

ANKARA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DOKTORA TEZİ

DAİRESEL KOMPLEKS q . MERTEBEDEN ORTOİKİLİ BULANIK
KÜMELER VE ÇOK KRİTERLİ KARAR VERME
UYGULAMALARI

Yelda GÜLFİRAT

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ANKARA
2026

Her hakkı saklıdır

ÖZET

Doktora Tezi

DAİRESEL KOMPLEKS q . MERTEBEDEN ORTOİKİLİ BULANIK KÜMELER VE ÇOK KRİTERLİ KARAR VERME UYGULAMALARI

Yelda GÜLFIRAT

Ankara Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Mehmet ÜNVER

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde, çalışmanın amacı, kapsamı ve motivasyonu açıklanmış; bulanık küme teorisi ile çok kriterli karar verme alanında gerçekleştirilen çalışmalar incelenerek literatüre ilişkin genel bir değerlendirme sunulmuştur.

İkinci bölümde, önerilen modelin altyapısını oluşturan bulanık küme teorisi, sezgisel bulanık kümeler, kompleks bulanık kümeler, q . mertebeden ortoikili bulanık kümeler ve dairesel kompleks bulanık kümeler gibi temel kavramlara yer verilmiştir.

Üçüncü bölümde, tezin özgün teorik katkısını oluşturan dairesel kompleks q . mertebeden ortoikili bulanık kümeler (CC q -ROFSs) ayrıntılı olarak tanıtılmıştır. Bu bölümde ayrıca Gauss Arşimedyen t -norm ve t -konorm tabanlı cebirsel işlemler tanımlanmış, bu kümelere dayalı bazı cebirsel işlemler tanımlanmış ve bir skor fonksiyonu sunulmuştur.

Dördüncü bölümde, tezin uygulamaya yönelik özgün katkısını oluşturan CC q -ROFS tabanlı Gauss WASPAS yöntemi geliştirilmiş ve yöntemin uygulanabilirliğini göstermek amacıyla küresel ölçekte seçilen şehirlerin hava kalitesi performanslarının değerlendirilmesine yönelik çok kriterli bir karar verme uygulaması gerçekleştirilmiştir. Ayrıca yöntemin kararlılığını ortaya koymak amacıyla duyarlılık analizi, farklı q değerleri bakımından sağlamlık analizi ve TOPSIS ile COPRAS yöntemleri kullanılarak karşılaştırmalı analiz yapılmıştır.

Beşinci ve son bölümde ise tez kapsamında elde edilen bulgular genel olarak değerlendirilmiş, önerilen yaklaşımın literatüre sağladığı katkılar ortaya konulmuş ve gelecekte gerçekleştirilebilecek çalışmalara yönelik öneriler sunulmuştur.

Temmuz 2026, 53 sayfa

Anahtar Kelimeler: Bulanık küme teorisi, Gauss toplama operatörleri, WASPAS, Çok kriterli karar verme

ABSTRACT

PhD Thesis

CIRCULAR COMPLEX q - RUNG ORTHOPAİR FUZZY SETS AND APPLICATIONS TO MULTI-CRITERIA DECISION MAKING

Yelda GÜLFIRAT

Ankara University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Prof.Dr. Mehmet ÜNVER

This thesis consists of five chapters.

The first chapter presents the aim, scope, and motivation of the study. In addition, a comprehensive literature review is provided by examining previous studies on fuzzy set theory and multi-criteria decision-making. The second chapter introduces the fundamental concepts that constitute the theoretical basis of the proposed model, including fuzzy sets, intuitionistic fuzzy sets, complex fuzzy sets, q -rung orthopair fuzzy sets, and circular complex fuzzy sets. The third chapter presents in detail the Circular Complex q -Rung Orthopair Fuzzy Sets (CC q -ROFSs), which constitute the original theoretical contribution of this thesis. Furthermore, Gaussian Archimedean t -norm and t -conorm based algebraic operations are defined, algebraic operations on CC q -ROFSs are developed, and a score function is introduced. In the fourth chapter, develops the CC q -ROFS-based Gaussian WASPAS method, which constitutes the original methodological and application-oriented contribution of this thesis. To demonstrate the applicability of the proposed approach, a multi-criteria decision-making application concerning the air quality assessment of selected major cities around the world is conducted. Moreover, sensitivity analysis, robustness analysis with respect to different q values, and comparative analyses using the TOPSIS and COPRAS methods are carried out to evaluate the stability and effectiveness of the proposed method.

Finally, the fifth chapter summarizes the findings obtained throughout the thesis, discusses the main contributions of the proposed approach to the literature, and presents recommendations for future research.

July 2026, 53 pages

Key Words: Fuzzy set theory, Gaussian aggregation operators, WASPAS, Multi-criteria decision making

TEŞEKKÜR

Bu tezin hazırlanması sürecinde bilgi ve deneyimleriyle bana yol gösteren, bilimsel bakış açısı ve değerli önerileriyle çalışmanın her aşamasında desteğini esirgemeyen saygıdeğer danışmanım Sayın Prof. Dr. Mehmet ÜNVER'e (Ankara Üniversitesi, Matematik Anabilim Dalı) en içten saygı ve teşekkürlerimi sunarım. Kendisinden edindiğim akademik disiplin ve araştırma anlayışı bilimsel gelişimime de önemli katkılar sağlamıştır.

Doktora eğitimim boyunca bilgi ve tecrübeleriyle bana katkıda bulunan hocam Sayın Prof. Dr. Murat OLGUN'a (Ankara Üniversitesi, Matematik Anabilim Dalı) içten teşekkürlerimi sunarım. Ayrıca tez izleme komitesinde yer alarak değerli zamanını ayıran, yapıcı eleştirileri ve değerlendirmeleriyle tezime katkı sağlayan Sayın Prof. Dr. İshak ALTUN'a (Kırıkkale Üniversitesi, Matematik Anabilim Dalı) saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

Lisansüstü eğitimim boyunca bilgi ve deneyimlerinden yararlandığım tüm hocalarıma, birlikte çalışma ve fikir alışverişinde bulunma fırsatı yakaladığım çalışma arkadaşlarıma teşekkür ederim.

Hayatımın her döneminde sevgi ve fedakârlıklarıyla yanımda olan aileme, çalışmalarım boyunca anlayışı, sabrı ve desteğiyle bana güç veren eşim Dr. Öğr. Üyesi Mustafa GÜLFİRAT'a (Ankara Üniversitesi, Matematik Anabilim Dalı) ve hayatıma kattığı mutlulukla en büyük motivasyon kaynaklarımdan biri olan oğlum Cihan Ege'ye sonsuz teşekkür ederim.

Doktora çalışmalarımı “2211-A Yurt İçi Genel Doktora Burs Programı” ile destekleyen Türkiye Bilimsel ve Teknolojik Araştırma Kurumu (TÜBİTAK)'na en içten teşekkürlerimi sunarım.

Yelda GÜLFİRAT
Ankara, Temmuz 2026

İÇİNDEKİLER

TEZ ONAY SAYFASI

ETİK	i
ÖZET	ii
ABSTRACT	iii
TEŞEKKÜR	iv
SİMGELER DİZİNİ	vi
ŞEKİLLER DİZİNİ	vii
ÇİZELGELER DİZİNİ	viii
1. GİRİŞ	1
1.1 Bulanık Küme Teorisi	1
1.2 Çok Kriterli Karar Verme ve WASPAS	3
1.3 Motivasyon ve Tezin Katkıları	5
2. TEMEL KAVRAMLAR	8
2.1 Bulanık Küme Yaklaşımına İlişkin Temel Bilgiler	8
2.2 Bulanık Kümelerde Temel Küme İşlemleri	10
2.3 Sezgisel Bulanık Kümeler	11
2.4 q . Mertebeden Ortoikili Bulanık Kümeler	12
2.5 Kompleks Sezgisel Bulanık Kümeler	13
2.6 Dairesel Bulanık Kümeler	15
2.7 Dairesel Kompleks Bulanık Kümeler	16
2.8 Gauss Hata Fonksiyonu, Üçgensel Norm ve Üçgensel Konorm	17
3. DAİRESEL KOMPLEKS q . MERTEBEDEN ORTOİKİLİ BULANIK KÜMELER	21
3.1 CCq -ROFS Teorisinin Geliştirilmesi	21
3.2 CCq -ROFV'ler için Cebirsel İşlemler	24
3.3 CCq -ROFV Gauss Ağırlıklı Aritmetik ve Geometrik Toplama Operatörü	28
4. DAİRESEL KOMPLEKS q . MERTEBEDEN ORTOİKİLİ BULANIK KÜMELER İÇİN GENELLEŞTİRİLMİŞ WASPAS YÖNTEMİ	33
4.1 Genelleştirilmiş WASPAS Yaklaşımı	33
4.2 Hava Kalitesi Değerlendirmesine Yönelik Bir Uygulama	37
4.3 Önerilen Yaklaşımın Duyarlılık Analizi	42
4.4 q Parametresine Göre Sağlamlık Analizi	44
4.5 Karşılaştırmalı Analiz	45
5. TARTIŞMA VE SONUÇ	47
KAYNAKLAR	49
ÖZGEÇMİŞ	53

SİMGELER DİZİNİ

χ	Karakteristik fonksiyon
μ	Ait olma fonksiyonu
ν	Ait olmama fonksiyonu
ω	Ağırlık vektörü
$S(\cdot)$	Skor fonksiyonu
$CCFS$	Dairesel kompleks bulanık küme
CCq -ROFS	Dairesel kompleks q . mertebeden ortoikili bulanık küme
CCq -ROFV	Dairesel kompleks q . mertebeden ortoikili bulanık değer
$GN(\cdot)$	Gauss Arşimedyen t -norm
$GC(\cdot)$	Gauss Arşimedyen t -konorm
$z(\cdot)$	Toplamsal üreteç fonksiyonu
$z^{-1}(\cdot)$	Ters toplamsal üreteç fonksiyonu

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 3.1	CCq-ROFS yapısının gelişimi	22
Şekil 4.1	Genenelleştirilmiş WASPAS analizine göre şehirlerin skorları	42
Şekil 4.2	q parametresinin WASPAS sıralaması üzerindeki etkisi	44
Şekil 4.3	Farklı yöntemlere göre şehirlerin skor değerleri	46

ÇİZELGELER DİZİNİ

Çizelge 4.1	Dilsel terimler ve karşılık gelen CCq -ROFV'ler	35
Çizelge 4.2	Karar matrisi	38
Çizelge 4.3	Normalize edilmiş karar matrisi	39
Çizelge 4.4	Dilsel terimler kullanılarak oluşturulan karar matrisi	40
Çizelge 4.5	Alternatiflerin bulanık görelî önem dereceleri	41
Çizelge 4.6	Duyarlılık analizi sonuçları	43

1. GİRİŞ

Gerçek yaşamda karşılaşılan birçok problem, kesin sınırlarla tanımlanamayan ve farklı düzeylerde belirsizlik içeren verilerden oluşmaktadır. Klasik küme teorisinde bir elemanın herhangi bir kümeye üyeliği yalnızca iki durumla ifade edilmekte, eleman ya kümeye ait olmakta ya da kümeye ait olmamaktadır. Bu durum matematiksel olarak 1 ve 0 değerleri ile gösterilmekte olup, üyelik kavramını kesin sınırlar içerisinde değerlendirmektedir. Ancak insan düşüncesi, uzman görüşleri ve gerçek dünya verileri çoğu zaman bu kadar kesin bir yapıya sahip değildir. Bir nesnenin, olayın veya kavramın belirli bir özelliği taşıma derecesi farklı seviyelerde olabilmekte ve bu durum klasik küme yaklaşımının yetersiz kalmasına neden olmaktadır. Bu gereksinim doğrultusunda Zadeh (1965) tarafından geliştirilen bulanık küme teorisi, elemanların bir kümeye ait olma durumlarını yalnızca 1 ve 0 değerleriyle sınırlamak yerine belirli derecelerle ifade edebilme imkânı sunmuştur. Böylece ait olma ve ait olmama kavramları daha esnek bir yapıda ele alınabilmiş, belirsizlik ve kesin olmama içeren problemlerin modellenmesinde daha gerçekçi ve etkili bir yaklaşım ortaya konulmuştur.

1.1 Bulanık Küme Teorisi

Klasik küme teorisi, bir elemanın belirli bir kümeye ait olup olmadığını kesin sınırlar çerçevesinde değerlendiren ikili bir yapıya sahiptir. Bu yaklaşımda bir elemanın kümeye ait olması yalnızca 0 ve 1 değerleri ile ifade edilmekte, 0 değeri elemanın kümeye ait olmadığını, 1 değeri ise tamamen ait olduğunu göstermektedir. Ancak gerçek yaşam problemlerinde karşılaşılan birçok durum bu kadar kesin sınırlarla tanımlanamamaktadır. Bu durum, klasik küme yaklaşımının belirsizlik içeren verilerin modellenmesinde yetersiz kalmasına neden olmaktadır.

Bu sınırlılığı gidermek amacıyla Zadeh (1965) tarafından önerilen bulanık küme teorisi, elemanların bir kümeye aitlik derecelerinin $[0, 1]$ aralığında herhangi bir değer alabilmesine olanak sağlayan yeni bir matematiksel çerçeve sunmuştur. Böylece bir elemanın kümeye ait olma durumu yalnızca "ait" veya "ait değil" şeklinde de-

ğerlendirilmek yerine, farklı seviyelerde üyelik dereceleri ile ifade edilebilmektedir. Bu yaklaşım, belirsizlik ve kesin olmama içeren problemlerin daha gerçekçi biçimde modellenmesine olanak sağlamış ve bulanık mantık temelli yöntemlerin gelişiminin temelini oluşturmuştur.

Bulanık küme teorisinin ortaya konulmasından sonra, bu yaklaşımın sağladığı esnek yapı sayesinde belirsizlik içeren birçok problemin çözümünde başarılı sonuçlar elde edilmiştir. Özellikle karar verme, örüntü tanıma, kontrol sistemleri, yapay zeka, veri madenciliği, görüntü işleme, tıp, ekonomi ve mühendislik alanlarında bulanık küme teorisine dayalı çok sayıda uygulama geliştirilmiştir (Zimmermann 1985, Otto 1990, Ragin 2000, Szmidt ve Kacprzyk 2001, Dubois ve Prade 2003, Coppi vd. 2006, Hüllermeier 2011, Ünver ve Olgun 2023). Bununla birlikte, yalnızca üyelik derecesine dayalı yapının bazı karmaşık karar verme problemlerinde belirsizliği yeterli düzeyde temsil edemediği görülmüştür. Özellikle karar vericilerin tereddüt yaşadığı durumlarda, aitlik bilgisinin yanında ait olmama ve kararsızlık bilgilerinin de dikkate alınması gerekliliği ortaya çıkmıştır.

Bu ihtiyaç doğrultusunda bulanık küme teorisinin çeşitli geliştirilmiş yapıları geliştirilmiştir. Atanassov (1986) tarafından önerilen sezgisel bulanık kümeler, aitlik derecesine ek olarak ait olmama derecesini de modele dahil ederek belirsizliğin daha ayrıntılı biçimde temsil edilmesini sağlamıştır. Daha sonra Pisagor bulanık kümeler (Yager 2013), Fermatyen bulanık kümeler (Senapati ve Yager 2020) ve q . mertebeden ortoikili bulanık kümeler (Yager 2017) geliştirilerek ait olma ve ait olmama dereceleri arasındaki ilişki daha esnek hale getirilmiştir. Bunun yanında kompleks bulanık kümeler (Ramot vd. 2002), kompleks sezgisel bulanık kümeler (Alkouri ve Salleh 2012) dairesel bulanık kümeler (Atanassov 2020) ve dairesel kompleks sezgisel bulanık kümeler (Garg vd. 2025) gibi yapılar önerilerek belirsizliğin farklı boyutlarının modellenmesine yönelik önemli katkılar sağlanmıştır.

Son yıllarda özellikle çok kriterli karar verme problemlerinde karşılaşılan karmaşık ve çok boyutlu belirsizliklerin modellenmesi amacıyla, klasik bulanık küme yapılarının geometrik ve cebirsel açıdan daha esnek genellemeleri üzerinde yoğunlaşmıştır. Bu gelişmeler, hem teorik açıdan bulanık küme literatürünün genişlemesine hem

de çevresel değerlendirme, sürdürülebilirlik analizi, risk değerlendirmesi ve hava kalitesi modelleme gibi uygulama alanlarında daha güçlü karar destek sistemlerinin geliştirilmesine olanak sağlamıştır. Bu tez çalışmasında ele alınan dairesel kompleks q . mertebeden ortoikili bulanık kümeler de söz konusu gelişim sürecinin bir sonucu olarak ortaya çıkmış olup, belirsizliğin daha kapsamlı ve esnek biçimde temsil edilmesini amaçlayan güncel bulanık küme yaklaşımlarından biridir.

1.2 Çok Kriterli Karar Verme ve WASPAS

Karar verme süreçlerinde karşılaşılan problemlerin önemli bir kısmı, birden fazla değerlendirme ölçütünün eş zamanlı olarak dikkate alınmasını gerektirmektedir. Özellikle çevresel değerlendirme, sürdürülebilirlik, mühendislik, ekonomi, sağlık ve yönetim bilimleri gibi alanlarda karar vericiler çoğu zaman birbirleriyle etkileşim halinde olan çok sayıda kriter altında alternatifleri değerlendirmek durumundadır. Bu tür problemlerde yalnızca tek bir ölçüte dayalı yaklaşımlar yeterli sonuçlar üretemediğinden, karar verme sürecinin çok boyutlu bir bakış açısıyla ele alınması gerekmektedir. Çok kriterli karar verme (ÇKKV) yöntemleri, farklı kriterlerin birlikte değerlendirilmesine olanak sağlayarak alternatiflerin sistematik biçimde analiz edilmesi ve sıralanması için geliştirilen yöntemler bütünüdür.

ÇKKV yöntemlerinin temel amacı, karar probleminde yer alan kriterlerin önem düzeylerini dikkate alarak alternatiflerin genel performanslarını belirlemek ve karar vericilere en uygun seçeneğin seçilmesinde destek sağlamaktır. Bu kapsamda karar problemi genellikle alternatiflerin belirlenmesi, kriterlerin tanımlanması, kriter ağırlıklarının hesaplanması ve alternatiflerin değerlendirilerek sıralanması aşamalarından oluşmaktadır. Literatürde bu amaçla geliştirilmiş çok sayıda yöntem bulunmaktadır. Analitik Hiyerarşi Süreci (AHP), İdeal Çözüme Benzerliğe Göre Tercih Sıralama Tekniği (TOPSIS), Karmaşık Oransal Değerlendirme (COPRAS), Tercih Sıralama Organizasyon Metodu (PROMETHEE), Uzlaşık Çözüm Yaklaşımı (VIKOR) ve ELECTRE ailesi yöntemleri en yaygın kullanılan ÇKKV teknikleri arasında yer almaktadır. Bu yöntemler farklı matematiksel altyapılara sahip olmakla birlikte, karar vericilerin çok sayıda kriter altında alternatifleri değerlendirmesine olanak sağlamaları bakımından ortak bir amaca hizmet etmektedir.

ÇKKV yöntemlerinin gelişimiyle birlikte, alternatiflerin daha güvenilir ve gerçekçi biçimde değerlendirilmesini sağlayan bütünleşik yaklaşımlar da önem kazanmıştır. Bu kapsamda (Zavadskas vd. 2012) tarafından önerilen WASPAS (Weighted Aggregated Sum Product Assessment – Ağırlıklı Toplam ve Çarpım Değerlendirmesi) yöntemi, Ağırlıklı Toplam Modeli (WSM) ile Ağırlıklı Çarpım Modeli (WPM) yaklaşımlarını tek bir çerçevede birleştiren bütünleşik bir karar verme yöntemi olarak geliştirilmiştir (Zavadskas vd. 2012). Yöntemin temel amacı, toplamsal ve çarpımsal değerlendirme mekanizmalarının avantajlarını aynı model içerisinde kullanarak alternatiflerin performanslarını daha kapsamlı biçimde ölçmektir. Bu yönüyle WASPAS, yalnızca tek bir karar verme mantığına dayanan yöntemlere kıyasla daha dengeli ve esnek bir değerlendirme süreci sunmaktadır.

Literatürde WASPAS yönteminin farklı alanlarda başarılı biçimde uygulandığı çok sayıda çalışma bulunmaktadır. Chakraborty ve Zavadskas, üretim sistemlerinde karşılaşılan çeşitli seçim problemlerinin çözümünde yöntemin etkin sonuçlar verdiğini göstermiştir (Chakraborty ve Zavadskas 2014). Ghorabae, tedarikçi seçimi probleminde geliştirilmiş bir WASPAS modeli kullanarak yöntemin bazı ÇKKV yaklaşımlarına göre daha tutarlı sonuçlar üretebildiğini ortaya koymuştur (Ghorabae vd. 2016). Hussain vd., WASPAS yöntemini yapay zeka destekli hastanelerin performanslarının değerlendirilmesinde kullanmış ve özellikle robotik cerrahi ile tıbbi tanı uygulamalarına yönelik analizler gerçekleştirerek yöntemin farklı bir uygulama alanındaki etkinliğini ortaya koymuşlardır (Hussain vd. 2024). Bu çalışmalar, WASPAS yönteminin farklı disiplinlerde uygulanabilirliğini ve karar verme problemlerindeki başarısını ortaya koymaktadır.

Son yıllarda bulanık küme teorisindeki gelişmelere paralel olarak WASPAS yöntemi de çeşitli bulanık ortamlar altında genişletilmiş ve belirsizlik içeren karar problemlerine uygulanmıştır. Özellikle sezgisel bulanık kümeler, Pisagor bulanık kümeler, Fermatyen bulanık kümeler ve q . mertebeden ortoikili bulanık kümeler gibi gelişmiş bulanık yapılar kullanılarak WASPAS tabanlı yeni karar verme modelleri geliştirilmiştir. Bu çalışmalar, uzman görüşleri ve dilsel değerlendirmeler gibi kesin olmayan bilgilerin karar verme sürecine daha etkin biçimde dahil edilmesine olanak sağla-

mıştır. Bu tez çalışmasında da WASPAS yöntemi, dairesel kompleks q . mertebeden ortoikili bulanık kümeler altında geliştirilen yeni toplama operatörleri ile bütünleştirilerek hava kalitesi değerlendirme problemine uygulanmıştır. Böylece hem WASPAS yönteminin güçlü karar verme yapısından yararlanılmış hem de belirsizliğin daha esnek ve kapsamlı biçimde modellenmesi amaçlanmıştır.

1.3 Motivasyon ve Tezin Katkıları

Bulanık küme teorisinde son yıllarda yaşanan gelişmeler, belirsizlik ve kararsızlık içeren problemlerin daha gerçekçi biçimde modellenmesine önemli katkılar sağlamıştır. Sezgisel bulanık kümeler, Pisagor bulanık kümeler, Fermatyen bulanık kümeler ve q . mertebeden ortoikili bulanık kümeler gibi yapılar, klasik bulanık kümelerin temsil gücünü artırarak karar verme süreçlerinde karşılaşılan belirsizliklerin daha kapsamlı şekilde ele alınmasına olanak tanımıştır. Bununla birlikte, günümüzde karşılaşılan birçok gerçek yaşam problemi yalnızca ait olma ve ait olmama derecelerindeki belirsizliklerden değil, aynı zamanda karmaşık yapılar, periyodik davranışlar, geometrik esneklik gereksinimleri ve çok boyutlu belirsizliklerden de etkilenmektedir. Bu durum, mevcut bulanık küme modellerinin daha gelişmiş yapılarla genişletilmesi gerekliliğini ortaya çıkarmaktadır.

Kompleks bulanık kümeler, üyelik bilgilerinin genlik ve faz bileşenleri ile ifade edilmesine olanak sağlayarak klasik bulanık kümelerin temsil kabiliyetini önemli ölçüde artırmıştır. Bunun yanında dairesel bulanık küme yapıları, belirsizliğin yalnızca tek bir nokta ile değil, belirli bir bölge içerisinde temsil edilmesine imkân vererek daha esnek bir modelleme yaklaşımı sunmaktadır. Ancak mevcut dairesel kompleks sezgisel bulanık küme yapıları, sezgisel bulanık kümelerin kısıtlayıcı üyelik koşullarından dolayı bazı karar verme problemlerinde yeterli temsil gücüne sahip olmayabilmektedir. Özellikle yüksek düzeyde tereddüt içeren durumlarda, ait olma ve ait olmama derecelerinin daha geniş bir tanım kümesinde ifade edilmesi gerekmektedir. Bu nedenle dairesel kompleks yapılar ile q . mertebeden ortoikili bulanık kümelerin esnekliğini bir araya getiren yeni modellerin geliştirilmesi önemli bir araştırma alanı olarak ortaya çıkmaktadır.

Diğer taraftan, bulanık ortamlar altında gerçekleştirilen çok kriterli karar verme çalışmalarında kullanılan toplama operatörlerinin seçimi, elde edilen sonuçların doğruluğu ve güvenilirliği üzerinde doğrudan etkili olmaktadır. Literatürde yaygın olarak kullanılan cebirsel, Einstein (Wang ve Liu 2012), Hamacher (Hamacher 1975) ve Dombi (Dombi 1982) tabanlı operatörler başarılı sonuçlar üretmekle birlikte, son yıllarda istatistiksel yorumlanabilirliği ve sürekli yapısı nedeniyle Gauss fonksiyonuna dayalı operatörlere olan ilgi artmıştır. Özellikle Gauss hata fonksiyonuna dayalı t -norm ve t -konorm yapıları, bulanık bilgilerin daha yumuşak ve istatistiksel açıdan anlamlı biçimde birleştirilmesine olanak sağlamaktadır. Buna rağmen, Gauss tabanlı toplama operatörlerinin dairesel kompleks q . mertebeden ortoikili bulanık kümeler ortamında ele alındığı çalışmaların oldukça sınırlı olduğu görülmektedir.

Bu tez çalışmasında söz konusu boşluğun giderilmesi amaçlanmakta ve dairesel kompleks q . mertebeden ortoikili bulanık kümeler ile Gauss tabanlı toplama operatörlerini bir araya getiren yeni bir karar verme çerçevesi önerilmektedir. Ayrıca geliştirilen yapının gerçek yaşam problemlerindeki uygulanabilirliğini göstermek amacıyla çok kriterli hava kalitesi değerlendirme problemi ele alınmaktadır.

Bu tez çalışmasının başlıca katkıları aşağıda özetlenmiştir:

- Dairesel kompleks sezgisel bulanık kümeler ile kompleks q . mertebeden ortoikili bulanık kümelerin genelleştirilmesi sonucunda dairesel kompleks q . mertebeden ortoikili bulanık küme (CC q -ROFS) ile dairesel kompleks q . mertebeden ortoikili bulanık değer (CC q -ROFV) kavramları tanımlanacaktır.
- CC q -ROFS'ler için temel cebirsel işlemler tanımlanacak ve bu yapıların matematiksel özellikleri incelenecektir.
- Gauss hata fonksiyonuna dayalı t -norm ve t -konormlar kullanılarak CC q -ROFS ortamında yeni toplama operatörleri geliştirilecektir.
- CC q -ROFS yapıları altında Gauss ağırlıklı aritmetik ortalama ve Gauss ağırlıklı geometrik ortalama operatörleri tanımlanacaktır.
- Geliştirilen toplama operatörleri kullanılarak CC q -ROFS tabanlı genelleştirilmiş bir WASPAS karar verme modeli oluşturulacaktır.

- Önerilen karar verme yaklaşımı, $PM_{2.5}$, PM_{10} , O_3 ve NO_2 kirleticilerini dikkate alan çok kriterli bir hava kalitesi değerlendirme problemine uygulanacaktır.
- Elde edilen sonuçlar farklı q parametreleri ve λ değerleri altında incelenecek, yöntemin kararlılığı ve duyarlılığı analiz edilecektir.
- Önerilen yaklaşımın performansı farklı çok kriterli karar verme yöntemleri ile karşılaştırılarak sonuçların tutarlılığı değerlendirilecektir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde, tez kapsamında yararlanılacak temel tanımlar ve kavramlar ele alınmaktadır. Aksi belirtilmedikçe, bu tez boyunca $\mathcal{I} = [0, 1]$ gösterimi kullanılacaktır.

2.1 Bulanık Küme Yaklaşımına İlişkin Temel Bilgiler

Tanım 2.1 X bir evrensel küme ve $A \subseteq X$ olsun. Bu durumda A kümesinin karakteristik fonksiyonu

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A, \\ 0, & x \notin A. \end{cases}$$

ile tanımlanır. Burada $\chi_A : X \rightarrow \{0, 1\}$ fonksiyonu, X kümesindeki her bir elemanın A kümesine ait olup olmadığını belirlemektedir. Eğer x elemanı A kümesine ait ise karakteristik fonksiyonun değeri 1, ait değilse 0 olmaktadır.

Karakteristik fonksiyon, klasik küme teorisinin temel kavramlarından biri olup üyelik durumunu kesin ve ikili bir yapıda ifade etmektedir. Başka bir ifadeyle, bir elemanın bir kümeye üyeliği yalnızca "ait" veya "ait değil" şeklinde değerlendirilmektedir. Ancak gerçek yaşam problemlerinde karşılaşılan birçok kavram kesin sınırlarla tanımlanamamaktadır. Örneğin bir kişinin "genç", bir havanın "sıcak" veya bir ürünün "kaliteli" olarak değerlendirilmesi kişiden kişiye değişebilmekte ve kesin üyelik sınırları ile ifade edilememektedir. Bu tür durumlarda karakteristik fonksiyonun ikili yapısı yetersiz kalmakta ve üyelik derecelerinin farklı seviyelerde ifade edilmesine ihtiyaç duyulmaktadır. Bu durumu açıklamak amacıyla aşağıdaki örnek incelenebilir.

Örnek 2.1 Bir üniversitede öğrencilerin akademik başarı durumlarının değerlendirilmek istendiğini düşünelim. Başarı düzeyinin yalnızca not ortalamasına göre belirlendiği ve not ortalaması 3.00 ve üzeri olan öğrencilerin "başarılı", 3.00'ın altında olan öğrencilerin ise "başarısız" olarak sınıflandırıldığı kabul edilsin. Bu durumda

$$B = \{x : x \geq 3.00\}$$

kümesinin karakteristik fonksiyonu

$$\chi_B(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 3.00, \\ 0, & x < 3.00 \end{cases}$$

biçiminde tanımlanabilir.

Bu yaklaşıma göre not ortalaması 3.01 olan bir öğrenci ile not ortalaması 4.00 olan bir öğrenci aynı derecede başarılı kabul edilmektedir. Benzer şekilde, not ortalaması 2.99 olan bir öğrenci ile not ortalaması 1.50 olan bir öğrenci de aynı kategoride değerlendirilmektedir. Ancak gerçek hayatta bu öğrencilerin başarı düzeyleri arasında belirgin farklılıklar bulunmaktadır. Karakteristik fonksiyonun yalnızca 0 ve 1 değerlerini alması, bu farklılıkların modele yansıtılmasını engellemektedir. Bu nedenle, üyelik kavramının dereceli olarak ifade edilmesine olanak sağlayan bulanık küme yaklaşımı geliştirilmiş ve belirsizlik içeren durumların daha gerçekçi biçimde modellenmesi mümkün hale gelmiştir.

Tanım 2.2 X bir evrensel küme olsun. X kümesinden $\mathcal{I}$ aralığına tanımlı her fonksiyona bir bulanık küme denir. Yani X üzerinde bir A bulanık kümesi

$$\mu_A : X \rightarrow \mathcal{I}$$

ile gösterilir. Burada $\mu_A(x)$ değeri, $x \in X$ 'in A bulanık kümesine aitlik derecesini göstermektedir. Bu durumda A bulanık kümesi

$$A = \langle (x, \mu_A(x)) \mid x \in X \rangle$$

şeklinde ifade edilir (Zadeh 1965).

Aitlik fonksiyonunun aldığı değerler $\mathcal{I}$ aralığında olup, $\mu_A(x) = 0$ değeri x elemanının A kümesine ait olmadığını, $\mu_A(x) = 1$ değeri ise ait olduğunu göstermektedir. Bununla birlikte, 0 ile 1 arasındaki değerler elemanın kümeye kısmi üyelik derecesini ifade etmektedir. Böylece klasik küme teorisinde kullanılan kesin üyelik anlayışı genelleştirilerek, belirsizlik ve muğlaklık içeren durumların daha esnek bir biçimde modellenmesi mümkün olmaktadır.

Klasik kümeler, bulanık kümelerin özel bir durumu olarak değerlendirilebilir. Nitekim aitlik fonksiyonunun yalnızca 0, 1 değerlerini aldığı durumda bulanık küme,

klasik kümeye indirgenmektedir. Bu nedenle bulanık küme teorisi, klasik küme teorisinin doğal bir genellemesi olarak kabul edilmektedir.

Tanım 2.3 $\mu \in \mathcal{I}$ olmak üzere, $\alpha = \langle \mu \rangle$ ifadesine bir bulanık değer denir. Burada μ , α bulanık değerinin aitlik derecesini göstermektedir (Zadeh 1965).

Örnek 2.2 $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ evrensel kümesi üzerinde tanımlı

$$\mu_A(x_1) = 0.1, \quad \mu_A(x_2) = 0.3, \quad \mu_A(x_3) = 0.7, \quad \mu_A(x_4) = 0.9$$

aitlik fonksiyonu göz önüne alınsın. Bu durumda A bulanık kümesi

$$A = \langle (x_1, 0.1), (x_2, 0.3), (x_3, 0.7), (x_4, 0.9) \rangle$$

şeklinde ifade edilir.

Burada x_1 elemanının A bulanık kümesine aitlik derecesi 0.1 iken, x_4 elemanının aitlik derecesi 0.9'dur. Buna göre x_4 elemanı A kümesine x_1 elemanına göre daha yüksek derecede aitlik göstermektedir.

Örnek 2.3 $X = \{x : -10 \leq x \leq 40\}$ evrensel kümesi üzerinde tanımlı

$$\mu_A(x) = \frac{x + 10}{50}$$

aitlik fonksiyonu, sıcaklığın "yüksek sıcaklık" kümesine aitlik derecesini temsil etsin. Burada -10°C en düşük sıcaklığı, 40°C ise en yüksek sıcaklığı göstermektedir.

Bu durumda, $\mu_A(10) = 0.4$ ve $\mu_A(30) = 0.8$ olmaktadır. Buna göre 30°C sıcaklığının "yüksek sıcaklık" kümesine aitlik derecesi, 10°C sıcaklığının aitlik derecesinden daha yüksektir. Böylece sıcaklık değerleri yalnızca "sıcak" veya "sıcak değil" şeklinde sınıflandırılmak yerine, farklı derecelerde ifade edilebilmektedir.

2.2 Bulanık Kümelerde Temel Küme İşlemleri

Bu bölümde, bulanık kümeler üzerinde tanımlanan temel küme işlemleri ve bu işlemlere ilişkin bazı temel özellikler verilmektedir. Aksi belirtilmedikçe X boş olmayan sonlu bir evrensel küme olarak kabul edilecektir.

Tanım 2.4 Bir bulanık kümenin aitlik fonksiyonu evrensel kümedeki tüm elemanlar için sıfır değerini alıyorsa, bu kümeye boş bulanık küme adı verilir (Zadeh 1965).

Tanım 2.5 A ve B aynı evrensel küme üzerinde tanımlı birer bulanık küme olmak üzere. Eğer her $x \in X$ için $\mu_A(x) = \mu_B(x)$ eşitliği sağlanıyorsa, A ve B bulanık kümeleri eşit kabul edilir. Bu durum $A = B$ veya eşdeğer olarak $\mu_A = \mu_B$ şeklinde ifade edilir (Zadeh 1965).

Tanım 2.6 A bir bulanık küme olsun. A bulanık kümesinin tümleyeni, aitlik fonksiyonu $\mu_{A^c}(x) = 1 - \mu_A(x)$ şeklinde tanımlı bulanık kümedir ve A^c ile gösterilir. Burada $x \in X$ için $\mu_{A^c}(x)$ değeri, x elemanının A^c tümleyen kümesine aitlik derecesini ifade etmektedir (Zadeh 1965).

Tanım 2.7 A ve B aynı evrensel küme üzerinde tanımlı iki bulanık küme olsun. Eğer her $x \in X$ için $\mu_A(x) \leq \mu_B(x)$ eşitsizliği sağlanıyorsa, A bulanık kümesi B bulanık kümesinin alt kümesi olarak adlandırılır. Bu durum $A \subseteq B$ şeklinde gösterilir (Zadeh 1965).

2.3 Sezgisel Bulanık Kümeler

Bulanık küme teorisi, belirsizlik içeren bilgilerin modellenmesinde başarılı sonuçlar vermesine rağmen, bazı problemlerde yalnızca aitlik derecesinin kullanılması yeterli olmamaktadır. Özellikle bir elemanın ait olma ve ait olmama durumlarının birlikte değerlendirilmesi gereken durumlarda, bu iki derece arasında oluşan kararsızlık bilgisinin de dikkate alınması gerekmektedir.

Bu gereksinim doğrultusunda Atanassov tarafından 1986 yılında sezgisel bulanık küme kavramı geliştirilmiştir. Sezgisel bulanık kümeler, bulanık kümelerden farklı olarak her elemana yalnızca bir aitlik derecesi değil, aynı zamanda bir ait olmama derecesi de atamaktadır. Böylece karar vericinin sahip olduğu belirsizlik ve tereddüt bilgisi modele dahil edilebilmekte, klasik bulanık kümelere göre daha esnek ve kapsamlı bir temsil sağlanabilmektedir.

Tanım 2.8 $\mu_A : X \rightarrow \mathcal{I}$ ve $\nu_A : X \rightarrow \mathcal{I}$ sırasıyla ait olma ve ait olmama fonksiyonları olmak üzere, her $x \in X$ için $\mu_A(x) + \nu_A(x) \leq 1$ koşulunu sağlayan

$$A = \langle (x, \mu_A(x), \nu_A(x)) \mid x \in X \rangle$$

yapısına sezgisel bulanık küme denir. Burada $\mu_A(x)$ ifadesi x elemanının A kümesine aitlik derecesini, $\nu_A(x)$ değeri ise ait olmama derecesini göstermektedir. Ayrıca $\pi_A(x) = 1 - \mu_A(x) - \nu_A(x)$ ifadesi ile tanımlanan $\pi_A(x)$ değeri, x elemanına ilişkin belirsizlik derecesini temsil etmektedir. $\pi_A(x)$ değerinin büyümesi, x 'in belirsizliğinin arttığını göstermektedir. (Atanassov 1986).

Uyarı 2.1 Bir sezgisel bulanık küme A için her $x \in X$ elemanı için $\pi_A(x) = 0$ oluyorsa, A sezgisel bulanık kümesi bir bulanık kümeye indirgenir (Atanassov 1986).

Tanım 2.9 $\mu, \nu \in \mathcal{I}$ ve $\mu + \nu \leq 1$ olmak üzere, $\alpha = \langle \mu, \nu \rangle$ ikilisine sezgisel bulanık değer denir. Burada μ , α sezgisel bulanık değerinin aitlik derecesini, ν ise ait olmama derecesini göstermektedir (Atanassov 1986).

2.4 q . Mertebeden Ortoikili Bulanık Kümeler

Sezgisel bulanık kümeler, belirsizliğin modellenmesinde önemli bir gelişme sağlamakla birlikte, bazı durumlarda aitlik ve ait olmama derecelerinin ifade edilebileceği bölgeyi yeterince geniş temsil edememektedir. Sezgisel bulanık kümelerin ardından, bu sınırlılığı gidermek amacıyla ilk olarak Pisagor bulanık kümeler önerilmiş ve ait olma ile ait olmama derecelerinin karelerinin toplamına dayanan daha geniş bir temsil alanı elde edilmiştir (Yager 2013, Yager 2014). Daha sonra Yager tarafından geliştirilen q . mertebeden ortoikili bulanık kümeler, bu yaklaşımı genelleştirerek üyelik derecelerinin alabileceği tanım bölgesini q parametresi yardımıyla daha da genişletmiştir. Bu genel yapı içerisinde $q = 1$ için sezgisel bulanık kümeler, $q = 2$ için Pisagor bulanık kümeler ve $q = 3$ için daha sonra (Senapati ve Yager 2020) tarafından Fermatyen bulanık kümeler olarak adlandırılan yapı elde edilmektedir. Bu da q . mertebeden ortoikili bulanık kümeler, bu bulanık küme modellerini kapsayan genel bir çerçeve sunmaktadır. Böylece belirsizliğin modellenmesinde daha geniş bir tanım bölgesi elde edilmiş ve bulanık mantığın özellikle çok kriterli karar verme ve sınıflandırma problemlerindeki temsil gücü önemli ölçüde artırılmıştır.

Tanım 2.10 $q \geq 1$ bir reel sayı olmak üzere her $x \in X$ için $0 \leq (\mu_A(x))^q + (\nu_A(x))^q \leq 1$ koşulunu sağlayan $\mu_A : X \rightarrow \mathcal{I}$ ait olma fonksiyonu ile $\nu_A : X \rightarrow \mathcal{I}$ ait olmama fonksiyonu tarafından tanımlanan $A = \langle (x, \mu_A(x), \nu_A(x)) \mid x \in X \rangle$ yapısına q . mertebeden ortoikili bulanık küme (q -rung orthopair fuzzy set, q -ROFS) denir (Yager 2016).

Burada $\mu_A(x)$ ve $\nu_A(x)$ sırasıyla x elemanının A kümesine ait olma ve ait olmama derecelerini göstermektedir. q parametresi arttıkça ait olma ve ait olmama derecelerinin alabileceği değerlerin tanım bölgesi genişlemekte, böylece belirsizliğin daha esnek bir biçimde modellenmesine olanak sağlanmaktadır.

Uyarı 2.2 $q = 1$ durumunda q . mertebeden ortoikili bulanık kümeler sezgisel bulanık kümelere indirgenmektedir. Benzer şekilde, $q = 2$ için Pisagor bulanık kümeler (Yager 2013), $q = 3$ için ise Fermatyen bulanık kümeler (Senapati ve Yager 2020) elde edilmektedir. Dolayısıyla q . mertebeden ortoikili bulanık kümeler, bu bulanık küme yapılarının tümünü kapsayan genelleştirilmiş bir model olarak değerlendirilebilir.

2.5 Kompleks Sezgisel Bulanık Kümeler

Klasik bulanık kümelerde üyelik dereceleri yalnızca reel sayılar yardımıyla ifade edilmektedir. Ancak bazı uygulamalarda belirsizlik yalnızca büyüklük bilgisi ile açıklanamamakta, aynı zamanda periyodik veya zamana bağlı davranışların da dikkate alınması gerekmektedir. Bu tür durumlarda reel değerli bulanık kümeler yetersiz kalabilmektedir. Bu eksikliği gidermek amacıyla Ramot vd. tarafından kompleks bulanık kümeler geliştirilmiştir (Ramot vd. 2002). Kompleks bulanık kümelerde üyelik dereceleri kompleks düzlem üzerinde tanımlanmakta ve hem genlik hem de faz bilgisi birlikte kullanılmaktadır. Böylece klasik bulanık kümelere göre daha geniş bir temsil yeteneği elde edilmekte ve özellikle sinyal işleme, zaman serisi analizi ve dinamik sistem modelleme gibi alanlarda daha esnek modeller kurulabilmektedir.

Daha sonraki çalışmalarda Alkouri ve Salleh tarafından sezgisel bulanık küme yapısı ile kompleks gösterim birleştirilmiş ve kompleks sezgisel bulanık kümeler tanımlanmıştır. Bu yapı sayesinde hem kararsızlık bilgisi hem de faza bağlı belirsizlikler aynı anda modellenabilmektedir.

Tanım 2.11 Her $x \in X$ için ait olma ve ait olmama dereceleri kompleks sayılarla ifade edilen $A = \langle (x, \mu_A(x), \nu_A(x)) \mid x \in X \rangle$ yapısına kompleks sezgisel bulanık küme (Complex Intuitionistic Fuzzy Set, CIFS) denir. Burada, $\mu_A(x) = r_A(x)e^{i\theta_A(x)}$ ifadesi x elemanının ait olma derecesini, $\nu_A(x) = k_A(x)e^{i\phi_A(x)}$ ifadesi ise ait olmama derecesini göstermektedir. Bu gösterimlerde $r_A(x), k_A(x) \in \mathcal{I}$ olup sırasıyla ait olma ve ait olmama derecelerinin genlik bileşenlerini ifade etmektedir. Ayrıca, $\theta_A(x), \phi_A(x) \in [0, 2\pi]$ değerleri ait olma ve ait olmama derecelerine karşılık gelen faz açılarını göstermektedir. Kompleks sezgisel bulanık kümelerde $0 \leq r_A(x) + k_A(x) \leq 1$ koşulu sağlanmaktadır (Alkouri ve Salleh 2012).

Bunun yanı sıra, Ullah vd. tarafından kompleks Pisagor bulanık kümeler geliştirilmiş, bu yapılar için çeşitli uzaklık ölçüleri tanımlanmış ve örüntü tanıma problemlerinde uygulanmıştır.

Tanım 2.12 Her $x \in X$ için ait olma ve ait olmama dereceleri kompleks sayılarla ifade edilen

$$A = \langle (x, \mu_A(x), \nu_A(x)) : x \in X \rangle$$

yapısına Pisagor kompleks sezgisel bulanık küme (Pythagorean Complex Intuitionistic Fuzzy Set, CPFS) denir. Burada, $\mu_A(x) = r_A(x)e^{i\theta_A(x)}$ ifadesi x elemanının ait olma derecesini, $\nu_A(x) = k_A(x)e^{i\phi_A(x)}$ ifadesi ise ait olmama derecesini göstermektedir. Bu gösterimlerde $r_A(x), k_A(x) \in \mathcal{I}$ olup sırasıyla ait olma ve ait olmama derecelerinin genlik bileşenlerini ifade etmektedir. Ayrıca, $\theta_A(x), \phi_A(x) \in [0, 2\pi]$ değerleri ait olma ve ait olmama derecelerine karşılık gelen faz açılarını göstermektedir. Pisagor kompleks sezgisel bulanık kümelerde $0 \leq r_A^2(x) + k_A^2(x) \leq 1$ koşulu sağlanmaktadır. (Ullah vd. 2020).

Daha sonra kompleks Pisagor bulanık kümelerin genelleştirilmiş bir biçimi olan kompleks q . mertebeden ortoikili bulanık kümeler ele alınmış, bu yapı üzerinde MacLaurin simetrik ortalama operatörleri geliştirilmiş ve çevresel karar verme problemlerine uygulanmıştır (Ali ve Mahmood 2020).

Tanım 2.13 $q \geq 1$ bir reel sayı olsun. Her $x \in X$ için ait olma ve ait olmama dereceleri kompleks sayılarla ifade edilen

$$A = \langle (x, \mu_A(x), \nu_A(x)) : x \in X \rangle$$

yapısına q . mertebeden ortoikili kompleks sezgisel bulanık küme (q -rung orthopair complex intuitionistic fuzzy set, Cq-ROFS) denir. Burada, $\mu_A(x) = r_A(x)e^{i\theta_A(x)}$ ifadesi x elemanının ait olma derecesini, $\nu_A(x) = k_A(x)e^{i\phi_A(x)}$ ifadesi ise ait olmama derecesini göstermektedir. Bu gösterimlerde $r_A(x), k_A(x) \in \mathcal{I}$ olup sırasıyla ait olma ve ait olmama derecelerinin genlik bileşenlerini ifade etmektedir. Ayrıca, $\theta_A(x), \phi_A(x) \in [0, 2\pi]$ değerleri ait olma ve ait olmama derecelerine karşılık gelen faz açılarını göstermektedir. q . mertebeden ortoikili kompleks sezgisel bulanık kümelerde $0 \leq r_A^q(x) + k_A^q(x) \leq 1$ koşulu sağlanmaktadır. (Liu vd. 2019).

2.6 Dairesel Bulanık Kümeler

Klasik bulanık kümeler ve bunların uzantılarında üyelik bilgisi genellikle tek bir nokta ile ifade edilmektedir. Ancak bazı uygulamalarda belirsizlik yalnızca belirli bir değer ile değil, belirli bir bölge içerisinde değerlendirilmektedir. Özellikle uzman görüşlerine dayalı değerlendirmelerde, karar vericiler çoğu zaman kesin bir üyelik derecesi vermek yerine bu değer belirlenen bir aralık veya bölge içerisinde yer aldığını ifade etmektedir.

Bu ihtiyacı karşılamak amacıyla Atanassov tarafından dairesel sezgisel bulanık kümeler önerilmiştir (Atanassov 2020). Dairesel yaklaşımda ait olma ve ait olmama dereceleri yalnızca bir nokta ile değil, belirli bir yarıçapa sahip dairesel bir bölge yardımıyla temsil edilmektedir. Böylece belirsizlik, tek bir değer yerine bir bölge olarak modellenilebilmekte ve karar vericilerin sahip olduğu ek belirsizlik bilgisi yapıya dahil edilebilmektedir. Bu yaklaşım, istatistikte kullanılan güven aralığı kavramına benzer şekilde, değerlendirmelerin olası değişim alanını da dikkate almaktadır.

Tanım 2.14 $r \in \mathcal{I}$ olmak üzere her $x \in X$ için $0 \leq \mu_A(x) + \nu_A(x) \leq 1$ koşulunu sağlayan ait olma fonksiyonu $\mu_A : X \rightarrow \mathcal{I}$ ve ait olmama fonksiyonu $\nu_A : X \rightarrow \mathcal{I}$ yardımıyla tanımlanan

$$A_r = \langle (x, \mu_A(x), \nu_A(x); r) \mid x \in X \rangle$$

yapısına dairesel sezgisel bulanık küme (circular intuitionistic fuzzy set- C-IFS) denir (Atanassov 2020).

Burada r , $(\mu_A(x), \nu_A(x))$ noktası merkez olmak üzere çizilen çemberin yarıçapını göstermektedir. Söz konusu çember, x elemanına ilişkin ait olma ve ait olmama derecelerindeki ek belirsizliği temsil etmektedir. Böylece üyelik bilgisi yalnızca tek bir nokta ile değil, belirli bir bölge ile ifade edilerek belirsizliğin daha kapsamlı biçimde modellenmesi sağlanmaktadır.

Atanassov'un önerdiği bu yapıdan hareketle (Bozyiğit vd. 2023) dairesel Pisagor bulanık kümeleri geliştirmiştir. Daha sonra (Yusoff vd. 2023), bu yaklaşımı genelleştirerek dairesel q . mertebeden ortoikili bulanık kümeleri tanımlamış ve söz konusu yapının cebirsel özelliklerini incelemiştir.

2.7 Dairesel Kompleks Bulanık Kümeler

Kompleks bulanık kümeler ve dairesel bulanık kümeler, bulanık bilginin farklı yönlerini modellemek amacıyla geliştirilmiş önemli genelleştirmelerdir. Kompleks bulanık kümeler ait olma ve ait olmama derecelerine faz bileşeni ekleyerek zamana bağlı ve periyodik belirsizliklerin modellenmesine olanak sağlarken, dairesel bulanık kümeler üyelik bilgilerinin belirli bir bölge içerisinde ifade edilmesine imkân tanımaktadır. Bu iki yaklaşımın avantajlarını aynı yapı altında birleştirmek amacıyla (Garg vd. 2025) tarafından dairesel kompleks sezgisel bulanık kümeler geliştirilmiştir. Bu yapı sayesinde aitlik ve ait olmama dereceleri hem kompleks düzlem üzerinde hem de dairesel bir bölge yardımıyla temsil edilebilmekte, böylece belirsizlik daha kapsamlı ve geometrik olarak yorumlanabilir bir biçimde modellenmektedir.

Tanım 2.15 X üzerinde tanımlı bir dairesel kompleks sezgisel bulanık küme (circular complex intuitionistic fuzzy sets-CCIFS)

$$A = \langle (x_i, \mu_A(x_i), \nu_A(x_i), r_A(x_i)) \mid i = 1, 2, \dots, n \rangle$$

şeklinde tanımlanır. Burada,

$$\mu_A(x_i) = [\mu_A^{Re}(x_i), \mu_A^{Im}(x_i)] \in I^2$$

ve

$$\nu_A(x_i) = [\nu_A^{Re}(x_i), \nu_A^{Im}(x_i)] \in I^2$$

kompleks sayıları $0 \leq \mu_A^{Re}(x_i) + \nu_A^{Re}(x_i) \leq 1$ ve $0 \leq \mu_A^{Im}(x_i) + \nu_A^{Im}(x_i) \leq 1$ koşullarını sağlamaktadır. Ayrıca $r_A(x_i) = [r_A^{Re}(x_i), r_A^{Im}(x_i)] \in I^2$ kompleks sayısı, kompleks düzlemde $x_i \in X$ elemanına karşılık gelen çemberin yarıçapını göstermektedir. Burada μ_A ve ν_A sırasıyla aitlik ve ait olmama fonksiyonları olarak adlandırılmaktadır (Garg vd. 2025).

Ayrıca, $\mathcal{I}^2 = [0, 1] \times [0, 1]$ kümesini ifade etmektedir.

2.8 Gauss Hata Fonksiyonu, Üçgensel Norm ve Üçgensel Konorm

Bulanık mantığın temelinde yer alan üçgensel normlar (t -normlar) ve üçgensel konormlar (t -konormlar), toplama ve çıkarım süreçlerinde önemli bir role sahiptir. Minimum, çarpım, Hamacher, Einstein, Dombi ve Lukasiewicz operatörleri gibi klasik t -norm ve t -konormlar, bulanık mantıkta birleşim ve ayrışım işlemlerinin modellenmesinde uzun yıllardır yaygın olarak kullanılmaktadır (Dombi 1982, Hamacher 1975, Klement vd. 2004a, Klement vd. 2004b). Bu operatörlerin farklı bulanık ortam ve uygulamalara uyarlanabilmesi amacıyla literatürde çeşitli genelleştirmeler geliştirilmiştir. (Bobillo ve Straccia 2007), çarpım t -normunu bulanık betimleme mantığında kullanmış; (Dimuro vd. 2017), minimum t -normuna dayalı CMin-integralini bulanık kural tabanlı sınıflandırma problemleri için geliştirmiştir. Garg ise Einstein ailesinden türetilen genelleştirilmiş Pisagor bulanık geometrik operatörleri önermiştir (Garg 2017).

Son yıllarda Ünver tarafından Gauss t -norm ve t -konorm kavramları ortaya konulmuş ve bu operatörlerin sezgisel bulanık sınıflandırma problemlerindeki uygulamaları incelenmiştir (Ünver 2025). Bu çalışma, bulanık bilgi teorisine yeni bir bakış açısı kazandırmış ve Gauss tabanlı operatörlerin süreklilik, türevlenebilirlik ve istatistiksel yorumlanabilirlik gibi önemli avantajlara sahip olduğunu göstermiştir. Özellikle Gauss hata fonksiyonu kullanılarak Arşimedyen yapıda t -norm ve t -konormlar elde

edilmiş, böylece bulanık sistemlerde sürekli ve olasılıksal açıdan anlamlı toplama mekanizmalarının oluşturulması mümkün hale gelmiştir.

Tanım 2.16 $\tau : \mathcal{I}^2 \rightarrow \mathcal{I}$ fonksiyonu için

1. Her $x \in \mathcal{I}$ için $\tau(x, 1) = x$,
2. Her $x, y \in \mathcal{I}$ için $\tau(x, y) = \tau(y, x)$,
3. Her $x, y, z \in \mathcal{I}$ için $\tau(x, \tau(y, z)) = \tau(\tau(x, y), z)$,
4. Her $x, x', y, y' \in \mathcal{I}$ için $x \leq x'$ ve $y \leq y'$ ise $\tau(x, y) \leq \tau(x', y')$

koşulları sağlanıyorsa τ fonksiyonuna bir üçgensel norm (t -norm) denir (Klement ve Mesiar 2005, Schweizer ve Sklar 1983).

Tanım 2.17 $\rho : \mathcal{I}^2 \rightarrow \mathcal{I}$ fonksiyonu için

1. Her $x \in \mathcal{I}$ için $\rho(x, 0) = x$,
2. Her $x, y \in \mathcal{I}$ için $\rho(x, y) = \rho(y, x)$,
3. Her $x, y, z \in \mathcal{I}$ için $\rho(x, \rho(y, z)) = \rho(\rho(x, y), z)$,
4. Her $x, x', y, y' \in \mathcal{I}$ için $x \leq x'$ ve $y \leq y'$ olduğunda $\rho(x, y) \leq \rho(x', y')$ olur.

koşulları sağlanıyorsa ρ fonksiyonuna bir üçgensel konorm (t -konorm) denir (Klement ve Mesiar 2005, Schweizer ve Sklar 1983).

Sürekli bir τ t -normu, her $x \in \mathcal{I}$ için $\tau(x, x) < x$ koşulunu sağlıyorsa Arşimed-yen t -norm olarak adlandırılır. Bu özellik, söz konusu t -normların bulanık mantık çerçevesinde kullanılan çeşitli işlemlerle uyumlu olmasını sağlamaktadır. Özellikle bu t -normlardan türetilen bulanık çıkarım ve bulanık tümlleme işlemleri, monotonluk ve involütiflik gibi birçok bulanık çıkarım sisteminde önemli rol oynayan temel özellikleri korumaktadır.

Belirli türde t -normların elde edilmesinde toplamsal üreteç (additive generator) kavramından yararlanılmaktadır. Bu yaklaşım, bir t -normun kesin azalan bir fonksiyon yardımıyla ifade edilmesine olanak tanımakta ve böylece yeni t -norm ailelerinin sistematik bir şekilde oluşturulmasını sağlamaktadır.

Tanım 2.18 $g : \mathcal{I} \rightarrow [0, \infty]$ fonksiyonu kesin azalan ve $g(1) = 0$ koşulunu sağlayan bir fonksiyon olsun. Eğer her $x, y \in \mathcal{I}$ için $\tau(x, y) = g^{-1}(g(x) + g(y))$ eşitliği sağlanıyorsa, g fonksiyonuna τ t -normunun toplamsal üretici (additive generator) denir. Burada $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \infty$ şeklindedir (Klement vd. 2002).

Teorem 2.1 $\mathcal{I}$ üzerinde tanımlı bir τ t -normu için aşağıdaki ifadeler denktir:

1. τ sürekli bir Arşimedyen t -normdur.
2. τ sürekli bir toplamsal üretece sahiptir. Başka bir ifadeyle her $x, y \in \mathcal{I}$ için $\tau(x, y) = g^{-1}(g(x) + g(y))$ eşitliği için $g(1) = 0$ koşulunu sağlayan sürekli ve kesin azalan bir $g : \mathcal{I} \rightarrow [0, \infty]$ fonksiyonu vardır. (Klement vd. 2004b).

Sürekli bir Arşimedyen t -norm olan τ 'ya karşılık gelen dual t -konorm ρ da sürekli bir Arşimedyen t -konormdur. Bu durumda her $x \in (0, 1)$ için $\rho(x, x) > x$ eşitsizliği sağlanır. Ayrıca ρ t -konormu, $h(x) = g(1 - x)$ şeklinde tanımlanan toplamsal üreteç yardımıyla elde edilir ve $\rho(x, y) = h^{-1}(h(x) + h(y))$ biçiminde ifade edilir.

Ünver, $g(x) = \ln \left(\frac{\text{erf}(1)}{\text{erf}(x)} \right)$ şeklinde tanımlanan bir toplamsal üreteç önermiştir (Ünver 2025). Burada kullanılan $\text{erf}(x)$, Gauss hata fonksiyonu olup

$$\text{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$$

şeklinde tanımlanmaktadır. $\text{erf}(x)$ sürekli ve monoton artan bir fonksiyon olup $[0, \infty)$ üzerinde birebirdir. Ayrıca $\text{erf}(0) = 0$ ve $\lim_{x \rightarrow \infty} \text{erf}(x) = 1$ özelliklerini sağlamaktadır. Bu nedenle ters fonksiyonu $\text{erf}^{-1}(\cdot)$ tanımlanabilmekte ve Gauss Arşimedyen t -norm ile buna karşılık gelen dual t -konorm operatörlerinin oluşturulmasında kullanılabilir. Bu üreteç yardımıyla elde edilen Gauss t -norm ve buna karşılık gelen dual Gauss t -konorm sırasıyla

$$GN(x, y) = \text{erf}^{-1} \left(\frac{\text{erf}(x) \text{erf}(y)}{\text{erf}(1)} \right)$$

ve

$$GC(x, y) = 1 - \text{erf}^{-1} \left(\frac{\text{erf}(1 - x) \text{erf}(1 - y)}{\text{erf}(1)} \right)$$

şeklinde tanımlanmaktadır.

Gauss Arşimedyen t -norm ve t -conorm operatörleri, Arşimedyen yapıların genel tanımından elde edilmektedir. Bu amaçla, $z(t) = -\ln\left(\frac{\text{erf}(t)}{\text{erf}(1)}\right)$ üreteç fonksiyonu dikkate alınırsa, Arşimedyen t -norm tanımına göre $GN(x, y) = z^{-1}(z(x) + z(y))$ olmaktadır. Üreteç fonksiyonunun yerine yazılmasıyla

$$GN(x, y) = z^{-1}\left(-\ln\left(\frac{\text{erf}(x)}{\text{erf}(1)}\right) - \ln\left(\frac{\text{erf}(y)}{\text{erf}(1)}\right)\right)$$

elde edilir. Logaritma özellikleri kullanılarak

$$GN(x, y) = z^{-1}\left(-\ln\left(\frac{\text{erf}(x)\text{erf}(y)}{\text{erf}(1)^2}\right)\right)$$

yazılır. Buradan da

$$GN(x, y) = \text{erf}^{-1}\left(\frac{\text{erf}(x)\text{erf}(y)}{\text{erf}(1)}\right)$$

ifadesi elde edilir. Benzer şekilde Arşimedyen t -konorm tanımı

$$GC(x, y) = 1 - z^{-1}(z(1 - x) + z(1 - y))$$

şeklindedir. Üreteç fonksiyonunun yerine yazılıp gerekli düzenlemeler yapıldığında

$$GC(x, y) = 1 - \text{erf}^{-1}\left(\frac{\text{erf}(1 - x)\text{erf}(1 - y)}{\text{erf}(1)}\right)$$

sonucu elde edilmektedir.

3. DAİRESEL KOMPLEKS q . MERTEBEDEN ORTOİKİLİ BULANIK KÜMELER

Bu bölümde, Garg vd. tarafından tanımlanan dairesel kompleks sezgisel bulanık kümeler daha genel bir yapıya genişletilerek dairesel kompleks q . mertebeden ortoikili bulanık kümeler (CC q -ROFS) tanımlanmaktadır. Dikkat edilirse, $q = 1$ olması durumunda önerilen yapı, ilgili çalışmada verilen dairesel kompleks sezgisel bulanık küme yapısının bir özel durumuna indirgenmektedir.

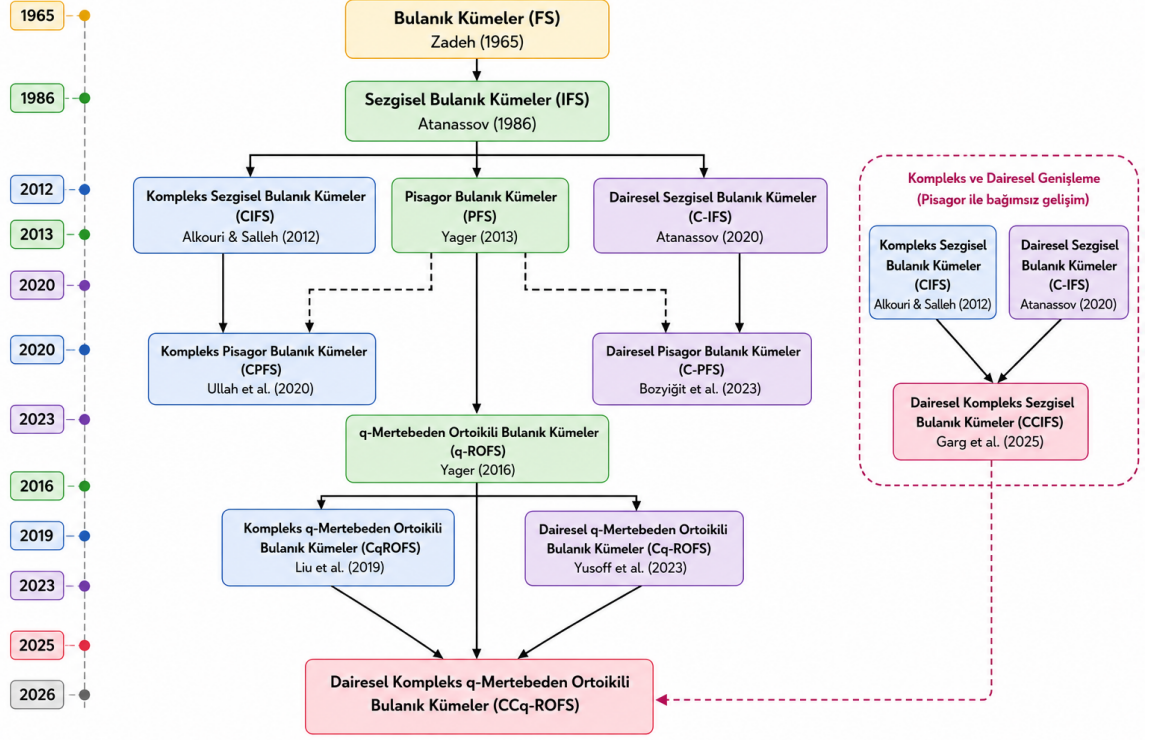
Ayrıca, bu yeni yapı altında cebirsel işlemlerin ve toplama operatörlerinin geliştirilmesinde, Ünver tarafından sunulan Gauss Arşimedyen t -norm ve t -konormlardan yararlanılmaktadır. Bu Gauss tabanlı işlemler, CC q -ROFS ortamında tanımlanan toplama operatörleri için sürekli, esnek ve analitik olarak kullanışlı bir temel sağlamaktadır. Gauss hata fonksiyonunun CC q -ROFS yapısıyla bütünleştirilmesi, istatistiksel düzgünlük ile çok boyutlu bulanık temsil gücünü bir araya getirerek belirsizliklerin modellenmesi, toplulaştırılması ve sınıflandırılması için yeni bir yaklaşım sunmaktadır. Böylece önerilen yapı, mevcut modellerin geliştirilmesinin yanı sıra teorik gelişmeler ile gerçek hayat karar verme problemleri arasındaki bağı da güçlendirmektedir.

3.1 CC q -ROFS Teorisinin Geliştirilmesi

Önerilen CC q -ROFS yapısı, bulanık küme teorisinde zaman içerisinde geliştirilen farklı yaklaşımların bir araya getirilmesiyle elde edilmiştir. Bu yapı; q . mertebeden ortoikili bulanık kümelerin sağladığı esnekliği, kompleks bulanık kümelerin faz bilgisi içeren temsil gücünü ve dairesel bulanık kümelerin geometrik belirsizlik modelleme yeteneğini aynı çatı altında toplamaktadır. Böylece hem belirsizliğin daha kapsamlı bir şekilde ifade edilmesi hem de karar verme problemlerinde daha güçlü bir temsil mekanizmasının oluşturulması amaçlanmaktadır.

Şekil 3.1’de CC q -ROFS yapısına ulaşan bulanık küme modellerinin gelişim süreci ve bu yapılar arasındaki ilişkiler gösterilmektedir. Şekilden görüldüğü üzere, bulanık kümelerden başlayarak sezgisel bulanık kümeler, Pisagor bulanık kümeler, q .

mertebeden ortonormal bulanık kümeler, kompleks bulanık kümeler ve dairesel bulanık kümeler gibi farklı genelleştirmeler zaman içerisinde geliştirilmiş ve bu yaklaşımların bütünleştirilmesi sonucunda CCq -ROFS yapısı ortaya çıkmıştır. Bu yönüyle CCq -ROFS'ler, önceki bulanık küme modellerinin avantajlarını bir araya getiren ve belirsizliği daha etkin biçimde temsil edebilen kapsamlı bir bulanık küme modeli olarak değerlendirilebilir.



Şekil 3.1 CCq -ROFS yapısının gelişimi

Bu doğrultuda tanım aşağıda verilmektedir.

Tanım 3.1 $q \geq 1$ olmak üzere, X evrensel kümesi üzerinde tanımlı bir dairesel kompleks q . mertebeden ortonormal bulanık küme (CCq -ROFS)

$$A = \langle (\mu_A(x), \nu_A(x), r_A(x)) \mid x \in X \rangle$$

biçiminde tanımlanır. Burada,

$$\mu_A(x) = (\mu_A^{Re}(x), \mu_A^{Im}(x)), \quad \nu_A(x) = (\nu_A^{Re}(x), \nu_A^{Im}(x))$$

ve

$$r_A(x) \in \mathcal{I}$$

olup $\mu_A^{Re}, \mu_A^{Im}, \nu_A^{Re}$ ve $\nu_A^{Im} : X \rightarrow \mathcal{I}$ fonksiyonları

$$0 \leq (\mu_A^{Re}(x))^q + (\nu_A^{Re}(x))^q \leq 1$$

ve

$$0 \leq (\mu_A^{Im}(x))^q + (\nu_A^{Im}(x))^q \leq 1$$

koşullarını sağlar. Burada μ_A, ν_A ve r_A sırasıyla aitlik fonksiyonu, ait olmama fonksiyonu ve aitlik derecelerini temsil eden çemberin yarıçapını göstermektedir. Ayrıca belirsizlik fonksiyonu $\pi(x) = (\pi^{Re}(x), \pi^{Im}(x))$ olarak tanımlanır. Burada

$$\pi^{Re}(x) = (1 - (\mu_A^{Re}(x))^q - (\nu_A^{Re}(x))^q)^{\frac{1}{q}}$$

ve

$$\pi^{Im}(x) = (1 - (\mu_A^{Im}(x))^q - (\nu_A^{Im}(x))^q)^{\frac{1}{q}}$$

şeklindedir. Herhangi bir $x \in X$ için

$$A(x) = \left((\mu_A^{Re}(x), \mu_A^{Im}(x)), (\nu_A^{Re}(x), \nu_A^{Im}(x)), r_A(x) \right)$$

ifadesine dairesel kompleks q . mertebeden ortoikili bulanık değer (CC_q -ROFV) denir. $q = 1$ için yapı CCIFS'e, $q = 2$ için CCPFS'ye ve $q = 3$ için CCFFS'ye indirgenmektedir.

Örnek 3.1 $X = \{x_1, x_2, x_3\}$ ve $q = 2$ olsun. Bu durumda

$$A = \left\langle \begin{array}{l} (x_1, (0.5, 0.3), (0.4, 0.2), 0.3), \\ (x_2, (0.6, 0.2), (0.4, 0.2), 0.4), \\ (x_3, (0.4, 0.4), (0.5, 0.3), 0.1) \end{array} \right\rangle$$

kümesi bir dairesel kompleks Pisagor bulanık kümedir. Gerçekten,

$$\begin{aligned}
(0.5)^2 + (0.4)^2 &= 0.41 \leq 1, & (0.3)^2 + (0.2)^2 &= 0.13 \leq 1, \\
(0.6)^2 + (0.4)^2 &= 0.52 \leq 1, & (0.2)^2 + (0.2)^2 &= 0.08 \leq 1, \\
(0.4)^2 + (0.5)^2 &= 0.41 \leq 1, & (0.4)^2 + (0.3)^2 &= 0.25 \leq 1
\end{aligned}$$

olup tüm elemanlar için Pisagor koşulu sağlanmaktadır. Ayrıca

$$r_A(x_1) = 0.3, \quad r_A(x_2) = 0.4, \quad r_A(x_3) = 0.1$$

değerleri $\mathcal{I}$ aralığında olduğundan verilen yapı bir CCPFS oluşturmaktadır.

CCq-ROFS yapısında tanımlanan alternatiflerin karşılaştırılabilmesi ve sıralanabilmesi için, her bir CCq-ROFV'nin sayısal olarak değerlendirilmesine olanak sağlayan bir skor fonksiyonuna ihtiyaç duyulmaktadır. Bu amaçla, aitlik ve ait olmama derecelerinin reel ve sanal bileşenlerini birlikte dikkate alan aşağıdaki skor fonksiyonu tanımlanmaktadır.

Tanım 3.2 $A = \langle \mu, \nu, r \rangle$ bir CCq-ROFV olsun. Bu durumda A 'nın skoru

$$s(A) = \frac{r}{4} \left[2 + (\mu^{Re})^q + (\mu^{Im})^q - (\nu^{Re})^q - (\nu^{Im})^q \right]$$

şeklinde tanımlanır. Burada s fonksiyonuna skor fonksiyonu denir.

3.2 CCq-ROFV'ler için Cebirsel İşlemler

Bu bölümde, CCq-ROFV'ler üzerinde tanımlanan cebirsel işlemler verilmektedir. Söz konusu işlemler, Gauss Arşimedyen t -norm ve t -konormlara karşılık gelen toplamsal üreteç fonksiyonları kullanılarak tanımlanmıştır. Tanımlanan işlemler daha sonra geliştirilecek Gauss toplama operatörlerinin matematiksel temelini oluşturmaktadır.

Tanım 3.3 A_1 ve A_2 iki CCq-ROFV, $\lambda \geq 0$ bir reel sayı ve $z : \mathcal{I} \rightarrow [0, \infty]$ sürekli bir Arşimedyen t -norm veya t -konorma ait toplamsal üreteç fonksiyonu olmak üzere,

(i) toplama işlemi $(\oplus_q)$

$$\begin{aligned}
A_1 \oplus_q A_2 = & \left\langle \left(\left[1 - \left(\operatorname{erf}^{-1} \left(\frac{\operatorname{erf}(1 - (\mu_{A_1}^{Re})^q) \operatorname{erf}(1 - (\mu_{A_2}^{Re})^q)}{\operatorname{erf}(1)} \right) \right) \right]^q \right)^{\frac{1}{q}}, \right. \\
& \left. \left[1 - \left(\operatorname{erf}^{-1} \left(\frac{\operatorname{erf}(1 - (\mu_{A_1}^{Im})^q) \operatorname{erf}(1 - (\mu_{A_2}^{Im})^q)}{\operatorname{erf}(1)} \right) \right) \right]^q \right)^{\frac{1}{q}}, \\
& \left(\left[\operatorname{erf}^{-1} \left(\frac{\operatorname{erf}((\nu_{A_1}^{Re})^q) \operatorname{erf}((\nu_{A_2}^{Re})^q)}{\operatorname{erf}(1)} \right) \right]^{\frac{1}{q}}, \right. \\
& \left. \left[\operatorname{erf}^{-1} \left(\frac{\operatorname{erf}((\nu_{A_1}^{Im})^q) \operatorname{erf}((\nu_{A_2}^{Im})^q)}{\operatorname{erf}(1)} \right) \right]^{\frac{1}{q}} \right), z(r_1, r_2) \rangle
\end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır.

Burada $z(r_1, r_2) = z^{-1}(z(r_1) + z(r_2))$ şeklindedir.

(ii) çarpma işlemi ($\otimes_q$)

$$\begin{aligned}
A_1 \otimes_q A_2 = & \left\langle \left(\left[\operatorname{erf}^{-1} \left(\frac{\operatorname{erf}((\mu_{A_1}^{Re})^q) \operatorname{erf}((\mu_{A_2}^{Re})^q)}{\operatorname{erf}(1)} \right) \right]^{\frac{1}{q}}, \right. \right. \\
& \left. \left[\operatorname{erf}^{-1} \left(\frac{\operatorname{erf}((\mu_{A_1}^{Im})^q) \operatorname{erf}((\mu_{A_2}^{Im})^q)}{\operatorname{erf}(1)} \right) \right]^{\frac{1}{q}} \right), \\
& \left(\left[1 - \left(\operatorname{erf}^{-1} \left(\frac{\operatorname{erf}(1 - (\nu_{A_1}^{Re})^q) \operatorname{erf}(1 - (\nu_{A_2}^{Re})^q)}{\operatorname{erf}(1)} \right) \right) \right]^q \right)^{\frac{1}{q}}, \\
& \left[1 - \left(\operatorname{erf}^{-1} \left(\frac{\operatorname{erf}(1 - (\nu_{A_1}^{Im})^q) \operatorname{erf}(1 - (\nu_{A_2}^{Im})^q)}{\operatorname{erf}(1)} \right) \right) \right]^q \right)^{\frac{1}{q}}, \\
& z(r_1, r_2) \rangle
\end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır.

(iii) skaler ile çarpma işlemi

$$\begin{aligned} \lambda_q A_1 = & \left\langle \left(\left[1 - \operatorname{erf}^{-1} \left(\frac{\left(\operatorname{erf} (1 - (\mu_{A_1}^{Re})^q) \right)^\lambda}{\operatorname{erf}(1)^{\lambda-1}} \right) \right]^{\frac{1}{q}}, \right. \\ & \left. \left[1 - \operatorname{erf}^{-1} \left(\frac{\left(\operatorname{erf} (1 - (\mu_{A_1}^{Im})^q) \right)^\lambda}{\operatorname{erf}(1)^{\lambda-1}} \right) \right]^{\frac{1}{q}} \right), \\ & \left(\left[\operatorname{erf}^{-1} \left(\frac{\left(\operatorname{erf} ((\nu_{A_1}^{Re})^q) \right)^\lambda}{\operatorname{erf}(1)^{\lambda-1}} \right) \right]^{\frac{1}{q}}, \right. \\ & \left. \left[\operatorname{erf}^{-1} \left(\frac{\left(\operatorname{erf} ((\nu_{A_1}^{Im})^q) \right)^\lambda}{\operatorname{erf}(1)^{\lambda-1}} \right) \right]^{\frac{1}{q}} \right), \\ & \left. z(r_1, r_2) \right\rangle \end{aligned}$$

(iv) üs alma işlemi

$$\begin{aligned} A_1^{\lambda_q} = & \left\langle \left(\left[\operatorname{erf}^{-1} \left(\frac{\left(\operatorname{erf} ((\mu_{A_1}^{Re})^q) \right)^\lambda}{\operatorname{erf}(1)^{\lambda-1}} \right) \right]^{\frac{1}{q}}, \right. \\ & \left. \left[\operatorname{erf}^{-1} \left(\frac{\left(\operatorname{erf} ((\mu_{A_1}^{Im})^q) \right)^\lambda}{\operatorname{erf}(1)^{\lambda-1}} \right) \right]^{\frac{1}{q}} \right), \\ & \left(\left[1 - \operatorname{erf}^{-1} \left(\frac{\left(\operatorname{erf} (1 - (\nu_{A_1}^{Re})^q) \right)^\lambda}{\operatorname{erf}(1)^{\lambda-1}} \right) \right]^{\frac{1}{q}}, \right. \\ & \left. \left[1 - \operatorname{erf}^{-1} \left(\frac{\left(\operatorname{erf} (1 - (\nu_{A_1}^{Im})^q) \right)^\lambda}{\operatorname{erf}(1)^{\lambda-1}} \right) \right]^{\frac{1}{q}} \right), \\ & \left. z(r_1, r_2) \right\rangle \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır.

Bu tanım ile CCq-ROFV'ler üzerinde kullanılabilecek temel cebirsel işlemler tanımlanmıştır. Tanımlanan toplama, çarpma, skaler çarpım ve üs alma işlemleri, q . mertebeden ortoikili yapının korunmasını sağlayacak şekilde Gauss Arşimedyen t -norm ve t -konorm operatörleri yardımıyla elde edilmiştir. Böylece işlem sonuçlarının da yine bir CCq-ROFV olması garanti altına alınmıştır. Diğer yandan, burada verilen işlemler, ilerleyen bölümlerde tanıtılacak olan toplama operatörlerinin oluşturulmasında temel yapı taşları olarak kullanılacaktır.

Uyarı 3.1 Tanım 3.3'te verilen işlemler, Gauss t -norm ve t -konormlara karşılık gelen toplamsal üreteç fonksiyonları yardımıyla daha kompakt bir biçimde ifade edilebilir. Bu durumda CCq-ROFV'ler üzerinde tanımlanan işlemler aşağıdaki şekilde yazılabilir:

$$\begin{aligned}
A_1 \oplus_q A_2 &= \left\langle (h^{-1}(h(\mu_{A_1}^{Re}) + h(\mu_{A_2}^{Re})), h^{-1}(h(\mu_{A_1}^{Im}) + h(\mu_{A_2}^{Im}))), \right. \\
&\quad \left. (g^{-1}(g(\nu_{A_1}^{Re}) + g(\nu_{A_2}^{Re})), g^{-1}(g(\nu_{A_1}^{Im}) + g(\nu_{A_2}^{Im}))), z^{-1}(z(r_1) + z(r_2)) \right\rangle, \\
A_1 \otimes_q A_2 &= \left\langle (g^{-1}(g(\mu_{A_1}^{Re}) + g(\mu_{A_2}^{Re})), g^{-1}(g(\mu_{A_1}^{Im}) + g(\mu_{A_2}^{Im}))), \right. \\
&\quad \left. (h^{-1}(h(\nu_{A_1}^{Re}) + h(\nu_{A_2}^{Re})), h^{-1}(h(\nu_{A_1}^{Im}) + h(\nu_{A_2}^{Im}))), z^{-1}(z(r_1) + z(r_2)) \right\rangle, \\
\lambda_q A_1 &= \left\langle (h^{-1}(\lambda h(\mu_{A_1}^{Re})), h^{-1}(\lambda h(\mu_{A_1}^{Im}))), \right. \\
&\quad \left. (g^{-1}(\lambda g(\nu_{A_1}^{Re})), g^{-1}(\lambda g(\nu_{A_1}^{Im}))), z^{-1}(z(r_1) + z(r_2)) \right\rangle, \\
A_1^{\lambda_q} &= \left\langle (g^{-1}(\lambda g(\mu_{A_1}^{Re})), g^{-1}(\lambda g(\mu_{A_1}^{Im}))), \right. \\
&\quad \left. (h^{-1}(\lambda h(\nu_{A_1}^{Re})), h^{-1}(\lambda h(\nu_{A_1}^{Im}))), z^{-1}(z(r_1) + z(r_2)) \right\rangle.
\end{aligned}$$

Uyarı 3.1'de verilen işlemler, Arşimedyen t -norm ve t -konormların toplamsal üreteçler yardımıyla tanımlanmasına ilişkin genel yaklaşımdan elde edilmiştir (Beliakov vd. 2011). Bu nedenle aşağıda verilen önerme, Uyarı 3.1'de belirtilen gösterimlerden ve Arşimedyen t -norm ile t -konormların temel özelliklerinden doğrudan elde edilmektedir.

Önerme 3.1 A_1 ve A_2 iki CCq-ROFV ve $\lambda \geq 0$ bir reel sayı olsun. Bu durumda $A_1 \oplus_q A_2$, $A_1 \otimes_q A_2$, $\lambda_q A_1$ ve $A_1^{\lambda_q}$ işlemlerinin sonuçları da birer CCq-ROFV'dir.

İspat. Tanım 3.3'te verilen toplama işlemi için

$$A_1 \oplus_q A_2 = \langle (\mu^{Re}, \mu^{Im}), (\nu^{Re}, \nu^{Im}), r \rangle$$

olsun. Gauss Arşimedyen t -norm ve t -konormların kapalı yapısından dolayı

$$0 \leq \mu^{Re}, \mu^{Im}, \nu^{Re}, \nu^{Im} \leq 1$$

sağlanır. Ayrıca A_1 ve A_2 birer CC q -ROFV olduğundan

$$(\mu_{A_i}^{Re})^q + (\nu_{A_i}^{Re})^q \leq 1, \quad (\mu_{A_i}^{Im})^q + (\nu_{A_i}^{Im})^q \leq 1, \quad i = 1, 2$$

koşulları geçerlidir. Tanım 3.3'te verilen işlemler bu koşulları koruyacak biçimde tanımlandığından

$$(\mu^{Re})^q + (\nu^{Re})^q \leq 1, \quad (\mu^{Im})^q + (\nu^{Im})^q \leq 1$$

elde edilir. Ayrıca

$r = z^{-1}(z(r_1) + z(r_2))$ olup, z toplamsal üreteç fonksiyonunun özellikleri gereği $0 \leq r \leq 1$ sağlanır. Dolayısıyla $A_1 \oplus_q A_2$ işleminin sonucu yine bir CC q -ROFV'dir. Diğer işlemler için ispat benzer şekilde yapılır. ■

3.3 CC q -ROFV Gauss Ağırlıklı Aritmetik ve Geometrik Toplama Operatörü

Toplama operatörleri, birden fazla bulanık değerin tek bir temsil edici değere dönüştürülmesinde önemli bir rol oynamaktadır (Beliakov vd. 2011, Beliakov vd. 2007, Grabisch vd. 2009). Bu operatörler, karar verme süreçlerinde farklı kaynaklardan elde edilen bilgilerin bir araya getirilerek bütüncül bir değerlendirme yapılmasına olanak sağlamaktadır.

Bu tezde, CC q -ROFV'lerin toplulaştırılması amacıyla Gauss ağırlıklı aritmetik toplama operatörü ve Gauss ağırlıklı geometrik toplama operatörü tanımlanmaktadır. Söz konusu operatörler Gauss Arşimedyen t -norm ve t -konormlar temel alınarak geliştirilmiş olup, CC q -ROFV'lerin etkin bir şekilde birleştirilmesine imkân sağlamaktadır.

Tanım 3.4 $\{A_i = \langle \mu_{A_i}, \nu_{A_i}, r_{A_i} \rangle : i = 1, \dots, n\}$ bir CCq-ROFV kümesi ve $z : \mathcal{I} \rightarrow [0, \infty]$ sürekli bir Arşimedyen t -norm veya t -konormun toplamsal üretici olsun. Bu durumda Gauss ağırlıklı aritmetik toplama operatörü (CCq-ROFWA)

$$\text{CCq-ROFWA}(A_1, \dots, A_n) = (z) \bigoplus_{i=1}^n \omega_i A_i$$

şeklinde tanımlanır. Burada $\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)^T$ ağırlık vektörü olup

$$0 \leq \omega_i \leq 1, \quad i = 1, \dots, n,$$

ve

$$\sum_{i=1}^n \omega_i = 1$$

koşullarını sağlamaktadır.

Aşağıdaki teorem, CCq-ROFWA operatörünün kapalı formdaki gösterimini vermektedir.

Teorem 3.1 $\{A_i = \langle \mu_{A_i}, \nu_{A_i}, r_{A_i} \rangle : i = 1, \dots, n\}$ bir CCq-ROFV kümesi ve $z(t) = -\log t$ cebirsel t -normun toplamsal üretici olsun. Bu durumda CCq-ROFWA operatörü aşağıdaki şekilde ifade edilir:

$$\text{CCq-ROFWA}(A_1, \dots, A_n) = \langle (\mu^{Re}, \mu^{Im}), (\nu^{Re}, \nu^{Im}), r \rangle$$

burada

$$\begin{aligned} \mu^{Re} &= \left[1 - \left(\text{erf}^{-1} \left(\prod_{i=1}^n \frac{\text{erf}((\mu_i^{Re})^q)^{\omega_i}}{\text{erf}(1)^{\omega_i - \frac{1}{n}}} \right) \right)^q \right]^{\frac{1}{q}}, \\ \mu^{Im} &= \left[1 - \left(\text{erf}^{-1} \left(\prod_{i=1}^n \frac{\text{erf}((\mu_i^{Im})^q)^{\omega_i}}{\text{erf}(1)^{\omega_i - \frac{1}{n}}} \right) \right)^q \right]^{\frac{1}{q}}, \\ \nu^{Re} &= \left[\text{erf}^{-1} \left(\prod_{i=1}^n \frac{\text{erf}((\nu_i^{Re})^q)^{\omega_i}}{\text{erf}(1)^{\omega_i - \frac{1}{n}}} \right) \right]^{\frac{1}{q}}, \\ \nu^{Im} &= \left[\text{erf}^{-1} \left(\prod_{i=1}^n \frac{\text{erf}((\nu_i^{Im})^q)^{\omega_i}}{\text{erf}(1)^{\omega_i - \frac{1}{n}}} \right) \right]^{\frac{1}{q}}, \end{aligned}$$

ve

$$r = \prod_{i=1}^n r_{A_i}^{\omega_i}$$

şeklindedir.

İspat. İspat reel aitlik bileşeni için gösterilecektir. Diğer bileşenler benzer şekilde elde edilir. CCq-ROFWA operatörünün tanımı gereği

$$\text{CCq-ROFWA}(A_1, \dots, A_n) = \bigoplus_{i=1}^n \omega_i A_i$$

şeklindedir. Tanım 3.3'te verilen skaler çarpım işlemi kullanılarak her bir A_i için reel aitlik bileşeni

$$\left[1 - \text{erf}^{-1} \left(\frac{(\text{erf}(1 - (\mu_i^{\text{Re}})^q))^{\omega_i}}{\text{erf}(1)^{\omega_i - 1}} \right) \right]^{\frac{1}{q}}$$

şeklinde elde edilir. Bu ağırlıklandırılmış değerler Gauss toplama işlemi ile birleştirildiğinde

$$\mu^{\text{Re}} = \left[1 - \left(\text{erf}^{-1} \left(\prod_{i=1}^n \frac{\text{erf}(1 - (\mu_i^{\text{Re}})^q)^{\omega_i}}{\text{erf}(1)^{\omega_i - \frac{1}{n}}} \right) \right)^q \right]^{\frac{1}{q}}$$

elde edilir. Yarıçap bileşeni için $z(t) = -\log t$ olduğundan

$$z^{-1} \left(\sum_{i=1}^n \omega_i z(r_{A_i}) \right) = \exp \left(\sum_{i=1}^n \omega_i \log r_{A_i} \right) = \prod_{i=1}^n r_{A_i}^{\omega_i}$$

bulunur. ■

Tanım 3.5 $\{A_i = \langle \mu_{A_i}, \nu_{A_i}, r_{A_i} \rangle : i = 1, \dots, n\}$ bir CCq-ROFV kümesi ve $z : \mathcal{I} \rightarrow [0, \infty]$ sürekli bir Arşimedyen t -norm veya t -konormun toplamsal üretici olsun. Bu durumda CCq-ROFV Gauss Ağırlıklı Geometrik Toplama Operatörü (CCq-ROFWG)

$$\text{CCq-ROFWG}(A_1, \dots, A_n) = (z) \bigotimes_{i=1}^n A_i^{\omega_i}$$

şeklinde tanımlanır. Burada $\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)^T$ normalize edilmiş ağırlık vektörü olup,

$$0 \leq \omega_i \leq 1, \quad i = 1, \dots, n$$

ve

$$\sum_{i=1}^n \omega_i = 1$$

koşullarını sağlamaktadır.

Aşağıdaki teorem, CCq-ROFWG operatörünün kapalı formdaki matematiksel gösterimini vermektedir.

Teorem 3.2 $\{A_i = \langle \mu_{A_i}, \nu_{A_i}, r_{A_i} \rangle : i = 1, \dots, n\}$ bir CCq-ROFV kümesi ve $z(t) = -\log t$ cebirsel t -normun toplamsal üretici olsun. Bu durumda CCq-ROFWG toplama operatörü aşağıdaki şekilde ifade edilir:

$$\text{CCq-ROFWG}(A_1, \dots, A_n) = \langle (\mu^{Re}, \mu^{Im}), (\nu^{Re}, \nu^{Im}), r \rangle$$

burada

$$\mu^{Re} = \text{erf}^{-1} \left(\prod_{i=1}^n \frac{\text{erf}(\mu_i^{Re})^{\omega_i}}{\text{erf}(1)^{\omega_i - \frac{1}{n}}} \right),$$

$$\mu^{Im} = \text{erf}^{-1} \left(\prod_{i=1}^n \frac{\text{erf}(\mu_i^{Im})^{\omega_i}}{\text{erf}(1)^{\omega_i - \frac{1}{n}}} \right),$$

$$\nu^{Re} = \left[1 - \left(\text{erf}^{-1} \left(\prod_{i=1}^n \frac{\text{erf}(1 - \nu_i^{Re})^{\omega_i}}{\text{erf}(1)^{\omega_i - \frac{1}{n}}} \right) \right)^q \right]^{\frac{1}{q}},$$

$$\nu^{Im} = \left[1 - \left(\text{erf}^{-1} \left(\prod_{i=1}^n \frac{\text{erf}(1 - \nu_i^{Im})^{\omega_i}}{\text{erf}(1)^{\omega_i - \frac{1}{n}}} \right) \right)^q \right]^{\frac{1}{q}},$$

ve

$$r = \prod_{i=1}^n r_{A_i}^{\omega_i}$$

şeklindedir.

İspat. İspat reel aitlik bileşeni için gösterilecektir. Diğer bileşenler benzer şekilde elde edilir. CCq-ROFWG operatörünün tanımı gereği

$$\text{CCq-ROFWG}(A_1, \dots, A_n) = \bigotimes_{i=1}^n A_i^{\omega_i}$$

şeklindedir. Tanım 3.3'te verilen üs alma işlemi kullanıldığında, her bir A_i için reel aitlik bileşeni

$$\text{erf}^{-1} \left(\frac{(\text{erf}(\mu_i^{Re}))^{\omega_i}}{\text{erf}(1)^{\omega_i - 1}} \right)$$

biçiminde elde edilir. Bu ağırlıklandırılmış değerler Gauss çarpma işlemi ile birleştirildiğinde

$$\mu^{Re} = \text{erf}^{-1} \left(\prod_{i=1}^n \frac{\text{erf}(\mu_i^{Re})^{\omega_i}}{\text{erf}(1)^{\omega_i - \frac{1}{n}}} \right)$$

sonucuna ulaşılır. Yarıçap bileşeni için $z(t) = -\log t$ olduğundan

$$z^{-1} \left(\sum_{i=1}^n \omega_i z(r_{A_i}) \right) = \exp \left(\sum_{i=1}^n \omega_i \log r_{A_i} \right) = \prod_{i=1}^n r_{A_i}^{\omega_i}$$

elde edilir. ■

4. DAİRESEL KOMPLEKS q . MERTEBEDEN ORTOİKİLİ BULANIK KÜMELER İÇİN GENELLEŞTİRİLMİŞ WASPAS YÖNTEMİ

Bu bölümde, dairesel kompleks q . mertebeden ortoikili bulanık kümeler temel alınarak geliştirilen genelleştirilmiş WASPAS yöntemi sunulmaktadır. Klasik WASPAS yöntemi, Ağırlıklı Toplam Modeli (Weighted Sum Model-WSM) ile Ağırlıklı Çarpım Modelinin (Weighted Product Model-WPM) avantajlarını bir araya getirerek çok kriterli karar verme problemlerinin çözümünde yaygın olarak kullanılan etkili bir yaklaşımdır. Ancak klasik WASPAS yöntemi, karar vericilerin değerlendirmelerinde karşılaşılan belirsizlik, kararsızlık ve bulanıklığı yeterli düzeyde temsil edememektedir.

Bu çalışmada, dairesel kompleks q . mertebeden ortoikili bulanık kümelerin sağladığı ait olma, ait olmama ve yarıçap bileşenlerinden oluşan zengin bilgi yapısı WASPAS yöntemine entegre edilmiştir. Böylece hem karmaşık hem de belirsiz karar ortamlarının daha gerçekçi biçimde modellenmesi amaçlanmıştır. Önerilen yaklaşımda, alternatiflerin kriterler bakımından değerlendirilmesi dairesel kompleks q . mertebeden ortoikili bulanık değerler aracılığıyla gerçekleştirilmekte, ağırlıklı aritmetik ve ağırlıklı geometrik toplama operatörleri kullanılarak alternatiflerin genel performansları hesaplanmaktadır. Son aşamada ise elde edilen toplulaştırılmış değerler skor fonksiyonu yardımıyla sıralanarak karar verme süreci tamamlanmaktadır.

4.1 Genelleştirilmiş WASPAS Yaklaşımı

Bu çalışmada klasik WASPAS yöntemi, dairesel kompleks q . mertebeden ortoikili bulanık küme ortamına uyarlanarak karar vericilerin değerlendirmelerinde bulunan belirsizlik ve kararsızlıkların daha etkin bir şekilde modellenmesi amaçlanmıştır. Önerilen yaklaşımda alternatiflerin değerlendirilmesi dairesel kompleks q . mertebeden ortoikili bulanık kümeleri değerler kullanılarak gerçekleştirilmekte ve geliştirilen Gauss toplama operatörleri yardımıyla alternatiflerin genel performansları belirlenmektedir.

Dairesel kompleks q . mertebeden ortoikili bulanık küme tabanlı genelleştirilmiş WAS-

PAS yönteminin hesaplama adımları aşağıda verilmiştir.

- **Adım 1: Karar problemi bileşenlerinin belirlenmesi**

İlk olarak çok kriterli karar verme problemi tanımlanır. Bu kapsamda m adet alternatiften oluşan $A = \{A_1, \dots, A_m\}$ alternatif kümesi ile n adet kriterden oluşan $C = \{C_1, \dots, C_n\}$ kriter kümesi belirlenir.

- **Adım 2: Karar matrisinin oluşturulması**

Alternatiflerin her bir kriter altındaki performanslarını göstermek amacıyla karar matrisi oluşturulur. Burada x_{ij} değeri, A_i alternatifinin C_j kriterine göre performansını göstermektedir. Buna göre karar matrisi

$$D = \begin{bmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{m1} & \cdots & x_{mn} \end{bmatrix}$$

şeklinde ifade edilir.

- **Adım 3: Normalize karar matrisinin elde edilmesi**

Kriterlerin farklı ölçü birimlerine ve değer aralıklarına sahip olması nedeniyle, karşılaştırılabilir bir yapı elde etmek amacıyla karar matrisi normalize edilir. Normalizasyon işlemi, kriterin fayda veya maliyet türünde olmasına göre farklı şekilde gerçekleştirilir.

Eğer C_j ($j = 1, \dots, n$) kriteri fayda türünde ise normalize edilmiş değer

$$\tilde{x}_{ij} = \frac{x_{ij}}{\max_i x_{ij}}, \quad i = 1, \dots, m$$

şeklinde hesaplanır.

Eğer C_j kriteri maliyet türünde ise normalize edilmiş değer

$$\tilde{x}_{ij} = \frac{\min_i x_{ij}}{x_{ij}}, \quad i = 1, \dots, m$$

olarak elde edilir.

Bu işlem sonucunda tüm kriter değerleri $\mathcal{I}$ aralığına dönüştürülerek alternatiflerin ortak bir ölçekte değerlendirilmesi sağlanır.

- **Adım 4: Normalize edilmiş değerlerin dairesel kompleks q . mertebeden ortoikili bulanık değerlere dönüştürülmesi**

Dairesel kompleks q . mertebeden ortoikili bulanık küme yapısı altında tutarlı bir karşılaştırma ölçeği oluşturabilmek amacıyla, her bir kriter için elde edilen normalize edilmiş alternatif değerlerinin minimum ve maksimum değerleri belirlenir. Daha sonra bu değerler arasındaki aralık yedi seviyeye ayrılır. Elde edilen her bir aralık, en düşük değerlendirme düzeyini temsil eden r_1 ile en yüksek değerlendirme düzeyini temsil eden r_7 arasında bir dilsel terim ile ilişkilendirilir. Bu kapsamda, ilgili kriter için minimum ve maksimum değerler sırasıyla $\tilde{x}_j^{\min} = \min_i \{\tilde{x}_{ij}\}$, $\tilde{x}_j^{\max} = \max_i \{\tilde{x}_{ij}\}$ olarak tanımlanır. Buna göre, $k = 1, \dots, 7$ için r_k alt aralıkları

$$r_k = \left[\tilde{x}_j^{\min} + \frac{\tilde{x}_j^{\max} - \tilde{x}_j^{\min}}{7}(k-1), \tilde{x}_j^{\min} + \frac{\tilde{x}_j^{\max} - \tilde{x}_j^{\min}}{7}k \right), \quad k = 1, \dots, 7$$

şeklinde tanımlanır. Son olarak, her alternatif-kriter çifti uygun dilsel değerlendirme terimi ile eşleştirilerek ilgili CC q -ROFV atanır. Kullanılan dilsel terimler ve bunlara karşılık gelen CC q -ROFV'ler Çizelge 4.1'de verilmiştir.

Çizelge 4.1 Dilsel terimler ve karşılık gelen CC q -ROFV'ler

Dilsel Terim	CC q -ROFV
Mükemmel (M)	$\langle (0.85, 0.75), (0.35, 0.45), 0.70 \rangle$
Çok İyi (Çİ)	$\langle (0.80, 0.70), (0.45, 0.50), 0.60 \rangle$
İyi (İ)	$\langle (0.70, 0.60), (0.55, 0.60), 0.50 \rangle$
Orta (O)	$\langle (0.60, 0.55), (0.65, 0.65), 0.40 \rangle$
Yeterli (Y)	$\langle (0.50, 0.45), (0.70, 0.75), 0.30 \rangle$
Zayıf (Z)	$\langle (0.40, 0.35), (0.80, 0.80), 0.20 \rangle$
Çok Zayıf (ÇZ)	$\langle (0.30, 0.30), (0.85, 0.85), 0.10 \rangle$

Her bir dilsel değerlendirme; $(\mu^{Re}, \mu^{Im}, \nu^{Re}, \nu^{Im}, r)$ bileşenlerinden oluşan bir değer ile temsil edilmektedir. Böylece normalize edilmiş sayısal değerler, dairesel kompleks q . mertebeden ortoikili bulanık küme ortamında kullanılabilecek bulanık değerlendirmelere dönüştürülmüş olur. Bu dönüşüm (Ünver 2025, Bozyiğit vd. 2024, Fei vd. 2019) tarafından önerilen yaklaşımlarla uyumludur.

- **Adım 5: WSM ve WPM ölçülerinin hesaplanması**

Uzman görüşleri doğrultusunda kriter ağırlıklarını içeren ω ağırlık vektörü belirlenir. Daha sonra her bir alternatif için görelî önem dereceleri, WASPAS yönteminin iki temel bileşeni olan Ağırlıklı Toplam Modeli (WSM) ve Ağırlıklı Çarpım Modeli (WPM) kullanılarak ayrı ayrı hesaplanır.

CCq-ROFWA operatörü yardımıyla elde edilen WSM temelli görelî önem değeri

$$Q_i^{(1)} = \bigoplus_{j=1}^n \omega_j \tilde{x}_{ij}$$

şeklinde hesaplanır.

Benzer şekilde, CCq-ROFWG operatörü kullanılarak WPM temelli görelî önem değeri

$$Q_i^{(2)} = \bigotimes_{j=1}^n (\tilde{x}_{ij})^{\omega_j}$$

olarak elde edilir.

Burada $Q_i^{(1)}$ ve $Q_i^{(2)}$ sırasıyla A_i alternatifinin ağırlıklı toplamsal ve ağırlıklı çarpımsal değerlendirme sonuçlarını ifade etmektedir.

- **Adım 6: Toplulaştırılmış görelî önem derecelerinin elde edilmesi**

Bir önceki adımda elde edilen WSM ve WPM temelli görelî önem dereceleri, WASPAS yönteminin birleşik yapısı kullanılarak tek bir ölçü altında birleştirilir. Bu amaçla her bir alternatif için toplulaştırılmış görelî önem derecesi

$$Q_i = \lambda Q_i^{(1)} \oplus (1 - \lambda) Q_i^{(2)}$$

ifadesi yardımıyla hesaplanır. Burada $\lambda \in \mathcal{I}$ parametresi, WSM ve WPM bileşenlerinin nihai değerlendirme üzerindeki etkisini belirleyen bir denge katsayısıdır. $\lambda = 1$ olması durumunda değerlendirme yalnızca WSM yaklaşımına dayanırken, $\lambda = 0$ olması durumunda yalnızca WPM yaklaşımı dikkate alınmaktadır. Ara değerler için ise her iki modelin katkısı birlikte değerlendirilmektedir.

- **Adım 7: Alternatiflerin sıralanması**

Alternatiflerin nihai sıralamasını elde etmek amacıyla, bir önceki adımda hesaplanan toplulaştırılmış göreceli önem dereceleri Q_i durulaştırılır. Bu işlem için Tanım 3.2’de verilen skor fonksiyonu kullanılır. Her bir alternatif için elde edilen skor değeri $S(Q_i)$ ile gösterilir. Skor fonksiyonu yardımıyla hesaplanan değerler karşılaştırılarak alternatiflerin tercih sıralaması belirlenir. Daha yüksek skor değerine sahip alternatifler daha üstün ve tercih edilebilir kabul edilir. Buna göre alternatifler büyüktan küçüğe doğru sıralanarak karar verme süreci tamamlanır.

4.2 Hava Kalitesi Değerlendirmesine Yönelik Bir Uygulama

Günümüzde hızla artan kentleşme ile birlikte hava kalitesi, halk sağlığı, çevresel sürdürülebilirlik ve kentsel yaşam kalitesinin en önemli göstergelerinden biri hâline gelmiştir. $PM_{2.5}$, PM_{10} , O_3 ve NO_2 gibi kirleticiler fiziksel özellikleri, emisyon kaynakları ve insan sağlığı üzerindeki etkileri bakımından farklılık göstermektedir. Bu nedenle tek bir kirleticinin ayrı olarak değerlendirilmesi, bir şehrin gerçek çevresel performansını ortaya koymak için yeterli değildir. Dört göstergenin birlikte ele alındığı çok boyutlu bir değerlendirme, kentsel hava kirliliği düzeylerinin daha doğru, kapsamlı ve karşılaştırılabilir biçimde incelenmesine olanak sağlamaktadır.

Bununla birlikte ölçüm ölçeklerindeki farklılıklar, bölgesel değişkenlikler ve çevresel izleme süreçlerinde ortaya çıkan belirsizlikler hava kalitesi değerlendirmesini karmaşık bir çok kriterli karar verme problemine dönüştürmektedir. Bu bağlamda, belirsizlik ve muğlaklığı çok boyutlu ve esnek bir şekilde temsil edebilen gelişmiş bulanık küme modelleri, gerçek yaşam çevresel verilerinin analizinde önemli araçlar hâline gelmiştir. Bu çalışmada söz konusu gereksinimlerden hareketle, kentsel kirlilik verilerinde bulunan belirsizlik ve karmaşıklığın daha etkin biçimde modellenmesi amacıyla gelişmiş bulanık modelleme teknikleri dört kriterli hava kalitesi değerlendirme çerçevesine entegre edilmiştir.

- **Adım 1:** Bu çalışmada farklı coğrafi bölgeleri temsil eden 16 büyük şehrin hava kalitesi performansları değerlendirilmiştir. Hava kalitesinin çok boyutlu

yapısını dikkate alabilmek amacıyla dört temel kirletici kriter olarak belirlenmiştir. Bunlar $PM_{2.5}$ (C_1), PM_{10} (C_2), O_3 (C_3) ve NO_2 (C_4)'tür.

$PM_{2.5}$ ve PM_{10} atmosferde bulunan ince partikül maddeleri temsil ederken, O_3 ve NO_2 hava kalitesini etkileyen önemli gaz kirleticiler arasında yer almaktadır. Bu kirleticilerin yüksek değerleri daha düşük hava kalitesine işaret ettiğinden, çalışmada kullanılan tüm kriterler maliyet kriteri olarak değerlendirilmiştir.

Analizde kullanılan veriler ulusal ve uluslararası çevresel izleme kuruluşlarının resmi kaynaklarından derlenmiş olup değerlendirmeler 2023 yılına ait ölçüm sonuçları kullanılarak gerçekleştirilmiştir (AirParif 2025, Beijing Municipal Ecology and Environment Bureau 2024, Instituto Nacional de Estadística 2025, IQAir 2023, IQAir 2025, İBB 2025, Jha vd. 2024, Korea Environment Corporation 2025, Mining Dialogue Australia 2025, Ministry of Environment 2023, New South Wales Govern. 2025, Statista 2025).

Çizelge 4.2 Karar matrisi

Şehirler	C_1	C_2	C_3	C_4
Delhi (Hindistan)	102.10	208.40	47.40	71.55
Pekin (Çin)	34.10	61.00	65.30	53.10
Tokyo (Japonya)	9.70	83.66	73.08	25.90
Seul (Güney Kore)	19.70	38.00	62.34	40.35
Cakarta (Endonezya)	43.80	70.83	55.30	29.70
Londra (Birleşik Krallık)	8.40	25.05	58.04	34.88
Paris (Fransa)	10.30	40.00	55.24	29.25
İstanbul (Türkiye)	19.00	38.00	34.62	22.45
Madrid (İspanya)	9.00	18.20	71.45	27.85
Los Angeles (ABD)	9.50	29.00	94.23	29.75
Mexico (Meksika)	22.30	38.85	61.45	33.00
São Paulo (Brezilya)	14.30	145.83	57.83	25.65
Kahire (Mısır)	42.40	64.25	44.58	51.78
Johannesburg (Güney Afrika)	18.70	61.80	50.50	28.30
Dubai (BAE)	43.60	100.00	56.95	39.45
Sidney (Avustralya)	4.30	18.00	49.75	15.10

- **Adım 2:** Çizelge 4.2’de sunulduğu üzere, karar matrisi alternatiflere ait gerçek hava kalitesi verilerinin seçilen dört kriter bakımından düzenlenmesiyle oluşturulmuştur. Karar matrisindeki her bir x_{ij} değeri, A_i alternatifinin C_j kriterine ilişkin gözlenen performansını temsil etmektedir.
- **Adım 3:** PM_{2.5}, PM₁₀, O₃ ve NO₂ kriterlerinin tamamı hava kalitesini olumsuz yönde etkileyen kirleticileri temsil ettiğinden maliyet kriteri olarak ele alınmıştır. Bu nedenle kriterler arasındaki ölçek farklılıklarını ortadan kaldırmak ve karşılaştırılabilirliği sağlamak amacıyla karar matrisi maliyet kriterleri için tanımlanan normalizasyon formülü kullanılarak dönüştürülmüştür.

Normalizasyon işlemi sonucunda elde edilen karar matrisi Çizelge 4.3’de verilmiştir.

Çizelge 4.3 Normalize edilmiş karar matrisi

Şehirler	C_1	C_2	C_3	C_4
Delhi (Hindistan)	0.042	0.086	0.730	0.211
Pekin (Çin)	0.126	0.295	0.530	0.284
Tokyo (Japonya)	0.443	0.215	0.474	0.583
Seul (Güney Kore)	0.218	0.474	0.555	0.374
Cakarta (Endonezya)	0.098	0.254	0.626	0.508
Londra (Birleşik Krallık)	0.512	0.719	0.596	0.433
Paris (Fransa)	0.417	0.450	0.627	0.516
İstanbul (Türkiye)	0.226	0.474	1.000	0.673
Madrid (İspanya)	0.478	0.989	0.485	0.542
Los Angeles (ABD)	0.453	0.621	0.367	0.508
Meksiko (Meksika)	0.193	0.463	0.563	0.458
São Paulo (Brezilya)	0.301	0.123	0.599	0.589
Kahire (Mısır)	0.101	0.280	0.777	0.292
Johannesburg (Güney Afrika)	0.230	0.291	0.686	0.534
Dubai (BAE)	0.099	0.180	0.608	0.383
Sidney (Avustralya)	1.000	1.000	0.696	1.000

C_1 : PM_{2.5}, C_2 : PM₁₀, C_3 : O₃, C_4 : NO₂

- **Adım 4:** Her bir kriter için normalize edilmiş değerlerin dağılım aralıkları dikkate alınarak ilgili r aralıkları hesaplanmıştır. Daha sonra Çizelge 4.4’de verilen dilsel terimler kullanılarak tüm şehirlerin her bir kriter altındaki değerlendirmeleri uygun dilsel ifadelerle temsil edilmiştir.

Böylece normalize edilmiş karar matrisi, CCq-ROFV tabanlı dilsel değerlendirmelerden oluşan karar matrisine dönüştürülmüştür.

Çizelge 4.4 Dilsel terimler kullanılarak oluşturulan karar matrisi

Şehirler	C_1	C_2	C_3	C_4
Delhi (Hindistan)	ÇZ	Z	İ	ÇZ
Pekin (Çin)	ÇZ	Z	Z	ÇZ
Tokyo (Japonya)	Y	ÇZ	Z	O
Seul (Güney Kore)	Z	Y	Y	Z
Cakarta (Endonezya)	ÇZ	Z	Y	Y
Londra (Birleşik Krallık)	O	İ	Y	Z
Paris (Fransa)	Y	Y	Y	Y
İstanbul (Türkiye)	Z	Y	Y	Z
Madrid (İspanya)	O	M	Z	Y
Los Angeles (ABD)	Y	İ	ÇZ	Y
Meksiko (Meksika)	Z	Y	Y	Y
São Paulo (Brezilya)	Z	ÇZ	Y	O
Kahire (Mısır)	ÇZ	Z	İ	ÇZ
Johannesburg (Güney Afrika)	Z	Z	O	Y
Dubai (BAE)	ÇZ	ÇZ	Y	Z
Sidney (Avustralya)	M	M	O	M

M: Mükemmel, Çİ: Çok İyi, İ: İyi, O: Orta, Y: Yeterli, Z: Zayıf, ÇZ: Çok Zayıf.

- **Adım 5:** Hava kalitesi göstergelerinin göreceli önem düzeyleri dikkate alınarak kriter ağırlıkları $\omega = (0.40, 0.30, 0.10, 0.20)$ olarak belirlenmiştir. Burada PM_{2.5} ve PM₁₀ kriterleri daha yüksek ağırlıklara sahip olup, O₃ ve NO₂ kriterleri nispeten daha düşük ağırlıklarla değerlendirilmiştir.

Daha sonra her bir şehir için CCq-ROFWA ve CCq-ROFWG operatörleri kul-

lanılarak sırasıyla ağırlıklı toplamsal ve ağırlıklı çarpımsal görelî önem dereceleri, yani $Q_i^{(1)}$ ve $Q_i^{(2)}$ değerleri hesaplanmıştır.

Elde edilen bu değerler, WASPAS yönteminin bütünleşik yapısı kapsamında

$$Q_i = \lambda Q_i^{(1)} \oplus (1 - \lambda) Q_i^{(2)}$$

ifadesi yardımıyla birleştirilmiştir. Çalışmada WSM ve WPM modellerine eşit önem verilmesi amacıyla $\lambda = 0.5$ seçilmiştir. Böylece her bir şehre ait toplanlaştırılmış görelî önem dereceleri elde edilmiştir.

Hesaplama sonuçları Çizelge 4.5’de sunulmuştur.

Çizelge 4.5 Alternatiflerin bulanık görelî önem dereceleri

Şehirler	μ^{Re}	μ^{Im}	ν^{Re}	ν^{Im}	r
Delhi (Hindistan)	0.9888	0.9866	0.8847	0.8903	0.1175
Pekin (Çin)	0.9872	0.9843	0.8977	0.8977	0.1320
Tokyo (Japonya)	0.9962	0.9943	0.8348	0.8497	0.2195
Seul (Güney Kore)	0.9956	0.9923	0.8477	0.8630	0.2352
Cakarta (Endonezya)	0.9925	0.9896	0.8681	0.8799	0.1712
Londra (Birleşik Krallık)	0.9993	0.9983	0.7662	0.7829	0.3618
Paris (Fransa)	0.9978	0.9960	0.8050	0.8419	0.3000
İstanbul (Türkiye)	0.9990	0.9973	0.7697	0.8027	0.3075
Madrid (İspanya)	0.9998	0.9993	0.6948	0.7364	0.4168
Los Angeles (ABD)	0.9988	0.9973	0.7774	0.8121	0.3133
Meksiko (Meksika)	0.9965	0.9938	0.8332	0.8559	0.2551
São Paulo (Brezilya)	0.9948	0.9922	0.8563	0.8601	0.1943
Kahire (Mısır)	0.9916	0.9884	0.8749	0.8804	0.1446
Johannesburg (Güney Afrika)	0.9956	0.9924	0.8507	0.8584	0.2325
Dubai (BAE)	0.9874	0.9852	0.8933	0.8974	0.1282
Sidney (Avustralya)	1.0000	1.0000	0.5321	0.6167	0.6619

- **Adım 6:** Elde edilen sonuçlara göre alternatifler skor değerleri esas alınarak sıralanmış ve nihai performans sıralaması Şekil 4.1’de sunulmuştur.

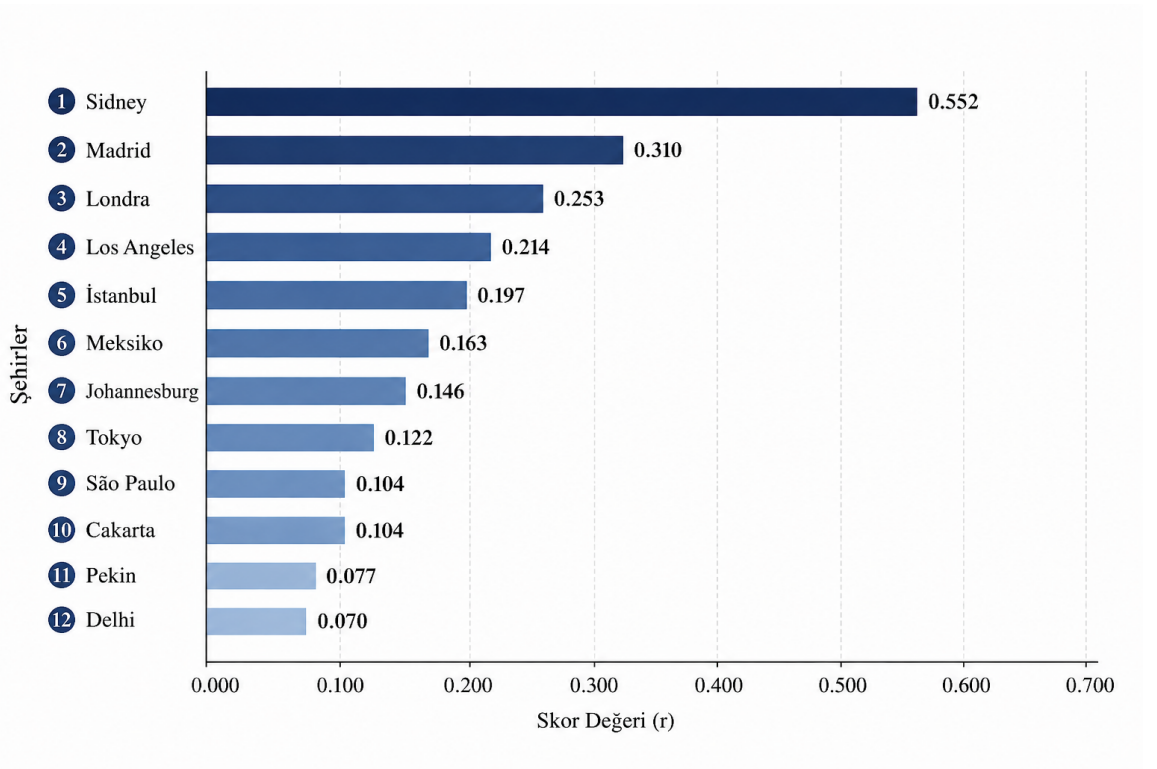
Sonuçlar, Sidney'in incelenen şehirler arasında en iyi hava kalitesi performansına sahip olduğunu göstermektedir. Sidney'i sırasıyla Madrid, Londra, Los Angeles ve İstanbul takip etmektedir. Buna karşılık Delhi en düşük performansı gösterirken, Delhi'yi sırasıyla Dubai, Pekin, Kahire ve Cakarta izlemektedir. Elde edilen sıralama sonuçları, önerilen CCq-ROFS tabanlı genelleştirilmiş WASPAS yönteminin hava kalitesi değerlendirme problemlerinde ayırt edici ve tutarlı sonuçlar üretebildiğini göstermektedir.

Sıralama ilişkisi aşağıdaki şekilde ifade edilebilir:

$$\text{Sidney} \succ \text{Madrid} \succ \text{Londra} \approx \text{Los Angeles} \approx \text{İstanbul}$$

ve

$$\text{Delhi} \prec \text{Dubai} \prec \text{Pekin} \prec \text{Kahire} \prec \text{Cakarta}.$$



Şekil 4.1 Genelleştirilmiş WASPAS analizine göre şehirlerin skorları

4.3 Önerilen Yaklaşımın Duyarlılık Analizi

Bu bölümde, genelleştirilmiş WASPAS yönteminde ağırlıklı toplam model (WSM) ile ağırlıklı çarpım modelinin (WPM) göreceli etkisini belirleyen λ parametresinin so-

nuçlar üzerindeki etkisi incelenmiştir. Bu amaçla λ parametresi $\mathcal{I}$ aralığında sırasıyla 0, 0.25, 0.50, 0.75 ve 1 değerleri için değerlendirilmiş ve her bir alternatifin elde ettiği skor değerleri hesaplanmıştır.

Duyarlılık analizinin temel amacı, önerilen CC q -ROFS tabanlı genelleştirilmiş WASPAS yönteminin farklı parametre değerleri altında kararlı sonuçlar üretip üretmediğini incelemektir. Elde edilen skor değerleri Çizelge 4.6’te sunulmuştur.

Çizelge 4.6 Farklı λ değerleri için duyarlılık analizi sonuçları

Şehirler	$\lambda = 0$	$\lambda = 0.25$	$\lambda = 0.50$	$\lambda = 0.75$	$\lambda = 1$
Sidney (Avustralya)	0.304	0.508	0.552	0.582	0.587
Madrid (İspanya)	0.098	0.280	0.310	0.331	0.320
Londra (Birleşik Krallık)	0.070	0.229	0.253	0.270	0.249
Los Angeles (ABD)	0.052	0.193	0.214	0.228	0.205
İstanbul (Türkiye)	0.048	0.191	0.212	0.227	0.205
Paris (Fransa)	0.045	0.179	0.197	0.210	0.180
Meksiko (Meksika)	0.031	0.148	0.163	0.174	0.142
Seul (Güney Kore)	0.026	0.134	0.148	0.158	0.126
Johannesburg (Güney Afrika)	0.025	0.132	0.146	0.156	0.125
Tokyo (Japonya)	0.025	0.127	0.141	0.150	0.124
São Paulo (Brezilya)	0.019	0.109	0.122	0.130	0.103
Cakarta (Endonezya)	0.015	0.094	0.104	0.111	0.084
Kahire (Mısır)	0.011	0.078	0.087	0.094	0.070
Pekin (Çin)	0.009	0.069	0.077	0.082	0.057
Dubai (BAE)	0.009	0.067	0.075	0.080	0.056
Delhi (Hindistan)	0.008	0.062	0.070	0.075	0.054

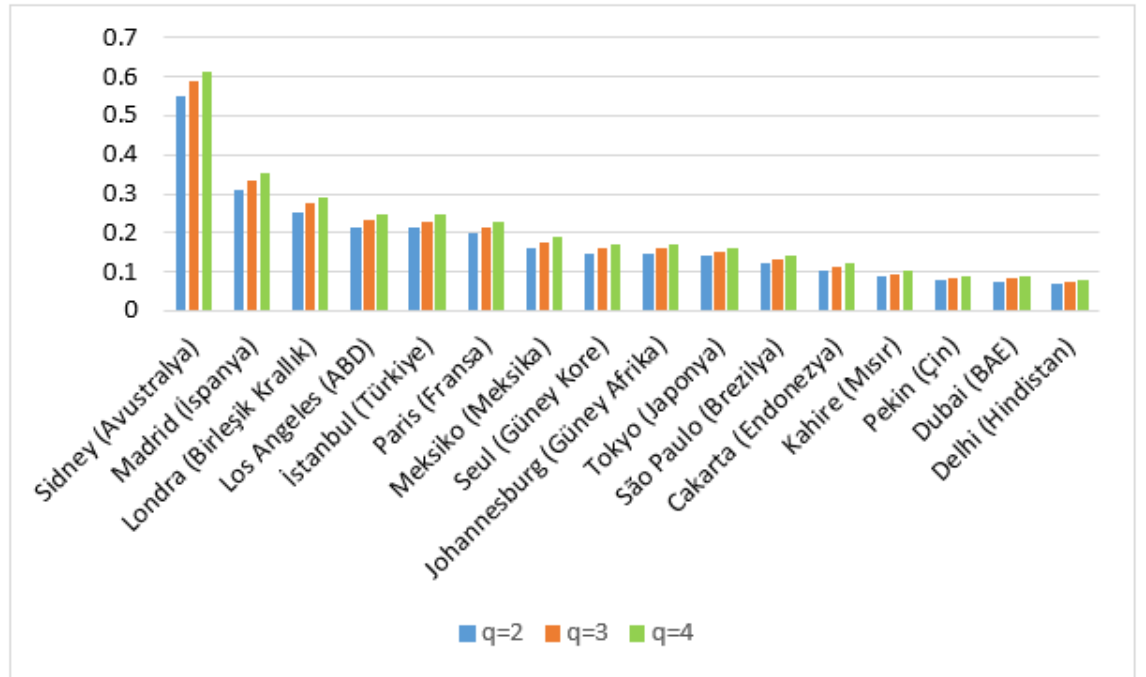
Bununla birlikte, küçük sıralama değişikliklerinin yalnızca orta düzey performansa sahip bazı şehirler arasında (örneğin Los Angeles ve İstanbul) ve belirli ara λ değerlerinde ortaya çıktığı görülmektedir. Ancak bu değişiklikler alternatiflerin genel performans yapısını etkileyecek düzeyde değildir. Bu durum, önerilen yöntemin özellikle yüksek ve düşük performans gösteren alternatifleri ayırt etmede güçlü bir ayırt edicilik yeteneğine sahip olduğunu göstermektedir.

Genel olarak değerlendirildiğinde, duyarlılık analizi sonuçları CC q -ROFS tabanlı

genelleştirilmiş WASPAS yaklaşımının farklı parametre değerleri altında kararlı ve tutarlı sonuçlar ürettiğini ortaya koymaktadır. Elde edilen bulgular, önerilen yöntemin güvenilir bir karar verme aracı olduğunu ve farklı parametre seçimleri altında alternatiflerin göreceli sıralamasını büyük ölçüde koruduğunu göstermektedir.

4.4 q Parametresine Göre Sağlamlık Analizi

q . mertebe parametresine karşı önerilen CC q -ROFS tabanlı genelleştirilmiş WASPAS yaklaşımının sağlamlığını değerlendirmek amacıyla analiz, toplama parametresi sabit olarak $\lambda = 0.5$ seçilerek $q = 2$, $q = 3$ ve $q = 4$ değerleri için tekrar edilmiştir. Elde edilen sonuçlar Şekil 4.2’de sunulmuştur.



Şekil 4.2 q parametresinin WASPAS sıralaması üzerindeki etkisi

Sonuçlar incelendiğinde şehirlerin sıralamasının tüm q değerleri için değişmeden kaldığı görülmektedir. Özellikle Sidney, Madrid ve Londra her durumda ilk üç sırada yer alırken; Delhi, Dubai ve Pekin en düşük performansa sahip alternatifler olarak sıralamanın son basamaklarında kalmıştır.

Alternatiflerin göreceli sıralamaları korunmasına rağmen, skor değerlerinde q parametresinin artmasına bağlı olarak sınırlı düzeyde artışlar gözlenmiştir. Bu durum

CC q -ROFS yapısının doğal bir sonucu olup, q değerinin büyümesi ait olma ve ait olmama derecelerinin tanımlanabildiği uzayı genişletmekte ve bulanık değerlendirmelerin daha belirgin hâle gelmesine olanak sağlamaktadır.

Bununla birlikte, skor değerlerinde meydana gelen bu değişimler nihai sıralama sonuçlarını etkilememiştir. Dolayısıyla elde edilen bulgular, önerilen CC q -ROFS tabanlı geliştirilmiş WASPAS yönteminin q parametresindeki değişimlere karşı kararlı sonuçlar ürettiğini ve yüksek düzeyde sağlamlık sergilediğini göstermektedir.

4.5 Karşılaştırmalı Analiz

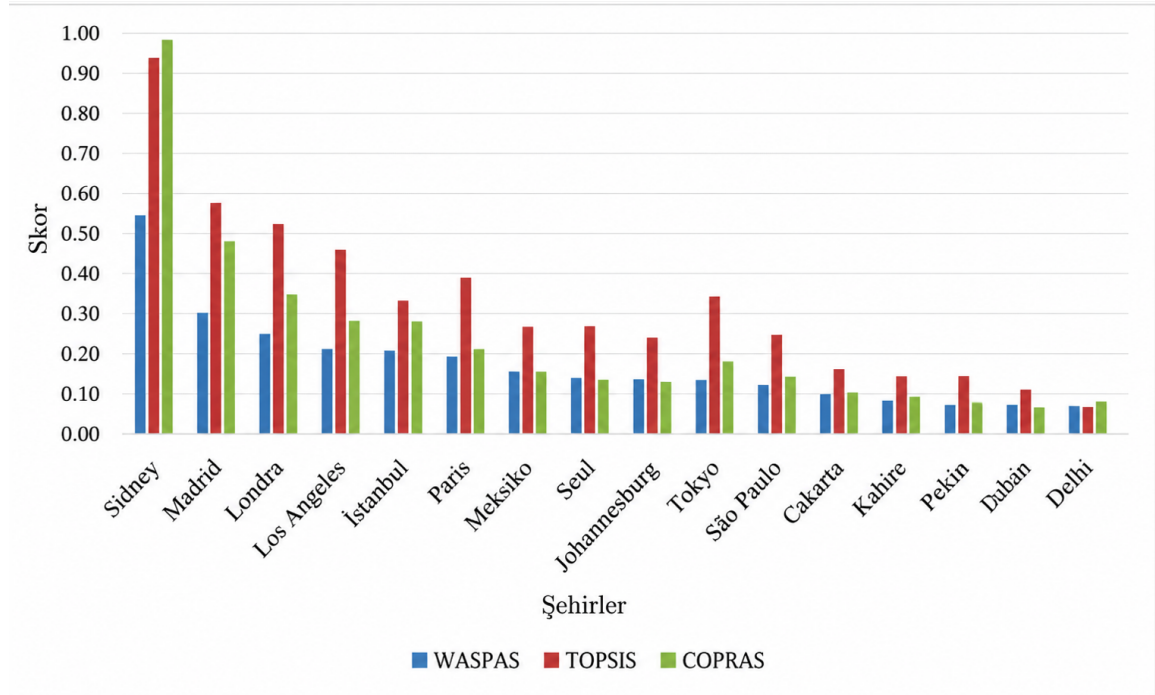
Önerilen CC q -ROFS tabanlı geliştirilmiş WASPAS yaklaşımının etkinliğini ve güvenilirliğini değerlendirmek amacıyla elde edilen sonuçlar, literatürde yaygın olarak kullanılan iki çok kriterli karar verme yöntemi olan İdeal Çözüme Benzerliğe Göre Tercih Sıralama Tekniği (TOPSIS) (Yoon ve Hwang 1981) ve Karmaşık Oransal Değerlendirme (COPRAS) (Zavadskas vd. 1994) yöntemleri ile karşılaştırılmıştır.

Karşılaştırmanın adil ve tutarlı bir şekilde gerçekleştirilebilmesi amacıyla her üç yöntemde de aynı karar matrisi, aynı kriter ağırlıkları ve aynı dilsel değerlendirmeler kullanılmıştır. Böylece yöntemler arasındaki farklılıkların yalnızca karar verme mekanizmalarından kaynaklanması sağlanmıştır. Elde edilen sıralama sonuçları Şekil 4.3'te sunulmuştur.

Elde edilen sonuçların ayrıntılı olarak incelenmesi, yöntemler arasında yüksek düzeyde bir tutarlılık bulunduğunu göstermektedir. Özellikle üst sıralarda yer alan alternatifler açısından sonuçlar büyük ölçüde benzerlik göstermektedir. Sidney, tüm yöntemlerde en yüksek skoru elde ederek birinci sıradaki konumunu korumuştur (WASPAS: 0.552, TOPSIS: 0.942, COPRAS: 1.000). Benzer şekilde Madrid ve Londra da tüm yöntemlerde sırasıyla ikinci ve üçüncü sırada yer almış, böylece bu şehirlerin güçlü ve istikrarlı çevresel performansları doğrulanmıştır.

Orta sıralarda yer alan alternatifler arasında bazı küçük farklılıklar gözlenmekle birlikte genel sıralama yapısının korunduğu görülmektedir. Örneğin Los Angeles, İstanbul ve Paris tüm yöntemlerde dördüncü ile altıncı sıralar arasında yer almış ve bu şehirlerin göreceli önem düzeylerinin farklı karar verme yöntemleri tarafından

benzer şekilde değerlendirildiği ortaya konulmuştur.



Şekil 4.3 Farklı yöntemlere göre şehirlerin skor değerleri

Sıralamanın alt basamaklarında ise yöntemler arasındaki tutarlılık daha belirgin hâle gelmektedir. Pekin, Dubai, Delhi ve Kahire tüm yöntemlerde en düşük performans gösteren şehirler arasında yer almıştır. TOPSIS ve COPRAS yöntemleri bu alternatiflere birbirine oldukça yakın skorlar atarken, önerilen WASPAS yaklaşımı da aynı görelî sıralama yapısını korumuştur.

Genel olarak değerlendirildiğinde, üç yöntemin sonuçları arasında güçlü bir ilişki bulunduğu görülmektedir. Bu durum, önerilen CCq -ROFS tabanlı genelleştirilmiş WASPAS yaklaşımının klasik çok kriterli karar verme yöntemleriyle uyumlu, kararlı ve güvenilir sonuçlar üretebildiğini göstermektedir. Ayrıca yöntemin belirsizlik ve bulanık bilgiyi modelleme kapasitesinin daha yüksek olması dikkate alındığında, elde edilen bu tutarlılık önerilen yaklaşımın karmaşık gerçek yaşam problemlerinde etkin bir şekilde kullanılabileceğini desteklemektedir.

5. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu çalışmada, CCq -ROFS'ler ile genelleştirilmiş WASPAS yöntemini bütünleştiren yeni bir çok kriterli karar verme yaklaşımı geliştirilmiş ve yöntem, dünyanın farklı bölgelerini temsil eden on altı büyük şehrin hava kalitesi performanslarının değerlendirilmesi problemine uygulanmıştır. Önerilen yaklaşım, q . mertebeden ortonormal bulanık yapı, dilsel değerlendirmeler ve toplamsal ile çarpımsal toplama mekanizmalarını aynı çatı altında birleştirerek belirsizliğin etkin bir şekilde modellenmesine olanak sağlamaktadır. Hava kalitesini temsil eden $PM_{2.5}$, PM_{10} , O_3 ve NO_2 kirlenici göstergeleri kullanılarak oluşturulan karar matrisi sayesinde şehirlerin çevresel performansları çok boyutlu bir bakış açısıyla değerlendirilmiştir.

Uygulama sonuçları, önerilen CCq -ROFS tabanlı genelleştirilmiş WASPAS yönteminin alternatifler arasında güçlü bir ayırt edicilik yeteneğine sahip olduğunu göstermiştir. Analizler sonucunda Sidney, Madrid ve Londra en yüksek performansa sahip şehirler olarak belirlenirken; Delhi, Dubai, Pekin ve Kahire en düşük performansı gösteren şehirler arasında yer almıştır. Elde edilen sıralamalar hem λ parametresi için gerçekleştirilen duyarlılık analizlerinde hem de farklı q değerleri altında yürütülen sağlamlık analizlerinde değişmeden korunmuştur. Bu durum, yöntemin toplamsal ve çarpımsal bileşenler arasındaki dengeye ve q parametresindeki değişimlere karşı kararlı sonuçlar üretebildiğini göstermektedir.

TOPSIS ve COPRAS yöntemleri ile gerçekleştirilen karşılaştırmalı analizler de önerilen yaklaşımın güvenilirliğini desteklemiştir. Yöntemler arasında küçük farklılıklar bulunmakla birlikte, genel sıralama yapısının büyük ölçüde korunduğu görülmüştür. Özellikle üst ve alt sıralarda yer alan alternatiflerin tüm yöntemlerde benzer şekilde değerlendirilmesi, önerilen yöntemin tutarlı sonuçlar üretebildiğini ortaya koymuştur.

Sonuç olarak, CCq -ROFS tabanlı genelleştirilmiş WASPAS yaklaşımı, çevresel değerlendirme problemlerinde belirsizlik ve bulanıklığın daha etkin biçimde temsil edilmesine imkân sağlamakta ve karar vericilere yorumlanabilir, kararlı ve güvenilir sonuçlar sunmaktadır. Elde edilen bulgular, önerilen yöntemin yalnızca hava kalitesi

değerlendirmelerinde değil, aynı zamanda sürdürülebilirlik çalışmaları, çevre yönetimi, enerji planlaması ve belirsizlik içeren diğer çok kriterli karar verme problemlerinde de etkin bir şekilde kullanılabileceğini göstermektedir. Gelecekte yapılacak çalışmalarda yöntemin farklı bulanık küme yapıları ve alternatif çok kriterli karar verme yöntemleri ile bütünleştirilmesi araştırılabilir.

KAYNAKLAR

- AirParif. 2025. Air Quality Monitoring Portal [Data set]. <https://www.airparif.fr/>.
- Ali, Z., Mahmood, T. 2020. Maclaurin Symmetric Mean Operators and Their Applications in the Environment of Complex q-Rung Orthopair Fuzzy Sets, Computational and Applied Mathematics, 39, 161.
- Alkouri, A. M. J. S., Salleh, A. R. 2012. Complex Intuitionistic Fuzzy Sets, AIP Conference Proceedings, 1482, 464–470.
- Atanassov, K. T. 1986. Intuitionistic Fuzzy Sets, Fuzzy Sets and Systems, 20(1), 87–96.
- Atanassov, K. T. 2020. Circular Intuitionistic Fuzzy Sets, Journal of Intelligent and Fuzzy Systems, 39(5), 5981–5986.
- Beijing Municipal Ecology and Environment Bureau and Beijing Municipal Environmental Monitoring Center. 2024. Beijing Air Quality Annual Report 2023 [Report]. Beijing Municipal People’s Government, Beijing.
- Beliakov, G., Pradera, A. and Calvo, T. 2007. Aggregation Functions: A Guide for Practitioners, Springer, Heidelberg.
- Beliakov, G., Bustince, H., Goswami, D. P., Mukherjee, U. K. and Pal, N. R. 2011. On averaging operators for Atanassov’s intuitionistic fuzzy sets, Information Sciences, 181, 1116–1124.
- Bobillo, F., Straccia, U. 2007. A Fuzzy Description Logic with Product t -Norm, Proceedings of the IEEE International Fuzzy Systems Conference, 1–6.
- Bozyigit, M. C., Olgun, M., Ünver, M. 2023. Circular Pythagorean Fuzzy Sets and Applications to Multi-Criteria Decision Making, Informatica, 34(4), 713–742.
- Bozyigit, M.C., Olgun, M., Ünver, M. ve Söylemez, D. 2024. Parametric Picture Fuzzy Cross-Entropy Measures Based on d-Choquet Integral for Building Material Recognition, Applied Soft Computing, 166, 112167.
- Chakraborty, S. ve Zavadskas, E. K. 2014. Applications of the WASPAS Method in Manufacturing Decision-Making, Informatica, 25(1), 1–20.
- Coppi, R., Gil, M. A. and Kiers, H. A. 2006. The fuzzy approach to statistical analysis, Computational Statistics & Data Analysis, 51(1), 1–14.
- Dimuro, G. P., Lucca, G., Sanz, J. A., Bustince, H., Bedregal, B. 2017. CMin-Integral: A Choquet-Like Aggregation Function Based on the Minimum t -Norm, Proceedings of the 9th International Summer School on Aggregation Operators (AGOP 2017), Lecture Notes in Computer Science, 83–95.
- Dombi, J. 1982. A General Class of Fuzzy Operators, the DeMorgan Class of Fuzzy Operators and Fuzziness Measures Induced by Fuzzy Operators, Fuzzy Sets and Systems, 8, 149–163.

- Dubois, D., Prade, H. 2003. Fuzzy set and possibility theory-based methods in artificial intelligence, *Artificial Intelligence*, 148(1-2), 1-9.
- Fei, L., Wang, H., Chen, L. ve Deng, Y. 2019. A New Vector Valued Similarity Measure for Intuitionistic Fuzzy Sets Based on OWA Operators *Iranian Journal of Fuzzy Systems*, 16, 113–126.
- Garg, H. 2017. Generalized Pythagorean Fuzzy Geometric Aggregation Operators Using Einstein t -Norm and t -Conorm for Multicriteria Decision-Making Process, *International Journal of Intelligent Systems*, 32, 597–630.
- Garg, H., Ali, Z., Emam, W. 2025. A Decision-Making Algorithm with Circular Complex Intuitionistic Fuzzy Information and Their Application in Cognitive Wireless Communications, *Alexandria Engineering Journal*, 115, 501–519.
- Ghorabae, M. K., Zavadskas, E. K., Amiri, M. ve Esmaili, A. 2016. Multi-Criteria Evaluation of Green Suppliers Using an Extended WASPAS Method with Interval Type-2 Fuzzy Sets, *Journal of Cleaner Production*, 137, 213–229.
- Grabisch, M., Marichal, J.-L., Mesiar, R. and Pap, E. 2009. *Aggregation Functions*, Cambridge University Press, Cambridge.
- Hamacher, H. 1975. Über Logische Verknüpfungen Unscharfer Aussagen und Deren Zugehörige Bewertungsfunktionen, *Progress in Cybernetics and Systems Research*, 3, 276–288.
- Hussain, A., Majeed, S., Shoaib, M., Ali, H., Ullah, K. 2024. WASPAS Method for Healthcare Systems based on Intuitionistic Fuzzy Information, *Conference: 2nd Workshop on Advancements in Mathematics and its Applications (WAMA)*.
- Hüllermeier, E. 2011. Fuzzy sets in machine learning and data mining, *Applied Soft Computing*, 11(2), 1493–1505.
- Instituto Nacional de Estadística. 2025. Official Statistics Portal [Data set]. <https://www.ine.es/en/>.
- İstanbul Büyükşehir Belediyesi. 2025. Hava Kalitesi İzleme Portalı [Data set]. <https://havakalitesi.ibb.gov.tr/>.
- IQAir. 2025. Air Quality Information Platform [Data set]. <https://www.iqair.com/>.
- IQAir. 2023. IQAir Publishes 2023 World Air Quality Report [Press release]. <https://www.iqair.com/newsroom/waqr-2023-pr>.
- Jha, M.K., Markandey, D.K., Gupta, R. ve Mishra, P. 2024. Temporal Analysis of NO₂ in the Atmosphere of Delhi and Its Effect on Ambient Air Quality. *Journal of Environmental Pollution Control*, 7, 105.
- Klement, E. P., Mesiar, R., Pap, E. 2002. *Triangular Norms*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.

- Klement, E. P., Mesiar, R., Pap, E. 2004. Triangular Norms. Position Paper I: Basic Analytical and Algebraic Properties, *Fuzzy Sets and Systems*, 143, 5–26.
- Klement, E. P., Mesiar, R., Pap, E. 2004. Triangular Norms. Position Paper III: Continuous t -Norms, *Fuzzy Sets and Systems*, 145, 439–454.
- Klement, E. P., Mesiar, R. 2005. Logical, Algebraic, Analytic and Probabilistic Aspects of Triangular Norms, Elsevier, Amsterdam.
- Klir, G. J., Yuan, B. 1995. Fuzzy Sets and Fuzzy Logic: Theory and Applications, Prentice Hall, New Jersey.
- Korea Environment Corporation. 2025. AirKorea Air Quality Information [Data set]. <https://www.airkorea.or.kr/>.
- Liu, P., Mahmood, T., Ali, Z. 2019. Complex q-Rung Orthopair Fuzzy Aggregation Operators and Their Applications in Multi-Attribute Group Decision Making, *Information*, 11(5), 1–26.
- Mining Dialogue Australia. 2025. Environmental Information Portal [Data set]. <https://miningdialogue.com.au/>.
- Ministry of Environment, Forest and Climate Change. 2023. Clean Air Survey [Report]. Government of India. <https://pib.gov.in/PressReleasePage.aspx?PRID=1955402>.
- New South Wales Government, Environment and Heritage Group. 2025. Environment and Pollution Resources [Data set]. <https://www.environment.nsw.gov.au/>.
- Otto, M. 1990. Fuzzy sets-applications to analytical chemistry, *Analytical Chemistry*, 62(14), 797A-802A.
- Ragin, C. C. 2000. Fuzzy-set social science, University of Chicago Press.
- Ramot, D., Milo, R., Friedman, M., Kandel, A. 2002. Complex Fuzzy Sets, *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 10(2), 171–186.
- Schweizer, B., Sklar, A. 1983. Probabilistic Metric Spaces, North-Holland, New York.
- Senapati, T., Yager, R. R. 2020. Fermatean Fuzzy Sets, *Journal of Ambient Intelligence and Humanized Computing*, 11(2), 663–674.
- Statista. 2025. Statistics and Market Data Platform [Data set]. <https://www.statista.com/>.
- Szmidt, E., Kacprzyk, J. 2001. Intuitionistic fuzzy sets in some medical applications, In *Computational Intelligence. Theory and Applications: International Conference, 7th Fuzzy Days Dortmund, Germany, October 1–3, 2001 Proceedings 7* (pp. 148-151), Springer Berlin Heidelberg.

- Ullah, K., Mahmood, T., Ali, Z., Jan, N. 2020. On Some Distance Measures of Complex Pythagorean Fuzzy Sets and Their Applications in Pattern Recognition, *Complex Intelligent Systems*, 6(1), 15–27.
- Ünver, M. ve Olgun, M. 2023. Q-Rung Orthopair Picture Fuzzy Topological Spaces and Parameter-Dependent Continuity: Control System Applications, *Mathematical Problems in Engineering*, 2023, 1–16.
- Ünver, M. 2025. Gaussian Aggregation Operators and Applications to Intuitionistic Fuzzy Classification, *Journal of Classification*, 1–28.
- Wang, W. ve Liu, X. 2012. Intuitionistic fuzzy information aggregation using Einstein operations, *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 20(5), 923–938
- Yager, R. R. 2013. Pythagorean Fuzzy Subsets, *Proceedings of the Joint IFSA World Congress and NAFIPS Annual Meeting*, Edmonton, Canada, 57–61.
- Yager, R. R. 2014. Pythagorean Membership Grades in Multicriteria Decision Making, *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 22(4), 958–965.
- Yager, R. R. 2016. Generalized Orthopair Fuzzy Sets, *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 25, 1222–1230.
- Yoon, K. ve Hwang, C. L. 1981. *Multiple Attribute Decision Making: Methods and Applications, A State-of-the-Art Survey*, Springer-Verlag, Berlin.
- Yusoff, B., Kilicman, A., Pratama, D., Hasni, R. 2023. Circular q-Rung Orthopair Fuzzy Set and Its Algebraic Properties, *Malaysian Journal of Mathematical Sciences*, 17, 363–378.
- Zadeh, L. A. 1965. Fuzzy Sets, *Information and Control*, 8(3), 338–353.
- Zavadskas, E. K., Kaklauskas, A. ve Šarka, V. 1994. The New Method of Multicriteria Complex Proportional Assessment of Projects, *Technological and Economic Development of Economy*, 1(3), 131–139.
- Zavadskas, E. K., Turskis, Z., Antucheviciene, J. ve Zakarevicius, A. 2012. Optimization of Weighted Aggregated Sum Product Assessment, *Elektronika ir Elektrotechnika*, 122(6), 3–6.
- Zimmermann, H. J. 1985. Applications of fuzzy set theory to mathematical programming, *Information Sciences*, 36(1-2), 29–58.