

ANKARA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

SCHWARZSCHILD MILNE VE PLANK İNTEGRALLERİ

Nurgül ÇAYIROĞLU

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ANKARA
2026

Her hakkı saklıdır

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

SCHWARZSCHILD MILNE VE PLANK İNTEGRALLERİ

Nurgül ÇAYIROĞLU

Ankara Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Elgiz BAYRAM

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölüm giriş kısmına ayrılmıştır.

İkinci bölümde, Plank ve birinci, ikinci, üçüncü tip Schwarzschild Milne integralleri için gerekli bazı tanımlar verilmiştir. Ayrıca bu integrallerin düzgün yakınsaklığının gösterilmesi için gerekli testler belirtilmiştir.

Üçüncü bölümde, Plank integralinin düzgün yakınsaklığı, asimptotik özellikleri araştırılmış ve seri gösterimleri elde edilmiştir.

Dördüncü bölümde; birinci, ikinci ve üçüncü tip Schwarzschild Milne integrallerinin düzgün yakınsaklığı, asimptotik özellikleri araştırılmış ve seri gösterimleri elde edilmiştir. Ayrıca, bu integrallerin belirlenen parametrenin bazı değerlerine göre hesaplamaları verilmiştir.

Beşinci bölüm tartışma ve sonuç kısmına ayrılmıştır.

Ocak 2026, 35 sayfa

Anahtar Kelimeler: Parametreye Bağlı Genelleştirilmiş İntegraller, Düzgün Yakınsaklık, Plank İntegralleri, 1. tip, 2. tip ve 3. tip Schwarzschild Milne İntegralleri, Parametreye Bağlı Genelleştirilmiş İntegrallerin Asimptotik Eşitlikleri ve Seri Gösterimleri

ABSTRACT

Master Thesis

SCHWARZSCHILD MILNE AND PLANCK INTEGRALS

Nurgül ÇAYIROĞLU

Ankara University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Elgiz BAYRAM

This thesis consists of five chapters.

The first chapter is devoted to the introduction.

In the second chapter, some definitions are given for the Planck integral and first, second, and third type Schwarzschild-Milne integrals. In addition, several necessary tests are presented to demonstrate the uniform convergence of these integrals.

In the third chapter, the uniform convergence and asymptotic properties of the Planck integral are investigated and its series representations are obtained.

In the fourth chapter, the uniform convergence and asymptotic properties of the first, second, and third type Schwarzschild-Milne integrals are investigated and their series representations are obtained. Furthermore, the calculations of these integrals are provided for certain values of the specified parameter.

The fifth chapter is devoted to the discussion and conclusion.

January 2026, 35 pages

Keywords: Improper Integrals Dependent on Parameter, Uniform Convergence, Planck Integrals, Type 1, Type 2 and Type 3 Schwarzschild Milne Integrals, Asymptotic Equations and Series Expansion of Improper Integrals Dependent on Parameter

ÖNSÖZ VE TEŞEKKÜR

Çalışmalarımı yönlendiren, araştırmalarımın her aşamasında bilgi, öneri ve yardımlarını esirgemeyerek akademik ortamda olduğu kadar beşeri ilişkilerde de engin fikirleriyle yetişmeme ve gelişmeme katkıda bulunan danışman hocam sayın Prof. Dr. Elgiz BAYRAM' a ve bu süreçte manevi desteğini benden esirgemeyen ailem ve arkadaşlarıma en derin duygularıyla teşekkür ederim.

Nurgül ÇAYIROĞLU

Ankara, Ocak 2026

İÇİNDEKİLER

TEZ ONAY SAYFASI	
ETİK.....	i
ÖZET.....	ii
ABSTRACT.....	iii
ÖNSÖZ VE TEŞEKKÜR.....	iv
SİMGELER DİZİNİ.....	vi
ÇİZELGELER DİZİNİ.....	vii
1. GİRİŞ.....	1
2. PARAMETREYE BAĞLI GENELLEŞTİRİLMİŞ İNTEGRALLER.....	3
2.1 Parametreye Bağlı Genelleştirilmiş İntegral.....	3
2.2 Düzgün Yakınsaklık.....	3
2.3 Parametreye Bağlı Genelleştirilmiş İntegrallerin Düzgün Yakınsaması İçin Testler.....	4
2.3.1 Cauchy testi.....	4
2.3.2 Weierstrass testi.....	5
2.3.3 Abel testi.....	7
2.3.4 Dirichlet testi.....	8
2.3.5 Dedekind testi.....	9
3. PLANK İNTEGRALI.....	13
3.1 Plank İntegralinin Düzgün Yakınsaklığı.....	13
3.2 Plank İntegralinin Seri Açılımı.....	15
3.3 Plank İntegralinin Asimptotik Eşitlikleri.....	17
4. SCHWARZSCHILD MILNE İNTEGRALLERİ.....	19
4.1 Schwarzschild Milne İntegrallerinin Düzgün Yakınsaklığı.....	19
4.2 Schwarzschild Milne İntegrallerinin Seri Açılımı.....	26
4.3 Schwarzschild Milne İntegrallerinin Asimptotik Eşitlikleri.....	27
4.4 Schwarzschild Milne İntegrallerinin “ τ ” Parametresinin Bazı Değerlerine Göre Hesaplanması.....	30
5. TARTIŞMA VE SONUÇ.....	32
KAYNAKLAR.....	33
ÖZGEÇMİŞ.....	36

SİMGELER DİZİNİ

$a \rightarrow b$	a değerinin b değerine yaklaşımı
$[a, b]$	a değeri ile b değeri arasındaki tüm reel sayılar (a ve b değeri dahil)
k	Boltzmann Sabiti
\mathbb{N}	Doğal Sayılar
\in	Eleman
$!$	Faktöriyel
ν	Frekans
$\Gamma(n)$	Gama Fonksiyonu
$\frac{\partial g}{\partial x}$	g fonksiyonun x değerine göre kısmi türevi
$H(a,b)$	Hubbel İntegrali
c	Işık Hızı
\leq	Küçük veya eşittir
$<$	Küçüktür
\lim	Limit
\max	Maksimum
\min	Minimum
h	Plank Sabiti
\mathbb{R}	Reel Sayılar
t	Sıcaklık
$B_\nu(t)$	Sıcaklığın Evrensel Fonksiyonu
∞	Sonsuz
Σ	Toplam
$E_n(x)$	Üstel İntegral
0^+	0 ' a sağdan yaklaşım

ÇİZELGELER DİZİNİ

- Çizelge 4.1 Asimptotik yaklaşım eşitlikleri $\tau \rightarrow 0$ için elde edilen (4.8), (4.10) ve (4.12); $\tau \rightarrow \infty$ için elde edilen (4.9), (4.11) ve (4.12) Schwarzschild Milne integrallerinin sayısal değerleri.....30
- Çizelge 4.2 Schwarzschild Milne integralleri olarak verilen (4.1), (4.2) ve (4.3) formülleri yardımıyla bu integrallerin seri açılımlarının değerleri31

1. GİRİŞ

Parametreye bağılı genelleştirilmiş integraller kuantum fiziğinde, kuantum istatistik teorisinde, ışınların taşınma süreçleri teorisinde, yüksek geçişkenlik teorisinde, sıvıların akışkanlık özelliklerinin öğrenilmesinde, tek boyutlu ve çok boyutlu ışın saçılımlarında ve düzlemsel saçılımların incelenmesinde önem arz etmektedir (Breig ve Grosbie 1974, 1975; Busbridge 1960; Chandrasekhar 1960; Grosbie ve Dougherty 1981; Grosbie ve Lee 1987, 1989; Drummond 1981; Goody 1964; Guseinov ve Mamedov 2001, 2002, 2005; Hunt 1967; Kourganof 1952; Oberoy ve Gallaway 1972; Peraiah 2002; Prabha ve Yadav 1996; Rubicki 1971; Smith 1964; Smith ve Hunt 1967; Yuen ve Ho 1967). Ayrıca uygulamalı matematiğin ve analizin bazı konularının öğrenilmesinde, parametreye bağılı genelleştirilmiş integrallerin incelenmesi gerekmektedir (Nikolsky 1977; Prudnikov, Brychkov ve Marichev 1992; Sobolev 1963). Bu tür integrallere örnek olarak Fourier integralleri, Laplace integralleri, Euler integralleri, bir boyutlu ve çok boyutlu üstel integraller, Plank integrali, Schwarzschild Milne' in birinci, ikinci, üçüncü integralleri ve Hubbel integrali gösterilebilir.

Parametreye bağılı genelleştirilmiş integrallerin analitik özelliklerinin, seri gösterimlerinin, parametreye göre farklı noktalarda asimptotik eşitliklerinin öğrenilmesi ve yaklaşık değerlerinin hesaplanması, bu integrallerin parametreye göre düzgün yakınsaklığı ile ilgilidir. Bu nedenle de çeşitli parametreye bağılı genelleştirilmiş integrallerin incelenmesi önem arz etmektedir.

Aşağıdaki gibi bir boyutlu üstel ve genelleştirilmiş üstel integralleri göz önünde bulunduralım.

$$e_{\alpha}(x) = \int_1^{\infty} e^{-xt} t^{-\alpha} dt$$
$$g_k(x) = \frac{1}{(k-1)!} \int_1^{\infty} e^{-xt} (\ln t)^{k-1} t^{-1} dt$$

$$e_{\alpha}^k(x) = \frac{1}{\Gamma(k+1)} \int_1^{\infty} e^{-xt} (\ln t)^k t^{-\alpha} dt,$$

burada $\alpha \in \mathbb{R} := (-\infty, \infty)$, $k \in \mathbb{N} := \{1, 2, 3, \dots\}$ ve $\Gamma(k+1)$, Eulerin gamma fonksiyonudur. Bu parametreye bağı genelleştirilmiş integraller için binomial ve multinomial katsayılar yöntemi kullanılarak seri gösterimler ve yaklaşık değerlerinin nümerik olarak hesaplanması Guseinov ve Mamedov tarafından elde edilmiştir (2001, 2002, 2005).

İntegrallerin parametreye göre düzgün yakınsaklığı ve düzgün yakınsaklığın kullanılarak seri gösterimleri, asimptotik eşitlikleri ve değerlerinin nümerik olarak hesaplamaları Aygar ve Bairamov (2011), Bairamov ve Özalp (2012), Bairamov ve Yardımcı (2010), Özalp ve Bairamov (2011) tarafından detaylı bir biçimde incelenmiştir. Üstel integrallerin iki boyutlu genelleştirmeleri

$$\varepsilon_n^p(x, \beta) = \int_1^{\infty} f_n^p(t, \beta) \frac{e^{-x(t^2 + \beta^2)^{\frac{1}{2}}}}{(t^2 + \beta^2)^{\frac{p}{2}}} dt, n = 1, 2, \dots$$

şeklindedir, burada $x \in (0, \infty)$, $\beta \in \mathbb{R}$, $p = 0, 1$ ve $f_n^p(t, \beta)$ fonksiyonu t ve β değişkenlerine göre bir polinomdur. Bu üstel fonksiyonlar için düzgün yakınsaklık, seri gösterimleri, asimptotik eşitlikler ve değerlerinin nümerik olarak hesaplamaları Bairamov ve Özalp tarafından verilmiştir (2012).

Radyasyonun yayılımı ile ilgili Hubbel integrali iki parametreye bağı

$$H(a, b) = \int_0^a \int_0^b \frac{1}{1 + x^2 + y^2} dx dy$$

şeklinde bir genelleştirilmiş integraldir, burada $0 \leq a \leq b \leq \infty$ (Hubbel, Bach ve Lamkin 1960). Bu integral için düzgün yakınsaklık detaylı bir biçimde Bairamov ve Özalp tarafından incelenmiştir (2011).

2. PARAMETREYE BAĞLI GENELLEŞTİRİLMİŞ İNTEGRALLER

2.1 Parametreye Bağlı Genelleştirilmiş İntegral

Tanım 2.1 $u = f(x, y)$ fonksiyonu $a \leq x < +\infty$ ve $c \leq y \leq d$ aralığında tanımlı olsun. Her $y \in [c, d]$ için;

$$J(y) = \int_a^{\infty} f(x, y) dx = \lim_{l \rightarrow +\infty} \int_a^l f(x, y) dx$$

şeklinde tanımlanan integrale sınırsız aralıkta tanımlı parametreye bağlı genelleştirilmiş integral denir (Budak ve Fomin 1973).

2.2 Düzgün Yakınsaklık

Düzgün yakınsaklık kavramı, parametreye bağlı genelleştirilmiş integraller teorisinde önemli bir rol oynar. Düzgün yakınsak genelleştirilmiş integraller belirli integraller gibi çalıştırılabilir.

Sınırsız aralıkta tanımlı parametreye bağlı genelleştirilmiş integralin düzgün yakınsaklığı aşağıdaki gibi tanımlanır.

Tanım 2.2 Eğer keyfi bir $\varepsilon > 0$ verildiğinde, her $l > L(\varepsilon)$ ve her $y \in [c, d]$ için aynı anda

$$\left| J(y) - \int_a^l f(x, y) dx \right| = \left| \int_l^{+\infty} f(x, y) dx \right| < \varepsilon$$

eşitsizliğini sağlayacak şekilde $L=L(\varepsilon)$ varsa,

$$J(y) = \int_a^{+\infty} f(x, y) dx$$

integrali, $c \leq y \leq d$ aralığında y parametresine göre düzgün yakınsaktır denir (Budak ve Fomin 1973).

2.3 Parametreye Bağlı Genelleştirilmiş İntegrallerin Düzgün Yakınsaması İçin Testler

2.3.1 Cauchy testi

$$\int_a^{\infty} f(x, y) dx$$

integralinin bir $[c, d]$ aralığında düzgün bir şekilde yakınsaması için, her $\varepsilon > 0$ için $L = L(\varepsilon)$ vardır öyle ki

$$\left| \int_{l'}^{l''} f(x, y) dx \right| < \varepsilon$$

eşitsizliği tüm $l', l'' > L(\varepsilon)$ ve tüm $y \in [c, d]$ için aynı anda geçerli olması gerekli ve yeterlidir (Budak ve Fomin 1973).

İspat: (Gereklilik) Eğer integral düzgün yakınsak ise, her $\varepsilon > 0$ için bir $L = L(\varepsilon)$ vardır, öyle ki $l' > L(\varepsilon), l'' > L(\varepsilon)$ ve $y \in [c, d]$ için;

$$\left| \int_{l'}^{\infty} f(x, y) dx \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

ve

$$\left| \int_{l''}^{\infty} f(x, y) dx \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

eşitsizlikleri sağlanır. Bu nedenle, tüm $l', l'' > L(\varepsilon)$ ve tüm $y \in [c, d]$ için

$$\begin{aligned} \left| \int_{l'}^{l''} f(x, y) dx \right| &= \left| \int_{l'}^{+\infty} f(x, y) dx - \int_{l''}^{+\infty} f(x, y) dx \right| \\ &\leq \left| \int_{l'}^{+\infty} f(x, y) dx \right| + \left| \int_{l''}^{+\infty} f(x, y) dx \right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

(Yeterlilik) Eğer

$$\left| \int_{l'}^{l''} f(x, y) dx \right| < \varepsilon$$

eşitsizliği tüm $l' > L(\varepsilon), l'' > L(\varepsilon)$ ve tüm $y \in [c, d]$ için geçerli ise,

$$\int_a^{\infty} f(x, y) dx$$

integrali tüm $y \in [c, d]$ için yakınsar. Bu nedenle, $l'' \rightarrow +\infty$ olarak limite geçilirse, tüm $l' > L(\varepsilon)$ için aynı anda tüm $y \in [c, d]$ için geçerli olan

$$\left| \int_{l'}^{+\infty} f(x, y) dx \right| < \varepsilon$$

eşitsizliğini elde edilir.

2.3.2 Weierstrass testi

Eğer $a \leq x < +\infty$ için $|f(x, y)| \leq g(x)$ ve

$$\int_a^{+\infty} g(x) dx$$

yakınsak ise $c \leq y \leq d$ aralığında

$$\int_a^{+\infty} f(x, y) dx$$

ve

$$\int_a^{+\infty} |f(x, y)| dx$$

integralleri düzgün yakınsaktır (Budak ve Fomin 1973).

İspat: Keyfi bir $\varepsilon > 0$ verilsin.

$$\int_a^{+\infty} g(x) dx$$

integrali yakınsak ise en azından bir $L = L(\varepsilon)$ vardır öyle ki

$$\int_{l'}^{l''} g(x) dx < \varepsilon$$

koşulu tüm $l', l'' > L(\varepsilon)$ ($l'' > l'$) için sağlanır. Bu tüm $l', l'' > L(\varepsilon)$ ($l'' > l'$) için

$$\left| \int_{l'}^{l''} f(x, y) dx \right| \leq \int_{l'}^{l''} |f(x, y)| dx \leq \int_{l'}^{l''} g(x) dx < \varepsilon$$

Eşitsizliklerinin, tüm $y \in [c, d]$ için aynı anda sağlandığı anlamına gelir. Sonuç olarak, Cauchy Testi ile,

$$\int_a^{+\infty} f(x, y) dx$$

ve

$$\int_a^{+\infty} |f(x, y)| dx$$

integralleri $c \leq y \leq d$ aralığında y parametresine göre düzgün yakınsaktır.

2.3.3 Abel testi

$$\int_a^{+\infty} f(x, y) dx$$

integrali $y \in [c, d]$ aralığında y parametresine göre düzgün yakınsak ise ve $g(x, y)$ fonksiyonu düzgün sınırlıysa, yani her $y \in [c, d]$ ve $x \geq a$ için $|g(x, y)| \leq M$ sağlanıyorsa burada M ; x veya y 'ye bağlı olmayan bir sabit ise,

$$\int_a^{+\infty} f(x, y) g(x, y) dx$$

integrali $[c, d]$ aralığında y parametresine göre düzgün yakınsaktır (Prudnikov, Brychkov ve Marichev, 1992).

İspat: Her x, y için $f(x, y) \leq |f(x, y)|$ olduğu biliniyor, buradan hipotez gereği her $x \geq a$ ve her $y \in [c, d]$ için $f(x, y) |g(x, y)| \leq |f(x, y)| |g(x, y)|$ yazılır.

Ayrıca her $\varepsilon > 0$ ve $l', l'' > L(\varepsilon)$ için

$$\int_a^{+\infty} f(x, y) dx$$

integrali düzgün yakınsak olduğundan

$$\left| \int_a^{+\infty} f(x, y) dx \right| < \frac{\varepsilon}{M}$$

ve

$$\left| \int_{i'}^{l''} f(x, y)g(x, y)dx \right| \leq \left| \int_{i'}^{l''} f(x, y)|g(x, y)|dx \right|$$

$$< M \left| \int_{i'}^{l''} f(x, y)dx \right| < M \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon$$

bulunur.

2.3.4 Dirichlet testi

$b \geq a$ ve $y \in [c, d]$ olmak üzere

$$\int_a^b f(x, y)dx$$

integrali y parametresinin bir fonksiyonu olarak düzgün sınırlıysa, yani M y parametresine bağlı olmayan bir sabit olmak üzere

$$\left| \int_a^b f(x, y)dx \right| \leq M$$

ve $x \rightarrow +\infty$ iken $g(x, y) \rightarrow 0$ olarak $y \in [c, d]$ parametresine göre düzgün ve x parametresine göre monoton ise, bu durumda

$$\int_a^{+\infty} f(x, y)g(x, y)dx$$

integrali $[c, d]$ aralığında y parametresine göre düzgün yakınsaktır (Prudnikov, Brychkov ve Marichev 1992).

İspat: Her $\varepsilon > 0$ için öyle bir $L(\varepsilon) > 0$ vardır öyle ki; her $x > L(\varepsilon)$ ve her $y \in [c, d]$ için;

$$|g(x, y)| < \frac{\varepsilon}{M}$$

sağlanır. Buradan her $l', l'' > L(\varepsilon)$ için;

$$\left| \int_{l'}^{l''} f(x, y)g(x, y)dx \right| \leq \int_{l'}^{l''} f(x, y)|g(x, y)|dx < M \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon$$

bulunur.

2.3.5 Dedekind testi

E reel sayıların sınırlı veya sınırsız bir alt kümesi olmak üzere

$$\int_0^{\infty} f(x, \lambda)g(x, \lambda)dx, \quad \lambda \in E \quad (2.1)$$

integralini göz önüne alalım.

Teorem 2.1 : (Düzgün Yakınsaklık için Dedekind Kriteri)

Yukarıda verilen integralde $f, g, \frac{\partial g}{\partial x}$ fonksiyonları her $\lambda \in E$ için x parametresine göre $[0, \infty)$ aralığında sürekli olsunlar. Eğer

a) Her $\lambda \in E$ için düzgün olarak

$$\lim_{x \rightarrow \infty} g(x, \lambda) = 0,$$

b) $\frac{\partial g}{\partial x}$ fonksiyonu her $\lambda \in E$ için x parametresine göre $[0, \infty)$ üzerinde aynı işaretli (işaretini korusun),

ve

c) Her $\lambda \in E, t \in [0, \infty)$ için

$$\int_0^x f(t, \lambda) dt$$

integrali düzgün sınırlı, yani; her $x \in [0, \infty)$, $\lambda \in E$ için

$$\left| \int_0^x f(t, \lambda) dt \right| \leq M$$

olacak şekilde en azından bir $M > 0$ var ise, bu durumda (2.1) integrali $\lambda \in E$ için λ parametresine göre düzgün yakınsaktır (Prudnikov, Brychkov ve Marichev 1992).

İspat: Keyfi $\beta \in [0, \infty)$ için kısmi integrasyon kullanarak aşağıdaki eşitlik elde edilir.

$$\begin{aligned} \int_{\beta}^{\infty} f(x, \lambda) g(x, \lambda) dx &= - \int_{\beta}^{\infty} g(x, \lambda) d \left\{ \int_x^{\beta} f(t, \lambda) dt \right\} = \\ &= - \left[g(x, \lambda) \int_x^{\beta} f(t, \lambda) dt \right]_{x=\beta}^{\infty} + \int_{\beta}^{\infty} \left[\int_x^{\beta} f(t, \lambda) dt \right] \frac{\partial g(x, \lambda)}{\partial x} dx \\ &= - \lim_{x \rightarrow \infty} \left[g(x, \lambda) \int_x^{\beta} f(t, \lambda) dt \right] + \int_{\beta}^{\infty} \left[\int_x^{\beta} f(t, \lambda) dt \right] \frac{\partial g(x, \lambda)}{\partial x} dx \end{aligned} \quad (2.2)$$

Buradan;

$$\int_x^{\beta} f(t, \lambda) dt = \int_0^{\beta} f(t, \lambda) dt - \int_0^x f(t, \lambda) dt$$

olduğundan, $M \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$\left| \int_x^{\beta} f(t, \lambda) dt \right| \leq 2M \quad (2.3)$$

olur. Bu durumda,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left[g(x, \lambda) \int_x^\beta f(t, \lambda) dt \right] = 0$$

elde edilir. (2.2) eşitliği gereğince

$$\int_\beta^\infty f(x, \lambda) g(x, \lambda) dx = \int_\beta^\infty \left[\int_x^\beta f(t, \lambda) dt \right] \frac{\partial g(x, \lambda)}{\partial x} dx \quad (2.4)$$

olduğu bulunur. (2.3) eşitsizliğinden, her $\varepsilon > 0$ için, öyle $\delta_1 = \delta_1(\varepsilon) > 0$ vardır ki, keyfi $\eta \geq \delta_1(\varepsilon)$ ve keyfi $\lambda \in E$ için

$$\left| \int_x^\eta f(t, \lambda) dt \right| \leq 2M \quad (2.5)$$

olur. Ayrıca her $\varepsilon > 0$ için, öyle $\delta_2 = \delta_2(\varepsilon) > 0$ vardır ki, her $\eta \geq \delta_2(\varepsilon)$ ve her $\lambda \in E$ için

$$|g(\eta, \lambda)| \leq \frac{\varepsilon}{2M} \quad (2.6)$$

sağlanır. $\delta(\varepsilon) := \max\{\delta_1(\varepsilon), \delta_2(\varepsilon)\}$ olmak üzere, (2.5) ve (2.6) eşitsizliklerinden her $\varepsilon > 0$ için öyle $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ vardır ki, her $\eta \geq \delta(\varepsilon)$ ve $\lambda \in E$ için

$$\left| \int_x^\eta f(t, \lambda) dt \right| \leq 2M \quad (2.7)$$

$$|g(\eta, \lambda)| \leq \frac{\varepsilon}{2M} \quad (2.8)$$

elde edilir. (2.4), (2.7) ve (2.8) eşitliği ve eşitsizlikleri kullanılarak, her $\varepsilon > 0$ için öyle $\delta(\varepsilon) > 0$ vardır ki, her $\eta \geq \delta(\varepsilon)$ ve $\lambda \in E$ için

$$\begin{aligned} \left| \int_\eta^\infty f(x, \lambda) g(x, \lambda) dx \right| &= \left| \int_\eta^\infty \left[\int_x^\eta f(t, \lambda) dt \right] \frac{\partial g(x, \lambda)}{\partial x} dx \right| \\ &\leq \int_\eta^\infty \left| \int_x^\eta f(t, \lambda) dt \right| \left| \frac{\partial g(x, \lambda)}{\partial x} \right| dx \leq 2M \int_\eta^\infty \left| \frac{\partial g(x, \lambda)}{\partial x} \right| dx \end{aligned} \quad (2.9)$$

bulunur.

(c) özelliğine göre, her $\lambda \in E$ için x parametresine göre $\frac{\partial g(x, \lambda)}{\partial x}$ aynı işaretli olduğundan (2.9) eşitsizliğinden

$$\begin{aligned} \left| \int_{\eta}^{\infty} f(x, \lambda) g(x, \lambda) dx \right| &\leq 2M \left| \int_{\eta}^{\infty} \frac{\partial g(x, \lambda)}{\partial x} dx \right| \\ &= 2M \left| \lim_{x \rightarrow \infty} g(x, \lambda) - g(\eta, \lambda) \right| = 2M \cdot |g(\eta, \lambda)| \leq \varepsilon \end{aligned}$$

olduğu çıkar, yani (2.1) integrali $\lambda \in E$ için λ' ya göre düzgün yakınsaktır.

3. PLANK İNTEGRALI

Tanım 3.1 Kuantum istatistiğinde Plank fonksiyonunun açık formu,

$$B_\nu(t) = 2hc^{-2}\nu^3 \left(e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1 \right)^{-1}$$

şeklinde tanımlanır. Plank integrali ise,

$$B(t) = \int_0^\infty B_\nu(t) d\nu$$

şeklinde tanımlanır (Peraiah 2002) .

3.1 Plank İntegralinin Düzgün Yakınsaklığı

$a = 2hc^{-2}$ ve $b = hk^{-1}$ olmak üzere, Plank integrali;

$$\begin{aligned} B(\tau) &= \int_0^\infty B_\nu(\tau) d\nu = 2hc^{-2} \int_0^\infty \nu^3 \left(e^{\frac{h\nu}{k\tau}} - 1 \right)^{-1} d\nu \\ &= a \int_0^\infty \nu^3 e^{-\frac{b}{\tau}\nu} \left(1 - e^{-\left(\frac{b}{\tau}\right)\nu} \right)^{-1} d\nu \end{aligned}$$

olarak düzenlenip, $\varphi(\tau, \nu)$ ve $\psi(\tau, \nu)$ fonksiyonları;

$$\varphi(\tau, \nu) = \nu^3 e^{-\frac{b}{\tau}\nu}, \quad \psi(\tau, \nu) = \left(1 - e^{-\frac{b}{\tau}\nu} \right)^{-1}$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda Plank İntegrali;

$$B(\tau) = a \int_0^\infty \varphi(\tau, \nu) \psi(\tau, \nu) d\nu$$

biçiminde olur. Bu integralin düzgün yakınsaklığı Abel Testi kullanılarak gösterilsin. Bunun için,

$$\int_0^{\infty} \varphi(\tau, v) dv = \int_0^{\infty} v^3 e^{-\left(\frac{b}{\tau}\right)v} dv$$

genelleştirilmiş integralinin $[0, \infty)$ üzerinde τ parametresine göre düzgün yakınsak olduğu gösterilmelidir.

$$\frac{b}{\tau}v = x, \quad \frac{b}{\tau}dv = dx$$

olacak şekilde denklemdeki değişkenler değiştirilirse;

$$v \rightarrow 0$$

iken

$$x \rightarrow 0$$

ve

$$v \rightarrow \infty$$

iken

$$x \rightarrow \infty$$

olduğundan integralin sınırları aynı kalacaktır. Ayrıca,

$$v^3 = \frac{\tau^3 x^3}{b^3}, \quad dv = \frac{\tau}{b} dx$$

olduğundan

$$\int_0^{\infty} \varphi(\tau, v) dv = \int_0^{\infty} v^3 e^{-\frac{b}{\tau}v} dv = \int_0^{\infty} \frac{\tau^3 x^3}{b^3} e^{-x} \frac{\tau}{b} dx$$

bulunur.

Son eşitlikte

$$\Gamma(n) = \int_0^{\infty} x^{n-1} e^{-x} dx, \quad \Gamma(n+1) = n!$$

şeklinde tanımlanan “Gama Fonksiyonu” kullanılarak;

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \varphi(\tau, \nu) d\nu &= \tau^4 b^{-4} \int_0^{\infty} x^3 e^{-x} dx \\ &= \tau^4 b^{-4} \Gamma(4) = 3! b^{-4} \tau^4 = 6b^{-4} \tau^4 \end{aligned}$$

olarak elde edilir. O halde,

$$\int_0^{\infty} \varphi(\tau, \nu) d\nu = \int_0^{\infty} \nu^3 e^{-\frac{b}{\tau}\nu} d\nu$$

integrali $[0, \infty)$ üzerinde τ parametresine göre düzgün yakınsaktır.

Diğer taraftan $b > 0, \tau > 0, \nu > 0$ olduğundan $\psi(\tau, \nu) = \left(1 - e^{-\frac{b}{\tau}\nu}\right)^{-1}$ fonksiyonu düzgün sınırlıdır, yani $|\psi(\tau, \nu)| \leq 1$ sağlanır. Buradan Plank integrali Abel Testi’ ne göre düzgün yakınsaktır.

3.2 Plank İntegralinin Seri Açılımı

Bu kısımda Plank integrali için seri açılımı elde edilmeye çalışılacaktır. Bunun için $|x| < 1$ olmak üzere

$$\sum_{l=0}^{\infty} x^l = \frac{1}{1-x}$$

seri açılımından yararlanılsın. Bu eşitlik Plank integralinde kullanılırsa;

$$\begin{aligned}
B(\tau) &= a \int_0^{\infty} v^3 e^{-\frac{b}{\tau}v} \left(1 - e^{-\frac{b}{\tau}v}\right)^{-1} dv = a \int_0^{\infty} v^3 e^{-\frac{b}{\tau}v} \frac{1}{1 - e^{-\frac{b}{\tau}v}} dv \\
&= a \int_0^{\infty} v^3 e^{-\frac{b}{\tau}v} \sum_{l=0}^{\infty} e^{-\frac{b}{\tau}vl} dv
\end{aligned}$$

Plank integrali parametreye bağılı integral gibi τ parametresine göre $[0, \infty)$ aralığında düzgün yakınsak olduğundan, sonuncu eşitlikte seri ve integralin sırası değiştirilerek;

$$\begin{aligned}
B(\tau) &= a \int_0^{\infty} v^3 \sum_{l=0}^{\infty} e^{-\frac{b}{\tau}v(l+1)} dv \\
&= a \sum_{l=0}^{\infty} \int_0^{\infty} v^3 e^{-\frac{b}{\tau}v(l+1)} dv
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu eşitlikte

$$\frac{b}{\tau}(l+1)v = x, \quad v = \frac{\tau}{b(l+1)}x, \quad dv = \frac{\tau}{b(l+1)}dx$$

değişken değiştirmelerini uygulanırsa;

$$v \rightarrow 0$$

iken

$$x \rightarrow 0$$

ve

$$v \rightarrow \infty$$

iken

$$x \rightarrow \infty$$

olduğundan integralin sınırları aynı kalacaktır. Dolayısıyla;

$$\begin{aligned}
B(\tau) &= a \sum_{l=0}^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{\tau^3}{b^3(l+1)^3} x^3 e^{-x} \frac{\tau}{b(l+1)} dx \\
&= a \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\tau^4}{b^4(1+l)^4} \int_0^{\infty} x^3 e^{-x} dx = a \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\tau^4}{b^4(1+l)^4} \Gamma(4) \\
&= 6ab^{-4} \sum_{l=0}^{\infty} (1+l)^{-4} \tau^4
\end{aligned}$$

bulunur. O halde Plank İntegrali için seri açılımı

$$B(\tau) = 6ab^{-4} \sum_{l=0}^{\infty} (1+l)^{-4} \tau^4$$

olarak elde edilir.

3.3 Plank İntegralinin Asimptotik Eşitlikleri

Bir önceki kısımda Plank integralinin seri açılımı

$$B(\tau) = 6ab^{-4} \sum_{l=0}^{\infty} (1+l)^{-4} \tau^4 = 6ab^{-4} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{l=0}^n (1+l)^{-4} \tau^4$$

olarak elde edilmişti. Sonuncu eşitlik kullanılarak;

$$B(\tau) = 6ab^{-4} \tau^4, \quad n = 0$$

ve

$$B(\tau) = 6ab^{-4} \left(1 + \frac{1}{16}\right) \tau^4 = \frac{51}{8} ab^{-4} \tau^4, \quad n = 1$$

$$B(\tau) = 6ab^{-4} \left(1 + \frac{1}{16} + \frac{1}{81}\right) \tau^4 = \frac{1393}{216} ab^{-4} \tau^4, \quad n = 2$$

eşitlikleri bulunur. Bulunan bu üç eşitlik Plank integrallerinin nümerik değerlerinin yaklaşık olarak hesaplanmasında çok önemlidir. Ayrıca $n = 3,4,5$ ve diğer değerlerde de Plank integrali için eşitlikler bulunabilir.

4. SCHWARZSCHILD MILNE İNTEGRALLERİ

Tanım 4.1 $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere,

$$E_n(x) = \int_1^{\infty} y^{-n} e^{-xy} dy, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

şeklinde tanımlanan integral üstel integral olarak adlandırılır.

Tanım 4.2

$$f_1(\tau) = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} B(t) E_1(|t - \tau|) dt$$

şeklinde tanımlanan integrale 1. tip Schwarzschild Milne integrali,

$$f_2(\tau) = 2 \int_{\tau}^{\infty} B(t) E_2(t - \tau) dt - 2 \int_0^{\tau} B(t) E_2(\tau - t) dt$$

şeklinde tanımlanan integrale 2. tip Schwarzschild Milne integrali ve

$$f_3(\tau) = 2 \int_0^{\infty} B(t) E_3(|t - \tau|) dt$$

şeklinde tanımlanan integrale 3. tip Schwarzschild Milne integrali adı verilir (Chandrasekhav 1960).

4.1 Schwarzschild Milne İntegrallerinin Düzgün Yakınsaklığı

$$f_1(\tau) = \frac{1}{2} \int_0^{\tau} B(t) E_1(\tau - t) dt + \frac{1}{2} \int_{\tau}^{\infty} B(t) E_1(t - \tau) dt$$

integralinde $E_1(\tau - t)$ ve $E_1(t - \tau)$ üstel integrallerinin eşiti yerlerine yazılırsa,

$$f_1(\tau) = \frac{1}{2} \int_0^{\tau} 6ab^{-4} \sum_{l=0}^{\infty} (1+l)^{-4} t^4 \left(\int_1^{\infty} y^{-1} e^{-(\tau-t)y} dy \right) dt$$

$$+ \frac{1}{2} \int_{\tau}^{\infty} 6ab^{-4} \sum_{l=0}^{\infty} (1+l)^{-4} t^4 \left(\int_1^{\infty} y^{-1} e^{-(t-\tau)y} dy \right) dt$$

olur. Bu eşitlikten ise,

$$f_1(\tau) = 3ab^{-4} \int_0^{\tau} \sum_{l=0}^{\infty} (1+l)^{-4} t^4 \left(\int_1^{\infty} y^{-1} e^{-(\tau-t)y} dy \right) dt$$

$$+ 3ab^{-4} \int_{\tau}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} (1+l)^{-4} t^4 \left(\int_1^{\infty} y^{-1} e^{-(t-\tau)y} dy \right) dt$$

bulunur. $f_1(\tau)$ fonksiyonu için elde edilen sonuncu eşitlikte üstel integral fonksiyonunun t parametresine göre $[0, \infty)$ aralığında düzgün yakınsaklığı kullanılarak,

$$f_1(\tau) = 3ab^{-4} \sum_{l=0}^{\infty} (1+l)^{-4} \int_1^{\infty} y^{-1} \left(\int_0^{\tau} t^4 e^{-(\tau-t)y} dt \right) dy$$

$$+ 3ab^{-4} \sum_{l=0}^{\infty} (1+l)^{-4} \int_1^{\infty} y^{-1} \left(\int_{\tau}^{\infty} t^4 e^{-(t-\tau)y} dt \right) dy$$

elde edilir. Buradan ise $f_1(\tau)$ fonksiyonu için;

$$f_1(\tau) = 3ab^{-4} \sum_{l=0}^{\infty} (1+l)^{-4} \int_1^{\infty} y^{-1} e^{-\tau y} \left(\int_0^{\tau} t^4 e^{ty} dt \right) dy$$

$$+ 3ab^{-4} \sum_{l=0}^{\infty} (1+l)^{-4} \int_1^{\infty} y^{-1} e^{\tau y} \left(\int_{\tau}^{\infty} t^4 e^{-ty} dt \right) dy$$

eşitliği bulunur.

$f_1(\tau)$ integralinde karşılaşılan $\int_0^\tau t^4 e^{ty} dt$ ve $\int_\tau^\infty t^4 e^{-ty} dt$ integralleri kısmi integrasyon kullanılarak,

$$\int_0^\tau t^4 e^{ty} dt = e^{\tau y} (\tau^4 y^{-1} - 4\tau^3 y^{-2} + 12\tau^2 y^{-3} - 24\tau y^{-4} + 24y^{-5}) - 24y^{-5}$$

ve

$$\int_\tau^\infty t^4 e^{-ty} dt = e^{-\tau y} (\tau^4 y^{-1} + 4\tau^3 y^{-2} + 12\tau^2 y^{-3} + 24\tau y^{-4} + 24y^{-5})$$

şeklinde ifade edilir. Son iki integralin bulunan değerleri $f_1(\tau)$ integralinde yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} f_1(\tau) &= 3ab^{-4} \sum_{l=0}^{\infty} (1+l)^{-4} \int_1^{\infty} (\tau^4 y^{-2} - 4\tau^3 y^{-3} + 12\tau^2 y^{-4} - 24\tau y^{-5} + 24y^{-6} \\ &\quad - 24e^{-\tau y} y^{-6}) dy + 3ab^{-4} \sum_{l=0}^{\infty} (1+l)^{-4} \int_1^{\infty} (\tau^4 y^{-2} + 4\tau^3 y^{-3} + 12\tau^2 y^{-4} + 24\tau y^{-5} \\ &\quad + 24y^{-6}) dy \end{aligned}$$

elde edilir. Sonucu eşitlikten ise,

$$\begin{aligned} f_1(\tau) &= 6ab^{-4} \sum_{l=0}^{\infty} (1+l)^{-4} \int_1^{\infty} (\tau^4 y^{-2} + 12\tau^2 y^{-4} + 24y^{-6} - 12e^{-\tau y} y^{-6}) dy \\ &= 6ab^{-4} \sum_{l=0}^{\infty} (1+l)^{-4} \left[\left(\tau^4 \frac{y^{-1}}{-1} + 12\tau^2 \frac{y^{-3}}{-3} + 24 \frac{y^{-5}}{-5} \right) \Big|_{y=1}^{y=\infty} - 12 \int_1^{\infty} e^{-\tau y} y^{-6} dy \right] \\ &= 6ab^{-4} \sum_{l=0}^{\infty} (1+l)^{-4} \left(\tau^4 + 4\tau^2 + \frac{24}{5} - 12 \int_1^{\infty} e^{-\tau y} y^{-6} dy \right) \end{aligned}$$

$$= 6ab^{-4} \sum_{l=0}^{\infty} (1+l)^{-4} \left[\tau^4 + 4\tau^2 + \frac{24}{5} - 12E_6(\tau) \right]$$

olarak bulunur.

$$E_6(\tau) = \int_1^{\infty} e^{-\tau y} y^{-6} dy$$

üstel integrali için $\tau \in [0, \infty)$ olmak üzere $y^{-6} e^{-\tau y} \leq y^{-6}$ olduğu açıktır. Buradan,

$$\int_1^{\infty} y^{-6} dy < \infty$$

yakınsak olduğundan, Weierstrass testinden $E_6(\tau)$ ve hatta 1. tip Schwarzschild Milne $f_1(\tau)$ integralinin $[0, \infty)$ üzerinde τ parametresine göre düzgün yakınsak olduğu elde edilir. Benzer şekilde,

$$f_2(\tau) = 2 \int_{\tau}^{\infty} B(t) E_2(t - \tau) dt - 2 \int_0^{\tau} B(t) E_2(\tau - t) dt$$

integralinde $E_2(\tau - t)$ ve $E_2(t - \tau)$ üstel integrallerinin eşitlikleri yerlerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} f_2(\tau) &= 2 \int_{\tau}^{\infty} 6ab^{-4} \sum_{l=0}^{\infty} (1+l)^{-4} t^4 \left(\int_1^{\infty} y^{-2} e^{-(t-\tau)y} dy \right) dt \\ &\quad - 2 \int_0^{\tau} 6ab^{-4} \sum_{l=0}^{\infty} (1+l)^{-4} t^4 \left(\int_1^{\infty} y^{-2} e^{-(\tau-t)y} dy \right) dt \end{aligned}$$

olur. Bu eşitlikten ise,

$$f_2(\tau) = 12ab^{-4} \sum_{l=0}^{\infty} (1+l)^{-4} \left(\int_1^{\infty} y^{-2} e^{\tau y} \left(\int_{\tau}^{\infty} t^4 e^{-ty} dt \right) dy \right)$$

$$-12ab^{-4} \sum_{l=0}^{\infty} (1+l)^{-4} \left(\int_1^{\infty} y^{-2} e^{-\tau y} \left(\int_0^{\tau} t^4 e^{ty} dt \right) dy \right)$$

olur.

$$\int_{\tau}^{\infty} t^4 e^{-ty} dt = e^{-\tau y} (\tau^4 y^{-1} + 4\tau^3 y^{-2} + 12\tau^2 y^{-3} + 24\tau y^{-4} + 24y^{-5})$$

ve

$$\int_0^{\tau} t^4 e^{ty} dt = e^{\tau y} (\tau^4 y^{-1} - 4\tau^3 y^{-2} + 12\tau^2 y^{-3} - 24\tau y^{-4} + 24y^{-5}) - 24y^{-5}$$

olarak elde edilmişti. Bu eşitlikler $f_2(\tau)$ integralinde yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} f_2(\tau) &= 12ab^{-4} \sum_{l=0}^{\infty} (1+l)^{-4} \int_1^{\infty} (\tau^4 y^{-3} + 4\tau^3 y^{-4} + 12\tau^2 y^{-5} + 24\tau y^{-6} + 24y^{-7}) dy \\ &\quad - 12ab^{-4} \sum_{l=0}^{\infty} (1+l)^{-4} \int_1^{\infty} (\tau^4 y^{-3} - 4\tau^3 y^{-4} + 12\tau^2 y^{-5} - 24\tau y^{-6} + 24y^{-7} \\ &\quad - e^{-\tau y} 24y^{-5}) dy \\ &= 24ab^{-4} \sum_{l=0}^{\infty} (1+l)^{-4} \int_1^{\infty} (4\tau^3 y^{-4} + 24\tau y^{-6} + 12e^{-\tau y} y^{-7}) dy \\ &= 24ab^{-4} \sum_{l=0}^{\infty} (1+l)^{-4} \left(\left[4\tau^3 \frac{y^{-3}}{-3} + 24\tau \frac{y^{-5}}{-5} \right]_{y=1}^{y=\infty} + 12 \int_1^{\infty} e^{-\tau y} y^{-7} dy \right) \\ &= 24ab^{-4} \sum_{l=0}^{\infty} (1+l)^{-4} \left[\frac{4}{3} \tau^3 + \frac{24}{5} \tau + 12E_7(\tau) \right] \\ &= 96ab^{-4} \sum_{l=0}^{\infty} (1+l)^{-4} \left[\frac{1}{3} \tau^3 + \frac{6}{5} \tau + 3E_7(\tau) \right] \end{aligned}$$

olarak bulunur. Buradan

$$E_7(\tau) = \int_1^{\infty} e^{-\tau y} y^{-7} dy$$

üstel integrali için $\tau \in [0, \infty)$ olmak üzere $y^{-7} e^{-\tau y} \leq y^{-7}$ olduğu açıktır.

$$\int_1^{\infty} y^{-7} dy < \infty$$

genelleştirilmiş integrali yakınsak olduğundan, Weierstrass testinden $E_7(\tau)$ ve hatta 2. tip Schwarzschild Milne $f_2(\tau)$ integralinin $[0, \infty)$ üzerinde τ parametresine göre düzgün yakınsaklığı elde edilir.

3. tip Schwarzschild Milne $f_3(\tau)$ integrali için

$$f_3(\tau) = 2 \int_0^{\infty} B(t) E_3(|t - \tau|) dt$$

ve

$$f_3(\tau) = 2 \int_0^{\tau} B(t) E_3(\tau - t) dt + 2 \int_{\tau}^{\infty} B(t) E_3(t - \tau) dt$$

olduğundan, $E_3(\tau - t)$ ve $E_3(t - \tau)$ üstel integrallerinin eşiti yerlerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} f_3(\tau) &= 12ab^{-4} \sum_{l=0}^{\infty} (1+l)^{-4} \int_0^{\tau} t^4 \left(\int_1^{\infty} y^{-3} e^{-(\tau-t)y} dy \right) dt \\ &+ 12ab^{-4} \sum_{l=0}^{\infty} (1+l)^{-4} \int_{\tau}^{\infty} t^4 \left(\int_1^{\infty} y^{-3} e^{-(t-\tau)y} dy \right) dt \end{aligned}$$

olur. Bu eşitlikten ise,

$$f_3(\tau) = 12ab^{-4} \sum_{l=0}^{\infty} (1+l)^{-4} \int_1^{\infty} y^{-3} e^{-\tau y} \left(\int_0^{\tau} t^4 e^{ty} dt \right) dy$$

$$+ 12ab^{-4} \sum_{l=0}^{\infty} (1+l)^{-4} \int_1^{\infty} y^{-3} e^{\tau y} \left(\int_{\tau}^{\infty} t^4 e^{ty} dt \right) dy$$

elde edilir.

$$\int_0^{\tau} t^4 e^{ty} dt = e^{\tau y} (\tau^4 y^{-1} - 4\tau^3 y^{-2} + 12\tau^2 y^{-3} - 24\tau y^{-4} + 24y^{-5}) - 24y^{-5}$$

ve

$$\int_{\tau}^{\infty} t^4 e^{-ty} dt = e^{-\tau y} (\tau^4 y^{-1} + 4\tau^3 y^{-2} + 12\tau^2 y^{-3} + 24\tau y^{-4} + 24y^{-5})$$

olduğu kullanılarak

$$f_3(\tau) = 12ab^{-4} \sum_{l=0}^{\infty} (1+l)^{-4} \int_1^{\infty} (\tau^4 y^{-4} - 4\tau^3 y^{-5} + 12\tau^2 y^{-6} - 24\tau y^{-7} + 24y^{-8}$$

$$- 24e^{-\tau y} y^{-8}) dy + 12ab^{-4} \sum_{l=0}^{\infty} (1+l)^{-4} \int_1^{\infty} (\tau^4 y^{-4} + 4\tau^3 y^{-5} + 12\tau^2 y^{-6} + 24\tau y^{-7}$$

$$+ 24y^{-8}) dy$$

$$= 24ab^{-4} \sum_{l=0}^{\infty} (1+l)^{-4} \int_1^{\infty} (\tau^4 y^{-4} + 12\tau^2 y^{-6} + 24y^{-8} - 12e^{-\tau y} y^{-8}) dy$$

$$= 24ab^{-4} \sum_{l=0}^{\infty} (1+l)^{-4} \left(\left[\tau^4 \frac{y^{-3}}{-3} + 12\tau^2 \cdot \frac{y^{-5}}{-5} + 24 \frac{y^{-7}}{-7} \right] \Big|_{y=0}^{y=\infty} - 12 \int_1^{\infty} e^{-\tau y} y^{-8} dy \right)$$

$$= 24ab^{-4} \sum_{l=0}^{\infty} (1+l)^{-4} \left(\frac{\tau^4}{3} + \frac{12\tau^2}{5} + \frac{24}{7} - 12E_8(\tau) \right)$$

olarak bulunur. Burada

$$E_8(\tau) = \int_1^{\infty} e^{-\tau y} y^{-8} dy$$

integrali, dolayısıyla 3. Tip Schwarzschild Milne $f_3(\tau)$ integrali $[0, \infty)$ üzerinde τ parametresine göre Weierstrass testinden düzgün yakınsaktır. Çünkü $\tau \in [0, \infty)$ için $y^{-8} e^{-\tau y} \leq y^{-8}$ olup

$$\int_1^{\infty} y^{-8} dy < \infty$$

sağlanır.

4.2 Schwarzschild Milne İntegrallerinin Seri Açılımı

Bu kısımda bir önceki kısımda Schwarzschild Milne integrallerinin düzgün yakınsaklığını araştırırken elde ettiğimiz seri açılımlarını aşağıdaki gibi verebiliriz.

$$f_1(\tau) = 6ab^{-4} \sum_{l=0}^{\infty} (1+l)^{-4} \left(\tau^4 + 4\tau^2 + \frac{24}{5} - 12E_6(\tau) \right) \quad (4.1)$$

$$f_2(\tau) = 96ab^{-4} \sum_{l=0}^{\infty} (1+l)^{-4} \left[\frac{1}{3}\tau^3 + \frac{6}{5}\tau + 3E_7(\tau) \right] \quad (4.2)$$

$$f_3(\tau) = 24ab^{-4} \sum_{l=0}^{\infty} (1+l)^{-4} \left(\frac{\tau^4}{3} + \frac{12\tau^2}{5} + \frac{24}{7} - 12E_8(\tau) \right) \quad (4.3)$$

4.3 Schwarzschild Milne İntegrallerinin Asimptotik Eşitlikleri

Bu kısımda Schwarzschild Milne integrallerinin asimptotik eşitlikleri elde edilecektir. Bunun için gerekli olan önerme aşağıda verilmektedir.

Önerme 4.3.1 Eğer $g(t, \tau)$ fonksiyonu tüm $t, \tau \in [0, \infty)$ için sürekli ise ve

$$\int_0^{\infty} g(t, \tau) dt$$

$\tau \in [0, \infty)$ üzerinde τ parametresine göre düzgün yakınsaksa

$$G(\tau) = \int_0^{\infty} g(t, \tau) dt$$

fonksiyonu sürekli ve tüm $\tau_0 \in [0, \infty)$ için

$$\lim_{\tau \rightarrow \tau_0} \int_0^{\infty} g(t, \tau) dt = \int_0^{\infty} \lim_{\tau \rightarrow \tau_0} g(t, \tau) dt$$

sağlanır. Bu önerme kullanılarak aranan asimptotik eşitlikler elde edilir. $E_6(\tau)$ ve Önerme 4.3.1 gereğince $\tau \in [0, \infty)$ için

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \int_1^{\infty} y^{-6} e^{\tau y} dy = \int_1^{\infty} y^{-6} \lim_{\tau \rightarrow \infty} e^{-\tau y} dy = 0 \quad (4.4)$$

ve

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \int_1^{\infty} y^{-6} e^{-\tau y} dy = \int_1^{\infty} y^{-6} \lim_{\tau \rightarrow 0} e^{-\tau y} dy = \int_1^{\infty} y^{-6} dy = \frac{1}{5} \quad (4.5)$$

olarak elde edilir.

(4.4) ve (4.5) eşitliklerinden

$$\int_1^{\infty} y^{-6} e^{-\tau y} dy = o(1), \quad \tau \rightarrow \infty \quad (4.6)$$

ve

$$\int_1^{\infty} y^{-6} e^{-\tau y} dy = \frac{1}{5} + o(1), \quad \tau \rightarrow 0 \quad (4.7)$$

asimptotik eşitlikleri yazılır. Buradan

$$f_1(\tau) = 6ab^{-4} \sum_{l=0}^{\infty} (1+l)^{-4} \left(\tau^4 + 4\tau^2 + \frac{24}{5} - 12E_6(\tau) \right)$$

seri açılımı, (4.3) ve (4.4) kullanılarak aşağıdaki asimptotik eşitlikler elde edilir.

$$f_1(\tau) = 6ab^{-4} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{l=0}^n (1+l)^{-4} \left[\frac{12}{5} + o(1) \right], \quad \tau \rightarrow 0 \quad (4.8)$$

$$f_1(\tau) = 6ab^{-4} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{l=0}^n (1+l)^{-4} \left[\tau^4 + 4\tau^2 + \frac{24}{5} + o(1) \right], \quad \tau \rightarrow \infty. \quad (4.9)$$

Ayrıca (4.5) ve (4.6) eşitliklerinden n 'nin bazı özel değerleri için $f_1(\tau)$,

$$f_1(\tau) = 6ab^{-4} \left[\frac{12}{5} + o(1) \right], \quad \tau \rightarrow 0, \quad n = 0,$$

$$f_1(\tau) = \frac{51}{8} ab^{-4} \left[\frac{12}{5} + o(1) \right], \quad \tau \rightarrow 0, \quad n = 1,$$

$$f_1(\tau) = \frac{1393}{216} ab^{-4} \left[\frac{12}{5} + o(1) \right], \quad \tau \rightarrow 0, \quad n = 2,$$

$$f_1(\tau) = 6ab^{-4} \left[\tau^4 + 4\tau^2 + \frac{24}{5} + o(1) \right], \quad \tau \rightarrow \infty, \quad n = 0,$$

$$f_1(\tau) = \frac{51}{8} ab^{-4} \left[\tau^4 + 4\tau^2 + \frac{24}{5} + o(1) \right], \quad \tau \rightarrow \infty, \quad n = 1,$$

$$f_1(\tau) = \frac{1393}{216} ab^{-4} \left[\tau^4 + 4\tau^2 + \frac{24}{5} + o(1) \right], \quad \tau \rightarrow \infty, \quad n = 2,$$

olarak yazılır. Benzer işlemler 2. tip Schwarzschild Milne integrali için uygulanırsa,

$$f_2(\tau) = 48ab^{-4} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{l=0}^n (1+l)^{-4} [1 + o(1)], \quad \tau \rightarrow 0 \quad (4.10)$$

$$f_2(\tau) = 96ab^{-4} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{l=0}^n (1+l)^{-4} \left[\frac{1}{3} \tau^3 + \frac{6}{5} \tau + o(1) \right], \quad \tau \rightarrow \infty \quad (4.11)$$

asimptotik eşitlikleri bulunur. n ' nin bazı özel değerleri için $f_2(\tau)$;

$$\begin{aligned} f_2(\tau) &= 48ab^{-4} [1 + o(1)], \quad \tau \rightarrow 0, \quad n = 0, \\ f_2(\tau) &= 51ab^{-4} [1 + o(1)], \quad \tau \rightarrow 0, \quad n = 1, \\ f_2(\tau) &= \frac{1393}{27} ab^{-4} [1 + o(1)], \quad \tau \rightarrow 0, \quad n = 2, \end{aligned}$$

olarak verilir. 3. tip Schwarzschild Milne integrali için ise;

$$f_3(\tau) = 24ab^{-4} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{l=0}^n (1+l)^{-4} \left[\frac{12}{7} + o(1) \right], \quad \tau \rightarrow 0 \quad (4.12)$$

$$f_3(\tau) = 24ab^{-4} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{l=0}^n (1+l)^{-4} \left[\frac{1}{3} \tau^4 + \frac{12}{5} \tau^2 + \frac{24}{7} + o(1) \right], \quad \tau \rightarrow \infty \quad (4.13)$$

asimptotik eşitlikleri elde edilir. n ' nin bazı özel değerleri için $f_3(\tau)$;

$$\begin{aligned} f_3(\tau) &= \frac{288}{7} ab^{-4} [1 + o(1)], \quad \tau \rightarrow 0, \quad n = 0, \\ f_3(\tau) &= \frac{306}{7} ab^{-4} [1 + o(1)], \quad \tau \rightarrow 0, \quad n = 1, \\ f_3(\tau) &= \frac{2786}{63} ab^{-4} [1 + o(1)], \quad \tau \rightarrow 0, \quad n = 2, \\ f_3(\tau) &= 24ab^{-4} \left[\frac{1}{3} \tau^4 + \frac{12}{5} \tau^2 + \frac{24}{7} + o(1) \right], \quad \tau \rightarrow \infty, \quad n = 0, \\ f_3(\tau) &= \frac{51}{2} ab^{-4} \left[\frac{1}{3} \tau^4 + \frac{12}{5} \tau^2 + \frac{24}{7} + o(1) \right], \quad \tau \rightarrow \infty, \quad n = 1, \\ f_3(\tau) &= \frac{1393}{54} ab^{-4} \left[\frac{1}{3} \tau^4 + \frac{12}{5} \tau^2 + \frac{24}{7} + o(1) \right], \quad \tau \rightarrow \infty, \quad n = 2, \end{aligned}$$

eşitlikleri elde edilir.

4.4 Schwarzschild Milne İntegrallerinin “ τ ” Parametresinin Bazı Değerlerine Göre Hesaplanması

Schwarzschild Milne integrallerinin sayısal değerlerinin yaklaşık olarak hesaplanabilmesi için, τ parametresinin büyük değerine göre Schwarzschild Milne integrallerinin düzgün yakınsaklığını ve asimptotik eşitliklerinin bilinmesi önemlidir. Schwarzschild Milne integrallerinin özelliklerini anlamak için, seri açılımlarını mümkün olduğunca geniş bir aralıkta τ parametresine göre elde etmek faydalı olur. Schwarzschild Milne integralleri parametreye bağlı genelleştirilmiş integraller olduğundan, bu integrallerin asimptotik eşitliklerinin ve seri açılımlarının incelenmesi, bu integrallerin düzgün yakınsaklığı ile yakından ilgilidir. Bu tezde elde edilen Schwarzschild Milne integrallerinin düzgün yakınsaması ve asimptotik eşitlikleri temelinde, Schwarzschild Milne integrallerinin değerlerini orta düzeyde bir bilgisayarda bile hesaplamak için basit ve doğru bir algoritma aşağıdaki gibi olur.

Çizelge 4.1 Asimptotik yaklaşım eşitlikleri $\tau \rightarrow 0$ için elde edilen (4.8), (4.10) ve (4.12); $\tau \rightarrow \infty$ için elde edilen (4.9), (4.11) ve (4.12) Schwarzschild Milne integrallerinin sayısal değerleri

n	τ	f_1	f_2	f_3
0	10^{-5}	$4,002358500x10^{-8}$	$1,334119500x10^{-7}$	$1,143531000x10^{-7}$
1	10^{-5}	$4,252505906x10^{-8}$	$1,417501969x10^{-7}$	$1,215001687x10^{-7}$
2	10^{-5}	$4,301917739x10^{-8}$	$1,433972580x10^{-7}$	$1,229119354x10^{-7}$
5	10^{-5}	$4,327043965x10^{-8}$	$1,442347988x10^{-7}$	$1,236298276x10^{-7}$
0	10^2	1,668316515	0,08897331886	2,225133672
1	10^2	1,772586297	0,09453415130	2,364204526
2	10^2	1,793182797	0,09563258732	2,391675313
5	10^2	1,803656246	0,09619114892	2,405644379
0	10^4	$1,667649442x10^8$	88941,30320	$2,223532660x10^8$
1	10^4	$1,771877532x10^8$	94500,13464	$2,362503451x10^8$
2	10^4	$1,792465796x10^8$	95598,17542	$2,389954472x10^8$
5	10^4	$1,802935058x10^8$	96156,53602	$2,403913487x10^8$
0	10^6	$1,667649375x10^{16}$	$8,894130000x10^{10}$	$2,223532500x10^{16}$
1	10^6	$1,771877461x10^{16}$	$9,450013124x10^{10}$	$2,362503281x10^{16}$
2	10^6	$1,792465725x10^{16}$	$9,559817198x10^{10}$	$2,389954300x10^{16}$
5	10^6	$1,802934986x10^{16}$	$9,615653256x10^{10}$	$2,403913314x10^{16}$

Hesaplamalar τ parametresinin geniş bir değeri için yapılmıştır. Çizelge 4.1'den Schwarzschild Milne integrallerinin sayısal değerlerinin $\tau \in [0, \infty)$ parametresi aralığında yüksek bir yakınsama oranı gösterdiği açıktır. Sonuçlardan görülebileceği gibi, asimptotik yaklaşım formülleri (4.8), (4.9), (4.10), (4.11), (4.12) ve (4.13) pratik uygulamalarda çok uygundur.

Çizelge 4.2 Schwarzschild Milne integralleri olarak verilen (4.1), (4.2) ve (4.3) formülleri yardımıyla bu integrallerin seri açılımlarının değerleri

n	τ	f_1	f_2	f_3
0	10^{-5}	$3,996858575x10^{-8}$	$1,332291520x10^{-7}$	$2,055523841x10^{-7}$
0	10^{-4}	$3,997318274x10^{-8}$	$1,332435407x10^{-7}$	$2,055643762x10^{-7}$
0	10^{-3}	$4,001821290x10^{-8}$	$1,333874262x10^{-7}$	$2,056836396x10^{-7}$
0	10^3	16653,47749	88,81851100	22204,70769
0	10^4	$1,665341155x10^{-8}$	88818,19445	$2,220454941x10^8$
0	10^5	$1,665341086x10^{12}$	$8,881819134x10^7$	$2,220454738x10^{12}$
1	10^{-5}	$4,246662236x10^{-8}$	$1,415559741x10^{-7}$	$2,183994081x10^{-7}$
1	10^{-4}	$4,247150667x10^{-8}$	$1,415710071x10^{-7}$	$2,184121497x10^{-7}$
1	10^{-3}	$4,251935120x10^{-8}$	$1,417241405x10^{-7}$	$2,185388671x10^{-7}$
1	10^3	17694,31984	94,36966793	23592,50191
1	10^4	$1,769424976x10^8$	94369,33161	$2,359233375x10^8$
1	10^5	$1,769424904x10^{12}$	$9,436932828x10^7$	$2,359233207x10^{12}$
2	10^{-5}	$4,296006169x10^{-8}$	$1,432007785x10^{-7}$	$2,209370919x10^{-7}$
2	10^{-4}	$4,296500276x10^{-8}$	$1,432159860x10^{-7}$	$2,209499815x10^{-7}$
2	10^{-3}	$4,301340322x10^{-8}$	$1,433708988x10^{-7}$	$2,210781713x10^{-7}$
2	10^3	17899,91831	95,46619277	23866,63411
2	10^4	$1,789984744x10^8$	95465,85253	$2,386646399x10^8$
2	10^5	$1,789984670x10^{12}$	$9,546584917x10^7$	$2,386646229x10^{12}$

Çizelge 4.2'de, (4.1), (4.2) ve (4.3) formüllerini veren f_1 , f_2 , f_3 fonksiyonlarının seri açılımlarından Schwarzschild Milne integrallerinin sayısal değerleri elde edilmiştir.

Çizelge 4.1 Schwarzschild Milne integrallerinin gerçek değerlerini gösterirken, Çizelge 4.2 hata payı yüksek olan değerleri içermektedir. Schwarzschild Milne integrallerinin değerleri hem asimptotik yaklaşımla hem de seri değerle hesaplanabilmesine rağmen, asimptotik yaklaşımla yapılan hesaplama (Çizelge 4.1) gerçek değere daha yakındır, yani Çizelge 4.1'de hata payı çok düşüktür.

5. TARTIŞMA VE SONUÇ

Parametreye bağlı genelleştirilmiş integrallerinin kuantum fiziğinde, kuantum istatistik teorisinde, ışınların taşınma süreçleri teorisinde, yüksek geçişkenlik teorisinde, sıvıların akışkanlık özelliklerinin öğrenilmesinde, tek boyutlu ve çok boyutlu ışın saçılımlarında ve düzlemsel saçılımların incelenmesinde kullanıldığı girişte bahsedilmiştir. Bahsi geçmeyen birçok alanda da kullanıldığı bilinmektedir. Parametreye bağlı genelleştirilmiş integrallerin dört özel formu olan birinci, ikinci ve üçüncü tip Schwarzschild Milne integrallerinin ve Plank integrallerinin düzgün yakınsaklığının, asimptotik özelliklerinin araştırıldığı ve seri gösterimlerinin elde edildiği bu tez; integrallerin düzgün yakınsaklığından faydalanarak elde edilen asimptotik eşitliklerin ve seri gösterimlerin integrallerin sayısal değerlerinin hesaplanmasından daha kullanışlı olduğunu göstermiştir. Ayrıca birinci, ikinci ve üçüncü tip Schwarzschild Milne integrallerinin τ parametresinin bazı özel değerleri için yapılan sayısal değerlerinin hesaplanmasında, asimptotik yaklaşım kullanılmasının; seri gösterim kullanılmasına göre, gerçek değere daha yakın sonuçlar verdiği görülmüştür.

Elde edilen bu veriler sayesinde diğer parametreye bağlı genelleştirilmiş integrallerin sayısal değerlerinin hesaplanması için bu integrallerin düzgün yakınsaklığından faydalanarak seri gösterimleri ve asimptotik özelliklerine ulaşım gerçek sonuca daha yakın değerin hesaplanabileceği düşünülmektedir.

KAYNAKLAR

- Aygar, Y., Bairamov, E. Properties of the two-dimensional exponential integral functions, *J. Math. Chem.*, V.49, N.5, 2011, pp.1014-1025.
- Bairamov, E., Ozalp, N. On convergence, asymptotic behaviour and computational algorithm of generalized exponential integral functions arising in a radiative transfer, *J. Quant. Spect. Rad. Trans.*, V.113, N.14, 2012, pp.1818-1825.
- Bairamov, E., Ozalp N. Uniform convergence and numerical computation of the Hubbel radiation rectangular source integral, *Radiation Physics and Chemistry*, 80, 2011, pp.1312-1315.
- Bairamov, E., Yardimci, S. Uniform convergence and the properties of the exponential and generalized exponential integral functions, *J. Quant. Spect. Rad. Trans.*, V.11, N.16, 2010, pp.2471-2473.
- Breig, W.F., Crosbie, A.L. Two-dimensional radiative equilibrium: A semi-infinite medium subjected to cosine varying radiation, *J. Quant. Spect. Rad. Trans.*, V.13, N.12, 1973, pp.1395-1419.
- Breig, W.F., Crosbie, A.L. Numerical computation of a generalized exponential integral function, *Math. Comp.*, V.28, N.126, 1974, pp.575-579.
- Budak, B.M, Fomin, S.V., (1973). Multiple Integrals, Field Theory and Series an Advanced Course in Higher Mathematics. MIR Publishers, Moscow (435-453).
- Busbridge, IM. *The Mathematics of Radiative Transfer*, Cambridge University Press, Cambridge, 1960, 156 p.
- Chandrasekhar, S. *Radiative Transfer*, Dover Publications, Inc., New York, 1960, 393 p.
- Crosbie, A.L., Dougherty, R.L. Two-dimensional radiative transfer in a cylindrical geometry with anisotropic scattering, *J. Quant. Spect. Rad. Trans.*, V.6, N.126, 1981, p.551-569.
- Crosbie, A.L., Lee, L.C. Relation between multidimensional radiative transfer in cylindrical and rectangular coordinates with anisotropic scattering, *J. Quant. Spect. Rad. Trans.*, V.38, N.3, 1987, pp.231-241.
- Crosbie, A.L., Lee, L.C. Multidimensional radiative transfer: A single integral representation of anisotropic N scattering kernels, *J. Quant. Spect. Rad. Trans.*, V.42, N.3, 1989, pp.239-246.
- Drummond, J.E. The anharmonic oscillator: perturbation series for cubic and quartic energy distortion, *J. Phys. A: Math. Gen.*, V.14, N.7, 1981, pp.1651-1661.
- Goody, R.M. *Atmospheric Radiation*, Oxford University Press, London, 1964, 544 p.

- Guseinov, I.I., Mamedov, B.A. On the calculation of arbitrary multielectron molecular integrals over Slater- type orbitals using recurrence relations for overlap integrals. II. Two-center expansion method, *Int. J. Quant. Chem.*, V.81, N.2, 2001, pp.117-125.
- Guseinov, I.I., Mamedov, B.A. On the calculation of arbitrary multielectron molecular integrals over Slater- type orbitals using recurrence relations for overlap integrals. III. Auxiliary functions Q_{nm}^q and G_{-nm}^q , *Int. J. Quant. Chem.*, V.86, N.5. 2002, pp.440-449.
- Guseinov, I.I., Mamedov, B.A. On the calculation of arbitrary multielectron molecular integrals over Slater- type orbitals using recurrence relations for overlap integrals. IV. Use of recurrence relations for basic two-center overlap and hybrid integrals, *Int. J. Quant. Chem.*, V.86, N.5, 2005, pp.450-455.
- Guseinov, I.I., Mamedov, B.A. Use of analytical relations in evaluation of exponential integral functions, *J. Math. Chem*, V.38, N.2, 2005, pp.311-314.
- Hubbel, J.H., Bach, R.L., Lamkin J.C., 1960 Radiation field from rectangular source, *J. Nat. Bur. Stand* 64C, 121-138.
- Hunt, G.E. The transport equation of radiative transfer in a three-dimensional space with anisotropic scattering, *J. Inst. Math. Appl.*, V.3, N.1967, 1967, pp.181-192.
- Kourganoff, V. Basic Methods in Transfer Problems. Radiative Equilibrium and Neutron Diffusion, Oxford, Clarendon Press, 1952, 281 p.
- Nikolsky, S.M. A Course of Mathematical Analysis, V.2, Mir Publishers, 1977, 460 p.
- Oberoi, R.S., Callaway, J., Seiler, G.J. Analytic evaluation of integrals in variational calculations of scattering theory, *J. Computational Phys.*, V.10, N.3, 1972, pp.466-474.
- Ozalp, N., Bairamov, E. Uniform convergence and computation of the generalized exponential integrals, *J Math. Chem.*, V.49, N.2, 2011, pp.520-530.
- Peraiah, A. An Introduction to Radiative Transfer, Cambridge University Press, Cammbridge, 2002, 480 p.
- Prabha, R.H., Yadav, R.D.S. Polynomial expressions for Bickley and exponential integral functions, *Ann. Nuc. Ener.*, V.23, N.12, 1996, pp.1021-1025.
- Prudnikov, A.P., Brychkov, Yu. A., Marichev, O.I. Integrals and Series, V.5, Gordon and Breach Science Publishers, New York, 1992, 595 p.
- Rybicki, G.B. The searchlight problem with isotropic scattering, *J. Quant. Spect. Rad. Trans.* V.11, N.6, 1971, pp.827-849.
- Smith, M.G., The transport equation with plane symmetry and isotropic scattering, *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, V.60, N.4, 1964, pp.909-921.

- Smith, M.G., Hunt, G.E. The isotropic scattering of radiation in a finite homogeneous two-dimensional atmosphere, Proc. Cambridge Philos. Soc., V.63, N.1, 1967, pp.209-220.
- Sobolev, V.V. A Treatise on Radiative Transfer, Princeton, New York, 1963, 319 p.
- Yardimci, S., Olgun, M., Can, Ç. Numerical computation and properties of the two dimensional exponential integrals, Hacet. J. Math. Stat., V.45, N.2, 2016, pp.483-495.
- Yuen, W.W., Ho, C.F. Analysis of two-dimensional radiative heat transfer in a gray medium with internal heat generation, Int. J. Heat Mass Trans., V.28, N.1, 1985, pp.17-23.