

ANKARA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

A-İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK VE ÇARPAN UZAYLARI

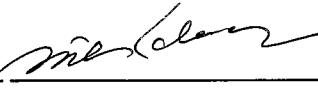
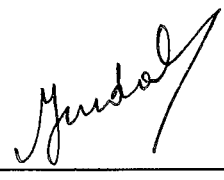
76607

Kâmil DEMİRCİ

DOKTORA TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

76607

Bu tez 14/9/1998 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Oybirliği / ~~Oyçokluğu~~ ile kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Cihan ORHAN Prof. Dr. Öner ÇAKAR Doç. Dr. Murat YURDAKUL

(Danışman)

**A-İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK
VE
ÇARPAN UZAYLARI**

Kâmil DEMİRCİ

**DOKTORA TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI**

1998



ÖZET**DOKTORA TEZİ****A-İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK VE ÇARPAN UZAYLARI****Kâmil DEMİRCİ**

Ankara Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Cihan ORHAN
1998, Sayfa: 65

Jüri: Prof. Dr. Cihan ORHAN
Prof. Dr. Öner ÇAKAR
Doç. Dr. Murat YURDAKUL

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde, tezin çalışma kapsamı anlatılacaktır.

İkinci bölümde, yoğunluk, istatistiksel yakınsaklık, istatistiksel üst limit ve alt limit ve istatistiksel çekirdek kavramları hatırlatılmıştır.

Tezimizdeki orijinal sonuçlar, Bölüm 3,4 ve 5 de verilmiştir.

Üçüncü bölümde, A-yoğunluk ve A-istatistiksel yakınsaklık tanıtılıp, A-istatistiksel üst limit ve alt limit ve A-istatistiksel çekirdek kavramları verilmiştir. Ayrıca çekirdeklerin içerilmesine ilişkin bazı teoremler ispatlanmıştır.

Dördüncü bölümde, satırları spread koşulunu gerçekleyen, negatif olmayan regüler bir A matrisi için A-istatistiksel yakınsak diziler uzayının lokal konveks bir FK-topolojisi ile donatılamayacağı gösterilmiştir. Aslında bu sonuç Kline tarafından Doktora tezinde verilmiştir. Fakat burada daha kısa ve alternatif bir ispat verilmiştir. Ayrıca sınırlı A-istatistiksel yakınsak diziler uzayının sınırlı çarpan uzayını oluşturup, “ β IN programı” kullanılarak, Fridy ve Miller’e ait bir sonucun benzeri sınırlı çarpanlar için elde edilmiştir.

Beşinci bölümde, kuvvetli A-toplanabilme tanımı, bir Orlicz fonksiyonuna göre kuvvetli A-toplanabilme tanımına genişletilip, ℓ_∞ uzayındaki ideal kavramı yardımıyla, A-istatistiksel yakınsaklık, kuvvetli A-toplanabilme ve Δ_2 -şartını gerçekleyen bir Orlicz fonksiyonuna göre kuvvetli A-toplanabilmenin sınırlı diziler üzerinde denk olduğu gösterilmiştir.

ANAHTAR KELİMELEER: Regüler matris, yoğunluk, istatistiksel yakınsaklık, istatistiksel üst limit ve alt limit, istatistiksel çekirdek, A-yoğunluk, A-istatistiksel yakınsaklık, FK topolojisi, sayma (counting) fonksiyonu, “ β IN programı”, çarpan uzayı, kuvvetli A-toplanabilme, bir Orlicz fonksiyonuna göre kuvvetli A-toplanabilme.

ABSTRACT**Ph.D. Thesis****A-STATISTICAL CONVERGENCE AND MULTIPLIER SPACES****Kâmil DEMİRCİ**

**Ankara University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics**

**Supervisor: Prof. Dr. Cihan ORHAN
1998, Page: 65**

**Jury: Prof. Dr. Cihan ORHAN
Prof. Dr. Öner ÇAKAR
Assoc. Prof. Dr. Murat YURDAKUL**

This thesis consists of five chapters.

The first chapter is devoted to the introduction.

In the second chapter, density, statistical convergence, statistical limit superior and limit inferior and statistical core have been recalled.

The original results in our thesis have been collected in Chapters 3,4 and 5.

In the third chapter, using the concept of A-density and A-statistical convergence, the notion of A-statistical limit superior and limit inferior and A-statistical core have been introduced. Furthermore, some theorems regarding the core inclusions have been proved.

In the fourth chapter, it is shown that the set of all A-statistically convergent sequences cannot be given a locally convex FK topology where A is a nonnegative regular matrix whose rows spread. Actually this result has been given by Kline in her Ph.D. Thesis. But here, a short and alternate proof of it has been provided. Moreover, the bounded multiplier space of bounded A-statistically convergent sequences are studied; and using “ β IN program”, an analogue of a result of Fridy and Miller for bounded multipliers is given.

In the last chapter, the definition of strong A-summability has been extended to a definition of strong A-summability with respect to an Orlicz function, via the ideal in ℓ_∞ , it is shown that strong A-summability with respect to an Orlicz function which satisfies Δ_2 -condition and strong A-summability and A-statistical convergence are equivalent on bounded sequences.

KEY WORDS : Regular matrix, density, statistical convergence, statistical limit superior and limit inferior, statistical core, A-density, A- statistical convergence, FK topology, counting function, “ β IN program”, multiplier space, strong A-summability, strong A-summability with respect to an Orlicz funtion.

TEŞEKKÜR

Bu çalışmayı bana vererek çalışmalarımın her safhasında yakın ilgi ve yardımlarını esirgemeyen değerli hocam Sayın Prof. Dr. Cihan ORHAN'a teşekkür ve şükranlarımı sunmayı bir borç bilirim.



İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET	i
ABSTRACT	ii
TEŞEKKÜR	iii
SİMGELER	v
1. GİRİŞ	1
2. İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK	3
2.1. İstatistiksel Yakınsaklık	3
2.2. İstatistiksel Üst Limit ve Alt Limit	9
2.3. İstatistiksel Çekirdek	15
3. A-İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK	20
3.1. A-İstatistiksel Yakınsaklık	20
3.2. A-İstatistiksel Yakınsaklık İçin Bir Kriter	23
3.3. A-İstatistiksel Üst Limit ve Alt Limit	30
3.4. A-İstatistiksel Çekirdek	39
4. SINIRLI A-İSTATİSTİKSEL YAKINSAK DİZİLERİN SINIRLI ÇARPAN UZAYLARI	45
4.1. A-İstatistiksel Yakınsak Dizilerin Topolojik Özellikleri	45
4.2. Sınırlı A-İstatistiksel Yakınsak Dizilerin Sınırlı Çarpan Uzayı	50
5. A-İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK VE BİR ORLICZ FONKSİYONUNA GÖRE KUVVETLİ A-TOPLNABİLME	54
5.1. A-İstatistiksel Yakınsaklık ve Bir Orlicz Fonksiyonuna Göre Kuvvetli A-Toplanabilme	54
KAYNAKLAR	60
EKLER	64
ÖZGEÇMİŞ	65

SİMGELER

$Ax = ((Ax)_n)$	$:= \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} x_k \right)$ dönüşüm dizisi
$\mathbb{C}$	: kompleks sayılar cümlesi
ℓ_{∞}	: sınırlı diziler uzayı
c	: yakınsak diziler uzayı
c_0	: sıfıra yakınsak diziler uzayı
c_A	$:= \{x = (x_k) : Ax \in c\}$
$c_A(b)$	$:= \{x = (x_k) \in \ell_{\infty} : Ax \in c\} = c_A \cap \ell_{\infty}$
C_1	: Cesáro operatörü
e	: tüm terimleri 1 olan dizi
$K - \text{çek}\{x\}$	: x dizisinin Knopp çekirdeği
$M(E, F)$	$:= \{m \in \ell_{\infty} : \forall x \in E \text{ için } m.x \in F\}$; burada E ve F dizi uzayları
s	: istatistiksel yakınsak diziler uzayı
s_0	: sıfıra istatistiksel yakınsak diziler uzayı
s_b	: sınırlı istatistiksel yakınsak diziler uzayı
$st - \text{çek}\{x\}$	: x dizisinin istatistiksel çekirdeği
st_A	: A -istatistiksel yakınsak diziler uzayı
st_A°	: sıfıra A -istatistiksel yakınsak diziler uzayı

$(st_A)_b$	: sınırlı A-istatistiksel yakınsak diziler uzayı
$st_A - çek\{x\}$	: x dizisinin A-istatistiksel çekirdeği
s_0	: lacunary istatistiksel yakınsak diziler uzayı
s_0^o	: sıfıra lacunary istatistiksel yakınsak diziler uzayı
s_0^b	: sınırlı lacunary istatistiksel yakınsak diziler uzayı
$o(1)$	: sıfıra yakınsak ifade
$\mathbb{R}$	: reel sayılar cümlesi
$\mathbb{W}$	: reel ya da kompleks terimli tüm diziler uzayı
$W(A)$	: kuvvetli A-toplanabilir diziler uzayı
$W_0(A)$	: sıfıra kuvvetli A-toplanabilir diziler uzayı
$W(A,F)$	: bir Orlicz fonksiyonuna göre kuvvetli A-toplanabilir diziler uzayı
$W_0(A,F)$	: bir Orlicz fonksiyonuna göre sıfıra kuvvetli A-toplanabilir diziler uzayı
$W_b(T)$	: T matrisinin sınırlı kuvvetli yakınsaklık alanı
$\beta\mathbb{N}$	: $\mathbb{N}$ doğal sayılar cümlesinin Stone-Čech kompaktifikasyonu
Λ_x	: x dizisinin istatistiksel limit noktalarının cümlesi
Γ_x	: x dizisinin istatistiksel değme noktalarının cümlesi
Λ_x^A	: x dizisinin A-istatistiksel limit noktalarının cümlesi
Γ_x^A	: x dizisinin A-istatistiksel değme noktalarının cümlesi

$c_n(x)$: sayma (counting) fonksiyonu

$\sigma(E, r)$: $= \{x: x \in E, c_n(x) \leq r_n ; n = 1, 2, \dots\}$, burada $E \subset w$ ve $r = (r_n)$ pozitif tam sayıların azalmayan sınırsız bir dizisidir.

$\Sigma(E, r)$: $\sigma(E, r)$ nin lineer gereni

χ_K : K cümlesinin karakteristik fonksiyonu

$\delta(K)$: K cümlesinin yoğunluğu

$\delta_A(K)$: K cümlesinin A-yoğunluğu



BÖLÜM 1

GİRİŞ

İstatistiksel yakınsaklık ilk defa Polonya' da Wrocław Üniversitesinde bir konferans da Steinhaus (1949) tarafından verilmiştir. Daha sonra Fast (1951) tarafından çalışılmıştır. İstatistiksel yakınsaklık kavramı, toplanabilme teorisinde ve fonksiyonel analizde önemli bir yer tutmaktadır. İstatistiksel yakınsaklığın toplanabilme teorisi ile ilişkisi Schoenberg (1959) tarafından verildi. Yine aynı özelliklerin incelenmesine Šalát (1980), Fridy (1985), Fridy ve Miller (1991) ve Fridy ve Orhan (1993) tarafından devam edildi. Ayrıca istatistiksel yakınsak diziler uzayının bazı topolojik özelliklerinin incelenmesi ilk defa Šalát (1980) tarafından, daha sonra ise Kent State Üniversitesinde yapılan bir doktora çalışmasında Connor (1985), yine Ohio Üniversitesinde yapılan bir doktora çalışmasında Kline (1995) tarafından ele alındı.

Connor (1988, 1989) yaptığı iki çalışma ile istatistiksel yakınsaklığın fonksiyonel analiz açısından ne kadar önemli olduğunu ortaya koydu.

Aslında istatistiksel yakınsaklık ölçü teorisi ve sayılar teorisi ile ilgili olduğu gibi istatistik ile de çok yakından ilgilidir. Bu ilişki Freedman ve Sember (1981), Erdös ve Tenenbaum (1989) ve Connor (1990) tarafından yapılmıştır. Ayrıca istatistiksel yakınsaklık trigonometrik serilerde Zygmund (1979), kuvvetli integral toplanabilmede Connor ve Swardson (1993) tarafından çalışılmıştır.

Son yıllarda yapılan bu yoğun çalışmalar, istatistiksel yakınsaklığın ne kadar önemli olduğunu ortaya açık bir biçimde koymaktadır.

Hazırlanan bu doktora çalışmasında istatistiksel yakınsaklığın toplanabilme teorisi ve fonksiyonel analiz ile ilişkilerinin ortaya konulması amaçlanmaktadır. Bu nedenle bu doktora tezinde öncelikle yoğunluk, istatistiksel yakınsaklık, istatistiksel üst limit ve alt limit (Fridy ve Orhan 1997), istatistiksel çekirdek (Fridy ve Orhan 1997) kavramları tanıtılarak bu kavramların A-istatistiksel benzerlerinin verilmesi amaçlanmaktadır.

Ayrıca A-istatistiksel yakınsak diziler uzayının lokal konveks bir FK topolojisi ile donatılamayacağını gösterilmesi ve sınırlı A-istatistiksel yakınsak diziler uzayının

sınırlı çarpan uzayını oluşturup “ β IN programı” kullanılarak, Fridy ve Miller’ e ait bir sonucun benzeri sınırlı çarpanlar için verilmesi amaçlanmaktadır.

Son olarak kuvvetli A-toplanabilme tanımı, bir Orlicz fonksiyonuna göre kuvvetli A-toplanabilme tanımına genişletip, ℓ_∞ uzayındaki ideal kavramı yardımıyla A-istatistiksel yakınsaklık, kuvvetli A-toplanabilme ve Δ_2 -şartını gerçekleyen bir Orlicz fonksiyonuna göre kuvvetli A-toplanabilmenin sınırlı diziler uzayı üzerinde denk olduğunun gösterilmesi amaçlanmaktadır.



BÖLÜM 2

İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK

Bu bölümde yoğunluk, istatistiksel yakınsaklık, istatistiksel üst limit ve alt limit ve istatistiksel çekirdek kavramları tanıtılacaktır.

2.1. İstatistiksel Yakınsaklık

$\mathbb{N}$ doğal sayılar cümlesinin bir K alt cümlesinin kardinal sayısı $|K|$ ile gösterilsin, yani $|K| := \text{card } K$ olsun.

Tanım 2.1.1: K , $\mathbb{N}$ nin bir alt cümlesi ve $K_n := \{k \leq n : k \in K\}$ olsun. Eğer

$$\delta(K) := \lim_n \frac{|K_n|}{n} \quad (2.1)$$

limiti mevcut ise $\delta(K)$ sayısına K cümlesinin yoğunluğu denir (Niven ve Zuckerman 1980, sh. 247).

$\delta(K)$ veya $\delta(\mathbb{N} \setminus K)$ yoğunluklarından herhangi biri mevcut ise $\delta(K) = 1 - \delta(\mathbb{N} \setminus K)$ dır.

Eğer K cümlesi sonlu elemanlı bir cümle ise $\delta(K) = 0$ olduğu açıktır.

(a_k) pozitif tamsayıların bir dizisi ve $K = \{a_k : k \in \mathbb{N}\}$ olmak üzere $\delta(K)$ mevcut ise

$$\delta(K) = \lim_n \frac{n}{a_n}$$

dir (Niven ve Zuckerman 1980, sh. 247). Örneğin,

$$K_1 = \{k^2 : k \in \mathbb{N}\} \text{ cümlesi için } \delta(K_1) = 0$$

ve

$$K_2 = \{(2k+1) : k \in \mathbb{N}\} \text{ cümlesi için } \delta(K_2) = \frac{1}{2}$$

dir. Şüphesiz $\delta(\mathbb{N}) = 1$ dir.

K cümlesinin karakteristik fonksiyonu χ_K ve C_1

$$c_{nk} = \begin{cases} \frac{1}{n} & , \quad k \leq n \\ 0 & , \quad k > n \end{cases}$$

ile tanımlı Cesáro matrisi olmak üzere

$$(C_1 \chi_K)_n = \frac{|K_n|}{n}$$

olduğundan, (2.1) limiti

$$\lim_n (C_1 \chi_K)_n$$

ile verilebilir.

Bundan sonra $\delta(E) = 1$ olmak üzere her $k \in E$ için bir $\mathcal{P}(k)$ özelliği gerçekleşiyor ise hemen her k için $\mathcal{P}(k)$ özelliği gerçekleşiyor diyeceğiz ve bunu “h.h.k” ile kısıltacağız.

Tanım 2.1.2: Her $\varepsilon > 0$ için $K := K(\varepsilon) := \{k \in \mathbb{N} : |x_k - L| \geq \varepsilon\}$ cümlesinin yoğunluğu sıfır ise $x = (x_k)$ dizisi L sayısına istatistiksel yakınsaktır denir. Bu durumda $st - \lim x = L$ yazılacaktır (Steinhaus 1951, Fast 1951, Fridy 1985).

Teorem 2.1.3: $st - \lim x = L$ olması için gerek ve yeter şart $\delta(E) = 0$ olacak biçimde $\mathbb{N}$ nin bir E alt cümlesi vardır ve $\mathbb{N} \setminus E = \{n_k : k \in \mathbb{N}\}$ olmak üzere $x_{n_k} \rightarrow L$, (alışılmış anlamda), $(k \rightarrow \infty)$ olmasıdır (Fridy 1985, Miller 1995).

Bundan böyle,

s : istatistiksel yakınsak diziler uzayı

s_0 : sıfıra istatistiksel yakınsak diziler uzayı

s_b : sınırlı istatistiksel yakınsak diziler uzayı

olarak alınacaktır.

Şimdi bazı örnekler verelim.

Örnek 2.1.4:

$$x_k = \begin{cases} 1 & , \quad k = m^2, (m = 1, 2, \dots) \\ 0 & , \quad k \neq m^2 \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan $x = (x_k)$ dizisini gözönüne alalım. Her $\varepsilon > 0$ için

$$\left| \left\{ k \leq n : |x_k| \geq \varepsilon \right\} \right| \leq \left| \left\{ k \leq n : x_k \neq 0 \right\} \right| \leq \sqrt{n}$$

olduğundan

$$\lim_n \frac{1}{n} \left| \left\{ k \leq n : x_k \neq 0 \right\} \right| \leq \lim_n \frac{\sqrt{n}}{n} = 0$$

elde edilir. Demek ki $\left\{ k \in \mathbb{N} : |x_k - 0| \geq \varepsilon \right\}$ cümlesinin elemanları hariç diğer bütün k lar için $|x_k - 0| < \varepsilon$, (her $\varepsilon > 0$) olduğundan $\text{st} - \lim x = 0$ dir.

Örnek 2.1.5:

$$x_k = \begin{cases} \sqrt{k} & , \quad k = m^2, (m = 1, 2, \dots) \\ 1 & , \quad k \neq m^2 \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan $x = (x_k)$ dizisi için $\text{st} - \lim x = 1$ dir.

Burada istatistiksel yakınsaklık ile Cauchy anlamında yakınsaklık arasında nasıl bir ilişki olabileceği sorusu akla gelebilir. Hemen belirtelim ki bilinen anlamda yakınsak olan her dizi istatistiksel yakınsaktır. Fakat Örnek 2.1.4 ve 2.1.5 den görülebileceği gibi sınırlı ıraksak ya da sınırsız ıraksak bazı dizilerde istatistiksel yakınsak olabilmektedir.

İstatistiksel yakınsaklık ile klasik toplanabilme metodları arasındaki ilişki Fridy (1985) tarafından incelenmiştir. Bu ilişkiyi vermeden önce toplanabilme hakkında biraz bilgi vereceğiz.

X ve Y , tüm diziler uzayı olan w nin iki alt cümlesi ve $A = (a_{nk})$ reel ya da kompleks terimli bir sonsuz matris olmak üzere $x = (x_k) \in X$ ve her $n \geq 1$ için

$$(Ax)_n := \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} x_k$$

serisi yakınsak ise $Ax := ((Ax)_n)$ dönüşüm dizisi mevcuttur denir. Eğer her $x \in X$ için Ax dönüşüm dizisi mevcut ve $Ax \in Y$ ise A matrisi X den Y içine bir matris dönüşümü tanımlar denir. Eğer bir x dizisi için Ax dönüşüm dizisi mevcut ve bir L değerine yakınsak ise x dizisi A -toplanabilirdir denir ve $A - \lim x = L$ yazılır. X dizi uzayını Y içine dönüştüren bütün matrislerin sınıfı (X, Y) ile gösterilir ve eğer A , X den Y içine bir matris dönüşümü ise $A \in (X, Y)$ yazılır. Toplamı ya da limiti koruyan matrislerin sınıfı $(X, Y; p)$ ile gösterilir. Özel olarak $X = Y = c$, (yakınsak dizilerin uzayı olmak üzere) $A \in (c, c)$ ise A matrisine konservatif matris ve $A \in (c, c; p)$ ise bu durumda A matrisine regüler matris (ya da kısaca regülerdir) denir.

A matrisinin konservatif veya regüler olması aşağıdaki teoremden (a) ve (b) ile karakterize edilir.

Teorem 2.1.6: (a) $A \in (c, c)$ olması için gerek ve yeter şart

$$(i) \|A\| = \sup_n \sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk}| < \infty$$

$$(ii) \text{ Her } k \in \mathbb{N} \text{ için } \lim_n a_{nk} = a_k$$

$$(iii) \lim_n \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} = \alpha$$

(b) $A \in (c, c; p)$ olması için gerek ve yeter şart (i) ile birlikte (ii) de her k için $a_k = 0$ ve (iii) de ise $\alpha = 1$ gerçekleşmesidir.

$$(c) A \in (\ell_{\infty}, \ell_{\infty}) \Leftrightarrow A \in (c_0, \ell_{\infty}) \Leftrightarrow \sup_n \sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk}| < \infty$$

(Maddox 1970, sh. 165-166).

$A = (a_{nk})$ sonsuz bir matris olmak üzere

$$c_A = \{x = (x_k) : Ax \in c\}$$

cümlesine A matrisinin yakınsaklık alanı (toplanabilirlik alanı) denir.

Şimdi istatistiksel yakınsaklık ile klasik toplanabilme metodları arasındaki ilişkiyi verebiliriz.

Teorem 2.1.7: Hiç bir matris toplanabilme metodu istatistiksel yakınsaklık metodunu içermez. Yani her $x \in s$ için $A - \lim x = st - \lim x = L$ olacak biçimde bir A matrisi yoktur (Fridy 1985).

Klasik matris metodlarının özel bir sınıfının arakesiti ile matris toplanabilme ve istatistiksel yakınsaklık arasında kuvvetli bir ilişki Fridy ve Miller (1991) tarafından verilmiştir.

Matris toplanabilme ve istatistiksel yakınsaklık arasında kesin bir sonuç elde etmek için matrislerin aşağıdaki sınıfını tanıtağıız.

Negatif olmayan alt üçgensel $A = (a_{nk})$ matrislerinin bir τ sınıfı için

$$(i) \text{ Her } n \in \mathbb{N} \text{ için } \sum_{k=1}^n a_{nk} = 1$$

$$(ii) K \subseteq \mathbb{N} \text{ olmak üzere } \delta(K) = 0 \text{ olduğunda } \lim_n \sum_{k \in K} a_{nk} = 0$$

koşulları gerçeklensin.

τ sınıfına ait her bir A matrisi negatif olmayan terimli olduğundan (i) ve (ii) koşulları, A matrisinin regülerliğini garanti eder.

Şimdi ilgili karakterizasyonu verebiliriz.

Teorem 2.1.8: Sınırlı bir x dizisi için $st - \lim x = L$ olması için gerek ve yeter şart her $A \in \tau$ için $A - \lim x = L$ olmasıdır (Fridy ve Miller 1991).

İstatistiksel yakınsaklık metodu $\{(-1)^k\}$ gibi periyodik bir diziyi toplamaz, yani $\{(-1)^k\}$ dizisi istatistiksel yakınsak değildir. Bu nedenle istatistiksel yakınsaklık metodu, klasik toplanabilme metodlarının bir çoğunu içermez.

Bu gözlemlerimiz, Teorem 2.1.7 ile birleştirilirse istatistiksel yakınsaklık metodunun aşıkâr olmayan herhangi bir matris metodu ile karşılaştırılamayacağını düşünebiliriz. Fakat durum böyle değildir. Bunun için aşağıdaki örneği gözönüne alalım.

Örnek 2.1.9:

$$a_{nk} = \begin{cases} 1 & , \quad n \text{ kare değil ve } k = n \\ \frac{1}{2} & , \quad k = n \text{ veya } k = (m-1)^2 \text{ ve } n = m^2, (m = 1, 2, \dots) \\ 0 & , \quad \text{d.d.} \end{cases}$$

şeklinde bir $A = (a_{nk})$ matrisi tanımlayalım. Herhangi bir x dizisi için

$$(Ax)_n = \begin{cases} \frac{x_1}{2} & , \quad n = 1 \\ \frac{[x_{(m-1)^2} + x_{m^2}]}{2} & , \quad n = m^2, (m = 1, 2, \dots) \\ x_n & , \quad n \neq m^2 \end{cases}$$

elde edilir. Böylece $A = (a_{nk})$ matrisi üçgensel ve regülerdir. A nın istatistiksel yakınsaklık tarafından içerildiğini görmek için $\lim_n (Ax)_n = L$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda $\lim_{n \neq m^2} x_n = L$ ve

$$\left| \{k \leq n : (Ax)_n \neq x_n\} \right| \leq \sqrt{n}$$

olup

$$\lim_n \frac{1}{n} \left| \{k \leq n : (Ax)_n \neq x_n\} \right| \leq \lim_n \frac{1}{n} \sqrt{n} = 0$$

dır. Dolayısıyla h.h.k için $(Ax)_n = x_n$ olup $\text{st} - \lim x = L$ dir.

Burada uyaralım ki; $A = (a_{nk})$ matrisi, yakınsaklığa denk değildir. Bunun için $x = (x_k)$ dizisini

$$x_k = \begin{cases} (-1)^m & , \quad k = m^2, (m = 1, 2, \dots) \\ 0 & , \quad k \neq m^2 \end{cases}$$

şeklinde tanımlayalım. Bu durumda $n > 1$ için $(Ax)_n \rightarrow 0$, $(n \rightarrow \infty)$ dir. Fakat x dizisi yakınsak değildir.

Schoenberg (1959) istatistiksel yakınsaklığı D-yakınsaklık olarak adlandırdı ve aşağıdaki kriteri verdi.

Teorem 2.1.10: $\text{st} - \lim x = L$ olması için gerek ve yeter şart her bir t reel sayısı için

$$\lim_n \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n e^{itx_k} = e^{itL} \quad (2.2)$$

olmasıdır (Schoenberg 1959).

Teorem 2.1.11: $S^* := \left\{ x = (x_k) : \left\{ \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |x_k| \right\}_{n=1}^\infty \in \ell_\infty \right\}$ uzayına ait bir

$x = (x_k)$ dizisinin, her bir t rasyonel sayısı için (2.2) yi gerçeklemesi için gerek ve yeter şart $\text{st} - \lim x = L$ olmasıdır (Šalát 1980).

2.2. İstatistiksel Üst Limit ve Alt Limit

Bu kısımda diziler reel terimli olmak üzere; öncelikle, bir dizinin değme noktaları ve limit noktaları kavramının istatistiksel benzerleri, istatistiksel değme ve istatistiksel limit noktalarının temel özellikleri verilerek, bu noktalar ile alışılmış limit noktaları arasındaki benzerlik ve farklar verilecektir. Daha sonra ise istatistiksel üst limit ve alt limit kavramları ve alışılmış üst limit ve alt limitin bazı istatistiksel benzerleri verilecektir.

Bu nedenle bazı önemli terminoloji ve notasyonları vereceğiz.

$x = (x_k)$ dizisinin değer cümlesi $\{x_k : k \in \mathbb{N}\}$ ile gösterilir. $\{x_{k(j)}\}_{j=1}^\infty$,

$x = (x_k)$ dizisinin bir alt dizisi ve $K := \{k(j) : j \in \mathbb{N}\}$ ise $\{x_{k(j)}\}_{j=1}^\infty$ yerine $\{x\}_K$ yazılır.

$\delta(K) = 0$ ise $\{x\}_K$ dizisine sıfır yoğunluğa sahip bir alt dizi veya bir ince alt dizi denir. $\delta(K) > 0$ veya K cümlesi bir yoğunluğa sahip değilse $\{x\}_K$ dizisine, $x = (x_k)$ dizisinin ince olmayan bir alt dizisidir denir (Fridy 1993).

Bir x dizisinin bir L sayısına yakınsayan bir alt dizisi varsa L sayısı x dizisinin alışılmış bir limit noktasıdır. Bir alt dizisinin yoğunluğu gözönüne alınarak istatistiksel limit noktası Fridy (1993) tarafından verilmiştir.

Tanım 2.2.1: Bir x dizisinin bir λ sayısına yakınsayan ince olmayan bir alt dizisi varsa, λ sayısına x dizisinin bir istatistiksel limit noktasıdır denir (Fridy 1993).

Bir x dizisinin alışılmış limit noktalarının cümlesi L_x ile, istatistiksel limit noktalarının cümlesi ise Λ_x ile gösterilir.

Örnek 2.1.4 de tanımlanan x dizisi için $L_x = \{0,1\}$ ve $\Lambda_x = \{0\}$ dir.

Herhangi bir x dizisi için $\Lambda_x \subseteq L_x$ olduğu açıktır. Λ_x ve L_x çok farklı olabilir, örneğin $\Lambda_x = \emptyset$ olduğunda $L_x = \mathbb{R}$ olacak şekilde bir x dizisi Fridy (1993) tarafından verilmiştir.

Örnek 2.2.2: $\{r_k\}_{k=1}^{\infty}$, değer cümlesi tüm rasyonel sayılar cümlesi olan bir dizi ve $x = (x_k)$ dizisi

$$x_k = \begin{cases} r_n & , \quad k = n^2, (n = 1, 2, \dots) \\ k & , \quad k \neq n^2 \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın.

$K := \{k = n^2 : n \in \mathbb{N}\}$ olmak üzere $\delta(K) = 0$ olduğundan $\Lambda_x = \emptyset$ dir.

$\{r_k : k \in \mathbb{N}\}$ cümlesi $\mathbb{R}$ de yoğun olduğundan $L_x = \mathbb{R}$ dir (Fridy 1993).

Bir x dizisinin bir L limit noktası “ L merkezli her açık aralık x dizisinin sonsuz çoklukta terimini içerir” ifadesi ile karakterize edilebilir.

Bu kriterin bir istatistiksel benzeri Fridy (1993) tarafından verilmiştir.

Tanım 2.2.3: Her $\varepsilon > 0$ için $\{k \in \mathbb{N} : |x_k - \gamma| < \varepsilon\}$ cümlesi sıfır yoğunluğa sahip değilse γ sayısına x dizisinin bir istatistiksel değme noktası denir (Fridy 1993).

Bir x dizisinin tüm istatistiksel değme noktalarının cümlesi Γ_x ile gösterilir. Herhangi bir x dizisi için $\Gamma_x \subseteq L_x$ olduğu açıktır. Γ_x ve L_x arasındaki içerme bağıntısı aşağıdaki önerme ile verilmektedir.

Önerme 2.2.4: Herhangi bir x dizisi için $\Lambda_x \subseteq \Gamma_x$ dir (Fridy 1993).

Alışılmış limit noktaları ile ilgili tecrübelerimiz bizi Λ_x ve Γ_x cümlelerinin eşit olacağı ümidine götürür, fakat durumun böyle olmadığı Fridy (1993) tarafından gösterilmiştir.

Eğer $\text{st} - \lim x = \lambda$ ise $\Lambda_x = \Gamma_x = \{\lambda\}$ dir. Fakat karışının doğru olmadığını Fridy (1993) göstermiştir:

$(x_k) = \{(1 + (-1)^k)k\}$ dizisi için $\Lambda_x = \Gamma_x = \{0\}$ fakat $\text{st} - \lim x$ mevcut değildir.

Verilen bir x dizisinin istatistiksel yakınsaklığı veya istatistiksel yakınsak olmayışı, x dizisinin ince bir alt dizisinin değerlerini değiştirmekle değişmez.

Bu özelliğin istatistiksel limit noktaları ve istatistiksel değme noktaları içinde geçerli olduğu Fridy (1993) aşağıdaki teoremden göstermiştir.

Teorem 2.2.5: x ve y h.h.k için $x_k = y_k$ olacak şekilde iki dizi olsun. Bu durumda $\Lambda_x = \Lambda_y$ ve $\Gamma_x = \Gamma_y$ dir (Fridy 1993).

Şimdi istatistiksel üst limit ve alt limit kavramlarını ve alışılmış üst ve alt limit'in özelliklerinin bazı istatistiksel benzerlerini vereceğiz.

Reel terimli bir $x = (x_k)$ dizisi için

$$B_x := \{b \in \mathbb{R} : \delta\{k : x_k > b\} \neq 0\}$$

ve

$$A_x := \{a \in \mathbb{R} : \delta\{k : x_k < a\} \neq 0\}$$

olsun.

Burada $\delta(K) \neq 0$ olmasını “ $\delta(K) > 0$ veya K yoğunluğa sahip değil” anlamında alacağız.

Tanım 2.2.6: Bir x dizisinin istatistiksel üst limiti

$$\text{st} - \limsup x := \begin{cases} \sup B_x & , B_x \neq \emptyset \\ -\infty & , B_x = \emptyset \end{cases}$$

ile verilir (Fridy ve Orhan 1997).

Benzer şekilde bir x dizisinin istatistiksel alt limit

$$\text{st} - \liminf x := \begin{cases} \inf A_x & , A_x \neq \emptyset \\ +\infty & , A_x = \emptyset \end{cases}$$

ile verilir (Fridy ve Orhan 1997).

Tanım 2.2.7: Bir $x = (x_k)$ dizisi için $\delta\{k : |x_k| > B\} = 0$ olacak şekilde bir B sayısı varsa, x dizisine istatistiksel sınırlıdır denir (Fridy ve Orhan 1997).

Şimdi bir örnek verelim.

Örnek 2.2.8:

$$x_k = \begin{cases} k & , k \text{ tek kare} \\ 2 & , k \text{ çift kare} \\ 1 & , k \text{ tek kare değil} \\ 0 & , k \text{ çift kare değil} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan $x = (x_k)$ dizisini gözönüne alalım. x dizisi üstten sınırlı değildir.

$\delta\{k \in \mathbb{N} : |x_k| > 1\} = 0$ olduğundan x dizisi istatistiksel sınırlıdır (Örnek 2.1.4 de

$\delta\{k = m^2 : m = 1, 2, \dots\} = 0$ olduğu gösterilmiştir). Böylece $B_x = (-\infty, 1)$ ve

$A_x = (0, +\infty)$ olup $\text{st} - \limsup x = 1$ ve $\text{st} - \liminf x = 0$ dır. x dizisi 0' a ve 1' e yakınsayan pozitif yoğunluğa sahip iki (ayrık) alt diziye sahip olduğundan istatistiksel yakınsak değildir.

Örnek 2.2.8 de tanımlanan $x = (x_k)$ dizisinin istatistiksel değme noktalarının cümlesi $\Gamma_x = \{0,1\}$ ve $\text{st} - \limsup x$ bu cümlemin en büyük elemanına, $\text{st} - \liminf x$ ise bu cümlemin en küçük elemanına eşittir (Fridy ve Orhan 1997).

Bu gözlemlere göre aşağıdaki iki teoremi verebiliriz.

Teorem 2.2.9: $\beta := \text{st} - \limsup x$ sonlu ise her $\varepsilon > 0$ için

$$\delta\{k: x_k > \beta - \varepsilon\} \neq 0 \quad \text{ve} \quad \delta\{k: x_k > \beta + \varepsilon\} = 0 \quad (2.3)$$

dir.

Karşıt olarak her $\varepsilon > 0$ için (2.3) gerçekleşirse $\beta = \text{st} - \limsup x$ dir (Fridy ve Orhan 1997).

Teorem 2.2.10: $\alpha := \text{st} - \liminf x$ sonlu ise her $\varepsilon > 0$ için

$$\delta\{k: x_k < \alpha + \varepsilon\} \neq 0 \quad \text{ve} \quad \delta\{k: x_k < \alpha - \varepsilon\} = 0 \quad (2.4)$$

dir.

Karşıt olarak her $\varepsilon > 0$ için (2.4) gerçekleşirse $\alpha = \text{st} - \liminf x$ dir (Fridy ve Orhan 1997).

İstatistiksel değme noktası tanımından ve Teorem 2.2.9 ve Teorem 2.2.10 dan $\text{st} - \limsup x$, x dizisinin en büyük istatistiksel değme noktası; $\text{st} - \liminf x$, x dizisinin en küçük istatistiksel değme noktası olarak yorumlayabiliriz.

Aşağıdaki teorem bu gözlemleri kuvvetlendirir.

Teorem 2.2.11: Herhangi bir x dizisi için

$$\text{st} - \liminf x \leq \text{st} - \limsup x$$

dir (Fridy ve Orhan 1997).

Teorem 2.2.11 den herhangi bir x dizisi için

$$\liminf x \leq \text{st} - \liminf x \leq \text{st} - \limsup x \leq \limsup x$$

olduğu açıktır.

Hemen belirtelim ki, istatistiksel sınırlılık $st - \limsup x$ ve $st - \liminf x$ değerlerinin sonlu olmasını gerektirir. Böylece Teorem 2.2.9 daki (2.3) şartı ve Teorem 2.2.10 daki (2.4) şartı gerçekleşir.

Aşağıdaki sonuç yakınsak dizilerin temel bir özelliğinin bir istatistiksel benzeridir.

Teorem 2.2.14: İstatistiksel sınırlı bir x dizisinin istatistiksel yakınsak olması için gerek ve yeter şart

$$st - \liminf x = st - \limsup x$$

olmasıdır (Fridy ve Orhan 1997).

Buck (1953) bir x dizisi $\limsup x$ değerine C_1 -toplanabilirse bu dizinin aynı değere istatistiksel yakınsak olması gerektiğini gösterdi. Aşağıdaki teorem bu sonucun istatistiksel bir benzeridir.

Teorem 2.2.15: Üstten sınırlı bir x dizisi $\beta := st - \limsup x$ değerine C_1 -toplanabilirse $st - \lim x = \beta$ dır (Fridy ve Orhan 1997).

Simetri ile aşağıdaki sonucu elde ederiz.

Sonuç 2.2.16: Altan sınırlı bir x dizisi $\alpha := st - \liminf x$ değerine C_1 -toplanabilirse $st - \lim x = \alpha$ dır (Fridy ve Orhan 1997).

Teorem 2.2.15, Buck' ın teoreminin bir motivasyonudur. Buck' ın teoremin de dizinin bir üst sınır şartı olmadığından Teorem 2.2.15 den sınırlılık hipotezi atılabilir mi sorusu aklımıza gelebilir. Üst sınırın atılamayacağını veya istatistiksel üst sınır zayıf şartı ile değiştirilemeyeceğine ilişkin bir örnek Fridy ve Orhan (1997) tarafından verildi:

Örnek 2.2.17:

$$x_k = \begin{cases} \sqrt{k} & , \text{ k kare} \\ 0 & , \text{ k tek kare değil} \\ 1 & , \text{ k çift kare değil} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan $x = (x_k)$ dizisini gözönüne alalım.

$$\delta\{k: x_k = 0\} = \frac{1}{2} = \delta\{k: x_k = 1\} \text{ olduğundan } st - \liminf x = 0 \text{ ve } st - \limsup x = 1$$

olduğu açıktır. Bu nedenle x dizisi istatistiksel yakınsak değildir. $\delta\{k: |x_k| > 1\} = 0$ olduğundan x dizisi istatistiksel sınırlıdır. Şimdi $C_1 - \lim x = 1 = st - \limsup x$ olduğunu gösterelim.

K^2 : tam karelerin cümlesini

K^0 : kare olmayan tek tamsayıların cümlesini

K^1 : kare olmayan çift tamsayıların cümlesini

göstereyin. $[t] := \max\{k: k \leq t\}$ olsun.

$$\begin{aligned} (C_1 x)_n &= \frac{1}{n} \sum_{k \in K_n^0} x_k + \frac{1}{n} \sum_{k \in K_n^1} x_k + \sum_{k \in K_n^2} x_k \\ &= 0 + \frac{1}{n} \left(\frac{n - [\sqrt{n}]}{2} \right) + \frac{1}{n} \sum_{i \leq \sqrt{n}} i \\ &= 1 + o(1) \end{aligned}$$

olduğundan $C_1 - \lim x = 1$ dir.

2.3. İstatistiksel Çekirdek

Bu kısımda matris ve diziler kompleks terimli olmak üzere, bir dizinin istatistiksel çekirdeği kavramını tanıtacağız ve bir dizinin dönüşüm dizisinin çekirdeği, istatistiksel çekirdeğin bir alt cümlesi olacak şekildeki matrisleri karakterize edeceğiz.

İstatistiksel çekirdek kavramını tanıtmadan önce, ilk defa Knopp (1930) tarafından tanımlanan bir dizinin çekirdeği kavramını tanıtacağız.

$x = (x_n)$ kompleks terimli bir dizi olmak üzere $\{x_k\}_{k \geq n} = \{x_n, x_{n+1}, \dots\}$

cümlesinin kapalı konveks hull' u $C_n(x)$ ile gösterilir. $\bigcap_{n=1}^{\infty} C_n(x)$ cümlesi $x = (x_n)$

dizisinin limit noktalarının cümlesi olan D cümlesini içerir. Zorunlu olarak kapalı ve

konveks bir cümle olan $\bigcap_{n=1}^{\infty} C_n(x)$ cümlesine $x = (x_n)$ dizisinin çekirdeği denir ve

$K - \text{çek}\{x\}$ ile gösterilir (Hardy 1949, sh. 55, Cooke 1950, sh. 137). Demek ki

$$K - \text{çek}\{x\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n(x).$$

$K - \text{çek}\{x\}$ in bir tek nokta içermesi için gerek ve yeter şart $x = (x_n)$ dizisinin yakınsak olmasıdır ki bu nokta $x = (x_n)$ dizisinin limit noktasıdır (Allen 1944, Cooke 1950, sh. 137).

$K - \text{çek}\{x\} = \emptyset$ ise $x = (x_n)$ dizisine belirgin olarak ıraksaktır denir ve bu durum $x_n \sim \infty$ ile gösterilir (Cooke 1950, sh. 137).

Şimdi bir örnek verelim.

Örnek 2.3.1:

$$x_n = \begin{cases} n & , \quad n \text{ çift} \\ ni & , \quad n \text{ tek} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan $x = (x_n)$ dizisini gözönüne alalım.

$C_n(x)$ cümlesi orijine dik açılı üçgensel bir bölgenin çıkarılmasıyla kalan kompleks düzlemin birinci bölgesinden ibaret olup $K - \text{çek}\{x\} = \emptyset$ ve $x_n \sim \infty$ dır.

Her bir sınırlı x dizisi için

$$B_x^*(z) := \left\{ w \in \mathbb{C} : |w - z| \leq \limsup_k |x_k - z| \right\}$$

olmak üzere

$$K - \text{çek}\{x\} = \bigcap_{z \in \mathbb{C}} B_x^*(z)$$

olduğu Shcherbakov (1977) tarafından gösterilmiştir.

Teorem 2.3.2: $A = (a_{nk})$ reel ya da kompleks terimli bir matris olsun.

Herhangi bir sınırlı x dizisi için

$$K - \text{çek}\{Ax\} \subset K^{(\alpha)} - \{x\}, \quad (\alpha \geq 1)$$

olması için gerek ve yeter şart A regüler bir matris ve $\limsup_n \sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk}| \leq \alpha$ olmasıdır (Natarajan 1989).

Bir dizinin çekirdeğine ilişkin ayrıntılı bilgiler Knopp (1930), Agnew (1939), Allen (1944) ve Maddox (1979) da bulunabilir.

Şimdi kompleks değerli bir dizinin istatistiksel çekirdeğini tanımlayacağız.

Tanım 2.3.3: Herhangi bir kompleks $x = (x_k)$ dizisi için $\mathcal{H}(x)$, h.h.k için x_k yi içeren tüm kapalı yarı düzlemlerin kolleksiyonu olsun, yani

$$\mathcal{H}(x) := \{H: H \text{ kapalı yarı - düzlem ve } \delta\{k: x_k \notin H\} = 0\}$$

olsun. x dizisinin istatistiksel çekirdeği

$$\text{st} - \text{çek}\{x\} := \bigcap_{H \in \mathcal{H}(x)} H$$

ile verilir (Fridy ve Orhan 1997).

$K - \text{çek}\{x\}$ nin tanımında $C_n(x)$ kapalı konveks hull' u $\{x_k\}_{k \geq n}$ ' yi içeren tüm kapalı yarı-düzlemlerin arakesitidir. $\text{st} - \text{çek}\{x\}$ nin tanımında, $\{x_k\}_{k \geq n}$ ' in yerine 1 yoğunluğa sahip keyfi bir alt dizi alındı. Böylece x dizisi için $\text{st} - \text{çek}\{x\} \subseteq K - \text{çek}\{x\}$ dir.

x dizisi reel değerli ve istatistiksel sınırlı bir dizi ise x dizisinin istatistiksel çekirdeği, $[\text{st} - \liminf x, \text{st} - \limsup x]$ dir; eğer x dizisi istatistiksel sınırlı değil ise x dizisinin istatistiksel çekirdeği ya $[\text{st} - \liminf x, \infty)$, $(-\infty, +\infty)$ ya da $(-\infty, \text{st} - \limsup x]$ aralığıdır (Fridy ve Orhan 1997).

Çekirdek kavramına ilişkin bazı içerirlik teoremleri verebilmek için st-çekirdeğe ilişkin aşağıdaki lemmaya ihtiyacımız vardır.

Lemma 2.3.4: x istatistiksel sınırlı bir dizi ve her bir $z \in \mathbb{C}$ için

$$B_x(z) := \{w \in \mathbb{C} : |w - z| \leq st - \limsup |x_k - z|\}$$

olsun. Bu durumda,

$$st - çek\{x\} = \bigcap_{z \in \mathbb{C}} B_x(z)$$

dir (Fridy ve Orhan 1997).

x , istatistiksel sınırlı bir dizi değil ise Lemma 2.3.4 doğru değildir. Bunu görmek için $\forall k \in \mathbb{N}$ için $x_k := k$ şeklinde tanımlanan $x = (x_k)$ dizisini gözönüne alalım. x dizisi bir istatistiksel değme noktasına sahip değildir ve $st - çek\{x\} = \emptyset$. Herhangi bir $z \in \mathbb{C}$ için, h.h.k için x_k yı içeren sonlu yarı çaplı bir disk yoktur; böylece $st - \limsup_k |x_k - z| = \infty$ ve $B_x(z)$ kompleks düzlemin tamamı olup $\bigcap_{z \in \mathbb{C}} B_x(z) = \mathbb{C}$ dir.

Aşağıdaki teorem $K - çek\{Ax\} \subseteq st - çek\{x\}$ olacak şekildeki matrisleri karakterize edecektir.

Teorem 2.3.5: $A = (a_{nk})$ matrisi için $\sup_n \sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk}| < \infty$ olsun. Her bir $x \in \ell_{\infty}$

için $K - çek\{Ax\} \subseteq st - çek\{x\}$ olması için gerek ve yeter şart

(i) $A \in \tau^*$; yani A regüler ve $\delta(E) = 0$ özellikli her $E \subseteq \mathbb{N}$ için

$$\lim_n \sum_{k \in E} |a_{nk}| = 0$$

$$(ii) \lim_n \sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk}| = 1$$

olmasıdır (Fridy ve Orhan 1997).

Herhangi bir x dizisinin st-çekirdeği, K -çekirdeğinin bir alt cümlesi olduğundan Teorem 2.3.5 den aşağıdaki sonucu elde ederiz.

Sonuç 2.3.6: $A = (a_{nk})$ matrisi için $\sup_n \sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk}| < \infty$ ve Teorem 2.3.5 in (i) ve

(ii) şartları gerçekenirse her bir $x \in \ell_{\infty}$ için

$$\text{st} - \text{çek}\{Ax\} \subseteq \text{st} - \text{çek}\{x\}$$

dir (Fridy ve Orhan 1997).

Şimdi Sonuç 2.3.6 nın karşıtının doğru olmadığını göstereceğiz.

Örnek 2.3.7: A matrisini h.h.k için $(Ax)_n = x_n$ olacak biçimde tanımlayalım.

Teorem 2.2.5 den Ax ve x dizilerinin istatistiksel değme noktalarının cümlesi aynı olup $\text{st} - \text{çek}\{Ax\} = \text{st} - \text{çek}\{x\}$ dir.

$$a_{nk} = \begin{cases} 1 & , \quad k = n \text{ ve } n \text{ kare değil} \\ 1 & , \quad k \leq n \text{ ve } n \text{ kare} \\ 0 & , \quad \text{d.d.} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan $A = (a_{nk})$ matrisini gözönüne alalım. Bu durumda

$$(Ax)_n = \begin{cases} x_n & , \quad n \text{ kare değil} \\ \sum_{k=1}^n x_k & , \quad n \text{ kare} \end{cases}$$

olacaktır. A matrisi için $\sup_n \sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk}| = \infty$ dir. A matrisi ne (ii) özelliğini gerçeken ne de

$\delta(E) = 0$ için $\lim_n \sum_{k \in E} |a_{nk}| = 0$ koşulunu gerçeken.

BÖLÜM 3

A-İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK

Orijinal bölümlerin ilki olan bu bölümde, A-yoğunluk ve A-istatistiksel yakınsaklık tanıtılıp, A-istatistiksel üst limit ve alt limit ve A-istatistiksel çekirdek kavramları verilecektir.

3.1. A-istatistiksel Yakınsaklık

Bu kısımda A-yoğunluk ve A-istatistiksel yakınsaklık tanıtılacaktır.

Tanım 3.1.1: $A = (a_{nk})$ negatif olmayan regüler bir matris ve $K \subseteq \mathbb{N}$ olsun.

$$\delta_A(K) := \lim_n (A\chi_K)_n = \lim_n \sum_{k \in K} a_{nk}$$

limiti mevcut ise $\delta_A(K)$ sayısına K cümlesinin A-yoğunluğu denir (Freedman ve Sember 1981).

$\delta_A(K)$ veya $\delta_A(\mathbb{N} \setminus K)$ yoğunluklarından herhangi biri mevcut ise $\delta_A(K) = 1 - \delta_A(\mathbb{N} \setminus K)$ dır.

Eğer K cümlesi sonlu elemanlı bir cümle ise $\delta_A(K) = 0$ olduğu açıktır.

Örnek 3.1.2:

$$a_{nk} = \begin{cases} 1 & , \quad k = n^2, (n = 1, 2, \dots) \\ 0 & , \quad k \neq n^2 \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan $A = (a_{nk})$ matrisini gözönüne alalım.

Bu durumda,

$$K_1 = \{k^2 : k \in \mathbb{N}\} \text{ cümlesi için } \delta_A(K_1) = 1$$

ve

$$K_2 = \{k \neq m^2 : m \in \mathbb{N}\} \text{ cümlesi için } \delta_A(K_2) = 0$$

dır.

Tanım 3.1.3: $A = (a_{nk})$ negatif olmayan regüler bir matris olsun. Her $\varepsilon > 0$ için $K(\varepsilon) = \{k \in \mathbb{N} : |x_k - L| \geq \varepsilon\}$ cümlesinin A -yoğunluğu sıfır ise $x = (x_k)$ dizisi L sayısına A -istatistiksel yakınsaktır denir. Bu durum $st_A - \lim x = L$ ile gösterilir (Connor 1989).

Uyarı: $A = (a_{nk})$, negatif olmayan bir toplanabilme metodu olduğunda A -istatistiksel yakınsaklık tanımlanabilir. Bu metodun regüler olması için gerek ve yeter şart $\lim_n a_{nk} = 0$, $(\forall k \in \mathbb{N})$ olmasıdır (Fridy ve Khan 1997).

Biz burada $A = (a_{nk})$ matrisini negatif olmayan regüler bir toplanabilme metodu olarak alacağız.

Bundan sonra $\delta_A(E) = 1$ olmak üzere her $k \in E$ için bir $\mathcal{P}(k)$ özelliği gerçekleşiyor ise A -hemen her k için $\mathcal{P}(k)$ özelliği gerçekleşiyor diyeceğiz ve bunu “ A -h.h.k” ile kısıltacağız.

Teorem 3.1.4: $st_A - \lim x = L$ olması için gerek ve yeter şart $\delta_A(B) = 0$ olacak biçimde $\mathbb{N}$ nin bir B alt cümlesi vardır ve $\mathbb{N} \setminus B = \{n_k : k \in \mathbb{N}\}$ olmak üzere $x_{n_k} \rightarrow L$ (Cauchy anlamında), $(k \rightarrow \infty)$ olmasıdır (Kolk 1991, Miller 1995).

Uyarı: $A = C_1$ alınırsa istatistiksel yakınsaklığın orijinal tanımı elde edilir.

Örnek 3.1.5:

$$a_{nk} = \begin{cases} 1 & , \quad k = n^2, (n = 1, 2, \dots) \\ 0 & , \quad k \neq n^2 \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan $A = (a_{nk})$ matrisini gözönüne alalım. A matrisi negatif olmayan regüler bir matrisdir. Şimdi $x = (x_k)$ dizisi

$$x_k = \begin{cases} \frac{1}{2} & , \quad k = n^2, (n = 1, 2, \dots) \\ 1 & , \quad k \neq n^2 \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. $K(\varepsilon) := \left\{ k \in \mathbb{N} : \left| x_k - \frac{1}{2} \right| \geq \varepsilon \right\}$ olmak üzere

$$\lim_n \left(A \chi_{K(\varepsilon)} \right)_n = 0, \quad (\forall \varepsilon > 0)$$

olduğundan $st_A - \lim x = \frac{1}{2}$ dir.

Tanım 3.1.6: Bir $x = (x_k)$ dizisi için $\delta_A \{k : |x_k| \geq B\} = 0$ olacak şekilde bir B sayısı varsa x dizisine A -istatistiksel sınırlıdır denir.

Örnek 3.1.5 de tanımlanan x dizisi A -istatistiksel sınırlı bir dizidir.

Bundan böyle,

st_A : A -istatistiksel yakınsak diziler uzayı

st_A^o : sıfıra A -istatistiksel yakınsak diziler uzayı

$(st_A)_b$: sınırlı A -istatistiksel yakınsak diziler uzayı

olarak alınacaktır.

Sınırlı A -istatistiksel yakınsak dizilerin matris dönüşümleri Kolk (1992) tarafından verilmiştir.

Teorem 3.1.7: Sınırlı bir x dizisi için $st_A - \lim x = L = A - \lim x$ dir (Kolk 1992).

Teorem 3.1.8: $B \in ((st_A)_b, c; p)$ olması için gerek ve yeter şart $B \in (c, c; p)$ ve $E \subseteq \mathbb{N}$ olmak üzere $\delta_A(E) = 0$ ise $\lim_n \sum_{k \in E} |b_{nk}| = 0$ olmasıdır (Kolk 1992).

Teorem 2.1.8 in A -istatistiksel bir benzeri Fridy ve Miller (1991) tarafından verilmiştir. Bu karakterizasyonu vermeden önce matrislerin aşağıdaki sınıfını tanıtacağız.

A negatif olmayan regüler bir matris ve negatif olmayan $T = (t_{nk})$ matrislerinin

$$(i) \text{ Her } n \in \mathbb{N} \text{ için } \sum_{k=1}^{\infty} t_{nk} = 1$$

$$(ii) K \subseteq \mathbb{N} \text{ ve } \delta_A(K) = 0 \text{ ise } \lim_n \sum_{k \in K} t_{nk} = 0$$

koşullarını gerçekleyen sınıfı τ_A olsun.

$T \in \tau_A$ matrislerinin sınırlı toplanabilirlik alanını $c_T(b)$ ile göstereceğiz,

yani

$$c_T(b) := \left\{ x \in \ell_\infty : \lim_n (Tx)_n \text{ mevcut} \right\}.$$

Şimdi ilgili karakterizasyonu verebiliriz.

Teorem 3.1.9: Sınırlı bir x dizisi için $st_A - \lim x = L$ olması için gerek ve yeter şart her $T \in \tau_A$ için $T - \lim x = L$ olmasıdır, yani $(st_A)_b = \bigcap_{T \in \tau_A} c_T(b)$ olmasıdır (Fridy ve Miller 1991).

3.2. A-istatistiksel Yakınsaklık İçin Bir Kriter

Bu kısımda Schoenberg (1959) tarafından istatistiksel yakınsaklık için verilen kriterin (Teorem 2.1.10) A-istatistiksel benzerini vereceğiz.

Ayrıca Šalát (1980) tarafından verilen Teorem 2.1.11'i A-istatistiksel yakınsaklığa genişleteceğiz.

Sözü edilen kriteri vermeden önce aşağıdaki lemmayı vereceğiz.

Lemma 3.2.1: $st_A - \lim x = L$ ve g , her reel $y = L$ noktasında sürekli ise $st_A - \lim g(x) = g(L)$ dir.

İspat: $st_A - \lim x = L$ olsun. g , $y = L$ noktasında sürekli olduğundan verilen bir $\varepsilon > 0$ sayısı için

$$|y - L| < \delta \text{ ise } |g(y) - g(L)| < \varepsilon$$

olacak biçimde bir $\delta > 0$ sayısı vardır. Böylece

$$|g(y) - g(L)| \geq \varepsilon \text{ ise } |y - L| \geq \delta$$

olup

$$|g(x_k) - g(L)| \geq \varepsilon \text{ ise } |x_k - L| \geq \delta$$

elde edilir. O halde

$$K := \{k \in \mathbb{N} : |g(x_k) - g(L)| \geq \varepsilon\} \subset K' := \{k \in \mathbb{N} : |x_k - L| \geq \delta\}$$

olacaktır. $\text{st}_A - \lim x = L$ olduğundan $\lim_n (A\chi_{K'})_n = 0$ olup $\lim_n (A\chi_K)_n = 0$ elde edilir.

Bu da ispatı tamamlar.

Şimdi A-istatistiksel yakınsaklık için sözünü ettiğimiz kriteri verebiliriz.

Teorem 3.2.2: $x = (x_k)$ dizisinin bir L sayısına A-istatistiksel yakınsak olması için gerek ve yeter şart her bir t reel sayısı için

$$\lim_n \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} e^{itx_k} = e^{itL} \quad (3.1)$$

olmasıdır.

İspat: $\text{st}_A - \lim x = L$ olsun. Sabit bir t sayısı için $g(x) = e^{itx}$, x 'in sürekli bir fonksiyonudur. Lemma 3.2.1 den $\text{st}_A - \lim e^{itx_k} = e^{itL}$ dir. $\{e^{itx_k}\}_{k=1}^{\infty}$ sınırlı bir dizi olduğundan Teorem 3.1.7 den $\lim_n \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} e^{itx_k} = e^{itL}$ dir. Bu da gerekliliğin ispatını tamamlar.

Karşıt olarak, $\lim_n \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} e^{itx_k} = e^{itL}$ olduğunu kabul edelim. Şimdi

$$\text{st}_A - \lim x = L \quad (3.2)$$

olduğunu göstereceğiz. Bunun için önce

$$M(y) := \begin{cases} 0 & , y \leq -1 \\ 1+y & , -1 < y < 0 \\ 1-y & , 0 \leq y < 1 \\ 0 & , y \geq 1 \end{cases}$$

ile sürekli bir $M: \mathbb{R} \rightarrow [0,1]$ fonksiyonu tanımlayalım.

M fonksiyonu Lebesgue integrallenebilir bir fonksiyon olduğundan M nin Fourier dönüşümü

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} M(y) e^{-ity} dy, \quad t \in \mathbb{R} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{\sin \frac{t}{2}}{\frac{t}{2}} \right)^2 \end{aligned}$$

dir. f fonksiyonunun ters Fourier dönüşümü ise

$$\begin{aligned} M(y) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{ity} dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{\sin \frac{t}{2}}{\frac{t}{2}} \right)^2 e^{ity} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin \frac{t}{2}}{\frac{t}{2}} \right)^2 e^{ity} dt \end{aligned} \tag{3.3}$$

olacaktır (Haaser ve Sullivan 1971, sh. 325, Myint-U 1980, sh. 310).

$L = 0$ durumu için (3.2) ifadesini göstermek yeterlidir. $\varepsilon > 0$ sayısı verilsin ve $K := K(\varepsilon) := \{k \in \mathbb{N} : |x_k| \geq \varepsilon\}$ olsun. Uygun bir değişken değiştirme ile (3.3) ifadesi

$$M\left(\frac{y}{\varepsilon}\right) = \frac{\varepsilon}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin \frac{\varepsilon t}{2}}{\frac{\varepsilon t}{2}} \right)^2 e^{ity} dt$$

olur. Böylece

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} M\left(\frac{x_k}{\varepsilon}\right) = \frac{\varepsilon}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin \frac{\varepsilon t}{2}}{\frac{\varepsilon t}{2}} \right)^2 \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} e^{itx_k} \right) dt$$

dir. (3.3) integrali mutlak yakınsaktır. Lebesgue Baskın Yakınsaklık Teoreminden

$$\begin{aligned} \lim_n \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} M\left(\frac{x_k}{\varepsilon}\right) &= \frac{\varepsilon}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin \frac{\varepsilon t}{2}}{\frac{\varepsilon t}{2}} \right)^2 \left(\lim_n \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} e^{itx_k} \right) dt \\ &= \frac{\varepsilon}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin \frac{\varepsilon t}{2}}{\frac{\varepsilon t}{2}} \right)^2 dt \\ &= M(0) \\ &= 1 \end{aligned}$$

dir. M fonksiyonu gözönüne alınarak

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} M\left(\frac{x_k}{\varepsilon}\right) &= \sum_{-1 < \frac{x_k}{\varepsilon} < 0} a_{nk} M\left(\frac{x_k}{\varepsilon}\right) + \sum_{0 \leq \frac{x_k}{\varepsilon} < 1} a_{nk} M\left(\frac{x_k}{\varepsilon}\right) \\ &\leq \sum_k a_{nk} \chi_{\mathbb{N}}(k) - \sum_k a_{nk} \chi_K(k) \end{aligned}$$

elde ederiz. Böylece A regüler ve $\lim_n \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} M\left(\frac{x_k}{\varepsilon}\right) = 1$ olduğundan

$\lim_n \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} \chi_K(k) = 0$. Bu da teoremin ispatını tamamlar.

Uyarı: $A = C_1$ alınırsa Teorem 2.1.10 elde edilir.

Şimdi de lacunary istatistiksel yakınsaklık kavramını tanıtağız. Hemen belirtelim ki; lacunary istatistiksel yakınsaklık A-istatistiksel yakınsaklığın bir özel halidir.

Tanım 3.2.3: Pozitif tam sayıların artan bir dizisi $\theta = \{k_r\}$ olsun. Eğer $k_0 = 0$ olmak üzere $r \rightarrow \infty$ için $h_r := k_r - k_{r-1} \rightarrow \infty$ ise $\theta = \{k_r\}$ dizisine lacunary dizi denir

(Lorentz 1948, Sember ve Raphael 1978). Örneğin $\theta = \{k_r\} = \{2^r\}$, ($r > 0$) veya $\theta = \{k_r\} = \{r!\}$ dizileri birer lacunary dizidir.

$\theta = \{k_r\}$ lacunary dizisi ile oluşturulan aralıklar $I_r := (k_{r-1}, k_r]$ ile gösterilecektir.

Tanım 3.2.4: $\theta = \{k_r\}$ bir lacunary dizisi olsun. Her bir $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_r \frac{1}{h_r} \left| \left\{ k \in I_r : |x_k - L| \geq \varepsilon \right\} \right| = 0 \quad (3.4)$$

ise $x = (x_k)$ dizisi L sayısına lacunary istatistiksel yakınsaktır denir ve $s_\theta - \lim x = L$ yazılır (Fridy ve Orhan 1993, 1993).

$K(\varepsilon) := \{k \in \mathbb{N} : |x_k - L| \geq \varepsilon\}$ cümlesinin karakteristik fonksiyonu χ_K ve C_θ matrisi

$$C_\theta[r, k] = \begin{cases} \frac{1}{h_r} & , k \in I_r \\ 0 & , k \notin I_r \end{cases}$$

ile tanımlanmak üzere

$$\frac{1}{h_r} \left| \left\{ k \in I_r : |x_k - L| \geq \varepsilon \right\} \right| = \frac{1}{h_r} \sum_{k \in I_r} \chi_{K(\varepsilon)}(k)$$

olduğundan (3.4) limiti $\lim_r (C_\theta \chi_{K(\varepsilon)})_r = 0$ şeklinde verilebilir.

Teorem 3.2.2 de $A = C_\theta$ alınırsa aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 3.2.5: $s_\theta - \lim x = L$ olması için gerek ve yeter şart her reel t sayısı için

$$\lim_r \frac{1}{h_r} \sum_{k \in I_r} e^{itx_k} = e^{itL}$$

olmasıdır.

Bundan böyle,

s_0 : lacunary istatistiksel yakınsak diziler uzayı

s_0^0 : sıfıra lacunary istatistiksel yakınsak diziler uzayı

s_0^b : sınırlı lacunary istatistiksel yakınsak diziler uzayı

olarak alınacaktır.

Aşağıdaki teorem gösterir ki; $S_A^* := \left\{ x : \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} |x_k| \right\}_{k=1}^{\infty} \in \ell_{\infty} \right\}$ uzayına ait bir

$x = (x_k)$ dizisinin her t rasyonel sayısı için (3.1) in gerçekleşmesi için gerek ve yeter şart x dizisinin A -istatistiksel yakınsak olmasıdır. Bu teorem Teorem 2.1.11 in bir A -istatistiksel benzeridir.

Teorem 3.2.6: $x = (x_k) \in S_A^*$ olsun. x dizisinin reel bir L sayısına A -istatistiksel yakınsak olması için gerek ve yeter şart her t rasyonel sayısı için

$$\lim_n \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} e^{itx_k} = e^{itL}$$

olmasıdır.

İspat: Gereklik: $x \in S_A^*$ ve $st_A - \lim x = L$ olsun. Teorem 3.2.2 den her rasyonel t sayısı için $\lim_n \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} e^{itx_k} = e^{itL}$ dir.

Yeterlilik: Her rasyonel t sayısı için $\lim_n \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} e^{itx_k} = e^{itL}$ olsun. t_0 keyfi bir reel sayı olsun. $\lim_n \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} e^{it_0 x_k} = e^{it_0 L}$ olduğunu göstererek ispatı tamamlayacağız. Keyfi bir rasyonel t sayısı için

$$C_n(t_0, t) := \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} e^{it_0 x_k} - \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} e^{itx_k}$$

yazalım. $e^{i\theta L} = \cos \theta L + i \sin \theta L$, $(\theta \in \mathbb{R})$ olduğundan

$$|C_n(t_0, t)| \leq \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} \sqrt{(\cos t_0 x_k - \cos t x_k)^2 + (\sin t_0 x_k - \sin t x_k)^2}$$

dır. Ortalama değeri teoreminden

$$|C_n(t_0, t)| \leq |t - t_0| \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} x_k \quad (3.5)$$

elde edilir. $x \in S_A^*$ olduğundan her n için

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} |x_k| \leq M \quad (3.6)$$

olacak biçimde $M > 0$ sayısı vardır. (3.5) ve (3.6) dan

$$|C_n(t_0, t)| \leq M |t - t_0| \quad (3.7)$$

elde edilir. Ayrıca

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} e^{it_0 x_k} = \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} e^{it x_k} + C_n(t_0, t) \quad (3.8)$$

den

$$\left| \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} e^{it_0 x_k} - e^{it_0 L} \right| \leq \left| \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} e^{it x_k} - e^{it L} \right| + |e^{it L} - e^{it_0 L}| + |C_n(t_0, t)| \quad (3.9)$$

dır. $\varepsilon > 0$ olsun. $g(x) = e^{ixL}$, $x \in \mathbb{R}$ için sürekli olduğundan

$$|e^{itL} - e^{it_0 L}| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (3.10)$$

olacak biçimde rasyonel bir t sayısı vardır. (3.7) den

$$|C_n(t_0, t)| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (3.11)$$

Hipotezden her $n > n_0$ için

$$\left| \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} e^{it x_k} - e^{it L} \right| < \frac{\varepsilon}{3} \quad (3.12)$$

olacak biçimde bir n_0 sayısı vardır. Şimdi (3.9), (3.10), (3.11) ve (3.12) den her $n > n_0$ için

$$\left| \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} e^{it_0 x_k} - e^{it_0 L} \right| \leq \varepsilon$$

elde edilir. Bu da ispatı tamamlar.

Uyarı: Teorem 3.2.6 da $A = C_1$ alınırsa Teorem 2.1.11 elde edilir.

3.3. A-İstatistiksel Üst Limit ve Alt Limit

Kısım (2.2) de, reel terimli bir dizinin değme noktaları ve limit noktaları kavramlarının istatistiksel benzerleri, istatistiksel değme ve istatistiksel limit noktalarının temel özellikleri verilerek, bu noktalar ile alışılmış limit noktaları arasındaki benzerlik ve farklar verilmiştir. Bu kısımda, öncelikle bu kavramların A-istatistiksel benzerleri verilecektir. Daha sonra ise yine kısım (2.2) de verilen, istatistiksel üst limit ve alt limit kavramları ve bu kavramlara ilişkin teoremlerin A-istatistiksel benzerleri verilecektir.

Şimdi bazı önemli terminoloji ve notasyonları vereceğiz.

$\{x_{k(j)}\}_{j=1}^{\infty}$, $x = (x_k)$ dizisinin bir alt dizisi ve $K := \{k(j) : j \in \mathbb{N}\}$ olmak üzere $\delta_A(K) = 0$ ise $\{x\}_K$ dizisine sıfır A-yoğunluğa sahip bir alt dizi veya bir A-ince alt dizi denir. Eğer $\delta_A(K) > 0$ veya K cümlesi bir A-yoğunluğa sahip değilse $\{x\}_K$ dizisine $x = (x_k)$ dizisinin A-ince olmayan bir alt dizisi denir (Connor ve Kline 1996).

Tanım 3.3.1: Bir x dizisinin bir λ sayısına yakınsayan A-ince olmayan bir alt dizisi varsa, λ sayısına x dizisinin bir A-istatistiksel limit noktası denir (Connor ve Kline 1996).

Bir x dizisinin A-istatistiksel limit noktalarının cümlesi Λ_x^A ile gösterilir.

Örnek 3.3.2:

$$a_{nk} = \begin{cases} 1 & , \quad k = n^2, (n = 1, 2, \dots) \\ 0 & , \quad \text{d.d.} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan $A = (a_{nk})$ matrisini gözönüne alalım. Örnek 2.1.4 de tanımlanan $x = (x_k)$ dizisi için $L_x = \{0,1\}$ ve $\Lambda_x^A = \{1\}$ dir.

Herhangi bir x dizisi için $\Lambda_x^A \subseteq L_x$ olduğu açıktır. Λ_x^A ve L_x çok farklı olabilir.

Örnek 3.3.3: $\{r_k\}_{k=1}^{\infty}$, değer cümlesi tüm rasyonel sayılar cümlesi olan bir dizi ve $x = (x_k)$ dizisi

$$x_k = \begin{cases} k & , \quad k = n^2, (n = 1, 2, \dots) \\ r_k & , \quad \text{d.d.} \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. Örnek 3.3.2 de tanımlanan $A = (a_{nk})$ matrisi için $\Lambda_x^A = \emptyset$ ve $\{r_k : k \in \mathbb{N}\}$ cümlesi $\mathbb{R}$ de yoğun olduğundan $L_x = \mathbb{R}$ dir.

Şimdi Tanım 2.2.3' ün bir A-istatistiksel benzerini vereceğiz.

Tanım 3.3.4: Her $\varepsilon > 0$ için $\{k \in \mathbb{N} : |x_k - \gamma| < \varepsilon\}$ cümlesi sıfır A-yoğunluğa sahip değilse γ sayısına x dizisinin bir A-istatistiksel değme noktasıdır denir (Connor ve Kline 1996).

Bir x dizisinin tüm A-istatistiksel değme noktalarının cümlesi Γ_x^A ile gösterilir. Herhangi bir x dizisi için $\Gamma_x^A \subseteq L_x$ olduğu açıktır. Γ_x^A ve Λ_x^A arasındaki içerme bağıntısı aşağıdaki önerme ile verilmektedir.

Önerme 3.3.5: Herhangi bir x dizisi için $\Lambda_x^A \subseteq \Gamma_x^A$ dır (Connor ve Kline 1996).

Eğer, $\text{st}_A - \lim x = \lambda$ ise $\Lambda_x^A = \Gamma_x^A = \{\lambda\}$ dır. Fakat karşıtı doğru değildir. $A = C_1$ alındığında, $x_k = \{1 + (-1)^k\}k$ şeklinde tanımlanan $x = (x_k)$ dizisi için kısım (2.2) de $\Lambda_x^{C_1} = \Gamma_x^{C_1} = \{0\}$ fakat $\text{st}_{C_1} - \lim x$ in mevcut olmadığı belirtilmiştir.

Verilen bir x dizisinin A-istatistiksel yakınsaklığı veya A-istatistiksel yakınsak olmayışı, x dizisinin A-ince bir alt dizisinin değerlerini değiştirmekle değişmez.

Şimdi aynı özelliğin, A-istatistiksel değme noktaları içinde geçerli olduğunu göstereceğiz.

Teorem 3.3.6: x ve y A -h.h.k için $x_k = y_k$ olacak şekilde iki dizi ise $\Gamma_x^A = \Gamma_y^A$ ve $\Lambda_x^A = \Lambda_y^A$ dır.

İspat: A -h.h.k için $x_k = y_k$ olsun. Şimdi $K := \{k \in \mathbb{N} : x_k = y_k\}$ olsun. O halde $\delta_A(K) \neq 0$ dır. Eğer $\gamma \in \Gamma_x^A$ ise her $\varepsilon > 0$ için $\delta_A\{k \in \mathbb{N} : |x_k - \gamma| < \varepsilon\} \neq 0$ ve $\delta_A\{k \in K : |y_k - \gamma| < \varepsilon\} \neq 0$ dır.

$$\{k \in K : |y_k - \gamma| < \varepsilon\} \subseteq \{k \in \mathbb{N} : |y_k - \gamma| < \varepsilon\}$$

olduğundan $\delta_A\{k \in \mathbb{N} : |y_k - \gamma| < \varepsilon\} \neq 0$ olup $\gamma \in \Gamma_y^A$ dır. O halde $\Gamma_x^A \subseteq \Gamma_y^A$. Simetri ile $\Gamma_y^A \subseteq \Gamma_x^A$ elde edilir. Böylece $\Gamma_x^A = \Gamma_y^A$ dır.

Şimdi $\Lambda_x^A = \Lambda_y^A$ olduğunu göstereceğiz. Bunun için $\delta_A\{k : x_k \neq y_k\} = 0$ olduğunu kabul edelim ve $\lambda \in \Lambda_x^A$ olsun. Bu durumda $x = (x_k)$ dizisinin λ sayısına yakınsayan A -ince olmayan bir $\{x\}_K$ alt dizisi vardır.

$$K = \{k : k \in K \text{ ve } x_k \neq y_k\} \cup \{k : k \in K \text{ ve } x_k = y_k\}$$

olduğundan

$$\delta_A(K) = \delta_A\{k : k \in K \text{ ve } x_k \neq y_k\} + \delta_A\{k : k \in K \text{ ve } x_k = y_k\}$$

dır. $\delta_A(K) \neq 0$ ve $\delta_A\{k : k \in K \text{ ve } x_k \neq y_k\} = 0$ olduğundan $\delta_A\{k : k \in K \text{ ve } x_k = y_k\} \neq 0$ elde edilir. Dolayısıyla son cümle $\{y\}_K$ dizisinin A -ince olmayan bir $\{y\}_K$ alt dizisinin λ sayısına yakınsadığını gösterir. Böylece $\lambda \in \Lambda_y^A$ olup $\Lambda_x^A \subseteq \Lambda_y^A$. Simetri ile $\Lambda_y^A \subseteq \Lambda_x^A$ elde edilir. Böylece $\Lambda_x^A = \Lambda_y^A$ dır.

Şimdi A -istatistiksel üst limit ve alt limit kavramlarını ve alışılmış üst limit ve alt limit' in bazı A -istatistiksel benzerlerini vereceğiz.

$A = (a_{nk})$ negatif olmayan regüler bir matris olsun. $x = (x_k)$ dizisi için

$$B_x := \{b \in \mathbb{R} : \delta_A \{k : x_k > b\} \neq 0\}$$

$$A_x := \{a \in \mathbb{R} : \delta_A \{k : x_k < a\} \neq 0\}$$

olsun.

Burada $\delta_A(K) > 0$ veya K cümlesi A -yoğunluğa sahip değil ise $\delta_A(K) \neq 0$ yazacağız.

Tanım 3.3.7: A negatif olmayan regüler bir matris ve $x = (x_k)$ reel terimli bir dizi olsun. x dizisinin A -istatistiksel üst limiti

$$\text{st}_A - \lim \sup x = \begin{cases} \sup B_x & , \quad B_x \neq \emptyset \\ -\infty & , \quad B_x = \emptyset \end{cases}$$

ile verilir. Benzer şekilde x dizisinin A -istatistiksel alt limiti

$$\text{st}_A - \lim \inf x = \begin{cases} \inf A_x & , \quad A_x \neq \emptyset \\ +\infty & , \quad A_x = \emptyset \end{cases}$$

ile verilir. Tanım 3.3.7 de $A = C_1$ alınırsa Tanım 2.2.6 elde edilir.

Şimdi bir örnek verelim.

Örnek 3.3.8:

$$a_{nk} = \begin{cases} \frac{n}{2(n+1)} & , \quad k = n^2 + 1 \\ 1 - \frac{n}{2(n+1)} & , \quad k = n^2 + 2, \quad (n = 1, 2, \dots) \\ 0 & , \quad \text{d.d.} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan $A = (a_{nk})$ matrisini ve

$$x_k = \begin{cases} \frac{1}{k} & , \quad k = n^2 + 1 \\ 2 & , \quad k = n^2 + 2 \\ k & , \quad k = n^2 \\ 0 & , \quad \text{d.d.} \end{cases} , (n = 1, 2, \dots)$$

şeklinde tanımlanan $x = (x_k)$ dizisini gözönüne alalım. $A = (a_{nk})$ matrisinin negatif olmayan regüler bir matris olduğu açıktır. x dizisi üstten sınırlı bir dizi değildir. Fakat $\delta_A \{k : |x_k| > 2\} = 0$ olduğundan x dizisi A -istatistiksel sınırlı bir dizidir.

Hemen belirtelim ki;

$$D := \{k = n^2 : n = 1, 2, \dots\} \text{ için } \delta(D) = 0$$

$$E := \{k = n^2 + 1 : n = 1, 2, \dots\} \text{ için } \delta(E) = 0$$

$$F := \{k = n^2 + 2 : n = 1, 2, \dots\} \text{ için } \delta(F) = 0$$

olmasına rağmen

$$\delta_A(D) = \lim_n \sum_{k \in D} a_{nk} = 0$$

$$\delta_A(E) = \lim_n \sum_{k \in E} a_{nk} = \lim_n \frac{n}{2(n+1)} = \frac{1}{2}$$

$$\delta_A(F) = \lim_n \sum_{k \in F} a_{nk} = \lim_n \left[1 - \frac{n}{2(n+1)} \right] = \frac{1}{2}$$

dir. Ayrıca $E \cap F = \emptyset$ ve $D \cap E \cap F = \emptyset$ olduğundan

$$\delta_A(E \cup F) = \delta_A(E) + \delta_A(F) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

ve

$$\delta_A(D \cup E \cup F) = \delta_A(D) + \delta_A(E) + \delta_A(F) = 0 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

elde edilir.

Böylece $B_x = (-\infty, 2)$ ve $A_x = (0, +\infty)$ olup $st_A - \limsup x = 2$ ve $st_A - \liminf x = 0$ dır. x dizisi 0'a ve 2'ye yakınsayan, A -yoğunluğu $\frac{1}{2}$ olan ayrık iki diziye sahip olduğundan x dizisi A -istatistiksel yakınsak değildir.

Örnek 3.3.8 de tanımlanan A matrisi ve x dizisi için $\Gamma_x^A = \{0, 2\}$ ve $st_A - \limsup x$ bu cümlemin en büyük elemanına, $st_A - \liminf x$ bu cümlemin en küçük elemanına eşittir.

O halde, bu gözlemlere göre aşağıdaki iki teoremi verebiliriz.

Teorem 3.3.9: $\beta := st_A - \limsup x$ sonlu ise her $\varepsilon > 0$ için

$$\delta_A \{k : x_k > \beta - \varepsilon\} \neq 0 \text{ ve } \delta_A \{k : x_k > \beta + \varepsilon\} = 0. \quad (3.13)$$

Karşıt olarak her $\varepsilon > 0$ için (3.13) gerçekleşirse $\beta := st_A - \limsup x$ dir.

İspat: $\beta := st_A - \limsup x$ sonlu olsun. Bu durumda $\beta_x \neq \emptyset$ ve $\sup B_x = \beta$ dir.

O halde

(i) her $b \in B_x$ için $b \leq \beta$

(ii) her $\varepsilon > 0$ için $b > \beta - \varepsilon$ olacak biçimde bir $b \in B_x$ vardır.

$$K' := \{k : x_k > b\} \subseteq K'' := \{k : x_k > \beta - \varepsilon\}$$

ve $b \in B_x$ olduğundan $\delta_A \{k : x_k > \beta - \varepsilon\} \neq 0$ dır. Şimdi $\delta_A \{k : x_k > \beta + \varepsilon\} = 0$ olduğunu gösterelim. $\delta_A \{k : x_k > \beta + \varepsilon\} \neq 0$ olsun. Bu durumda $\beta + \varepsilon \in B_x$ dir. Bu ise β sayısının B_x cümlesinin en küçük üst sınırı olmasıyla çelişir. O halde $\delta_A \{k : x_k > \beta + \varepsilon\} = 0$ dır.

Karşıt olarak her $\varepsilon > 0$ için (3.13) gerçekleşirse $\beta = st_A - \limsup x$ olduğu açıktır.

Benzer şekilde aşağıdaki teoremde ispatlanabilir.

Teorem 3.3.10: $\alpha := \text{st}_A - \liminf x$ sonlu ise her $\varepsilon > 0$ için

$$\delta_A \{k : x_k < \alpha + \varepsilon\} \neq 0 \text{ ve } \delta_A \{k : x_k < \alpha - \varepsilon\} = 0. \quad (3.14)$$

Karşıt olarak her $\varepsilon > 0$ için (3.14) gerçekleşirse $\alpha = \text{st}_A - \liminf x$ dir.

Kısım (2.2) deki gözlemlere paralel olarak A-istatistiksel değme noktası tanımı ile Teorem 3.3.9 ve 3.3.10 gözönüne alınarak; $\text{st}_A - \limsup x$, x dizisinin en büyük A-istatistiksel değme noktası, $\text{st}_A - \liminf x$, x dizisinin en küçük A-istatistiksel değme noktası olarak yorumlayabiliriz. Aşağıdaki teorem bu gözlemleri kuvvetlendirir.

Teorem 3.1.11: Herhangi bir x dizisi için

$$\text{st}_A - \liminf x \leq \text{st}_A - \limsup x$$

dir.

İspat: İlk önce $\text{st}_A - \limsup x = -\infty$ durumunu gözönüne alalım. Bu durumda $B_x = \emptyset$. Her bir $b \in \mathbb{R}$ için $\delta_A \{k : x_k > b\} = 0$ dır, bu ise $\delta_A \{k : x_k \leq b\} = 1$ olduğunu gösterir, böylece her bir $a \in \mathbb{R}$ için $\delta_A \{k : x_k < a\} = 0$ dır. O halde $\text{st}_A - \liminf x = -\infty$.

$\text{st}_A - \limsup x = +\infty$ durumunu ispatlamaya gerek yoktur. Şimdi $\beta = \text{st}_A - \limsup x$ sonlu ve $\alpha := \text{st}_A - \liminf x$ olsun. Verilen bir $\varepsilon > 0$ için $\beta + \varepsilon \in A_x$ olduğunu göstereceğiz; böylece $\alpha \leq \beta + \varepsilon$ olacaktır. $\beta = \sup B_x$ olduğundan Teorem 3.3.9 dan $\delta_A \left\{k : x_k > \beta + \frac{\varepsilon}{2}\right\} = 0$ dır, bu ise $\delta_A \left\{k : x_k \leq \beta + \frac{\varepsilon}{2}\right\} = 1$ olduğunu ifade eder.

$$K' := \left\{k : x_k < \beta + \frac{\varepsilon}{2}\right\} \subseteq K'' := \{k : x_k < \beta + \varepsilon\} \text{ ve } \delta_A \left\{k : x_k \leq \beta + \frac{\varepsilon}{2}\right\} = 1$$

olduğundan $\delta_A \{k : x_k \leq \beta + \varepsilon\} = 1$ olmak zorundadır. Böylece $\beta + \varepsilon \in A_x$ olur. $\alpha = \inf A_x$ olduğundan $\alpha \leq \beta + \varepsilon$ olup ε keyfi olduğundan $\alpha \leq \beta$ dır. Bu da ispatı tamamlar.

Teorem 3.3.11 den aşağıdaki sonucu elde ederiz.

Sonuç 3.3.12: Herhangi bir x dizisi için

$$\liminf x \leq st_A - \liminf x \leq st_A - \limsup x \leq \limsup x$$

dir.

A-istatistiksel sınırlılık $st_A - \limsup x$ ve $st_A - \liminf x$ değerlerinin sonlu olmasını gerektirir ve de Teorem 3.3.9 ve Teorem 3.3.10'un (3.13) ve (3.14) şartları gerçekleşir.

Aşağıdaki sonuç yakınsak dizilerin temel bir özelliğinin bir A-istatistiksel benzeridir.

Teorem 3.3.13: A-istatistiksel sınırlı bir x dizisinin A-istatistiksel yakınsak olması için gerek ve yeter şart

$$st_A - \liminf x = st_A - \limsup x$$

olmasıdır.

İspat: $\beta := st_A - \limsup x$ ve $\alpha := st_A - \liminf x$ olsun. İlk önce $st_A - \liminf x = L$ ve $\varepsilon > 0$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda

$$\delta_A \{k : |x_k - L| \geq \varepsilon\} = 0 \text{ dır. } \{k : x_k > L + \varepsilon\} \subseteq \{k : |x_k - L| \geq \varepsilon\} \text{ olduğundan}$$

$$\delta_A \{k : x_k > L + \varepsilon\} = 0. \text{ Şimdi } \beta \leq L \text{ olduğunu gösterelim. Kabul edelim ki } L < \beta$$

olsun. $st_A - \limsup x = \beta$ olduğundan her $b \in B_x$ için $b \leq \beta$ ve $\delta_A \{k : x_k > b\} \neq 0$ dır.

$$\{k : x_k > b\} \subseteq \{k : x_k > L + \varepsilon\} \text{ ve } \delta_A \{k : x_k > b\} \neq 0 \text{ olduğundan}$$

$\delta_A \{k : x_k > L + \varepsilon\} \neq 0$ olur bu ise $\delta_A \{k : x_k > L + \varepsilon\} = 0$ olmasıyla çelişir. O halde $\beta \leq L$ dir.

Simetri ile $\delta_A \{k : x_k < L - \varepsilon\} = 0$ olduğundan $L \leq \alpha$ dır. Böylece $\beta \leq \alpha$ elde edilir. Teorem 3.3.11 den $\alpha = \beta$ dır.

Karşıt olarak $\alpha = \beta$ olduğunu kabul edelim ve $L := \alpha$ tanımlayalım. $\varepsilon > 0$ için Teorem 3.39 ve Teorem 3.3.10'un (3.13) ve (3.14) şartlarından

$\delta_A \left\{ k : x_k > L + \frac{\varepsilon}{2} \right\} = 0$ ve $\delta_A \left\{ k : x_k < L - \frac{\varepsilon}{2} \right\}$ dir. Böylece $st_A - \lim x = L$ elde edilir.

Buck (1953), bir x dizisi, $\limsup x$ değerine C_1 -toplanabilirse bu dizinin aynı değere istatistiksel yakınsak olması gerektiğini gösterdi. Bu sonucun istatistiksel bir benzeri Fridy ve Orhan (1997) tarafından verildi (Teorem 2.2.15). Şimdi bu sonucun bir A -istatistiksel benzerini vereceğiz.

Teorem 3.3.14: Üstten sınırlı bir x dizisi $L := st_A - \limsup x$ değerine A -toplanabilir ise $st_A - \lim x = L$ dir.

İspat: $x = (x_k)$ dizisi L sayısına A -istatistiksel yakınsak olmasın. Teorem 3.3.13 den $st_A - \liminf x < L$ dir. $st_A - \liminf x$ tanımından $\delta_A \{k : x_k < M\} \neq 0$ olacak biçimde $M < L$ sayısı vardır. $K' := \{k : x_k < M\}$ olsun. L nin tanımından her $\varepsilon > 0$ için $\delta_A \{k : x_k > L + \varepsilon\} = 0$. $K'' := \{k : M \leq x_k \leq L + \varepsilon\}$ ve $K''' := \{k : x_k > L + \varepsilon\}$ şeklinde tanımlayalım. x dizisi üstten sınırlı olduğundan $B := \sup_k x_k < \infty$ olacak biçimde bir B sayısı vardır; ayrıca $\delta_A(K') \neq 0$ olduğundan $\limsup \sum_{n \in K'} a_{nk} \geq d > 0$ olacak biçimde bir d sayısı vardır. ^{Böyle} Her bir $n \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned}
 (Ax)_n &= \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} x_k = \sum_{k \in K'} a_{nk} x_k + \sum_{k \in K''} a_{nk} x_k + \sum_{k \in K'''} a_{nk} x_k \\
 &\leq M \sum_{k \in K'} a_{nk} + (L + \varepsilon) \sum_{k \in K''} a_{nk} + B \sum_{k \in K'''} a_{nk} \\
 &= M \sum_{k \in K'} a_{nk} + (L + \varepsilon) \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} - (L + \varepsilon) \sum_{k \in K'} a_{nk} + o(1) \\
 &= - \sum_{k \in K'} a_{nk} [-M + (L + \varepsilon)] + (L + \varepsilon) \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} + o(1) \\
 &\leq L \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} - d(L - M) + \varepsilon \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} - d \right) + o(1)
 \end{aligned}$$

$\varepsilon > 0$ keyfi olduğundan

$$\limsup Ax \leq L - d(L - M) < L$$

elde edilir. O halde x dizisi L sayısına A -toplanabilir değildir. Bu da ispatı tamamlar.

Simetri ile alt sınır için aşağıdaki sonucu elde ederiz.

Sonuç 3.3.15: Alttan sınırlı bir x dizisi $L := st_A - \liminf x$ değerine A -toplanabilir ise $st_A - \lim x = L$ dir.

Teorem 3.3.14 de üst sınırın atılamayacağını veya A -istatistiksel üst sınır zayıf şartı ile değiştirilemeyeceğini $A = C_1$ alınması halinde Örnek 2.2.17 den elde edilir.

3.4. A-istatistiksel Çekirdek

Bu kısımda, kısım 2.3 de kompleks terimli diziler için verilen tanım ve teoremlerin A -istatistiksel benzerlerini vereceğiz.

Teorem 3.4.1: Herhangi bir kompleks $x = (x_k)$ dizisi için $\mathcal{H}_A(x)$, A -h.h.k için x_k yı içeren tüm kapalı yarı-düzlemlerin koleksiyonu olsun, yani

$$\mathcal{H}_A(x) := \{H : H \text{ kapalı yarı - düzlem ve } \delta_A \{k : x_k \notin H\} = 0\}$$

olsun. x dizisinin A -istatistiksel çekirdeğini

$$st_A - \text{çek}\{x\} := \bigcap_{H \in \mathcal{H}_A(x)} H$$

ile tanımlayacağız. $K - \text{çek}\{x\}$ nin tanımında $C_n(x)$ kapalı konveks hull'u $\{x_k\}_{k \geq n}$ ni içeren tüm kapalı yarı düzlemlerin arakesitidir. $st_A - \text{çek}\{x\}$ nin tanımında, $\{x_k\}_{k \geq n}$ in yerine A -yoğunluğu 1 olan bir alt dizi alındı. Böylece x dizisi için

$st_A - \text{çek}\{x\} \subseteq K - \text{çek}\{x\}$ dir. x dizisi reel değerli ve A -istatistiksel sınırlı bir dizi ise

$$st_A - \text{çek}\{x\} = [st_A - \liminf x, st_A - \limsup x]$$

olacağı açıktır.

Eğer x reel dizisi A -istatistiksel sınırlı değil ise x dizisinin A -istatistiksel çekirdeği ya $[st_A - \liminf x, \infty)$, $(-\infty, \infty)$ ya da $(\infty, st_A - \limsup x]$ aralığıdır.

Aşağıdaki teorem Lemma 2.3.4 (Fridy ve Orhan 1997) in bir A-istatistiksel benzeridir.

Teorem 3.4.2: $x = (x_k)$, A-istatistiksel sınırlı bir dizi ve her $z \in \mathbb{C}$ için

$$B_x(z) := \{w \in \mathbb{C} : |w - z| \leq st_A - \limsup |x_k - z|\}$$

olsun. Bu durumda

$$st_A - çek\{x\} := \bigcap_{z \in \mathbb{C}} B_x(z)$$

dir.

İspat: $st_A - \limsup x$ tanımından ve Teorem 3.3.9 dan $B_x(z)$ diski A-h.h.k için x_k yi içeren z merkezli tüm kapalı disklerin arakesitine eşittir. İlk önce $w \notin \bigcap_{z \in \mathbb{C}} B_x(z)$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda bir $z^* \in \mathbb{C}$ için $w \notin B_x(z^*)$ dir. H , $B_x(z^*)$ in sınır eğrisine teğet ve w ve z^* noktalarını içeren doğruya dik, sınır doğrusuna sahip ve $B_x(z^*)$ dizisini içeren yarı-düzlem olsun. $B_x(z^*) \subset H$ ve $B_x(z^*)$ A-h.h.k için x_k yi içerdiğinden $H \in \mathcal{H}_A(x)$ dir. $w \notin H$ olduğundan $w \notin \bigcap_{H \in \mathcal{H}_A(x)} H$ dir. O halde

$$st_A - çek\{x\} \subseteq \bigcap_{z \in \mathbb{C}} B_x(z) \text{ dir.}$$

$$\text{Şimdi } \bigcap_{z \in \mathbb{C}} B_x(z) \subseteq \bigcap_{H \in \mathcal{H}_A(x)} H \text{ olduğunu gösterelim. } w \notin \bigcap_{H \in \mathcal{H}_A(x)} H \text{ ise } w \notin H$$

olacak biçimde bir $H \in \mathcal{H}_A(x)$ vardır. L , H nin sınırına dik ve w dan geçen bir doğru olsun ve p , w ve H arasında L nin parçasının orta noktası olsun. z , $z \in H$ olacak biçimde L nin bir noktası olsun.

$$B(z) = \{\xi \in \mathbb{C} : |\xi - z| \leq |p - z|\}$$

diskini gözönüne alalım. x , A-istatistiksel sınırlı ve A-h.h.k için $x_k \in H$ olduğundan z yi $|p - z| = st_A - \limsup |x_k - z|$ olacak biçimde p den yeterince uzak seçebiliriz. Böylece

$B(z)$, $B_x(z)$ disklerinden biridir ve $w \notin B_x(z)$ olduğundan $w \notin \bigcap_{z \in \mathcal{C}} B_x(z)$ dir. O

halde $\bigcap_{z \in \mathcal{C}} B_x(z) \subseteq \bigcap_{H \in \mathcal{H}_A(x)} H$ olup bu da ispatı tamamlar.

x dizisi A -istatistiksel sınırlı bir dizi değil ise Teorem 3.4.2 geçerli değildir.

Örnek 3.4.3:

$$a_{nk} = \begin{cases} 1 & , \quad k = n^2, (n = 1, 2, \dots) \\ 0 & , \quad \text{d.d.} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan $A = (a_{nk})$ matrisini ve $x_k = k$, $(k \in \mathbb{N})$ şeklinde tanımlanan $x = (x_k)$ dizisini gözönüne alalım. A matrisi negatif olmayan regüler bir matris olup x dizisi A -istatistiksel sınırlı ve A -istatistiksel değme noktalarına sahip değildir. Böylece $st_A - \text{çek}\{x\} = \emptyset$ dir. Herhangi bir $z \in \mathcal{C}$ için A -h.h.k için x_k yı içeren sonlu yarı çaplı bir disk yoktur. $st_A - \limsup |x_k - z| = \infty$ ve $B_x(z)$, $\mathcal{C}$ nin tamamıdır. Böylece

$$\emptyset = st_A - \text{çek}\{x\} \neq \bigcap_{z \in \mathcal{C}} B_x(z) = \mathcal{C}$$

dir.

Şimdi her bir sınırlı x dizisi için $K - \text{çek}\{Tx\} \subseteq st_A - \text{çek}\{x\}$ olacak şekildeki T -matrislerini karakterize edeceğiz.

Teorem 3.4.4: T matrisi için $\sup_n \sum_{k=1}^{\infty} |t_{nk}| < \infty$ olsun. Her bir $x \in \ell_{\infty}$ için

$K - \text{çek}\{Tx\} \subseteq st_A - \text{çek}\{x\}$ olması için gerek ve yeter şart

(i) $T \in \tau_A^*$, yani T regüler ve $\delta_A(E) = 0$ özellikli her $E \subseteq \mathbb{N}$ için

$$\lim_n \sum_{k \in E} |t_{nk}| = 0$$

$$(ii) \lim_n \sum_{k=1}^{\infty} |t_{nk}| = 1$$

olmasıdır.

İspat: Gereklilik: x, L sayısına A -istatistiksel yakınsak ise $\{L\} = st_A - çek\{x\} \supseteq K - çek\{Tx\}$. Her $x \in \ell_\infty$ için Teorem 2.1.6 dan Tx sınırlı olup $K - çek\{Tx\} = \{L\}$ dir. Böylece Tx, L sayısına yakınsaktır. Teorem 3.1.8 den T regüler ve $E \subseteq \mathbb{N}$ için $\delta_A(E) = 0$ olduğunda $\lim_n \sum_{k \in E} |t_{nk}| = 0$ dır. O halde (i) şartı gerçekleşir.

Ayrıca

$$K - çek\{Tx\} \subseteq st_A - çek\{x\} \subseteq K - çek\{x\}$$

dir.

$\alpha = 1$ için Teorem 2.3.2 den $\limsup_n \sum_{k=1}^{\infty} |t_{nk}| \leq 1$; T regüler olduğundan bu

$\lim_n \sum_{k=1}^{\infty} |t_{nk}| = 1$ olmasına denktir. Bu da (ii) nin gerekliliğini ispatlar.

Yeterlilik: (i) ve (ii) gerçeklensin ve $w \in K - çek\{Tx\}$ olsun. Herhangi bir $z \in \mathbb{C}$ için

$$\begin{aligned} |w - z| &\leq \limsup_n |z - (Tx)_n| \\ &= \limsup_n \left| z - \sum_{k=1}^{\infty} t_{nk} x_k \right| \\ &= \limsup_n \left| \sum_{k=1}^{\infty} t_{nk} (z - x_k) + z \left(1 - \sum_{k=1}^{\infty} t_{nk} \right) \right| \\ &\leq \limsup_n \left| \sum_{k=1}^{\infty} t_{nk} (z - x_k) \right| + \limsup_n |z| \left| 1 - \sum_{k=1}^{\infty} t_{nk} \right| \\ &= \limsup_n \left| \sum_{k=1}^{\infty} t_{nk} (z - x_k) \right|. \end{aligned} \quad (3.15)$$

$r = st_A - \limsup |x_k - z|$ olsun, $\varepsilon > 0$ verilsin ve $E = \{k: |z - x_k| > r + \varepsilon\}$ olsun. $r = st_A - \limsup |x_k - z|$ olduğundan $st_A - \limsup x$ tanımından $\delta_A(E) = 0$ ve

$$\begin{aligned}
\left| \sum_{k=1}^{\infty} t_{nk} (z - x_k) \right| &= \left| \sum_{k \in E} (z - x_k) + \sum_{k \notin E} (z - x_k) \right| \\
&\leq \sum_{k \in E} |t_{nk}| |z - x_k| + \sum_{k \notin E} |t_{nk}| |z - x_k| \\
&\leq \sup_k |z - x_k| \sum_{k \in E} |t_{nk}| + (r + \varepsilon) \sum_{k \notin E} |t_{nk}|
\end{aligned}$$

dır. (i) ve (ii) den

$$\limsup_n \left| \sum_{k=1}^{\infty} t_{nk} (z - x_k) \right| \leq r + \varepsilon.$$

O halde (3.15) den $|w - z| \leq r + \varepsilon$ olup $\varepsilon > 0$ keyfi olduğundan $|w - z| < r$ dir. Böylece $|w - z| \leq st_A - \limsup |x_k - z|$ olup $w \in B_x(z)$ dir. Teorem 3.4.2 den $w \in st_A - \text{çek}\{x\}$ dir, bu da ispatı tamamlar.

Teorem 3.4.4 den aşağıdaki sonucu hemen elde edebiliriz.

Sonuç 3.4.5: T matrisi için $\sup_n \sum_{k=1}^{\infty} |t_{nk}| < \infty$ ve Teorem 3.4.4' ün (i) ve (ii)

şartları gerçekleşiyorsa her bir $x \in \ell_{\infty}$ için

$$st_A - \text{çek}\{Tx\} \subseteq st_A - \text{çek}\{x\}$$

dir.

Şimdi Sonuç 3.4.5 in karşınının doğru olmadığını göstereceğiz.

Örnek 3.4.6:

$$a_{nk} = \begin{cases} 1 & , \quad k = n^2 + 1, (n = 1, 2, \dots) \\ 0 & , \quad \text{d.d.} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan $A = (a_{nk})$ matrisini gözönüne alalım ve T matrisini A-h.h. n için $(Tx)_n = x_n$ şeklinde tanımlayalım. Bu durumda Teorem 3.3.6 dan $st_A - \text{çek}\{Tx\} = st_A - \text{çek}\{x\}$ elde edilir. O halde

$$t_{nk} = \begin{cases} 1 & , \quad k = n \text{ ve } n \text{ tam kare de\u011fil} \\ 1 & , \quad k \leq n \text{ ve } n \text{ tam kare} \\ 0 & , \quad \text{d.d.} \end{cases}$$

ise

$$(Tx)_n = \begin{cases} x_n & , \quad n \text{ tam kare de\u011fil} \\ \sum_{k=1}^n x_k & , \quad n \text{ tam kare} \end{cases}$$

olur. T matrisi i\u00e7in

$$\sum_{k=1}^{\infty} |t_{nk}| = \begin{cases} 1 & , \quad n \text{ tam kare de\u011fil} \\ n & , \quad n \text{ tam kare} \end{cases}$$

olup $\sup_n \sum_{k=1}^{\infty} |t_{nk}| = \infty$ bulunur. Ayrıca (ii) deki $\lim_n \sum_{k=1}^{\infty} |t_{nk}|$ limitinin mevcut olmadığı da açıktır. Di\u011fer yandan $E := \{k = n^2 : n = 1, 2, \dots\}$ olmak \u00fczere $\delta_A(E) = 0$ dır. Kolayca g\u00f6r\u00fclce\u011fi gibi

$$\sum_{k \in E} |t_{nk}| = \begin{cases} 0 & , \quad n \text{ tam kare de\u011fil} \\ \sqrt{n} & , \quad n \text{ tam kare} \end{cases}$$

oldu\u011fundan (i) deki $\lim_n \sum_{k \in E} |t_{nk}|$ limiti de mevcut de\u011gildir.

BÖLÜM 4

SINIRLI A-İSTATİSTİKSEL YAKINSAK DİZİLERİN SINIRLI ÇARPAN UZAYLARI

Bu bölümde A , satırları spread şartını gerçekleyen, negatif olmayan regüler bir matris olmak üzere A -istatistiksel yakınsak diziler uzayının lokal konveks bir FK topolojisi ile donatılamayacağını göstereceğiz. Ayrıca sınırlı A -istatistiksel yakınsak diziler uzayının sınırlı çarpan uzayını oluşturup, “ β IN programı” kullanılarak, Fridy ve Miller’ e ait bir sonucun benzeri sınırlı çarpanlar için verilecektir.

4.1. A-İstatistiksel Yakınsak Dizilerin Topolojik Özellikleri

Toplanabilme teorisinde yaygın bir konu, klasik tipteki problemlere uygulamak için yumuşak (soft) metodlar aramaktır. Bunun bir örneği, “FK programı” dır.

Tam, lineer bir metrik uzaya Fréchet uzayı denir. H bir topolojik vektör (Hausdorff) uzayı olsun. E lokal konveks Fréchet uzayı ve E, H nın bir lineer alt uzayı olmak üzere E uzayının topolojisi, H topolojisinin E uzayına kısıtlanmasından daha geniş olsun yani,

$$I : E \rightarrow H, I(x) = x$$

ile verilen içirme (inclusion) dönüşümü sürekli olsun. Bu durumda E uzayına bir FH-uzayı denir.

w reel (ya da kompleks) terimli tüm diziler uzayı olsun. Eğer $H = w$ ise böyle bir FH-uzayına FK-uzayı denir. Böylece bir FK-uzayı, $P_n(x) = x_n, (n = 1, 2, \dots)$ ile tanımlı sürekli koordinatlara sahip lokal konveks bir Fréchet dizi uzayıdır (Wilansky 1984). FK-uzaylarının temel özellikleri Wilansky (1984) de bulunabilir.

Örneğin c, c_0 ve ℓ_∞ dizi uzayları $\|x\| = \sup_k |x_k|$ normu altında birer FK-uzaylarıdır. Hatta bir $A = (a_{nk})$ matrisinin toplanabilirlik alanı olan $c_A = \{x : Ax \in c\}$ uzayı

$$p_n(x) = |x_n|, (n = 1, 2, \dots)$$

$$h_n(x) = \sup_m \left| \sum_{k=1}^m a_{nk} x_k \right|, \quad (n = 1, 2, \dots)$$

$$p_0(x) = \sup_n \left| \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} x_k \right|$$

yarı normları ile bir FK-uzayıdır (Wilansky 1984, sh. 63).

Reel terimli tüm sınırlı istatistiksel yakınsak diziler uzayının, ℓ_{∞} normlu lineer uzayının kapalı bir alt uzayı olduğu ve ℓ_{∞} içinde hiç bir yerde yoğun olmadığı Šalát (1980) tarafından gösterilmiştir. Ayrıca Connor (1988) kompleks terimli tüm istatistiksel yakınsak diziler uzayının lokal konveks bir FK topolojisi ile donatılamayacağını göstermiştir.

Kline (1995), Bennett ve Kalton (1973) un aşağıda vereceğimiz teoremini kullanarak; satırları spread olan yani;

$$\lim_n \max_k |a_{nk}| = 0 \quad (4.1)$$

şartını gerçekleyen negatif olmayan regüler bir $A = (a_{nk})$ matrisi için A-istatistiksel yakınsak diziler uzayının lokal konveks bir FK topolojisi ile donatılamayacağını gösterdi.

Hemen belirtelim ki C_1 ve C_0 matrisleri (4.1) şartını gerçekler.

Bir konveks uzayda, bir cümle mutlak konveks kapalı ve emen ise “fiçi” adını alır. Her fiçinin komşuluk olduğu konveks uzaylara “fiçili” uzay denir (Robertson ve Robertson 1973, sh. 65).

Teorem 4.1.1: S, w nın yoğun bir alt uzayı olsun. Bu durumda aşağıdakiler denktir.

(i) S fiçilidir

(ii) E, S yi içeren lokal konveks bir FK-uzayı ise $E = w$ dır (Bennett ve Kalton 1973).

Kline (1995)’in yaptığı gibi Bennett ve Kalton’ a ait bu sonucu kullanma yerine sayma (counting) fonksiyonları yardımıyla, Bennett (1973) in bir sonucunu kullanarak (4.1) şartını gerçekleyen negatif olmayan regüler bir A matrisi için A-istatistiksel

yakınsak diziler uzayının lokal konveks bir FK topolojisi ile donatılamayacağını göstereceğiz, böylece alternatif bir ispat vereceğiz.

Bu nedenle, öncelikle aşağıdaki terminoloji ve notasyonları vereceğiz.

$r = (r_n)$ pozitif tamsayıların azalmayan sınırsız bir dizisi, $r_1 = 1$ ve $r_n = o(n)$ olsun. Her bir $x \in w$ ve her bir pozitif n tam sayısı için sayma fonksiyonu, $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ cümlesindeki sıfırdan farklı elemanların sayısı olarak tanımlanır ve $c_n(x)$ ile gösterilir.

w nin herhangi bir E alt cümlesi verilsin,

$$\sigma(E, r) = \{x \in E : c_n(x) \leq r_n ; n = 1, 2, \dots\}$$

cümlesini gözönüne alalım. $\sigma(E, r)$ genelde bir vektör uzayı değildir ve $\sigma(E, r)$ nin lineer gerenine (span) E nin bir seyrek kopyası (scarce copy) denir ve $\Sigma(E, r)$ ile gösterilir (Bennett 1973).

$F: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, sonsuza monoton olarak artan bir fonksiyon olsun. $c_n(x) \leq F(n)$, $(n = 1, 2, \dots)$, şartını gerçekleyen her bir sınırlı $x = (x_k)$ dizisi için $A - \lim x = 0$ ise F , fonksiyonuna A matrisi için birinci çeşit bir sayma fonksiyonu denir (Petersen 1966, sh. 65).

Teorem 4.1.2: Regüler bir $A = (a_{nk})$ matrisinin birinci çeşit bir sayma fonksiyonuna sahip olması için gerek ve yeter şart

$$\lim_n \max_k |a_{nk}| = 0$$

olmasıdır (Petersen 1966).

Şimdi bu kısmın ilk sonucunu verebiliriz.

Teorem 4.1.3: $A = (a_{nk})$ satırları (4.1) şartını gerçekleyen negatif olmayan regüler bir matris olsun. Bu durumda $\Sigma(w, r) \subseteq st_A^0$ dir.

İspat: $z \in \Sigma(w, r)$ olsun. Bu durumda α_k lar skalarlar ve

$$x^{(k)} = (x_n^{(k)}) = (x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}, \dots) \text{ olmak üzere } x^{(k)} \in \sigma(w, r) \text{ için } z = \sum_{k=1}^n \alpha_k x^{(k)}$$

dır. Sabit bir k , $(1 \leq k \leq n)$, için $x^{(k)} \in \sigma(w, r)$ yi gözönüne alalım.

$K := \{m \leq n : x_m^{(k)} \neq 0\}$ olmak üzere, $\sigma(w, r)$ nin tanımından

$$c_n(x^{(k)}) = |\{m \leq n : x_m^{(k)} \neq 0\}| = |\{m \leq n : \chi_K(m) \neq 0\}| \leq r_n$$

elde ederiz. Teorem 4.1.2 den $A - \lim \chi_K = 0$ dır. Böylece $x^{(k)} \in st_A^0$ dır. A-istatistiksel yakınsaklığın lineerliğinden $z \in st_A^0$ elde edilir. Bu da ispatı tamamlar.

w nın her bir seyrek kopyası w da fiçili ve $\Sigma(w, r)$, w da yoğun olduğundan (Bennett 1973) aşağıdaki sonucu verebiliriz.

Sonuç 4.1.4: A satırları (4.1) şartını gerçekleyen negatif olmayan regüler bir matris ise st_A^0 , w da fiçilidir.

Özellikle s_0 ve s_0^0 , w da fiçilidir.

E , w nın bir seyrek kopyasını içeren bir FK-uzayı ise $E = w$ dır (Bennett 1973).

O halde, st_A lokal konveks bir FK topolojisi ile donatılabilseydi, $st_A = w$ olurdu; bu ise mümkün değildir. Böylece aşağıdaki sonucu elde ederiz.

Teorem 4.1.5: A , satırları (4.1) şartını gerçekleyen negatif olmayan regüler bir matris olsun. Bu durumda st_A ve st_A^0 lokal konveks bir FK topolojisi ile donatılamaz.

Böylece Connor (1988)'in aşağıdaki sonucu elde ederiz.

Sonuç 4.1.6: s , lokal konveks bir FK topolojisi ile donatılamaz.

Hatta s_0, s_0 ve s_0^0 dizi uzayları da bir FK topolojisi ile donatılamaz.

Uyarı: A , satırları (4.1) şartını gerçeklemeyen negatif olmayan regüler bir matris ise A-istatistiksel yakınsak diziler uzayının lokal konveks bir FK topolojisi ile donatılabileceğine ilişkin Kline (1995) tarafından verilen örneği aşağıya alıyoruz:

$$A = (a_{nk}) \text{ matrisini } a_{11} = 1, k \geq 2 \text{ için } a_{1k} = 0, n \geq 2 \text{ için}$$

$$a_{nk} = \begin{cases} \frac{1}{2} & , \quad k = n \text{ veya } k = n-1 \\ 0 & , \quad \text{d.d.} \end{cases}$$

şeklinde tanımlayalım. Böylece

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

olur.

A matrisi satırları (4.1) şartını gerçeklemeyen, negatif olmayan regüler bir matristir. $x = ((-1)^n)$ dizisi için $\lim_n \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} x_k = 0$ olduğundan A matrisi yakınsaklıktan daha kuvvetlidir.

Bir $x = (x_k)$ dizisi L sayısına A-istatistiksel yakınsak ise $\delta_A(E) = 0$ olacak biçimde $\mathbb{N}$ nin bir E alt cümlesi vardır ve $K := \mathbb{N} \setminus E = \{k_n : n \in \mathbb{N}\}$ olmak üzere $x_{k_n} \rightarrow L$, $(n \rightarrow \infty)$ dır. Burada

$$\delta_A(K) = \lim_n \frac{1}{2} (\chi_K(n-1) + \chi_K(n))$$

olup $\lim_n \chi_K(n) = 1$ ve böylece x yakınsak bir dizi olmak zorundadır. O halde A-istatistiksel yakınsak diziler, c yakınsak diziler uzayıdır ki bu da bir lokal konveks FK-uzayıdır.

Teorem 4.1.5 den anlaşılır ki; satırları (4.1) şartını gerçekleyen bir A matrisi için A-istatistiksel yakınsaklık çalışıldığında FK programı uygun değildir. Fakat bir sonraki kısımda uygun bir metot geliştireceğiz.

4.2. Sınırlı A-istatistiksel Yakınsak Dizilerin Sınırlı Çarpan Uzayı

Satırları (4.1) şartını gerçekleyen bir A matrisi için A-istatistiksel yakınsaklık çalışıldığında FK programının uygun olmadığı gösterilmiştir. Bu kısımda uygun bir metot geliştireceğiz. Bu metot, $\mathbb{N}$ doğal sayılar cümlesinin $\beta\mathbb{N}$ Stone-Cech kompaktifikasyonudur.

Şimdi $\beta\mathbb{N}$ Stone-Cech kompaktifikasyonunun bazı özelliklerini vereceğiz.

Her bir $B \subseteq \mathbb{N}$ için B cümlesinin $\beta\mathbb{N}$ deki kapanışı $c|_{\beta\mathbb{N}} B$ ve $B^* = (c|_{\beta\mathbb{N}} B) \setminus B$ olsun. $\{B^* : B \subseteq \mathbb{N}\}$ cümleleri $\beta\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$ topolojisi için bir baz oluşturur (Gillman ve Jerison 1976).

Regüler bir A matrisi için K_A destek (support) cümlesi

$$K_A := \bigcap \{B^* : B \subseteq \mathbb{N} \text{ ve } A - \lim A\chi_B = 1\}$$

ile tanımlanır. K_A , $\beta\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$ nin boş olmayan kompakt bir alt cümlesidir (Attala 1970). Ayrıca K_A , $\beta\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$ de bir P cümlesidir, yani K_A nın açık komşuluklarının bir dizisinin arakesiti yine K_A nın açık bir komşuluğudur. B ve D, $\mathbb{N}$ nin sonsuz alt cümleleri ise $B^* \supseteq D^*$ olması için gerek ve yeter şart $D \setminus B$ sonlu olmasıdır (Walker 1974, Önerme 3.14).

A-istatistiksel yakınsaklığın incelenmesinde “ $\beta\mathbb{N}$ programı” ilk defa Kline (1995), Connor ve Kline (1996) tarafından kullanılmıştır.

Şimdi sınırlı A-istatistiksel yakınsak dizilerin sınırlı çarpan uzayını belirleyeceğiz, ama önce aşağıdaki terminoloji ve notasyonlara ihtiyacımız olacaktır.

Kısım 3.1 de tanımlanan $T \in \tau_A$ matrislerinin; kuvvetli T-toplanabilir sınırlı diziler kümesini $W_b(T)$ ile gösterelim. O halde

$$W_b(T) := \left\{ x \in \ell_\infty : \text{bir } \alpha \text{ sayısı için } \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^{\infty} t_{nk} |x_k - \alpha| = 0 \right\}$$

cümlesidir.

$$\lim_n \sum_{k=1}^{\infty} t_{nk} |x_k - \alpha| = 0$$

ise $x = (x_k)$ dizisi α sayısına kuvvetli T-toplanabilirdir denir.

E ve F dizi uzayları verilmiş olsun. Her bir $x \in E$ için $m.x \in F$ şeklinde sınırlı bir m dizisine E den F ye bir sınırlı çarpandır denir. Bu durumda $\mathcal{M}(E, F)$ yazacağız. Yani

$$\mathcal{M}(E, F) := \{m \in \ell_{\infty} : \text{her bir } x \in E \text{ için } m.x \in F\}$$

burada çarpım koordinatsaldır. $E = F$ ise $\mathcal{M}(E, F)$ nin yerine $\mathcal{M}(E)$ yazacağız.

Her n ve k için $t_{nk} \geq 0$ ise

$$\mathcal{M}(c_T(b)) = W_b(T) \quad (4.2)$$

dir (Hill ve Sledd 1968).

Son olarak aşağıdaki bilinen bir sonuca ihtiyacımız vardır.

Teorem 4.2.1: T regüler bir matris olsun. Sınırlı bir $x = (x_k)$ dizisi α sayısına kuvvetli T-toplanabilir olması için gerek ve yeter şart IN nin bir Z alt cümlesi için $\chi_{IN \setminus Z}$ sıfıra kuvvetli T-toplanabilir ve $\lim_{n \in \mathbb{Z}} x_n = \alpha$ olmasıdır (Hill ve Sledd 1968).

Şimdi sözünü ettiğimiz, sınırlı A-istatistiksel yakınsak dizilerin sınırlı çarpan uzayını aşağıdaki teorem ile vereceğiz. Hemen belirtelim ki bu teorem, Teorem 1 (Rath 1996) den elde edilebilir. Fakat biz burada farklı bir ispat vereceğiz.

Teorem 4.2.2: $x \in \mathcal{M}((st_A)_b)$ olması için gerek ve yeter şart $x \in (st_A)_b$ olmasıdır.

İspat: Gereklilik: $x \in \mathcal{M}((st_A)_b)$ olsun. Teorem 3.1.9 dan $x \in \mathcal{M}\left(\bigcap_{T \in \tau_A} c_T(b)\right)$

dir. $\chi_N \in \bigcap_{T \in \tau_A} c_T(b)$ olduğundan $\mathcal{M}\left(\bigcap_{T \in \tau_A} c_T(b)\right) \subset \bigcap_{T \in \tau_A} c_T(b)$ elde ederiz. O halde

$x \in \bigcap_{T \in \tau_A} c_T(b)$ dir. Böylece Teorem 3.1.9 dan $x \in (st_A)_b$.

Yeterlilik: $x \in (st_A)_b$ olsun. Keyfi bir $y \in (st_A)_b$ için $xy \in (st_A)_b$ olup $x \in \mathcal{M}((st_A)_b)$ elde edilir. Bu da ispatı tamamlar.

Şimdi Teorem 3 (Duran 1972) deki aynı tekniği kullanarak sınırlı çarpan uzayı için Teorem 3.1.9' un bir benzerini vereceğiz.

Teorem 4.2.3: $\mathcal{M}((st_A)_b) = \bigcap_{T \in \tau_A} \mathcal{M}(c_T(b))$.

İspat: $x \in \bigcap_{T \in \tau_A} \mathcal{M}(c_T(b))$ ve $y \in (st_A)_b$ olsun. Teorem 3.1.9 dan her bir

$T \in \tau_A$ için $(st_A)_b \subset c_T(b)$ olup $xy \in c_T(b)$ dir. Böylece $xy \in \bigcap_{T \in \tau_A} c_T(b)$ elde edilir.

Yine Teorem 3.1.9 dan $xy \in (st_A)_b$ olup $x \in \mathcal{M}((st_A)_b)$ dir. O halde $\bigcap_{T \in \tau_A} \mathcal{M}(c_T(b)) \subseteq \mathcal{M}((st_A)_b)$.

Karşıt olarak $x \in \mathcal{M}((st_A)_b)$ ve $T \in \tau_A$ olsun.

$K(k) := \left\{ n \in \mathbb{N} : |x_n - \alpha| < \frac{1}{k} \right\}$, $(k = 1, 2, \dots)$ olmak üzere Teorem 4.2.2 den

$\delta_A(K(k)) = 1$. Böylece her bir k için $\chi_{K(k)}$, 1' e A-istatistiksel yakınsaktır. Teorem 3.1.9 dan her bir $T \in \tau_A$ için $\chi_{K(k)}$, $(k = 1, 2, \dots)$ 1' e T-toplanabilirdir. O halde her bir

k için $K^*(k) \supseteq K_T$ ve $\bigcap_{k=1}^{\infty} K^*(k) \supseteq K_T$. K_T kompakt ve $\{B^* : B \subseteq \mathbb{N}\}$ cümleleri

$\beta\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$ topolojisi için bir baz oluşturduğundan $\bigcap_{k=1}^{\infty} K^*(k) \supseteq K^* \supseteq K_T$ olacak biçimde

bir $K \subseteq \mathbb{N}$ cümlesi vardır. Ayrıca $\lim_n (T\chi_K)_n = 1$ dir. Her bir k için $K^*(k) \supseteq K^*$ olduğundan $K(k)$ da olmayan K nın elemanları en çok sonlu sayıdadır, yani $K \setminus K(k)$

sonludur. Böylece sonlu sayıdaki $n \in K$ hariç diğer tüm $n \in K$ için $|x_n - \alpha| < \frac{1}{k}$ olup k

keyfi olduğundan

$$\lim_{n \in K} x_n = \alpha \quad (4.3)$$

elde edilir. Şimdi

$$\lim_n \sum_{j=1}^{\infty} t_{nj} = \lim_n \sum_{j \in K} t_{nj} + \lim_n \sum_{j \in \mathbb{N} \setminus K} t_{nj}$$

ifadesini gözönüne alalım. T regüler ve $\lim_n (T\chi_K)_n = 1$ olduğundan $\lim_n \sum_{j \in \mathbb{N} \setminus K} t_{nj} = 0$ dır.

O halde $\chi_{\mathbb{N} \setminus K}$ sıfıra kuvvetli T -toplanabilir olup (4.3) ve Teorem 4.2.1 den x dizisi α sayısına kuvvetli T -toplanabilirdir. (4.2) den $\mathcal{M}(c_T(b))$ elde edilir. Böylece her bir $T \in \tau_A$ için $x \in \bigcap_{T \in \tau_A} \mathcal{M}(c_T(b))$ olup bu da ispatı tamamlar.

A matrisi yerine C_1 ve C_0 matrisleri alınarak Teorem 4.2.2 den aşağıdaki ilk iki sonuç elde edildikten sonra Teorem 4.2.3 den son iki sonucu elde ederiz. Bu durumda τ_{C_1} sınıfı yerine sadece τ ; ve τ_{C_0} sınıfı yerine de τ_0 yazdığımızı da belirtelim.

Sonuç 4.2.4: $x \in \mathcal{M}(s_b) \Leftrightarrow x \in s_b$.

Sonuç 4.2.5: $x \in \mathcal{M}(s_b^b) \Leftrightarrow x \in s_b^b$.

Sonuç 4.2.6: $\mathcal{M}(s_b) = \bigcap_{A \in \tau} \mathcal{M}(c_A(b))$.

Sonuç 4.2.7: $\mathcal{M}(s_b^0) = \bigcap_{A \in \tau_0} \mathcal{M}(c_A(b))$.

BÖLÜM 5

A-İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK VE BİR ORLICZ FONKSİYONUNA GÖRE KUVVETLİ TOPLANABİLME

Bu bölümde, A negatif olmayan regüler bir matris toplanabilme metodu olmak üzere kuvvetli A -toplanabilme tanımı bir Orlicz fonksiyonuna göre kuvvetli A -toplanabilme tanımına genişletilip, ℓ_∞ uzayındaki ideal kavramı yardımıyla, A -istatistiksel yakınsaklık, kuvvetli A -toplanabilme ve Δ_2 -şartını gerçekleyen bir Orlicz fonksiyonuna göre kuvvetli A -toplanabilmenin sınırlı diziler üzerinde denk olduğunu göstereceğiz.

5.1. A-İstatistiksel Yakınsaklık ve Bir Orlicz Fonksiyonuna Göre Kuvvetli A-Toplanabilme

Bu kısımda e , tüm terimleri 1 olan diziyi gösterecektir. Ayrıca $x, y \in w$ olmak üzere $xy := (x_k y_k)$ olacaktır.

Tanım 5.1.1: $F: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ fonksiyonu için aşağıdaki özellikler gerçeklensin:

- (i) $F(0) = 0$
- (ii) $x > 0$ için $F(x) > 0$
- (iii) $x \rightarrow \infty$ için $F(x) \rightarrow \infty$
- (iv) F sürekli ve azalmayan
- (v) F konveks.

Bu durumda F fonksiyonuna Orlicz fonksiyonu denir (Krasnoselskii ve Rutitsky 1961).

F Orlicz fonksiyonunun konveksliği yerine

$$F(x + y) \leq F(x) + F(y)$$

alındığında F fonksiyonuna modülüs fonksiyonu denir (Ruckle 1973, Maddox 1986).

Eğer,

$$F(2u) \leq HF(u), (u \geq 0)$$

olacak biçimde sabit bir $H > 0$ sayısı mevcut ise F Orlicz fonksiyonuna her u değeri için Δ_2 -şartını gerçekler denir. Δ_2 -şartı, $t > 1$ ve her u değeri için

$$F(tu) \leq HtF(u)$$

eşitsizliğinin gerçekleşmesine denktir (Krasnoselskii ve Rutitsky 1961).

$A = (a_{nk})$ negatif olmayan regüler bir matris olmak üzere

$$W_0(A) := \left\{ x \in w : \lim_n \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} |x_k| = 0 \right\}$$

ve

$$W(A) := \{x \in w : \text{bir } L \text{ sayısı için } x - Le \in W_0(A)\}$$

tanımlansın. Eğer $x \in W(A)$ ise x dizisi L sayısına kuvvetli A -toplanabilirdir denir.

$\varepsilon > 0$ sayısı verilmiş olsun. $K(x; \varepsilon) = \{k \in \mathbb{N} : |x_k| \geq \varepsilon\}$ cümlesinin karakteristik fonksiyonunu $\chi_{K(x; \varepsilon)}$ ile göstereceğiz. Hemen hatırlatalım ki; her $\varepsilon > 0$ için $\chi_{K(x - Le; \varepsilon)} \in W_0(A)$ ise x dizisi L sayısına A -istatistiksel yakınsak olacaktır (Connor 1989, Kolk 1991).

Connor (1989) ve Kolk (1991)' un bir modulüs fonksiyonuna göre kuvvetli A -toplanabilme tanımına benzer olarak bir F Orlicz fonksiyonuna göre kuvvetli A -toplanabilme tanımını vereceğiz.

Tanım 5.1.2: F bir Orlicz fonksiyonu ve $A = (a_{nk})$ negatif olmayan regüler bir toplanabilme metodu olmak üzere

$$W_0(A, F) = \left\{ x \in w : \lim_n \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} F(|x_k|) = 0 \right\}$$

ve

$$W(A, F) = \{x \in w : \text{bir } L \text{ sayısı için, } x - Le \in W_0(A, F)\}$$

olsun. Eğer $x \in W(A, F)$ ise x dizisi L sayısına F Orlicz fonksiyonuna göre kuvvetli A -toplanabilirdir denir (Prashar ve Choudhary 1994).

Δ_2 -şartını gerçekleyen bir Orlicz fonksiyonu için $W_0(A) \subseteq W_0(A, F)$ ve $W(A) \subseteq W(A, F)$ dir (Prashar ve Choudhary 1994, Teorem 7).

Şimdi ilk sonucu verebiliriz.

Lemma 5.1.3: F , Δ_2 -şartını gerçekleyen bir Orlicz fonksiyonu ve $A = (a_{nk})$ negatif olmayan regüler bir matris toplanabilme metodu olsun. Bu durumda $W_0(A, F) \cap \ell_\infty$, ℓ_∞ da bir idealdir.

İspat: $x \in W_0(A, F)$ ve $y \in \ell_\infty$ olsun. $xy \in W_0(A, F) \cap \ell_\infty$ olduğunu göstereceğiz. $y \in \ell_\infty$ olduğundan $\|y\| < H_1$ olacak biçimde bir $H_1 > 1$ sayısı vardır. Bu durumda her k için $|x_k y_k| < H_1 |x_k|$ dir. F , azalmayan ve Δ_2 -şartını gerçeklediğinden

$$F(|x_k y_k|) < F(H_1 |x_k|) \leq H H_1 F(|x_k|), \quad (H > 0)$$

elde edilir. Ayrıca

$$\lim_n \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} F(|x_k|) = 0$$

olduğundan

$$\lim_n \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} F(|x_k y_k|) = 0$$

elde ederiz. Böylece $xy \in W_0(A, F) \cap \ell_\infty$.

Aşağıdaki iki bilinen lemmaya ihtiyacımız vardır.

Lemma 5.1.4: M , ℓ_∞ da bir ideal ve $x \in \ell_\infty$ olsun. Bu durumda M nin kapanışının ℓ_∞ da bir ideal olması için gerek ve yeter şart her $\varepsilon > 0$ için $\chi_{K(x; \varepsilon)} \in M$ olmasıdır (Connor 1989).

Lemma 5.1.5: A negatif olmayan regüler bir toplanabilme metodu olsun. Bu durumda $W_0(A, F) \cap \ell_\infty$, ℓ_∞ uzayının kapalı bir idealidir (Freedman ve Sember 1981).

Şimdi aşağıdaki teoremi verebiliriz.

Teorem 5.1.6: x sınırlı bir dizi olsun. Ayrıca F , Δ_2 -şartını gerçekleyen bir Orlicz fonksiyonu ve $A = (a_{nk})$ negatif olmayan regüler bir toplanabilme metodu olsun. Bu durumda $W(A, F) \cap \ell_\infty = W(A) \cap \ell_\infty$.

İspat: $W_0(A, F) \cap \ell_\infty = W_0(A) \cap \ell_\infty$ olduğunu göstermek yeterlidir. $W_0(A) \subseteq W_0(A, F)$ olduğundan $W_0(A) \cap \ell_\infty \subseteq W_0(A, F) \cap \ell_\infty$ dir. Şimdi $W_0(A, F) \cap \ell_\infty \subseteq W_0(A) \cap \ell_\infty$ olduğunu gösterelim. Her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} F(\chi_{K(x; \varepsilon)}(k)) = F(1) \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} \chi_{K(x; \varepsilon)}(k) \quad (5.1)$$

elde edilir. Şimdi $x \in W_0(A, F) \cap \ell_\infty$ olsun ve $\varepsilon > 0$ verilsin. Bir $y \in \ell_\infty$ dizisini

$$y_k := \begin{cases} \frac{1}{x_k} & , \quad |x_k| \geq \varepsilon \\ 0 & , \quad \text{d.d.} \end{cases}$$

şeklinde tanımlayalım. $xy = \chi_{K(x; \varepsilon)}$ olduğundan $\chi_{K(x; \varepsilon)} \in W_0(A, F) \cap \ell_\infty$ olup

$$\lim_n \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} F(\chi_{K(x; \varepsilon)}(k)) = 0$$

elde edilir. Böylece (5.1) den

$$\lim_n \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} \chi_{K(x; \varepsilon)}(k) = 0$$

elde edilir. Lemma 5.1.4 ve Lemma 5.1.5 den $x \in W_0(A) \cap \ell_\infty$. Böylece $W_0(A, F) \cap \ell_\infty \subseteq W_0(A) \cap \ell_\infty$ dir.

Son olarak $A = (a_{nk})$ negatif olmayan regüler bir toplanabilme metodu olmak üzere A -istatistiksel yakınsaklık ve Δ_2 -şartını gerçekleyen bir F Orlicz fonksiyonuna göre kuvvetli A -toplanabilme arasındaki ilişkiyi vereceğiz.

Teorem 5.1.7: F , Δ_2 -şartını gerçekleyen bir Orlicz fonksiyonu ve $A = (a_{nk})$ negatif olmayan regüler bir toplanabilme metodu olsun. Bu durumda

$$(i) W(A, F) \subset st_A$$

$$(ii) (st_A)_b \subset W(A, F)$$

$$(iii) (st_A)_b \subset W(A, F) \cap \ell_\infty$$

dır.

İspat: (i) $x \in W_0(A, F)$ ve $y \in \ell_\infty$ olsun. $y \in \ell_\infty$ olduğundan $\|y\| < H_1$ olacak şekilde $H_1 > 1$ sayısı mevcuttur. Böylece her k için $|x_k y_k| < H_1 |x_k|$ dir. F , azalmayan ve Δ_2 -şartını gerçeklediğinden

$$F(|x_k y_k|) < H H_1 F(|x_k|), \quad (H > 0)$$

elde edilir. O halde

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} F(|x_k y_k|) \leq H H_1 \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} F(|x_k|) \rightarrow 0, \quad (n \rightarrow \infty)$$

olduğundan

$$\lim_n \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} F(|x_k y_k|) = 0$$

elde edilir. Böylece $xy \in W_0(A, F)$. Şimdi $\varepsilon > 0$ verilsin. y dizisini

$$y_k = \begin{cases} \frac{1}{x_k} & , \quad |x_k| \geq \varepsilon \\ 0 & , \quad \text{d.d} \end{cases}$$

şeklinde tanımlayalım. Teorem 5.1.6 dan $xy = \chi_{K(x; \varepsilon)} \in W_0(A, F) \cap \ell_\infty = W_0(A) \cap \ell_\infty$

elde edilir. Dolayısıyla $st_A - \lim x = 0$ dir.

(ii) $x \in (st_A)_b$ olsun. Tanımdan her $\varepsilon > 0$ için

$K(x - Le; \varepsilon) = \{k \in \mathbb{N} : |x_k - L| \geq \varepsilon\}$ olmak üzere $\chi_{K(x - Le; \varepsilon)} \in W_0(A) \cap \ell_\infty$. Şimdi

Lemma 5.1.4 ve 5.1.5 den $x - Le$ sıfıra kuvvetli A -toplanabildir. Teorem 5.1.6 dan $x \in W(A, F)$ elde edilir.

(iii), (i) ve (ii) den hemen elde edilir.

Bilindiđi gibi bir dizi L sayısına A -istatistiksel yakınsak ise aynı L sayısına yakınsayan bir alt diziye sahiptir (Kolk 1991, Miller 1995).

Sonuç 5.1.8: x dizisi, Δ_2 -şartını gerçekleyen bir Orlicz fonksiyonuna göre L sayısına kuvvetli A -toplabilir ise x , L sayısına yakınsayan bir alt diziye sahiptir.



KAYNAKLAR

- AGNEW, R. P. 1939.** Cores of complex sequences and their transforms. Amer. J. Math., 61; 178-186.
- ALLEN, H. S. 1944.** T-transformations which leave the core of every bounded sequence invariant, J. London Math. Soc., 19; 42-46.
- ATTALA, R. F. 1970.** On the multiplicative behavior of regular matrices. Proc. Amer. Math. Soc., 26; 437-446.
- BENNETT, G. 1973.** Some inclusion theorems for sequence spaces. Pacific J. Math., 46; 17-30.
- BENNETT, G. and KALTON, N. J 1973.** Inclusion theorems for K-spaces. Canad. J. Math., 25; 511-524.
- BUCK, R. C. 1953.** Generalized asymptotic density. Amer. J. Math., 75; 335-346.
- CONNOR, J. 1985.** Some Applications of Functional Analysis to Summability Theory. Ph. D. Thesis, Kent State Univ., USA.
- CONNOR, J. 1988.** The statistical and strong p-Cesáro convergence of sequences. Analysis, 8; 47-63.
- CONNOR, J. 1989.** On strong matrix summability with respect to a modulus and statistical convergence. Canad. Math. Bull., 32; 194-198.
- CONNOR, J. 1990.** Two valued measures and summability. Analysis, 10; 373-385.
- CONNOR, J. and SWARDSON, M. A. 1993.** Strong integral summability and the Stone- Čech compactification of the half-line. Pacific J. Math., 157; 201-224.
- CONNOR, J. and KLINE, J. 1996.** On statistical limit points and the consistency of statistical convergence. J. Math. Anal. Appl., 197; 392-399.
- COOKE, R. G. 1950.** Infinite Matrices and Sequence Spaces. Macmillan.
- DURAN, J. P. 1972.** Strongly regular matrices, almost convergence, and Banach limits. Duke M. J., 39; 497-502.

- ERDÖS, P. and TENENBAUM, G. 1989.** Sur les densities de certaines suites d'entries. *Proc. London Math. Soc.*, 50; 417-438.
- FAST, H. 1951.** Sur la convergence statistique. *Colloq. Math.*, 2; 241-244.
- FREEDMAN, A. R. SEMBER, J. J. and RAPHAEL, M. 1978.** Some Cesáro-type summability spaces. *Proc. London Math. Soc.*, 37; 508-520.
- FREEDMAN, A. R. and SEMBER, J. J. 1981.** Densities and summability. *Pacific J. Math.*, 95; 293-305.
- FRIDY, J. A. 1985.** On statistical convergence. *Analysis*. 5; 301-313.
- FRIDY, J. A. and MILLER, H. I. 1991.** A matrix characterization of statistical convergence. *Analysis*, 11; 59-66.
- FRIDY, J. A. and ORHAN, C. 1993.** Lacunary statistical convergence. *Pacific J. Math.*, 160; 43-51.
- FRIDY, J. A. and ORHAN, C. 1993.** Lacunary statistical summability. *J. Math. Anal. Appl.*, 173; 497-504.
- FRIDY, J. A. 1993.** Statistical limit points. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 118; 1187-1192.
- FRIDY, J.A. and ORHAN, C. 1997.** Statistical limit superior and limit inferior. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 125; 3625-3631.
- FRIDY, J. A. and ORHAN, C. 1997.** Statistical core theorems. *J. Math. Anal. Appl.*, 208; 520-527.
- FRIDY, J. A. and KHAN, M. K. 1997.** Tauberian thorems via statistical convergence. *J. Math. Anal. Appl. (Baskıda)*.
- GILLMAN, L. and JERISON, M. 1976.** *Rings of Continuous Functions*. Springer Verlag, New York.
- HAASER, N. B. and SULLIVAN, J. A. 1971.** *Real Analysis*. Van Nostrand Campany, Inc. New York.
- HARDY, G. H. 1949.** *Divergent Series*. Oxford Univ. Press, London.

- HILL, J. D. and SLEDD, W. T. 1968.** Approximation in bounded summability fields. *Canad. J. Math.*, 20; 410-415.
- KLINE, J. L. 1995.** Statistical Convergence and Densities Generated by Sequences of Measures. Ph. D. Thesis, Ohio Univ., USA.
- KNOOP, K. 1930.** Zur Theorie der Limitierungsverfahren (Erste Mitteilung), *Math. Z.*, 31; 97-127.
- KOLK, E. 1991.** The statistical convergence in Banach spaces. *Acta et Comment. Univ. Tartuensis*, 928; 41-52.
- KOLK, E. 1993.** Matrix summability of statistically convergent sequences. *Analysis*, 13; 77-83.
- KRASNOSELSKII, M. A. and RUTITSKY, Y. B. 1961.** Convex Function and Orlicz spaces. Groningen, Netherlands.
- LORENTZ, G. G. 1948.** A contribution to the theory of divergent sequences. *Acta. Math.*, 80; 167-190.
- MADDOX, I. J. 1970.** Elements of Functional Analysis. Cambridge Univ. Press.
- MADDOX, I. J. 1979.** Some analogues of Knopp's Core Theorem. *Internat. J. Math. Math. Sci.*, 2; 605-614.
- MADDOX, I. J. 1986.** Sequence spaces defined by a modulus. *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.*, 100; 161-166.
- MILLER, H. I. 1995.** A measure theoretical subsequence characterization of statistical convergence. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 347; 1811-1819.
- MYINT-U, T. 1980.** Partial Differential Equations of Mathematical Physics. Second Ed. Elsevier North Holland, Inc. New York.
- NATARAJAN, P. N. 1990.** On the core of a sequence over valued fields. *J. Indian Math. Soc.*, 55; 189-198.
- NIVEN, I. and ZUCKERMAN, H. S. 1980.** An Introduction to the Theory of Numbers. Fourth Ed., John Wiley, New York.

- PARASHAR, S. D. and CHOUDHARY, B. 1984.** Sequence spaces defined by Orlicz Functions. Indian J. pure. Appl. Math., 25; 419-428.
- PETERSEN, G. 1966.** Regular Matrix Transformations. Mc Graw-Hill, London.
- RATH, D. 1996.** Multiplier sets and orthogonal duals of sequences spaces. J. Analysis, 4; 23-33.
- ROBERTSON, A. P. and ROBERTSON, W. J. 1973.** Topological Vector Spaces. Cambridge Univ.
- RUCKLE, W. H. 1973.** FK spaces in which the sequence of coordinate vectors is bounded. Canad. J. Math., 25; 973-978.
- SALAT, T. 1980.** On statistically convergent sequences of real numbers. Math. Slovaca, 30; 139-150.
- SCHOENBERG, I. J. 1959.** The integrability of certain functions and related summability methods. Amer. Math. Monthly, 66; 361-375.
- SHCHERBAKOV, A. A. 1977.** Kernels of sequences of complex numbers and their regular transformations. Math. Notes, 22; 948-953.
- STEINHAUS, H. 1951.** Sur la convergence ordinaire et la convergence asymptotique. Colloq. Math., 2; 73-74.
- WALKER, R. C. 1974.** The Stone-Čech Compactification, Springer Verlag, New York.
- WILANSKY, A. 1978.** Modern Methods in Topological Vector Spaces. Mc Grow-Hill Inc. London.
- WILANSKY, A. 1984.** Summability Through Functional Analysis. North Holland, Amsterdam.
- ZYGMUND, A. 1979.** Trigonometric Series. 2 nd Ed., Cambridge Univ. Press.

EKLER**Tez Konusundan Yapılan Yayınlar**

- i) Strong A-Summability and A-Statistical Convergence.

Indian. J. Pure and Appl. Math. 27 (1996), 589-593.

- ii) A Criterion for A-Statistical Convergence.

Indian. J. Pure and Appl. Math. 29 (1998), 559-564.

- iii) Bounded Multipliers of Bounded A-Statistically Convergent Sequences.

J. Math. Analysis and Appl. (sunuldu).



ÖZGEÇMİŞ

1966 yılında Gerze’de doğdu. İlk, orta ve lise öğrenimini Gerze’de tamamladı. 1989 yılında Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü’nü bitirdi. 1990 yılında Yüzüncü Yıl Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü’ne Araştırma Görevlisi olarak girdi. 1992 yılında Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü’nde Yüksek Lisans öğrenimini tamamladı ve aynı yıl Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü’ne naklen Araştırma Görevlisi olarak atandı. Halen bu görevde bulunmaktadır.

