f$  fonksiyonel grafiğinin  $(x'_1, x_2) \in f$  ve  $(x'_1, x'_2) \in f$  sıralı ikilileri için  $x_2 = x'_2$  olmalıdır.  $x_2$ 'ye  $f$ 'nin  $x_1$ 'deki değeridir

denir ve  $f(x_1)$  olarak gösterilir. Gönderim ile fonksiyonel grafik arasındaki fark genelde fonksiyonel grafiğin bire bir olması olduğu söylenir ama aksi belirtilmedikçe aynı kavram olarak kabul edilebilir veya bir gönderimin grafiği olarak da belirtilebilir.

$X_1 \times X_2$ 'de bir fonksiyonel grafiğe  $X_1$ 'den  $X_2$ 'ye bir gönderim veya  $X_1$ 'de tanımlanmış bir  $f$  fonksiyonu  $X_2$ 'de değerlerini alır da denir.  $f$ ,  $X_1$ 'den  $X_2$ 'ye bir gönderim ise  $f : X_1 \rightarrow X_2$  olarak gösterilir ve bu gönderimde  $X_1$ 'e tanım kümesi veya bölge;  $X_2$ 'ye değer kümesi veya kobölge denir (Dieudonné 1960). Burada  $f$  veya  $Graph(f)$ ,  $X_1 \times X_2$ 'nin bir altkümesi iken  $f(x_1)$ ,  $X_2$ 'nin bir elemanıdır, yani  $f \in 2^{X_1 \times X_2}$  ve  $f(x_1) \in X_2$ 'dir (Dieudonné 1960).  $X_1 \times X_2$ 'nin fonksiyonel grafik olan altkümeleri  $2^{X_1 \times X_2}$ 'de bir altküme oluşturur. O kümeye  $X_1$ 'den  $X_2$ 'ye gönderimlerin kümesi denir ve  $\mathcal{F}(X_1, X_2)$  veya  $X_2^{X_1}$  ile gösterilir.

$f$ ,  $X$ 'ten  $Y$ 'ye bir gönderimse, her  $y \in Y$  için  $y = f(x)$  eşitliğini sağlayan en az bir  $x \in X$  var ise  $f$  gönderimine üzerinedir denir (Kelley 1955), yani  $f(X) = Y$ .  $f(x) = f(x')$  ilişkisi  $x = x'$  eşitliğini gerektiriyor ise  $f$  gönderimine bire birdir denir.  $f$  gönderimi hem bire bir, hem de üzerine ise  $f$  gönderimine terslenebilir veya bijeksiyon denir.  $f : X \rightarrow Y$  gönderimi her zaman  $f : X \rightarrow f(X)$  üzerine bir gönderim olarak düşünülebilir.  $Y = X$  olarak alındığında

$$\begin{aligned} id_X : X &\rightarrow X & (3.4.1) \\ x &\mapsto x \quad (\forall x \in X) \end{aligned}$$

oluyorsa  $id_X$ ,  $X$  üzerinde birim gönderimdir.  $X$ 'in  $A$  ve  $B$  altkümesi ve bir  $x \in B$  için  $id_A(x) = x$  oluyorsa  $x \in A \cap B$  olmalıdır. Bu iki küme ayrıkça açıkça öyle bir  $x \in X$  yoktur. Yani  $id_A(B) = A \cap B$ 'dir.

$X$ 'ten  $Y$ 'ye terslenebilir bir gönderim varsa  $X$  ile  $Y$  eşgüçtedir denir. Bir küme  $\mathbb{N}$  doğal sayılar kümesi ile eşgüçte ise o kümeye sayılabilir sonsuzluktaki bir kümedir denir.  $\mathbb{N}$ 'nin herhangi bir altkümesi ya sonlu ya da sayılabilir sonsuzluktadır: Bunun bir örneği  $2\mathbb{N} \subset \mathbb{N}$ . Her sonsuz küme, sayılabilir sonsuzluktaki bir kümeyi içerir, örneğin:  $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$ .

### 3.5 Doğrudan, Ters Görüntüler ve Gönderimlerin Bileşimi

$f : X \longrightarrow Y$  olmak üzere  $Y$ 'nin bütün  $f(x)$ 'leri içeren  $f(X) = \{f(x) \in Y | x \in X\}$  altkümesine  $X$ 'in  $f$  altında görüntüsü denir.  $f$ 'nin görüntüsü  $Im(f) = \{f(x) | x \in dom(f)\}$  olarak da gösterilir.  $f|_A : A \subset X \longrightarrow Y$  gönderimineyse  $f$ 'nin  $A$ 'ya kısıtlanması denir ve tanım kümesini (bölgesini) sadece  $x \in A$  noktalarına kısıtlar:  $f|_A = \{(x, f(x)) | x \in A\}$  ve bu kısıtlamanın eşdeğeri  $f \cap (A \times Y)$ 'dir (Kelley 1955).  $X$ 'in herhangi bir  $B$  altkümesi için  $y = f(x)$  olan bir  $x \in B$  elemanı vardır özelliği ile tanımlanan  $Y$ 'nin altkümesine  $B$ 'nin  $f$  altında görüntüsü denir (Kelley 1955).  $Y$ 'nin bu altkümesi  $f(B) = \{f(x) | x \in B\}$  olarak tanımlanır ve şu özellikleri sağlar (Dieudonné 1960):

$$f(B) = pr_2(f \cap (B \times Y)) \quad (3.5.1)$$

$$B = \emptyset \iff f(B) = \emptyset \quad (3.5.2)$$

$$A \subset B \Rightarrow f(A) \subset f(B) \quad (3.5.3)$$

$$f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B) \quad (3.5.4)$$

$$f(A \cup B) = f(A) \cup f(B). \quad (3.5.5)$$

$Y$ 'nin herhangi bir  $C$  altkümesi için  $X$ 'in  $f(x) \in C$  ile tanımlanmış bir altkümesine  $f$  altında  $C$ 'nin ters görüntüsüdür denir ve  $f^{-1}(C) = \{x | f(x) \in C\}$  olarak tanımlanır ve şu özellikleri sağlar (Dieudonné 1960):

$$f^{-1}(C) = pr_1(f \cap (X \times C)) \quad (3.5.6)$$

$$C \subset D \Rightarrow f^{-1}(C) \subset f^{-1}(D) \quad (3.5.7)$$

$$f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D) \quad (3.5.8)$$

$$f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D). \quad (3.5.9)$$

$f$ 'nin bir gönderim olması,  $f^{-1}$ 'nin de bir gönderim olduğu anlamına gelmez.  $f^{-1}$ 'nin bir gönderim olabilmesi için her  $y \in Y$  için en az bir  $x \in X$  olması ve her  $y \in Y$  için sadece ama sadece bir  $x \in X$  olması gereklidir. Yani  $f$  gönderimi terslenebilir ise  $f^{-1}$  de bir gönderimdir ve ona  $f$ 'nin ters gönderimi denir.

$X_1$ ,  $X_2$  ve  $X_3$  kümeleri için  $f$ ,  $X_1$ 'den  $X_2$ 'ye;  $g$ ,  $X_2$ 'den  $X_3$ 'e gönderimler olsun. O zaman  $g \circ f$ ,  $X_1$ 'den  $X_3$ 'ye bir gönderimdir ve ona  $g$  ile  $f$ 'nin bileşimi (ya da bileşkesi) denir.  $f$  ve  $g$  gönderimleri için  $f$  ve  $g$ 'nin her ikisi de bire bir (sırasıyla üzerine, terslenebilir) ise  $g \circ f$  de bire birdir (sırasıyla üzerine, terslenebilir).  $A \subset X_1$ ,  $C \subset X_3$  ve  $h = g \circ f$  olsun, o zaman

$$h(A) = g(f(A)) \quad (3.5.10)$$

$$h^{-1}(C) = f^{-1}(g^{-1}(C)). \quad (3.5.11)$$

olarak elde edilir.

### 3.6 Aileler

Bir indis kümesi  $L$  ve soyut bir  $X$  kümesi için  $L$ 'den  $X$ 'e bir  $f$  gönderimine  $X$ 'in elemanlarının bir ailesi denir ve aşağıdaki gibi verilir:

$$\begin{aligned} f : L &\longrightarrow X \\ \lambda &\longmapsto f(\lambda) = x_\lambda. \end{aligned}$$

$X$ 'in elemanlarının bir ailesi  $(x_\lambda)_{\lambda \in L}$  olarak da yazılır. Bir  $(x_\lambda)_{\lambda \in L}$  ailesi ve herhangi bir  $M \subset L$  indis kümesi için  $(x_\lambda)_{\lambda \in M}$  ailesine,  $(x_\lambda)_{\lambda \in L}$ 'nin altailesi denir. Alışıldık bir durum olması açısından ailelere bir örnek vermek gerekirse ailelerin yaygın bir örneği dizilerdir ve bu  $L \subset \mathbb{N}$  durumuna tekabül eder öyle ki genelde bir dizi  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  olarak yazılır ( $(x_n)_{n \in L \subset \mathbb{N}}$  veya sadece  $(x_n)$  olarak yazıldığı da olur).

$X$  bir küme ve  $(A_\lambda)_{\lambda \in L}$ ,  $X$ 'in altkümeler ailesi (Kelley 1955) olsun, yani her  $\lambda \in L$  için  $A_\lambda \subset X$ 'dir. Bu aslında  $f : L \longrightarrow \wp(X)$  demektir.  $x \in \bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda$  ise o zaman en az bir  $\lambda' \in L$  vardır öyle ki  $x \in A_{\lambda'}$ . Bu  $A_\lambda$ 'ların her biri sayılabilir sonsuzluktaysa  $\bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda$  birleşimi de sayılabilir sonsuzluktaadır. Her  $\lambda \in L$  için  $x \in A_\lambda$  oluyor ise açıkça  $x \in \bigcap_{\lambda \in L} A_\lambda$  olur ve bunlardan aşağıdaki eşitlikler elde edilir:

$$\left(\bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda\right)^c = \bigcap_{\lambda \in L} A_\lambda^c \quad (3.6.1)$$

$$\left(\bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda\right) \cap \left(\bigcup_{\mu \in M} B_\mu\right) = \bigcup_{(\lambda, \mu) \in L \times M} (A_\lambda \cap B_\mu) \quad (3.6.2)$$

$$\left(\bigcap_{\lambda \in L} A_\lambda\right) \cup \left(\bigcap_{\mu \in M} B_\mu\right) = \bigcap_{(\lambda, \mu) \in L \times M} (A_\lambda \cup B_\mu) \quad (3.6.3)$$

$$f\left(\bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda\right) = \bigcup_{\lambda \in L} f(A_\lambda) \quad (3.6.4)$$

(3.6.4)'de  $f$ ,  $X$ 'ten  $Y$ 'ye bir gönderim ve  $(A_\lambda)_{\lambda \in L}$  ailesi,  $X$ 'in altkümeler ailesidir.

$$f^{-1}\left(\bigcup_{\lambda \in L} C_\lambda\right) = \bigcup_{\lambda \in L} f^{-1}(C_\lambda) \quad (3.6.5)$$

(3.6.5)'de  $f$ ,  $X$ 'ten  $Y$ 'ye bir gönderim ve  $(C_\lambda)_{\lambda \in L}$  ailesi,  $Y$ 'nin altkümeler ailesidir.

## 4. GENEL TOPOLOJİ

### 4.1 Topolojik Uzay

Topolojik uzay bir  $X$  kümesi ve  $X$  kümesinin açık kümelerinin bir  $\mathcal{O} \subset 2^X$  koleksiyonundan oluşur.  $(X, \mathcal{O})$  çiftine (veya sadece  $X$ 'e) topolojik uzay denir ve şu özellikleri sağlarlar:

- (i).  $\emptyset \in \mathcal{O}$  ve  $X \in \mathcal{O}$ ,
- (ii). Sonlu bir  $L$  indis kümesinin her  $\lambda \in L$  elemanı için  $U_\lambda \in \mathcal{O}$  ise  $\bigcap_{\lambda \in L} U_\lambda \in \mathcal{O}$ ,
- (iii). Sonlu veya sonsuz bir  $L$  indis kümesinin her  $\lambda \in L$  elemanı için  $U_\lambda \in \mathcal{O}$  ise  $\bigcup_{\lambda \in L} U_\lambda \in \mathcal{O}$ .

Topolojik uzayın açıkları topolojinin elemanlarıdır, yani  $U$  açıktır ancak ve ancak  $U \in \mathcal{O}$  ise.  $X$ , bir topolojik uzay ve  $B$  de onun bir bazı olsun. O zaman  $X$ 'in her açığı,  $B$  bazının elemanlarının birleşimlerinden oluşur. Topolojiye birinci sayılabilir denir eğer her  $x \in X$  için  $x$ 'in  $(U_\lambda)_{\lambda \in L}$  komşuluklar ailesi vardır öyle ki  $x$ 'in her  $U$  komşuluğu için  $U_\lambda \subset U$  içermesini sağlayan bir  $\lambda \in L$  vardır. O topolojinin sayılabilir bir bazı var ise ikinci sayılabilir denir. Herhangi bir  $X$  topolojik uzay için kapalı kümeler,  $U_\lambda \in \mathcal{O}$  olmak üzere,  $U_\lambda^c$ 'lerdir.  $X$  topolojik uzayının bir  $A$  altkümesi için,  $A$  üzerindeki görelî topoloji

$$\mathcal{O}_A = \{U_\lambda \cap A \mid (\forall \lambda \in L)(U_\lambda \in \mathcal{O})\}$$

olarak tanımlanır ve açıkça  $\mathcal{O}_A$ ,  $A$  üzerinde bir topolojidir.

$X$  topolojik uzayındaki bir  $x \in X$  noktasının açık bir komşuluğu  $x$ 'i içeren bir  $U$  açık kümesidir, yani  $x \in U \in \mathcal{O}$ . Benzer olarak bir  $A$  kümesinin bir açık komşuluğu,  $A$  kümesini içeren bir  $U \in \mathcal{O}$  açık kümesidir, yani  $A \subset U$ ; komşulukları ise, sırasıyla,  $x \in X$  noktasını ve  $A$  kümesini içeren bir açığı içeren bir kümedir.  $X$  topolojik bir uzay ve  $(x_n)$ ,  $X$ 'te noktalar dizisi olsun. Dizi yakınsıyordur denir eğer bir  $x$  noktası var ise öyle ki bu  $x$  noktasının her  $U$  komşuluğu için  $n \geq N$  koşulunu sağlayan bir  $N$  sayısı vardır öyle ki  $x_n \in U$ . Bu durumda  $(x_n)$  dizisinin  $x$ 'e yakınsadığı söylenir

ve bu  $x_n \rightarrow x$  olarak da gösterilir.

$X$  ve  $Y$  topolojik uzaylar olsun ve  $X \times Y = \{(x, y) | x \in X \text{ ve } y \in Y\}$ .  $X \times Y$  çarpım topolojisi, her  $\lambda \in L$  ve her  $\mu \in M$  için  $X \supset U_\lambda \in \mathcal{O}_X$  ve  $Y \supset V_\mu \in \mathcal{O}_Y$  olmak üzere,  $U_\lambda \times V_\mu$  şeklindeki,  $(\lambda, \mu) \in L \times M$ , açık kümelerin birleşimlerinden oluşurlar. Yani  $U_\lambda \times V_\mu$  kümeleri, o uzayın bir bazını oluşturur.

**Tanım 4.1**  $X$  bir topolojik uzay ve  $B \subset X$  olsun.  $B$  kümesinin kapanışı  $B'$ 'yi içeren en küçük kapalı kümedir ve  $\overline{B}$ , veya  $cl(B)$ , ile gösterilir.

**Tanım 4.2** Bir  $X$  topolojik uzayının herhangi bir  $C$  altkümesinin bir  $x$  noktasının her komşuluğu ile kesişiminde  $x$  noktasından başka bir elemanı var ise  $x$  noktasına  $C$ 'nin yığılma noktası veya limit noktasıdır denir.

O zaman  $x$ ,  $B$ 'nin bir yığılma noktasıdır ancak ve ancak  $x$ 'in her  $U$  komşuluğu için  $U \cap (B - \{x\}) \neq \emptyset$ . Bir  $X$  topolojik uzayının  $B$  altkümesinin yığılma noktalarının kümesi  $B'$  ile gösterilir ve o  $B$  altkümesi kapalıdır ancak ve ancak  $B'$  kümesini içeriyorsa (Kelley 1955).

**Tanım 4.3**  $X$  bir topolojik uzay ve  $B \subset X$  olsun.  $B$  kümesinin içi,  $B$ 'nin içerdiği en büyük açık kümedir ve  $\overset{\circ}{B}$ , veya  $int(B)$ , ile gösterilir.  $B$ 'nin içi  $B$ 'nin içerdiği açık kümelerin birleşimidir.

**Tanım 4.4**  $X$  bir topolojik uzay ve  $A \subset X$  olsun.  $A$ 'nın sınırı,

$$\partial A = \overline{A} \cap \overline{A^c}$$

olarak tanımlanır.

Yukarıdaki tanımlardan şunlar çıkar:

- (i).  $x \in \overline{A} \iff x$ 'in her  $U$  komşuluğu için  $U \cap A \neq \emptyset$ ;
- (ii).  $x \in \overset{\circ}{A} \iff x$ 'in bir  $U$  komşuluğu vardır öyle ki  $U \subset A$ ;
- (iii).  $x \in \partial A \iff x$ 'in her  $U$  komşuluğu için  $U \cap A \neq \emptyset$  ve  $U \cap A^c \neq \emptyset$ .

**Tanım 4.5**  $X$  bir topolojik uzay olsun. Bir  $x \in X$  noktası izoledir denir ancak ve ancak tek nokta kümesi  $\{x\}$  açık ise.  $X$  topolojik uzayındaki bütün noktalar izole ise  $X$  topolojik uzayının topolojisine ayrık topoloji, veya en ince topoloji, denir ( $\mathcal{O} = 2^X$ ).  $\mathcal{O} = \{\emptyset, X\}$  durumuna aşikâr topoloji, veya en kaba topoloji, denir.

$X$ 'in bir  $A$  altkümesi  $X$ 'te yoğundur denir ancak ve ancak  $\bar{A} = X$  ise; hiçbir yerde yoğun değildir denir ancak ve ancak  $\bar{A}^c = X$  ise.  $X$ , sayılabilir yoğun altkümeyle sahipse  $X$ 'e ayrılabilir denir.

**Tanım 4.6** Bir  $X$  topolojik uzayındaki birbirinden farklı her iki noktanın ayrık komşulukları var ise  $X$  topolojik uzayına Hausdorff'dur denir.

**Önerme 4.1**  $X$  topolojik uzayı Hausdorff'dur  $\iff \Delta = \{(x, x) \in X \times X\}$  kümesi  $X \times X$  çarpım topolojisinde kapalıysa.

**İspat.**  $\Delta$  kapalı ise  $X \times X - \Delta = \Delta^c = \{(x, y) \in X \times X | x \neq y\}$  kümesi  $X \times X$  çarpım topolojisinde açıktır ve her noktasının bir komşuluğunu içerir öyle ki  $U_x, U_y \subset \Delta^c$ ,  $x \in X$  ve  $y \in X$ 'nin komşulukları olsun. Bu komşulukların kesişiminin boş olmadığı kabul edilsin. O zaman bir  $z \in U_x \cap U_y$  noktası vardır öyle ki  $(z, z) \in U_x \times U_y \subset \Delta$ . Son ifade  $\Delta \cap \Delta^c \neq \emptyset$  anlamına gelir ve bu bir çelişkidir. Tersine,  $X$  topolojik uzayı Hausdorff olsun. O zaman her  $x, y \in X$  ayrık nokta çiftinin  $U_x$  ve  $U_y$  ayrık komşulukları vardır öyle ki  $(U_x \times U_y) \cap \Delta = \emptyset$ . ■

**Tanım 4.7**  $X$  topolojik uzayındaki her iki kapalı kümenin ayrık komşulukları var ise  $X$  topolojik uzayına normaldir denir.

Süreklilik, topolojik uzayların arasında topolojiyi taşımak için önemli bir kavramdır.  $X$  ve  $Y$  topolojik uzayları ve bu iki uzay arasında bir  $f : X \rightarrow Y$  gönderimi olsun.  $f(x)$  noktasının  $Y$ 'deki her  $V$  komşuluğu için  $X$ 'teki bir  $x$  noktasının  $f(U) \subset V$  içindeliğini sağlayan bir  $U$  komşuluğu varsa  $f$  gönderimi  $x \in X$  noktasında süreklidir ve  $f$ , her  $x \in X$  noktasında sürekli ise  $f$ ,  $X$ 'te süreklidir denir. Bunun eşdeğeri, her  $V \in \mathcal{O}_Y$  için  $f^{-1}(V) = \{x \in X | f(x) \in V\} \in \mathcal{O}_X$  ifadesidir (Abraham ve Marsden 1978).

**Önerme 4.2**  $f : X \longrightarrow Y$  gönderimi süreklidir ancak ve ancak  $X$  topolojik uzayının her  $C$  altkümesi için  $f(\overline{C}) \subset \overline{f(C)}$  içermesi sağlanıyorsa.

Süreklilik tanımlandığına göre bu topolojik uzaylar arasında topolojik yapılarının nasıl korunduğunun gösterilmesi elzemdir.

**Tanım 4.8**  $f$  gönderimi,  $X$  ve  $Y$  topolojik uzayları arasında terslenebilir bir gönderim olsun.  $f$  ve  $f^{-1}$  süreklirse  $f$  gönderimine homeomorfizm (topolojik izomorfizm) ve  $X$  ile  $Y$  topolojik uzaylarının da birbirine homeomorfik olduğu veya topolojik olarak eşdeğer uzaylar olduğu söylenir.

## 4.2 Kompakt Topolojik Uzaylar

Topolojinin en önemli konularından biri olan kompaktlığı tanımlamadan önce kompaktlığı anlamak için gereken ön bilgilerin sunulması gerekmektedir.

**Tanım 4.9**  $X$  kümesinin  $(U_\lambda)_{\lambda \in L}$  altkümeler ailesi

$$X = \bigcup_{\lambda \in L} U_\lambda \quad (4.2.1)$$

eşitliğini sağlıyor ise  $(U_\lambda)_{\lambda \in L}$  ailesine  $X$ 'in örtüsüdür denir.

Eğer  $L$  indis kümesi sonlu ise  $(U_\lambda)_{\lambda \in L}$  ailesi  $X$  kümesinin bir sonlu örtüsüdür. Her  $\lambda \in L$  için  $U_\lambda$  açık küme ise  $(U_\lambda)_{\lambda \in L}$  ailesi,  $X$  kümesinin bir açık örtüsüdür.  $X$  kümesinin bir  $(U_\lambda)_{\lambda \in L}$  örtüsü için  $H \subset L$  sağlandığında  $(U_\lambda)_{\lambda \in H}$  de  $X$  kümesinin bir örtüsü oluyor ise  $(U_\lambda)_{\lambda \in H}$  ailesine  $X$  kümesinin altörtüsüdür denir.  $(U_\lambda)_{\lambda \in L}$  ve  $(V_i)_{i \in I}$  aileleri  $X$  topolojik uzayının iki örtüsü olduğu farz edilsin. Her  $U_\lambda$  için  $U_\lambda \subset V_i$  içindeliğini sağlayan bir  $V_i$  varsa  $(U_\lambda)_{\lambda \in L}$  örtüsünün  $(V_i)_{i \in I}$  örtüsünün inceltmesi olduğu söylenir.  $X$  topolojik uzayının bir  $(U_\lambda)_{\lambda \in L}$  örtüsüne **yerel sonludur** denir ancak ve ancak her  $x \in X$  noktasının bir  $U$  komşuluğu vardır öyle ki bu  $U$  komşuluğu sonlu sayıda  $U_\lambda$  ile kesişir. Örtülerin bu özellikleri kompaktlık için gerekli bilgilerdir.

**Tanım 4.10**  $X$  topolojik uzayının her  $(U_\lambda)_{\lambda \in L}$  açık örtüsünün sonlu bir  $(U_\lambda)_{\lambda \in H}$  altörtüsü var ise  $X$  topolojik uzayına kompakttır denir.

$X$  topolojik uzayının kendisi kompakt olmasa bile kompakt olan bir altküme içerebilir. İçerdiği durumda ise,  $X$ 'in  $A$  altkümesi kompakttır ancak ve ancak  $A \subset X$  görelî topolojide kompakt ise. Dolayısıyla  $X$ 'in her kompakt kümesi  $A$  ve  $(U_\lambda)_{\lambda \in L}$  örtüsü için

$$A \subset \bigcup_{\lambda \in L} U_\lambda \quad (4.2.2)$$

sağlandığında

$$A \subset \bigcup_{\lambda \in H} U_\lambda \quad (4.2.3)$$

içermesini sağlayan sonlu bir  $(U_\lambda)_{\lambda \in H}$  altörtüsü vardır.

O zaman,  $X$  kompakt topolojik bir uzay ve  $f$ ,  $X$  ile  $Y$  topolojik uzayları arasında sürekli bir gönderimse  $X$  kompaktken  $f(X)$  de  $Y$ 'de kompakttır.  $X$  topolojik uzayının her  $x \in X$  noktasının kapanışı kompakt olan bir komşuluğu var ise  $X$  topolojik uzayına **yerel kompakttır** denir.

**Teorem 4.1 (Bolzano-Weierstrass Teoremi)** Birinci sayılabilir kompakt bir  $X$  topolojik uzayının her dizisinin yakınsak bir alt dizisi vardır .

$X$  topolojik uzayı Hausdorff ise  $X$  topolojik uzayının her kompakt altkümesi kapalıdır ve her kompakt Hausdorff uzay normaldir.  $X$  topolojik uzayı, yerel kompakt bir Hausdorff uzayına homeomorfik olan bir Hausdorff uzayı olduğunda  $X$  topolojik uzayı yerel kompakttır.

**Tanım 4.11**  $X$  topolojik uzayına parakompakttır denir ancak ve ancak  $X$  topolojik uzayı Hausdorff ve her açık örtüsünün, açık kümelerden oluşan yerel sonlu bir inceltmesi var ise.

**Teorem 4.2** İkinci sayılabilir, yerel kompakt Hausdorff uzaylar parakompakttır ve her parakompakt uzay normaldir (Abraham ve Marsden 1978).

**Tanım 4.12** Reel-değerli bir  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  fonksiyonun desteği

$$\text{supp}(f) = \overline{\{x \in X \mid f(x) \neq 0\}} \quad (4.2.4)$$

olarak tanımlanır.

$X$  üzerinde **birin bölüşümü**  $(f_i)_{i \in I}$ , her  $i \in I$  için  $f_i : X \rightarrow [0, 1]$  olan sürekli bir gönderimler ailesidir öyle ki,

(i).  $(\text{supp}(f_i))$  yerel sonludur.

(ii). Her  $x \in X$  için  $\sum_{i=1} f_i(x) = 1$ .

Bir  $(f_i)$  birin bölüşümünün  $\text{supp}(f_i)$  desteği,  $X$ 'in bir  $(U_\lambda)_{\lambda \in L}$  örtüsünün inceltmesi oluyor ise  $(f_i)$ ,  $(U_\lambda)_{\lambda \in L}$  örtüsünün subordinatıdır denir.

### 4.3 Bağlantılı Uzaylar

$X$  topolojik uzayının hem açık, hem kapalı olan kümeleri sadece  $\emptyset$  ve  $X$ 'in kendisi ise  $X$  topolojik uzayına **bağlantılıdır** denir. Bağlantılılığın bir eşdeğer tanımı,  $X$  topolojik uzayının iki tane ayrık, her ikisi de aynı anda açık veya kapalı, altkümesinin birleşimi olarak yazılamıyor olmasıdır.  $X$  topolojik uzayının bir  $A$  altkümesinin bağlantılı olması için onun görelî topolojide bağlantılı olması gerekir. Topolojik uzaylar arasında bağlantılılığı taşımak için sürekli ve birebir olan bir  $f : X \rightarrow Y$  gönderimi lazımdır öyle ki  $X$ 'in herhangi bağlantılı  $A$  altkümesi için  $f(A)$  da bağlantılıdır.

$X$  bir topolojik uzay ve  $I = [0, 1] \subset \mathbb{R}$  olsun. Sürekli bir  $f : I \rightarrow X$  gönderimine  $X$ 'te bir yay denir.  $f(0) = x$  ve  $f(1) = y$  olduğunda  $f$ 'nin  $x$  ve  $y$ 'yi birbirine bağladığı söylenir.  $X$ 'in her  $x$  ve  $y$  noktası  $X$ 'teki bir yay ile bağlanabilirse  $X$ 'e yaysal bağlantılıdır denir. Her noktanın görelî topolojide yaysal bağlantılı bir komşuluğu var ise yerel yaysal bağlantılı bir uzaydır. Her yaysal bağlantılı uzay bağlantılıdır. Bağlantılı bir uzay yerel yaysal bağlantılı ise yaysal bağlantılıdır.

$X$  topolojik uzayının üzerinde  $c(0) = c(1) = x \in X$ 'i sağlayan bir  $c : [0, 1] \rightarrow X$  sürekli gönderimi varsa  $c$ 'ye  $X$ 'te  $x$  noktasında temellenmiş ilmek denir. Her  $t \in I = [0, 1]$  için  $H(t, 0) = c(t)$  ve  $H(t, 1) = x$ 'i sağlayan sürekli bir  $H : I \times I \rightarrow X$  gönderimi var ise  $c$  ilmeğine büzülebilirdir denir (Abraham ve Marsden 1978).  $X$ 'teki her ilmek büzülebilir ise  $X$  uzayı basit bağlantılıdır.

**Tanım 4.13**  $X$  topolojik uzayının bir  $A$  bileşeni  $X$ 'in boş-olmayan bir altkümesidir öyle ki  $X$ 'in  $A$ 'yı içeren bağlantılı tek altkümesi  $A$ 'nın kendisidir.

**Tanım 4.14**  $X$  topolojik uzayının her  $x \in X$  noktasının  $x$ 'i içeren bağlantılı komşuluğunu içeren açık bir komşuluğu var ise yerel bağlantılıdır denir.

**Önerme 4.3**  $X$ , bir topolojik uzay ve  $A \subset X$  olsun.  $A \subset B \subset \bar{A}$  ise  $B$  bağlantılıdır.

**İspat.**  $B$  bağlantılı değilse,  $U_1, U_2 \subset B$  açık olmak üzere,  $B = U_1 \sqcup U_2$  olarak yazılabilir. O zaman  $B = (U_1 \cap B) \cup (U_2 \cap B)$ .  $B \subset \bar{A}$  ve kapanışlığın tanımından,  $U_1 \cap A \neq \emptyset$  ve  $U_2 \cap A \neq \emptyset$  olur, yani  $A$  bağlantılı değildir. ■

#### 4.4 Bölüm Topolojisi

Bölüm topolojisini tanımlamadan önce eşdeğerlik ilişkisinin ve eşdeğerlik sınıfının tanımları verilecektir.

**Tanım 4.15**  $X$  bir küme ve  $\sim$ ,  $X$  kümesinin üzerinde bir eşdeğerlik ilişkisi olsun öyle ki her  $x_1, x_2, x_3 \in X$  için

$$(i) \ x_1 \sim x_1,$$

$$(ii) \ x_1 \sim x_2 \iff x_2 \sim x_1,$$

$$(iii) \ x_1 \sim x_2 \text{ ve } x_2 \sim x_3 \text{ ise } x_1 \sim x_3.$$

**Tanım 4.16**  $x$ 'in eşdeğerlik sınıfı  $[x]$  ile gösterilir ve o,  $x$  noktası ile eşdeğerlik ilişkisi olan noktalar ile tanımlanır, yani  $[x] = \{x' \in X | x \sim x'\}$ .

$X$  kümesi üzerindeki eşdeğerlik sınıflarının kümesi  $X \setminus \sim$  ile gösterilir ve

$$\begin{aligned} \pi : X &\longrightarrow X \setminus \sim \\ x &\longmapsto [x] \end{aligned}$$

gönderimine kanonik projeksiyon denir (Abraham ve Marsden 1978).  $\pi^{-1}(U)$ ,  $X$ 'te açık olmak üzere  $X \setminus \sim$  üzerinde  $U \subset X \setminus \sim$ 'lar ile oluşturulan topolojiye bölüm topolojisi denir (Abraham ve Marsden 1978).

**Tanım 4.17**  $\alpha \in \mathbb{R} - \{0\}$  olmak üzere  $\mathbb{R}^n - \{0\}$  üzerinde  $x \sim y \iff x = \alpha y$  ile tanımlanan bir eşdeğerlik ilişkisi olsun. O zaman  $\mathbb{R}^n - \{0\} \setminus \sim$ ,  $\mathbb{R}P^{n-1}$  ile gösterilir ve ona  $(n - 1)$  boyutlu reel projektif uzay denir.

$(n - 1)$  boyutlu kompleks projektif uzay  $(\mathbb{C}^n - \{0\}) \simeq \mathbb{C}P^{n-1}$  da benzer şekilde tanımlanır.

## 5. METRİK UZAYLAR

Metrik uzaylar, özel bir topolojik uzaydır öyle ki topolojinin açık kümeleri, mesafe fonksiyonlarıyla tanımlanan açık yuvarlar ile anlatılır. Metrik uzaylarda, topolojinin açıkları, yuvarlar sayesinde daha anlaşılır ve somut bir hâl alır. Bundan dolayı ilk önce metrik uzayı tanımlayan metrik anlatıldıktan sonra açık ve kapalı yuvarlar tanımlandı. Daha sonrasında metrik uzaylarda görelî topoloji tanımlandı ve görelî topolojideki komşulukları incelendi. Devamında, topolojide tanımlanmış sürekli gönderimler metrik uzaylar cinsinden, dolayısıyla mesafe fonksiyonları cinsinden yazıldı ve yine topolojinin önemli bir konusu olan kompaktlık, yuvarlar cinsinden yazılıp en son çarpım topolojisinin metrik yapısına bakıldı.

### 5.1 Metrik Uzay

Bir metrik uzay, bir  $X$  kümesi ile bu  $X$  kümesinin elemanları arasındaki bir  $d$  mesafe fonksiyonu, ya da metriği, ile tanımlanır öyle ki  $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  ve burada  $(X, d)$  çiftine veya bir karışıklık yaratmayacak ise sadece  $X$ 'e metrik uzay denir.  $X$  metrik uzayı şu özellikleri sağlar:

- (i). Herhangi  $x, y \in X$  için  $d(x, y) \geq 0$ ,
- (ii).  $d(x, y) = 0 \iff x = y$ ,
- (iii). Herhangi  $x, y \in X$  için  $d(x, y) = d(y, x)$ ,
- (iv). Herhangi  $x, y, z \in X$  için  $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ .

Özellik (iv)'e üçgen eşitsizliği denir ve tümevarımdan,  $n > 2$  için

$$d(x_1, x_n) \leq d(x_1, x_2) + d(x_2, x_3) + d(x_3, x_4) + \dots + d(x_{n-1}, x_n) \quad (5.1.1)$$

eşitsizliği elde edilir.

**Tanım 5.1**  $p$  asal bir sayı olsun. Herhangi  $n > 0$  doğal sayısı için  $v_p(n)$ ,  $n$ 'nin asal sayılara ayrışımında  $p$ 'nin üssü olarak tanımlanır. O zaman herhangi  $n, n' > 0$  tamsayı çifti için

$$v_p(nn') = v_p(n) + v_p(n') \quad (5.1.2)$$

ve  $x = \pm \frac{r}{s} \in \mathbb{Q}$  ve  $r, s > 0$  için

$$v_p(x) = v_p(r) - v_p(s) \quad (5.1.3)$$

olur.

**Tanım 5.2** Herhangi  $x, y \in \mathbb{Q}$  çifti için,

$$d(x, y) = p^{-v_p(x-y)}$$

$\mathbb{Q}$  üzerinde bir mesafedir ve bu mesafeye  $p$ -adik mesafe denir.

**Örnek 5.1 (Metrik Örnekleri)** (i). Euclid metriğindeki  $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$  ve  $y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$  noktaları arasındaki mesafe  $d(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^3 (x_i - y_i)^2}$  olarak verilir.

(ii). Keyfi bir  $A$  kümesi için  $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}(A) = \{f | f : A \rightarrow \mathbb{R} \wedge \sup_{x \in A} |f(x)| < \infty\}$  üzerinde,  $f, g \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}(A)$  için

$$d : \mathcal{B}_{\mathbb{R}}(A) \times \mathcal{B}_{\mathbb{R}}(A) \rightarrow \mathbb{R}$$
$$(f, g) \mapsto d(f, g) = \sup_{x \in A} |f(x) - g(x)|$$

$\mathcal{B}_{\mathbb{R}}(A)$  üzerinde bir mesafe fonksiyonudur.

(iii). Ayrık metrik,  $x = y$  olduğu durumda  $d(x, y) = 0$ ,  $x \neq y$  olduğu durumda ise  $d(x, y) = 1$  olur.

Şimdi metrik uzayın yuvarlarının yapısına bakılması lazım. En çok ihtiyaç duyulan açık yuvar olacaktır çünkü o açık yuvarlar, topolojinin açıklarıdır ve o metrik uzay için bazlarıdır.  $(X, d)$  metrik uzayının bir  $a \in X$  merkezli ve bir  $0 < r \in \mathbb{R}$  yarıçaplı açık yuvarı

$$B(a; r) = \{x \in X | d(a, x) < r\}$$

olarak tanımlanır ve  $X$ 'in bir  $U$  açığı varsa her  $x \in U$  için bir açık yuvarı  $x \in B(x; r_x) \subset U$  vardır öyle ki bu yuvar  $x \in X$ 'in  $r_x$  komşuluğudur (Dieudonné 1960). Böyle bir metrik uzay için kapalı bir yuvar kapalı bir kümedir, dolayısıyla bir açık kümenin kapanışdır ve "sınır"larını içerir:

$$\overline{B}(a; r) = \{x \in X | d(a, x) \leq r\}.$$

Bir metrik uzayda bir küre  $S(a; r) = \{x \in X | d(a, x) = r\}$  olarak tanımlanır ve  $a \in X$  merkezli açık ve kapalı yuvarların aksine bir küre  $a \in X$  noktasını içermek zorunda değildir. Yuvarları somutlaştırmak için birkaç örnek verilsin:  $a \in \mathbb{R}$  noktası etrafında  $B(a; r) = ]a - r, a + r[$  hâlini alır, dolayısıyla bu  $\mathbb{R}$ 'nin açık bir aralığıdır. O açık aralığa  $\{a - r, a + r\}$  noktaları eklenirse, ki bu noktalar  $S(a; r)$  kümesinin kendisidir,  $\overline{B}(a; r)$  kapalı yuvarı elde edilir.  $a \in \mathbb{R}^3$  için bunlara bakıldığında  $B(a; r)$  yuvarı, 3-boyutlu bir küredir ve yüzeyi haricindeki noktaları içerir;  $\overline{B}(a; r)$  yuvarıysa yüzeyi dahil bütün noktaları içerirken  $S(a; r)$ , sadece küre yüzeyindeki noktaları içerir. Bir  $X$  metrik uzayının  $A$  altkümesinin çapı

$$\delta(A) = \sup_{x, y \in A} d(x, y) \quad (5.1.4)$$

olarak tanımlanır ve  $A \subset B \subset X$  ise  $\delta(A) \leq \delta(B)$  olur (Dieudonné 1960).

$(X, d)$  metrik uzayında,  $X$ 'in açık bir  $A$  altkümesinin her  $x \in A$  noktası için bir  $r_x > 0$  reel sayısı vardır öyle ki  $B(x; r_x) \subset A$  özelliğini sağlar.  $A$ 'nın komşuluklarının temel bir sistemiye  $A$ 'nın bir  $(U_\lambda)_{\lambda \in L}$  komşuluklar ailesidir öyle ki  $A$ 'nın herhangi bir komşuluğu  $U_\lambda$  kümelerinden birini içerir.

## 5.2 İzometri

$(X, d_X)$  ve  $(Y, d_Y)$  iki metrik uzay olsun. Her  $s, t \in X$  için

$$d_Y(f(s), f(t)) = d_X(s, t) \quad (5.2.1)$$

eşitliğini sağlayan  $X$ 'ten  $Y$ 'ye terslenebilir bir  $f$  gönderimi var ise  $f$  gönderimine izometri denir ve açıkça bir izometri, metrik uzayların elemanlarının arasındaki mesafeyi korur.  $f$  terslenebilir olduğundan  $f^{-1} : Y \rightarrow X$  de bir izometridir.  $X$  ve  $Y$  metrik uzayları arasında bir izometri var ise  $X$  ve  $Y$  metrik uzayları birbirine izometriktir denir.

## 5.3 Yoğun Altkümeler ve Ayrılabilir Uzaylar

Önce topolojide tanımlanan yığılma noktası tanımına metrik uzaylar açısından bakılacaktır.  $A \subset X$ 'nin bir yığılma noktası  $x \in X$ 'in  $X$ 'teki her komşuluğu ile  $A$ 'nın

kesişiminin boş kümeden farklı olmasıdır. Topolojideki kapalılıkla metrik uzaylardaki kapalılık örtüşmektedir. Dolayısıyla bir metrik uzaydaki kapalı kümeler yığılma noktalarını içerir. Tersine bir metrik uzayın altkümesi yığılma noktalarını içeriyorsa o metrik uzaya göre kapalıdır.  $x \in X$  noktasının  $A \subset X$ 'nin bir yığılma noktası olabilmesi için  $d(x, A) = 0$  olmalıdır (Dieudonné 1960), yani mesafesiz olmalıdır.  $X$  metrik uzayında  $B$  kümesinin herhangi bir noktası  $A$  kümesinin bir yığılma noktası ise  $A$  kümesi bir  $B$  kümesine göre yoğundur denir, yani  $B \subset \bar{A}$ . Ayrılabilir uzay kavramı topolojideki gibi aynen kullanılacaktır. Ayrılabilir bir  $X$  metrik uzayının herhangi bir altkümesi de ayrılabiliridir.

$(U_\lambda)_{\lambda \in L}$ ,  $X$ 'in bir açık altkümeler ailesiyse bu ailenin  $X$ 'in bir topoloji bazı olabilmesi için her  $x \in X$  noktasının her  $U$  komşuluğu için  $x \in U_\lambda \subset U$  içindeliğini sağlayan bir  $\lambda \in L$  indisinin var olması gerekir.  $X$  metrik uzayının ayrılabilir olabilmesi için  $X$ 'in açık kümeleri için sayılabilir bir bazı var olmalıdır.

#### 5.4 Bir Metrik Uzayın Altuzayları

$A$ ,  $X$  metrik uzayının boş-olmayan bir altkümesi olsun.

$$\begin{aligned} d : A \times A &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto d(x, y) \end{aligned}$$

gönderimi  $X \times X$ 'in  $A \times A$ 'ya kısıtlamasıdır ve  $A$  üzerinde bir mesafe fonksiyonudur.  $X$  üzerindeki  $d$  mesafesi tarafından  $A$  üzerinde indüklenmiştir denir. Bu indüklenmiş mesafe ile tanımlanan metrik uzaya ise  $X$  metrik uzayının  $A$  altuzayı denir.

$V \subset A$ 'nın  $A \subset X$  altuzayında açık olabilmesi için  $V = U \cap A$  eşitliğini sağlayan bir açık  $U$  kümesinin var olmasıdır, yani her  $x \in U$  için  $U$  bir  $B(x; r_x)$  açık yuvarını içerir, dolayısıyla  $x \in U \cap A$  iken  $B(x; r_x) \subset U \cap A$ .  $V$ 'nin kapalı olması için  $U$  kapalı alınır.  $A \subset X$ 'in her açık  $V$  altkümesinin  $X$ 'te açık olması içinse  $A$ ,  $X$ 'te açık olarak alınır ve benzer şekilde  $A$ 'nın her  $V$  altkümesinin  $A$ 'da kapalı olması için  $A$ 'nın  $X$ 'te kapalı olması gerekir.

$X$  metrik uzayının bir  $A$  altuzayının  $x \in A$  noktası ve  $V \subset A$ 'nın  $x \in A$  noktasının  $A$ 'da komşuluğu olabilmesi için  $x$ 'in  $X$ 'te bir  $U$  komşuluğunun olmasıdır öyle ki  $V = U \cap A$  (Dieudonné 1960). Bir  $x \in A$  noktasının  $A$ 'daki her komşuluğunun  $x$ 'in  $X$ 'te bir komşuluğu olabilmesi için  $A$ ,  $x$  noktasının  $X$ 'te bir komşuluğu olmalıdır (Dieudonné 1960).  $B \subset A$ 'nin  $A$ 'ya göre kapanışı,  $B$ 'nin  $X$ 'teki kapanışı  $\overline{B}$  olmak üzere,  $\overline{B} \cap A$ 'ya eşittir.  $A$ ,  $X$ 'in yoğun bir altkümesi ise her  $x \in A$  noktası ve  $x$ 'in  $A$ 'daki her  $V$  komşuluğu için  $V$ 'nin  $X$ 'teki kapanışı  $\overline{V}$ ,  $x$  noktasının  $X$ 'te komşuluğudur.

### 5.5 Metrik Uzaylarda Sürekli Gönderimler ve Eşdeğer Mesafeler

Komşuluk kavramı yakınlık kavramına karşılık gelir ise  $x$ ,  $x_0$ 'a yeterince yakın olduğu sürece  $f(x)$ ,  $f(x_0)$ 'a keyfi yakındır. Topolojik süreklilik, metrik uzaylarda metrik ile anlatıldığında  $f : X \rightarrow Y$  gönderiminin  $x_0 \in X$ 'da sürekli olabilmesi için her  $\varepsilon > 0$  için bir  $\delta > 0$  var olmalıdır öyle ki  $d_X(x_0, x) < \delta$  ise  $d_Y(f(x_0), f(x)) < \varepsilon$  olur. Diğer bir deyişle  $f$  sürekli iken  $Y$ 'de  $f(x_0)$ 'ın bir  $V$  komşuluğu bir açık  $B_Y(f(x_0); \varepsilon) = \{f(x) | d_Y(f(x_0), f(x)) < \varepsilon\}$  yuvarını içerir ve bu yuvarın  $f$  altındaki ters görüntüsü  $f^{-1}(B(f(x_0); \varepsilon))$ ,  $X$ 'teki  $B(x_0; \delta) = \{x | d_X(x_0, x) < \delta\}$  açık yuvarının komşuluğudur, yani  $B(x_0; \delta) \subset f^{-1}(B(f(x_0); \varepsilon))$  veya bunun eşdeğeri olarak  $f(B(x_0; \delta)) \subset B(f(x_0); \varepsilon)$  içermesidir. Böyle sürekli bir  $f$  gönderimi ve  $A \subset X$ 'nin bir  $x_0 \in X$  yığılma noktası için  $f(x_0)$  da  $f(A)$ 'nın bir yığılma noktasıdır.

$d_1$  ve  $d_2$ ,  $X$  üzerinde iki metrik olsun. Bu iki mesafenin  $X$  üzerinde tanımladığı metrik uzaylar  $X_1$  ve  $X_2$  olsun. Bir

$$f : X_1 \rightarrow X_2 \quad (5.5.1)$$

$$x \mapsto x \quad (5.5.2)$$

birim gönderimi bir homeomorfizm ise bu iki metrik  $X$  üzerinde eşdeğer mesafelerdir (veya topolojik olarak eşdeğer mesafelerdir) denir. O zaman  $X_1$  ve  $X_2$ 'deki açık kümelerinin aileleri aynıdır ve bu yüzden eşdeğer mesafeler aynı topolojiye sebep olur.

## 5.6 Limitler

$(X, d_X)$  bir metrik uzay olsun.  $a \notin A$ ,  $A \subset X$ 'nin bir yığılma noktası ve  $f$ ,  $A$ 'dan  $Y$  metrik uzayına bir gönderim ise  $x \in A$ ,  $a$ 'ya giderken  $f(x)$ 'in bir  $a'$  limiti vardır (veya  $a'$ ,  $f$ 'nin  $A$ 'ya göre  $a \in \bar{A}$  noktasında limitidir) denir.  $g$ , her  $x \in A$  için  $g(x) = f(x)$  eşitliğini sağlayan ve  $g(a) = a'$  olan,  $A \cup \{a\}$ 'dan  $Y$ 'ye bir gönderim ise  $a$  noktasında süreklidir ve  $x \in A$ ,  $a$ 'ya giderken  $f(x)$ 'in limiti

$$a' = \lim_{x \rightarrow a, x \in A} f(x)$$

olarak yazılır.  $a \in A$  ise  $f$ 'nin  $a$  noktasında sürekli olduğunun anlatılması için yine  $a' = f(a)$  kullanılır.  $x \in A$ ,  $a$ 'ya giderken  $f(x)$ 'in limitinin  $a' \in Y$  olabilmesi için  $a'$ 'nin  $Y$ 'deki her  $V$  komşuluğu için  $a$ 'nın  $X$ 'teki bir  $U$  komşuluğunun varlığıdır öyle ki  $f(U \cap A) \subset V$ . Bu ifadenin metrik uzaylardaki eşdeğeri şöyle verilir:  $x \in A$ ,  $a$ 'ya giderken  $f(x)$ 'in limitinin  $a' \in Y$  olabilmesi için, her  $\varepsilon > 0$  için bir  $\delta > 0$ 'nın var olmasıdır öyle ki  $d_X(x, a) < \delta$  ise  $d_Y(a', f(x)) < \varepsilon$ . Bunun sebebi, onun sağlanması durumunda  $f(x)$ 'in her  $V$  komşuluğu  $Y$ 'deki bir  $B_Y(a'; \varepsilon) = \{f(x) \in Y \mid d_Y(a', f(x)) < \varepsilon\}$  açık yuvarını içerir.  $V$  komşuluğu  $f$ 'nin ters görüntüsü altında  $X$ 'te bir  $U$  komşuluğu  $B_X(a; \delta) = \{x \in A \mid d_X(x, a) < \delta\}$  açık yuvarını içerir öyle ki  $B_X(a; \delta) \subset U \cap A \cap f^{-1}(V) \subset f^{-1}(V) \Rightarrow f(U \cap A) \subset V$ . Tersine  $a' = \lim_{x \rightarrow a, x \in A} f(x)$  olsun, o zaman her  $\varepsilon > 0$  için bir  $\delta > 0$  vardır öyle ki  $d_X(a, x) < \delta \Rightarrow d_Y(a', f(x)) < \varepsilon$ .

Topolojide tanımlanan yakınsama durumu metrik uzaylar açısından yuvarlar açıkça belirtilmeden direkt onları tanımlayan mesafe fonksiyonlarıyla gösterilebilir.  $X$  metrik uzayında bir  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dizisi olsun. Her  $\varepsilon > 0$  için  $d(a, x_n) < \varepsilon$ 'i sağlayan bir  $n \geq N$  doğal sayısı varsa  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dizisi  $a$ 'ya yakınsıyordur veya o dizinin limiti  $a \in X$ 'dir denir öyle ki  $a = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ . O zaman açıkça  $\lim_{n \rightarrow \infty} d(a, x_n) = 0$ . Mesafesiz olduğu için aynı zamanda onun bir yığılma noktasıdır.

## 5.7 Cauchy Dizileri ve Tam Uzaylar

Bir  $X$  metrik uzayında bir Cauchy dizisi bir  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dizisidir öyle ki herhangi bir  $\varepsilon > 0$  için bir  $N$  tamsayısı vardır öyle ki  $p \geq N$  ve  $q \geq N$  ise  $d(x_p, x_q) < \varepsilon$  olur.

Her yakınsak dizi bir Cauchy dizisidir ve  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  bir Cauchy dizisi ise  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ 'nin herhangi yığılma değeri  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ 'nin bir limitidir.  $X$  metrik uzayındaki her Cauchy dizisi  $d_X$ 'e göre  $X$ 'in bir noktasına yakınsıyor ise  $X$  metrik uzayının **tam** olduğu söylenir. Bir metrik uzay  $X$ 'in  $A$  altuzayı,  $d_X$ 'in  $A$  üzerinde indüklediği metriğe göre tam ise  $A$ ,  $X$ 'te kapalıdır ve tersine  $X$  tam ise her kapalı  $A$  altkümesi de tam bir altuzayıdır.

$X_1$  ve  $X_2$  iki metrik uzay ve  $A$ ,  $X_1$ 'in bir altkümesi için  $f$ ,  $A$ 'dan  $X_2$ 'ye bir gönderim olsun.  $f$ 'nin  $A$ 'daki osilasyonu tanımdan  $\delta(f(A))$  çapıdır.  $a$ ,  $A$ 'nın bir yığılma noktası olsun;  $f$ 'nin  $A$ 'ya göre  $a$  noktasındaki osilasyonu  $\Omega(a; f) = \inf_V \delta(f(V \cap A))$ , ki  $V$ ,  $a$ 'nın komşuluklarının kümesini tarar.

## 5.8 Metrik Uzaylarda Kompaktlık

Metrik uzayların örtüsü soyut  $(U_\lambda)_{\lambda \in L}$  açık örtüsünün yerini, her  $x \in X$  için,  $B(x; r)$  yuvarları alır.  $x \in X$  noktasının her  $U$  komşuluğu bir  $B(x; r)$  yuvarını içerir ve dolayısıyla bu yuvarlar onun bir bazı olur.  $X$  metrik uzayında kompakt bir küme  $A \subset X$  kümesidir öyle ki  $X$ 'in  $A$  altuzayı kompakttır ve  $X$ 'in kompakt bir kümesi kapalıdır. Kompakt bir  $X$  metrik uzayında her  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dizisinin  $a$ 'ya yakınsayan tek bir yığılma değeri vardır.

**Önerme 5.1**  $X$  ve  $Y$  iki metrik uzay ve  $f : X \rightarrow Y$  sürekli bir gönderim olsun.  $X$ 'in her kompakt olan  $A$  altkümesi için  $f(A)$  da kompakttır, dolayısıyla  $Y$ 'de kapalıdır.

**İspat.**  $(U_\lambda)_{\lambda \in L}$ ,  $f(A)$ 'nin açık bir örtüsü olsun. O zaman  $(f^{-1}(U_\lambda))_{\lambda \in L}$ ,  $A$ 'nın açık bir örtüsünü oluşturur.  $A$ 'nın kompaktlığından sonlu bir  $(f^{-1}(U_\lambda))_{\lambda \in H}$  altörtüsü vardır. Dolayısıyla sonlu  $H \subset L$  indis kümesi için  $(U_\lambda)_{\lambda \in H}$ ,  $f(A)$ 'nin açık sonlu bir altörtüsünü oluşturur. ■

**Önerme 5.2**  $X$  kompakt bir metrik uzay ve  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  gönderimi sürekli olsun. Dolayısıyla  $f(X)$  sınırlıdır ve  $f(a) = \inf_{x \in X} f(x)$ ,  $f(b) = \sup_{x \in X} f(x)$  eşitliklerini sağlayan iki tane  $a, b \in X$  noktası vardır.

**İspat.**  $\mathbb{R}$ 'nin bir  $(U_\lambda)_{\lambda \in L}$  açık örtüsü için  $f(X)$ 'in kompaktlığından sonlu açık bir

altörtüsü vardır öyle ki her  $f(x) \in f(X)$  için bir  $B(f(x); \varepsilon)$  açık yuvarı vardır ve bu yuvarların sonlu bir birleşimi yine sonludur. Metrik uzaydaki kompakt kümeler kapalı olduğundan ve kapalı kümeler de yığılma noktalarını içerdiğinden  $f(a) = \inf_{x \in X} f(x)$  ve  $f(b) = \sup_{x \in X} f(x)$ ,  $f(X)$ 'in elemanıdır. ■

**Tanım 5.3**  $X$  metrik uzayında her  $\varepsilon > 0$  için çapı  $\varepsilon$ 'dan küçük olan kümelerden oluşan sonlu bir örtüsü var ise  $X$  metrik uzayına prekompakttır denir ve her prekompakt metrik uzay ayrılabiliridir.

**Önerme 5.3** Bir  $X$  metrik uzayında aşağıdaki üç koşul eşdeğerdir:

- (i).  $X$  kompakttır;
- (ii).  $X$ 'teki her sonsuz dizinin en az bir yığılma değeri vardır;
- (iii).  $X$  prekompakt ve tamdır.

**Önerme 5.4**  $X$  bir metrik uzay olsun. Aşağıdaki koşullardan ikisinin sağlanması üçüncüsünü doğurur:

- (i).  $X$  kompakttır,
- (ii).  $X$  ayrıktır,
- (iii).  $X$  sonludur.

**Önerme 5.5**  $X$  bir kompakt metrik uzay ve  $f$ ,  $X$ 'ten  $Y$  metrik uzayına sürekli ve birebir bir gönderim ise  $f : X \rightarrow f(X)$  bir homeomorfizmdir.

**İspat.** Her  $y = f(x) \in f(X) \subset Y$  için en az bir  $x \in X$  olduğu için üzerinedir ve birebir de olduğundan  $f$  terslenebilir bir gönderimdir. Dolayısıyla  $f$  ve  $f^{-1}$  de sürekli olduğundan  $f$  homeomorfizmdir. ■

## 5.9 İki Metrik Uzayın Çarpımı

Çarpım topolojisiyle oluşturulmuş bir metrik uzaydaki açık kümeler, o çarpım topolojisini oluşturan elemanlardan gelir:  $U$ ,  $X$ 'te açık küme ve  $V$ ,  $Y$ 'de açık küme ise  $U \times V$ ,  $X \times Y$ 'de açıktır. Tersine  $X \times Y$ 'deki herhangi açık  $U \times V \subset X \times Y$  altkümesi için  $U$ 'nun  $X$ 'te,  $V$ 'nin  $Y$ 'de açık olması gerekir. O zaman her  $x \in X$  için  $B_X(x; r_x)$  ve her  $y \in Y$  için  $B_Y(y; r_y)$  vardır öyle ki  $B_X(x; r_x) \times B_Y(y; r_y)$ 'ler onun bir topo-

loji bazını oluşturur. Dolayısıyla, o yuvar çarpımları, çarpım topolojisinin bir bazıdır.

**Örnek 5.2**  $(X_1, d_{X_1}), (X_2, d_{X_2})$  iki metrik uzay olsun. Her  $x = (x_1, x_2) \in X_1 \times X_2$ ,  $y = (y_1, y_2) \in X_1 \times X_2$  çifti için

$$d(x, y) = \sup(d_{X_1}(x_1, y_1), d_{X_2}(x_2, y_2)) \quad (5.9.1)$$

$X_1 \times X_2$  üzerinde bir mesafe fonksiyonudur.

$X_1, X_2, X_3$  üç metrik uzay olmak üzere

$$\begin{aligned} f : X_3 &\longrightarrow X_1 \times X_2 \\ z &\longmapsto f(z) = (f_1(z), f_2(z)) \end{aligned}$$

gönderiminin  $z_0$  noktasında sürekli olabilmesi için hem  $pr_1 \circ f = f_1$ 'in hem de  $pr_2 \circ f = f_2$ 'nin  $z_0$  noktasında sürekli olmalıdır. O zaman, bir  $B(z; r) \subset X \times Y$  yuvarı vardır öyle ki  $f^{-1}(B(z; r)) = f_1^{-1}(B_{X_1}(f_1(z); r)) \cap f_2^{-1}(B_{X_2}(f_2(z); r))$ .

Çarpım uzayındaki bir dizinin  $z_n = (x_n, y_n) \in X \times Y$  noktalarının yakınsak olabilmesi için her ikisinin de  $a = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ ,  $b = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$  limitlerinin var olmasıdır ki o zaman  $(a, b) = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n$  olur. Böyle  $z_n = (x_n, y_n) \in X \times Y$  noktalarının Cauchy dizisi olabilmesi için  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dizisi  $X$ 'te Cauchy dizisi ve  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dizisi de  $Y$ 'de Cauchy dizisi olmalıdır.

**Önerme 5.6**  $X$  ve  $Y$  iki boş-olmayan metrik uzay olsun.  $X \times Y$ 'nin aşağıdaki uzaylardan bir tanesi olabilmesi için hem  $X$ 'in hem de  $Y$ 'nin aynı tür olmasıdır (Dieudonné 1960):

- (i). kesikli;
- (ii). sınırlı;
- (iii). ayrılabilir;
- (iv). tam;
- (v). kompakt;
- (vi). prekompakt;

- (vii). yerel kompakt;
- (viii). bağlantılı;
- (ix). yerel bağlantılı.

## 6. NÖRMLU UZAYLAR

Normlu uzaylar, çizgisel (vektör uzayı) topolojik uzaylardır. Dolayısıyla toplama ve skalerle çarpma işlemleri altında kapalıdır:

$$\begin{aligned}\mathbf{V} \times \mathbf{V} &\longrightarrow \mathbf{V} \\ (x, y) &\longmapsto x + y\end{aligned}\tag{6.0.1}$$

ve

$$\begin{aligned}\mathbb{k} \times \mathbf{V} &\longrightarrow \mathbf{V} \\ (\alpha, x) &\longmapsto \alpha x\end{aligned}\tag{6.0.2}$$

Bu bölümde vektör uzaylarından kasıt (sonlu veya sonsuz boyutlu)  $\mathbb{k} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$  sayı alanı üzerinde vektör uzaylarıdır. Bu vektör uzaylarına sırasıyla reel vektör uzayları ve kompleks vektör uzayları denir. Bir kompleks vektör uzayı skalerleri reel sayılara kısıtlanır ise bir reel vektör uzayı olarak düşünülebilir. Topoloji olarak normlu uzaylar, metrik uzayların "alt" bir kümesidir çünkü her normlu uzay üzerinde bir  $d(x, y) = \|x - y\|$  mesafe fonksiyonu tanımlanabilir ama tersi doğru değildir.

### 6.1 Normlu Uzaylar

$\mathbf{N}$  normlu vektör uzayı üzerinde bir norm  $\|\cdot\| : \mathbf{N} \longrightarrow \mathbb{R}$  gönderimidir,  $(\mathbf{N}, \|\cdot\|)$  ikilisine normlu uzay denir ve şu özellikleri sağlar ( $\mathbb{k}$  üzerindeki norm mutlak değer olmak üzere):

- (i). Her  $x \in \mathbf{N}$  için  $\|x\| \geq 0$ ,
- (ii).  $\|x\| = 0 \in \mathbb{R} \iff x = 0 \in \mathbf{N}$ ,
- (iii). Herhangi  $\alpha \in \mathbb{k}$  skaleri ve  $x \in \mathbf{N}$  için  $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$ ,
- (iv). Herhangi  $x, y \in \mathbf{N}$  eleman çifti için  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ .

Normlu bir uzay üzerindeki her  $x, y \in \mathbf{N}$  için  $\|x - y\| = d(x, y)$  metriğiyle her zaman bir metrik uzaydır öyle ki her  $x, y, z \in \mathbf{N}$  için  $d(x + z, y + z) = d(x, y)$  ve her  $\alpha \in \mathbb{k}$  skaleri için  $d(\alpha x, \alpha y) = |\alpha|d(x, y)$ 'dir. Normlu uzaydaki açık bir yuvar, o

mesafeye tekabül eden normla tanımlanabilir öyle ki  $B(x; r) = \{y \in \mathbf{N} \mid \|x - y\| < r\}$ . Bu normlu uzaydaki her Cauchy dizisi, o uzayın üzerindeki metriğe göre yakınsıyorsa ona **Banach uzayı** denir.

## 6.2 Normlu Uzayda Seriler ve Mutlak Yakınsak Seriler

Normlu bir uzayın  $(x_n)_{n \geq 0}$ ,  $(s_n)_{n \geq 0}$  dizi çiftinin  $x_n$ ,  $s_n$  elamanları birbirine herhangi bir  $n$  için  $s_n = x_0 + x_1 + \dots + x_n$  ilişkisi ile bağlı ise bu dizi çiftine seri denir.  $x_n$ 'ye serinin  $n$ . terimi, veya serinin genel terimi, ve  $s_n$ 'ye serinin  $n$ . kısmi toplamı denir.  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s$  ise serinin  $s$ 'ye yakınsadığı söylenir. Bu durumda  $s$ 'ye serinin toplamıdır denir ve  $s = x_0 + \dots + x_n + \dots$  veya  $s = \sum_{n=0}^{\infty} x_n$  diye yazılır.  $s - s_n = r_n$ 'ye serinin  $n$ . kalamı denir ve tanımdan  $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = 0$ 'dır.

Bir serinin genel terimi  $x_n$  yakınsak ise her  $\varepsilon > 0$  için bir  $n_0$  tamsayısı vardır öyle ki  $n \geq N$  ve  $p \geq 0$  için

$$\|s_{n+p} - s_n\| = \|x_{n+1} + \dots + x_{n+p}\| \leq \varepsilon \quad (6.2.1)$$

olur. Tersine koşul sağlanıyor ise ve  $\mathbf{N}$  tam ise genel terim  $x_n$  yakınsaktır ve bu Cauchy kriteridir.  $\mathbf{N}$ 'de birden fazla seri olabilir. Böyle bir durum için  $\mathbf{N}$ 'de  $(x_n)_{n \in L}$  ve  $(x'_n)_{n \in L'}$  diye iki seri olsun. Bu iki dizi sonlu indis haricinde  $x_n = x'_n$  eşitliğini sağlıyor ise her iki seri aynı anda yakınsaktır veya yakınsak değildir denir (Dieudonné 1960). Bu sefer birbirinden tamamen veya kısmen ayrı olan dizilerden öte, bir dizinin alt dizisine bakılacaktır:  $\mathbf{N}$ 'deki bir dizinin bir altdizisi  $(x_{k_n})$  için,  $k_0 = 0$  olmak üzere,  $(x_{k_n})$ , 0'dan büyük veya eşit mutlak artan tamsayılar dizisiyse  $(x_n)$ 'nin serisi  $s$ 'ye yakınsıyor ve  $y_n = \sum_{i=k_n}^{k_{n+1}-1} x_i$  ise  $(y_n)$  serisi de  $s$ 'ye yakınsıyordur.

Banach uzayı  $\mathbf{N}$ 'de mutlak yakınsak bir  $(x_n)$  serisi,  $\|x_n\|$  genel teriminin yakınsak olduğu ( $\sum \|x_n\| < \infty$ ) serilerdir ve Banach uzaylarında mutlak yakınsak seriler için

$$\left\| \sum_{n=0}^{\infty} x_n \right\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \|x_n\| \quad (6.2.2)$$

eşitsizliği vardır. Mutlak yakınsak seriler komütatiflik özelliğine sahiptir, yani  $(x_n)$  mutlak yakınsak bir seri ve  $\varphi : \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}$  terslenebilir bir gönderim olsun. O zaman

$y_n = x_{\varphi(n)}$  olmak üzere  $(y_n)$ 'nin serisi mutlak yakınsak bir seridir ve

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n = \sum_{n=0}^{\infty} y_n$$

olur.  $\mathbb{N}$  yerine herhangi sayılabilir sonsuzluktaki bir  $L$  kümesi için bir Banach uzayı  $\mathbf{N}$ 'nin elemanlarının  $(x_\lambda)_{\lambda \in L}$  ailesine mutlak toplanabilir denir eğer terslenebilir bir  $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow L$  gönderimi için  $(x_{\varphi(n)})$  serisi mutlak yakınsaksa. Bu durumda  $(x_\lambda)_{\lambda \in L}$  ailesinin toplamı  $\sum_{\lambda \in L} x_\lambda$  veya  $\sum_{n=0}^{\infty} x_{\varphi(n)}$  olarak yazılabilir.

Banach uzayı  $\mathbf{N}$ 'nin elemanlarının sayılabilir bir  $(x_\lambda)_{\lambda \in L}$  ailesinin mutlak toplanabilir olabilmesi için, sonlu  $J \subset L$  için  $\sum_{\lambda \in J} \|x_\lambda\|$  toplamının sınırlı olmasıdır. O zaman, her  $\varepsilon > 0$  için  $L$ 'nin sonlu bir  $I$  altkümesi vardır öyle ki  $L$ 'nin herhangi sonlu ayrık  $K$  ( $I \cap K = \emptyset$ ) altkümesi için  $\sum_{\lambda \in K} \|x_\lambda\| \leq \varepsilon$  ve herhangi bir sonlu  $I \subset H \subset L$  için  $\|\sum_{\lambda \in L} x_\lambda - \sum_{\lambda \in H} x_\lambda\| \leq 2\varepsilon$  olur.

$H$  ve  $L$  gibi iki sayılabilir indis kümesi için  $H \subset L$  olduğunda  $(x_\lambda)_{\lambda \in L}$  ailesi mutlak toplanabilirse her  $H \subset L$  için de  $(x_\lambda)_{\lambda \in H}$  de mutlak toplanabilir ve

$$\sum_{\lambda \in H} \|x_\lambda\| \leq \sum_{\lambda \in L} \|x_\lambda\|.$$

Bu sefer Banach uzayı  $\mathbf{N}$ 'nin elemanlarının mutlak toplanabilir bir  $(x_\lambda)_{\lambda \in L}$  ailesi için sadece  $H$  yerine  $L$ 'nin boş-olmayan kümelerinin sonsuz bir  $(H_n)$  dizisi olsun öyle ki  $L = \bigsqcup_n H_n$ . O zaman  $z_n = \sum_{\lambda \in L_n} x_\lambda$  ise  $(z_n)$  mutlak yakınsaktır ve

$$\sum_{n=0}^{\infty} z_n = \sum_{\lambda \in L} x_\lambda.$$

### 6.3 Normlu Uzayların Altuzayları ve Sonlu Çarpımları

$\mathbf{N}$  normlu bir uzay ve  $\mathbf{V} \subset \mathbf{N}$  onun bir vektör altuzayı olsun, yani herhangi  $\alpha, \beta$  skaler çifti ve  $x, y \in \mathbf{V}$  vektörleri için  $\alpha x + \beta y \in \mathbf{V}$  olur.  $\mathbf{N}$ 'nin üzerindeki normun  $\mathbf{V}$ 'ye kısıtlanması  $\mathbf{V}$  üzerinde bir normdur ve  $\mathbf{N}$ 'den  $\mathbf{V}$  üzerinde indüklenen topoloji ve mesafeyi tanımlar.  $\mathbf{N}$ 'nin altuzayından kasıt genelde üzerinde indüklenen normu ile bir vektör altuzayıdır. Bir  $\mathbf{N}$  Banach uzayının herhangi kapalı altuzayı da bir

Banach uzayıdır; tersine bir normlu  $\mathbf{N}$  uzayının  $\mathbf{V}$  altuzayı Banach uzayı ise  $\mathbf{V}$  altuzayı  $\mathbf{N}$  normlu uzayında kapalıdır.  $\mathbf{V}$ ,  $\mathbf{N}$  normlu uzayının bir vektör altuzayı ise  $\mathbf{V}$ 'nin  $\mathbf{N}$ 'deki kapanışı  $\overline{\mathbf{V}}$  bir vektör altuzayıdır.

$\mathbf{N}$  normlu uzayının  $V$  altkümesinin vektörlerinin sonlu çizgisel toplamları  $\mathbf{N}$ 'nin yoğun bir altkümesini oluşturuyor ise  $V$ 'ye **total**dir denir ve bir  $(x_\lambda)_{\lambda \in L}$  ailesinin elemanlarının kümesi total ise o ailenin total olduğu söylenir. Normlu bir uzayda total bir dizi var ise o normlu uzay ayrılabilir. Tersine, ayrılabilir bir  $\mathbf{N}$  normlu uzayında çizgisel bağımsız vektörlerden oluşan bir total dizi vardır.

$\mathbf{V}_1$  ve  $\mathbf{V}_2$ ,  $\mathbf{N}$ 'nin iki vektör altuzayı olmak üzere,  $\mathbf{N} = \mathbf{V}_1 \oplus \mathbf{V}_2$ , her  $i \in \{1, 2\}$  için

$$pr_i : \mathbf{N} \longrightarrow \mathbf{V}_i$$

gönderimi  $\mathbf{N}$ 'nin  $\mathbf{V}_i$ 'ye çizgisel projeksiyon gönderimleridir.

$$\begin{aligned} +_{\mathbf{N}} : \mathbf{V}_1 \times \mathbf{V}_2 &\longrightarrow \mathbf{N} \\ (v_1, v_2) &\longmapsto v_1 +_{\mathbf{N}} v_2 \end{aligned}$$

gönderiminin bir homeomorfizm olabilmesi için  $pr_1, pr_2$  çizgisel gönderimlerinden biri sürekli olmalıdır. Yani  $pr_i$ 'lerden herhangi biri sürekliyse  $\mathbf{N}$ 'ye  $\mathbf{V}_1$  ve  $\mathbf{V}_2$ 'nin topolojik direkt toplamları denir.  $\mathbf{N} = \mathbf{V}_1 \oplus \mathbf{V}_2$  olsun, o zaman  $\mathbf{V}_2$ 'ye  $\mathbf{V}_1$ 'in topolojik eki denir.

#### 6.4 Çoklu-çizgisel Gönderimlerin Sürekliliği

Her  $1 \leq i \leq n$  için  $\mathbf{N}_i$  normlu uzay ve  $\mathbf{N}'$  de normlu bir uzay olmak üzere

$$f : \mathbf{N}_1 \times \dots \times \mathbf{N}_n \longrightarrow \mathbf{N}'$$

çoklu-çizgisel bir gönderim olsun.  $f$ 'nin herhangi bir  $(v_1, \dots, v_n) \in \mathbf{N}_1 \times \dots \times \mathbf{N}_n$  noktasında sürekli olabilmesi için bir  $\alpha > 0$  sayısı var olmalıdır öyle ki

$$\|f(v_1, \dots, v_n)\| \leq \alpha \cdot \|v_1\| \cdot \|v_2\| \cdots \|v_n\|. \quad (6.4.1)$$

## 6.5 Eşdeğer Normlar

$\mathbb{k}$  sayı alanı üzerinde bir normlu uzay üzerinde  $\|\cdot\|_1$  ve  $\|\cdot\|_2$  diye iki tane norm olsun.  $\|\cdot\|_1$  ile tanımlanan topoloji,  $\|\cdot\|_2$  ile tanımlanan topolojiden daha ince ise  $\|\cdot\|_1$ ,  $\|\cdot\|_2$ 'den daha ince olduğu söylenir.  $\|\cdot\|_1$  ile  $\|\cdot\|_2$  normu,  $\mathbf{N}$  üzerinde aynı topolojiyi tanımlıyor ise bu iki norm eşdeğerdir denir.  $\|\cdot\|_1$  ve  $\|\cdot\|_2$ ,  $\mathbf{N}$  vektör uzayı üzerinde bu iki normun eşdeğer olabilmesi için her  $v \in \mathbf{N}$  için iki tane  $\alpha, \beta > 0$  sayılarının var olmalıdır öyle ki

$$\alpha\|v\|_1 \leq \|v\|_2 \leq \beta\|v\|_1. \quad (6.5.1)$$

Sonlu boyutlu normlu uzaylar için  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  sayıları vardır, dolayısıyla sonlu boyutlu normlu uzaylardaki normlar birbirine eşdeğerdir.

## 6.6 Kapalı Hiperdüzlemler ve Sürekli Çizgisel Formlar

$\mathbb{k}$  sayı alanı üzerinde bir  $\mathbf{V}$  vektör uzayı ve bir  $f$  çizgisel formu (fizikte genelde çizgisel fonksiyonel denir),

$$f : \mathbf{V} \longrightarrow \mathbb{k}$$

çizgisel bir gönderimdir ve onun çekirdeği  $V' = f^{-1}(\{0\})$  ( $ker(f)$  olarak da gösterilir) bir vektör uzayıdır öyle ki herhangi  $a \in V'$  için  $\mathbf{V}$ ,  $V'$  ile  $\mathbb{k}a$ 'nın topolojik direkt toplamlarıdır. Bu özelliği sağlayan bir altuzaya hiperdüzlem denir.  $V'$  bir hiperdüzlem ise herhangi  $v \in \mathbf{V}$ ,  $a \notin V'$ ,  $f(v)$  bir skaler ve  $u \in V'$  olmak üzere  $v = f(v)a + u$  olarak yazılırsa  $f$  çizgisel bir formdur ve  $V' = f^{-1}(\{0\})$ .  $f(v) = 0$ 'a  $V'$ 'nin bir denklemi denir. Bir hiperdüzlem maksimaldir, yani  $V'$  hiperdüzlemini içeren  $\mathbf{V}$ 'nin herhangi bir vektör altuzayı ya  $V'$ 'dür ya da  $\mathbf{V}$ 'dir. Normlu  $\mathbf{N}$  uzayında bir hiperdüzlem  $V'$  ya kapalı ya da yoğunudur.

## 6.7 Sonlu Boyutlu Normlu Uzaylar

$n$ -boyutlu  $\mathbb{k}$  sayı alanı üzerinde normlu vektör uzayı  $\mathbf{N}$ 'nin bazı  $\{e_i\}_{i=1}^n$  ise üzerine bir

$$f : \mathbb{k}^n \longrightarrow \mathbf{N}$$
$$(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \longmapsto \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n$$

gönderimi bir homeorfizmdir.

Normlu  $\mathbf{N}$  uzayında  $\mathbf{V}$  kapalı bir altuzay ve  $\mathbf{W}$  sonlu boyutlu bir altuzay ise  $\mathbf{V} + \mathbf{W}$ ,  $\mathbf{N}$ 'de kapalıdır. Nitekim sonlu boyutlu herhangi bir altuzay  $\mathbf{N}$ 'de kapalıdır. Yerel kompakt normlu bir  $\mathbf{N}$  uzayı sonlu boyutludur. Normlu  $\mathbf{N}$  uzayında  $\mathbf{V}$  sonlu boyutlu kapalı bir altuzay olsun (yani sonlu boyutlu bir cebirsel eki vardır), o zaman  $\mathbf{V}$ 'nin herhangi cebirsel eki aynı zamanda topolojik ekidir.

## 7. HILBERT UZAYLARI

Hilbert uzayları, normlu uzaylar gibi çizgisel topolojik uzaylardır ve Hilbert uzaylarını önemli kılan Hermit-sel form olan iç çarpımdır. Hilbert uzayları üzerinde her zaman bir norm yapısı vardır, dolayısıyla Hilbert uzaylarının üzerinde bir mesafe fonksiyonu da her zaman tanımlıdır. Bir normlu uzay, sadece paralelkenar yasasını sağlıyorsa bir ön-Hilbert uzayı olur. Bölümün başında ilk Hermit-sel form verilip bölümün devamında pozitif Hermit-sel form ve dejenerelik kavramı tanımlandıktan sonra ön-Hilbert uzayı kavramı tanımlanabilecek hâle geldi ve ön-Hilbert uzayları, o Hermit-sel formun kaynağı olan normun ürettiği mesafe fonksiyonuyla tam olduğunda Hilbert uzaylarına dönüşür. Hilbert uzayları, fonksiyonel analiz için, dolayısıyla kuantum mekaniği için de önemli bir konudur.

### 7.1 Hermit-sel Formlar

Herhangi reel veya kompleks  $\alpha \in \mathbb{k}$  sayısının kompleks eşleniği  $\bar{\alpha}$  veya  $\alpha^*$  olarak yazılır.  $\mathbb{k}$  sayı alanı ( $\mathbb{k} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ ) üzerinde bir  $\mathbf{V}$  vektör uzayı üzerinde Hermit-sel bir form  $f : \mathbf{V} \times \mathbf{V} \rightarrow \mathbb{k}$  gönderimidir ve şu özellikleri sağlar:

- (i).  $f(x + x', y) = f(x, y) + f(x', y)$ ,
- (ii).  $f(\alpha x, y) = \alpha f(x, y)$ ,
- (iii).  $f(y, x) = \overline{f(x, y)}$ .

Hermit-sel formun yukarıdaki özellikleri kullanılarak  $\overline{f(y + y', x)}$  elde edilebilir:

$$\overline{f(y + y', x)} = f(x, y + y')$$

olduğundan

$$\overline{f(y + y', x)} = \overline{f(y, x) + f(y', x)} = \overline{f(y, x)} + \overline{f(y', x)} = f(x, y) + f(x, y')$$

olur, yani  $f(x, y + y') = f(x, y) + f(x, y')$ 'dir. (ii). özelliğindeki skalerin yeri değiştirildiğinde  $f(x, \alpha y)$  özdeşliğinin ne olacağını (ii). ve (iii). özellikler kullanılarak bulunabilir

öyle ki  $f(x, \alpha y) = \overline{f(\alpha y, x)} = \overline{\alpha f(y, x)} = \bar{\alpha} f(x, y)$  olur, yani  $f(x, \alpha y) = \bar{\alpha} f(x, y)$ .

Herhangi sonlu  $\{x_i\}$ ,  $\{y_j\}$  vektörleri ve  $(\alpha_i)$  ve  $(\beta_j)$  skalerleri için,

$$f\left(\sum_i \alpha_i x_i, \sum_j \beta_j y_j\right) = \sum_{i,j} \alpha_i \bar{\beta}_j f(x_i, y_j) \quad (7.1.1)$$

olur.

$\mathbf{V}$  sonlu boyutlu ve  $\{a_i\}$  onun bir bazı ise  $f$  tamamen  $\alpha_{ij} = f(a_i, a_j)$  değerleri ile belirlenir ve (iii). özellikten  $\alpha_{ij} = \bar{\alpha}_{ji}$  olur. O zaman herhangi  $x = \sum_i x_i a_i$ ,  $y = \sum_i y_i a_i$  vektör çifti için,

$$f(x, y) = \sum_{i,j} \alpha_{ij} x_i \bar{y}_j \quad (7.1.2)$$

olur.

**Örnek 7.1**  $D$ ,  $\mathbb{R}^{2'}$ 'de görelî kompakt bir açık küme olsun ve  $\mathbf{V}$ ,  $D$ 'deki sınırlı ve sürekli bütün reel-değerli (sırasıyla kompleks-değerli) fonksiyonların reel (sırasıyla kompleks) vektör uzayı olsun öyle ki sınırlı, sürekli ilk türevleri  $D$ 'dedir. O zaman,

$$\varphi(f, g) = \iint_D \left[ a(x, y) f(x, y) \overline{g(x, y)} + b(x, y) \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \overline{\frac{\partial g(x, y)}{\partial x}} + c(x, y) \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \overline{\frac{\partial g(x, y)}{\partial y}} \right] dx dy$$

( $a, b, c$  sürekli, sınırlı ve  $D$ 'de reel-değerlidir) gönderimi  $\mathbf{V}$  üzerinde bir Hermit-sel formdur (Dieudonné 1960).

**İspat.**

$$\begin{aligned} \varphi(f+h, g) &= \iint_D \left[ a(x, y) (f(x, y) + h(x, y)) \overline{g(x, y)} + b(x, y) \frac{\partial (f(x, y) + h(x, y))}{\partial x} \overline{\frac{\partial g(x, y)}{\partial x}} \right. \\ &\quad \left. + c(x, y) \frac{\partial (f(x, y) + h(x, y))}{\partial y} \overline{\frac{\partial g(x, y)}{\partial y}} \right] dx dy = \varphi(f, g) + \varphi(h, g) \end{aligned}$$

Açıkça bir  $\alpha$  skaleri için  $\varphi(\alpha f, g) = \alpha\varphi(f, g)$

$$\begin{aligned} \varphi(\alpha f, g) = \iint_D \left[ a(x, y)(\alpha f(x, y))\overline{g(x, y)} + b(x, y)\frac{\partial(\alpha f(x, y))}{\partial x}\frac{\overline{\partial g(x, y)}}{\partial x} \right. \\ \left. + c(x, y)\frac{\partial(\alpha f(x, y))}{\partial y}\frac{\overline{\partial g(x, y)}}{\partial y} \right] dx dy = \alpha\varphi(f, g) \end{aligned}$$

ve son olarak Hermit-sel formun (iii). özelliği,

$$\begin{aligned} \varphi(g, f) = \iint_D \left[ a(x, y)g(x, y)\overline{f(x, y)} + b(x, y)\frac{\partial g(x, y)}{\partial x}\frac{\overline{\partial f(x, y)}}{\partial x} \right. \\ \left. + c(x, y)\frac{\partial g(x, y)}{\partial y}\frac{\overline{\partial f(x, y)}}{\partial y} \right] dx dy = \overline{\varphi(f, g)} \end{aligned}$$

■

Bir çift  $x, y \in \mathbf{V}$  vektörü için  $f(x, y) = 0$  ise  $\mathbf{V}$  üzerindeki Hermit-sel  $f$  formuna göre ortogondur; kendisine ortogonal olan bir  $x$  vektörü  $f$ 'ye göre izotropiktir, yani  $f(x, x) = 0$ .  $\mathbf{V}$  vektör uzayının herhangi bir  $M$  altkümesinin her  $x \in M$  vektörüne ortogonal olan bir  $y$  vektörü var ise  $y$  vektörünün  $f$ 'ye göre  $M$  altkümesine ortogonal olduğu söylenir, yani her  $x \in M$  için  $f(x, y) = 0$  olur. Bütün  $\mathbf{V}$  vektör uzayına ortogonal olan bir  $z \neq 0$  vektörü var ise  $f$  Hermit-sel formun dejenere olduğu söylenir, yani her  $y \in \mathbf{V}$  için  $f(y, z) = 0$ 'dır. Dolayısıyla Hermit-sel form

$$\forall x \in \mathbf{V} \quad f(x, y) = 0 \Rightarrow y = 0 \in \mathbf{V} \quad (7.1.3)$$

durumu sağlandığında dejenere değildir.

$f$ ,  $\mathbf{V}$  vektör uzayı üzerinde Hermit-sel bir form olsun.  $\mathbf{V}$  reel vektör uzayı ise  $f(x + y, x + y) - f(x - y, x - y) = 4f(x, y)$  ifadesi Hermit-sel formun (i). ve (ii). özellikleri kullanılarak gösterilebilir öyle ki

$$\begin{aligned} f(x, x + y) + f(y, x + y) - f(x, x - y) - f(-y, x - y) \\ = f(x, x) + f(x, y) + f(y, x) + f(y, y) \\ - f(x, x) + f(x, y) + f(y, x) - f(y, y) = 4f(x, y). \end{aligned}$$

## 7.2 Pozitif Hermit-sel Formlar

$\mathbf{V}$  üzerindeki bir Hermit-sel  $f$  formuyla her  $x \in \mathbf{V}$  için  $f(x, x) \geq 0$  koşulu sağlanıyor ise Hermit-sel  $f$  formunun pozitif olduğu söylenir.  $\mathbf{V}$  üzerindeki bir  $f$  pozitif Hermit-sel formun dejenere olmaması için  $f$  için 0'dan başka bir izotropik vektör olmamasıdır, yani herhangi  $0 \neq x \in \mathbf{V}$  için  $f(x, x) > 0$ 'dır.

**Cauchy-Schwarz Eşitsizliği:** Herhangi  $x, y \in \mathbf{V}$  vektör çifti için  $f$  pozitif bir Hermit-sel form ise

$$|f(x, y)|^2 \leq f(x, x)f(y, y) \quad (7.2.1)$$

olur.

**Minkowski Eşitsizliği:** Herhangi  $x, y \in \mathbf{V}$  vektör çifti için  $f$  pozitif bir Hermit-sel form ise

$$\sqrt{f(x + y, x + y)} \leq \sqrt{f(x, x)} + \sqrt{f(y, y)} \quad (7.2.2)$$

olur.

$f$  dejenere olmayan pozitif Hermit-sel form (pozitif tanımlı form da denir) ise  $\sqrt{f(x, x)}$ ,  $\mathbf{V}$  üzerinde bir normdur. Bir ön-Hilbert uzayı, bir  $\mathbf{V}$  vektör uzayı ile onun üzerinde dejenere olmayan bir pozitif Hermit-sel formdur. Bu Hermit-sel form  $(x|y)$  olarak yazılır ve ona  $x$  ile  $y$ 'nin skaler çarpımı veya iç çarpımı denir. Bir ön-Hilbert uzayı  $\mathbf{V}$  her zaman  $\|x\| = \sqrt{(x|x)}$  normu ile bir normlu uzaydır ve ona karşılık gelen  $\|x - y\|$  mesafesi ile bir metrik uzaydır.  $(x|x)$  yerine fizikte yaygın olarak kullanılan Dirac gösterimi olan  $\langle x|y \rangle$  veya matematikte sıkça kullanılan  $\langle x, y \rangle$  gösterimi kullanılacaktır. Normlu bir uzayın normu, ancak her  $x, y \in \mathbf{N}$  vektör çifti için

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2) \quad (7.2.3)$$

eşitliğini sağlıyorsa (paralelkenar yasası) bir ön-Hilbert uzayı olur ve onun üzerindeki iç çarpım, polarizasyon özdeşliği olan

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{4}(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 + i\|x + iy\|^2 - i\|x - iy\|^2) \quad (7.2.4)$$

(7.2.4) eşitliğiyle belirlenir. Ön-Hilbert uzayı üzerindeki pozitif Hermit-sel formun oluşturduğu  $\|x\| = \langle x, x \rangle$  normu, o uzayı tam bir metrik uzay yapıyorsa ona Hilbert uzayı  $\mathcal{H}$  denir ve sonlu boyutlu bir ön-Hilbert uzayı her zaman bir Hilbert uzayıdır. Bu Hermit-sel iç çarpım, matematiktekinin aksine fizikte ilk argümanda anti-çizgisel, ikinci argümanda çizgiseldir.

$\mathcal{H}$ 'den  $\mathcal{H}'$ 'ye bir izomorfizm (çizgisel izomorfizm) her  $x, y \in \mathcal{H}$  için

$$\langle Tx, Ty \rangle_{\mathcal{H}'} = \langle x, y \rangle_{\mathcal{H}} \quad (7.2.5)$$

eşitliğini sağlayan çizgisel ve terslenebilir bir  $T : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}'$  gönderimidir.

**Teorem 7.1 (Pisagor Teoremi)**  $x, y \in \mathbf{V}$ , ön-Hilbert uzayında birbirlerine ortogonal vektörler ise

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 \quad (7.2.6)$$

olur.

**İspat.**

$$\langle x + y, x + y \rangle = \|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + \langle x, y \rangle + \overline{\langle x, y \rangle}$$

$x$  ve  $y$  birbirlerine ortogonal olduğundan eşitliğin sağ tarafındaki son iki terim 0 olmalıdır. Dolayısıyla

$$\langle x + y, x + y \rangle = \|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 \quad (7.2.7)$$

■

Şu ana kadarki bilgilerden Hilbert uzaylarının bir dizisi  $(\mathcal{H}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  oluşturulabilir. Her  $n \in \mathbb{N}$  için  $\mathcal{H}_n$  üzerinde  $\langle x_n, y_n \rangle_{\mathcal{H}_n}$  iç çarpımı tanımlı olan ve  $\|x_n\|^2$  serisinin yakınsak olduğu bir Hilbert uzayıysa  $\mathcal{H}_1 \times \cdots \times \mathcal{H}_n \times \cdots = \mathcal{H} = \{x = (x_1, \cdots, x_n, \cdots) | x_i \in \mathcal{H}_i\}$  de bir Hilbert uzayıdır.

### 7.3 Tam Bir Altuzay Üzerinde Ortogonal Projeksiyon

$\mathbf{V}$  bir ön-Hilbert uzayı ve  $\mathbf{V}_1$  de  $\mathbf{V}$ 'nin bir tam vektör altuzayı olsun, yani bir Hilbert uzayı.

$$P_{\mathbf{V}_1} : \mathbf{V} \longrightarrow \mathbf{V}_1$$

$$x \longmapsto y = P_{\mathbf{V}_1}(x)$$

gönderimi  $\mathbf{V}$  üzerinde bir ortogonal projeksiyonu olmak üzere herhangi bir  $x \in \mathbf{V}$  için  $\|x - y\| = d(x, \mathbf{V}_1)$  eşitliğini sağlayan sadece tek bir  $y = P_{\mathbf{V}_1}(x) \in \mathbf{V}_1$  noktası vardır.  $y = P_{\mathbf{V}_1}(x) \in \mathbf{V}_1$  noktası  $x - z$ 'yi  $\mathbf{V}_1$ 'e ortogonal kılan tek  $z \in \mathbf{V}_1$  noktasıdır.  $\mathbf{V}$ 'den  $\mathbf{V}_1$ 'e  $x \longmapsto P_{\mathbf{V}_1}(x)$  gönderimi çizgisel ve süreklidir, ayrıca  $\mathbf{V}_1 \neq \{0\}$  ise normu 1'dir; çekirdeği  $\mathbf{V}_2 = P_{\mathbf{V}_1}^{-1}(\{0\})$ ,  $\mathbf{V}_1$ 'e ortogonal olan altuzaydır ve  $\mathbf{V} = \mathbf{V}_1 \oplus \mathbf{V}_2$  olur, yani bu altuzayların topolojik direkt toplamıdır.  $P_{\mathbf{V}'}$  çizgiseldir.  $x - y$  ve  $x' - y'$  vektörleri  $\mathbf{V}'$ 'ne ortogonal ise  $\alpha x - \alpha y$  de  $(x + x') - (y + y') = (x - y) + (x' - y')$  de  $\mathbf{V}'$ 'ne ortogondur;  $y + y' \in \mathbf{V}'$  ve  $\alpha y \in \mathbf{V}'$  iken  $y + y' = P_{\mathbf{V}'}(x) + P_{\mathbf{V}'}(x') = P_{\mathbf{V}'}(x + x')$  ve  $\alpha y = P_{\mathbf{V}'}(\alpha x)$ 'dir. Pisagor teoreminden,

$$\|x\|^2 = \|P_{\mathbf{V}'}(x)\|^2 + \|x - P_{\mathbf{V}'}(x)\|^2 \quad (7.3.1)$$

olur. Çizgisel  $P_{\mathbf{V}'}$  gönderimi  $\mathbf{V}$ 'den  $\mathbf{V}'$ 'ne ortogonal projeksiyondur ve çekirdeği  $\mathbf{V}''$ ,  $\mathbf{V}'$ 'nün  $\mathbf{V}$ 'de ortogonal ekidir.

$\mathbf{V}$  ön-Hilbert uzayıysa herhangi  $a \in \mathbf{V}$  için  $x \longmapsto \langle a, x \rangle$  gönderimi  $\|a\|$  normunun sürekli, çizgisel formudur. Tersine,  $\mathbf{V}$  bir Hilbert uzayı ise  $\mathbf{V}$  üzerindeki herhangi sürekli, çizgisel  $f_a$  formu ve herhangi bir  $x \in \mathbf{V}$  için  $f_a(x) = \langle a, x \rangle$  eşitliğini sağlayan eşsiz bir  $a \in \mathbf{V}$  vektörü vardır (Dieudonné 1960). Bunun sonucu önemlidir çünkü kuantum mekaniği kısmında ket vektörlerinin çizgisel fonksiyonelleri için de kullanılacaktır (Riesz temsil teoremi).

### 7.4 Ortonormal Sistemler ve Ortonormalleştirme

Her  $n$  için  $\mathcal{H}_n$  bir-boyutlu uzay olarak alınır ise Hilbert toplamı sonsuz boyutlu Hilbert uzayı  $\mathcal{H}$ 'ye yol açar ve bu uzay genelde  $\ell^2$  olarak yazılır. Skaler alanı belirtmek

için  $\ell_{\mathbb{k}}^2$  ( $\mathbb{k} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ ) ( $\mathbb{k}$ -Hilbert uzayı) olarak gösterilir. Dolayısıyla  $\ell_{\mathbb{k}}^2 = \{f|f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{k} \text{ ve } \sum_{n \in \mathbb{N}} |f(n)|^2 < \infty\}$  uzayı bütün  $\mathbb{k}$  sayı alanının bir  $x = (\alpha_n)$  dizisidir öyle ki  $\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|^2$  yakınsaktır ve üzerinde  $\langle x, y \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \overline{\alpha_n} \beta_n$  skaler çarpımı tanımlıdır.  $e_n$ 'ler  $n$ . teriminin 1, diğer bütün terimlerinin 0 olduğu  $\ell^2$ 'de bir dizi olsun. O zaman  $m \neq n$  için  $\langle e_m, e_n \rangle = 0$  (veya  $\langle e_m, e_n \rangle_{\ell^2}$ ) olur ve her  $n$  için  $\sqrt{\langle e_n, e_n \rangle} = \|e_n\| = 1$ 'dir.  $\ell^2$ 'deki her  $x = (\alpha_n)$  dizisi için  $\ell^2$ 'de yakınsak olan  $x = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n$  serisi eşsiz bir şekilde yazılabilir.  $\{e_n\}$ ,  $\ell^2$ 'de yakınsak olduğundan  $\ell^2$  ayrılabilir ve herhangi ayrılabilir bir Hilbert uzayı,  $\ell^2$ 'ye izomorfiktir (Dieudonné 1960). Bu durum herhangi bir  $0 < p < \infty$  için genellenirse  $\ell^p$  uzayı,  $(\alpha_n)$  kompleks toplanabilir dizilerin uzayıdır öyle ki

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|^p < \infty. \quad (7.4.1)$$

Herhangi bir  $I \subset \mathbb{R}$  aralığı için  $L^p(I)$ ,  $I$  aralığındaki kompleks-değerli Lebesgue ölçülebilir fonksiyonların uzayıdır öyle ki herhangi  $p > 0$  ve  $f \in L^p$  için  $|f|^p$  integrallenebilir, yani:  $\int_I |f(x)|^p dx < \infty$  (Dieudonné 1981).  $p = 2$  durumunda  $L^2$ , kuantum mekaniğinde önemli bir rol oynayan, karesi integrallenebilir fonksiyonlar uzayıdır ki dalga fonksiyonlarının karelerinin integrallenebilir (sonlu) olması gerekir.  $0 < p, q < \infty$  için  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$  olduğu durumda  $p$ 'ye  $q$ 'nun dual üssü denir. Bu olduğu durumda  $\ell^p$  ve  $\ell^q$  birbirine izomorfiktir ve  $L^p$  ve  $L^q$  için de durum aynıdır.  $L^2$  bir Hilbert uzayı olduğundan, ayrılabilir olarak alınrsa  $\ell^2$ 'ye izomorfiktir:  $L^2 \simeq \ell^2$ .

$\mathbf{V}$  bir ön-Hilbert uzayı ve  $i \neq j$  için, her  $j$  için  $a_j \neq 0$ ,  $\langle a_i, a_j \rangle = 0$  ise  $\mathbf{V}$ 'de sonlu veya sonsuz bir  $\{a_j\}$  dizisi bir ortogonal sistemdir ve her  $j$  için  $\|a_j\| = 1$  durumu da sağlanıyorsa  $a_j$ 'ler ortonormal bir sistemdir. Herhangi bir  $\{a_j\}$  ortogonal sistemi  $b_j = \frac{a_j}{\|a_j\|}$  ile normalize edilerek bir ortonormal sisteme indirgenebilir.

$I = [-1, +1] \subset \mathbb{R}$  için  $\mathcal{C}_{\mathbb{C}}(I)$ ,  $I$  üzerindeki bütün sürekli kompleks değerli fonksiyonların vektör uzayı olsun.  $\mathcal{C}_{\mathbb{C}}(I)$  üzerinde bir iç çarpım

$$\langle f, g \rangle = \int_I \overline{f(t)} g(t) dt \quad (7.4.2)$$

olarak tanımlanır.

**Önerme 7.1**  $\{e_n\}$  ( $\ell^2$ 'deki  $e_n$ 'ler olmak zorunda değil),  $\mathcal{H}$ 'de bir ortonormal sistem ve  $\mathbf{V}$ ,  $\mathcal{H}$ 'nin  $e_n$ 'ler ile üretilen bir kapalı altuzayı olsun. O zaman her  $x \in \mathcal{H}$  için

$$(i) \sum_{n=1}^{\infty} |\langle e_n, x \rangle|^2 = \|P_{\mathbf{V}}(x)\|^2 \leq \|x\|^2 \text{ (Bessel eşitsizliği)} \quad (7.4.3)$$

sağlanır.

**İspat.**  $\{e_i\}$ ,  $\mathbf{V}$ 'yi geren ortonormal baz vektörleri olsun.

$$\begin{aligned} 0 &\leq \|x - \sum_{i=1}^{\infty} \langle e_i, x \rangle e_i\|^2 = \langle x - \sum_{i=1}^{\infty} \langle e_i, x \rangle e_i, x - \sum_{j=1}^{\infty} \langle e_j, x \rangle e_j \rangle \\ &= \|x\|^2 - \langle x, \sum_{j=1}^{\infty} \langle e_j, x \rangle e_j \rangle - \langle \sum_{i=1}^{\infty} \langle e_i, x \rangle e_i, x \rangle + \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \langle e_j, x \rangle \langle e_i, x \rangle \langle e_i, e_j \rangle \\ &= \|x\|^2 - \sum_{j=1}^{\infty} |\langle e_j, x \rangle|^2 - \sum_{i=1}^{\infty} |\langle e_i, x \rangle|^2 + \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \langle e_j, x \rangle \langle e_i, x \rangle \delta_{ij} \end{aligned}$$

$$0 \leq \|x\|^2 - \sum_{i=1}^{\infty} |\langle e_i, x \rangle|^2$$

$$\|P_{\mathbf{V}}(x)\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |\langle e_i, x \rangle|^2 \leq \|x\|^2$$

■ ve

$$\sum_{n=1}^{\infty} \overline{\langle e_n, x \rangle} \langle e_n, y \rangle = \langle P_{\mathbf{V}}(x), P_{\mathbf{V}}(y) \rangle$$

(ii) Serinin genel terimi  $\langle e_n, x \rangle e_n$ ,  $\mathcal{H}$ 'de yakınsaktır ve

$$\sum_{n=1}^{\infty} \langle e_n, x \rangle e_n = P_{\mathbf{V}}(x).$$

Tersine,  $(\alpha_n)$  bir skaler dizisi olsun öyle ki  $\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|^2$  yakınsaktır. O zaman her  $n$  için eşsiz bir  $y \in \mathbf{V}$  vektörü vardır öyle ki  $\langle e_n, y \rangle = \alpha_n$ 'dir. Herhangi bir  $x \in \mathcal{H}$  vektörü,  $\langle e_n, x \rangle = \alpha_n$ , ve  $z$ ,  $\mathbf{V}$ 'ye ortogonal olmak üzere  $x = y + z$  olarak yazılabilir.

$\{e_n\} = \mathbf{V}$  iken  $\mathcal{H} = \mathbf{V}$  oluyorsa  $\{e_n\}$  sisteminin total olduğu anlamına gelir. O zaman  $\{e_n\}$ ,  $\mathcal{H}$  için ortonormal bir bazdır. Hilbert uzayı  $\mathcal{H}$  ve total ortonormal  $\{e_n\}$  sistemi için  $P_{\mathbf{V}}$  yerine

$$\sum_{n=1}^{\infty} \overline{\langle e_n, x \rangle} \langle e_n, x \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle e_n, x \rangle|^2 = \|x\|^2 \quad (7.4.4)$$

ve

$$\sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle \langle e_n, y \rangle = \langle x, y \rangle \quad (7.4.5)$$

olarak yazılabilir ve (7.4.4) ve (7.4.5) özdeşliklerine Parseval özdeşlikleri denir. Parseval özdeşlikleri,  $\{e_n\}$ 'nin o Hilbert uzayında total bir sistem olması için gerek ve yeter koşulu verir (Dieudonné 1960).

$\mathbf{V}$  ayrılabilir bir ön-Hilbert uzayı ve  $\{b_i\}$ ,  $\mathbf{V}$ 'deki çizgisel bağımsız vektörlerin total bir dizisi olsun.  $b_1, \dots, b_n$  ile üretilen  $\mathbf{V}$ 'nin  $n$ -boyutlu  $V_n$  altuzayı için  $c_n = b_n - P_{V_{n-1}}(b_n)$  olarak tanımlanırsa  $\{c_j\}$  total ortogonal bir sistemdir öyle ki her  $n$  için  $V_n$ ,  $\{c_i\}_{i=1}^n$  ile üretilir.  $c_j$ 'ler normalize değilse  $\frac{c_j}{\|c_j\|} = \{a_j\}$  olacak şekilde  $\{c_j\}$  sistemi normalize edilir ve ortonormalleştirme süreci ile  $\{b_n\}$ 'den  $\{a_n\}$ 'nin çıkarıldığı söylenir.

## 7.5 Uygulamalar: Sürekli Fonksiyonlar Uzayı

### 7.5.1 Sınırlı fonksiyonlar uzayı

$\mathbb{k}$  sayı alanı üzerinde bir  $\mathbf{N}$  normlu uzayı ve herhangi bir  $A$  kümesi için  $f : A \rightarrow \mathbf{N}$  gönderiminin sınırlı olması  $f(A)$ 'nın  $\mathbf{N}$ 'de sınırlı olması demektir, bu ifadenin eşdeğeri  $\sup_{t \in A} \|f(t)\| < \infty$ 'dir. Bu gönderimlerin kümesi  $\mathcal{B}_{\mathbf{N}}(A) = \{f | f : A \rightarrow \mathbf{N} \text{ ve } \sup_{t \in A} \|f(t)\| < \infty\}$  bir vektör uzayıdır.

$$f : A \rightarrow \mathbf{N}$$

$$t \mapsto f(t) = f_1(t)e_1 + \dots + f_n(t)e_n$$

gönderimde  $f$ 'nin sınırlı olabilmesi için her  $i \in \{1, \dots, n\}$  için  $f_i$  skaler gönderimlerinin sınırlı olması gerekir.  $\mathbf{N}$  sonlu boyutlu ise  $\mathcal{B}_{\mathbf{N}}(A) = \bigoplus_i L_i$ 'dir (topolojik olarak), öyle ki her  $i$  için  $L_i$ ,  $\mathcal{B}_{\mathbb{k}}(A)$ 'ya izometriktir.

### 7.5.2 Sınırlı sürekli fonksiyonlar uzayı

$\mathcal{C}_{\mathbf{N}}(X)$ ,  $X$  metrik uzayından  $\mathbf{N}$  normlu uzayına sürekli gönderimlerin vektör uzayı; ve  $\mathcal{C}_{\mathbf{N}}^{\infty}(X)$ ,  $X$ 'ten  $\mathbf{N}$ 'ye bütün sınırlı sürekli gönderimlerin kümesidir. Aksi belirtil-

medikçe  $\mathcal{C}_{\mathbf{N}}^{\infty}(X)$ ,  $\mathcal{B}_{\mathbf{N}}(X)$ 'in normlu altuzayıdır.  $\mathcal{C}_{\mathbf{N}}(X)$  altuzayı  $\mathcal{B}_{\mathbf{N}}(X)$ 'de kapalıdır, yani sınırlı sonlu fonksiyonların düzgün bir limiti süreklidir.

**Teorem 7.2 (Dini Teoremi)**  $X$  kompakt bir metrik uzay olsun. Artan (sırasıyla azalan) reel-değerli sürekli  $(f_n)$  fonksiyonlar dizisi basitçe sürekli bir  $g$  fonksiyonuna yakınıyor ise  $g$ 'ye düzgün yakınsıyordur.

### 7.5.3 Stone-Weierstrass yaklaşım teoremi

Bir  $X$  metrik uzayı için  $\mathcal{C}_{\mathbb{k}}(X)$ ,  $\mathbb{k}$  sayı alanı üzerinde bir cebirdir.  $\mathcal{B}_{\mathbb{k}}(X)$ 'in bir  $A$  altkümesinde ayrık her  $x, y \in X$  nokta çifti için  $f(x) \neq f(y)$ 'yi sağlayan bir  $f \in A$  gönderimi var ise  $A$ 'nın  $X$ 'in noktalarını ayırdığı söylenir (Dieudonné 1960).

**Teorem 7.3 (Stone-Weierstrass Teoremi)**  $X$  metrik uzayı için  $\mathcal{C}_{\mathbb{R}}(X)$ 'in  $\mathcal{A}$  altcebri sabit fonksiyonlar içeriyor ve  $X$ 'in noktalarını ayırıyor ise  $\mathcal{A} \subset \mathcal{C}_{\mathbb{R}}(X)$  yoğundur.

Kompakt  $X$  metrik uzayı için  $\mathcal{C}_{\mathbb{C}}(X)$ 'in  $\mathcal{A}$  altcebri sabit fonksiyonlar içeriyor,  $X$ 'in noktalarını ayırıyor ve her  $f \in \mathcal{A}$ 'nin eşleniği  $\bar{f}$  de  $\mathcal{A}$ 'ya ait ise  $\mathcal{A} \subset \mathcal{C}_{\mathbb{C}}(X)$  yoğundur.

### 7.5.4 Regüle edilmiş fonksiyonlar

$a$  merkezli,  $b$  ekstremumlu bir  $I \subset \mathbb{R}$  aralığı ve bir  $\mathbf{N}$  Banach uzayı için  $\bar{I}$ 'nin ( $I$ 'nin  $\bar{\mathbb{R}}$ 'deki kapanışı) noktalarının  $x_0 = a, x_n = b$  olacak şekilde artan, sonlu bir  $(x_i)_{0 \leq i \leq n}$  dizisi ve her  $]x_i, x_{i+1}[$  ( $0 \leq i \leq n - 1$ ) açık aralığı için sabit olan bir  $f : I \rightarrow \mathbf{N}$  gönderimi var ise  $f$ 'ye basamak-fonksiyonu denir.

Herhangi bir  $f : I \rightarrow \mathbf{N}$  gönderimi, herhangi bir  $b \neq x \in I$  noktası için,  $y \in I$  ve  $y > x$  olmak üzere,  $\lim_{y \rightarrow x} f(y)$  var ise  $f$ 'nin sağdan limiti olduğu söylenir ve  $f(x+)$  olarak gösterilir.  $f$ 'nin soldan limiti var ise ( $y < x$ )  $a \neq x \in I$  için limiti olduğu söylenir ve  $f(x-)$  olarak gösterilir.  $f(x+)$ 'ya ve  $f(x-)$ 'ye ayrı ayrı  $f$ 'nin tek taraflı limiti denir. Bir  $f : I \rightarrow \mathbf{N}$  gönderiminin  $I$ 'nin bütün noktalarında tek taraflı bir limiti var ise  $f$  gönderiminin regüle edilmiş olduğu söylenir.

Kompakt bir  $I = [a, b]$  aralığı için bir  $f : I \longrightarrow \mathbf{N}$  gönderiminin regüle edilmiş olabilmesi için  $f$ 'nin basamak fonksiyonlarından oluşan düzgün yakınsak bir dizisinin limiti olmasıdır öyle ki  $I \subset \mathbb{R}$ 'dan Banach uzayına herhangi bir sürekli gönderim regüle edilmiştir;  $I$ 'dan  $\mathbb{R}$ 'ye herhangi bir monoton gönderim de regüle edilmiştir.

## 8. KUANTUM MEKANİĞİ

20. yüzyılda klasik mekaniğin ve elektromanyetik teorinin artık yetmediği ve deney ile teori arasında uyumsuzluklar ortaya çıkmasından ötürü fizikçilerin yeni bir teoriye ihtiyacı doğdu. Bunun çok bilinen bir örneği şöyledir: Klasik elektromanyetik teoriye göre atomik olayları açıklamak için uygulandığında atomun etrafında klasik orbitallerde dolanan elektronun ivmelenen hareket yapmasından ötürü, sürekli olarak elektromanyetik ışınım yapması ve

$$P = -\frac{dE}{dt} = \frac{2e^2}{3c^3}\omega_0^4 \langle x^2 \rangle \quad (8.0.1)$$

formülüne (Crawford 1968) göre enerji kaybı olduğunda elektronun çekirdeğe düşmesi gerekir ve atomun stabil olmamasına sebep olur ama bu deneylerle çelişiyor. Dolayısıyla klasik mekaniğin öğretileri yerine, bu tür durumları açıklayabilecek yeni bir teoriye ihtiyaç duyuldu. Böylelikle kuantum mekaniği, veya dalga mekaniği, doğmuş oldu. Bu teorilerin birbirlerinden farkları, klasik mekanikte bir parçacığın konumu ve hız vektörleri biliniyor ise herhangi bir zamanda parçacığın konumu kesin bir şekilde bilinebilir ve bunlar hareket denklemlerini tam bir şekilde verir ve klasik mekanikte  $T$  gözlenebilir ve bir  $\psi$  durumu için  $\delta_{T\psi}$  ölçüsüyle anlatılır ve burada bir kesinsizlik yoktur; kuantum mekaniğindeyse parçacığın belli bir yolu yoktur ve onun konumu ile hızı aynı anda, aynı kesinlikle ölçülemezler. Bu kuantum mekaniğinin temeli olan bir konsepttir ve Heisenberg tarafından 1927 yılında keşfedilmiştir (Landau ve Lifshitz 1958). Bu konseptte Heisenberg belirsizlik ilkesi denir. Kuantum bir parçacığın belirli bir yolunun olmaması o kuantum parçacığının başka dinamik karakterizasyonu olmaması anlamına gelir. Kuantum mekaniğinde durumlar, bir süperpozisyon halindedir ve ölçüldüğünde onu oluşturan durumlardan birine çöker, yani sistem başlangıçta bir  $\psi = \sum \alpha_j \psi_j$  durumundayken ölçüm yapıldığında bu  $\psi_j$  durumlarından birine çöker (saf durumlar için). Burada ölçüm ve deneyden kasıt bir kuantum parçacık ile klasik bir ölçüm cihazının etkileşmesidir. Ölçüm cihazı, makroskopik veya mikroskopik olabilir. Ölçüm cihazının makroskopik veya mikroskopik olmasıysa deneyin istenilen kesinliğiyle alakalıdır (Landau ve Lifshitz 1958). Prensipte farkları olsa da kuantum mekaniği limit durumu olan klasik mekaniği, kendi

formülasyonu için gerektirir.

Kuantum mekaniğinin tipik bir sorunu daha önceki ölçümlerin sonuçları sayesinde daha sonraki deneylerin sonuçlarını öngörmektir. Klasik mekaniğin aksine kuantum mekaniğinde kuantum sisteminin üzerinde yapılan herhangi bir ölçüm, bu durumda elektron, o kuantum sistemini etkiler ve istenilen bir ölçüm kesinliği için o sistemin üzerindeki etkiyi keyfi küçük yapmak prensipte imkansızdır. Ölçümün bu özelliği, elektronun dinamik karakterizasyonunun sadece ölçümün bir sonucu olarak belirmesindedir. Açıkça ölçümün niceliğın üzerindeki etkisinin keyfi küçük yapılabilmesi o niceliğın ölçümden bağımsız olarak belirli bir değerin olması demektir.

Elektronun koordinatlarının ölçümü kuantum mekaniğinde temel bir rol oynar. Kuantum mekaniğinin limitleri dahilinde istenilen bir kesinlik ile bu koordinatlar ölçülebilir ama bu özellik klasik mekaniğın aksine başka gözlenebilirlerin belirsizliklerini değiştirebilir, çok bilinen bir örnek koordinatların ölçümü momentumun ölçümündeki kesinliği etkiler.  $\Delta t$  zaman aralıklarında elektronun koordinatlarının başarılı ölçümlerinin sayısı arttıkça elde edilen sonuçların varyasyonu daha süresiz ve daha düzensiz olur ve bu sonuçlar genelde pürüzsüz bir eğride yatmazlar. Pürüzsüz bir eğri elde etmek için elektronun koordinatlarının küçük derecedeki kesinlikler ile ölçülmesi gerekir.

Ölçümlerin kesinliğini değiştirmeden ölçümler arasındaki süre azaltılır ise koordinatların komşuluklarını verir. Bir dizi başarılı ölçümün sonuçları uzayın küçük bir bölgesinde yatar ve pürüzsüz bir eğri yerine uzayın bu bölgesinde tamamen düzensiz bir şekilde dağılır.  $\Delta t \rightarrow 0$  iken bitişik ölçümlerin sonucu düz bir çizgide yatma eğiliminde değildir. Klasik mekanikteki hızın tanımı  $\Delta t \rightarrow 0$  iken art arda iki koordinatın farkının, o  $\Delta t$ 'ye bölünmesi iken kuantum mekaniğinde, klasik mekanikteki anlamında bir parçacığın hızı diye bir konsept yoktur. Kuantum mekaniğindeki verilen bir anda bir parçacığın hızının kavramı oluşturulabilir ve kuantum mekaniğinin limit durumu olan klasik mekaniğe geçildiğinde bu klasik mekanikteki bir parçacığın hızını verir. Kuantum mekaniğın aksine klasik mekanikte her an için bir parçacığın

$\vec{r}(t)$  ve  $\vec{v}(t)$  vektörleri mevcuttur. Kuantum mekaniğinde ölçümlerin sonucunda bir parçacığın, bu durumda bir elektron, belirli koordinatları var ise belirli bir hızı yoktur. Tersine belirli bir hızı var ise uzayda belli bir koordinatı yoktur.  $\vec{r}(t)$  ve  $\vec{v}(t)$  vektörlerinin aynı anda var olması demek, o elektronun bir yolunun olması demektir. Ama kuantum mekaniğinde bir parçacığın aynı anda hem hızı hem de koordinatları aynı kesinliklerle ölçülemez. Bu yüzden kuantum mekaniksel bir durum klasik mekaniğe göre daha az nicelik ile açıklanır, yani klasik tanımdan daha az detaylıdır. Bunlardan farklı olarak, kuantum mekaniğinde aynı anda ölçülebilecek ve ölçümlerinin birbirlerinin kesinliğini etkilemeyecek nicelikler de mevcuttur, yani aynı anda kesin değerler alabilirler. Böyle fiziksel gözlenebilirlerin kümesine tam kümeler denir. Tam olarak açıklanmış durumların ölçümlerinden elektronun, daha önceki ölçümlerinin sonucu ne olursa olsun, daha sonra yapılan herhangi bir ölçümün birçok sonucunun olasılıkları belirlenebilir.

## 8.1 Matematiksel Yapısı

Fiziksel bir teori, durumlar kümesi  $\mathcal{S}$ , gözlenebilirlerin kümesi  $O$  ve fiziksel sistemin simetri grubu  $G$  üçlüsünden oluşan  $(\mathcal{S}, O, G)$ 'yi gerektirir. Klasik mekanikte durumların kümesi faz uzayıdır:  $\mathcal{S} = \Gamma = \mathbb{R}^{3N} \oplus \mathbb{R}^{3N}$ . Direkt toplamdaki ilk terim konfigürasyon uzayı, ikinci terim ise momentumlardır, yani  $\mathcal{S} = \{(q_i, p_i) | 1 \leq i \leq 3N = s\}$ . Bu durumda gözlenebilirlerin kümesi ise  $\mathcal{S}$  üzerindeki reel-değerli sürekli gönderimlerin kümesi  $\mathcal{C}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^{6N}) = \{T|T : \mathbb{R}^{6N} \rightarrow \mathbb{R}\}$ 'dir. Kuantum mekaniğinde sistem hakkındaki bütün bilgileri (saf durumlar için) Hilbert uzaylarının (genel formülasyonda ayrılabilirlerdir, yani sayılabilir bir ortonormal bazı vardır) elemanları olan  $|\psi\rangle$  (bu çalışmanın genelinde  $\psi$  olarak kullanılacaktır) ket vektörlerini barındırır. Fiziksel durumlar, Hilbert uzayındaki birim küre  $\mathcal{S} = \{\psi \in \mathcal{H} | \|\psi\| = 1\}$  ile verilir. Gözlenebilirler ise  $\mathcal{H}$  üzerindeki kendisine eşlenik operatörlerin kümesidir. İki durum  $\psi, \phi \in \mathcal{H}$  birbirinden sadece bir  $\alpha \in \mathbb{C}$  kadar  $\psi = \alpha\phi$  olacak şekilde ayrılıyor ise aynı duruma tekabül ederler. Toplama altında asosyatif ve komütatiftir öyle ki her  $\psi_1, \psi_2, \psi_3 \in \mathcal{H}$  için

$$\psi_1 + (\psi_2 + \psi_3) = (\psi_1 + \psi_2) + \psi_3,$$

$$\psi_1 + \psi_2 = \psi_2 + \psi_1.$$

Yukarıdakilere ek olarak bu  $\mathcal{H}$ 'nin eşsiz bir  $0 \in \mathcal{H}$  elemanı vardır öyle ki her  $\psi \in \mathcal{H}$  için  $\psi + 0 = \psi$ .

Bir vektör uzayının sonlu bir  $\{e_i\}_{i=1}^n$  altkümesi için

$$\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_n e_n = 0 \quad (8.1.1)$$

durumunun olması her  $i \in \{1, \dots, n\}$  için  $\alpha_i = 0$  ile mümkünse o altkümenin vektörleri çizgisel bağımsızdır, yani birbiri cinsinden yazılamaz. Bir vektör uzayının her  $\psi \in \mathcal{H}$  vektörü, onun bir altkümesi  $\{\psi_i = e_i\}_{i=1}^N$ 'nin elemanlarının

$$\psi = \alpha_1 \psi_1 + \dots + \alpha_N \psi_N = \sum_{i=1}^N \alpha_i \psi_i \quad ; (\forall i)(\alpha_i \in \mathbb{C}) \quad (8.1.2)$$

toplamı olarak yazılabiliyor ise o vektör altkümesine tamdır denir. Tam bir kümenin vektörlerinin çizgisel bağımsız olması gerekmez ama onun her zaman çizgisel bağımsız olan bir altkümesi bulunabilir (Weinberg 2013). Çizgisel bağımsız tam bir küme, o vektör uzayını geriye alır veya onun bir bazıdır denir.

$n$ -boyutlu  $\mathbb{k}$  vektör uzayı  $\mathbf{V}$ 'nin dual uzayı yine  $n$ -boyutlu  $\mathbb{k}$  vektör uzayı  $\mathcal{L}(\mathbf{V}; \mathbb{k}) := \mathbf{V}^*$ 'dir (veya  $Hom(\mathbf{V}; \mathbb{k})$ ) ve aynı zamanda bu dual uzay  $\mathbf{V}$  üzerindeki çizgisel fonksiyonların vektör uzayıdır:  $\mathbf{V}^* = \{T|T : \mathbf{V} \rightarrow \mathbb{k}\}$ . Bu dual uzayın elemanlarına kovektör dendiği de olur.

Ket vektörleri,  $\mathbb{k}$  sayı alanı üzerinde sonlu boyutlu bir Hilbert uzayı  $\mathcal{H} = \{|\psi\rangle\}$ 'nin elemanlarıdır. Sonlu boyutlu bir Hilbert uzayının dual uzayı  $\mathcal{H}^* = \{\langle\psi|\}$ 'dir ve her  $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$  ket vektörü için bu Hilbert uzayının dualinde eşsiz bir  $\langle\psi| \in \mathcal{H}^*$  bra vektörü (1-1 bir tekabül) vardır. Dolayısıyla  $\mathcal{H}$  ile  $\mathcal{H}^*$  birbirine izomorfiktirler. Fizik açısından bra vektörleri  $\mathcal{H}$  üzerindeki çizgisel fonksiyonlardır öyle ki  $\langle\phi|(\psi) = \langle\phi|\psi\rangle$  (veya  $\langle\phi, \psi\rangle$ ) ;  $\phi, \psi \in \mathcal{H}$ . Riesz Temsil Teoreminden  $\mathcal{H}$ 'nin dualinde,  $\phi, \psi \in \mathcal{H}$  vektörleri için  $f_\phi(\psi) = \langle\phi, \psi\rangle$ 'yi mümkün kılan, eşsiz bir  $f_\phi \in \mathcal{H}^*$  elemanı vardır. Bunun ispatı için  $\mathcal{H}$  üzerindeki çizgisel fonksiyonel  $f$  ele alınsın öyle ki herhangi  $\phi, \psi \in \mathcal{H}$  için  $f(\psi) = \langle\phi, \psi\rangle$ . Herhangi bir  $\psi \in \mathcal{H}$  vektörü o vektör uzayının sonlu bir  $\{e_i\}_{i=1}^N$

bazı üzerinden

$$\psi = \sum_{i=1}^N \langle e_i, \psi \rangle e_i$$

olarak yazılabildiğinden (Bohm 1993),

$$\begin{aligned} f\left(\sum_{i=1}^N \langle e_i, \psi \rangle e_i\right) &= \langle \phi, \psi \rangle \\ \sum_{i=1}^N \langle e_i, \psi \rangle f(e_i) &= \langle \phi, \psi \rangle \\ \left\langle \sum_{i=1}^N \overline{f(e_i)} e_i, \psi \right\rangle &= \langle \phi, \psi \rangle \end{aligned}$$

elde edilir. Açıkça  $\sum_{i=1}^N \overline{f(e_i)} e_i = \phi$ 'dır ( $= |\phi\rangle$ ). Bu vektörün eşsiz olmadığı farz edilsin öyle ki  $\phi_1, \phi_2 \in \mathcal{H}$  vektörleri bunu sağlasın:  $f(\psi) = \langle \phi_1, \psi \rangle = \langle \phi_2, \psi \rangle ; \forall \psi \in \mathcal{H}$ . Dejenere olmayan Hermit-sel formun özelliklerinden (7.1.3), her  $\psi \in \mathcal{H}$  için  $\langle \phi_1 - \phi_2, \psi \rangle = 0$  eşitliği sağlanıyorsa  $\phi_1 = \phi_2$  olmalıdır.  $f_\phi$ 'nin operator normu

$$\|f_\phi\|_{\mathcal{H}^*} = \sup_{\psi \in \mathcal{H} - \{0\}} \frac{|f_\phi(\psi)|}{\|\psi\|_{\mathcal{H}}} = \sup_{\psi \in \mathcal{H} - \{0\}} \frac{|\langle \phi, \psi \rangle|}{\|\psi\|_{\mathcal{H}}} \leq \frac{\|\phi\|_{\mathcal{H}} \|\psi\|_{\mathcal{H}}}{\|\psi\|_{\mathcal{H}}} \quad (8.1.3)$$

olduğundan eşitlik durumu  $\psi = \phi$  için mümkün olur. Öyle alındığında, bu supremum durumuna tekabül ettiğinden  $\phi \in \mathcal{H}$  normu ile ona tekabülen eden çizgisel fonksiyonel  $f_\phi$ 'nin operator normunun birbirlerine  $\|f_\phi\|_{\mathcal{H}^*} = \|\phi\|_{\mathcal{H}}$  şeklinde eşit olduğu görülür.  $f_\phi(\phi) = \langle \phi, \phi \rangle = \|\phi\|_{\mathcal{H}}^2$  olduğundan bu çizgisel fonksiyona, o vektör eşlik eden dual uzayın elemanı  $f_\phi \equiv \langle \phi |$  olarak yazılır.

$\ell^2$ , üzerinde  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\ell^2}$  iç çarpımı tanımlı olan, karesi toplanabilir dizilerin Hilbert uzayıdır ama genelde sadece  $\langle \cdot, \psi \rangle$  olarak gösterilir;  $L^2$  de bir Hilbert uzayıdır ve  $L^2_{\mathbb{C}}(Q)$ ,  $\mathbb{C}$  sayı alanı üzerinde  $Q$  konfigürasyon uzayı üzerindeki karesi integrallenebilir fonksiyonlar uzayıdır öyle ki  $\Psi \in L^2_{\mathbb{C}}(Q)$  olmak üzere

$$\begin{aligned} \Psi : Q &\longrightarrow \mathbb{C} \\ q &\longmapsto \Psi(q). \end{aligned}$$

Yani  $\Psi$ , konfigürasyon uzayındaki bir noktayı alıp onu kompleks bir sayıya götürür ve bu  $\Psi(q) = \langle q, \psi \rangle_{\ell^2}$  olur. Burada, Heisenberg'in matris mekaniğinin teorisi  $\ell^2$ 'yi

kullanırken; Schrödinger'in dalga mekaniği teorisi  $L^2$ 'yi kullanır ve bunlar birbirine izomorftir:  $\ell^2 \simeq L^2_{\mathbb{C}}(Q)$  (7.4). Bunların izomorfik olması bu iki fiziksel teorinin birbirine eşdeğer olması demektir.

$V_1, V_2$  iki vektör uzayı olsun. Bir  $T : D(T) \subset V_1 \longrightarrow V_2$  gönderiminin genişletmesi  $S : V_1 \longrightarrow V_2$ , her  $\psi \in D(T)$  için  $T\psi = S\psi$  özelliğini sağlar.  $\psi_n \in D(T)$  için  $\psi \in \mathcal{H}$ 'ye yakınsıyor ve  $T\psi_n$  de bir  $\psi'$ 'ne yakınsadığında  $\psi \in D(T)$  ve  $T\psi = \psi'$  durumuna sebep oluyorsa  $T$  operatörü kapalıdır.  $T$  operatörünün kapalı olması demek,  $T$ 'nin grafiğinin  $V_1 \times V_2$ 'de kapalı olması demektir.  $T$  operatörünün kapalı bir genişletmesi varsa  $T$  operatörü kapatılabilir denir ve kapamışı  $\bar{T}$  ile gösterilir.

## 8.2 Süperpozisyon İlkesi

Kuantum sisteminin konfigürasyon uzayı  $Q = \{q\}$  olmak üzere o kuantum sisteminin koordinatları  $q$ 'lardır.  $q$  koordinatına tekabül eden diferansiyeli,  $s$  serbestlik derecesi olmak üzere,  $dq = dq_1 \cdots dq_s$ , o kuantum sisteminin konfigürasyon uzayındaki sonsuz küçük hacim elemanıdır. Sistemin herhangi bir durumu istenilen bir anda koordinatların tanımlı bir fonksiyonu olan  $\langle q, \psi \rangle_{\ell^2} = \Psi(q)$  dalga fonksiyonu, olasılık genliği de denir, ile açıklanabilir. Dalga fonksiyonunun modülünün karesi  $\overline{\langle q, \psi \rangle} \langle q, \psi \rangle = \overline{\Psi(q)}\Psi(q) = |\Psi(q)|^2$  olasılık yoğunluğunu;  $|\Psi(q)|^2 dq$  ise bir ölçüm yapıldığında konfigürasyon uzayındaki  $dq$  elemanında bulunma olasılığını verir. Dalga fonksiyonu biliniyor ise birçok ölçümün olma olasılıkları hesaplanılabilmesine olanak sağlar. Olasılıklar  $\Psi(q)$  ve  $\overline{\Psi(q)}$ 'da iki çizgisel olan bir ifadeyle belirlenir ve

$$\iint \langle q, \psi \rangle \langle \psi, q' \rangle \langle q, \hat{\Phi} q' \rangle dq dq' = \iint \Psi(q) \overline{\Psi(q')} \Phi(q, q') dq dq' \quad (8.2.1)$$

en genel formudur. İntegrasyon tüm konfigürasyon uzayı üzerindedir ve  $\Phi$  deneyin karakterizasyonuna özgün  $Q$  üzerinde iki nokta fonksiyonudur ve matematiksel olarak  $\Phi$  fonksiyonu bir kernel'dır. Örneğin, konum operatörü için bu  $\Phi$  fonksiyonu  $\Phi(q, q') = \delta(q - q')\delta(q'' - q')$  olur.

$\Psi_1(q)$  birinci deneyin ölçümüne,  $\Psi_2(q)$  ikinci deneyin ölçümüne yol açıyorsa  $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}$  olmak üzere bu iki dalga denkleminin çizgisel toplamı, veya süperpozisyonu,

$\alpha_1\Psi_1(q) + \alpha_2\Psi_2(q)$  ya birinci ya da ikinci ölçümü verir. Buna durumların süperpozisyon prensipi denir. Yekpare bir sistem yerine iki kısımdan oluşan ve birbiriyle etkileşmeyen bir sistemin dalga fonksiyonunu onların çarpımları

$$\Psi_{12}(q_1, q_2) = \Psi_1(q_1)\Psi_2(q_2)$$

olacak şekilde yazılabilir ve  $q_1$  koordinatı ile  $q_2$  koordinatının olasılıkları birbirlerinden bağımsızdır.

### 8.3 Operatörler

Bir  $\mathcal{H}$  Hilbert uzayı üzerindeki bir  $\hat{f}$  operatörü, o Hilbert uzayından kendisine çizgisel bir gönderimdir:

$$\begin{aligned}\hat{f} : \mathcal{H} &\longrightarrow \mathcal{H} \\ \psi &\longmapsto \hat{f}\psi = \phi\end{aligned}$$

yani  $\hat{f} \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ . Kuantum mekaniğinde gözlenebilirler,  $\mathcal{H}$  üzerindeki kendisine eşlenik operatörlerdir.  $\hat{f}$  operatörü  $f$  olarak da yazılabilir ancak  $f$  gözlenebilirliği ile karışmaması için gerektiği yerde herhangi bir  $T$  gözlenebilirine tekabül eden operatör  $\hat{T}$  ile gösterilecektir.  $\hat{f}$  operatörünün domaini  $D(\hat{f}) \subset \mathcal{H}$  ile gösterilir ve yoğun olması gerekmez.  $\hat{f}$  operatörü yoğun tanımlıdır eğer her  $\psi \in \mathcal{H}$  ve her  $\varepsilon$  için bir  $\phi \in D(\hat{f})$  var ise öyle ki  $\|\phi - \psi\| < \varepsilon$ . Bu yakınsaklığı andıran, birbirine keyfi "yakın" olmaktır, dolayısıyla yoğunluk bu anlamda görülebiliyor ve  $\hat{f}$ , veya sadece çizgisel bir gönderim, yoğun olduğunda  $D(\hat{f})$ ,  $\mathcal{H}$ 'de yoğundur. Yoğun tanımlı operatör sınırlıdır eğer bir  $\alpha \in \mathbb{R}_{>0}$  vardır her  $\psi \in \mathcal{H}$  için

$$\|\hat{f}\psi\| \leq \alpha\|\psi\|$$

sağlanıyorsa. Yoğun tanımlı  $\hat{f}$  operatörü her  $\psi, \phi \in D(\hat{f})$  için  $\langle \phi, \hat{f}\psi \rangle = \langle \hat{f}\phi, \psi \rangle$  özelliğine sağlıyor ise ona simetriktir denir. Yoğun tanımlı bir  $\hat{f}$  operatörünün eşleniği  $\hat{f}^*$  (veya  $\hat{f}^\dagger$ )

$$\hat{f}^* : D(\hat{f}^*) \longrightarrow \mathcal{H}$$

gönderimidir ve onun domaini

$$D(\hat{f}^*) = \{\psi \in \mathcal{H} | (\exists \psi' \in \mathcal{H})(\forall \phi \in D(\hat{f}))(\langle \psi, \hat{f}\phi \rangle = \langle \psi', \phi \rangle)\} \quad (8.3.1)$$

olarak verilir.  $\psi' \in \mathcal{H}$ ,  $D(\hat{f}^*)$ 'nin  $\mathcal{H}$ 'de yoğun olmasından dolayı eşsizdir ve  $\psi' = \hat{f}^*\psi$  olarak tanımlanır. Bir  $\hat{f}$  operatörün domaini, onun eşlenik operatörünün domainiyle aynı ve her durum vektörü için etkileri aynıysa o operatöre kendisine eşleniktir denir:  $D(\hat{f}) = D(\hat{f}^*)$  ve her  $\psi \in D(\hat{f})$  için  $\hat{f}\psi = \hat{f}^*\psi$ . Genelde fizik literatüründe kendisine eşlenik operatörlere Hermityen operatörler denir.

$T$ ,  $\mathcal{H}$  üzerinde bir operatör olsun.  $\phi, \psi \in \mathcal{H}$  gibi iki vektör için  $\langle \phi | T, \mathcal{H}$  üzerinde çizgisel bir fonksiyoneldir öyle ki

$$\begin{aligned} \langle \phi | T : \mathcal{H} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ \psi &\longmapsto \langle \phi | T(|\psi\rangle) = \langle \phi | T|\psi\rangle = \langle \phi, T\psi \rangle. \end{aligned}$$

Bu gösterim  $\langle \phi |$  çizgisel fonksiyonelinin  $T|\psi\rangle \in \mathcal{H}$  vektörüne etkisi olarak da düşünülebilir.  $\phi, \phi', \psi \in \mathcal{H}$  için  $|\phi\rangle\langle\phi'|$ ,  $\mathcal{H}$  üzerinde çizgisel bir operatördür (Hall 2013) öyle ki

$$\begin{aligned} |\phi\rangle\langle\phi'| : \mathcal{H} &\longrightarrow \mathcal{H} \\ \psi &\longmapsto |\phi\rangle\langle\phi'|(|\psi\rangle) = \langle\phi', \psi\rangle|\phi\rangle \end{aligned} \tag{8.3.2}$$

gönderimi, her ket vektörünü başka bir ket vektörüne götürür. Sonlu boyutlu bir Hilbert uzayı üzerinde terslenebilir bir  $\hat{f}$  operatörünün tersi  $\hat{f}^{-1}$  olarak gösterilir ve  $\hat{f} \circ \hat{f}^{-1} = \hat{f}^{-1} \circ \hat{f} = id_{\mathcal{H}}$  olur öyle ki

$$\begin{aligned} id_{\mathcal{H}} : \mathcal{H} &\longrightarrow \mathcal{H} \\ \psi &\longmapsto \psi \end{aligned}$$

o Hilbert uzayının birim operatörüdür.  $\{e_i\}_{i=1}^N$ ,  $\mathcal{H}$ 'nin sonlu bir bazı olmak üzere  $\phi = e_i = \phi'$  olduğunda her  $\psi \in \mathcal{H}$  için

$$|\psi\rangle = \left( \sum_{i=1}^N |e_i\rangle\langle e_i| \right) |\psi\rangle = \sum_{i=1}^N \langle e_i|\psi\rangle |e_i\rangle$$

olduğundan,  $\sum_{i=1}^N |e_i\rangle\langle e_i|$  operatörü,  $\mathcal{H}$  üzerinde birim operatördür.

Bir  $\hat{f}$  operatörü, kendisinin öz durumuna etkiğinde öz durumunu bir sabit ile ölçeklendirir, öyle ki

$$\hat{f}\psi = \lambda_f\psi. \tag{8.3.3}$$

$\lambda_f \in \mathbb{C}$  sabitine özdeğer; (8.3.3) denkleminin ise özdeğer denklemi denir.

$\Psi(q)$ 'ya  $q$ -temsilde dalga fonksiyonu denir ama bu konunun gelişinden belli olacağından sadece dalga fonksiyonu denilecektir. Burada  $q \in Q$  konfigürasyon uzayında bir noktayken  $|q\rangle$  ket vektörü, ona  $\hat{q}$  operatörü etkiğinde

$$\hat{q}|q\rangle = q|q\rangle \quad (8.3.4)$$

elde edilen  $q \in Q$  özdeğerine tekabül eden ket vektörüdür. Hilbert uzayları çizgisel bir yapıya sahipken buradaki konfigürasyon uzayı  $Q = \{q\}$  çizgisel bir uzay olmak zorunda değildir.

$\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}$  sabitleri ve  $\psi_1, \psi_2 \in \mathcal{H}$  ket vektörlerine,  $\mathcal{H}$  üzerindeki bir  $\hat{f}$  operatörü etkiğinde

$$\hat{f}(\alpha_1\psi_1 + \alpha_2\psi_2) = \alpha_1\hat{f}\psi_1 + \alpha_2\hat{f}\psi_2 \quad (8.3.5)$$

oluyor ise  $\hat{f}$  operatörüne çizgisel operatör;

$$\hat{f}(\alpha_1\psi_1 + \alpha_2\psi_2) = \overline{\alpha_1}\hat{f}\psi_1 + \overline{\alpha_2}\hat{f}\psi_2 \quad (8.3.6)$$

oluyor ise  $\hat{f}$  operatörüne anti-çizgisel operatör denir.

$f$ , ilgilenilen kuantum sisteminin durumunu karakterize eden bir fiziksel nicelik olsun. Aslında sadece bir  $f$ 'den değil tam bir küme olarak hepsinden aynı anda bahsediliyordur ama bu sonucu değiştirmedikten kolaylık olması açısından sadece bir nicelikten bahsedilecektir. Bir fiziksel niceliğin kuantum mekaniğinde alabileceği değerleri onun özdeğerleridir ve o özdeğerlerin kümesine bahsedilen niceliğin özdeğer spektrumu denir.  $f$ 'nin özdeğer spektrumunun kümesi  $Spec(f) = \{\lambda \in \mathbb{C} | \hat{f}\psi = \lambda\psi\}$  olarak gösterilsin. Klasik mekanikte olduğu gibi kuantum mekaniğinde de sürekli spektrumlu fiziksel nicelikler vardır. Buna bir örnek, konum,  $\hat{q}|q_0\rangle = q_0|q_0\rangle$ , özdeğerleridir. Ama klasik mekaniğin aksine kuantum mekaniğinde kesikli özdeğer spektrumları da vardır, buna bir örnek: bağlı durumdaki bir elektronun enerjisinin sadece kesikli değerler alabilmesidir ve kuantum mekaniği bu enerji seviyeleri hakkında bilgi verir.

Öncelikle kesikli durumlar, sonrasında ise sürekli özdeğer spektrumlu durumlar incelenilecektir:  $\psi_n$ ,  $f$  niceliğinin  $\lambda_n$  özdeğerine sahip olan özdurumdur. Her  $n$  için

$$\langle \psi_n, \psi_n \rangle = \int |\Psi_n(q)|^2 dq = 1 \quad (8.3.7)$$

olmalıdır ve bu normalizasyon koşuludur.

Her  $n$  için  $\alpha_n \in \mathbb{C}$  katsayıları sabitler olmak üzere durum vektörü, bu öz durumlarının çizgisel bir toplamı olmalıdır:

$$\psi = \sum_n \alpha_n \psi_n \quad (8.3.8)$$

(8.3.8) denklemindeki gibi durum vektörü, herhangi bir fiziksel niceliğin öz durumlarının kümesi hâlinde bir seriye açılabilirse o tam bir kümedir.  $f$  gözlenebilirinin  $\lambda_n$  durumunda,  $\hat{f}\psi_n = \lambda_n\psi_n$ , bulunma olasılığı  $|\alpha_n|^2$ 'dir ve tüm olasılıkların toplamı

$$\sum_n \bar{\alpha}_n \alpha_n = \int \Psi(q) \overline{\Psi(q)} dq \quad (8.3.9)$$

olur. Açıkça dalga fonksiyonu normalizeyse olasılıkların toplamı 1 olur.

$$\alpha_n = \int \langle \psi_n, q \rangle \langle q, \sum_m \alpha_m \psi_m \rangle dq = \int \overline{\Psi_n(q)} \sum_m \alpha_m \Psi_m(q) dq = \alpha_n \delta_{nm} \quad (8.3.10)$$

olur ve bu ortogonalliktendir. Açıkça  $\psi_n$  öz durumları bir ortonormal durumlar kümesi oluşturur.

$f$  niceliğine eşlik eden  $\hat{f}$  operatörü durum vektörüne etkidiğinde

$$\hat{f}\psi = \sum_n \alpha_n \hat{f}\psi_n = \sum_n \alpha_n \lambda_n \psi_n \quad (8.3.11)$$

olarak elde edilir ve bir  $f$  niceliğinin  $\psi$  durumunda ortalama değeri, beklenen değeri de denir,  $\langle \psi, \hat{f}\psi \rangle$ 'dir ama bu ifade  $\psi \in D(\hat{f})$  olduğunda anlamlıdır. Spektral teoride bir  $\psi \in \mathcal{S}$  durumu ve  $\mathcal{H}$ 'nin üzerindeki kendisine eşlenik bir  $\hat{f}$  operatörü için  $\mathbb{R}$  üzerinde bir  $\mu_{f,\psi}$  ölçüsü vardır ve bu ölçüye spektral ölçü denir. Bu spektral ölçü  $f$ 'nin sistem  $\psi$  durumundayken alabileceği değerlerin olasılık dağılımıdır.

O zaman  $q$  bazında ve  $\psi$  durumunda  $f$  niceliğinin ortalama değeri

$$\langle f \rangle = \int \sum_m \sum_n \overline{\alpha_m} \alpha_n \langle \psi_m, q \rangle \langle q, \hat{f} \psi_n \rangle dq = \sum_m \sum_n \overline{\alpha_m} \alpha_n \int \overline{\Psi_m(q)} \lambda_n \Psi_n(q) dq \quad (8.3.12)$$

olur ve diklik koşulundan dolayı, sadece  $m = n$  durumunda integral 0'dan farklı bir değer alır. Dolayısıyla  $f$  gözlenebilirinin ortalama değeri,

$$\langle f \rangle = \sum_n \lambda_n |\alpha_n|^2 \quad (8.3.13)$$

olarak elde edilir ve bu  $\hat{f}$  operatörünün kernel'i

$$K_f(q, q') = \sum_n \lambda_n \overline{\Psi_n(q')} \Psi_n(q) \quad (8.3.14)$$

olarak verilir.

Fiziksel bir gözlenebilirin özdeğerleri ve her durumdaki ortalama değeri reel olmalıdır.

$$\int \overline{\Psi(q)} (\hat{f} \Psi(q)) dq = \int \Psi(q) (\hat{f}^* \overline{\Psi(q)}) dq \quad (8.3.15)$$

(8.3.15) eşitliğindeki integralden açıkça  $\hat{f} = \hat{f}^*$ 'dir. Keyfi  $\Psi_1(q), \Psi_2(q)$  için  $\hat{f}$  operatörünün transpoz operatörü  $\tilde{f}$  olarak gösterilir ve aşağıdaki gibi tanımlanır

$$\int \Psi_1(q) (\hat{f} \Psi_2(q)) dq = \int \Psi_2(q) (\tilde{f} \Psi_1(q)) dq. \quad (8.3.16)$$

$\Psi_1(q) = \overline{\Psi_2(q)}$  olduğunda  $\hat{f}^* = \tilde{f}$  elde edilir. Bu koşulu sağlayan operatörlere Hermityen operatörler denir ve  $f$  operatörünün Hermityen eşleniği  $\hat{f}^\dagger$  ile gösterilir öyle ki  $\tilde{f}^* = \hat{f}^\dagger$ . Fiziksel gözlenebilirlerin Hermityen olması gereklidir ama kuantum mekaniğinde kompleks özdeğerli durumlar da vardır.  $\hat{f}$ , kompleks özdeğerli bir operatör olursa  $\hat{f}^*$  kompleks eşleniğidir, ki özdeğerleri  $f$ 'nin özdeğerlerinin kompleks eşleniğidir.

Kendisine eşlenik bir  $\hat{f}$  operatörün iki farklı özdeğerli  $\psi_n, \psi_m \in \mathcal{H}$  durum vektörleri için

$$\begin{aligned} \langle \psi_m, \hat{f} \psi_n \rangle &= \lambda_n \langle \psi_m, \psi_n \rangle = \lambda_m \langle \psi_m, \psi_n \rangle = \langle \hat{f} \psi_m, \psi_n \rangle \\ &\Rightarrow (\lambda_n - \lambda_m) \langle \psi_m, \psi_n \rangle = 0 \end{aligned} \quad (8.3.17)$$

olarak elde edilir.  $\lambda_n \neq \lambda_m$  olduğu bilindiğinden  $\langle \psi_m, \psi_n \rangle = 0$  olmalıdır. Dolayısıyla kendisine eşlenik bir operatörün farklı özdeğerlere tekabül eden öz durumları birbirine ortogondur. Bu  $\Psi(q) = \langle q, \psi \rangle$  özfonksiyonları için de benzer şekildedir.

#### 8.4 Operatörlerin Toplanmaları ve Çarpımları

$f$  ve  $g$  aynı anda belirli değerler alan iki tane gözlenebilir olsun, yani hangisi ilk ölçülürse ölçülsün diğerrinin sonucunu değıştirmez. Bu gözlenebilirliğe sırasıyla  $\hat{f}$  ve  $\hat{g}$  operatörleri tekabül etsin ve  $\psi \in \mathcal{H}$  bu operatörlerin öz durumları olsun.  $f$  ve  $g$  aynı anda ölçülebiliyor ise  $\hat{f} + \hat{g}$  de bir operatör olmak üzere

$$\begin{aligned} (\hat{f} + \hat{g})\psi &= \lambda'\psi = \lambda_f\psi + \lambda_g\psi = \hat{f}\psi + \hat{g}\psi \\ \Rightarrow \lambda' &= \lambda_f + \lambda_g. \end{aligned}$$

İki tane gözlenebilirin aynı anda ölçülebilmesi onlara karşılık gelen operatörlerin komüte etmesi demektir.  $\hat{f} + \hat{g}$  operatörünün ortalama değeri

$$\langle \hat{f} + \hat{g} \rangle = \int \overline{\langle q, \psi \rangle} \langle q, (\hat{f} + \hat{g})\psi \rangle dq = \int \overline{\Psi(q)} \lambda_f \Psi(q) dq + \int \overline{\Psi(q)} \lambda_g \Psi(q) dq = \langle \hat{f} \rangle + \langle \hat{g} \rangle$$

olur.

$f$  ve  $g$  aynı anda ölçülebilen nicelikler olsun. O zaman  $\hat{f}\hat{g}$ , bu iki niceliğın çarpımı olan bir operatördür öyle ki

$$\hat{f}\psi = \lambda_f\psi \text{ ve } \hat{g}\psi = \lambda_g\psi$$

olmak üzere,

$$\hat{f}(\hat{g}\psi) = \hat{f}(\lambda_g\psi) = \lambda_g\hat{f}\psi = \lambda_g\lambda_f\psi$$

olur.  $f$  ve  $g$  nicelikleri aynı anda ölçülebildiğinden her  $\psi$  için

$$\hat{f}\hat{g} = \hat{g}\hat{f}$$

olur.

$$\hat{f}\hat{g} - \hat{g}\hat{f} = 0 \tag{8.4.1}$$

olmasından dolayı durumlarının değişmesine denk gelir ve komütatör, o operatör cebri üzerinde

$$[\cdot, \cdot] : \mathcal{L}(\mathcal{H}) \times \mathcal{L}(\mathcal{H}) \longrightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H})$$

$$(\hat{f}, \hat{g}) \longmapsto [\hat{f}, \hat{g}] = \hat{f}\hat{g} - \hat{g}\hat{f}$$

ile verilir ve  $\hat{f}$  ile  $\hat{g}$  operatörü komüte ediyor ise ortak öz durumlara sahip oldukları anlamına gelir.

$f$  ve  $g$  aynı anda ölçülemeyen iki nicelikse onların çarpımı önceki gibi tanımlanamaz ve  $\hat{f}\hat{g}$  kendisinin eşleneği değil ise fiziksel bir gözlenebilere tekabül etmiyordur. Bir operatörün transpozunun tanımından

$$\int \Psi_1(q) \hat{f} \hat{g} \Psi_2(q) dq = \int (\hat{g} \Psi_2(q)) (\tilde{\hat{f}} \Psi_1(q)) dq = \int (\Psi_2(q) \tilde{\hat{g}}) (\tilde{\hat{f}} \Psi_1(q)) dq \quad (8.4.2)$$

Dolayısıyla  $\hat{f}\hat{g}$  operatörünün transpozu  $\tilde{\hat{g}}\tilde{\hat{f}}$  operatörüdür. Her iki tarafın da kompleks eşleneğini almır ise

$$(\hat{f}\hat{g})^\dagger = \hat{g}^\dagger \hat{f}^\dagger \quad (8.4.3)$$

elde edilir.

## 8.5 Sürekli Spektrumlar

$f$  sürekli spektrumu olan bir gözlenebilir ve  $|\psi_f\rangle \in \mathcal{H}$  ket vektörleri onun öz durumları olsun. Sürekli spektrumlu bir  $f$  gözlenebiliri için keyfi bir  $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$  durum vektörünü  $\hat{f}$  operatörünün öz durumları şeklinde genişletilir ise

$$\langle q, \psi \rangle = \Psi(q) = \int \alpha_f \langle q, \psi_f \rangle df \quad (8.5.1)$$

ve integrasyon,  $f$ 'nin alabileceği değerler üzerindedir.

Olasılık,

$$\int \langle \psi, q \rangle \langle q, \psi \rangle dq = \iint \overline{\alpha_{f'} \Psi_{f'}(q)} \alpha_f \Psi_f(q) df df' \quad (8.5.2)$$

ve  $\alpha_f$  açılım katsayıları

$$\alpha_f = \int \alpha_{f'} \left[ \int \Psi_{f'}(q) \overline{\Psi(q)} dq \right] df' \quad (8.5.3)$$

olarak elde edilir. (8.5.3) denklemindeki integral  $f' \neq f$  durumunda 0 olur ve bu fizikte sıkça kullanılan  $\delta(f' - f)$  Dirac-Delta fonksiyonudur öyle ki

$$\int \overline{\Psi_f(q)} \Psi_{f'}(q) dq = \delta(f' - f). \quad (8.5.4)$$

Bu durum,  $f' \neq f$  olduğunda  $\Psi_f(q)$  dalga fonksiyonları birbirine sürekli anlamda ortogonal demektir.

Hem sürekli hem de kesikli spektrumu olan bir  $f$  niceliğinin  $\Psi(q)$  dalga fonksiyonu için kesikli spektrum üzerinden toplam, sürekli spektrum üzerinden integral almır (Landau ve Lifshitz 1958):

$$\Psi(q) = \sum_n \alpha_n \Psi_n(q) + \int \alpha_f \Psi_f(q) df. \quad (8.5.5)$$

$\hat{q}$  operatörü konum operatörü ise öz durumuna uygulandığında  $\hat{q} |q_0\rangle = q_0 |q_0\rangle$  sadece bir  $q_0 \in Q$  uzayda bir noktayı verir.  $q_0$ , belirli bir yer olması gerektiğinden konum operatörünün öz fonksiyonu Dirac-Delta fonksiyonudur:

$$\langle q_0 | \hat{q} | q \rangle = q \langle q_0 | q \rangle = q_0 \langle q_0 | q \rangle = q_0 \Psi(q_0) = q_0 \delta(q - q_0) \quad (8.5.6)$$

$$\Rightarrow \Psi(q_0) = \delta(q - q_0). \quad (8.5.7)$$

## 8.6 Dalga Fonksiyonu ve Ölçümler

Ölçüm süreci, klasik bir ölçüm cihazı ve kuantum cismin etkileşmesidir ve bu etkileşmenin sonucunda ölçüm cihazı bir başlangıç durumundan başka bir duruma geçiş yapar. Başlangıçta bir süperpozisyon halindeyken ölçüm yapıldığında bir duruma çöker. Cihazın durumunun değişiminden bu kuantum cismin, burada elektron, durumuna ilişkin sonuçlar çıkarılır. Cihazın durumları, o cihazı karakterize eden fiziksel gözlenebilirin, veya gözlenebilirlerin, cihazda okunan değerleri tarafından ayırt edilir. Bu nicelik  $f$  ve onun özdeğerleri  $\lambda_n$ 'ler olsun. Cihazın durumları,  $\xi$  cihazın koordinatlarının kümesine ve  $n$  indisi cihazın  $\lambda_n$  değerini okumasına tekabül etsin, kuasi-klasik bir  $\Phi_n(\xi)$  dalga fonksiyonu ile açıklanır.

Ölçüm cihazının ölçümden önceki dalga fonksiyonu  $\Phi_0(\xi)$  ve  $\Psi(q)$  elektronun başlangıç durumundaki normalize dalga fonksiyonu olsun. Bu durumlar sadece kendilerini

açıkladığı için tüm sistemi açıklayan başlangıç dalga fonksiyonu bunların çarpımı olan  $\Phi_0(\xi)\Psi(q)$  fonksiyonudur; ölçümden sonraysa  $\xi$ 'nin ve  $q$ 'nin fonksiyonlarının bir çarpımı olmayabilir. Bu dalga fonksiyonlarını, özfonksiyonları cinsinden seriye açılır ise

$$\sum_n A_n(q)\Phi_n(\xi)$$

olur.

Ölçüm cihazının klasik doğası herhangi bir anda  $g$  niceliğinin belli bir değeri olmasıdır. Ölçümden sonra bunlar üzerinden bir toplam değil, sadece tek bir terim olacak ve o terim cihazın  $\lambda_n$  değerini okunmasına tekabül eden  $A_n(q)\Phi_n(\xi)$  olacaktır.  $A_n(q)$  elektronun ölçümden sonraki dalga fonksiyonuyla orantılıdır ama normalize olmamasından dolayı dalga fonksiyonun kendisi değildir.  $A_n(q)$  hem elektronun son durumuna ilişkin bilgiyi hem de cihazın  $n$ . durumu okuma olasılığını içerir.

Kuantum mekaniğinin denklemlerinin çizgisel olmasından dolayı  $A_n(q)$  ile elektronun başlangıç dalga fonksiyonu  $\Psi(q)$  arasındaki ilişki genelde çizgisel bir

$$A_n(q) = \int K_n(q, q')\Psi(q')dq' \quad (8.6.1)$$

integrali ile verilir ve  $K_n(q, q')$ , olaya ilişkin ölçüm sürecini karakterize eder. İlgilenilen ölçümün elektronun durumunun tam bir tanımının verildiği varsayılır. Diğer bir deyişle bütün niceliklerin son durumdaki olasılıkları elektronun ölçümünden önceki durumdan bağımsız olmalıdır. Yani  $A_n(q)$ 'ların formunun ölçüm sürecinin kendisi tarafından belirlenmeli ve elektronun başlangıç dalga fonksiyonu  $\Psi(q)$ 'ya bağlı olmamalıdır. Dolayısıyla  $\Phi_n(q)$ 'lar elektronun ölçümden sonraki normalize olduğu varsayılan dalga fonksiyonları olmak üzere  $A_n$ 'lerin formu

$$A_n(q) = \alpha_n\Phi_n(q)$$

olmalıdır ve  $\alpha_n$  katsayıları sadece  $\Psi(q)$ 'ya bağlıdır. (8.6.1) denklemindeki  $K_n$  bir kernel'dır ve

$$K_n(q, q') = \Phi_n(q)\overline{\Psi_n(q')};$$

o zaman  $\alpha_n$  katsayıları,  $\Psi_n(q)$  fonksiyonları, ölçüm sürecine bağlı olmak üzere,

$$\alpha_n = \langle \psi_n, \psi \rangle = \int \overline{\Psi_n(q)} \Psi(q) dq. \quad (8.6.2)$$

$\Psi(q)$ , elektronun başlangıç dalga fonksiyonu olsun. Ölçüm bu  $\Psi(q)$  dalga fonksiyonunun üzerinde yapıldığında, açıkça  $|\alpha_n|^2$ ,  $n$ . durumun ölçülme olasılığıdır ve bütün durumlar üzerinden toplandığında 1 olmalıdır.  $\Psi_n(q)$ 'lar bir tam küme oluşturur ve her biri elektronu karakterize eden bir fiziksel niceliğin özfonksiyonudur. Genelde  $\Psi_n(q)$  ile  $\Phi_n(q)$  örtüşmezler;  $\Phi_n(q)$ 'lar genelde birbirlerine ortogonal değildirler ve herhangi bir operatörün özfonksiyonlarının bir kümesini oluşturmazlar. Elektron  $\Psi_n(q)$  durumdayken  $f$  niceliğinin ölçülmesi  $\lambda_n$  değerini verir. Ölçüm sonrası elektron  $\Phi_n(q)$  dalga fonksiyonuna geçer ve bu durumdayken  $f$  niceliği herhangi belirli bir değer almaz. Bu yüzden elektron üzerinde ilk ölçümden hemen sonra ikinci bir ölçüm gerçekleştirilirse  $f$ 'nin ilk ölçümle elde edilen değeriyle örtüşmeyen bir değer elde edilir. Birinci ölçümün bilinen sonucundan ikinci ölçümün sonucunu tahmin etmek için ilk ölçümün sonuç dalga fonksiyonu  $\Phi_n(q)$ 'yu ve ikinci ölçümden olasılığı gerekli olan durumun  $\Psi_n(q)$  dalga fonksiyonu kullanılmalıdır. Yani kuantum mekaniğinin denklemlerinden  $\Phi_n(q, t)$  dalga fonksiyonu ilk ölçümün yapıldığı anda belirlenir ve  $\Phi_n(q)$  dalga fonksiyonuna eşittir;  $t$  anında yapılan ikinci ölçümde sonucun  $m$ . durumda olma olasılığı şöyle verilir:

$$|\langle \psi_m, \phi_n \rangle|^2 = \left| \int \overline{\Psi_m(q)} \Phi_n(q, t) dq \right|^2. \quad (8.6.3)$$

Kuantum mekaniğinde ölçüm süreci iki taraflıdır: Elektronun geleceği ve geçmişine göre farklılıklar gösterir. Geçmişe göre, ilk ölçümden sonraki değişen durumdan birçok sonucun olasılığını doğrular. Geleceğe göre ise yeni bir durumu meydana getirir. Dolayısıyla ölçüm sürecinin doğası tersinmezlik ilkesini içerir. Kuantum mekaniğinin zaman tersinmesi altında, klasik mekanikteki gibi, denklemleri simetrik olsa da ölçüm sürecinin tersinmezliği fiziksel olarak birbirine eşdeğer olmayan iki olaya tekabül eder (Landau ve Lifshitz 1958).

## 8.7 Yoğunluk Matrisi

Saf durumlar  $\mathcal{H}$ 'deki durum vektörleriyle açıklanırken karışık durumlar yoğunluk matrisleriyle açıklanır. Yoğunluk matrisleri en genel durumu anlatır çünkü dalga

fonksiyonu olan bir sistemin her zaman bir yoğunluk matrisi vardır ama bunun tersi doğru değildir.

**Tanım 8.1** Beklenen değerler ailesi çizgisel bir  $\varphi : \mathcal{B}(\mathcal{H}) \longrightarrow \mathbb{k}$  gönderimidir ve şu özellikleri sağlar (Hall 2013):

- (i).  $\varphi(id_{\mathcal{H}}) = 1 \in \mathbb{R}$ ,
- (ii).  $T$  kendisine eşlenirse  $\varphi(T)$  reeldir,
- (iii).  $T$  negatif olmayan, kendisine eşlenik bir operatörse  $\varphi(T) \geq 0$ ,
- (iv).  $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ 'de bir  $(T_n)$  operatörler dizisi olsun. Her  $\psi \in \mathcal{H}$  için  $\|T_n\psi - T\psi\| \rightarrow 0$  oluyorsa  $\varphi(T_n)$ ,  $\varphi(T)$ 'ye yakınsıyordur.

Saf bir sistem için yoğunluk matrisi

$$\hat{\rho} = \frac{|\psi\rangle\langle\psi|}{\langle\psi|\psi\rangle}$$

olarak verilir ve açıkça  $\hat{\rho}^2|\phi\rangle = \hat{\rho}|\phi\rangle$  ;  $\forall\phi \in \mathcal{H}$ . Yoğunluk matrisi (8.3.2). denklemdeki formdadır, dolayısıyla  $\hat{\rho} \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$  ve kendisine eşleniktir. Yoğunluk matrisi (saf durumlar için)  $trace(\hat{\rho}) = 1$ 'dir.

$\mathcal{H}$  üzerinde bir  $\hat{T}$  operatörünün beklenen değeri yoğunluk matrisi cinsinden  $trace(\hat{\rho}\hat{T}) = trace(\hat{T}\hat{\rho}) (= \varphi_{\hat{\rho}}(\hat{T}))$  ile elde edilebilir.

$\hat{\rho} \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$  yoğunluk matrisi saftır eğer birim bir  $\psi \in \mathcal{H}$  vektörü vardır öyle ki  $\hat{\rho}$ ,  $\psi$ 'nin gerdiği uzayın ortogonal projeksiyonuna eşitse. Öyle bir birim vektör yoksa  $\hat{\rho}$  karışıktır (Hall 2013).

İlgilenilen sistemin bir  $f$  fiziksel niceliğinin ortalama değeri, ki  $\hat{f}$  operatörü sadece  $x$ 'e etkir,

$$\iint \overline{\Psi(q, x)} \hat{f} \Psi(q, x) dq dx \quad (8.7.1)$$

olarak hesaplanır.

Kapalı bir sistem tamamen,  $\Psi(q, x)$  dalga fonksiyonu ile açıklanan bir durumda olsun. Bu kapalı sistemin bir parçası olan bir sistemine bakılsın ve  $x$  bu parçanın

koordinatları,  $q$ 'lar sistemin geriye kalan koordinatları olsun. Genelde bu fonksiyon  $x$ 'in ve  $q$ 'nun fonksiyonlarının çarpımı olacak şekilde yazılamaz, dolayısıyla bu parça sistemin bir dalga fonksiyonu yoktur. Böyle bir sistemin yoğunluk matrisi (aslında koordinat temsili) şöyle verilir:

$$\rho(x', x) = \int \overline{\Psi(q, x')} \Psi(q, x) dq. \quad (8.7.2)$$

Bu yoğunluk matrisinin kompleks eşleniği

$$\overline{\rho(x', x)} = \int (\overline{\overline{\Psi(q, x')}} \overline{\Psi(q, x)}) dq = \int \Psi(q, x') \overline{\Psi(q, x)} dq = \rho(x, x') \quad (8.7.3)$$

olarak elde edilir. Yoğunluk matrisinin diagonal elemanları açıkça

$$\rho(x, x) = \int \overline{\Psi(q, x)} \Psi(q, x) dq = \int |\Psi(q, x)|^2 dq \quad (8.7.4)$$

parça sisteminin olasılık dağılımıdır.

$f$  niceliğinin ortalama değeri, yoğunluk matrisi ile hesaplanacaksa

$$\langle f \rangle = \int [\hat{f} \rho(x', x)]_{x'=x} dx. \quad (8.7.5)$$

$\hat{f}$ ,  $\rho(x', x)$  yoğunluk matrisine etkidikten sonra  $x' = x$  olarak alınır, yani  $x = x'$  noktasındaki etkisine bakılır. Yoğunluk matrisi ile sistemi karakterize eden bir niceliğin ortalama değerini hesaplanabilir ve sistemteki fiziksel niceliklerinin birçok değer olasılığı belirlenebilir. Dolayısıyla dalga fonksiyonu olmayan bir sistem yoğunluk matrisi ile açıklanabilir.

Yoğunluk matrisi, kuantum mekaniksel sistemin en genel tanımıdır. Dalga fonksiyonu onun özel bir durumudur ve yoğunluk matrisinin  $\rho(x', x) = \overline{\Psi(x')} \Psi(x)$  formundaki durumuna tekabül eder. Dalga fonksiyonu olan bir sistem için her zaman ölçüm sürecinin tam bir kümesi vardır ve belirli sonuçlar verirler. Dalga fonksiyonu olan sistemlere saf durumlar denir. Sadece yoğunluk matrisi var ise bu mümkün değildir.

Kapalı bir sistem, veya en azından bir  $t$  zamanında kapalı olan bir sistem için  $\Psi(q)$

dalga fonksiyonu gibi yoğunluk matrisinin zaman ile değişimini veren bir denklem yazılabilir,

$$\langle x(t)|\hat{\rho}|x'(t)\rangle = \rho(x', x, t) = \overline{\Psi(x', t)}\Psi(x, t). \quad (8.7.6)$$

Denklem (8.7.6) ifadesinin zaman ile değişimi:

$$\frac{\partial \rho(x', x, t)}{\partial t} = \frac{\partial \overline{\Psi(x', t)}}{\partial t}\Psi(x, t) + \overline{\Psi(x', t)}\frac{\partial \Psi(x, t)}{\partial t} \quad (8.7.7)$$

$\hat{H} = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}$ ,  $x'$ 'e etkiyen sistemin Hamiltonyeni ve  $\hat{H}'$ ,  $x'$ 'ne etkiyen Hamiltonyen olmak üzere

$$\begin{aligned} i\hbar\frac{\partial \rho(x', x, t)}{\partial t} &= \overline{\Psi(x', t)}\hat{H}\Psi(x, t) - [\hat{H}'\overline{\Psi(x', t)}]\Psi(x, t) \\ &= \overline{\Psi(x', t)}\hat{H}\Psi(x, t) - [\Psi(x', t)\hat{H}'^*]^*\Psi(x, t) \\ &= [\hat{H} - \hat{H}'^*]\overline{\Psi(x', t)}\Psi(x, t) \\ &= [\hat{H} - \hat{H}'^*]\rho(x', x, t) \end{aligned}$$

olarak bulunur.

$\Psi_n(x, t)$  sistemin durağan durumunun dalga fonksiyonu olsun. O zaman yoğunluk matrisi bu dalga fonksiyonları cinsinden yazılır ise

$$\rho(x', x, t) = \sum_m \sum_n \alpha_{mn} \overline{\Psi_n(x', t)}\Psi_m(x, t) = \sum_m \sum_n \alpha_{mn} \overline{\Psi_n(x')} \Psi_m(x) \exp\left\{\frac{it(E_n - E_m)}{\hbar}\right\}$$

olur ve açıkça  $\overline{\alpha_{nm}} = \alpha_{mn}$ . Bir  $f$  niceliğinin ortalama değerini yukarıdaki biçimde hesaplamak için

$$\langle f \rangle = \sum_m \sum_n \alpha_{mn} \int \overline{\Psi_n(x', t)} \hat{f} \Psi_m(x, t) dx \quad (8.7.8)$$

kullanılır.

## 8.8 Spektral Teorem

Bir  $T$  operatörünün spektrumu  $T - \lambda id_{\mathcal{H}}$  operatörünü terslenemez kılan  $\lambda \in \mathbb{C}$ 'lerden oluşur, yani

$$\sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} | T - \lambda id_{\mathcal{H}} \text{ terslenemez}\}. \quad (8.8.1)$$

$T$ 'nin resolvent kümesi ise

$$\rho(T) = \mathbb{C} - \sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} | \exists (T - \lambda id_{\mathcal{H}})^{-1} \text{ ve } \|(T - \lambda id_{\mathcal{H}})^{-1}\| < \infty\}. \quad (8.8.2)$$

Sınırlı bir  $T$  operatörünün spektral yarıçapı  $r(T) = \sup\{|\lambda| | \lambda \in \sigma(T)\}$  olarak verilir.

Bir  $X$  kümesi ve onun bir  $Y \in 2^X$  altkümesi için karakteristik fonksiyon

$$\chi_Y : X \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto \chi_Y(x) = \begin{cases} 1, & x \in Y \\ 0, & x \notin Y \end{cases}$$

olarak tanımlanır.  $T$  bir gözlenebilir olmak üzere  $\chi_V(T)$  karakteristik fonksiyonu,  $T$  gözlenebilirinin  $V$  kümesinde değer alıp alamayacağını bir ölçüsüdür ki bu da spektral projeksiyondur.

$\mathcal{H}$  üzerinde kendisine eşlenik bir  $T$  operatör ise her  $\psi \in \mathcal{H}$  için bir  $\mu_{T,\psi}$  spektral ölçüsü ve her  $f \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$  için eşsiz sınırlı bir  $\varphi(f) = f(T)$  vardır öyle ki

$$\langle \psi, f(T)\psi \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(\lambda) d\mu_{T,\psi}(\lambda)$$

ve (Baez 1989):

"(i).  $\varphi$  bir \*-homomorfizmdir.

(ii).  $\|f(T)\| = \|f\|'_{\infty}$ .  $L^{\infty}$  ' normu her  $\psi \in \mathcal{H}$  için  $\mu_{T,\psi}$  ölçüsüne göre sıfır ölçülü bir küme haricinde her yerde o özelliği sağlayan normdur, bunun yerine daha kısa olarak "neredeysse" her yerde dendiği de olur.

(iii).  $f_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$  fonksiyonları  $f_n(\lambda)$ 'ların  $\lambda$ 'lara noktasal yakınsıyor ve  $|f_n(\lambda)| \leq |\lambda|$  ise herhangi  $\psi \in D(T)$  için  $f_n(x)\psi \rightarrow T\psi$ .

(iv).  $f \geq 0$  ise  $f(T) \geq 0$ .

(v).  $T\psi = \lambda\psi$  ise  $f(T)\psi = f(\lambda)\psi$ .

(vi).  $f_n$ , neredeyse her yerde noktasal olarak  $f$ 'ye yakınsıyor ve  $\|f_n\|'_{\infty}$  sınırlı ise  $f_n(T)$  güçlü olarak  $f(T)$ 'ye yakınsar."

Her  $\psi \in D(T)$  durumu için  $\langle \psi, T\psi \rangle$ ,  $T$  operatörünün  $\psi$  durumundaki beklenen

değerine tekabül eder ve aşağıdaki gibi verilir:

$$\langle \psi, T\psi \rangle = \int \lambda d\mu_{T,\psi}(\lambda).$$

## 8.9 Stone Teoremi

Stone teoremi  $\mathcal{H}$  üzerindeki kendisine eşlenik operatörler ile tek-parametrelü üniter altgruplar arasında 1-1 tekabül sağlar ki bu kuantum mekaniğindeki simetrikler ile o simetriklere tekabül eden korunumlu nicelikleri birbirlerine bağlar. Tek-parametrelü üniter grup  $\mathcal{H}$  üzerinde  $(U_t)_{t \in \mathbb{R}}$  üniter operatörler ailesidir öyle ki her  $t$  için  $U_t := U(t) : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ 'dir ve bu operatörler şu özellikleri sağlar:

- (i). Her  $t, s \in \mathbb{R}$  için  $U(t+s) = U(t) \circ U(s)$ ,
- (ii).  $U(0) = id_{\mathcal{H}}$ ,
- (iii).  $\|U(t)\| = 1 \quad \forall t \in \mathbb{R}$ .

Bunlara ek olarak aşağıdaki özelliği de sağlıyorsa ona güçlü sürekli tek-parametrelü üniter grup denir:

- (iv) (Güçlü süreklilik).  $\lim_{t_i \rightarrow t} U(t_i)\psi = U(t)\psi$  veya bu ifadenin eşdeğeri olarak  $\lim_{t_i \rightarrow t} \|U(t)\psi - U(t_i)\psi\| = 0 \quad ; \forall \psi \in \mathcal{H}$ .

**Tanım 8.2**  $\mathcal{H}$  Hilbert uzayı üzerindeki simetrik bir  $T$  operatörü esasta özdeşleniktir denir eğer kapanışı kendisine eşlenikse.

**Teorem 8.1 (Stone Teoremi)**  $A$  kendisine eşlenik bir operatör ve  $U(t) = e^{itA}$  olsun öyle ki  $U(t)$  güçlü sürekli tek-parametrelü üniter bir gruptur ve  $A$  operatörü,  $U(t)$ 'nin sonsuz küçük üreticisidir.

$A$ 'nın domaini

$$D(A) = \left\{ \psi \in \mathcal{H} \mid \lim_{t \rightarrow 0} \frac{U(t)\psi - \psi}{t} \text{ vardır.} \right\}$$

olarak tanımlanır ve her  $\psi \in D(A)$  için

$$iA\psi = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{U(t)\psi - \psi}{t}.$$

Diferansiyellenebilir  $U(t)\psi$  vektörlerini elde etmek için Gårding'in yöntemini kullanılacaktır. Desteği (4.2.4) kompakt olan sürekli bir  $f \in C_0^\infty(\mathbb{R})$  için  $\phi_f = \int f(t)U(t)dt$  olarak tanımlansın. O zaman

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{U(t) - id_{\mathcal{H}}}{t} \phi_f &= \lim_{t \rightarrow 0} \int f(s) \left[ \frac{U(t+s) - U(s)}{t} \right] \phi ds \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \int \frac{f(\tau-t) - f(\tau)}{t} U(\tau) \phi d\tau \\ &= - \int f'(\tau) U(\tau) \phi d\tau = \phi_{-f'}. \end{aligned}$$

Gårding domaini  $D = \{\phi_f | f \in C_0^\infty(\mathbb{R})\}$  olarak tanımlanır ve onun üzerindeki bir  $B$  operatörü aşağıdaki gibi verilir:

$$B\phi = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{U(t) - id_{\mathcal{H}}}{it} \phi.$$

Aşağıdaki üç durum sağlanır:

- (i).  $D$  yoğunudur,
- (ii).  $B$  esasta özdeşleniktir,
- (iii).  $A = \overline{B}$  ise  $U(t) = e^{itA}$ .

$\mathcal{B}(X)$ ,  $X$  üzerindeki sınırlı Borel fonksiyonlarının kümesidir. O zaman sonsuz küçük üreticisi  $A$  olan güçlü sürekli tek-parametrelî üniter grup  $U(t)$ , her  $t$  ve her  $f \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$  için,

$$\begin{aligned} \int f(\lambda) d\mu_{A,\psi}(\lambda) &= \langle \psi, f(A)\psi \rangle \\ &= \langle e^{itA}\psi, f(A)e^{itA}\psi \rangle \\ &= \int f(\lambda) d\mu_{A,U(t)\psi}(\lambda) \\ &\Rightarrow \mu_{A,\psi} = \mu_{A,U(t)\psi} \end{aligned}$$

Yani bu dönüşümler altında gözlenebilirlerin beklenen değerleri değişmez. O zaman Stone teoremi, her tek-parametrelî simetri altgrubu ile o simetriye karşılık gelen korunumlu niceliği ilişkilendiriyor. Örneğin,  $t$  zaman ise  $U(t)$  zaman evrilmesidir ve  $U(t)\psi$ ,  $\psi$  durumunun  $t$  süre beklendikten sonra elde edilen hâlidir. O durumda  $U(t)$ 'nin sonsuz küçük üreticisi Hamiltonyendir ve  $\psi \in D(\hat{H})$  ise

$$\frac{d}{dt} U(t)\psi = \hat{H}U(t)\psi \quad (8.9.1)$$

(8.9.1) denkleminde soyut Schrödinger denklemi denir.

## 8.10 Gelfand-Neumark-Segal Kurulumu

GNS'de fikir Hilbert uzayındaki cyclic bir vektör, birim vektör, ve operatör cebri bir temsili ile üzerinde çalışılan Hilbert uzayını elde edebilmektir, yani durumlar, belirli gözlenebilirlerden elde edilecektir. Bunun için  $C^*$ -cebrleriyle çalışılacaktır ve bir  $A$  operatörü  $C^*$ -cebr  $\mathcal{A}$ 'nın elemanıysa  $A^*$  da o cebrin bir elemanıdır.

**Cebir:** Bir  $\mathbb{k}$ -cebir,  $\mathbb{k}$  sayı alanı üzerinde  $\mathbf{A}$  vektör uzayı ve bu vektör uzayı üzerinde

$$\mathbf{A} \times \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{A}$$

$$(x, y) \longmapsto xy$$

ile gösterilen bir çarpımdan oluşur. Bir  $\mathbb{k}$ -cebir her  $x, y, z \in \mathbf{A}$  ve her  $\alpha, \beta \in \mathbb{k}$  için şu özellikleri sağlar:

$$x(\alpha y + \beta z) = \alpha xy + \beta xz,$$

$$(\alpha y + \beta z)x = \alpha yx + \beta zx.$$

$\mathbf{A}$  cebri için her  $x \in \mathbf{A}$  elemanı için  $1x = x1 = x$  özelliğini sağlayan bir  $1 \in \mathbf{A}$  elemanı varsa  $\mathbf{A}$  cebri ünital (birimli) olduğu söylenir. Cebir çarpımı altında her  $x, y, z \in \mathbf{A}$  için  $x(yz) = (xy)z$  sağlanıyorsa cebir asosyatiftir. Asosyatif  $\mathbb{k}$ -cebir, bir halkadır öyle ki her  $x, y \in \mathbf{A}$  ve her  $\alpha \in \mathbb{k}$  için (Benn ve Tucker 1987)

$$\alpha(xy) = (\alpha x)y = x(\alpha y).$$

**Normlu Cebir:** Normlu bir cebir, üzerinde norm olan bir  $\mathbb{k}$ -cebridir ve aşağıdaki özellikleri sağlar (Meise ve Vogt 1997):

(i).  $\|xy\| \leq \|x\|\|y\| \quad \forall x, y \in \mathcal{A}$

(ii).  $1 \in \mathcal{A}$  varsa  $\|1\| = 1 \in \mathbb{R}$ .

Bu norma göre tam olan cebre Banach cebr denir.

**$C^*$ -cebr:** Üzerinde involüsyon ( $x \longmapsto x^*$ ) olan Banach cebrine  $C^*$ -cebr denir ve şu

özellikleri sağlar:

(i). Her  $x, y \in \mathcal{A}$  ve her  $\alpha \in \mathbb{C}$  için

$$(x + y)^* = x^* + y^*, \quad (\alpha x)^* = \bar{\alpha}x^*, \quad (xy)^* = y^*x^*, \quad (x^*)^* = x.$$

(ii).  $\|x^*x\| = \|x\|^2$  ;  $\forall x \in \mathcal{A}$ .

$C^*$ -cebrinin bir temsili  $(\varphi, \mathcal{H})$  (genelde temsilin gönderimi  $\rho$  olarak kullanılır ama kuantum mekaniği kısmında karışmaması için böyle kullanılacaktır) ikilidir ama  $\mathcal{H}$  konunun gelişinden belli olduğundan sadece  $\varphi$ 'ye temsil denilebilir.  $\mathcal{A}$  bir operatör cebri olmak üzere  $\varphi$  temsili

$$\varphi : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$$

$$A \longmapsto \varphi(A)$$

$A$  operatörünü  $\mathcal{H}$  üzerindeki sınırlı çizgisel bir operatörle ilişkindir ve  $A, B \in \mathcal{A}$ ,  $\alpha \in \mathbb{C}$  olmak üzere şu özellikleri sağlar:

(i).  $\varphi(A + B) = \varphi(A) + \varphi(B)$ ,

(ii).  $\varphi(AB) = \varphi(A)\varphi(B)$ ,

(iii).  $\varphi(A^*) = (\varphi(A))^*$ ,

(iv).  $\varphi(\alpha A) = \alpha\varphi(A)$ ,

(v).  $1 \in \mathcal{A}$  var ise  $\varphi(1) = id_{\mathcal{H}} \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ .

Diğer bir deyişle  $\varphi$  bir  $*$ -homomorfizmidir (Baez 1989).

$\mathcal{A}$ 'nın temsillerinin bir  $\{\varphi_i\}_{i \in I}$  koleksiyonu tamdır eğer  $\varphi_i(A) = 0 \iff A = 0$  ;  $\forall i \in I$ . Bir  $\psi \in \mathcal{H}$  vektörü temsilin etkisiyle  $\mathcal{H}$ 'yi geriyor ise,  $span(\{\varphi(A)\psi \mid A \in \mathcal{A}\}) = \mathcal{H}$ , o temsile normal temsil denir (Segal 1947). Bu  $\psi \in \mathcal{H}$  vektörüne döngüsel vektör veya vakum durumu denilir. Vakum durumu  $\psi \in \mathcal{H}$ , cebirin  $1 \in \mathcal{A}$  elemanından elde edilir (Baez 2012).

Bu kesimdeki **durum**, cebir üzerindeki çizgisel, kompleks-değerli, birim normlu fonksiyonlardır:

$$\omega : \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{C}$$

Durum, her  $A \in \mathcal{A}$  için  $\omega(A^*) = \overline{\omega(A)}$  özelliğini sağlar ve  $1 \in \mathcal{A}$  varsa  $\omega(1) = 1 \in \mathbb{R}$ .  $\|\psi\| = 1$  olmak üzere  $\omega(A) = \langle \psi, \varphi(A)\psi \rangle \in \mathbb{C}$  olduğu durumda bu  $\varphi(A)$ 'nın  $\psi \in \mathcal{H}$  durumundaki beklenen değerine tekabül eder ve bu duruma normalizasyon fonksiyonu denir:  $\omega(\cdot) \equiv \langle \psi, \varphi(\cdot)\psi \rangle$ . Bu duruma alışıldık gösterimle  $\langle \cdot \rangle : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{C}$  de denebilir.

$\mathcal{A}$  üzerindeki durumların koleksiyonu  $\{\omega_j\}_{j \in J}$  tamdır eğer sıfır haricinde, her  $j \in J$  için, bir  $A \in \mathcal{A}$  yoktur öyle ki  $\omega_j(A) = 0$ .

**Teorem 8.2 (Gelfand-Neumark-Segal)** Bir Hilbert uzayı üzerindeki  $C^*$ -cebri  $\mathcal{A}$ 'nın normal bir temsilinin bir normalizasyon fonksiyonu, o cebri bir durumdur. Tersine, cebri bir durumu normal bir temsilin normalizasyon fonksiyonudur ve bu temsil, eşdeğerlik bünyesinde, eşsiz bir şekilde durum tarafından belirlenir. Durumlar saftır ancak ve ancak tekabül eden temsil indirgenemezse.

## 9. NORMLU BÖLMELİ CEBİRLER

Kuantum mekaniği literatürde en genel hâliyle  $\mathbb{C}$  Hilbert uzayları ile çalışılıyor. Doğa, kompleks sayı alanı  $\mathbb{C}$ 'yi seçiyor olsa da  $\mathbb{C}$ 'nin dışındaki diğer üç normlu bölmeli cebri temel alarak çalışmak da meşrudur. Bu cebirler: Reel sayılar  $\mathbb{R}$ , kuaternionik sayılar  $\mathbb{H}$  ve oktonik sayılar  $\mathbb{O}$ 'dur.

Kompleks sayıların bir çift reel sayı ile anlatılabileceğinin anlaşılması neticesinde Hamilton toplama, çarpma ve bölmede aynı kurallara uyan yeni bir cebir aradı, bunun sonucu olarak kuaternionları keşfetti. Kuaternionik sayılar kümesi

$$\mathbb{H} = \{\alpha_0 1 + \alpha_1 i + \alpha_2 j + \alpha_3 k \mid \alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R} \text{ ve } ij = -ji = k\}$$

olarak tanımlanır. Bir  $\alpha_0 1 + \alpha_1 i + \alpha_2 j + \alpha_3 k$  kuaternionik sayımın  $\alpha_0 1$ 'e kuaternionun reel kısmı,  $\alpha_1 i + \alpha_2 j + \alpha_3 k$ 'ye ise kuaternionun saf kısmı denir. Aynı kompleks sayılarda olduğu gibi kuaternionun saf kısmındaki baz vektörlerinin cebirsel karesi  $-1$ 'dir, yani:  $i^2 = j^2 = -1$ .

Hamilton'un kuaternionları keşfinden birkaç ay sonra John Graves, her  $i$  için  $\alpha_i \in \mathbb{R}$  olmak üzere  $\alpha_0 1 + \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_7 e_7$  formuna sahip yeni bir cebir olan

$$\mathbb{O} = \{\alpha_0 1 + \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_7 e_7 \mid (\forall i = 1, \dots, 7)((\alpha_i \in \mathbb{R}) \vee (e_i^2 = -1))\}$$

oktonionik sayıları keşfetti.

### 9.1 Normlu Bölmeli Cebirler

Bir **normlu bölmeli cebir**,  $\mathbf{A}$  vektör uzayı üzerinde

$$|\cdot| : \mathbf{A} \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} \tag{9.1.1}$$

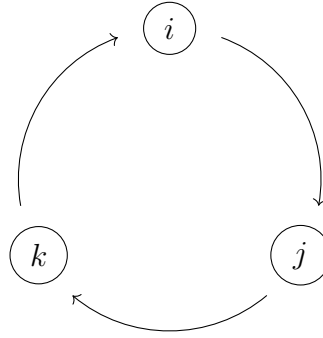
normuna sahiptir. Normlu bölmeli cebir,  $|ab| = |a||b|$  eşitliğini sağlayan bir norma sahip ünital bir cebirdir ve bu bir homomorfizmdir.  $ab = 0$  ise ya  $a = 0$  ya da  $b = 0$  demektir.

Kuantum mekaniğinde kullanılabilecek sayı sistemlerinin \*-cebri yapısına sahip normlu bölmeli cebirler olması istenir. Yani böyle bir  $\mathcal{A}$  sayı sistemi reel-çizgisel bir gönderim ile donatılmıştır:

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &\longrightarrow \mathcal{A} \\ x &\longmapsto x^*\end{aligned}$$

ve bu gönderim şu kurallara uyar:  $(xy)^* = y^*x^*$ ,  $(x^*)^* = x$ . Cebirin her  $x$  elemanı için  $x = x^*$  sağlanıyorsa \*-cebri reeldir. Cebirin sıfır olmayan her  $x \in \mathcal{A}$  elemanı için  $x + x^* \in \mathbb{R}$  ve  $xx^* = x^*x > 0$  sağlanıyorsa  $\mathcal{A}$  cebrine **iyi normludur** (Baez 2002) denir. Herhangi iki elemanı üretilen altcebir asosiyatifse o cebre **alternatiftir** denir. İyi normlu alternatif bir cebir, normlu bölmeli bir cebirdir.

Bir  $\alpha = \alpha_0 1 + \alpha_1 i + \alpha_2 j + \alpha_3 k$  kuaternionik sayısının eşleniği  $\alpha^* = \alpha_0 1 - \alpha_1 i - \alpha_2 j - \alpha_3 k$ 'dir. Kuaternionik bazlarda  $ij$  ile üçüncü baz  $k$  elde edilir ve bu kural basit bir şekilde (Şekil 9.1) verilebilir.



Şekil 9.1 Kuaternion çarpım kuralı

Saat yönünde gidince her iki bazda bir, geriye kalan üçüncü bazı verir. Saat yönünün tersinde sadece işaret değiştirir.

Bir oktonionik sayı  $\alpha = \alpha_0 1 + \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_7 e_7$ 'nın eşleniği kuaternionik durumla benzerdir:

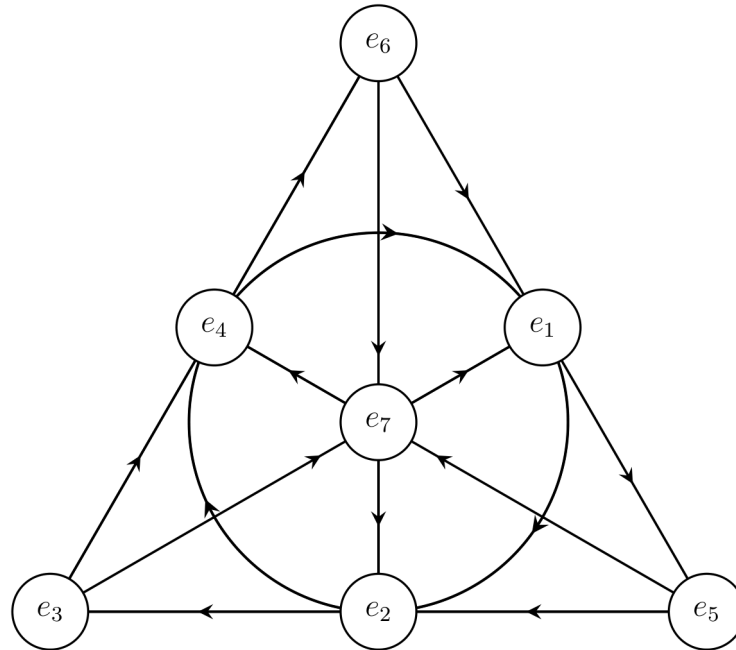
$$\alpha^* = (\alpha_0 1 + \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_7 e_7)^* = \alpha_0 1 - \alpha_1 e_1 - \dots - \alpha_7 e_7. \quad (9.1.2)$$

Oktonionların bazlarının çarpımı, kuaternionların bazlarının çarpımlarının aksine o kadar basit değildir.  $i \neq j$  iken anti-komüte ederler:  $e_i e_j = -e_j e_i$ . Çarpılan bazların indislerini 1 arttırmak sonucun indisini de 1 arttırır:  $e_i e_j = e_k$  ise  $e_{i+1} e_{j+1} = e_{k+1}$  ve  $e_{2i} e_{2j} = e_{2k}$ . Oktonion çarpım tablosu aşağıda verildi (Baez 2002).

Çizelge 9.1 Oktonion çarpım tablosu

	$e_1$	$e_2$	$e_3$	$e_4$	$e_5$	$e_6$	$e_7$
$e_1$	-1	$e_4$	$e_7$	$-e_2$	$e_6$	$-e_5$	$-e_3$
$e_2$	$-e_4$	-1	$e_5$	$e_1$	$-e_3$	$e_7$	$-e_6$
$e_3$	$-e_7$	$-e_5$	-1	$e_6$	$e_2$	$-e_4$	$e_1$
$e_4$	$e_2$	$-e_1$	$-e_6$	-1	$e_7$	$e_3$	$-e_5$
$e_5$	$-e_6$	$e_3$	$-e_2$	$-e_7$	-1	$e_1$	$e_4$
$e_6$	$e_5$	$-e_7$	$e_4$	$-e_3$	$-e_1$	-1	$e_2$
$e_7$	$e_3$	$e_6$	$-e_1$	$e_5$	$-e_4$	$-e_2$	-1

Oktonion bazlarının çarpımları, Tablo 9.1 yerine projektif düzlem olan  $\mathbb{Z}_2 P^2$  Fano düzlemiyle de (Şekil 9.2) verilebilir.



Şekil 9.2 Fano düzlemi

Fano düzlemi, 7 çizgi ve 7 noktadan oluşan projektif bir düzlemdir. Her çizgi bir üçlü içerir ve bu üçlüde her iki baz, ok yönünde çizgi üzerindeki üçüncü bazı pozitif olarak verirken; zıt yönünde gidilirse negatif elde edilir. Örneğin,  $e_5e_2 = e_3$  olur. Ters yönde gidilseydi  $-e_3$  elde edilirdi.

Herhangi kuaternionik sayı  $\alpha = \alpha_01 + \alpha_1i + \alpha_2j + \alpha_3k$ 'nin normu aşağıdaki gibidir:

$$|\alpha_01 + \alpha_1i + \alpha_2j + \alpha_3k| = \sqrt{\alpha_0^2 + \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2}.$$

Herhangi bir oktonionik sayı  $\alpha = \alpha_01 + \alpha_1e_1 + \dots + \alpha_7e_7$ 'nin normu ise

$$|\alpha| = |\alpha_01 + \alpha_1e_1 + \dots + \alpha_7e_7| = \sqrt{\alpha_0^2 + \dots + \alpha_7^2}$$

olarak verilir. Yani her halükârda  $\alpha \in \mathbb{k}$ 'nin normu  $\alpha^*\alpha = \alpha\alpha^* = |\alpha|^21$  olmaktadır.

## 9.2 Cayley-Dickson Süreci

$\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$  ve  $\mathbb{O}$ 'nun neden her seferinde bir önceki cebirin boyutunun iki katı olduğu ve bir üst cebre geçtikçe bir özellik kaybedildiğini görmek için Cayley-Dickson sürecine bakmak gerekir. Her kompleks sayı bir çift reel sayı olarak düşünülebileceği gibi her kuaternionik sayı da bir çift kompleks sayı olarak düşünülebilir.

Cayley-Dickson süreci  $*$ -cebri  $\mathcal{A}$ 'dan yeni bir  $*$ -cebri  $\mathcal{A}'$ 'nü verir.  $\mathbb{C}$ 'nin elemanlarının  $\mathbb{R}^2$  olması gibi  $\mathcal{A}'$ 'nin elemanları  $\mathcal{A}$ 'nin elemanlarından oluşur.

**Önerme 1.**  $\mathcal{A}'$  asla reel değildir.

**Önerme 2.**  $\mathcal{A}$  reeldir ancak ve ancak  $\mathcal{A}'$  komütatifse.

**Önerme 3.**  $\mathcal{A}$  komütatif ve asosyatiftir ancak ve ancak  $\mathcal{A}'$  asosyatitifse.

**Önerme 4.**  $\mathcal{A}$  asosyatif ve iyi normludur ancak ve ancak  $\mathcal{A}'$  alternatif ve iyi normluyorsa.

**Önerme 5.**  $\mathcal{A}$  iyi normludur ancak ve ancak  $\mathcal{A}'$  iyi normluyorsa."

Üstteki önermeler Cayley-Dickson sürecini tekrar ve tekrar uygulayarak elde edilir:  $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}, \mathbb{O}$  (Baez 2002). Oktonionların bir üstcebrini elde etmek için uygulandığında 16-boyutlu sedenionların sıfır bölene olmasından dolayı oktonionlardan sonraki cebirler normlu bölmeli cebir olma özelliğini kaybeder. Her  $x, y \in \mathcal{A}$  için aşağıdaki

özellikleri sağlayan

$$x(iy) = i(x^*y), \quad (xi)y = (xy^*)i, \quad (ix)(yi^{-1}) = (xy)^* \quad (9.2.1)$$

cebrin elemanlarını çiftleyip karesi  $-1$  olan, kuaternion için  $i, j, k$  olması gibi, elemanları kullanarak bir üstcebrin elde edilir.  $i^* = -i$  ile tanımlanır öyle ki üstcebrin elemanları altcebrin elemanları ile o şekilde eşsiz olarak yazılabilir. Buna örnek vermek için herhangi iki  $x, y$  kompleks sayıları ve kuaternionik sayılar aşağıdaki gibi birbirlerine bağlanabilir

$$(x, y) \in \mathbb{C}^2 \Rightarrow x + yj \in \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}j \simeq \mathbb{H}. \quad (9.2.2)$$

O zaman  $x = x_0 + ix_1, y = x_2 + ix_3$  gibi iki kompleks sayı için açıkça  $x + yj = x_0 + ix_1 + jx_2 + ijx_3 \in \mathbb{H}$  olur ve iki kuaternionik sayının çarpımı

$$(x_1, x_2)(y_1, y_2) = (x_1y_1 - y_2x_1^*, x_1y_2 + y_1x_2)$$

olarak elde edilir. Bir  $(x, y)$  kuaternionik sayının eşleniği ise

$$(x, y)^* = x_0 - ix_1 - jx_2 - kx_3 = x^* + j^*y^* = x^* - yj = (x^*, -y).$$

(9.2.1) denklemi herhangi bir  $x \in \mathcal{A}$  elemanının eşleniği,  $i$ 'nin eşleniği ile anlatılır.

Her  $x \in \mathcal{A}$  için

$$x^* = (ix)i^{-1} = i(xi^{-1}). \quad (9.2.3)$$

Açıkça cebir komütatif olduğunda asosyatiftir.  $\mathbb{R}$  komütatif olduğundan  $\mathbb{C}$  de komütatif olur ama reel olma özelliğini kaybeder.  $\mathbb{C}$  asosyatif ve komütatif olduğundan önerme 3'e göre  $\mathbb{H}$  asosyatif ama  $\mathbb{C}$  reel olmadığından önerme 4'e göre  $\mathbb{H}$  komütatif değildir.  $\mathbb{H}$  komütatif olmadığından involüsyon onun üstünde bir otomorfizm değildir. Dolayısıyla  $\mathbb{O}$  asosyatif değildir.

### 9.3 Sorunlar

Kuantum mekaniği genelde kompleks Hilbert uzaylarıyla çalışılmasından ötürü kompleks kuantum teori, reel ve kuaternionik teoriden daha mı iyi diye düşünülebilir ama bunun sebebi reel ve kuaternionik kuantum teorisi çalışıldığında kompleks kuantum teorisinde olmayan sorunların ortaya çıkıyor olmasıdır. Bu sorunlardan iki tanesi

şöyledir:

(i). Güçlü sürekli tek-parametrelü üniter gruplar ve kendisine eşlenik operatörler arasındaki alışıldık tekabülün bozulmasıdır.  $\mathcal{H}$  sonlu boyutlu ise her tek-parametrelü üniter grup, eşsiz sınırlı bir  $S$  operatörü olmak üzere  $U(t) = e^{tS}$  olarak yazılabilir. Kuantum mekaniğinde gözlenebilirlerin kendisine eşlenik operatörler,  $A = A^\dagger$ , olması istenir. O zaman  $S$  ve  $A$ , birbirleriyle

$$S(\psi) = iA(\psi) \quad (9.3.1)$$

olacak şekilde ilişkilendirilebilir. (9.3.1) ifadesi tek-parametrelü üniter gruplar ile kendisine eşlenik operatörlerin tekabülünü verir. Buradaki sorun  $\mathbb{k} = \mathbb{R}$  durumunda bir  $i$ 'nin olmamasıyken;  $\mathbb{k} = \mathbb{H}$  durumunda ise karesi  $-1$  olan sayıların çokluğu ve bunların komüte etmemesidir. Bunu görmek için bir  $\psi \in \mathcal{H}_{\mathbb{H}}$  ele alınsın. Bu vektör, kuaternionik bir sayıyla çarpıldığında o da onun elemanıdır. Basitlik olması açısından  $j$  ile çarpılsın öyle ki

$$S(j\psi) = iA(j\psi) \quad (9.3.2)$$

eşitliğinin yazılabiliyor olması gerekirdi ama  $ij = -ji$  olduğundan

$$jS(\psi) = -jiA(\psi) \quad (9.3.3)$$

ifadesi bir çelişki oluştururdu.

(ii). Diğer bir sorunsu kompleks durumda,  $\mathcal{H}$  ve  $\mathcal{H}'$  gibi iki Hilbert uzayının tensör çarpımı  $\mathcal{H} \otimes_{\mathbb{R}} \mathcal{H}'$  da bir kompleks Hilbert uzayıdır. Kuaternionik durumda ise  $\mathcal{H} \otimes_{\mathbb{R}} \mathcal{H}'$  bir kuaternionik Hilbert uzayı oluşturmuyor. Saf bir kuantum sistemi değil; karmaşık bir sistem hâline gelir. Bu sorunlarıysa üç katmanlı yol çözüyor.

## 10. ÜÇ KATMANLI YOL

Üç katmanlı yolun bakış açısına göre reel, kompleks ve kuaterniyonik kuantum mekaniği birbirinden ayrı teoriler olarak değil, tek bir teoremin parçaları olarak düşünülür. Hilbert uzayları yerine grup temsili ile donatılmış Hilbert uzaylarını düşünmek faydalıdır.  $G$  bir Lie grubudur ve  $Rep(G)$  kategori olsun. Onun bir nesnesi,  $G$ 'nin sürekli üniter bir temsili  $\rho : G \rightarrow \mathcal{U}(\mathcal{H})$  ile donatılmış sonlu boyutlu bir  $\mathbb{C}$ -Hilbert uzayıdır. Onun morfizmleri ise  $G$ 'nin aşağıda verilen anlamdaki etkisi ile sıra değişen çizgisel veya anti-çizgisel (denklem (8.3.6)) bir  $T : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}'$  gönderimidir öyle ki

$$T \circ \rho(g) = \rho'(g) \circ T \quad ; \forall g \in G \quad (10.0.1)$$

bir izometridir ve Hermit-sel iç çarpımı korur.

### 10.1 Üç Katmanlı Yol

Bir  $\mathcal{H} \in Rep(G)$  nesnesi indirgenemezse üç seçenek vardır:

- (i).  $\rho \not\simeq \rho^*$  olduğu duruma kompleks,
- (ii).  $\rho \simeq \rho^*$  durumunda ise iki olasılık söz bahistir:
  - $\mathcal{H}$  temsili,  $\mathcal{H}_{\mathbb{R}}$  bir reel Hilbert uzayı olmak üzere,  $\mathcal{H} = \mathbb{C} \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{R}}$  şeklindedir.
  - $\mathcal{H}$  temsili, kuaterniyonik bir Hilbert uzayı  $\mathcal{H}_{\mathbb{H}}$  altında yatan kompleks yapıdan kaynaklanıyordur. Bu durumda temsil kuaterniyoniktir denir.

$\mathcal{H} \in Rep(G)$  temsili indirgenemezse Schur lemma'dan 1-boyutlu  $f : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  morfizmler uzayı vardır. Sonlu boyutta  $\mathcal{H} \simeq \mathcal{H}^*$  olduğundan 1-boyutlu  $T : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}^*$  morfizmler uzayı da vardır. Dolayısıyla 1-boyutlu

$$g : \mathcal{H} \otimes \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{C} \quad (10.1.1)$$

morfizmler uzayı da mevcuttur. Bu  $g$  gönderimi,  $\mathcal{H}$ 'nin üzerinde  $G$ 'nin etkisi altında Hermit-sel iç çarpımı koruyan iki-çizgisel bir formdur

$$\check{g} : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{C} \quad (10.1.2)$$

$$(\phi, \psi) \mapsto \langle \phi', \psi \rangle$$

İki-çizgisel  $\check{g}$ 'yi, ilk argümanda anti-çizgisel olan Hermit-sel iç çarpım hâlinde yazılabilmesi için ilk argümanda anti-çizgisel bir  $J : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  operatörü gereklidir öyle ki  $\phi' = J\phi$ . Herhangi  $\alpha \in \mathbb{k}$  ve herhangi iki  $\phi, \psi \in \mathcal{H}$  vektörleri için

$$\check{g}(\alpha\phi, \psi) = \alpha\check{g}(\phi, \psi) = \alpha \langle J\phi, \psi \rangle = \langle J(\alpha\phi), \psi \rangle.$$

Sonlu boyutta Hilbert uzayı, dualine izomorfik olduğundan  $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}$  de  $\mathcal{H}^* \otimes \mathcal{H}^*$ 'ye izomorftir.  $\mathcal{H}^* \otimes \mathcal{H}^*$ 'nin elemanları  $(0, 2)$  tip tensörlerdir:

$$\mathcal{H}^* \otimes \mathcal{H}^* = S^2(\mathcal{H}) \oplus \Lambda^2(\mathcal{H}). \quad (10.1.3)$$

$S^2(\mathcal{H})$ ,  $\mathcal{H}$  üzerindeki simetrik  $(0, 2)$  tip tensörlerin kümesidir;  $\Lambda^2(\mathcal{H})$ ,  $\mathcal{H}$  üzerindeki antisimetrik  $(0, 2)$  tip tensörlerin kümesidir.  $g : \mathcal{H} \otimes \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{C}$ , 1-boyutlu olduğundan bu ikisinden birisi olabilir ama ikisi aynı anda olamaz. Dolayısıyla ya sıfır-olmayan, simetrik bir

$$\check{g}(\phi, \psi) = \check{g}(\psi, \phi)$$

ya da sıfır-olmayan antisimetrik bir

$$\check{g}(\phi, \psi) = -\check{g}(\psi, \phi)$$

vardır. Hermit-sel iç çarpım,  $\check{g}$  ve  $g$  grubun etkisi altında invaryant olduğundan hem  $J$  hem de  $J^2$  grubun etkisi altında komüte eder.  $J : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ 'nin aksine  $J^2$  çizgiseldir ve Schur lemmasından bir  $\alpha \in \mathbb{C}$  için  $J^2 = \alpha id_{\mathcal{H}}$  olmalıdır.

$\check{g}$  simetrik veya asimetric olduğundan iki durum vardır öyle ki

$$\check{g}(\phi, \psi) = \pm \check{g}(\psi, \phi) \quad (10.1.4)$$

Bundan dolayı,

$$\langle J\phi, \psi \rangle = \pm \langle J\psi, \phi \rangle \quad (10.1.5)$$

olarak elde edilir.  $\psi = J\phi$  olarak alınırsa

$$\pm \langle J^2\phi, \phi \rangle = \langle J\phi, J\phi \rangle = \|J\phi\|_{\mathcal{H}}^2 \geq 0. \quad (10.1.6)$$

(10.1.6). denkleme göre  $\pm J^2$  pozitif bir operatördür. O zaman anti-çizgisel  $J$  operatörünü,  $\sqrt{\alpha} \in \mathbb{R}$ 'ne bölerek yeni bir anti-çizgisel operatöre ölçeklendirilebilir. Yeni

$J^2$ , ya  $J^2 = id_{\mathcal{H}}$  ya da  $J^2 = -id_{\mathcal{H}}$  olan anti-çizgisel bir operatördür.  $\pm J^2 = id_{\mathcal{H}}$  olduğundan, herhangi  $\phi, \psi \in \mathcal{H}$  vektörleri için

$$\begin{aligned}\pm \check{g}(J\phi, \psi) &= \pm \langle J^2\phi, \psi \rangle = \langle J\psi, J\phi \rangle = \check{g}(\psi, J\phi) \\ \langle \pm J^2\phi, \psi \rangle &= \langle J\psi, J\phi \rangle \\ \langle \phi, \psi \rangle &= \langle J\psi, J\phi \rangle\end{aligned}$$

olarak elde edilmesiyle  $J$  açıkça antiüniterdir.

$\check{g}$ , simetrik de olsa antisimetrik de olsa  $J$ , grubun etkisiyle komüte eder (morfizm) ve  $\check{g}$  dejenere değildir (7.1.3). Onun simetrik veya asimetrik olmasından ötürü iki durum söz konusudur:

(i).  $\check{g}$  simetrikse  $\mathcal{H}$  üzerinde reel bir yapı vardır. Bu durum  $J^2 = id_{\mathcal{H}}$  durumuna tekabül eder. Bu reel Hilbert uzayı

$$\mathcal{H}_{\mathbb{R}} = \{\psi \in \mathcal{H} | J\psi = \psi\} \quad (10.1.7)$$

sonucuna çıkar ve (10.1.7). denklemdaki  $\mathcal{H}$ ,  $\mathcal{H}_{\mathbb{R}}$ 'nin kompleksleştirilmesidir:

$$\mathcal{H} = \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathcal{H}_{\mathbb{R}}. \quad (10.1.8)$$

(ii).  $\check{g}$  antisimetrikse  $\mathcal{H}$  üzerinde kuaternionik bir yapı vardır ve bu  $J^2 = -id_{\mathcal{H}}$  durumuna tekabül eder. Kompleks hilbert uzayının üzerinde böyle bir yapı olduğunda  $J$  operatörünün bir vektöre etkisi, o vektörü  $j$  ile çarpma gibi olur. Bunun sebebi,  $J^2$  herhangi bir vektöre uygulandığında onun  $-1$  özdeğerli durumuna tekabül etmesi ve  $J$  anti-çizgisel olduğundan,  $j$  ve  $i$ 'nin anti-komütelerinden dolayı bunların etkileri aynıdır. Yani herhangi  $\psi \in \mathcal{H}$  için  $J^2\psi = -\psi = j^2\psi$  ve herhangi bir  $i\psi \in \mathcal{H}$  için  $J(i\psi) = -iJ\psi = -ij\psi = j(i\psi)$ . Dolayısıyla,  $i = I$  ve  $IJ = K$  gibi operatörler, kuaternionik ilişkiye uygun davrandığından  $\mathcal{H}$ , kuaternionik bir Hilbert uzayı  $\mathcal{H}_{\mathbb{H}}$ 'ye dönüştürülebilir.

Bu iki durum aşağıdaki gibi özetlenebilir:

(i). Kompleks Hilbert uzayı  $\mathcal{H}$ 'nin üzerindeki dejenere olmayan simetrik, iki-çizgisel olan  $\check{g}$  formuna,  $\mathcal{H}$  üzerinde bir ortogonal yapı denir. Yani,  $\rho : G \rightarrow \mathcal{U}(\mathcal{H})$  reeldir

ancak ve ancak  $\mathcal{H}$ 'nin üzerindeki ortogonal yapıyı koruyorsa veya reel  $J$  yapısı bir morfizmse (10.0.1).

(ii). Kompleks Hilbert uzayı  $\mathcal{H}$ 'nin üzerindeki dejenere olmayan antisimetrik, iki-çizgisel olan  $\check{g}$  formuna,  $\mathcal{H}$  üzerinde bir simplektik yapı denir. Yani,  $\rho : G \rightarrow \mathcal{U}(\mathcal{H})$  kuaternioniktir ancak ve ancak  $\mathcal{H}$ 'nin üzerindeki bir simplektik yapıyı koruyorsa veya kuaternionik  $J$  yapısı bir morfizmse.

Üç katmanlı yol aşağıdaki tablo şeklinde özetlenebilir (Baez 2012):

Çizelge 10.1 Üç katmanlı yol		
Kompleks	$\mathcal{H} \not\simeq \mathcal{H}^*$	üniter
Reel	$\mathcal{H} \simeq \mathcal{H}^*$ $J^2 = \text{id}_{\mathcal{H}}$	ortogonal
Kuaternionik	$\mathcal{H} \simeq \mathcal{H}^*$ $J^2 = -\text{id}_{\mathcal{H}}$	simplektik

Buna bir örnek olması açısından bozon ve fermiyonların açısal momentum durumuna bakılacaktır. Fizikte  $SU(2)$  grubunun bütün temsilleri kendisine dual temsillerdir ve o temsiller bir parçacığın dönmeler altındaki dönüşümlerini açıklar. Bu temsil, spin- $j$  parçacık için  $j \in \mathbb{Z}$  iken bir bozonun açısal momentum durumlarını;  $j \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}$  iken fermiyonların açısal momentum durumlarını açıklar. Bozonik durum reel; fermiyonik durum kuaternionik duruma tekabül eder. Dolayısıyla bozonik parçacıklar için  $SU(2)$ 'nin indirgenemez grup temsili  $J^2 = \text{id}_{\mathcal{H}}$  olan antiüniter  $J$  operatörü ve invaryant reel bir yapı vardır. Fermiyonik durumdaysa  $J^2 = -\text{id}_{\mathcal{H}}$  olan antiüniter  $J$  operatörü ve invaryant simplektik bir yapı vardır.

$A$  bir eksenindeki açısal momentum operatörü olsun.  $S = iA$  iken  $J$  ile antikomüte ettiğinden (9.3.3) her  $\psi \in \mathcal{H}$  için

$$\langle J\psi, AJ\psi \rangle = -\langle J\psi, JA\psi \rangle = -\langle A\psi, \psi \rangle = -\langle \psi, A\psi \rangle.$$

Yani  $J$ , açısal momentumu tersler. Dönen bir parçacığın zaman terslenmiş hâli, parçacığın zıt yönde dönmesi demek olduğundan  $J$ 'ye zaman terslenmesi denir (Baez 2012).

**Teorem 10.1** Bir Lie grubu  $G$  ve  $\mathcal{H}, \mathcal{H}' \in \text{Rep}(G)$  Hilbert uzayları için

- (i).  $\mathcal{H}$  ve  $\mathcal{H}'$  reel ise  $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}'$  reeldir.
- (ii).  $\mathcal{H}$  reel ve  $\mathcal{H}'$  kuaternionik ise  $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}'$  kuaternioniktir.
- (iii).  $\mathcal{H}$  kuaternionik ve  $\mathcal{H}'$  reel ise  $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}'$  kuaternioniktir.
- (iv).  $\mathcal{H}$  ve  $\mathcal{H}'$  kuaternionik ise  $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}'$  reeldir.

**İspat.**  $J : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  ile donatılmış Hilbert uzayı için  $J^2 = id_{\mathcal{H}}$  durumunda temsil reeldir;  $J^2 = -id_{\mathcal{H}}$  durumundaysa temsil kuaternioniktir.  $J \otimes J' : \mathcal{H} \otimes \mathcal{H}' \rightarrow \mathcal{H} \otimes \mathcal{H}'$  için de durum benzer şekildedir.

$$(J^2 \otimes J'^2)(\psi \otimes \psi') = J^2\psi \otimes J'^2\psi' = (J \otimes J')^2(\psi \otimes \psi') \quad (10.1.9)$$

olduğundan,  $J^2$  ve  $J'^2$  de sırasıyla  $\pm id_{\mathcal{H}}$  ve  $\pm id_{\mathcal{H}'}$  olmaları gerektiğinden  $J \otimes J' : \mathcal{H} \otimes \mathcal{H}' \rightarrow \mathcal{H} \otimes \mathcal{H}'$  operatörü için  $(J \otimes J')^2$  operatörü de  $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}'$ , tensör çarpımı uzayı üzerinde  $(J \otimes J')^2 = \pm id_{\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}'}$  olmalıdır. (i). durum için, iki yapı da birim operatör olduğu için reel yapıdır ama ikisinden biri kuaternionik olduğu durumda, tensör çarpımı Hilbert uzayı üzerindeki yapı kuaternioniktir, yani  $-id_{\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}'}$ . Her ikisi de kuaternionik ise pozitif olacağından reel olur. Dolayısıyla bu operatörlerin tek tek kendi uzayları üzerindeki etkileri, tensör çarpımı uzayı üzerindeki etkilerinden ayrı düşünülemez ve  $\text{End}(\mathcal{H}) \otimes \text{End}(\mathcal{H}') \ni J^2 \otimes J'^2 = (J \otimes J')^2 \in \text{End}(\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}')$ . ■

## 11. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu çalışmada, kuantum mekaniğinin saf durumlarının genel kompleks Hilbert uzay çözümleri ve ona ek olarak reel ve kuaternionik Hilbert uzayları durumları incelenmiştir. Saf durumlar için kuantum mekaniği, Hilbert uzayı ve onun üzerindeki çizgisel dönüşümlerle formüle edilir. Bunları çalışabilmek için ilk olarak matematiksel mantık, kümeler ve gönderimler incelendi. Onların sayesinde sadece küme teorisi kullanılarak genel topolojinin önemli özellikleri olan süreklilik, kompaktlık ve bağlantılılık tanımlandı. Topolojinin tanımıyla birlikte topolojinin açıklarını yuvarlar olarak tanımlayan metrik uzaylar çalışıldı ve önemli topolojik kavramlar metrik uzaya yuvarlarla aktarıldı. Topolojik vektör uzayları olan normlu uzaylar ve sonrasında normlu uzayların içerdiği, kuantum mekaniğinin saf durumlarının formülasyonu için gereken Hilbert uzayları, topolojik vektör uzayları, çalışıldı. Bu konuların ardından kompleks kuantum mekaniğini ve onun üzerindeki çizgisel operatörler ve gözlenebilirler incelendi. Klasik mekanikteki Noether teoreminin yerini kuantum mekaniğinde tutan Stone teoremine ve Gelfand-Neumark-Segal yapısına bakıldı.

Reel ve kuaternionik kuantum teorisinin, güçlü sürekli tek-parametrelü üniter gruplar ve kendisine eşlenik operatörler arasındaki alışıldık tekabülün bozulması ve kuaternionik Hilbert uzaylarının tensör çarpımının kuaternionik bir Hilbert uzayı olmaması sorunları üç katmanlı yol, Lie gruplarını ve onların Hilbert uzayları üzerindeki temsillerini kullanarak çözüme kavuşturdu. Bu reel ve kuaternionik teoriye kıyasla kompleks kuantum teoriden bazların, sırasıyla olmaması ve fazla olması sorunlarıysa reel durum için  $J^2 = id_{\mathcal{H}}$ ; kuaternionik durumdaysa  $J^2 = -id_{\mathcal{H}}$  özelliklerini sağlayan bir anti-çizgisel ve antiüniter olan  $J$  operatörünün yanı sıra alışıldık kuaternionik ilişkiye uyan  $I = i$  ve  $K = IJ$  operatörleri ile çözüldü. Dolayısıyla reel, kompleks ve kuaternionik kuantum teori birbirlerinden farklı teoriler değil, bir bütünün parçalarıdır. Kompleks Hilbert uzayı üzerindeki yapı  $J^2 = id_{\mathcal{H}}$  olduğunda temsil reel,  $J^2 = -id_{\mathcal{H}}$  olduğunda kuaternionik bir  $J$  yapısı vardır. Bu sayede kuaternionik durumda Hilbert uzaylarının tensör çarpımları sorunu, onların üzerindeki  $J$  ve  $J'$

yapılarıyla çözüldü. Onun bir uygulaması olarak,  $J$  operatörü bozon ve fermiyon için  $A$  açısal momentum operatörüne uygulandığında zaman terslenmesine karşılık geldiği gözlemlendi.

Bu çalışmanın ardından grup temsil teorisinin teknik detayları çerçevesinde incelemeler genişletilerek sonsuz boyutta üç-katmanlı yolla ilgili ulaşılabilecek detaylar çalışılabilir ve özel olarak Galilei grubunun temsilleri üzerine bu şema dahilinde neler öğrenilebilir sorusuna cevap aranabilir.

## KAYNAKLAR

- Abraham, R. & Marsden, J. E. 1978. *Foundations of Mechanics*, Benjamin Cummings Publishing Co., Inc. Rhode Island.
- Albert, A. A. 1939. *Structure of Algebras*, AMS Colloquium Publications, Volume 24.
- Atiyah, M. 2007. *Duality in Mathematics and Physics*, Lecture delivered at Institut de Matemàtica de la Universitat de Barcelona (IMUB).
- Baez, J. C. 1989. *Quantum Theory and Analysis*, Notes.
- Baez, J. C. 2002. *The Octonions*. *Bullet. Am. Nath. Soc.*, 29, 145-205.
- Baez, J. C. & Huerta, J. 2007. *The Strangest Numbers in String Theory*. *Sci. Am.* 304, 60-65.
- Baez, J. C. 2012. *Division Algebras and Quantum Theory*. *Found. Phys.*, 42, 819-855.
- Bartle, R. G. & Sherbert, D. R. 1992. *Introduction to Real Analysis*. John Wiley & Sons, Inc.
- Benn, I.M. & Tucker, R. W. 1987. *An Introduction to Spinors and Geometry with Applications in Physics*. IOP Publishing Ltd, Bristol.
- Bohm, A. 1993. *Quantum Mechanics: Foundations and Applications*. Springer-Verlag.
- Crawford, F. S. Jr. 1968. *Waves (Berkeley Physics Course, Volume 3)*. McGraw-Hill Book Comp.
- Dieudonné, J. A. 1960. *Foundations of Modern Analysis*. Academic Press.
- Dieudonné, J. A. 1968. *Infinitesimal Calculus*. Hermann, Paris.
- Dieudonné, J. A. 1981. *History of Functional Analysis*. Mathematics Studies 49, North-Holland Publishing Company.
- Dieudonné, J. A. 1982. *A Panorama of Pure Mathematics*. Academic Press, Inc.
- Dirac, P. A. M. 1930. *The Principles of Quantum Mechanics*. The Clarendon Press, Oxford.
- Dirac, P. A. M. 1933. *The Lagrangian in Quantum Mechanics*. *Physik. Zeit. der Sowj.*, 3, 64-72.
- Dray, T. & Manogue, C. A. 2015. *The Geometry of Octonions*. World Scientific Publishing Company.
- Feynman, R. 1942. *The Principle of Least Action in Quantum Mechanics*. PhD. Thesis.

- Finkelstein, D. R., Jauch, J. M. & Speiser, D. 1961. *Foundations of Quaternion Quantum Mechanics*. Jour. Math. Phys., 3, 207.
- Hall, B. C. 2013. *Quantum Theory for Mathematicians*. Springer.
- Harlow, D. 2022. *Jerusalem Lectures on Black Holes and Quantum Information*. arXiv:1409.1231v5.
- Hatcher, A. 2005 *Notes on Introductory Point-Set Topology*.
- Heisenberg, W. 1925. *Quantum Theoretical Reinterpretation of Kinematic and Mechanical Relations*. Zs. Phys., 33, 879-893.
- Jauch, J. M. & Misra, B. 1965. *Spectral Representation*. Helv. Phys. Acta, 38, 30-52.
- Jauch, J. M. 1973. *The Mathematical Structure of Elementary Quantum Mechanics*. The Physicist's Conception of Nature (ed. Mehra, J.), 300-319.
- Kelley, J. L. 1955. *General Topology*. D. Van Nostrand Company, Inc.
- Kolmogorov, A. N. & Fomin, S. V. 1958. *Elements of the Theory of Functions and Functional Analysis, Volume 2*. Dover Publications.
- Landau, L.D. & Lifshitz, E. M. 1958. *Quantum Mechanics: Non-Relativistic Theory*. Pergamon Press.
- Lanczos, C. 1949. *The Variational Principles of Mechanics*. Dover Publications.
- Lévay, P., Saniga, M. & Vrana, P. 2008 *Three-qubit operators, the split Cayley hexagon of order two, and black holes*. Physical Review D 78, 124022.
- Meise, R. & Vogt, D. 1997. *Introduction to Functional Analysis*. Oxford University Press.
- Myrheim, J. 2018. *Quantum Theory on a Real Hilbert Space*. arXiv:quant-ph/9905037.
- Porteous, I. R. 1995. *Clifford Algebras and Classical Groups*. Cambridge University Press.
- Schrödinger, E. 1926. *Quantization as a Problem of Proper Values (Part I)*. Ann. der Phys., 79, 361-376.
- Schrödinger, E. 1926. *On the Relation between the Quantum Mechanics of Heisenberg, Born, and Jordan, and that of Schrödinger*. Ann. der Phys., 79, 734-756.
- Segal, I. E. 1947. *Irreducible Representations of Operator Algebras*. Bull. Amer. Math. Soc. 53(2): pp. 73-88.
- Stewart, I. & Tall, D. 2018. *Complex Analysis*. Cambridge University Press.
- Stueckelberg, E. C. G. 1959. *Field Quantization and Time Reversal in Real Hilbert Space*. Helv. Phys. Acta, 33, 254.

- Stueckelberg, E. C. G. 1960. *Quantum Theory in Real Hilbert Space*. Helv. Phys. Acta, 33, 727.
- Stueckelberg, E. C. G. & Guenin, M. 1961. *Quantum Theory in Real Hilbert Space II (Addenda and Errata)*. Helv. Phys. Acta, 34, 621.
- Stueckelberg, E. C. G., Guenin, M., Piron, C. & Ruegg, H. 1961. *Quantum Theory in Real Hilbert Space III: Fields of the 1<sup>st</sup> kind (Linear Field Operators)*. Helv. Phys. Acta, 34, 675.
- Stueckelberg, E. C. G. & Guenin, M. 1962. *Théorie des quanta dans l'espace de Hilbert réel IV: Champs de 2<sup>e</sup> espèce (opérateurs de champ antilinéaires), T- et CP-covariance*. Helv. Phys. Acta, 35, 673.
- van der Waarden, B. L. 1967. *Sources of Quantum Mechanics*. North-Holland Publishing Company.
- von Neumann, J. 1932. *Mathematical Foundations of Quantum Mechanics*. Princeton University Press, Princeton.
- Weinberg, S. 1995. *The Quantum Theory of Fields, Volume I: Foundations*. Cambridge University Press.
- Weinberg, S. 2013. *Lectures on Quantum Mechanics*. Cambridge University Press. New York.
- Zwiebach, B. 2022. *Mastering Quantum Mechanics: Essentials, Theory and Applications*. Kindle edition.

## EK 1

### KATEGORİ TEORİSİ

**Kategori:** Bir  $C$  kategorisi onun nesnelere olan bir  $ObC$  kümesiyle birlikte onun morfizmleri (veya okları) olan  $ArC$  kümesini içerir ve şu özellikleri sağlar:

- (i).  $C$ 'nin her  $X, Y$  nesne çiftiyle özdeşleşmiş  $ArC$ 'nin  $X$ 'ten  $Y$ 'ye morfizmlerin kümesi denen  $Mor_C(X, Y)$  (veya  $Mor(X, Y)$ ) altkümesi vardır.  $Mor(X, Y)$  ve  $Mor(X', Y')$  kümeleri ayrıktır eğer  $(X', Y') \neq (X, Y)$  ise.
- (ii).  $C$ 'nin her  $X, Y, Z$  gibi üç nesnesiyle ilişkilendirilmiş bir

$$\begin{aligned} Mor(X, Y) \times Mor(Y, Z) &\longrightarrow Mor(X, Z) \\ (u, v) &\longmapsto uv \end{aligned}$$

gönderimi vardır öyle ki  $u \in Mor(X, Y)$ ,  $v \in Mor(Y, Z)$  ve  $w \in Mor(Z, T)$  için  $w(vu) = (wv)u$  (Dieudonné 1982).

- (iii).  $C$ 'nin her  $X$  nesnesi için  $Mor(X, X)$ 'in bir  $1_X$  elemanı vardır öyle ki  $C$ 'nin her  $Y$  nesnesi ve  $u(X, Y)$  (sırasıyla  $Mor(Y, X)$ ) için  $u = u1_X$ 'dir (sırasıyla  $v = 1_Xv$ ).

$u \in Mor(X, Y)$  için  $vu = 1_X$  ve  $uv = 1_Y$ 'yi mümkün kılan bir  $v \in Mor(Y, X)$  elemanı varsa  $u$ 'ya bir izomorfizmdir denir. Bu  $v \in Mor(Y, X)$  elemanı eşsizdir ve  $u^{-1}$  olarak gösterilir.

**Fonktör:**  $C_1$  kategorisinden  $C_2$  kategorisine bir  $F : C_1 \longrightarrow C_2$  fonktörü  $ObC_1 \longrightarrow ObC_2$  ve  $ArC_1 \longrightarrow ArC_2$  gönderimlerinden oluşur, ikisi de  $F$  ile gösterilir, öyle ki

- (i).  $C_1$ 'in  $X, Y$  nesnelere için  $F(Mor(X, Y)) \subset Mor(F(X), F(Y))$ .
- (ii).  $C_1$ 'in her  $X$  nesnesi için  $F(1_X) = 1_{F(X)}$ 'dir.
- (iii).  $C_1$ 'deki  $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z$  gibi iki morfizm için  $F(vu) = F(v)F(u)$ 'dur.

Bir  $C_2$  kategorisine  $C_1$  kategorisinin altkategorisidir denir eğer  $ObC_2$ ,  $ObC_1$ 'in bir altkümesi ve  $C_2$ 'nin her  $X_2, Y_2$  nesne çifti için  $Mor_{C_2}(X_2, Y_2)$ ,  $Mor_{C_1}(X_2, Y_2)$ 'nin bir altkümesi ise. Bileşim gönderimi,

$$Mor_C(X_2, Y_2) \times Mor_C(Y_2, Z_2) \longrightarrow Mor_C(X_2, Z_2)$$

gönderiminin

$$Mor_{C_2}(X_2, Y_2) \times Mor_{C_2}(Y_2, Z_2) \longrightarrow Mor_{C_2}(X_2, Z_2)$$

gönderimine kısıtlamasıdır ve birim morfizmler  $(1_{X_2})$ , her  $X_2 \in ObC_2$  için  $C_1$  ve  $C_2$ 'ye göre aynıdır.

$F$  fonktörüne sadıktır denir eğer

$$F : ArC_1 \longrightarrow ArC_2$$

injektifse. O fonktöre, tamamen sadıktır denir eğer  $C$ 'nin her  $X, Y$  nesnelere için  $F$ 'nin

$$Mor_{C_1}(X, Y) \longrightarrow Mor_{C_2}(F(X), F(Y))$$

kısıtlaması terslenebilirse.

## EK 2

### TEMSİL TEORİSİ

**Grup:** Bir grup bir  $G$  kümesi ile o küme üzerindeki ikili bir işlemdir ve şu dört özelliği sağlar:

- (i). Her  $x, y \in G$  için  $xy \in G$  (Kapalılık Özelliği),
- (ii).  $x, y, z \in G$  için  $x(yz) = (xy)z$  (Asosiyatiflik Özelliği),
- (iii).  $e \in G$ , veya  $1 \in G$ , elemanına  $G$ 'nin birim elemanı denir ve her  $x \in G$  için  $1x = x = x1$  (Birim eleman),
- (iv). Her  $x \in G$  için bir  $x^{-1} \in G$  vardır öyle ki  $xx^{-1} = 1 = x^{-1}x$  (Tersi).

**Halka:** Bir halka  $(R, +, \cdot)$  üçlüsüdür ve her  $x, y, z \in R$  için şu özellikleri sağlar:

- (i).  $R$  toplama altında Abelyen bir gruptur ve toplamının birim elemanı  $0 \in R$ 'dir.
- (ii). Çarpım asosiyatif (aksi söylenmedikçe) ve toplama altında dağılma özelliği vardır:  $x(y + z) = xy + xz$  ve  $(y + z)x = yx + zx$ .

Halka üzerindeki çarpım komütatifse ona komütatif halka denir. Halkanın bir  $x \in R$  elemanı, diğer bütün elemanlarıyla komüte ediyorsa  $x \in R$ 'e merkez denir. Bir halkanın, grubun aksine, çarpma altında birim elemanı olması gerekmez ama birim elemanı varsa ve herhangi bir  $x \in R$ 'in,  $xx^{-1} = x^{-1}x = 1 \in R$  özelliğini sağlayan çarpmaya göre tersi varsa  $x \in R$ 'e regülerdir (veya terslenebilirdir) denir.  $0 \in R$  haricindeki her  $x \in R$  regüler olduğu bir halkaya, bölümlü halka denir. Bir sayı alanı  $\mathbb{k}$ , komütatif bölümlü bir halkadır.

**Modül:**  $R$ ,  $1 \in R$  birim elemana sahip olan bir halka olsun.  $R$  üzerinde bir sol modül

$$R \times M \longrightarrow M$$

$$(r, x) \longmapsto rx$$

çarpımından oluşur ve toplama altında Abelyen bir gruptur öyle ki:

- (i). Her  $x \in M$  için  $1x = x$ ,
- (ii). Her  $r_1, r_2 \in R$  ve her  $x \in M$  için  $(r_1r_2)x = r_1(r_2x)$ ,

(iii). Her  $r_1, r_2 \in R$  ve her  $x \in M$  için  $(r_1 + r_2)x = r_1x + r_2x$ ,

(iv). Her  $r \in R$  ve her  $x, y \in M$  için  $r(x + y) = rx + ry$

özelliklerini sağlar. Sağ modül benzer şekilde tanımlanır.  $R$  üzerinde bir modül  $R$  üzerinde hem sol hem de sağ modüldür.

Vektör uzayları, modüllerin özel bir halidir. Modüller, halkaları kullanırken vektör uzayları sayı alanları üzerindedir. O zaman modüller, halkalar yerine sayı alanlarını kullanırlarsa vektör uzaylarına dönüşürler.

$V$  vektör uzayından o vektör uzayına tüm çizgisel dönüşümlerin kümesi  $\mathcal{L}(V)$  veya  $End(V) = \{\varphi | \varphi : V \rightarrow V\}$  olarak gösterilir. Bu çizgisel dönüşümlerin hepsi izomorfizmse ona  $Aut(V)$  denir.

$V$ ,  $n$  boyutlu  $\mathbb{k}$ -çizgisel bir uzay olsun.  $Aut(V) = \{\varphi | \varphi : V \rightarrow V\}$ ,  $V$  vektör uzayının otomorfizm grubu olmak üzere her  $v_1, v_2 \in V$  ve her  $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{k}$  için

$$\varphi(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) = \alpha_1 \varphi(v_1) + \alpha_2 \varphi(v_2)$$

sağlanır.  $Aut(\mathcal{H})$  bir gruptur ve  $\mathcal{U}(\mathcal{H})$  bir Hilbert uzayı üzerindeki üniter çizgisel dönüşümler olmak üzere  $Aut(\mathcal{H}) \supseteq Isom(\mathcal{H}) = \mathcal{U}(\mathcal{H})$ .

Bir Hilbert uzayı üzerindeki üniter operatör  $U \in \mathcal{U}(\mathcal{H})$  üzerindedir ve her  $\phi, \psi \in \mathcal{H}$  için  $\langle \phi, \psi \rangle = \langle U\phi, U\psi \rangle$  özelliğini sağlar. Açıkça  $U \in \mathcal{U}(\mathcal{H})$  normu korur  $\|U\psi\| = \|\psi\|$ . Bu özellik antiüniter operatör  $J \in \mathcal{U}^*(\mathcal{H})$  için  $\langle \psi, \phi \rangle = \langle J\phi, J\psi \rangle$ 'dir.

**Temsil:** Bir gruptan bir vektör uzayının otomorfizm grubuna giden bir homomorfizme o grubun, o vektör uzayı üzerindeki bir temsili denir:

$$\varphi : G \rightarrow Aut(V).$$

O vektör uzayına temsilin taşıyıcısı ve vektör uzayının boyutuna da temsilin boyutu denir.

**İndirgenebilir Temsil:** Bir temsil indirgenebilirdir eğer grubun temsil altındaki

görüntüsü taşıyıcı uzayın aşikâr olmayan altuzaylarından en az birini değışmez bırakıyorsa. Hermit-sel çarpıma göre ortogonal tümleyenini de korur.

$T$  gönderimi  $\mathbb{C}$ -çizgisel bire bir ve üzerine bir gönderim öyle ki  $T : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}^*$  iken vektör uzayı olarak  $\mathcal{H}$  ve  $\mathcal{H}^*$  birbirine izomorfiktir, yani  $\mathcal{H} \simeq \mathcal{H}^*$ .

**Morfizm:**  $(\rho_V, V)$  ve  $(\rho_W, W)$  bir grubun iki indirgenemez temsili olsun.  $S : V \longrightarrow W$  bir morfizmdir denir (intertwining veya equivariant gönderim dendiğı de olur) eğer  $G$ 'nin etkisiyle komüte ediyorsa, yani her  $v \in V$  için  $S(\rho_V(g)v) = \rho_W(g)Sv$ .

$(\rho_V, V)$  ve  $(\rho_W, W)$  iki temsil olsun. Bu temsiller arasında her  $g \in G$  ve her  $v \in V$  için  $S\rho_V(g)v = \rho_W(g)Sv$  şeklinde sıra değıştirme özelliğine sahip bir  $S : V \longrightarrow W$  izomorfizmi varsa bu temsillere eşdeğer temsiller denir.

$$\begin{array}{ccc} v & \xrightarrow{\rho_V(g)} & \rho_V(g)v \\ s \downarrow & & \downarrow s \\ Sv & \xrightarrow{\rho_W(g)} & \rho_W(g)Sv \end{array}$$

**Schur Lemması:**  $V$  ve  $W$  bir Lie grubunun veya bir Lie cebri için iki indirgenemez temsili ise şu iki ifade sağlanır:

- (i).  $T : V \longrightarrow W$  bir morfizmse ya  $T = 0$ 'dır ya da  $T$  bir izomorfizmdir.
- (ii).  $T : V \longrightarrow W$  ve  $T' : V \longrightarrow W$ , sıfır-olmayan morfizmlerse bir  $\alpha \in \mathbb{C}$  vardır öyle ki  $T = \alpha T'$  olur.  $T : V \longrightarrow V$  bir morfizmse  $T = \alpha id_V$ 'dir.

Bir  $\mathcal{A}$  cebri ve onunla özdeşleşmiş  $End(\mathcal{A})$  cebri için elemanları,  $L$  gönderimi sayesinde birbiriyle ilişkilendirilebilir öyle ki

$$\begin{aligned} L : \mathcal{A} &\longrightarrow End(\mathcal{A}) \\ x &\longmapsto L(x) \end{aligned}$$

Dolayısıyla her  $x \in \mathcal{A}$  için  $L(x)$ ,  $\mathcal{A}$  üzerinde bir operatördür ve her  $y \in \mathcal{A}$  için  $L(x)y = xy$  olur.  $L$ 'ye, o cebir üzerinde sol çarpım denir ve her  $x, y, z \in \mathcal{A}$  için

$$\begin{aligned} L(\alpha x)y &= \alpha xy \quad ; \alpha \in \mathbb{k} \\ L(x+y)z &= (x+y)z = xz + yz \end{aligned}$$

olduğundan  $L$  çizgiseldir. Açıkça her  $x, y \in \mathcal{A}$  için  $L(x)L(y) = L(xy)$ 'dir ve bu bir cebir homomorfizmidir (Benn ve Tucker 1987).

Sol çarpımla benzer şekilde bir sağ çarpım  $R$  aşağıdaki gibi tanımlanabilir:

$$\begin{aligned} R : \mathcal{A} &\longrightarrow \text{End}(\mathcal{A}) \\ x &\longmapsto R(x) \end{aligned}$$

Sağ çarpımın etkisi, her  $x, y, z \in \mathcal{A}$  için

$$\begin{aligned} R(\alpha x)y &= y\alpha x = \alpha yx \quad ; \alpha \in \mathbb{k} \\ R(x+y)z &= z(x+y) = zx + zy \end{aligned}$$

olarak veilir. Sol ve sağ çarpım, her  $x, y \in \mathcal{A}$  için aşağıdaki anlamda sıra değiştirir

$$L(x)(R(y)(z)) = L(x)(zy) = xzy = R(y)(xz) = R(y)(L(x)(z))$$

ve onlar,  $\text{End}(\mathcal{A})$ 'nın altcebirleridir.

## EK 3

### FONKSİYONEL ANALİZDE BAZI TEOREMLER

Bu ek kesimde fonksiyonel analiz için önemli olan bazı önemli teoremler verilecektir.

#### Kapalı Grafik Teoremi.

$V$  bir Banach uzayı ve  $W$  normlu bir uzay olsun. Herhangi bir çizgisel  $T : V \rightarrow W$  gönderimi için

$$\text{Graph}(T) = \{(\psi, T\psi) | \psi \in V\} \subset V \times W$$

(veya sadece  $T$ ),  $V \times W$ 'nin kapalı bir altkümesi ise  $T$  sınırlıdır (Hall 2013).

#### Riesz Temsil Teoremi.

Bir  $f_\phi : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{C}$  sınırlı, çizgisel bir fonksiyonel ise eşsiz bir  $\phi \in \mathcal{H}$  vardır öyle ki her  $\psi \in \mathcal{H}$  için  $f_\phi(\psi) = \langle \phi, \psi \rangle$ 'dir. Dahası  $f_\phi$ 'nin operatör normu  $\phi \in \mathcal{H}$ 'nin normuna eşittir.

#### Riesz Teoremi.

$X$  kompakt topolojik bir uzay olsun. O zaman her  $y \in \mathcal{C}(X)^*$  için  $X$  üzerinde,  $\mu(X) = \|y\|$  ve her  $x \in X$  için  $|\varphi(x)|$  olan bir ölçülebilir fonksiyonu  $\varphi : X \rightarrow \mathbb{k}$  ile,  $\mu$  ölçüsü vardır öyle ki her  $f \in \mathcal{C}(X)$  için

$$y(f) = \int f \varphi d\mu$$

(Meise ve Vogt 1997).

#### Weierstrass's Yaklaşıklık Teoremi.

$X$ ,  $\mathbb{R}^n$ 'nin boş-olmayan kompakt bir altkümesi ise  $X$  üzerindeki her sürekli fonksiyon polinomlar ile düzgün yaklaşıklştırılabilir.

#### Alaoglu-Bourbaki Teoremi.

Bir yerel konveks  $X$  uzayındaki her sıfır  $U$  komşuluğu için onun poları  $U^\circ$  kesinlikle konvekstir ve  $\sigma(X', X)$ -kompakttır.