

ANKARA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

NEWTON CARTAN KÜTLEÇEKİMİ

Araz SOBHIBALOV

FİZİK ANABİLİM DALI

ANKARA
2026

Her hakkı saklıdır

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

NEWTON CARTAN KÜTLEÇEKİMİ

Araz SOBHIBALOV

Ankara Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
FİZİK Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Özgür AÇIK

Dört boyutlu afin bir uzay–zaman manifoldu üzerinde sürekli ortamlar mekaniği ele alındı; hareket denklemleri, uzay–zamana sabit ve noktadan noktaya değişen Galilei referans sistemlerinin bağlandığı durumlar için elde edildi. Kuchaş tarafından verilen ve Newton–Cartan kütleçekiminden ortaya çıkan koşullar koordinat bağımsız biçimde yeniden yazıldı. Trautman koşulundan eğrilik tensörü ve alan denklemi türetildi. Bu koşulların ve eğrilik tensörünün ayar dönüşümleri altında korunup korunmadığı incelendi. Dejenere metrikler nedeniyle yalnızca uyumluluk koşullarıyla belirlenemeyen afin bağlantı, söz konusu koşullar ve Künzle’nin kovaryant uzaysal metrik tanımı kullanılarak türetildi ve ayar dönüşümleri altındaki davranışı incelendi. Son olarak kütleçekim alan şiddetinin sıfır olduğu durum ele alındı, bu özel durumda afin bağlantının indirgenmiş biçimi elde edildi ve geometrinin temel yapılarının bu bağlantı altında paralel taşındığı gösterildi.

Haziran 2026, 87 sayfa

Anahtar Kelimeler: Sürekli ortamlar mekaniği, Newton–Cartan alan denklemleri, ayar dönüşümleri, afin bağlantı

ABSTRACT

Master Thesis

NEWTON CARTAN GRAVITY

Araz SOBHIBALOV

Ankara University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Physics

Supervisor: Prof.Dr. Özgür AÇIK

Continuum mechanics was studied on a four-dimensional affine spacetime manifold, and the equations of motion were obtained for the cases in which a constant Galilean reference frame and one varying from point to point in spacetime are attached to the manifold. The conditions given by Kuchaş, which arise in Newton–Cartan gravity, were rewritten in a coordinate-independent form, and the curvature tensor and the field equation were derived from the Trautman condition. It was then examined whether these conditions and the curvature tensor are preserved under gauge transformations. Since the degenerate metrics do not determine the affine connection from the compatibility conditions alone, the connection was derived using these conditions together with Künzle’s definition of the covariant spatial metric, and its behavior under gauge transformations was investigated. Finally, the case of vanishing gravitational field strength was considered, in this special case the reduced form of the affine connection was obtained, and the fundamental structures of the geometry were shown to be parallel under this connection.

June 2026, 87 pages

Key Words: Continuum mechanics, Newton–Cartan field equations, gauge transformations, affine connection

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans öğrenimim ve bu tez çalışması boyunca, lisans dönemimden bu yana bana yol gösteren ve tez danışmanlığımı üstlenerek bilgi birikimi, görüş ve önerileriyle çalışmama katkı sağlayan hocam Sayın Prof. Dr. Özgür AÇIK'a ve lisans son sınıfımdan itibaren beni araştırma projelerine dâhil ederek bilimsel araştırma deneyimi kazanmamı sağlayan hocam Sayın Doç. Dr. Ümit ERTEM'e en içten teşekkürlerimi sunarım. Ayrıca Eğitim hayatım boyunca üzerimde emeği bulunan, dersleri ve değerli yönlendirmeleriyle bilimsel gelişimime katkı sağlayan hocalarım Sayın Prof. Dr. Şengül KURU'ya ve Sayın Prof. Dr. Adnan TEĞMEN'e teşekkür ederim. Fizik üzerine yaptığımız sohbet ve tartışmalarla bu süreçte katkıda bulunan arkadaşlarım Aytolun ÇATALKAYA, Salih ÇAKIR, Burak DERE ve Berke BİLGİN'e dostlukları için teşekkür ederim. Son olarak, beni bugünlere getiren, hayatımın her aşamasında maddi ve manevi desteğini hiçbir zaman esirgemeyen ve attığım her adımda bana olan inancımı hep hissettiren aileme ve bu yoğun süreçte sevgisi, sabrı ve anlayışıyla her zaman yanımda olan sevgili eşime gönülden teşekkür ederim.

123F261 numaralı proje kapsamında yüksek lisans tez çalışmamı destekleyen TÜBİTAK'a ayrıca teşekkür ederim.

Araz SOBHIBALOV
Ankara, Haziran 2026

İÇİNDEKİLER

TEZ ONAY SAYFASI

ETİK	i
ÖZET	ii
ABSTRACT	iii
TEŞEKKÜR	iv
SİMGELER DİZİNİ	vi
ŞEKİLLER DİZİNİ	viii
ÇİZELGELER DİZİNİ	ix
1. GİRİŞ	1
2. AFİN UZAYI	4
2.1 Afın ve Öklid Nokta Uzayı	4
2.2 Afın Uzayında Tensör Hesabı	8
2.3 Galilei Uzay-Zaman Yapısı	14
3. EYLEMSİZLİK İLKESİ VE SÜREKLİ ORTAMLAR DİNAMİĞİ	16
3.1 Eylemsizlik İlkesi ve Cartan'ın Bakış Açısı	16
3.2 Dört Boyutlu Uzay-Zamanda Sürekli Ortamlar Dinamiği	20
4. NEWTON-CARTAN KÜTLEÇEKİMİ	44
4.1 Newton-Cartan Uzay-Zamanındaki Yapılar	44
4.2 Koordinat Bağımsız Denklemlere Geçiş	47
4.3 Alan Denklemleri	53
4.4 Ayar Dönüşümleri	54
4.5 Newton-Cartan Afın Bağlantısı	63
5. TARTIŞMA VE SONUÇ	75
KAYNAKLAR	77
EK 1 DİFERANSİYEL GEOMETRİNİN TEMEL KAVRAMLARI	78
EK 2 SIFIR BAĞLANTISININ AYAR DÖNÜŞÜMÜ	82
ÖZGEÇMİŞ	87

SİMGELER DİZİNİ

$\mathcal{U}_n$	n -boyutlu afin nokta uzayı
U_n	$\mathcal{U}_n$ uzayına karşılık gelen vektör uzayı
$\mathcal{A}$	Afin uzayının alt kümesi
A_j^i	Baz dönüşüm katsayıları
E_n	n -boyutlu vektör uzayı
E_n^*	Dual vektör uzayı
$E_n^{(q)}$	E_n uzayının q . tensör kuvveti
x^α	Uzay-zaman koordinatları (Yunan indisleri)
dx^α	Doğal koteget (dual) taban
δ_β^α	Kronecker deltası
u^α	Galile gözlemcisinin dört-hız alanı
X, Y, Z	İvme alanının uzaysal bileşenleri
d	Cartan dış türevi
D	Kovaryant dış türev
L, M, N	Torklar
$\varepsilon^{0\nu\mu\alpha}$	Levi-Civita sembolü
ρ	Kütle yoğunluğu
μ	Bölüm 3'te nokta parçacığın kütlesi bölüm 4'te; $\mu = G\rho$
$\Pi^{\mu\nu}$	Madde enerji-momentum tensörü
P_{ij}	Basınç bileşenleri
$P^{\mu\nu}$	Basınç tensörü
F^μ	Dört-boyutlu kuvvet vektörünün bileşenleri
N_α	Tork bileşenleri
G	Enerji-momentum kayıcı vektörü; ayrıca Newton kütleçekim sabiti
E_μ	Uzay-zaman baz vektörleri
e^ν	Dual ko-çerçeve
$\omega^\mu{}_\nu$	Bağlantı bir-formları
η	Dört boyutlu hacim formu
η_ν	Hacim formundan türetilen üç-formlar
$\hat{\eta}, \hat{\eta}_\alpha$	Ortonormal ko-çerçevede hacim formları
$h_{\alpha\beta}$	Zamansal metrik
$g^{\alpha\beta}$	Uzaysal kontravaryant metrik
$g_{\alpha\beta}$	Künzle kovaryant uzaysal metriği
∇_γ	Kovaryant türev operatörü
$\overset{\vee}{\nabla}_\gamma$	$\phi^\alpha = 0$, durumundaki kovaryant türev operatörü

$\Gamma_{\beta\gamma}{}^{\alpha}$	Newton–Cartan afin bağlantı katsayıları
${}^0\Gamma_{\beta\gamma}{}^{\alpha}$	$g_{\alpha\beta}$ 'den inşa edilen Christoffel kısmı
P_{α}^{β}	Uzaysal projektör $\delta_{\alpha}^{\beta} - T_{\alpha}u^{\beta}$
$R^{\alpha}{}_{\beta\gamma\delta}$	Eğrilik tensörü
$R_{\alpha\beta}$	Ricci tensörü
T_{α}	Mutlak zaman bir-formu
T	Mutlak zaman fonksiyonu
ϕ	Skaler kütleçekim potansiyeli
ϕ^{α}	Kütleçekim alan şiddeti
X^a	Galilei uzaysal koordinat fonksiyonları
$X^{a\alpha}$	Uzaysal vektör alanları ($g^{\alpha\beta}X^a{}_{,\beta}$)
ξ^a	Paralel, dönmesiz uzaysal vektör alanı ($X^{a\alpha}\partial_{\alpha}$)
ξ^{ϕ}	Kütleçekim alan şiddeti vektör alanı ($\phi^{\alpha}\partial_{\alpha}$)
A_u	Galile gözlemcisinin ivmesi
$R^a(T)$	Ayar grubu uzaysal öteleme fonksiyonu
$U^a(T)$	dR^a/dT ayar grubu hız parametresi
$a^a(T)$	dU^a/dT ayar grubu ivme parametresi
$\varphi(T)$	Ayar grubu skaler fonksiyonu (zamanın fonksiyonu)

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 2.1	Afin uzayında eşzamanlılık	14
-----------	--------------------------------------	----

ÇİZELGELER DİZİNİ

Çizelge 4.1	Newton–Cartan kütleçekiminde temel niceliklerin adlandırılması	46
Çizelge 4.2	Newton–Cartan koşullarının ve eğrilik tensörünün koordinat bağımsız denklemleri	53

1. GİRİŞ

Élie Cartan, modern matematik tarihinin en önemli isimlerinden biridir. 9 Nisan 1869'da Güney Fransa'da dünyaya gelen Cartan, 1912 yılında Sorbonne'da profesör olmuştur. Diferansiyel formlar, dış türev, Lie grupları ve diferansiyel geometri alanlarında yapılan çalışmalarla modern geometrinin temel kavramlarının gelişmesine büyük katkı sağlamıştır (Misner vd. 1973). Günümüzde Newton–Cartan kütleçekimi olarak bilinen Newtonsal kütleçekimin geometrik formülasyonu, Cartan'ın 1923–1924 (Cartan 1923) yıllarında diferansiyel geometri ve genel görelilik üzerine kaleme aldığı çalışmaya dayanır. Bu çalışmada Newtonsal kütleçekiminin, genel göreliliğe benzer biçimde koordinatlardan bağımsız ve geometrik bir çerçevede ifade edilebileceği gösterilmiştir. Söz konusu yaklaşımda Newtonsal kütleçekim kuvveti, uzay–zamanın geometrik yapısıyla ilişkilendirilmektedir.

1960'lı ve 1980'li yıllar arasında Andrzej Trautman ve Hans Peter Künzle'nin çalışmalarıyla Newton–Cartan kuramı daha sistematik bir yapıya kavuşturulmuştur (Trautman 1963) (Trautman vd. 1965) (Künzle 1972). Trautman, kuramı tam teşekküllü bir geometrik formülasyon hâline getirirken, Newtonsal kütleçekiminin geri elde edilebilmesi için eğrilik tensörü üzerine ek koşulların (Trautman 1963) gerekliliğini vurgulamıştır. Dombrowski ve Horneffer bu geometrik yapıyı modern diferansiyel geometri açısından incelemiş, Künzle ise kuramın modern biçimdeki ilk kapsamlı sunumlarından birini vermiştir (Schwartz 2021). 1980 yılında ise John A. Wheeler'ın öğrencilerinden biri olan Karel Kuchaş, Newton–Cartan kütleçekiminin yapılarını incelemiş ve bu kuramı kuantize etmiştir (Kuchaş 1980). 1981 yılında Jürgen Ehlers, genel görelilik ile Newton–Cartan kütleçekimini aynı çatı altında ele alan “frame theory” yaklaşımını geliştirmiştir, bunun yanında Christian Duval ve Künzle, Galilei geometrisi ile Bargmann cebiri arasındaki ilişkiyi ortaya koymuş ve Newton–Cartan kütleçekiminde eylemsiz hareketi asal demetler diliyle yorumlamışlardır (Schwartz 2026). Daha sonra Tekin Dereli, Şahin Koçak ve Murat Limoncu 2004 yılında torsiyonlu Newton–Cartan bağlantıları (Dereli vd. 2004) üzerine çalışmışlardır.

Newton–Cartan kütleçekimi, 2010’lu yıllardan itibaren Galilei–görelî yoğun madde fiziğindeki uygulamalarıyla yeniden önem kazanmıştır. Özellikle Dam Thanh Son’un ilk olarak 2013 yılında ortaya koyduğu ve daha sonra yayımlanan kuantum Hall etkisi çalışması, Newton–Cartan geometrisinin modern fiziksel uygulamalarına yeni bir yön kazandırmıştır (Son 2025). Öte yandan, Newton–Cartan kütleçekim kuramı, kuantum kütleçekimi, süperkütleçekim, sicim kuramı ve holografi bağlamında kullanılmaya başlanmıştır. Sicimsel Newton–Cartan geometrisinin ve torsiyonlu Newton–Cartan yapılarının geliştirilmesi, kuramın modern fizik içindeki önemini artırmıştır (Schwartz 2026).

Bu çalışmada dört boyutlu uzay–zaman, afin bir manifold olarak ele alınmış (Cartan 1923) (Cartan 1986) ve bu yapı üzerinde sürekli ortamlar dinamiği incelenerek hareket denklemleri elde edilmiştir. Ardından Newton–Cartan alan denklemleri, eğrilik tensörü ve Ricci tensörü kullanılarak ifade edilmiştir. Çalışmanın devamında Kuchaş (Kuchaş 1980) tarafından verilen Newton–Cartan koşulları ele alınmış, bu koşullar koordinat bağımsız biçimde yeniden yazılmış ve ayar dönüşümleri altındaki davranışları incelenmiştir. Devamında, Newton–Cartan geometrisinde zamansal ve uzaysal metrik yapıların dejenere olması nedeniyle afin bağlantının klasik Riemann geometrisindeki gibi tekil olmayan bir metriktan doğrudan elde edilemeyeceği gösterilmiştir, bağlantının Künzle nin kovariyante metriği (Künzle 1972) ve Newton–Cartan koşulları aracılığıyla nasıl belirlendiği açıklanmıştır ve bu bağlantının davranışı ayar dönüşümleri altında incelenmiştir. Son olarak Newton–Cartan afin bağlantısının özel bir hali olan kütleçekim alan şiddetinin sıfır olduğu durum ele alınmış ve bu yeni bağlantı ile söz konusu olan koşullar incelenmiştir.

Tez şu şekilde tertip edilmiştir: İkinci bölümde Newton–Cartan kütleçekiminin geometrik formülasyonu için gerekli matematiksel altyapı hazırlanmıştır; afin nokta uzayı, Öklid nokta uzayı, tensör hesabı ve Galilei uzay–zaman yapısı sırasıyla tanıtılmıştır (Lichnerowicz 1962) (Arnold 1989). Üçüncü, bölümde önce Cartan’ın bakış açısı ve eylemsizlik ilkesi ele alınmış, ardından dört boyutlu uzay–zamanda sürekli ortamlar dinamiği, diferansiyel formlar formalizimi ile dış çarpım ve dış türev işlemleri kullanılarak incelenmiş; sürekli ortamlar mekaniğinin iki temel hareket denklemi

önce sabit bir Galilei çerçevesinde elde edilmiş, daha sonra uzay–zamanın her noktasına değişken bir Galilei referans sistemi bağlanması durumunda kovaryant biçimde yeniden ifade edilmiştir. Dördüncü bölümde Newton–Cartan uzay–zamanındaki yapılar, Galilei gözlemcisini karakterize eden **i–vii** koşulları (Künzle 1972) (Kuchaş 1980) aracılığıyla tanıtılmış ve bu koşullar koordinat bağımsız biçimde yeniden yazılmıştır. Bu bölümün devamında ise Trautman koşulundan (Trautman 1963)(Trautman vd. 1965) eğrilik tensörü türetilmiş, alan denklemleri elde edilmiş ve ayar dönüşümleri altındaki davranış incelendikten sonra Newton–Cartan afin bağlantısı, Künzle’nin kovaryant metriği ve Newton–Cartan kuramındaki koşullar kullanılarak türetilmiştir. Daha sonra afin bağlantının ayar dönüşümleri altında nasıl davrandığı hesaplanmıştır. Tezin son kısmında ise afin bağlantının özel hâli ele alınmış, kütleçekim alan şiddetinin yokluğunda yeni bir bağlantı tanımlanmış ve söz konusu Newton–Cartan kuramındaki koşullar bu bağlantının özel hâlinde incelenmiştir.

2. AFİN UZAYI

Bu bölümde, Newton–Cartan kütleçekimi kuramının geometrik formülasyonu için gerekli olan matematiksel altyapı sunulmaktadır. İlk olarak afin nokta uzayı kavramı ele alınmış; referans sistemi, koordinatlar ve bir noktanın farklı referans sistemlerindeki koordinatları arasındaki dönüşüm bağıntıları incelenmiş, ardından afin alt uzay kavramı tanımlanmıştır. Daha sonra, afin nokta uzayına karşılık gelen vektör uzayının Öklid yapısına sahip olması durumunda Öklid nokta uzayının nasıl elde edildiği açıklanmıştır. Bu çerçevede, iki nokta arasındaki uzaklık, üçgen eşitsizliği ve sonsuz yakın iki nokta arasındaki uzaklığın ikinci dereceden form ile ifadesi ele alınmıştır. Bölümün devamında, afin uzaylar üzerinde tensör hesabına yer verilmiştir. İki vektör uzayının tensör çarpımı temel özellikleriyle birlikte tanımlanmış ve bu çarpımın birleşme özelliği incelenmiştir. Ayrıca, bir vektör uzayı ile dual uzayı kullanılarak kovaryant ve kontravaryant afin tensörler oluşturulmuş; ikinci dereceden tensörler için simetri ve antisimetrisinin baz seçiminden bağımsız özellikler olduğu gösterilmiştir (Lichnerowicz 1962).

Son olarak, Galilei uzay–zaman yapısı tanıtılmıştır. Dört boyutlu bir afin evren, paralel yer değiştirmeler uzayından reel zaman eksenine tanımlanan doğrusal zaman gönderimi ve eşzamanlı olaylar uzayı üzerinde belirlenen uzaklık kavramı aracılığıyla kurulmuştur. Bu bağlamda eşzamanlı olaylar uzayı, Galilei uzayı ve Galilei dönüşümleri tanımlanarak, Newton–Cartan geometrisine geçiş için gerekli olan afin-geometrik altyapı tamamlanmıştır (Arnold 1989).

2.1 Afin ve Öklid Nokta Uzayı

Adi geometrinin $\mathcal{U}$ ile gösterilen nokta uzayı göz önüne alındığında bu uzayın elemanları noktalar ve bu noktalar aracılığıyla vektörler tanımlanabilir. Söz konusu vektörler aşağıdaki bağıntıları sağlar:

$$AB = -BA,$$

$$AB = AC + CB.$$

$\mathcal{U}$ uzayında keyfi bir O noktası seçildiğinde, $\mathcal{U}$ uzayının her A noktasına, OA ile

tanımlanan bir a serbest vektörü

$$a = OA.$$

bağıntısı aracılığıyla karşılık getirilebilir.

Tersine, herhangi bir a serbest vektörü verildiğinde,

$$OA = a.$$

bağıntısını sağlayan bir ve yalnız bir A noktası bulunmaktadır.

Daha genel olarak, elemanları nokta olarak adlandırılan bir $\mathcal{U}$ kümesi ele alındığında. $\mathcal{U}$ kümesinin sıralı her (A, B) nokta çiftine, U_n ile gösterilen n boyutlu vektör uzayının bir AB vektörü, aşağıdaki şartları sağlayacak biçimde karşılık getirilebilir:

$$(a) \quad AB = -BA.$$

$$(b) \quad AB = AC + CB.$$

$$(c) \quad OA = a.$$

Burada O , $\mathcal{U}$ kümesi içinde seçilen keyfi bir nokta olmak üzere, U_n uzayının her a vektörüne, $OA = a$ bağıntısını sağlayan bir ve yalnız bir A noktası karşılık gelmektedir.

Bu şartların sağlanması durumunda, $\mathcal{U}$ kümesine n boyutlu afin nokta uzayı denir ve bu uzay $\mathcal{U}_n$ ile gösterilir. U_n vektör uzayının reel veya kompleks sayılar cismi üzerinde tanımlanmasına göre, $\mathcal{U}_n$ uzayı sırasıyla reel veya kompleks afin uzay olarak adlandırılır. Bu çalışmada yalnızca reel afin uzaylar ele alınmaktadır.

AB biçiminde gösterilen bir vektör için A noktasına başlangıç noktası, B noktasına ise uç nokta denir. Buna göre (c) şartı, herhangi bir a vektörü ile O başlangıç noktasının verilmesi durumunda, bu vektörün A uç noktasının $\mathcal{U}$ içinde tek olarak belirlendiğini ifade eder. Yapılan kabullerin doğal bir sonucu olarak, $AA = 0$ bağıntısının sağlandığı da görülür.

Bir $\mathcal{U}_n$ afin uzayı verildiğinde, $\mathcal{U}_n$ uzayının bir O noktası ile bu uzaya karşılık gelen U_n vektör uzayının bir $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ bazından oluşan yapıya, $\mathcal{U}_n$ uzayının bir referans sistemi denir. O noktası, referans sisteminin başlangıç noktası olarak adlandırılır.

Bir referans sistemi bundan sonra $(O, e_1, e_2, \dots, e_n)$ veya kısaca (O, e_i) gösterimiyle ifade edilecektir. $\mathcal{U}_n$ uzayının keyfi bir noktası A ile gösterilsin. OA vektörünün (e_i) bazına göre x^i bileşenlerine, A noktasının (O, e_i) referans sistemine göre koordinatları denir. (c) şartı gereğince, n sayıdan oluşan $(x^1, x^2, \dots, x^n)$ koordinatlar ile $\mathcal{U}_n$ uzayının noktaları arasında bire bir bir karşılık gelme bulunmaktadır.

$\mathcal{U}_n$ uzayının A ve B noktaları, bir (O, e_i) referans sistemine göre sırasıyla (x^i) ve (y^i) koordinatlarıyla verildiğinde, AB vektörünün bileşenleri belirlenebilir. (a) ve (b) şartları kullanıldığında,

$$AB = AO + OB = OB - OA.$$

bağıntısı elde edilir. Buradan, AB vektörünün (e_i) bazına göre bileşenlerinin $(y^i - x^i)$ olduğu sonucuna ulaşılır.

$\mathcal{U}_n$ uzayının aynı bir N noktasının farklı iki referans sistemine göre koordinatları arasındaki dönüşüm bağıntıları da incelenebilir.

(O, e_i) ve (O', e'_i) , $\mathcal{U}_n$ uzayının keyfi iki referans sistemini gösterebilir. Her bir referans sisteminin diğerine göre tanımlanabilmesi için, ilgili sistemin başlangıç noktasının diğer sistemdeki konumu belirtilmeli ve baz vektörleri diğer sistemin baz vektörleri cinsinden ifade edilmelidir:

$$\begin{aligned} OO' &= \alpha^i e_i . & O'O &= \alpha'^j e_{j'} . \\ e_{j'} &= A_{j'}^i e_i . & e_i &= A_i^{j'} e_{j'} . \end{aligned}$$

N noktası, $\mathcal{U}_n$ uzayında, (O, e_i) referans sistemine göre koordinatları x^i ve (O', e'_i) referans sistemine göre koordinatları x'^i olan herhangi bir nokta olsun. Bir taraftan,

$$ON = x^i e_i.$$

bağıntısı geçerlidir. Diğer taraftan ise

$$ON = OO' + O'N = \alpha^i e_i + x'^j e'_j = (\alpha^i + A_j^i x'^j) e_i.$$

ifadesi elde edilir. Buradan, aranan dönüşüm formülleri

$$x^i = \alpha^i + A_j^i x'^j. \quad (2.1.1)$$

şeklinde bulunur. Benzer biçimde,

$$x'^i = \alpha'^i + A_j^i x^j. \quad (2.1.2)$$

formülleri elde edilir.

$\mathcal{A}$, bir $\mathcal{U}_n$ afin uzayının bir alt kümesi olsun. O noktası, $\mathcal{A}$ kümesinde seçilen herhangi bir nokta olmak üzere, $\mathcal{A}$ kümesinin bütün N noktalarına karşılık gelen ON vektörlerinin kümesi, U_n uzayının bir alt vektör uzayını oluşturuyorsa, $\mathcal{A}$ kümesine $\mathcal{U}_n$ afin uzayının bir afin alt uzayı denir.

Bu şartın sağlanması için, $\mathcal{A}$ kümesinde seçilen belirli bir O noktasına göre tanımlanan ON vektörlerinin, U_n uzayının bir A_r alt vektör uzayını oluşturması yeterlidir. O' , $\mathcal{A}$ kümesinin herhangi bir başka noktası ise,

$$O'N = ON - OO'.$$

bağıntısı sağlanır. Hem ON hem de OO' vektörleri A_r alt vektör uzayına ait olduğundan, $O'N$ vektörü de A_r uzayına aittir. Tersine, A_r uzayına ait herhangi bir a vektörü verildiğinde,

$$ON = OO' + a.$$

bağıntısını sağlayan bir ve yalnız bir N noktası bulunmaktadır. Bu N noktası,

$$O'N = a.$$

bağıntısını sağlar.

Yukarıdaki tanımlara göre, kendisiyle ilişkilendirilen vektör uzayı bir Öklid vektör uzayı olan her afin nokta uzayına, Öklid nokta uzayı denir.

Afin uzaya karşılık gelen U_n vektör uzayı öz bir Öklid uzayı ise, $\mathcal{U}_n$ uzayına da öz Öklid nokta uzayı denir. Benzer biçimde, U_n uzayının (e_i) bazı ortonormal ise, (O, e_i) referans sistemine de ortonormal referans sistemi denir.

Bir Öklid nokta uzayında iki nokta arasındaki uzaklık tanımlanabilir. Tanım gereği, $\mathcal{U}_n$ uzayının A ve B gibi herhangi iki noktası arasındaki uzaklığın karesi, AB vektörünün normunun karesine eşittir; yani

$$(AB)^2 = AB^2.$$

Öz bir Öklid uzayının herhangi üç noktası A , B ve C ile gösterildiğinde,

$$AC = AB + BC.$$

bağıntısı sağlanır. Bu bağıntıya norm için üçgen eşitsizliği uygulandığında,

$$AC \leq AB + BC. \quad (2.1.3)$$

sonucu elde edilir. Bu eşitsizliğe üçgen eşitsizliği denir.

Öklid nokta uzayında herhangi bir (O, e_i) referans sistemi verildiğinde, iki nokta arasındaki uzaklığın karesinin analitik ifadesi elde edilebilir. Bu amaçla, M noktasının koordinatları (x^i) ve N noktasının koordinatları (y^i) olarak alınsın. MN vektörünün bileşenleri $(y^i - x^i)$ olduğundan,

$$(MN)^2 = g_{ij}(y^i - x^i)(y^j - x^j). \quad (2.1.4)$$

N noktasının M noktasına sonsuz yakın olduğu kabul edilebilir ve koordinatları $(x^i + dx^i)$ ile gösterilebilir. Bu durumda, sonsuz yakın iki nokta arasındaki uzaklığın karesi olan ds^2 , diferansiyellerin ikinci dereceden bir formu olarak

$$ds^2 = g_{ij}dx^i dx^j. \quad (2.1.5)$$

şeklinde verilir.

Burada g_{ij} sayıları, (x^i) koordinatlarına göre sabittir. $\mathcal{U}_n$ uzayı öz bir Öklid uzayı ve (O, e_i) ortonormal bir referans sistemi ise,

$$ds^2 = (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + \dots + (dx^n)^2. \quad (2.1.6)$$

bağıntısı elde edilir. Bu bağıntı, klasik geometride dik koordinatlar kullanılması durumunda ds^2 için elde edilen formülün n boyutlu uzaya genelleştirilmiş biçimidir (Lichnerowicz 1962).

2.2 Afin Uzayında Tensör Hesabı

Sırasıyla n ve p boyutlu iki vektör uzayı E_n ve F_p ele alınsın. Bu uzaylara, $E_n \otimes F_p$ ile gösterilen ve boyutu np olan bir vektör uzayı karşılık getirilsin. Eğer $x \in E_n$ ve $y \in F_p$ ise, (x, y) çiftine $E_n \otimes F_p$ uzayında $x \otimes y$ ile gösterilen bir eleman karşılık gelir. Bu karşılık, aşağıdaki özellikleri sağlar:

- (a) Eğer $x, x_1, x_2 \in E_n$ ve $y, y_1, y_2 \in F_p$ ise, tensör çarpımı vektör toplamına göre dağılımlıdır:

$$x \otimes (y_1 + y_2) = x \otimes y_1 + x \otimes y_2,$$

$$(x_1 + x_2) \otimes y = x_1 \otimes y + x_2 \otimes y.$$

- (b) Herhangi bir α skaleri için:

$$\alpha x \otimes y = x \otimes \alpha y = \alpha(x \otimes y).$$

- (c) Eğer $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ve $(y_1, y_2, \dots, y_p)$ sırasıyla E_n ve F_p uzaylarının bazıları ise, aşağıdaki np eleman

$$x_i \otimes y_\alpha \quad (i = 1, \dots, n; \alpha = 1, \dots, p)$$

$E_n \otimes F_p$ uzayında bir baz oluşturur.

Bu koşullar altında $E_n \otimes F_p$ uzayına, E_n ve F_p uzaylarının tensör çarpımı denir. $x \otimes y$ elemanı ise x ve y vektörlerinin tensör çarpımı olarak adlandırılır. Yukarıdaki özellikler kullanılarak, iki vektörün tensör çarpımının bileşenler cinsinden nasıl ifade edileceği incelenebilir. E_n , F_p ve $E_n \otimes F_p$ uzaylarında sırasıyla aşağıdaki bazlar seçilsin:

$$(e_i), \quad (f_\alpha), \quad (e_{i\alpha}) \quad (i = 1, \dots, n; \alpha = 1, \dots, p).$$

- (c) özelliğine göre:

$$e_i \otimes f_\alpha = e_{i\alpha}. \quad (2.2.1)$$

Şimdi ise

$$x = x^i e_i, \quad y = y^\alpha f_\alpha. \quad (2.2.2)$$

olsun. Burada x ve y , sırasıyla E_n ve F_p uzaylarının keyfi elemanlarıdır. (2.2.2) bağıntılarında verilen vektörlerin tensör çarpımı alınarak (a) ve (b) özellikleri kullanıldığında,

$$x \otimes y = x^i y^\alpha e_i \otimes f_\alpha = x^i y^\alpha e_{i\alpha}. \quad (2.2.3)$$

bağıntısı elde edilir. Buna göre $x^i y^\alpha$ sayıları, $x \otimes y$ elemanının $e_{i\alpha}$ bazına göre bileşenleridir.

(2.2.3) ile verilen bileşen gösteriminin (c) özelliğiyle uyumlu olduğu gösterilebilir. (x_i) ve (y_α) , sırasıyla E_n ve F_p uzaylarının herhangi iki bazı olduğunda, e_k ve f_β vektörleri bu bazlara göre

$$e_k = a_k^i x_i, \quad f_\beta = b_\beta^\alpha y_\alpha.$$

şeklinde yazılabilir.

$E_n \otimes F_p$ uzayının herhangi bir T elemanı da

$$T = t^{i\alpha} e_{i\alpha} = t^{i\alpha} e_i \otimes f_\alpha$$

biçiminde ifade edilebilir. Dolayısıyla,

$$T = t^{k\beta} a_k^i x_i \otimes b_\beta^\alpha y_\alpha = t^{k\beta} a_k^i b_\beta^\alpha x_i \otimes y_\alpha.$$

Böylece T , $x_i \otimes y_\alpha$ elemanlarının doğrusal bir birleşimi olarak yazılır. Eğer $T = 0$ ise, buradan $t^{i\alpha} = 0$ elde edilir. Bu sonuç, $x_i \otimes y_\alpha$ elemanlarının doğrusal bağımsız olduğunu gösterir. Dolayısıyla (c) özelliği sağlanmaktadır.

Elde edilen sonuç şu biçimde ifade edilebilir: E_n , F_p ve $E_n \otimes F_p$ uzayları yukarıda belirtilen ilişkili bazlara göre ele alındığında, (a), (b) ve (c) özelliklerini sağlayan bileşim kuralı, bileşenleri x^i olan bir x vektörü ile bileşenleri y^α olan bir y vektörüne, $E_n \otimes F_p$ uzayında bileşenleri $x^i y^\alpha$ olan bir elemanın karşılık getirilmesiyle belirlenir. Sırasıyla n , p ve q boyutlu üç vektör uzayı E_n , F_p ve G_q ele alınsın. Eğer $x \in E_n$, $y \in F_p$ ve $z \in G_q$ ise, $E_n \otimes F_p$ uzayındaki $x \otimes y$ elemanının z ile tensör çarpımı alınabilir. Böylece

$$[x \otimes y] \otimes z$$

elemanı elde edilir. Aynı elemanın

$$x \otimes [y \otimes z]$$

biçiminde de elde edildiği kabul edilir; yani

$$[x \otimes y] \otimes z = x \otimes [y \otimes z].$$

Bu eşitlik, tensör çarpımının birleşme özelliğini ifade eder. Söz konusu özelliğin yalnızca baz vektörleri için kabul edilmesi yeterlidir. Ortak değer

$$x \otimes y \otimes z$$

ile gösterilir ve buna karşılık gelen uzay

$$E_n \otimes F_p \otimes G_q$$

şeklinde yazılır. Genel olarak $E_n, F_p, G_q, \dots$ uzaylarından alınan sonlu sayıda vektör için aşağıdaki tanım verilir:

$E_n \otimes F_p \otimes G_q \otimes \dots$ vektör uzayının her bir elemanına tensör denir.

n boyutlu bir E_n uzayı verildiğinde, E_n ile özdeş q adet uzayın tensör çarpımı oluşturulabilir. Bu yolla elde edilen n^q boyutlu vektör uzayı $E_n^{(q)}$ ile gösterilecek ve E_n uzayının q . tensör kuvveti olarak adlandırılacaktır. E_n ve $E_n^{(q)}$ vektör uzaylarının bazıları sırasıyla (e_i) ve $(e_{i_1 i_2 \dots i_q})$ ile gösterildiğinde, (2.2.1) bağıntısını genelleştiren aşağıdaki gösterim kullanılır:

$$e_{i_1} \otimes e_{i_2} \otimes e_{i_3} \otimes \dots \otimes e_{i_q} = e_{i_1 i_2 \dots i_q}. \quad (2.2.4)$$

Eğer $x_{(1)}, x_{(2)}, \dots, x_{(q)}$, E_n uzayının sırasıyla

$$x_{(1)}^{i_1}, x_{(2)}^{i_2}, \dots, x_{(q)}^{i_q}$$

bileşenlerine sahip herhangi q tane vektörünü gösterirse, bu vektörlerin tensör çarpımı

$$x_{(1)} \otimes x_{(2)} \otimes \dots \otimes x_{(q)} = x_{(1)}^{i_1} x_{(2)}^{i_2} \dots x_{(q)}^{i_q} e_{i_1 i_2 \dots i_q}. \quad (2.2.5)$$

şeklinde ifade edilir.

Şimdi E_n uzayının dual uzayı olan E_n^* ele alındığında, bu uzay, (e_i) bazına dual olan (x^i) bazıyla ifade edilebilir. Bu iki uzaydan başlayarak şu işlem gerçekleştirilebilir: E_n veya E_n^* uzaylarının istenen tensör kuvvetleri alınır ve elde edilen uzayların kendi aralarında tensör çarpımları oluşturulur. Böylece aşağıdaki türden tensör çarpımı uzayları elde edilir:

$$E_n^{(r_1)} \otimes E_n^{*(s_1)} \otimes E_n^{(r_2)} \otimes \dots \otimes E_n^{*(s_p)} \otimes E_n^{(r_m)}. \quad (2.2.6)$$

Bir tensör, E_n ile özdeş uzayların veya E_n uzayının dualiyle özdeş uzayların tensör çarpımı alınarak elde edilen bir vektör uzayının elemanı ise, E_n vektör uzayına bağlı bir afin tensör olarak adlandırılır.

Eğer

$$(r_1 + r_2 + \cdots + r_m) + (s_1 + s_2 + \cdots + s_p) = q. \quad (2.2.7)$$

ise, (2.2.6) denkleminde verilen vektör uzayı q . derecedendir. Bu nedenle, (2.2.6) uzayının her elemanına q . dereceden bir afin tensör denir. Bu tensör, $(r_1 + r_2 + \cdots + r_m)$ kez kontravaryant ve $(s_1 + s_2 + \cdots + s_p)$ kez kovaryanttır.

$E_n^{(q)}$ uzayının her elemanı q . dereceden kontravaryant afin tensördür. $E_n^{*(q)}$ uzayının her elemanı ise q . dereceden kovaryant afin tensördür. Özellikle, E_n uzayının elemanları kontravaryant vektörler, E_n^* uzayının elemanları ise kovaryant vektörlerdir. Doğal olarak bu terminoloji, E_n ve E_n^* uzaylarından hangisinin başlangıçta verilmiş kabul edildiğine bağlıdır.

Farklı afin tensörlerin bileşenlerinin gösterilmesinde özel bir notasyonun kullanılması uygundur. Örneğin, q . dereceden ve

$$E_n^{(q-2)} \otimes E_n^{*(2)}$$

uzayının elemanı olan bir tensör ele alınsın. Bu vektör uzayının bir bazı, aşağıdaki elemanlar kümesi tarafından oluşturulur:

$$e_{i_1} \otimes e_{i_2} \otimes \cdots \otimes e_{i_{q-2}} \otimes x^{i_{q-1}} \otimes x^{i_q} = e_{i_1 i_2 \dots i_{q-2}}^{i_{q-1} i_q}, \quad (2.2.8)$$

burada eşitliğin iki tarafında aynı alt ve üst indisler bulunmaktadır.

$T, E_n^{(q-2)} \otimes E_n^{*(2)}$ uzayının bir tensör elemanı olsun ve bu tensör (2.2.8) denkleminde verilen baza göre ifade edilebilir. Toplama kuralını korumak amacıyla, T tensörünün bileşenleri

$$t_{i_{q-1} i_q}^{i_1 i_2 \dots i_{q-2}}$$

ile gösterilir. Böylece,

$$T = t_{i_{q-1} i_q}^{i_1 i_2 \dots i_{q-2}} e_{i_1 i_2 \dots i_{q-2}}^{i_{q-1} i_q}. \quad (2.2.9)$$

$i_1, i_2, \dots, i_{q-2}$ indislerinin kontravaryant, i_{q-1}, i_q indislerinin ise kovaryant olduğu söylenir. Dolayısıyla, bir tensörün bileşenlerine ait indislerin konumları, bu tensörün kaç kez kontravaryant ve kaç kez kovaryant olduğunu belirlemek için yeterlidir.

(2.2.8) ve (2.2.9) denklemleri kullanılarak aşağıdaki sonuç elde edilir:

$$T = \sum_{i_2 \dots i_q} \left(\sum_{i_1} t^{i_1 i_2 \dots i_{q-2}}_{i_{q-1} i_q} e_{i_1} \right) \otimes e_{i_2} \otimes \dots \otimes e_{i_{q-2}} \otimes x^{i_{q-1}} \otimes x^{i_q}. \quad (2.2.10)$$

Burada, ifadenin açık biçimde görülebilmesi amacıyla toplama işaretleri özellikle yazılmıştır.

Sağ taraftaki toplamın her bir terimi, q tane kontravaryant veya kovaryant vektörün tensör çarpımıdır ve bu toplam n^{q-1} terim içermektedir.

Dolayısıyla, q . dereceden her afin tensör, en fazla n^{q-1} adet, q tane kontravaryant veya kovaryant vektörün tensör çarpımının toplamı biçiminde yazılabilir.

Örneğin, $E_n^{(q)}$ uzayının bir elemanı olan T tensörü, q vektörün

$$p < n^{q-1}$$

adet tensör çarpımının toplamı ise, T tensörü (2.2.5) denkleminin sağ tarafındaki biçimde p terimin toplamı olarak ifade edilebilir. Bu durumda tensörün bileşenleri, aşağıdaki biçimdeki p terimin toplamından oluşur:

$$x_{(1)}^{i_1} x_{(2)}^{i_2} \dots x_{(q)}^{i_q}.$$

Böylece, tensörün türünden bağımsız olarak, bütün bileşenlerin aynı yapıda olduğu görülmektedir.

Simetrik ve antisimetrik tensörler de tanımlanabilir. Belirli bir baza göre bileşenleri t^{ij} olan ikinci dereceden kontravaryant bir tensör, iki indisine göre

$$t^{ij} = t^{ji} \quad (2.2.11)$$

koşulunu sağlıyorsa simetrik olarak adlandırılır. Eğer

$$t^{ij} = -t^{ji} \quad (2.2.12)$$

koşulunu sağlıyorsa antisimetrik olarak adlandırılır.

Örneğin, tensörün simetrik olduğu kabul edilirse ve bir baz dönüşümü uygulanırsa, bu durumda,

$$t^{k'l'} = A_i^{k'} A_j^{l'} t^{ij} = A_i^{k'} A_j^{l'} t^{ji} = t^{l'k'}. \quad (2.2.13)$$

denklemleri elde edilir. Dolayısıyla, bir tensörün simetrik veya antisimetrik olması, yalnızca belirli bir baza göre yazılan bileşenlerinin bir özelliği değil, tensörün kendisine ait ve baz seçiminden bağımsız bir özelliktir.

Aynı değerlendirmeler, ikinci dereceden kovaryant bir tensör için de geçerlidir. Ayrıca bu sonuçlar, derecesi $q > 2$ olan tensörlerde hem kontravaryant hem de kovaryant indis çiftleri için doğrudan genelleştirilebilir (Lichnerowicz 1962).

2.3 Galilei Uzay-Zaman Yapısı

Galilei uzay-zamanı aşağıdaki üç temel unsurdan oluşur:

1. Evren: Dört boyutlu bir afin uzay $\mathcal{U}_4$. $\mathcal{U}_4$ 'ün noktalarına *evren noktaları* veya *olaylar* denir. Evrenin paralel yer değiştirmeleri, $\mathbb{R}^4$ vektör uzayını oluşturur.
2. Zaman: Evrenin paralel yer değiştirmelerinin vektör uzayı olan $\mathbb{R}^4$ 'ten reel zaman eksenine giden doğrusal bir gönderimdir:

$$t : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}.$$

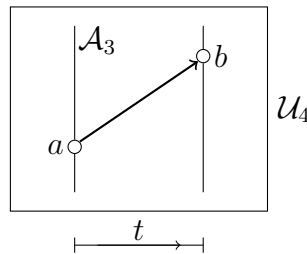
$a \in \mathcal{U}_4$ olayından $b \in \mathcal{U}_4$ olayına olan zaman aralığı

$$t(b - a)$$

sayısı ile verilir. Eğer

$$t(b - a) = 0$$

ise, a ve b olaylarına *eşzamanlı olaylar* denir.



Şekil 2.1 Afin uzayında eşzamanlılık

Belirli bir olayla eşzamanlı olan olayların kümesi, $\mathcal{U}_4$ içinde üç boyutlu bir afin altuzay oluşturur. Bu altuzaya *eşzamanlı olaylar uzayı* denir ve $\mathcal{A}_3$ ile gösterilir.

t gönderiminin çekirdeği, $\mathcal{U}_4$ 'ün bir olayını, onunla eşzamanlı olan bir olaya götüren paralel yer değiştirmelerden oluşur. Bu çekirdek, $\mathbb{R}^4$ vektör uzayının üç boyutlu doğrusal bir altuzayıdır ve $\mathbb{R}^3$ ile gösterilir.

3. Eşzamanlı olaylar arasındaki uzaklık:

$$\rho(a, b) = \|a - b\| = \sqrt{(a - b, a - b)}, \quad a, b \in \mathcal{A}_3.$$

Bu uzaklık, $\mathbb{R}^3$ uzayı üzerindeki bir skaler çarpım tarafından tanımlanır. Böylece her eşzamanlı olaylar uzayı, üç boyutlu bir Öklid uzayı E^3 hâline gelir.

Galilei uzay-zaman yapısıyla donatılmış bir $\mathcal{U}_4$ uzayına *Galilei uzayı* denir.

Farklı yerlerde meydana gelen iki olayın eşzamanlı olduğundan söz edilebilir. Ancak bir koordinat sistemi seçilmediği sürece, eşzamanlı olmayan iki olayın $a, b \in \mathcal{U}_4$ “üç boyutlu uzayda aynı yerde meydana geldiği” ifadesinin bir anlamı yoktur.

Galilei grubu, Galilei uzayının yapısını koruyan bütün dönüşümlerin grubudur. Bu grubun elemanlarına *Galilei dönüşümleri* denir. Dolayısıyla Galilei dönüşümleri, $\mathcal{U}_4$ 'ün zaman aralıklarını ve eşzamanlı olaylar arasındaki uzaklığı koruyan afin dönüşümleridir (Arnold 1989).

3. EYLEMSİZLİK İLKESİ VE SÜREKLİ ORTAMLAR DİNAMİĞİ

Bu bölümde, klasik mekaniğin temelini oluşturan eylemsizlik ilkesi, Galilei referans çerçeveleri ve Cartan'ın geometrik yaklaşımı (Cartan 1923) (Cartan 1986) bağlamında incelenecektir. İlk olarak, Galilei çerçeveleri arasındaki dönüşüm bağıntıları ele alınarak noktasal parçacığın hareketi ve enerji-momentumunun uzay-zaman içerisindeki gösterimi kurulacaktır. Daha sonra, kayan vektörler, dış çarpım ve Plücker koordinatları kullanılarak, noktasal parçacık için kütlenin korunumu, doğrusal momentum ve açısal momentum denklemlerinin ortak geometrik kaynağı ortaya konulacaktır. Ardından bu yaklaşım dört boyutlu uzay-zamanda sürekli ortamlar dinamiğine genişletilecek; diferansiyel formlar ve dış türev işlemi aracılığıyla sürekli ortamlar mekaniğinin iki temel hareket denklemi önce sabit bir Galilei çerçevesinde elde edilecek, daha sonra değişken Galilei referans sistemleri için kovaryant biçimde ifade edilecektir.

3.1 Eylemsizlik İlkesi ve Cartan'ın Bakış Açısı

Newton'un klasik mekaniğinin temeli, mutlak uzay ve mutlak zaman kavramlarına dayanır. Bu nedenle, bir orijin, bir zaman birimi ve bir uzaysal koordinat sistemi seçildiğinde herhangi bir olayın zaman ve uzay içinde analitik olarak tanımlanması mümkündür. Newton'un mutlak uzay anlayışında, uzaysal koordinat çerçevesi doğrusal ve düzgün bir öteleme yaptığında mekanik yasaları değişmez ve mutlak zaman korunur; böylece Galilei referans çerçevesi kavramına ulaşılır.

Eylemsizlik ilkesi şu şekilde ifade edilir: Diğer cisimlerle etkileşim bulunmadığında, bir nokta kütlenin hızı herhangi bir Galilei çerçevesinde yön ve büyüklük bakımından sabit kalır. Bu ilkenin bir Galilei çerçevesinde geçerli olması, onun tüm Galilei çerçevelerinde de geçerli olmasını gerektirir. Bu sonuç, söz konusu çerçeveleri birbirine bağlayan dönüşüm yasalarından doğrudan çıkar. Uzaydaki bir noktanın konumu Kartezyen koordinatlarla ifade edilebilir; Galilei çerçeveleri arasındaki koordinat dö-

nüşüm yasaları ise şu şekilde yazılır:

$$\begin{aligned}x' &= a_1x + b_1y + c_1z + g_1t + h_1, \\y' &= a_2x + b_2y + c_2z + g_2t + h_2, \\z' &= a_3x + b_3y + c_3z + g_3t + h_3, \\t' &= t + h.\end{aligned}\tag{3.1.1}$$

Burada $(a_i, b_i, c_i, g_i, h_i)$ sabit katsayılar olup $i = 1, 2, 3$ için tanımlıdır.

İki referans çerçevesi, geometrik anlamda eşdeğer oldukları ve birbirlerine göre durgun oldukları sürece eşdeğer çerçeveler olarak adlandırılır. Dolayısıyla, eşdeğer çerçeveler arasındaki koordinat dönüşümü şu şekilde verilir:

$$\begin{aligned}x' &= x + h_1, \\y' &= y + h_2, \\z' &= z + h_3, \\t' &= t + h.\end{aligned}\tag{3.1.2}$$

Bu aşamada hareket eden bir nokta kütle göz önünde bulundurulur ve her anda bu kütlenin bulunduğu noktayı orijin olarak alan bir Galilei referans çerçevesi tanımlanır. Eğer eşdeğer Galilei çerçevelerinden oluşan bir sistem, yukarıda (3.1.2) ile verilen dönüşüm yasasına uygun biçimde hareketli nokta kütleyle ilişkilendirilmişse, herhangi bir anda bu noktaya karşılık gelen Galilei çerçevesinde nokta kütlenin hızı sabit kalır.

Mekanığın yapısı iki temel kavrama dayanır:

1. Galilei çerçevesi kavramı: Bu kavram, hareket eden bir nokta kütlenin hızının tanımlanmasını mümkün kılar.
2. Eşdeğer Galilei çerçeveleri kavramı: Bu kavram, eylemsizlik ilkesinin ifade edilmesini sağlar.

Eylemsizlik ilkesinin ikinci formalizasyonunun avantajını vurgulamak önemlidir. Bu yaklaşımın özünde, yalnızca orijinleri birbirine sonsuz derecede yakın olan eşdeğer

Galilei çerçeveleri kullanılır. Klasik ya da görelî mekaniğin tüm genelleştirmeleri Galilei çerçevesi kavramını korur.

Bir Galilei çerçevesi sabitlenir ve bu çerçeveye karşılık gelen uzaysal koordinat üçlüsü T_0 ile gösterilir. Bu çerçevede, kütleçekim alanına benzer biçimde, uzaysal bileşenleri (X, Y, Z) olan bir ivme alanı tanımlanır.

Buna göre, sabit Galilei çerçevesinde bir nokta kütlenin t anındaki hız bileşenleri u, v, w ile gösterilirse, $t + dt$ anındaki hız bileşenleri şu şekilde yazılır:

$$u + X dt, v + Y dt, w + Z dt. \quad (3.1.3)$$

t anında nokta kütleyle, geometrik anlamda T_0 'a eşdeğer olan bir üçlü T ilişkilendirilir. Benzer biçimde, $t + dt$ anında da bir üçlü T' ilişkilendirilir.

Bu üçlüler, ancak doğrusal ve düzgün hareket hâlinde olduklarında T_0 'a göre Galilei çerçeveleri olarak tanımlanır.

Bu işlem sonucunda, ortaya çıkan Galilei çerçevelerinin orijinleri sırasıyla

$$x, y, z, t. \quad (3.1.4)$$

ve

$$x + dx, y + dy, z + dz, t + dt. \quad (3.1.5)$$

olarak verilir.

a, b, c ve a', b', c' , sırasıyla T ve T' çerçevelerinin T_0 'a göre öteleme hızları olarak gösterilir.

Buna göre, nokta kütlenin kendisine bağlı Galilei çerçevesindeki hız bileşenleri

$$u - a, \quad v - b, \quad w - c \quad (3.1.6)$$

şeklindedir.

Aynı noktada, karşılık gelen çerçevedeki hız bileşenleri ise

$$u + X dt - a', \quad v + Y dt - b', \quad w + Z dt - c' \quad (3.1.7)$$

olarak yazılır.

Bu durumda, hız bileşenlerinin değişmemiş olması için şu koşulun sağlanması gerekir:

$$a' - a = X dt, \quad b' - b = Y dt, \quad c' - c = Z dt. \quad (3.1.8)$$

Böylece şu sonuca ulaşılır: Yukarıda tanımlanan kuvvet alanı içinde bulunan herhangi bir nokta kütlenin hareketi, orijinlerinin birbirine sonsuz derecede yakın olması koşuluyla eylemsizlik ilkesini sağlar.

Bu durumda, sırasıyla

$$(x, y, z) \quad (3.1.9)$$

ve

$$(x + dx, y + dy, z + dz) \quad (3.1.10)$$

noktalarına karşılık gelen Galilei çerçeveleri eşdeğerdir; burada T ve T' üçlülerinin geometrik anlamda eşdeğer olduğu kabul edilir.

Bu eşdeğerlik, üçlülerin T_0 'a göre

$$(X dt, Y dt, Z dt) \quad (3.1.11)$$

hızlarıyla doğrusal ve düzgün bir öteleme hareketi yapmaları anlamına gelir.

Bu aşamada, orijinleri sonsuz derecede yakın olan iki Galilei çerçevesinin eşdeğerliğini belirleyen koşulların, uzay-zamanın geometrik özelliklerini tanımladığı varsayılır.

Bu durumda kütleçekim, fiziğin alanından çıkarılarak geometrinin alanına aktarılmış olur. Kütleçekim alanının bileşenleri olan X, Y, Z , uzay-zamanın temel geometrik yapısını temsil eder. Bu bileşenler arasındaki ilişkiler şu biçimdedir

$$\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} = 0. \quad (3.1.12)$$

Bu denklemler, ortogonal bir koordinat sisteminde tanımlandıklarında, uzay-zamanın geometrik yapısının temel özelliklerini ortaya koyar.

Son olarak:

$$\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} = -4\pi\mu. \quad (3.1.13)$$

(3.1.12) ve (3.1.13) denklemleri birlikte ele alındığında, Newton'un kütleçekim yasalarının tam biçimini verir ve şunu gösterir: Sürekli bir ortamın madde yoğunluğu, uzay–zamanın yerel geometrik özelliğinin fiziksel karşılığıdır.

Böylece, Einstein'ın kütleçekim kuramının bazı özellikleri, yalnızca klasik mekanik çerçevesi içinde yeniden elde edilmiş olur (Cartan 1923) (Cartan 1986).

Cartan bu yaklaşımıyla Newton kütleçekimini, mutlak uzay içinde etki eden bağımsız bir kuvvet alanı olarak değil, komşu Galilei çerçeveleri arasındaki geometrik ilişki olarak ele almıştır. Bu bakış açısında X, Y, Z bileşenleri, yalnızca bir kuvvet alanının bileşenleri değil, yerel Galilei çerçevelerinin uzay–zaman boyunca nasıl bağlandığını belirleyen geometrik büyüklüklerdir. Dolayısıyla kütleçekim, uzay–zamanın afin bağlantısında kodlanan bir yapı hâline gelir. Cartan'ın burada ortaya koyduğu bakış açısı, çalışmanın 4. Bölümünde afin bağlantının Newton–Cartan geometrisi içinde elde edilmesiyle daha açık bir biçimde görülecektir.

3.2 Dört Boyutlu Uzay–Zamanda Sürekli Ortamlar Dinamiği

Burada klasik mekaniğin bakış açısı benimsenir. Uzay–zaman ya da evren, bir afin manifold olarak temsil edilir. Bir uzay–zaman vektörü, zaman ve uzayda konumlanmış iki olaydan oluşan bir küme olarak tanımlanır. Bu iki olaydan biri vektörün başlangıç noktası, diğeri ise uç noktasıdır.

Bir Galilei çerçevesinde bir uzay–zaman vektörünün bileşenleri

$$t' - t, \quad x' - x, \quad y' - y, \quad z' - z$$

şeklinde dört sayı ile ifade edilir. Bu bileşenler, başlangıç noktasının koordinatlarının uç noktanın koordinatlarından çıkarılmasıyla elde edilir.

Eğer iki uzay–zaman vektörünün bileşenleri bir Galilei çerçevesinde özdeş ise, diğer tüm Galilei çerçevelerinde de özdeştir. Dolayısıyla uzay–zaman vektörleri, onları matematiksel olarak temsil etmek için kullanılan Galilei çerçevesinden bağımsız bir özelliğe sahiptir. Bu özelliğe sahip vektörlerin eşdeğer olduğu söylenir.

Eğer iki uzay–zaman vektörü üçüncü bir vektöre eşdeğer ise, birbirlerine karşı da eşdeğerdir. Uzay–zaman vektörleri arasındaki bu eşdeğerlik kavramının varlığı, uzay–zamanın bir afin yapı taşıdığını ifade etmektedir.

Uzay–zaman vektörünü matematiksel olarak temsil eden

$$t' - t, \quad x' - x, \quad y' - y, \quad z' - z$$

niceliklerinden ilki zaman bileşeni, diğer üçü ise uzay bileşenleri olarak adlandırılır. Zaman bileşeni, seçilen referans çerçevesinden bağımsızdır, ancak uzay bileşenleri verilen Galilei çerçevesine bağlıdır.

Verilen bir Galilei çerçevesini tanımlayan koordinat üçlüsü T içerisinde uzay vektörünün bileşenleri

$$x' - x, \quad y' - y, \quad z' - z$$

şeklindedir. Dolayısıyla uzay vektörü yalnızca verilen uzay–zaman vektörüne ve üçlü T 'ye bağlıdır; aynı zamanda bu üçlünün mutlak uzaya göre hızına da bağlıdır.

Bir Galilei çerçevesine göre hareket eden bir nokta kütle ele alınır. Bu çerçevede, nokta kütlenin t anındaki konumunu $t + dt$ anındaki konumuna bağlayan uzay–zaman vektörünün bileşenleri

$$dt, \quad dx, \quad dy, \quad dz$$

şeklindedir, bu uzay–zaman vektörü, seçilen Galilei çerçevesinden bağımsızdır. Aynı durum, bu vektörün dt 'ye bölünmesi ile elde edilen ve bileşenleri

$$1, \quad \frac{dx}{dt}, \quad \frac{dy}{dt}, \quad \frac{dz}{dt}$$

olan uzay–zaman vektörü için de geçerlidir. Son olarak, parçacığın kütlesi μ ile gösterilirse

$$\mu, \quad \mu \frac{dx}{dt}, \quad \mu \frac{dy}{dt}, \quad \mu \frac{dz}{dt} \quad (3.2.1)$$

zaman bileşeni olan enerji (ya da kütle) referans çerçevesine bağlı değildir; ancak uzay bileşenleri olan momentum bu seçime bağlıdır.

Artık parçacık dinamiğinin temel ilkesi şu şekilde ifade edilebilir: Enerji–momentum uzay–zaman vektörünün zamana göre türevi, uzaysal kuvvet vektörüne eşittir. Bu ifade hem kütlenin korunumu ilkesini hem de kuvvet ile ivme arasındaki ilişkiyi kapsar.

Verilen bir Galilei çerçevesiyle donatılmış sürekli bir ortam ele alınır ve uzay–zamanın üç boyutlu bir hacmi sabitlenir. Bu hacmin içerdiği toplam kütle

$$\int \rho(dx \wedge dy \wedge dz) - \rho u(dy \wedge dz \wedge dt) - \rho v(dz \wedge dx \wedge dt) - \rho w(dx \wedge dy \wedge dt) \quad (3.2.2)$$

integrali ile verilir (Cartan 1922), burada ρ ; yoğunluğu, u, v, w ise hız bileşenlerini göstermektedir. Önce, maddenin basınçtan ve gerilmelerden tamamen bağımsız olduğu varsayılır. Bu durumda aynı hacmin x bileşeni momentumunun ifadesi şu integral ile verilir;

$$\int \rho u(dx \wedge dy \wedge dz) - \rho u^2(dy \wedge dz \wedge dt) - \rho uv(dz \wedge dx \wedge dt) - \rho uw(dx \wedge dy \wedge dt) \quad (3.2.3)$$

y ve z bileşenleri için ifadeler benzer şekilde yazılabilir:

$$\int \rho v(dx \wedge dy \wedge dz) - \rho uv(dy \wedge dz \wedge dt) - \rho v^2(dz \wedge dx \wedge dt) - \rho vw(dx \wedge dy \wedge dt) \quad (3.2.4)$$

$$\int \rho w(dx \wedge dy \wedge dz) - \rho uw(dy \wedge dz \wedge dt) - \rho vw(dz \wedge dx \wedge dt) - \rho w^2(dx \wedge dy \wedge dt). \quad (3.2.5)$$

Bu integrallerin integrandları için şu gösterimler kullanılır:

$$\Pi, \quad \Pi_x, \quad \Pi_y, \quad \Pi_z$$

Bunlar, ortam içindeki bir maddenin enerji–momentum vektörünün dört bileşenidir.

Son olarak, birim hacim başına düşen kuvvet bileşenleri X, Y, Z ile gösterilir.

Sürekli ortam mekaniğinin denklemleri şu şekilde elde edilir; Uzay–zamanın dört boyutlu bir bölgesi ele alınır ve bu bölge, t_1 ile t_2 zaman aralığında incelenen madde elemanları tarafından oluşturulan evren tüplerine (world tubes) ayrılır. Böylece dört boyutlu bölgenin sınırı, zaman aralığının uç noktaları olan t_1 ve t_2 anlarındaki madde elemanlarından oluşur. Bu durumda, bir madde elemanının t_1 anında bölgeye girdiğinde ve t_2 anında çıktığında sahip olduğu enerji–momentum vektörleri arasındaki geometrik farkın bileşenleri

$$\begin{aligned} & \int_{t_1}^{t_2} X dx \wedge dy \wedge dz \wedge dt, \\ & \int_{t_1}^{t_2} Y dx \wedge dy \wedge dz \wedge dt, \\ & \int_{t_1}^{t_2} Z dx \wedge dy \wedge dz \wedge dt \end{aligned} \quad (3.2.6)$$

olan bir uzaysal vektörle verilir.

Başka bir deyişle, bir bölgenin sınırı boyunca enerji-momentum dört-vektörünün integrali, bölgenin kendisi boyunca kuvvet üç-vektörünün dört boyutlu integraline eşittir. Bu ifade aşağıdaki formüllerle gösterilir:

$$\begin{aligned}
\Pi' &= 0, \\
\Pi'_x &= X dt \wedge dx \wedge dy \wedge dz, \\
\Pi'_y &= Y dt \wedge dx \wedge dy \wedge dz, \\
\Pi'_z &= Z dt \wedge dx \wedge dy \wedge dz.
\end{aligned} \tag{3.2.7}$$

Bununla birlikte,

$$\begin{aligned}
\Pi' &= \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} \right] dt \wedge dx \wedge dy \wedge dz, \\
\Pi'_x &= \left[\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u^2)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho uv)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho uw)}{\partial z} \right] dt \wedge dx \wedge dy \wedge dz, \\
\Pi'_y &= \left[\frac{\partial(\rho v)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho uv)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v^2)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho vw)}{\partial z} \right] dt \wedge dx \wedge dy \wedge dz, \\
\Pi'_z &= \left[\frac{\partial(\rho w)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho uw)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho vw)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w^2)}{\partial z} \right] dt \wedge dx \wedge dy \wedge dz
\end{aligned} \tag{3.2.8}$$

momentum terimlerinin türevleri yazılabilir. (3.2.7) ve (3.2.8) denklemleri kullanılarak

$$\begin{aligned}
\Pi' &= \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0, \\
X &= \frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u^2)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho uv)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho uw)}{\partial z}, \\
Y &= \frac{\partial(\rho v)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho uv)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v^2)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho vw)}{\partial z}, \\
Z &= \frac{\partial(\rho w)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho uw)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho vw)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w^2)}{\partial z}
\end{aligned} \tag{3.2.9}$$

denklemine ulaşılır. Genel bir durum göz önünde bulundurularak, sistem içerisindeki basınç bileşenleri P_{ij} verildiği takdirde, hareket denklemlerinin tüm bileşenleri

elde edilebilir. Bu durumda, akışkanın dinamik davranışını tanımlayan ilgili kuvvet, verilen basınç dağılımları kullanılarak yazılabilir ve gerekli denklemler bulunabilir;

$$\begin{aligned}
& - P_{xx} dy \wedge dz \wedge dt - P_{xy} dz \wedge dx \wedge dt - P_{xz} dx \wedge dy \wedge dt \\
& - P_{yx} dy \wedge dz \wedge dt - P_{yy} dz \wedge dx \wedge dt - P_{yz} dx \wedge dy \wedge dt \\
& - P_{zx} dy \wedge dz \wedge dt - P_{zy} dz \wedge dx \wedge dt - P_{zz} dx \wedge dy \wedge dt
\end{aligned} \tag{3.2.10}$$

(3.2.9) denkleminde ($\Pi' = 0$) koşulu kullanıldığında,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0. \tag{3.2.11}$$

denklemi elde edilir. Bu denklem, kütlenin korunumu ilkesini ifade eder ve akışkanlar mekaniğinde süreklilik denklemi olarak adlandırılır.

X -yönünde momentum:

$$\begin{aligned}
& \int \rho u dx \wedge dy \wedge dz - (\rho u^2 + P_{xx}) dy \wedge dz \wedge dt \\
& - (\rho uv + P_{xy}) dz \wedge dx \wedge dt - (\rho uw + P_{xz}) dx \wedge dy \wedge dt.
\end{aligned} \tag{3.2.12}$$

Bu şekilde tanımlanır. Denklem (3.2.9) bulmak için yapılmış adımlar X -yönünde momentum için de yapılabilir, böylece;

$$\begin{aligned}
\Pi'_x = & \left[\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u^2 + P_{xx})}{\partial x} + \frac{\partial(\rho uv + P_{xy})}{\partial y} + \frac{\partial(\rho uw + P_{xz})}{\partial z} \right] dt \wedge dx \wedge dy \wedge dz = \\
& X dt \wedge dx \wedge dy \wedge dz.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& u \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial P_{xx}}{\partial x} + u \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial P_{xy}}{\partial y} \\
& + u \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} + \rho w \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial P_{xz}}{\partial z} = X.
\end{aligned}$$

$$u \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} \right) + \rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u, \frac{\partial u}{\partial x} + v, \frac{\partial u}{\partial y} + w, \frac{\partial u}{\partial z} \right) \tag{3.2.13}$$

$$+ \frac{\partial P_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial P_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial P_{xz}}{\partial z} = X.$$

(3.2.12) denkleminin 1.teriminde süreklilik denklemi (3.2.11) kullanılırsa 1.terim sıfır olur, böylece

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) + \frac{\partial P_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial P_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial P_{xz}}{\partial z} = X. \quad (3.2.14)$$

(3.2.14)'de ilgili kuvvet bileşeni X elde edilir. Aynı yöntem Y ve Z yönlerindeki momentum denklemlerine de uygulanarak, bu doğrultulardaki kuvvet bileşenleri benzer şekilde belirlenebilir.

Y -yönünde momentum:

$$\begin{aligned} & \int \rho v dx \wedge dy \wedge dz - (\rho uv + P_{yx}) dy \wedge dz \wedge dt \\ & - (\rho v^2 + P_{yy}) dz \wedge dx \wedge dt - (\rho vw + P_{yz}) dx \wedge dy \wedge dt. \\ \Pi'_y = & \left[\frac{\partial(\rho v)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho uv + P_{yx})}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v^2 + P_{yy})}{\partial y} + \frac{\partial(\rho vw + P_{yz})}{\partial z} \right] dt \wedge dx \wedge dy \wedge dz = \\ & Y dt \wedge dx \wedge dy \wedge dz. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & v \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \rho u \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial P_{yx}}{\partial x} + v \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} \\ & + \rho v \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial P_{yy}}{\partial y} + v \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} + \rho w \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial P_{yz}}{\partial z} = Y. \\ & v \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} \right) + \rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) \\ & + \frac{\partial P_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial P_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial P_{yz}}{\partial z} = Y. \end{aligned}$$

Y yönünde kuvvet bulunur;

$$\rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) + \frac{\partial P_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial P_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial P_{yz}}{\partial z} = Y. \quad (3.2.15)$$

Z -yönünde momentum:

$$\begin{aligned} & \int \rho w dx \wedge dy \wedge dz - (\rho uw + P_{zx}) dy \wedge dz \wedge dt \\ & - (\rho vw + P_{zy}) dz \wedge dx \wedge dt - (\rho w^2 + P_{zz}) dx \wedge dy \wedge dt. \end{aligned}$$

$$\Pi'_z = \left[\frac{\partial(\rho w)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u w + P_{zx})}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v w + P_{zy})}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w^2 + P_{zz})}{\partial z} \right] dt \wedge dx \wedge dy \wedge dz =$$

$$Z dt \wedge dx \wedge dy \wedge dz.$$

$$\begin{aligned} & \rho \frac{\partial w}{\partial t} + w \frac{\partial \rho}{\partial t} + w \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \rho u \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial P_{zx}}{\partial x} + w \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} \\ & + \rho v \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial P_{zy}}{\partial y} + w \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} + \rho w \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial P_{zz}}{\partial z} = Z. \\ & w \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} \right) + \rho \left(\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) \\ & + \frac{\partial P_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial P_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial P_{zz}}{\partial z} = Z. \\ & \rho \left(\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \frac{\partial P_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial P_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial P_{zz}}{\partial z} = Z. \end{aligned} \quad (3.2.16)$$

Aynı hesaplama yöntemi sonucunda (3.2.16)'de Z yönündeki kuvvet bileşeni elde edilir.

Bu denklemler tam değildir. Bunun nedeni, açısal momentum teoreminin hesaba katılmamış olmasıdır; bu teorem mevcut çerçevede aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} (y\Pi_z - z\Pi_y) &= \int_{\Omega} (yZ - zY) dt \wedge dx \wedge dy \wedge dz, \\ \int_{\partial\Omega} (z\Pi_x - x\Pi_z) &= \int_{\Omega} (zX - xZ) dt \wedge dx \wedge dy \wedge dz, \\ \int_{\partial\Omega} (x\Pi_y - y\Pi_x) &= \int_{\Omega} (xY - yX) dt \wedge dx \wedge dy \wedge dz. \end{aligned} \quad (3.2.17)$$

Burada sağ taraftaki integraller uzay-zamanın keyfi bir hacim elemanı üzerinde, sol taraftakiler ise bu hacmin üç boyutlu sınırı üzerinde alınmaktadır.

Önceki sonuçlar, vektörel bir gösterim kullanılarak daha bütünlüklü bir biçimde ifade edilebilir. E_0, E_1, E_2, E_3 , sırasıyla bileşenleri

$$(1, 0, 0, 0), \quad (0, 1, 0, 0), \quad (0, 0, 1, 0), \quad (0, 0, 0, 1)$$

olan dört-vektörleri gösterir. Burada E_0 zaman doğrultusuna, E_1, E_2, E_3 ise uzay-sal doğrultulara karşılık gelir. Bu gösterimde, kütlesi μ olan bir parçacığın enerji-momentumu

$$\mu \left(E_0 + \frac{dx}{dt} E_1 + \frac{dy}{dt} E_2 + \frac{dz}{dt} E_3 \right)$$

şeklinde yazılır.

Uzay-zamandaki bir nokta

$$r = (t, x, y, z)$$

ile gösterildiğinde, bu noktanın zamana göre türevi

$$\frac{dr}{dt} = \left(1, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt} \right)$$

olup parçacığın uzay-zaman hız vektörünü verir. Dolayısıyla parçacığın enerji-momentumu

$$\mu \frac{dr}{dt}$$

biçiminde ifade edilebilir. Bununla birlikte, enerji-momentumun yalnızca bir serbest vektör olarak verilmesi, bu vektörün uzay-zamanda hangi noktaya bağlı olduğunu açıkça göstermez. Özellikle doğrusal momentum ile açısal momentumun tek bir geometrik yapı içinde ifade edilebilmesi için, parçacığın konumu ile enerji-momentumunun birlikte ele alınması gerekir. Bu amaçla kayan vektör gösteriminden yararlanılır.

Noktalar ve serbest vektörler birinci mertebeden geometrik formlar olarak ele alınırken, bir uygulama noktası ile belirli bir doğrultuyu birlikte içeren kayan vektörler ikinci mertebeden geometrik formlarla temsil edilir. Afin uzayda bir nokta ile bir serbest vektörü aynı cebirsel gösterim içinde ayırt edebilmek için homojen koordinatlar kullanılır. Buna göre, koordinatları

$$(t, x, y, z)$$

olan bir uzay-zaman noktasının homojen koordinat gösterimi

$$(1, t, x, y, z)$$

şeklindedir. Buradaki ilk bileşenin 1 olması, söz konusu geometrik nesnenin bir nokta olduğunu belirtir. Buna karşılık, bileşenleri

$$(\tau, \xi, \eta, \zeta)$$

olan bir serbest uzay–zaman vektörünün homojen koordinat gösterimi

$$(0, \tau, \xi, \eta, \zeta)$$

biçimindedir. İlk bileşenin 0 olması, bu nesnenin bir nokta değil, bir serbest vektör olduğunu ifade eder. Özellikle tamamen uzaysal bir serbest vektörün homojen koordinat gösterimi

$$(0, 0, \xi, \eta, \zeta)$$

şeklindedir.

Uzay–zamanda iki farklı nokta

$$r = (t, x, y, z), \quad r' = (t', x', y', z')$$

ile gösterilirse, bu noktaların homojen koordinat gösterimleri sırasıyla

$$r_h = (1, t, x, y, z), \quad r'_h = (1, t', x', y', z')$$

şeklindedir. Bu iki noktadan geçen doğruya karşılık gelen kayan vektör,

$$r \wedge r'$$

bivektörü ile temsil edilir.

Bu bivektörün bileşenleri, homojen koordinatlardan oluşturulan

$$\begin{array}{ccccc} 1 & t & x & y & z \\ 1 & t' & x' & y' & z' \end{array}$$

dizisindeki ikişerli sütunların 2×2 determinantlarıdır. Bu determinantlardan elde edilen bileşenlere Plücker koordinatları denir. Açık olarak, $r \wedge r'$ kayan vektörünün Plücker koordinatları

$$\begin{aligned} t' - t, & \quad x' - x, & \quad y' - y, & \quad z' - z, \\ tx' - xt', & \quad ty' - yt', & \quad tz' - zt', \\ xy' - yx', & \quad xz' - zx', & \quad yz' - zy' \end{aligned}$$

şeklindedir. Başka bir deyişle, homojen gösterimde beş bileşen bulunduğundan, ikişerli sütun seçimlerinden

$$\binom{5}{2} = 10$$

adet Plücker koordinatı elde edilir. Ayrıca dış çarpımın antisimetrik olması nedeniyle

$$r \wedge r' = -r' \wedge r$$

bağıntısı sağlanır.

Orijini r noktasında bulunan ve verilen bir E uzaysal vektörüne paralel olan kayan vektör,

$$r \wedge E$$

ile gösterilir. E uzaysal bir serbest vektör olduğundan, homojen koordinat gösterimi

$$E_h = (0, 0, \xi, \eta, \zeta)$$

şeklindedir. Buna göre, $r \wedge E$ kayan vektörüne karşılık gelen Plücker koordinatları,

$$\begin{array}{ccccc} 1 & t & x & y & z \\ 0 & 0 & \xi & \eta & \zeta \end{array}$$

dizisindeki ikişerli sütunların 2×2 determinantlarından elde edilir. Burada ilk satır kayan vektörün bağlı olduğu uzay–zaman noktasını, ikinci satır ise vektörün uzaysal doğrultusunu temsil eder.

Benzer biçimde, iki serbest uzaysal vektörün homojen koordinat gösterimleri

$$E_h = (0, 0, \xi, \eta, \zeta), \quad E'_h = (0, 0, \xi', \eta', \zeta')$$

şeklinde verilsin. Bu iki vektörden elde edilen bivektör,

$$E \wedge E'$$

biçiminde yazılır. Her iki geometrik nesne de serbest vektör olduğundan, homojen koordinat gösterimlerinin ilk bileşenleri sıfırdır. Dolayısıyla, $E \wedge E'$ bivektörünün Plücker koordinatları,

$$\begin{array}{ccccc} 0 & 0 & \xi & \eta & \zeta \\ 0 & 0 & \xi' & \eta' & \zeta' \end{array}$$

29

dizisindeki ikişerli sütunlardan oluşturulan 2×2 determinantlarla belirlenir.

Her durumda ele alınan kayan vektör ya da bivektör, birinci mertebeden iki geometrik formun dış çarpımı olarak ifade edilir. Dış çarpım dağılımlı ve antisimetrik olduğundan,

$$E \wedge E' = -E' \wedge E$$

bağıntısı geçerlidir.

Şimdi, belirli bir anda noktasal parçacığın konumunu temsil eden uzay-zaman noktası $r = (t, x, y, z)$ olsun. Bu noktanın homojen koordinat gösterimi

$$r_h = (1, t, x, y, z)$$

şeklindedir. Parçacığın uzay-zaman hız vektörünün homojen koordinat gösterimi ise

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)_h = \left(0, 1, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right)$$

biçimindedir. Buradaki ilk bileşenin 0 olması, $\left(\frac{dr}{dt}\right)_h$ ifadesinin bir nokta değil, bir serbest vektör olduğunu; ikinci bileşenin 1 olması ise zaman koordinatının t 'ye göre türevinin bire eşit olduğunu gösterir.

Buna göre, orijini parçacığın bulunduğu r uzay-zaman noktasında olan ve parçacığın enerji-momentumunu taşıyan kayan vektör

$$\mu \left(r \wedge \frac{dr}{dt} \right) \quad (3.2.18)$$

şeklinde ifade edilir. Bu gösterim, parçacığın hem uzay-zamandaki konumunu hem de bu konuma bağlı enerji-momentumunu tek bir geometrik yapı içinde bir araya getirir.

Parçacığa etki eden kuvveti temsil eden kayan vektör $[F]$ ile gösterildiğinde, dinamiğin temel ilkesi

$$\frac{d}{dt} \left\{ \mu \left[r \wedge \frac{dr}{dt} \right] \right\} = [F] \quad (3.2.19)$$

biçiminde yazılır. (3.2.19) geometrik denklemi, Plücker koordinatları bakımından açıldığında kütlenin korunumu ilkesini, doğrusal momentum denklemlerini ve açısal momentum teoremini birlikte içerir. Aşağıda bu sonuçlar, Plücker koordinatlarının açık bileşenleri kullanılarak elde edilecektir.

$$[r \wedge \dot{r}] = \begin{pmatrix} 1 & t & x & y & z \\ 0 & 1 & \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \end{pmatrix} \quad (3.2.20)$$

$$[F] = \begin{pmatrix} 1 & t & x & y & z \\ 0 & 0 & X & Y & Z \end{pmatrix} \quad (3.2.21)$$

(3.2.20)'de ilk satır parçacığın konum vektörü r 'ye, ikinci satır ise hız vektörü $\dot{r}$ 'ye aittir. (3.2.21)'de ise kuvvet vektörü F Plücker koordinatları matris biçiminde yazılır. (3.2.19) denkleminde mekaniğin 10 denklemi aşağıdaki gibi elde edilebilir:

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} &= 1 \Rightarrow \frac{d\mu}{dt} = 0 = \det \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \det \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & \dot{x} \end{pmatrix} &= \dot{x} \Rightarrow \frac{d}{dt} \left(\mu \frac{dx}{dt} \right) = X = \det \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & X \end{pmatrix} \\ \det \begin{pmatrix} 1 & y \\ 0 & \dot{y} \end{pmatrix} &= \dot{y} \Rightarrow \frac{d}{dt} \left(\mu \frac{dy}{dt} \right) = Y = \det \begin{pmatrix} 1 & y \\ 0 & Y \end{pmatrix} \\ \det \begin{pmatrix} 1 & z \\ 0 & \dot{z} \end{pmatrix} &= \dot{z} \Rightarrow \frac{d}{dt} \left(\mu \frac{dz}{dt} \right) = Z = \det \begin{pmatrix} 1 & z \\ 0 & Z \end{pmatrix} \\ \det \begin{pmatrix} t & x \\ 1 & \dot{x} \end{pmatrix} &= t\dot{x} - x \Rightarrow \frac{d}{dt} \{ \mu(t\dot{x} - x) \} = tX = \det \begin{pmatrix} t & x \\ 0 & X \end{pmatrix} \\ \det \begin{pmatrix} t & y \\ 1 & \dot{y} \end{pmatrix} &= t\dot{y} - y \Rightarrow \frac{d}{dt} \{ \mu(t\dot{y} - y) \} = tY = \det \begin{pmatrix} t & y \\ 0 & Y \end{pmatrix} \\ \det \begin{pmatrix} t & z \\ 1 & \dot{z} \end{pmatrix} &= t\dot{z} - z \Rightarrow \frac{d}{dt} \{ \mu(t\dot{z} - z) \} = tZ = \det \begin{pmatrix} t & z \\ 0 & Z \end{pmatrix} \\ \det \begin{pmatrix} x & y \\ \dot{x} & \dot{y} \end{pmatrix} &= x\dot{y} - y\dot{x} \Rightarrow \frac{d}{dt} \{ \mu(x\dot{y} - y\dot{x}) \} = xY - yX = \det \begin{pmatrix} x & y \\ X & Y \end{pmatrix} \\ \det \begin{pmatrix} x & z \\ \dot{x} & \dot{z} \end{pmatrix} &= x\dot{z} - z\dot{x} \Rightarrow \frac{d}{dt} \{ \mu(x\dot{z} - z\dot{x}) \} = xZ - zX = \det \begin{pmatrix} x & z \\ X & Z \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\det \begin{pmatrix} y & z \\ \dot{y} & \dot{z} \end{pmatrix} = y\dot{z} - z\dot{y} \Rightarrow \frac{d}{dt}\{\mu(y\dot{z} - z\dot{y})\} = yZ - zY = \det \begin{pmatrix} y & z \\ Y & Z \end{pmatrix}$$

(3.2.19) denklemleri açıldığında, bunun aslında birden fazla bağımsız denklem içerdiği görülür. Bunun nedeni kama çarpımının antisimetri özelliğidir. İki satırlı bu tablodan seçilen her iki sütun bir 2×2 determinant oluşturur ve bu determinantlar mekaniğin yasalarını verir.

İlk olarak zaman bileşenleri kullanılarak elde edilen determinant

$$\begin{vmatrix} 1 & t \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$$

kütlenin zamanla değişmediğini gösterir ve

$$\frac{d\mu}{dt} = 0$$

sonucunu verir. Bu ifade kütlenin korunumu ilkesini temsil eder.

Daha sonra $(1, x)$, $(1, y)$ ve $(1, z)$ sütun çiftleri kullanılarak elde edilen determinantlar sırasıyla,

$$\frac{d}{dt}(\mu\dot{x}) = X, \quad \frac{d}{dt}(\mu\dot{y}) = Y, \quad \frac{d}{dt}(\mu\dot{z}) = Z$$

denklemlerini verir. Bu ifadeler Newton mekaniğinin 2. yasası olan

$$F = \frac{dp}{dt}$$

denkleminin üç uzaysal bileşene ayrılmış hâlidir ve parçacığın lineer momentumunun değişimini tanımlar.

Daha sonra zaman ve uzay koordinatlarının birlikte bulunduğu sütun çiftlerinden elde edilen determinantlar

$$\frac{d}{dt}\{\mu(t\dot{x} - x)\} = tX,$$

$$\frac{d}{dt}\{\mu(t\dot{y} - y)\} = tY,$$

$$\frac{d}{dt}\{\mu(t\dot{z} - z)\} = tZ$$

şeklinde ek üç denklem üretir. Bu ifadeler klasik mekaniğin Galilei hız dönüşümleriyle ilişkili momentum ifadelerini temsil eder.

Son olarak yalnızca uzay koordinatlarının yer aldığı sütun çiftlerinden elde edilen determinantlar

$$\frac{d}{dt}\{\mu(x\dot{y} - y\dot{x})\} = xY - yX,$$

$$\frac{d}{dt}\{\mu(x\dot{z} - z\dot{x})\} = xZ - zX,$$

$$\frac{d}{dt}\{\mu(y\dot{z} - z\dot{y})\} = yZ - zY$$

denklemlerini verir. Bu ifadeler klasik mekanikte bilinen açısal momentum teoremini temsil etmektedir.

Sonuç olarak, klasik mekanikte çoğu zaman ayrı ilkeler olarak ele alınan hareket yasalarının, burada tek bir diferansiyel-geometrik yapıdan (3.2.19) doğal olarak ortaya çıktığı görülmektedir. Bu sonuç, diferansiyel geometrinin temel araçlarının fiziksel yasaların ortak geometrik kökenini ortaya koyan güçlü bir dil sunduğunu göstermektedir.

Sürekli ortamlar mekaniğine geri dönüldüğünde enerji-momentum bir kayıcı vektör G ile ve üç boyutlu bir hacim elemanı başına düşen kuvvet bir kayıcı vektör F ile gösterilebilir. Böylece mekaniğin denklemleri aşağıdaki tek formül içinde özlü bir şekilde ifade edilebilir:

$$G = (r \wedge E_\mu) \Pi^\mu \quad (3.2.22)$$

burada,

$$(\Pi^\mu) = (\Pi, \Pi_x, \Pi_y, \Pi_z)$$

ortam içindeki bir madde elemanının enerji-momentum vektörünün dört bileşenidir.

$$dr = E_0 dt + E_1 dx + E_2 dy + E_3 dz,$$

$$dr = E_\mu dx^\mu,$$

Burada E_μ 'ler baz vektörleridir.

$$\eta_\nu = \frac{1}{3!} \varepsilon_{\nu\alpha\beta\gamma} dx^\alpha \wedge dx^\beta \wedge dx^\gamma.$$

η_ν diferansiyel üç-formları Levi-Civita tensörü kullanılarak tanımlanır. Bu formlar uzay-zamandaki hacim elemanlarını temsil eder. Özellikle η_0, η_1, η_2 ve η_3 ifadeleri bu genel tanımın açık bileşenleridir.

$$\eta_0 = dx \wedge dy \wedge dz,$$

$$\eta_1 = dt \wedge dz \wedge dy,$$

$$\eta_2 = dt \wedge dx \wedge dz,$$

$$\eta_3 = dt \wedge dy \wedge dx.$$

Buna ek olarak

$$\eta = \frac{1}{4!} \varepsilon_{\nu\mu\alpha\beta} dx^\nu \wedge dx^\mu \wedge dx^\alpha \wedge dx^\beta$$

ifadesi dört boyutlu uzay-zamanın hacim formunu verir.

Enerji-momentum yoğunluğu:

$$\Pi^\mu = \Pi^{\mu\nu} \eta_\nu$$

şeklinde yazılır. Burada $\Pi^{\mu\nu}$ sürekli ortamın enerji-momentum tensörüdür ve

$$\Pi^{\mu\nu} = \rho u^\mu u^\nu + P^{\mu\nu} \quad (3.2.23)$$

eşitliği ile ifade edilir. Bu eşitlikte ρ kütle yoğunluğunu, u^μ hız alanını ve $P^{\mu\nu}$ ise basınç tensörünü temsil eder.

Kuvvet terimi F ise hacim kuvvetlerini ve torkları içeren bir diferansiyel form olarak tanımlanır.

$$F = (r \wedge E_\mu) F^\mu \eta_0 + \frac{1}{2} E_\mu \wedge E_\nu \varepsilon^{0\mu\nu\alpha} N_\alpha \eta_0 \quad (3.2.24)$$

Son olarak elde edilen

$$dG = dt \wedge F \quad (3.2.25)$$

eşitliği sürekli ortamın dinamiğini belirleyen temel denklemdir. Bu denklem enerji-momentum yoğunluğunun zamana göre değişiminin uygulanan kuvvet ile belirlendiğini ifade eder. Burada, $(F^\mu) = (0, X, Y, Z)$ kuvvet vektörünün bileşenlerini, $(N_\alpha) = (L, M, N)$ ise sistem üzerindeki tork bileşenlerini göstermektedir.

(3.2.22) denkleminin dış türevi alınırsa ve (3.2.24) denklemine dt dış çarpımı uygulanırsa şu sonuçlar elde edilir:

$$dG = (dr \wedge E_\mu) \Pi^\mu + (r \wedge E_\mu) d\Pi^\mu \quad (3.2.26)$$

$$dt \wedge F = (r \wedge E_\mu) F^\mu \eta + \frac{1}{2} E_\mu \wedge E_\nu \varepsilon^{0\mu\nu\alpha} N_\alpha \eta. \quad (3.2.27)$$

(3.2.25) denkleminin dolayısı (3.2.26) ve (3.2.27) denklemleri eşitlendiğinde hareket denklemleri elde edilir:

$$(i) \quad d\Pi^\mu = F^\mu \eta \quad (3.2.28)$$

$$(ii) \quad dx^{[\mu} \wedge \Pi^{\nu]} = \varepsilon^{0\mu\nu\alpha} N_\alpha \eta \quad (3.2.29)$$

Birinci hareket denkleminin (3.2.11), (3.2.14), (3.2.15) ve (3.2.16) denklemleri elde edilebilir. Enerji-momentum yoğunluğu ile dış kuvvet yoğunluğu arasındaki temel ilişki (3.2.28) denkleminin, diferansiyel formlar için Leibniz kuralı kullanılarak

$$d(\Pi^{\mu\nu} \eta_\nu) = d\Pi^{\mu\nu} \wedge \eta_\nu + \Pi^{\mu\nu} d\eta_\nu \quad (3.2.30)$$

elde edilir. Bu ifade diferansiyel formlar için çarpım kuralına karşılık gelir:

$$d(f\omega) = df \wedge \omega + f d\omega.$$

Burada η_ν üç-formu şu şekilde tanımlıdır:

$$\eta_\nu = \frac{1}{3!} \varepsilon_{\nu\mu\alpha\beta} dx^\mu \wedge dx^\alpha \wedge dx^\beta. \quad (3.2.31)$$

(3.2.31) denkleminin dış türevi alındığında

$$d\eta_\nu = \frac{1}{3!} \varepsilon_{\nu\mu\alpha\beta} d(dx^\mu \wedge dx^\alpha \wedge dx^\beta). \quad (3.2.32)$$

bulunur, ve denklem (3.2.32)'ye dış türev çarpım kuralı uygulandığında ise

$$d\eta_\nu = \frac{1}{3!} \varepsilon_{\nu\mu\alpha\beta} \left(d(dx^\mu) \wedge dx^\alpha \wedge dx^\beta - dx^\mu \wedge d(dx^\alpha) \wedge dx^\beta + dx^\mu \wedge dx^\alpha \wedge d(dx^\beta) \right). \quad (3.2.33)$$

elde edilir, ancak dış türev için

$$d^2 = 0 \quad (3.2.34)$$

özelliliği geçerlidir (Poincaré Lemması). Bu nedenle, denklem (3.2.33) teki bu terimler;

$$d(dx^\mu) = 0 \quad d(dx^\alpha) = 0 \quad d(dx^\beta) = 0$$

sıfırlanırlar. Sonuç olarak

$$d\eta_\nu = 0 \quad (3.2.35)$$

elde edilir. Burada $d\eta_\nu = 0$ olduğu için (3.2.30)'un sağ tarafındaki ikinci terim ortadan kalkar.

Bir skaler fonksiyonun diferansiyeli

$$df = \frac{\partial f}{\partial x^\lambda} dx^\lambda$$

şeklindedir. Bu ifade kullanılarak (3.2.30) denklemi

$$d(\Pi^{\mu\nu}\eta_\nu) = \frac{\partial \Pi^{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} dx^\lambda \wedge \eta_\nu$$

bu şekilde yazılır. Diferansiyel formların özelliği gereği

$$dx^\lambda \wedge \eta_\nu = \begin{cases} \eta, & \lambda = \nu \\ 0, & \lambda \neq \nu \end{cases}$$

olur. Bu nedenle

$$d(\Pi^{\mu\nu}\eta_\nu) = \frac{\partial \Pi^{\mu\nu}}{\partial x^\nu} \eta = (\partial_\nu \Pi^{\mu\nu})\eta$$

elde edilir. Başlangıçtaki (3.2.28) denklem ile, karşılaştırıldığında

$$(\partial_\nu \Pi^{\mu\nu})\eta = F^\mu \eta$$

bulunur. Buradan enerji-momentum tensörü için

$$\partial_\nu \Pi^{\mu\nu} = F^\mu \quad (3.2.36)$$

sonucu elde edilir.

$$\Pi^{\mu\nu} = \rho u^\mu u^\nu + P^{\mu\nu}$$

olduğundan dolayı, nihayi denkelm

$$\partial_\nu (\rho u^\mu u^\nu + P^{\mu\nu}) = F^\mu \quad (3.2.37)$$

bulunur. (3.2.37) denkleminde indis hesabı yapılarak (3.2.11), (3.2.14), (3.2.15) ve (3.2.16) denklemleri elde edilebilir ve bunu göstere biliriz;

$$\mu = 0$$

$$\partial_\nu(\rho u^0 u^\nu + P^{0\nu}) = F^0 = 0$$

$$P^{0\nu} = 0$$

$$\partial_\nu \left(\rho \frac{dx^0}{dt} \frac{dx^\nu}{dt} \right) = 0$$

$$\partial_\nu \left(\rho \frac{dx^\nu}{dt} \right) = 0$$

ν indisleri yerine konulursa, $\nu = 0, 1, 2, 3$

$$\frac{\partial}{\partial x^0} \left(\rho \frac{dx^0}{dt} \right) + \frac{\partial}{\partial x^1} \left(\rho \frac{dx^1}{dt} \right) + \frac{\partial}{\partial x^2} \left(\rho \frac{dx^2}{dt} \right) + \frac{\partial}{\partial x^3} \left(\rho \frac{dx^3}{dt} \right) = 0.$$

$\mu = 0$ alındığında süreklilik denklemi (3.2.11) elde edilir:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0.$$

$\mu = 1$ alındığında X-yönü kuvvet denklemi (3.2.14) elde edilir:

$$\partial_\nu(\rho u^1 u^\nu + P^{1\nu}) = F^1 = X$$

$$\begin{aligned} & \partial_0 \left(\rho \frac{dx^1}{dt} \frac{dx^0}{dt} + P^{10} \right) + \partial_1 \left(\rho \frac{dx^1}{dt} \frac{dx^1}{dt} + P^{11} \right) + \partial_2 \left(\rho \frac{dx^1}{dt} \frac{dx^2}{dt} + P^{12} \right) \\ & + \partial_3 \left(\rho \frac{dx^1}{dt} \frac{dx^3}{dt} + P^{13} \right) = X \end{aligned}$$

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) + \frac{\partial P_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial P_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial P_{xz}}{\partial z} = X.$$

$\mu = 2$ alındığında Y-yönü kuvvet denklemi (3.2.15) aynı işlemler yapılarak elde edilir:

$$\partial_\nu(\rho u^2 u^\nu + P^{2\nu}) = F^2 = Y$$

$$\begin{aligned} & \partial_0 \left(\rho \frac{dx^2}{dt} \frac{dx^0}{dt} + P^{20} \right) + \partial_1 \left(\rho \frac{dx^2}{dt} \frac{dx^1}{dt} + P^{21} \right) + \partial_2 \left(\rho \frac{dx^2}{dt} \frac{dx^2}{dt} + P^{22} \right) \\ & + \partial_3 \left(\rho \frac{dx^2}{dt} \frac{dx^3}{dt} + P^{23} \right) = Y \end{aligned}$$

$$\rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) + \frac{\partial P_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial P_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial P_{yz}}{\partial z} = Y.$$

Son olarak $\mu = 3$ alındığında Z-yönü kuvvet denklemi (3.2.16) de bulunur:

$$\begin{aligned} \partial_\nu(\rho u^3 u^\nu + P^{3\nu}) &= F^3 = Z \\ \partial_0 \left(\rho \frac{dx^3}{dt} \frac{dx^0}{dt} + P^{30} \right) &+ \partial_1 \left(\rho \frac{dx^3}{dt} \frac{dx^1}{dt} + P^{31} \right) + \partial_2 \left(\rho \frac{dx^3}{dt} \frac{dx^2}{dt} + P^{32} \right) \\ &+ \partial_3 \left(\rho \frac{dx^3}{dt} \frac{dx^3}{dt} + P^{33} \right) = Z \\ \rho \left(\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) &+ \frac{\partial P_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial P_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial P_{zz}}{\partial z} = Z. \end{aligned}$$

(3.2.37) denklemi sürekli ortamlar mekaniğinin denklemlerini kolaylıkla elde etmemizi sağlar.

İkinci hareket denklemi, sürekli ortamın açısal momentumunu ifade etmektedir. Bu denklem, enerji-momentum tensörünün antisimetrik kısmı ile ortam üzerindeki tork yoğunluğu arasındaki ilişkiyi belirler. (3.2.29) denkleminde kullanılan köşeli parantez, antisimetrizasyonu gösterecek biçimde

$$dx^{[\mu} \wedge \Pi^{\nu]} \equiv dx^\mu \wedge \Pi^\nu - dx^\nu \wedge \Pi^\mu \quad (3.2.38)$$

olarak tanımlanır. Buna göre (3.2.29) denklemi,

$$dx^\mu \wedge \Pi^\nu - dx^\nu \wedge \Pi^\mu = \varepsilon^{0\mu\nu\alpha} N_\alpha \eta \quad (3.2.39)$$

biçiminde yazılır.

Enerji-momentum yoğunluğu

$$\Pi^\mu = \Pi^{\mu\lambda} \eta_\lambda \quad (3.2.40)$$

şeklinde ifade edilir. Ayrıca, hacim formlarının tanımından

$$dx^\sigma \wedge \eta_\lambda = \delta^\sigma_\lambda \eta \quad (3.2.41)$$

bağıntısı elde edilir. (3.2.40) ve (3.2.41) kullanılarak,

$$\begin{aligned} dx^\mu \wedge \Pi^\nu &= dx^\mu \wedge (\Pi^{\nu\lambda} \eta_\lambda) \\ &= \Pi^{\nu\lambda} dx^\mu \wedge \eta_\lambda \\ &= \Pi^{\nu\mu} \eta \end{aligned} \quad (3.2.42)$$

bulunur. Benzer biçimde,

$$dx^\nu \wedge \Pi^\mu = \Pi^{\mu\nu} \eta \quad (3.2.43)$$

elde edilir. Bu sonuçlar (3.2.39) denkleminde yerine konulduğunda,

$$(\Pi^{\nu\mu} - \Pi^{\mu\nu}) \eta = \varepsilon^{0\mu\nu\alpha} N_\alpha \eta \quad (3.2.44)$$

eşitliğine ulaşılır. Hacim formu η sıfırdan farklı olduğundan, (3.2.44) denklemi

$$\Pi^{\nu\mu} - \Pi^{\mu\nu} = \varepsilon^{0\mu\nu\alpha} N_\alpha \quad (3.2.45)$$

şeklinde indirgenir.

Enerji-momentum tensörü

$$\Pi^{\mu\nu} = \rho u^\mu u^\nu + P^{\mu\nu}$$

kullanılarak, (3.2.45) denkleminin sol tarafı

$$\begin{aligned} \Pi^{\nu\mu} - \Pi^{\mu\nu} &= (\rho u^\nu u^\mu + P^{\nu\mu}) - (\rho u^\mu u^\nu + P^{\mu\nu}) \\ &= \rho (u^\nu u^\mu - u^\mu u^\nu) + P^{\nu\mu} - P^{\mu\nu} \end{aligned} \quad (3.2.46)$$

olarak yazılır. Hız alanı bileşenlerinin çarpımı simetrik olduğundan,

$$u^\nu u^\mu - u^\mu u^\nu = 0$$

olur. Dolayısıyla, ikinci hareket denklemi

$$P^{\nu\mu} - P^{\mu\nu} = \varepsilon^{0\mu\nu\alpha} N_\alpha \quad (3.2.47)$$

biçimine indirgenir. Buna göre açısal momentum dengesi, basınç ya da gerilme tensörünün antisimetrik kısmının tork yoğunluğu tarafından belirlendiğini göstermektedir.

Uzaysal bileşenleri açıkça elde etmek için,

$$x^0 = t, \quad x^1 = x, \quad x^2 = y, \quad x^3 = z$$

ve

$$(N_1, N_2, N_3) = (L, M, N)$$

gösterimleri kullanılır. Levi-Civita sembolü için

$$\varepsilon^{0123} = 1$$

konvansiyonu benimsendiğinde, ilk olarak, $(\mu, \nu) = (2, 3)$ seçimi yapılırsa, (3.2.47) denkleminde

$$P^{32} - P^{23} = \varepsilon^{0231} N_1 = L \quad (3.2.48)$$

elde edilir. Kartezyen uzaysal bileşenler cinsinden bu sonuç

$$P_{zy} - P_{yz} = L \quad (3.2.49)$$

şeklinde yazılır.

Benzer biçimde, $(\mu, \nu) = (3, 1)$ seçimi için

$$P^{13} - P^{31} = \varepsilon^{0312} N_2 = M \quad (3.2.50)$$

bulunur ve dolayısıyla

$$P_{xz} - P_{zx} = M \quad (3.2.51)$$

sonucu elde edilir.

Son olarak, $(\mu, \nu) = (1, 2)$ seçimi için

$$P^{21} - P^{12} = \varepsilon^{0123} N_3 = N \quad (3.2.52)$$

olduğundan,

$$P_{yx} - P_{xy} = N \quad (3.2.53)$$

bulunur.

Böylece ikinci hareket denkleminde elde edilen açısal momentum denklemleri

$$P_{zy} - P_{yz} = L, \quad P_{xz} - P_{zx} = M, \quad P_{yx} - P_{xy} = N \quad (3.2.54)$$

şeklinde ifade edilir. (3.2.54) denklemleri, basınç tensörünün antisimetrik bileşenlerinin sürekli ortam üzerindeki tork yoğunluklarına karşılık geldiğini ortaya koymaktadır. Sürekli ortamda içsel tork yoğunluğunun bulunmadığı durumda,

$$L = M = N = 0 \quad (3.2.55)$$

olur. Bu durumda (3.2.54) denklemleri

$$P_{zy} = P_{yz}, \quad P_{xz} = P_{zx}, \quad P_{yx} = P_{xy} \quad (3.2.56)$$

bu şekilde gösterilir. Dolayısıyla,

$$P_{ij} = P_{ji} \quad (3.2.57)$$

sonucu elde edilir. Başka bir deyişle, içsel tork yoğunluğunun bulunmadığı klasik sürekli ortam durumunda basınç ya da gerilme tensörü simetriktir. Sonuç olarak, (3.2.28) birinci hareket denklemi enerji-momentum dengesini ifade etmekte ve süreklilik denklemi ile doğrusal momentum denklemlerini vermektedir. Buna karşılık, (3.2.29) ikinci hareket denklemi açısal momentum dengesini belirlemekte ve içsel tork yoğunluğunun bulunmadığı durumda gerilme tensörünün simetrik olması sonucunu ortaya koymaktadır.

Uzay-zamandaki her noktaya değişken bir Galilei referans sistemi ilişkilendirilir. r noktasına bağlı Galilei referans sistemini tanımlayan serbest uzay-zaman vektörleri E_0, E_1, E_2, E_3 ile gösterilir. r noktasından sonsuz küçük derecede yakın bir r' noktasına geçildiğinde bu vektörler değişir. Bununla birlikte E_0 vektörünün zaman bileşeni her zaman 1'e eşit, E_1, E_2, E_3 vektörlerinin zaman bileşenleri ise her zaman sıfırdır. Bu nedenle aşağıdaki formüller elde edilir:

$$\begin{aligned} dE_0 &= \omega_0^0 E_0 + \omega_0^1 E_1 + \omega_0^2 E_2 + \omega_0^3 E_3, \\ dE_1 &= \omega_1^0 E_0 + \omega_1^1 E_1 + \omega_1^2 E_2 + \omega_1^3 E_3, \\ dE_2 &= \omega_2^0 E_0 + \omega_2^1 E_1 + \omega_2^2 E_2 + \omega_2^3 E_3, \\ dE_3 &= \omega_3^0 E_0 + \omega_3^1 E_1 + \omega_3^2 E_2 + \omega_3^3 E_3. \end{aligned} \quad (3.2.58)$$

(3.2.58) denklemleri tek bir denklem ile ifade edilebilir:

$$dE_\nu = \omega_\nu^\mu \wedge E_\mu. \quad (3.2.59)$$

Burada,

$$dr = e^\nu E_\nu,$$

ve hacim formları bu şekilde

$$\hat{\eta} = e^0 \wedge e^1 \wedge e^2 \wedge e^3, \quad \hat{\eta}_0 = e^1 \wedge e^2 \wedge e^3.$$

gösterilir.

G 'nin dış türevi alınarak hareket denklemleri bulunabilir:

$$G = (r \wedge E_\mu) \Pi^\mu.$$

$$G' = dG = (dr \wedge E_\mu) \Pi^\mu + (r \wedge dE_\mu) \Pi^\mu + (r \wedge E_\mu) d\Pi^\mu,$$

$$(r \wedge dE_\mu) \Pi^\mu = (r \wedge (\omega_\mu^\nu \wedge E_\nu)) \Pi^\mu,$$

$$dG = (dr \wedge E_\mu) \Pi^\mu + (r \wedge E_\mu) (d\Pi^\mu + \omega_\nu^\mu \wedge \Pi^\nu),$$

$$dG = (e^\nu E_\nu \wedge E_\mu) \Pi^\mu + (r \wedge E_\mu) (d\Pi^\mu + \omega_\nu^\mu \wedge \Pi^\nu),$$

$$e^0 \wedge F = (r \wedge E_\mu) F^\mu \hat{\eta} + \frac{1}{2} E_i \wedge E_j \varepsilon^{ijk} N_k \hat{\eta},$$

$$G' = e^0 \wedge F \implies d\Pi^\mu + \omega_\nu^\mu \wedge \Pi^\nu = F^\mu \hat{\eta},$$

$$\frac{1}{2} (E_\nu \wedge E_\mu) = \varepsilon^{0\nu\mu\alpha} N_\alpha \hat{\eta},$$

$$\frac{1}{2} (e^\nu \wedge \Pi^\mu - e^\mu \wedge \Pi^\nu) = \frac{1}{2} \varepsilon^{\nu\mu\alpha} N_\alpha \hat{\eta},$$

$$e^\nu \wedge \hat{\eta}_\alpha = \delta^\nu_\alpha \hat{\eta}.$$

Bu işlemler sonucunda iki hareket denklemi şu şekilde elde edilir:

$$\text{i. } d\Pi^\mu + \omega_\nu^\mu \wedge \Pi^\nu = F^\mu \hat{\eta} \quad (3.2.60)$$

$$\text{ii. } \frac{1}{2} (e^\nu \wedge \Pi^\mu - e^\mu \wedge \Pi^\nu) = \frac{1}{2} \varepsilon^{0\nu\mu\alpha} N_\alpha \hat{\eta} \quad (3.2.61)$$

$$\Pi^\mu = \Pi^{\mu\alpha} \hat{\eta}_\alpha,$$

$$d\Pi^\mu = d\Pi^{\mu\alpha} \hat{\eta}_\alpha + \Pi^{\mu\alpha} d\hat{\eta}_\alpha,$$

$$\omega_\nu^\mu := \Gamma_{\sigma\nu}^\mu e^\sigma,$$

Birinci hareket denkleminde yer alan ifade, bağlantı bir-formları tarafından belirlenen kovaryant dış türev yardımıyla yazılabilir. Bu amaçla, enerji-momentum yoğunluğunun bileşenleri için kovaryant dış türev

$$D\Pi^\mu := d\Pi^\mu + \omega_\nu^\mu \wedge \Pi^\nu \quad (3.2.62)$$

şeklinde tanımlanır. Burada D , değişken Galilei referans sistemiyle ilişkili bağlantının belirlediği kovaryant dış türev operatörüdür. Böylece (3.2.60) birinci hareket denklemi

$$D\Pi^\mu = F^\mu \hat{\eta} \quad (3.2.63)$$

biçiminde ifade edilir.

Bu gösterim, enerji–momentum yoğunluğunun değişken Galilei çerçeveleri boyunca kovaryant değişiminin, dış kuvvet yoğunluğu tarafından belirlendiğini ortaya koymaktadır. Sabit bir Galilei çerçevesi seçildiğinde bağlantı bir-formları sıfır olur; yani

$$\omega_\nu{}^\mu = 0.$$

Bu özel durumda (3.2.62) bağıntısı

$$D\Pi^\mu = d\Pi^\mu$$

şekline indirgenir ve (3.2.63) denklemi daha önce elde edilen (3.2.28)

$$d\Pi^\mu = F^\mu{}_\nu \eta^\nu$$

hareket denklemine dönüşür.

4. NEWTON–CARTAN KÜTLEÇEKİMİ

Bir önceki bölümde Cartan'ın bakış açısıyla, Newton kütleçekiminin mutlak uzay içinde etkiyen bağımsız bir kuvvet alanı olarak değil, komşu Galilei çerçeveleri arasındaki geometrik ilişki olarak ele alınabileceği gösterilmiştir. Bu bölümde, söz konusu geometrik yorum modern diferansiyel geometri formalizmiyle yeniden ifade edilecektir. Newton–Cartan kütleçekimi, dört boyutlu bir uzay–zaman manifoldu üzerinde tanımlı dejenere bir zamansal metrik, dejenere bir uzaysal metrik ve bu metriklerle uyumlu bir afin bağlantıdan oluşan bir geometrik yapıdır. Klasik Newton kütleçekimi, bu yapının eğrilik tensörü aracılığıyla geometrik biçimde elde edilir (Cartan 1923) (Cartan 1986) (Trautman 1963).

Bu bölümde öncelikle Newton–Cartan uzay–zamanının temel yapıları tanımlanacak ve bu yapıların sağlaması gereken uyumluluk koşulları (Kuchaş 1980) koordinattan bağımsız biçimde elde edilecektir. Ardından Trautman koşulundan eğrilik tensörü ve alan denklemi türetilecek, bu koşulların ve eğrilik tensörünün ayar dönüşümleri altındaki davranışı incelenecektir. Dejenere metrikler nedeniyle yalnızca uyumluluk koşullarından belirlenemeyen afin bağlantı, söz konusu koşullar ve Künzle'nin kovaryant uzaysal metrik tanımı kullanılarak elde edilecek (Künzle 1972) ve ayar dönüşümleri altındaki davranışı incelenecektir. Son olarak, kütleçekim potansiyel alanının sıfır olduğu özel durum ele alınacak; bu durumda afin bağlantının indirgenmiş biçimi elde edilecek ve geometrinin temel yapılarının uyumluluk koşullarını sağladığı gösterilecektir.

4.1 Newton–Cartan Uzay–Zamanındaki Yapılar

Newtonsalsal uzay–zamanlar birbiriyle ilişkili üç yapı ile donatılmıştır: uzay metriği $g^{\alpha\beta}$, zaman metriği $h_{\alpha\beta}$ ve simetrik afin bağlantı ∇_γ . Bu yapılar aşağıdaki koşulları sağlar:

- (A) Uzay metriği $g^{\alpha\beta}$ dejenere değildir ve imzası $(0; 1, 1, 1)$ 'dir. Benzer şekilde zaman metriği de dejenere değildir ve imzası $(1; 0, 0, 0)$ 'dir. Bu iki metrik birbirine ortogo-

naldır:

$$g^{\alpha\beta}h_{\beta\gamma} = 0. \quad (4.1.1)$$

(B) Simetrik afin bağlantı ∇_γ , her iki metrikle de uyumludur:

$$\nabla_\gamma g^{\alpha\beta} = 0 = \nabla_\gamma h_{\alpha\beta} \quad (4.1.2)$$

(C) Afin bağlantının eğrilik tensörü şu özelliklere sahiptir:

$$h_{\alpha[\beta}R^\gamma_{\delta]\mu\nu} = 0, \quad (\text{Trautman 1963}) \text{ koşulu.} \quad (4.1.3)$$

$$R^{\alpha\gamma}_{\beta\delta} = 0. \quad (4.1.4)$$

Bir olayın koordinatları $x^\alpha = \{t, x^a\}$ şeklindedir; burada $\alpha = 0, 1, 2, 3$ ve $a = 1, 2, 3$ 'tür. Kovaryant türev noktalı virgöl ile de gösterilir:

$$\nabla_\beta w^\alpha = w^\alpha_{;\beta}.$$

Yunan indisleri uzay metriği $g^{\alpha\beta}$ ile yükseltilir ve eğrilik tensörü $R^\alpha_{\beta\gamma\delta}$ şu konvansiyon ile tanımlanır:

$$w^\alpha_{;[\gamma\delta]} = w^\beta R^\alpha_{\beta\gamma\delta}. \quad (4.1.5)$$

Zaman metriği, zamansal ve uzaysal vektörleri ayırt etmeyi sağlar:

$$h_{\alpha\beta}w^\alpha w^\beta \begin{cases} > 0 & \iff w^\alpha, \text{ Zamansal} \\ = 0 & \iff w^\alpha, \text{ Uzaysal} \end{cases} \quad (4.1.6)$$

Uzay metriği, uzaysal vektörlerin normunu belirler. Her uzaysal w^α için, onu üreten bir kovektör w_α bulunabilir:

$$w^\alpha = g^{\alpha\beta}w_\beta.$$

Buna göre w^α 'nın normu şu şekilde tanımlanır: $\|w\|^2 = g^{\alpha\beta}w_\alpha w_\beta$. Ayrıca,

$\tilde{w}_\alpha = w_\alpha + h_{\alpha\beta}v^\beta$ biçimindeki kovektörler de aynı w^α vektörünü üretir; ancak norm $\|w\|$, yardımcı vektör v^α 'ya bağlı değildir.

Temel yapılar $h_{\alpha\beta}$, $g^{\alpha\beta}$ ve ∇_α , aşağıdaki korelasyon postülatları aracılığıyla işlemsel bir anlam kazanır:

(a) zamansal aralıklar standart saatlerle ölçülebilir,

(b) uzaysal aralıklar standart çubuklarla ölçülebilir,

(c) test parçacıkları zamansal jeodezikler boyunca hareket eder.

(A)–(B)–(C) temel varsayımlarından ayrıcalıklı uzay–zaman alanlarının varlığı sonucu çıkarılır ve bu alanların aşağıdaki koşulları sağladığı görülür:

- i. $h_{\alpha\beta} = T_\alpha T_\beta$. $T_\alpha = T_{,\alpha}$.
- ii. $X^{a\alpha}{}_{;\beta} = 0$. $X^{a\alpha} = g^{\alpha\beta} X^a{}_{,\beta}$.
- iii. $g^{\alpha\beta} = \delta_{ab} X^{a\alpha} X^{b\beta}$.
- iv. $u^\alpha T_\alpha = 1$.
- v. $u^\alpha X^a{}_{,\alpha} = 0$.
- vi. $\phi^\alpha = g^{\alpha\beta} \phi_{,\beta}$.
- vii. $u^\alpha{}_{;\beta} = \phi^\alpha T_\beta$.

Bu koşullarda geçen T , X^a , u^α , ϕ^α ve ϕ niceliklerinin Newton–Cartan kütleçekimindeki anlamları Çizelge 4.1’de verilmiştir.

Çizelge 4.1 Newton–Cartan kütleçekiminde temel niceliklerin adlandırılması

Simge	İsimlendirme	Açıklama
T	Mutlak zaman	Uzay–zamanı sabit-zaman yapraklarına ayıran skaler zaman fonksiyonu; $T_\alpha = T_{,\alpha}$, $h_{\alpha\beta} = T_\alpha T_\beta$.
X^a	Galilei koordinatları	Dönmesiz, Kartezyen uzaysal koordinatlar; $g^{\alpha\beta} = \delta_{ab} X^{a\alpha} X^{b\beta}$.
u^α	Galilei gözlemcisinin dört-hızı	Rijit, dönmesiz gözlemcinin (çerçevenin) hız alanı; $u^\alpha T_\alpha = 1$.
ϕ^α	Kütleçekim alan şiddeti	Skaler potansiyelin gradyanı; $\phi^\alpha = g^{\alpha\beta} \phi_{,\beta}$.
ϕ	Skaler kütleçekim potansiyeli	Poisson denklemini sağlayan skaler alan; $\Delta\phi = 4\pi G\rho$.

4.2 Koordinat Bağımsız Denklemlere Geçiş

i. koşul, Newton–Cartan kuramında zamanın geometrik olarak mutlak ve bağımsız bir yapı taşıdığını göstermektedir. **ii.** koşul, $X^{a\alpha}$ vektörlerinin paralel taşındığını ifade eder; dolayısıyla Galilei koordinatları dönmesizdir. **iii.** koşula göre, bu koordinatlar aynı zamanda Kartezyen koordinatlardır. Bu nedenle sabit mutlak zamana karşılık gelen yapraklar düzdür. **iv.** koşul, Galilei gözlemcisinin dünya çizgilerinin mutlak zaman T ile parametrelendirildiğini ifade eder. **v.** koşul ise X^a ’ların Galilei gözlemcisinin eş-hareketli koordinatları olduğunu belirtir. **vi–vii.** koşullardan, Galilei gözlemcisinin rijit olduğu ($u^{(\alpha;\beta)} = 0$) ve ayrıca ϕ^α ’nın kütleçekim alan şiddeti anlamına geldiği sonucuna ulaşılır.

(i)–(vii) koşullarından yararlanılarak aşağıdaki sonuçlara ulaşılabilir:

i.

$$h_{\alpha\beta} = T_\alpha T_\beta \Rightarrow h = T_\alpha dx^\alpha \otimes T_\beta dx^\beta = dT \otimes dT$$

$$T_\alpha = \frac{\partial T}{\partial x^\alpha} \Rightarrow T_\alpha dx^\alpha = \frac{\partial T}{\partial x^\alpha} dx^\alpha = dT$$

Mutlak zaman fonksiyonu T ’nin Cartan dış türevi alınarak zamansal 1-form olan dT elde edilmektedir.

ii.

$$X^{a\alpha}{}_{;\beta} = 0. \quad X^{a\alpha} = g^{\alpha\beta} X^a{}_{,\beta}.$$

Paralel, rijit ve dönmesiz vektör alanları tanımlansın:

$$\xi^a := X^{a\alpha} \partial_\alpha = g^{\alpha\gamma} \frac{\partial X^a}{\partial x^\gamma} \frac{\partial}{\partial x^\alpha}, \quad a = 1, 2, 3. \quad (4.2.1)$$

$$\nabla_{\partial/\partial x^\beta} \xi^a = 0 \quad (\xi^a \text{’lar } \nabla\text{-paralel}) \quad (4.2.2)$$

$$\xi^a = X^{a\alpha} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} = g^{\alpha\gamma} X^a{}_{,\gamma} \partial_\alpha.$$

$$\nabla_{\partial/\partial x^\beta} \xi^a = g^{\alpha\gamma} (\nabla_{\partial/\partial x^\beta} X^a{}_{,\gamma}) \frac{\partial}{\partial x^\alpha}.$$

Kovaryant türev çarpım kuralına göre açılabilir:

$$\nabla_{\partial/\partial x^\beta} X^a{}_{,\gamma} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} = X^a{}_{,\gamma\beta} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} + X^a{}_{,\gamma} \nabla_{\partial_\beta} \partial_\alpha.$$

$$\omega^\delta{}_\beta = \Gamma_{\alpha\beta}{}^\delta dx^\alpha. \quad (4.2.3)$$

$$\nabla_{\partial_\beta} \partial_\alpha = \Gamma_{\alpha\beta}{}^\delta \partial_\delta.$$

$$\begin{aligned} \nabla_{\partial/\partial x^\beta} \xi^a &= g^{\delta\gamma} X^a{}_{,\gamma\beta} \partial_\delta + g^{\alpha\gamma} \Gamma_{\alpha\beta}{}^\delta X^a{}_{,\gamma} \partial_\delta \\ &= (g^{\delta\gamma} X^a{}_{,\gamma\beta} + g^{\alpha\gamma} \Gamma_{\alpha\beta}{}^\delta X^a{}_{,\gamma}) \partial_\delta \\ &= (X^{a\delta}{}_{,\beta} + \Gamma_{\alpha\beta}{}^\delta X^{a\alpha}) \partial_\delta = 0. \end{aligned}$$

$$X^{a\delta}{}_{;\beta} = 0. \quad (4.2.4)$$

Böylece uzaysal vektör alanlarının bağlantıya göre paralel taşındığı sonucuna ulaşılmaktadır.

iii.

$$\begin{aligned} g^{\alpha\beta} &= \delta_{ab} X^{a\alpha} X^{b\beta} \\ \xi^a &= X^{a\alpha} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \\ g &= g^{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \otimes \frac{\partial}{\partial x^\beta} \\ &= \delta_{ab} X^{a\alpha} X^{b\beta} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \otimes \frac{\partial}{\partial x^\beta} \\ &= \delta_{ab} X^{a\alpha} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \otimes X^{b\beta} \frac{\partial}{\partial x^\beta} \\ g &= \delta_{ab} \xi^a \otimes \xi^b. \end{aligned} \quad (4.2.5)$$

$$\nabla(g = \delta_{ab} \xi^a \otimes \xi^b) = 0$$

iv.

$$u^\alpha T_\alpha = 1$$

$$u(T) = dT(u) = 1 \quad (4.2.6)$$

$$h(u, u) = 1 \longrightarrow u \text{ zamansal.} \quad (4.2.7)$$

$$h(v, v) = 0 \longrightarrow v \text{ uzaysal.} \quad (4.2.8)$$

v.

$$u^\alpha X^a{}_{,\alpha} = 0$$

$$\forall \xi^a \in \ker(u^*)$$

$$u^\alpha = g^{\alpha\beta} u_\beta$$

$$\begin{aligned}
g^{\alpha\beta}u_\beta X^a_{,\alpha} &= 0 \\
u_\beta g^{\alpha\beta} X^a_{,\alpha} &= 0 \\
u_\beta X^{a\beta} &= 0.
\end{aligned} \tag{4.2.9}$$

Her X^a skaler bir fonksiyon olduğundan, kısmi türevleri dX^a 1-formunun bileşenleridir:

$$dX^a = X^a_{,\alpha} dx^\alpha, \quad X^a_{,\alpha} = (dX^a)_\alpha.$$

Buradan **v.** koşulun koordinat bağımsız hâli doğrudan elde edilebilir:

$$u^\alpha X^a_{,\alpha} = u^\alpha \partial_\alpha X^a = dX^a(u) = u(X^a) = 0, \tag{4.2.10}$$

Böylece **v.** koşul, X^a koordinatlarının Galilei gözlemcisinin akışı boyunca değişmediğini ifade eder. Başka bir deyişle, gözlemci hareket ederken bu uzaysal koordinatlar sabit kalır. Bu nedenle X^a 'lar, gözlemciyle birlikte taşınan eş-hareketli uzaysal koordinatlardır. Ayrıca bu koşul, X^a 'lardan elde edilen yönlerin zamansal değil, tamamen uzaysal olduğunu göstermektedir.

vi. koşulda $\phi^\alpha = g^{\alpha\beta}\phi_{,\beta}$ kullanılarak ξ^ϕ tanımlansın:

$$\xi^\phi := \phi^\alpha \frac{\partial}{\partial x^\alpha}. \tag{4.2.11}$$

vii. koşul gereği $\nabla_\beta u^\alpha = \phi^\alpha T_\beta$ olduğundan, denklemin her iki tarafı ∂_α ile çarpıldığında $(\nabla_\beta u^\alpha)\partial_\alpha = \phi^\alpha T_\beta \partial_\alpha$ elde edilir. **vi.** koşul ve (4.2.11) kullanılarak $(\nabla_\beta u^\alpha)\partial_\alpha = g^{\alpha\gamma}\phi_{,\gamma} T_\beta \partial_\alpha$ yazılabilir. Böylece $\nabla_{\partial_\beta} u = T_\beta \xi^\phi$ elde edilir.

Dolayısıyla

$$\nabla_{\partial_\beta} u = dT(\partial_\beta)\xi^\phi = \partial_\beta T \xi^\phi = T_\beta \xi^\phi$$

olduğundan

$$\nabla u = dT \otimes \xi^\phi. \tag{4.2.12}$$

elde edilir. Şimdi u gözlemci alanının ivmesi

$$A_u := \nabla_u u. \tag{4.2.13}$$

olarak tanımlanır. (4.2.12) ve (4.2.13) kullanılırsa

$$A_u = \nabla_u u = u^\beta \partial_\beta T \xi^\phi = u^\beta T_\beta \xi^\phi$$

elde edilir. **iv.** koşuldan bilindiği üzere $u^\beta T_\beta = 1$ olduğundan, sonuç olarak,

$$A_u = \xi^\phi. \quad (4.2.14)$$

bulunur. Ayrıca Laplace operatörü

$$\Delta = g^{\alpha\beta} \nabla_\alpha \nabla_\beta \quad (4.2.15)$$

şeklinde tanımlanır. Poisson denklemi ise

$$\Delta\phi = 4\pi\mu = 4\pi G\rho \quad (4.2.16)$$

biçimindedir. (4.2.15) ve (4.2.16) denklemlerinden

$$g^{\alpha\beta} \nabla_\alpha \nabla_\beta \phi = \phi^\alpha{}_{;\alpha}$$

bulunur. Dolayısıyla,

$$\nabla_\alpha \phi^\alpha = \phi^\alpha{}_{;\alpha} = 4\pi\mu. \quad (4.2.17)$$

sonucuna varılır, böylece kütleçekim alanının skaler bir potansiyelden türetildiği, Galilei gözlemcisinin ivmesinin bu potansiyelin gradyanı ile verildiği ve potansiyelin Poisson denklemini sağladığı gösterilmiştir. Sonuç olarak Newton kütleçekiminin, Newton–Cartan kütleçekim geometrisi içerisinde potansiyel, ivme ve madde yoğunluğu arasındaki ilişki üzerinden yeniden kurulmuş olduğu ortaya konulmuştur. Ayrıca **vii.** koşulda u 'nın rijit olma koşulu da gösterilebilir:

$$\nabla^\alpha u^\beta + \nabla^\beta u^\alpha = 0 \quad (4.2.18)$$

$$g^{\alpha\sigma} \nabla_\sigma u^\beta + g^{\beta\sigma} \nabla_\sigma u^\alpha$$

$$g^{\alpha\sigma} u^\beta{}_{;\sigma} + g^{\beta\sigma} u^\alpha{}_{;\sigma}$$

$$g^{\alpha\sigma} \phi^\beta T_\sigma + g^{\beta\sigma} \phi^\alpha T_\sigma$$

$$g^{\alpha\sigma} T_\sigma \phi^\beta + g^{\beta\sigma} T_\sigma \phi^\alpha$$

(4.1.1) denkleminde, $g^{\alpha\sigma} T_\sigma = 0$ ve $g^{\beta\sigma} T_\sigma = 0$ olduğundan $\nabla^\alpha u^\beta + \nabla^\beta u^\alpha = 0$ olur.

Şimdi ise eğrilik tensörünün, (4.1.3) ile verilen Trautman koşulundan türetilbildiği gösterilebilir. Trautman koşulu

$$h_{\alpha[\beta} R^\gamma{}_{\delta]\mu\nu} = 0$$

biçimindedir. Buradaki $[\beta\delta]$ antisimetrizasyonu açılırsa

$$h_{\alpha\beta}R^\gamma{}_{\delta\mu\nu} = h_{\alpha\delta}R^\gamma{}_{\beta\mu\nu}$$

elde edilir. **i.** koşuldan $h_{\alpha\beta} = T_\alpha T_\beta$ olduğundan,

$$T_\alpha T_\beta R^\gamma{}_{\delta\mu\nu} = T_\alpha T_\delta R^\gamma{}_{\beta\mu\nu}$$

bulunur. Her iki taraf u^α ile çarpılıp **iv.** koşuldan $u^\alpha T_\alpha = 1$ kullanılırsa

$$T_\beta R^\gamma{}_{\delta\mu\nu} = T_\delta R^\gamma{}_{\beta\mu\nu},$$

elde edilir ve ardından u^β ile çarpılıp yine **iv.** koşul uygulanırsa

$$R^\gamma{}_{\delta\mu\nu} = T_\delta u^\beta R^\gamma{}_{\beta\mu\nu}$$

elde edilir. İndisler yeniden adlandırılarak ($\gamma \rightarrow \alpha$, $\delta \rightarrow \beta$, $\mu \rightarrow \gamma$, $\nu \rightarrow \delta$; toplam indisi σ)

$$R^\alpha{}_{\beta\gamma\delta} = T_\beta u^\sigma R^\alpha{}_{\sigma\gamma\delta}$$

yazılır. Eğrilik tensörünün tanımı gereği (4.1.5) $u^\sigma R^\alpha{}_{\sigma\gamma\delta} = u^\alpha{}_{;[\gamma\delta]}$ olduğundan

$$R^\alpha{}_{\beta\gamma\delta} = T_\beta (\nabla_\gamma \nabla_\delta u^\alpha - \nabla_\delta \nabla_\gamma u^\alpha),$$

ve **vii.** koşuldan $\nabla_\delta u^\alpha = \phi^\alpha T_\delta$ yerine konursa

$$R^\alpha{}_{\beta\gamma\delta} = T_\beta [\nabla_\gamma (\phi^\alpha T_\delta) - \nabla_\delta (\phi^\alpha T_\gamma)]$$

elde edilir. Buradaki türevler çarpım kuralıyla açıldığında,

$$R^\alpha{}_{\beta\gamma\delta} = T_\beta \left[\phi^\alpha{}_{;\gamma} T_\delta - \phi^\alpha{}_{;\delta} T_\gamma + \phi^\alpha (\nabla_\gamma T_\delta - \nabla_\delta T_\gamma) \right] \quad (4.2.19)$$

yazılır.

i. koşuldan $h_{\mu\nu} = T_\mu T_\nu$ ve uyumluluk koşulundan (4.1.2) $\nabla_\lambda h_{\mu\nu} = 0$ olduğundan, Leibniz kuralıyla

$$\nabla_\lambda (T_\mu T_\nu) = (\nabla_\lambda T_\mu) T_\nu + T_\mu (\nabla_\lambda T_\nu) = 0$$

yazılır. Bu ifade u^ν ile çarpılıp **iv.** koşul ($u^\nu T_\nu = 1$) kullanılırsa

$$\nabla_\lambda T_\mu + T_\mu \underbrace{(u^\nu \nabla_\lambda T_\nu)}_{=: V_\lambda} = 0 \quad \implies \quad \nabla_\lambda T_\mu = -T_\mu V_\lambda$$

elde edilir. Son ifade bir kez de u^μ ile çarpılırsa, yine $u^\mu T_\mu = 1$ ile

$$\underbrace{u^\mu \nabla_\lambda T_\mu}_{=V_\lambda} = - (u^\mu T_\mu) V_\lambda = -V_\lambda \implies V_\lambda = 0$$

bulunur. Dolayısıyla

$$\nabla_\lambda T_\mu = 0, \quad (4.2.20)$$

olur yani zaman 1-formu dT , bağlantıya göre paraleldir:

$$\nabla_\gamma T_\delta = \nabla_\delta T_\gamma = 0 \quad (4.2.21)$$

(4.2.19) denkleminde kullanıldığında, son parantez sıfırlanır ve Newton–Cartan bağlantısının eğrilik tensörü

$$R^\alpha{}_{\beta\gamma\delta} = T_\beta (\phi^\alpha{}_{;\gamma} T_\delta - \phi^\alpha{}_{;\delta} T_\gamma) = T_\beta \phi^\alpha{}_{;[\gamma} T_{\delta]} \quad (4.2.22)$$

biçimini alır. Böylece eğrilik tensörüne Newton–Cartan kütleçekiminde ulaşılır. Newton–Cartan kütleçekiminde eğrilik tensörünün zaman yapısı ile kütleçekim alanının değişiminin birleşiminden koordinat bağımsız olarak ifade edildiği de gösterilebilir:

$$\begin{aligned} R^\alpha{}_{\beta\gamma\delta} &= T_\beta (\phi^\alpha{}_{;\gamma} T_\delta - \phi^\alpha{}_{;\delta} T_\gamma) \\ &= T_\beta T_\delta (\nabla_{\partial_\gamma} \xi^\phi)^\alpha - T_\beta T_\gamma (\nabla_{\partial_\delta} \xi^\phi)^\alpha \\ R &= R^\alpha{}_{\beta\gamma\delta} dx^\beta \otimes dx^\gamma \otimes dx^\delta \otimes \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \\ &= T_\beta dx^\beta \otimes (dx^\gamma \otimes T_\delta dx^\delta \otimes \nabla_{\partial_\gamma} \xi^\phi - T_\gamma dx^\gamma \otimes dx^\delta \otimes \nabla_{\partial_\delta} \xi^\phi) \\ R &= dT \otimes (dx^\gamma \otimes dT - dT \otimes dx^\gamma) \otimes \nabla_{\partial_\gamma} \xi^\phi \\ R &= dT \otimes (dx^\gamma \wedge dT) \otimes \nabla_{\partial_\gamma} \xi^\phi. \end{aligned} \quad (4.2.23)$$

Yukarıda türetilen koordinat bağımsız denklemler, ilgili indisli karşılıklarıyla birlikte Çizelge 4.2’de özetlenmiştir.

Çizelge 4.2 Newton–Cartan koşullarının ve eğrilik tensörünün koordinat bağımsız denklemleri

Koşul	İndisli denklem	Koordinat bağımsız denklem
i.	$h_{\alpha\beta} = T_\alpha T_\beta$	$h = dT \otimes dT$
ii.	$X^{a\alpha}{}_{;\beta} = 0$	$\nabla \xi^a = 0$
iii.	$g^{\alpha\beta} = \delta_{ab} X^{a\alpha} X^{b\beta}$	$g = \delta_{ab} \xi^a \otimes \xi^b$
iv.	$u^\alpha T_\alpha = 1$	$dT(u) = 1$
v.	$u^\alpha X^a{}_{,\alpha} = 0$	$dX^a(u) = 0$
vi.	$\phi^\alpha = g^{\alpha\beta} \phi_{,\beta}$	$\xi^\phi = \phi^\alpha \partial_\alpha$
vii.	$u^\alpha{}_{;\beta} = \phi^\alpha T_\beta$	$\nabla u = dT \otimes \xi^\phi$
Eğrilik tensörü	$R^\alpha{}_{\beta\gamma\delta} = T_\beta \phi^\alpha{}_{;[\gamma} T_{\delta]}$	$R = dT \otimes (dx^\gamma \wedge dT) \otimes \nabla_{\partial_\gamma} \xi^\phi$

4.3 Alan Denklemleri

Newton–Cartan kütleçekiminin alan denkleminin elde edilmesi için, (4.2.22) denkleminle verilen eğrilik tensörü kullanılır:

$$R^\alpha{}_{\beta\gamma\delta} = T_\beta \phi^\alpha{}_{;[\gamma} T_{\delta]} = T_\beta (\phi^\alpha{}_{;\gamma} T_\delta - \phi^\alpha{}_{;\delta} T_\gamma)$$

$\gamma = \alpha$ kontraksiyonu yapılarak eğrilik tensörü baştan yazılabilir:

$$R^\alpha{}_{\beta\alpha\delta} = T_\beta \phi^\alpha{}_{;\alpha} T_\delta - \phi^\alpha{}_{;\delta} T_\alpha \quad (4.3.1)$$

(4.2.17) denkleminde $\phi^\alpha{}_{;\alpha} = 4\pi\mu$ olduğu bilinmektedir. Bu sonuç (4.3.1) denkleminde yerine konulduğunda, kontraksiyon sonucunda Ricci tensörünün bileşenleri aşağıda gösterildiği şekilde ifade edilir:

$$R_{\beta\delta} = 4\pi\mu h_{\beta\delta} - \phi^\alpha{}_{;\delta} T_\alpha \quad (4.3.2)$$

(4.1.1) denkleminde verilen zamansal ve uzaysal metriklerin ortogonallik koşulu kullanılarak $\phi^\alpha_{;\delta} T_\alpha = 0$ olduğu gösterilebilir.

$$\phi^\alpha_{;\delta} T_\alpha = T_\alpha \nabla_\delta \phi^\alpha. \quad (4.3.3)$$

vi. koşuldan bilindiği üzere $\phi^\alpha = g^{\alpha\beta} \phi_{,\beta}$ olduğundan, (4.3.3) denkleminde kullanılırsa $\phi^\alpha_{;\delta} T_\alpha = g^{\alpha\beta} T_\alpha \nabla_\delta \phi_{,\beta}$ elde edilir. Ortogonallik koşulundan $g^{\alpha\beta} T_\alpha = 0$ olur ve böylece $\phi^\alpha_{;\delta} T_\alpha = 0$ bulunur.

Sonuç olarak, Newton–Cartan kütleçekiminin alan denklemi elde edilir:

$$Ric = 4\pi G\rho dT \otimes dT \quad (4.3.4)$$

(4.3.4) denklemi, Newton–Cartan kütleçekiminin alan denkleminin koordinat bağımsız hâlidir. Burada $\mu = G\rho$ olup, ρ kütle yoğunluğunu ve G Newton kütleçekim sabitini göstermektedir.

4.4 Ayar Dönüşümleri

Eğrilik tensörü $R^\alpha_{\beta\gamma\delta}$, (4.2.22) denklemi aracılığıyla T , X^a , u^α ve ϕ nicelikleri tarafından tekil olarak belirlenir. Bununla birlikte, **i–vii** bağıntılarıyla birbirine bağlı olan ve (4.2.22) denklemindeki aynı eğrilik tensörünü üreten çok sayıda T , X^a , u^α ve ϕ elemanı vardır. Dolayısıyla farklı Galilei gözlemcileri, kütleçekim alanı içeren uzay–zamanlarda Galilei Lie grubunun bir genellemesi olan bir ayar grubu ile birbirine bağlanır:

$$\tilde{X}'(x) = A^a_b X^b(x), \quad \tilde{T}(x) = T(x) - T_0, \quad (4.4.1)$$

$$\delta^{mn} A^a_m A^b_n = \delta^{ab}, \quad A^a_b = \text{const.}, \quad T_0 = \text{sabit}. \quad (4.4.2)$$

$$\tilde{X}^a(x) = X^a(x) - R^a(T). \quad (4.4.3)$$

$$\tilde{u}^\alpha(x) = u^\alpha(x) + U_a(T) X^{a\alpha}(x). \quad (4.4.4)$$

$$\tilde{\phi}(x) = \phi(x) + a_a(T) \tilde{X}^a(x) + \varphi(T). \quad (4.4.5)$$

$$U^a \equiv \frac{dR^a}{dT}, \quad a^a \equiv \frac{dU^a}{dT} = \frac{d^2 R^a}{dT^2}. \quad (4.4.6)$$

(4.4.1) ve (4.4.2) bir Lie grubu oluştururken, (4.4.3)–(4.4.6) denklemleri T 'nin dört keyfi fonksiyonunu, yani $R^a(T)$ ve $\varphi(T)$ fonksiyonlarını içerir; dolayısıyla bir ayar grubunu temsil eder. (4.4.3)–(4.4.6) denklemleri iki Galilei çerçevesini keyfi ivmeli bir öteleme aracılığıyla birbirine bağlar.

$$\phi' = a_a(T)\tilde{X}^a + \varphi(T) \quad (4.4.7)$$

(4.4.7) potansiyeli, Laplace denklemini doğrudan sağlar ve bu nedenle “gerçek” kütleçekim potansiyelinden ayırt edilemez. (4.4.5) denklemi, Einstein’ın eşdeğerlik ilkesini Newtonsal bir uzay–zamanda ifade eder.

Şimdi **i–vii** koşullarının yukarıda verilen ayar dönüşümleri altında değişmez olup olmadığı incelenebilir. İlk olarak **i.** koşul ele alındığında, $h = dT \otimes dT$ ve (4.4.1) denkleminde zaman koordinatının dönüşümü

$$\tilde{T} = T - T_0$$

şeklindedir. Ayrıca (4.4.2) denklemine göre T_0 sabit olduğundan

$$dT_0 = 0$$

olur ve

$$d\tilde{T} = d(T - T_0) = dT - dT_0 = dT. \quad (4.4.8)$$

elde edilir. Bu nedenle dönüşmüş zamansal metrik $\tilde{h}$

$$\tilde{h} = d\tilde{T} \otimes d\tilde{T} = dT \otimes dT = h$$

olur. Böylece

$$\tilde{h} = h \quad (4.4.9)$$

sonucuna ulaşılır. Yani **i.** koşul, verilen dönüşümler altında değişmez.

ii. koşulun ($X^{a\alpha}_{;\beta} = 0$) dönüşümler altında korunup korunmadığı incelenebilir. (4.4.3) denklemine göre uzaysal koordinatlar

$$\tilde{X}^a(x) = X^a(x) - R^a(T)$$

şeklinde dönüşür. Bu ifadenin $x^{\beta'}$ ’ye göre türevi alınırsa

$$\tilde{X}^a_{;\beta} = X^a_{;\beta} - \frac{dR^a}{dT}T_\beta$$

elde edilir. (4.4.6) denkleminde

$$U^a = \frac{dR^a}{dT}$$

olduğu için bu ifade

$$\tilde{X}^a{}_{,\beta} = X^a{}_{,\beta} - U^a T_\beta$$

şeklinde yazılır. Şimdi bu ifade $g^{\alpha\beta}$ ile yükseltirise aşağıda ifade edildiği gibi $\tilde{X}^{a\alpha}$ bulunur:

$$g^{\alpha\beta} \tilde{X}^a{}_{,\beta} = g^{\alpha\beta} (X^a{}_{,\beta} - U^a T_\beta).$$

$$\tilde{X}^{a\alpha} = X^{a\alpha} - U^a g^{\alpha\beta} T_\beta$$

Newton–Cartan kütleçekim yapısında, uzaysal metrik ve zamansal metriğin dikliğinden (4.1.1), $g^{\alpha\beta} T_\beta = 0$ olur. Dolayısıyla

$$\tilde{X}^{a\alpha} = X^{a\alpha}. \quad (4.4.10)$$

sonucuna ulaşılır.

Bu sonuç gereğince kovaryant türevler de aynı kalır:

$$\tilde{X}^{a\alpha}{}_{;\beta} = X^{a\alpha}{}_{;\beta}.$$

Böylece

$$X^{a\alpha}{}_{;\beta} = \tilde{X}^{a\alpha}{}_{;\beta} = 0 \quad (4.4.11)$$

olur. Sonuç olarak, **ii.** koşul verilen ayar dönüşümleri altında değişmez.

Şimdi ise uzaysal metriğin dönüşümler altında korunup korunmadığı incelenebilir.

Başlangıçtaki uzaysal metrik, **iii.** koşul gereğince,

$$g^{\alpha\beta} = \delta_{ab} X^{a\alpha} X^{b\beta}.$$

şeklinde yazılır. Buna karşılık $g^{\alpha\beta}$, koordinat bağımsız biçimde (4.2.5)

$$g = \delta_{ab} \xi^a \otimes \xi^b$$

denkleminle ifade edilmişti. Burada (4.2.1) denkleminde

$$X^{a\alpha} \partial_\alpha = \xi^a, \quad X^{b\beta} \partial_\beta = \xi^b. \quad (4.4.12)$$

tanımları kullanılmıştır. Dönüşmüş uzaysal metrik ise aynı biçimde

$$\tilde{g} = \delta_{ab} \tilde{\xi}^a \otimes \tilde{\xi}^b.$$

olarak yazılır. Bir önceki adımda, (4.4.3), (4.4.6) ve (4.1.1) denklemleri kullanılarak (4.4.10) denklemi

$$\tilde{X}^{a\alpha} = X^{a\alpha}$$

elde edilmişti. Bu nedenle (4.4.12) bağıntıları aşağıdaki biçimi alır:

$$\tilde{X}^{a\alpha} \partial_\alpha = X^{a\alpha} \partial_\alpha = \xi^a, \quad \tilde{X}^{b\beta} \partial_\beta = X^{b\beta} \partial_\beta = \xi^b.$$

ve dönüşümler altında vektör alanları değişmez:

$$\tilde{\xi}^a = \xi^a, \quad \tilde{\xi}^b = \xi^b.$$

Böylece

$$\tilde{g} = \delta_{ab} \tilde{\xi}^a \otimes \tilde{\xi}^b = \delta_{ab} \xi^a \otimes \xi^b = g. \quad (4.4.13)$$

bulunur ve bu sonuca ulaşılır:

$$\tilde{g} = g \iff \tilde{g}^{\alpha\beta} = g^{\alpha\beta}. \quad (4.4.14)$$

Kontravaryant uzaysal metrik dönüşümler altında değişmez. Şimdi ise **iv.** koşul $u^\alpha T_\alpha = 1$ incelenebilir. (4.4.4) denklemine göre hız alanı

$$\tilde{u}^\alpha = u^\alpha + U_a X^{a\alpha}$$

şeklinde dönüşür. Ayrıca (4.4.1) denkleminde

$$\tilde{T} = T - T_0$$

olduğu bilinmektedir. (4.4.2) denklemine göre T_0 sabit olduğundan

$$dT_0 = 0$$

$$\tilde{T}_\alpha = \tilde{T}_{,\alpha} = (T - T_0)_{,\alpha} = T_\alpha$$

elde edilir. Şimdi dönüşmüş ifade hesaplanır:

$$\begin{aligned} \tilde{u}^\alpha \tilde{T}_\alpha &= (u^\alpha + U_a X^{a\alpha}) T_\alpha \\ &= u^\alpha T_\alpha + U_a X^{a\alpha} T_\alpha. \end{aligned}$$

Burada **ii.** koşuldan $X^{a\alpha} = g^{\alpha\beta} X^a_{,\beta}$ olduğundan,

$$\begin{aligned}\tilde{u}^\alpha \tilde{T}_\alpha &= u^\alpha T_\alpha + U_a g^{\alpha\beta} X^a_{,\beta} T_\alpha \\ &= u^\alpha T_\alpha + U_a X^a_{,\beta} g^{\alpha\beta} T_\alpha.\end{aligned}$$

(4.1.1) denkleminde dolayı uzaysal metrik zaman yönünü yok eder. Dolayısıyla

$$\begin{aligned}\tilde{u}^\alpha \tilde{T}_\alpha &= u^\alpha T_\alpha + U_a X^a_{,\beta} \underbrace{g^{\alpha\beta} T_\alpha}_0 \\ &= u^\alpha T_\alpha.\end{aligned}$$

$u^\alpha T_\alpha = 1$ olduğu için

$$\tilde{u}^\alpha \tilde{T}_\alpha = 1$$

sonucuna ulaşılır. Sonuç olarak **iv.** koşul da verilen ayar dönüşümleri altında değişmez.

v. koşul ($u^\alpha X^a_{,\alpha} = 0$) incelenebilir. (4.4.4) denklemine göre hız alanı

$$\tilde{u}^\alpha = u^\alpha + U_b X^{b\alpha}$$

şeklinde dnşmektedir. Ayrıca (4.4.3) ve (4.4.6) denklemlerinden

$$\tilde{X}^a_{,\alpha} = X^a_{,\alpha} - U^a T_\alpha$$

elde edilir. Buna göre dnşmiş koşul aşağıdaki biçimde hesaplanır:

$$\tilde{u}^\alpha \tilde{X}^a_{,\alpha} = (u^\alpha + U_b X^{b\alpha}) (X^a_{,\alpha} - U^a T_\alpha). \quad (4.4.15)$$

$$\tilde{u}^\alpha \tilde{X}^a_{,\alpha} = u^\alpha X^a_{,\alpha} - u^\alpha U^a T_\alpha + U_b X^{b\alpha} X^a_{,\alpha} - U_b X^{b\alpha} U^a T_\alpha. \quad (4.4.16)$$

(4.4.16)'in ilk terimi başlangıçtaki **v.** koşuldan dolayı sıfırdır:

$$u^\alpha X^a_{,\alpha} = 0.$$

İkinci terimde **iv.** koşuldan $u^\alpha T_\alpha = 1$ eşitliği kullanılır. nc terim ise uzaysal bazların ortonormallik bağıntısı

$$g^{\alpha\beta} X^a_{,\alpha} X^b_{,\beta} = \delta^{ab}. \quad (4.4.17)$$

kullanılarak elde edilir. (4.4.17) denkleminde uzaysal metrik, indisleri yukarı kaldırmak amacıyla kullanılır:

$$X_b{}^{,\alpha} X^a{}_{,\alpha} = \delta_b{}^a. \quad (4.4.18)$$

şeklinde olur. (4.4.18) denklemini (4.4.16) denkleminin üçüncü teriminde kullanılırsa

$$U_b X^{b\alpha} X^a{}_{,\alpha} = U^b X_b{}^{,\alpha} X^a{}_{,\alpha} = U^b \delta_b{}^a = U^a.$$

sonucuna ulaşılır. (4.4.16)'in son teriminde ise (4.1.1) denklemini gereğince

$$X^{b\alpha} T_\alpha = g^{\alpha\beta} X^b{}_{,\beta} T_\alpha = X^b{}_{,\beta} g^{\alpha\beta} T_\alpha = 0$$

olur. Böylece

$$\begin{aligned} \tilde{u}^\alpha \tilde{X}^a{}_{,\alpha} &= \underbrace{u^\alpha X^a{}_{,\alpha}}_0 - U^a \underbrace{u^\alpha T_\alpha}_1 + U_b \underbrace{X^{b\alpha} X^a{}_{,\alpha}}_{U^b \delta_b{}^a} - U_b U^a \underbrace{X^{b\alpha} T_\alpha}_0 \\ &= -U^a + U^b \delta_b{}^a \\ &= -U^a + U^a \\ &= 0. \end{aligned}$$

v. koşul, verilen ayar dönüşümleri altında değişmez.

Şimdi ise **vi.** koşulun ($\phi^\alpha = g^{\alpha\beta} \phi_{,\beta}$) dönüşümler altında nasıl değiştiği incelenirse, (4.4.5) denkleminde göre potansiyel

$$\tilde{\phi} = \phi + a_a(T) \tilde{X}^a + \varphi(T)$$

şeklinde dönüşmektedir. (4.4.5) denkleminin $x^{\beta'}$ 'ye göre türevi alınır

$$\tilde{\phi}_{,\beta} = \phi_{,\beta} + a_{a,\beta} \tilde{X}^a + a_a \tilde{X}^a{}_{,\beta} + \varphi_{,\beta}. \quad (4.4.19)$$

elde edilir. Burada a_a ve φ yalnızca T 'nin fonksiyonları oldukları için

$$a_{a,\beta} = \frac{da_a}{dT} T_\beta, \quad \varphi_{,\beta} = \frac{d\varphi}{dT} T_\beta. \quad (4.4.20)$$

şeklinde yazılır. (4.1.1) denklemini kullanılır ve uzaysal metrik de etki ettirilirse (4.4.20) denklemleri şu şekilde olur:

$$g^{\alpha\beta} a_{a,\beta} = \frac{da_a}{dT} g^{\alpha\beta} T_\beta = 0. \quad (4.4.21)$$

$$g^{\alpha\beta}\varphi_{,\beta} = \frac{d\varphi}{dT}g^{\alpha\beta}T_\beta = 0. \quad (4.4.22)$$

Şimdi (4.4.19) denklemi $g^{\alpha\beta}$ ile yükseltirse:

$$g^{\alpha\beta}\tilde{\phi}_{,\beta} = g^{\alpha\beta}\phi_{,\beta} + g^{\alpha\beta}a_{a,\beta}\tilde{X}^a + a_ag^{\alpha\beta}\tilde{X}^a_{,\beta} + g^{\alpha\beta}\varphi_{,\beta}. \quad (4.4.23)$$

(4.4.21) ve (4.4.22)'den dolayı (4.4.23) denkleminde 2. ve 4. terimler sıfır olur;

$$g^{\alpha\beta}\tilde{\phi}_{,\beta} = g^{\alpha\beta}\phi_{,\beta} + a_ag^{\alpha\beta}\tilde{X}^a_{,\beta}. \quad (4.4.24)$$

(4.4.24) denklemindeki birinci terim $g^{\alpha\beta}\phi_{,\beta} = \phi^\alpha$ biçimindedir. İkinci terim ise **ii.** koşulda gösterildiği

$$g^{\alpha\beta}\tilde{X}^a_{,\beta} = \tilde{X}^{a\alpha}$$

bu şekilde tanımlanıyordu, dolayısıyla

$$g^{\alpha\beta}\tilde{\phi}_{,\beta} = \phi^\alpha + a_a\tilde{X}^{a\alpha}. \quad (4.4.25)$$

iii. koşulda $\tilde{g}^{\alpha\beta} = g^{\alpha\beta}$ olduğu gösterildiğinden, dönüşmüş potansiyel

$$\tilde{\phi}^\alpha = \tilde{g}^{\alpha\beta}\tilde{\phi}_{,\beta} = g^{\alpha\beta}\tilde{\phi}_{,\beta}$$

şeklinde yazılabilir. Böylece

$$\tilde{\phi}^\alpha = \phi^\alpha + a_a\tilde{X}^{a\alpha}$$

elde edilir ve (4.4.10) denkleminde $\tilde{X}^{a\alpha} = X^{a\alpha}$ olduğu için

$$\tilde{\phi}^\alpha = \phi^\alpha + a_aX^{a\alpha}. \quad (4.4.26)$$

sonucuna ulaşılır ve **vi.** koşul aynı biçimde kalmaz; ϕ^α dönüşüm altında $a_aX^{a\alpha}$ kadar değişir.

vii. koşulun ($u^\alpha_{;\beta} = \phi^\alpha T_\beta$) dönüşüm altında korunup korunmadığı incelendiğinde ise, (4.4.4) denkleminde göre

$$\tilde{u}^\alpha = u^\alpha + U_aX^{a\alpha}$$

kovaryant türev alınır ve

$$\tilde{u}^\alpha_{;\beta} = u^\alpha_{;\beta} + U_{a,\beta}X^{a\alpha} + U_aX^{a\alpha}_{;\beta}. \quad (4.4.27)$$

elde edilir. **ii.** koşuldan $X^{a\alpha}{}_{;\beta} = 0$ olduğundan, (4.4.27) denkleminin üçüncü terimi sıfır olur:

$$\tilde{u}^\alpha{}_{;\beta} = u^\alpha{}_{;\beta} + U_{a,\beta} X^{a\alpha} + U_a \underbrace{X^{a\alpha}{}_{;\beta}}_0.$$

Başlangıçtaki **vii.** koşuldan $u^\alpha{}_{;\beta} = \phi^\alpha T_\beta$ olduğu için $\tilde{u}^\alpha{}_{;\beta} = \phi^\alpha T_\beta + U_{a,\beta} X^{a\alpha}$ bulunur. Burada U_a yalnızca T 'nin fonksiyonu olduğundan $U_{a,\beta} = \frac{dU_a}{dT} T_\beta$ yazılır. Ayrıca (4.4.20) denkleminden dolayı $a_a = \frac{dU_a}{dT}$ olduğundan $U_{a,\beta} = a_a T_\beta$ elde edilir. Böylece

$$\tilde{u}^\alpha{}_{;\beta} = \phi^\alpha T_\beta + a_a T_\beta X^{a\alpha}. \quad (4.4.28)$$

bulunur, (4.4.28) denkleminde T_β parantezi alınırsa

$$\tilde{u}^\alpha{}_{;\beta} = (\phi^\alpha + a_a X^{a\alpha}) T_\beta \quad (4.4.29)$$

elde edilir. Öte yandan (4.4.26) gereği $\tilde{\phi}^\alpha = \phi^\alpha + a_a X^{a\alpha}$ olduğundan, sonuç olarak

$$\tilde{u}^\alpha{}_{;\beta} = \tilde{\phi}^\alpha T_\beta \quad (4.4.30)$$

bulunur. **vii.** koşulun verilen ayar dönüşümleri altında biçiminin korunduğu açıkça görülür.

Şimdi eğrilik tensörünün (4.2.23) bu ayar dönüşümleri altında değişip değişmediği incelenebilir. (4.2.23) denkleminden yola çıkarak dönüşmüş eğrilik tensörü,

$$\tilde{R} = d\tilde{T} \otimes (dx^\gamma \wedge d\tilde{T}) \otimes \nabla_{\partial_\gamma} \tilde{\xi}^\phi$$

şeklindedir. (4.4.8) denkleminden $d\tilde{T} = dT$ elde edilmişti. Dolayısıyla,

$$\tilde{R} = dT \otimes (dx^\gamma \wedge dT) \otimes \nabla_{\partial_\gamma} \tilde{\xi}^\phi. \quad (4.4.31)$$

olur. $\tilde{\xi}^\phi$ ifadesi ele alınabilir, (4.2.11) tanımı gereği:

$$\tilde{\xi}^\phi = \tilde{\phi}^\alpha \partial_\alpha.$$

vi. koşulda elde edilen dönüşüm sonucuna göre $\tilde{\phi}^\alpha = \phi^\alpha + a_a \tilde{X}^{a\alpha}$ olduğundan,

$$\tilde{\xi}^\phi = (\phi^\alpha + a_a \tilde{X}^{a\alpha}) \partial_\alpha$$

yazılır. (4.4.10) denkleminden $\tilde{X}^{a\alpha} = X^{a\alpha}$ olduğu bilindiğinden,

$$\tilde{\xi}^\phi = \phi^\alpha \partial_\alpha + a_a X^{a\alpha} \partial_\alpha$$

olur. Burada (4.4.12) ve (4.2.11) denklemleri kullanılırsa,

$$\tilde{\xi}^\phi = \xi^\phi + a_a \xi^a \quad (4.4.32)$$

elde edilir. (4.4.32) denkleminin kovaryant türevi alınabilir:

$$\begin{aligned} \nabla_{\partial_\gamma} \tilde{\xi}^\phi &= \nabla_{\partial_\gamma} (\xi^\phi + a_a \xi^a) \\ \nabla_{\partial_\gamma} \tilde{\xi}^\phi &= \nabla_{\partial_\gamma} \xi^\phi + \nabla_{\partial_\gamma} (a_a \xi^a) \\ \nabla_{\partial_\gamma} \tilde{\xi}^\phi &= \nabla_{\partial_\gamma} \xi^\phi + a_{a,\gamma} \xi^a + a_a \nabla_{\partial_\gamma} \xi^a. \end{aligned} \quad (4.4.33)$$

ii. koşul $X^{a\alpha}_{;\gamma} = 0$ kullanılırsa,

$$\nabla_{\partial_\gamma} \xi^a = \nabla_{\partial_\gamma} (X^{a\alpha} \partial_\alpha) = X^{a\alpha}_{;\gamma} \partial_\alpha = 0$$

(4.4.33) denkleminin üçüncü terimi sıfır olur. Bu nedenle;

$$\nabla_{\partial_\gamma} \tilde{\xi}^\phi = \nabla_{\partial_\gamma} \xi^\phi + a_{a,\gamma} \xi^a.$$

Burada a_a yalnızca T 'nin fonksiyonu olduğu için;

$$a_{a,\gamma} = \frac{da_a}{dT} T_\gamma = \dot{a}_a T_\gamma$$

Böylece

$$\nabla_{\partial_\gamma} \tilde{\xi}^\phi = \nabla_{\partial_\gamma} \xi^\phi + \dot{a}_a T_\gamma \xi^a. \quad (4.4.34)$$

(4.4.34) denklemi, (4.4.31) ile verilen $\tilde{R}$ ifadesinde kullanıldığında,

$$\begin{aligned} \tilde{R} &= dT \otimes (dx^\gamma \wedge dT) \otimes (\nabla_{\partial_\gamma} \xi^\phi + \dot{a}_a T_\gamma \xi^a) \\ &= dT \otimes (dx^\gamma \wedge dT) \otimes \nabla_{\partial_\gamma} \xi^\phi + dT \otimes (dx^\gamma \wedge dT) \otimes \dot{a}_a T_\gamma \xi^a. \end{aligned}$$

İlk terim doğrudan R 'dir:

$$dT \otimes (dx^\gamma \wedge dT) \otimes \nabla_{\partial_\gamma} \xi^\phi = R.$$

Dolayısıyla

$$\tilde{R} = R + dT \otimes (dx^\gamma \wedge dT) \otimes \dot{a}_a T_\gamma \xi^a.$$

İkinci terimde T_γ skaler çarpanı kama çarpımının içine alınabilir:

$$\tilde{R} = R + dT \otimes (T_\gamma dx^\gamma \wedge dT) \otimes \dot{a}_a \xi^a.$$

Fakat

$$T_\gamma dx^\gamma = dT$$

olduğundan

$$T_\gamma dx^\gamma \wedge dT = dT \wedge dT = 0$$

elde edilir. Böylece ikinci terim sıfır olur:

$$\tilde{R} = R + dT \otimes \underbrace{(dT \wedge dT)}_0 \otimes \dot{a}_a \xi^a.$$

Sonuç olarak

$$\tilde{R} = R. \quad (4.4.35)$$

bulunur. Eğrilik tensörünün verilen ayar dönüşümleri altında değişmez olduğu görülür. Newton–Cartan kütleçekim kuramında eğrilik tensörünün ayar dönüşümleri altında değişmemesi, kütleçekim alanının gerçek fiziksel içeriğinin seçilen gözlemciye veya referans çerçevesine bağlı olmadığını gösterir.

4.5 Newton–Cartan Afin Bağlantısı

Dejenere olmayan metrikler için uyumluluk koşulu $\nabla_\gamma g_{\alpha\beta} = 0$, $\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha$ bağlantısını $g_{\alpha\beta}$ 'dan inşa edilen Christoffel sembolü tek başına belirler. Oysa Newtonsal uzay–zamanlarda dejenere metrikler $g^{\alpha\beta}$ ve $h_{\alpha\beta}$ için verilen uyumluluk koşulları (4.1.2) ile

$$\nabla_\gamma g^{\alpha\beta} = 0 = \nabla_\gamma h_{\alpha\beta}$$

afin bağlantıyı belirlemeye yetmez. Önce dejenere olmayan, Riemann metriği durumunda bağlantının nasıl elde edildiği hatırlansın. $\nabla_\gamma g_{\alpha\beta} = 0$ koşulu açıldığında

$$g_{\alpha\beta;\gamma} = g_{\alpha\beta,\gamma} - \Gamma_{\alpha\gamma}^\mu g_{\mu\beta} - \Gamma_{\beta\gamma}^\mu g_{\alpha\mu} = 0 \quad (4.5.1)$$

ifadesine ulaşılır. Buradan üç permütasyon yazılabilir:

$$(1) : \quad g_{\alpha\beta,\gamma} = \Gamma_{\alpha\gamma}{}^{\mu} g_{\mu\beta} + \Gamma_{\beta\gamma}{}^{\mu} g_{\alpha\mu}, \quad (4.5.2)$$

$$(2) : \quad g_{\beta\gamma,\alpha} = \Gamma_{\beta\alpha}{}^{\mu} g_{\mu\gamma} + \Gamma_{\gamma\alpha}{}^{\mu} g_{\beta\mu}, \quad (4.5.3)$$

$$(3) : \quad g_{\gamma\alpha,\beta} = \Gamma_{\gamma\beta}{}^{\mu} g_{\mu\alpha} + \Gamma_{\alpha\beta}{}^{\mu} g_{\gamma\mu}. \quad (4.5.4)$$

Bağlantının torsiyonsuz olması $\Gamma_{\beta\gamma}{}^{\alpha} = \Gamma_{\gamma\beta}{}^{\alpha}$ ve metriğin simetrisi $g_{\alpha\beta} = g_{\beta\alpha}$ koşullarından yararlanarak $(2) + (3) - (1)$ kombinasyonu hesaplanırsa

$$g_{\beta\gamma,\alpha} + g_{\gamma\alpha,\beta} - g_{\alpha\beta,\gamma} = 2\Gamma_{\alpha\beta}{}^{\mu} g_{\mu\gamma}$$

sonucuna ulaşılır. İki taraf metriğin tersi $g^{\gamma\sigma}$ ile çarpıldığında

$$\frac{1}{2} g^{\gamma\sigma} (g_{\beta\gamma,\alpha} + g_{\gamma\alpha,\beta} - g_{\alpha\beta,\gamma}) = \Gamma_{\alpha\beta}{}^{\mu} \underbrace{g_{\mu\gamma} g^{\gamma\sigma}}_{\delta_{\mu}^{\sigma}} \quad (4.5.5)$$

ve buradan

$$\Gamma_{\alpha\beta}{}^{\sigma} = \frac{1}{2} g^{\gamma\sigma} (g_{\beta\gamma,\alpha} + g_{\gamma\alpha,\beta} - g_{\alpha\beta,\gamma}) \quad (4.5.6)$$

çıkar. Denklem (4.5.5)'de Riemann metriğinin tersi kullanılarak bağlantıya ulaşılabilmesinin nedeni $g_{\mu\gamma} g^{\gamma\sigma} = \delta_{\mu}^{\sigma}$ özdeşliğidir. Ancak Newton–Cartan kuramında metrikler dejenere olduğundan $g_{\mu\gamma} g^{\gamma\sigma} \neq \delta_{\mu}^{\sigma}$ olur ve bağlantı bu yolla belirlenemez. Bu nedenle (Künzle 1972)'nin kovariant metriği gerekir; ayrıca Newtonsal afin bağlantıyı potansiyeller $\{g^{\alpha\beta}, u^{\alpha}, T, \phi\}$ cinsinden ifade edebilmek için, uyumluluk koşulu (4.1.2)'a ek olarak Galilei gözlemcisini karakterize eden **vi.** ve **vii.** koşullara da başvurulması gerekmektedir:

$$\mathbf{vi.} \quad \phi^{\alpha} = g^{\alpha\beta} \phi_{,\beta}, \quad (4.5.7)$$

$$\mathbf{vii.} \quad u^{\alpha}{}_{;\beta} = \phi^{\alpha} T_{\beta}. \quad (4.5.8)$$

İlk olarak, (Künzle 1972) tarafından verilen kovariant uzaysal metriği $g_{\alpha\beta}$ şu bağıntılarla tanımlanır:

$$g_{\alpha\gamma} g^{\gamma\beta} = \delta_{\alpha}^{\beta} - T_{\alpha} u^{\beta}, \quad g_{\alpha\beta} u^{\beta} = 0. \quad (4.5.9)$$

Bu metrik de dejeneredir ve imzası $(0; 1, 1, 1)$ şeklindedir. Yunan indislerini aşağı indirmek için bu metrik kullanılabilir.

Denklem (4.5.9)'deki $g_{\alpha\gamma} g^{\gamma\beta}$ ifadesi bir projektör niteliğindedir:

$$P_{\alpha}^{\beta} = \delta_{\alpha}^{\beta} - T_{\alpha} u^{\beta} \quad (4.5.10)$$

ve uzay-zaman yönlerini birbirinden ayırır. Zamansal vektör u^{α} üzerindeki etkisine bakıldığında

$$P_{\alpha}^{\beta} u^{\alpha} = (\delta_{\alpha}^{\beta} - T_{\alpha} u^{\beta}) u^{\alpha} = u^{\beta} - (T_{\alpha} u^{\alpha}) u^{\beta} = u^{\beta} - u^{\beta} = 0 \quad (4.5.11)$$

sonucu elde edilir. Öte yandan $T_{\alpha} V^{\alpha} = 0$ koşulunu sağlayan uzaysal bir V^{α} vektörü alındığında

$$P_{\alpha}^{\beta} V^{\alpha} = (\delta_{\alpha}^{\beta} - T_{\alpha} u^{\beta}) V^{\alpha} = V^{\beta} - \underbrace{(T_{\alpha} V^{\alpha})}_{=0} u^{\beta} = V^{\beta} \quad (4.5.12)$$

elde edilir. Dolayısıyla P , uzaysal vektörleri olduğu gibi bırakır, zaman yönünü ise sıfıra gönderir; bu yüzden P uzaysal projektördür.

Şimdi ayar dönüşümleri altında $g_{\alpha\beta}$ 'nın nasıl değiştiğine bakılabilir. Dönüşmüş ifade

$$\tilde{g}_{\alpha\gamma} \tilde{g}^{\gamma\beta} = \delta_{\alpha}^{\beta} - \tilde{T}_{\alpha} \tilde{u}^{\beta} \quad (4.5.13)$$

biçimindedir. (4.4.4), (4.4.8) ve (4.4.14) denklemleri (4.5.13)'te yerine konulduğunda

$$\tilde{g}_{\alpha\gamma} g^{\gamma\beta} = \underbrace{\delta_{\alpha}^{\beta} - T_{\alpha} u^{\beta}}_{g_{\alpha\gamma} g^{\gamma\beta}} - T_{\alpha} U_a X^{a\beta}, \quad (4.5.14)$$

$$(\tilde{g}_{\alpha\gamma} - g_{\alpha\gamma}) g^{\gamma\beta} = -T_{\alpha} U_a X^{a\beta} \quad (4.5.15)$$

ifadelerine ulaşılır. $X^{a\beta} = g^{\gamma\beta} X^a_{,\gamma}$ olduğundan

$$(\tilde{g}_{\alpha\gamma} - g_{\alpha\gamma}) g^{\gamma\beta} = -T_{\alpha} U_a g^{\gamma\beta} X^a_{,\gamma},$$

$$\underbrace{[\tilde{g}_{\alpha\gamma} - g_{\alpha\gamma} + T_{\alpha} U_a X^a_{,\gamma}]}_{f h_{\alpha\gamma}} g^{\gamma\beta} = 0 \quad (4.5.16)$$

yazılabilir. (4.5.16)'da (4.1.1) kullanılmıştır; bu denklemin sıfıra eşit olması, köşeli parantezin $g^{\gamma\beta}$ 'nin çekirdeğinde yer alması anlamına gelir ve söz konusu çekirdek $h_{\alpha\gamma} = T_{\alpha} T_{\gamma}$ tarafından üretilir. Böylece f ile gösterilen bir skaler katsayı tanımlanarak

$$\tilde{g}_{\alpha\gamma} = g_{\alpha\gamma} - T_{\alpha} U_a X^a_{,\gamma} + f h_{\alpha\gamma} \quad (4.5.17)$$

yazılır.

Şimdi f katsayısının belirlenmesi için (4.5.9)'deki $g_{\alpha\beta} u^\beta = 0$ denkleminin ayar dönüşümü incelenebilir. (4.5.17) $\tilde{u}^\gamma$ ile çarpılıp $\tilde{g}_{\alpha\gamma} \tilde{u}^\gamma = 0$ koşulu uygulanacaktır. Bunun için sağ taraftaki üç terim tek tek hesaplanabilir.

İlk terim için $\tilde{u}^\gamma = u^\gamma + U_b X^{b\gamma}$ açılımı yerine konulursa

$$g_{\alpha\gamma} \tilde{u}^\gamma = \underbrace{g_{\alpha\gamma} u^\gamma}_{=0} + U_b \underbrace{g_{\alpha\gamma} X^{b\gamma}}_{g_{\alpha\gamma} g^{\gamma\beta} X^b{}_{,\beta}} \quad (4.5.18)$$

ifadesi elde edilir. Altındaki birleşim için (4.5.9) kullanılırsa

$$g_{\alpha\gamma} g^{\gamma\beta} X^b{}_{,\beta} = \underbrace{\delta_\alpha^\beta X^b{}_{,\beta}}_{X^b{}_{,\alpha}} - \underbrace{X^b{}_{,\beta} T_\alpha u^\beta}_{=0} = X^b{}_{,\alpha}$$

yazılır; **v.** koşuldan $u^\beta X^b{}_{,\beta} = 0$ 'dır. Sonuç olarak,

$$g_{\alpha\gamma} \tilde{u}^\gamma = U_b X^b{}_{,\alpha} \quad (4.5.19)$$

elde edilir.

İkinci terimde yine $\tilde{u}^\gamma$ 'nin açılımı yerine konulursa

$$-T_\alpha U_a X^a{}_{,\gamma} \tilde{u}^\gamma = -T_\alpha U_a \left(\underbrace{X^a{}_{,\gamma} u^\gamma}_{=0, \text{ v.}} + U_b X^{b\gamma} X^a{}_{,\gamma} \right) \quad (4.5.20)$$

hâlini alır. (4.5.20) denkleminin ilk terimi **v.** koşuldan sıfırdır. İkinci terimde ise (4.4.18) özdeşliği uygulanırsa

$$U_b X^{b\gamma} X^a{}_{,\gamma} = U^b X_b{}^\gamma X^a{}_{,\gamma} = U^b \delta_b^a = U^a$$

elde edilir. Böylece

$$-T_\alpha U_a X^a{}_{,\gamma} \tilde{u}^\gamma = -T_\alpha U_a U^a = -T_\alpha U^2 \quad (4.5.21)$$

bulunur. Üçüncü terim için $h_{\alpha\gamma} = T_\alpha T_\gamma$ olduğundan

$$f h_{\alpha\gamma} \tilde{u}^\gamma = f T_\alpha T_\gamma u^\gamma + f U_b T_\alpha T_\gamma X^{b\gamma} = f T_\alpha \left(\underbrace{T_\gamma u^\gamma}_{=1, \text{ iv.}} + U_b \underbrace{T_\gamma X^{b\gamma}}_{=0} \right) \quad (4.5.22)$$

yazılır. Son parça $T_\gamma X^{b\gamma} = T_\gamma g^{\gamma\beta} X^b{}_{,\beta} = 0$ ortogonallik koşulundan (4.1.1) sıfırdır.

Böylece

$$f h_{\alpha\gamma} \tilde{u}^\gamma = f T_\alpha \quad (4.5.23)$$

sonucuna ulaşılır.

(4.5.19), (4.5.21) ve (4.5.23) sonuçları $\tilde{g}_{\alpha\gamma} \tilde{u}^\gamma = 0$ koşulunda toplandığında

$$\tilde{g}_{\alpha\gamma} \tilde{u}^\gamma = 0 \implies U_b X^b_{,\alpha} - T_\alpha U^2 + f T_\alpha = 0 \quad (4.5.24)$$

bağıntısı elde edilir. f 'yi yalnız bırakmak için her iki taraf u^α ile çarpılabilir:

$$\begin{aligned} U_b \underbrace{u^\alpha X^b_{,\alpha}}_{=0, \text{ v.}} - \underbrace{u^\alpha T_\alpha}_{=1, \text{ iv.}} U^2 + f \underbrace{u^\alpha T_\alpha}_{=1, \text{ iv.}} &= 0, \\ -U^2 + f &= 0 \implies f = U^2 \end{aligned} \quad (4.5.25)$$

ve bu sonuç elde edilir. Bu sonuç (4.5.17)'ye yerleştirildiğinde $\tilde{g}_{\alpha\beta}$ 'nin ayar dönüşümü

$$\tilde{g}_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta} - T_\alpha U_a X^a_{,\beta} + U^2 h_{\alpha\beta} \quad (4.5.26)$$

biçiminde elde edilir. Ancak $g_{\alpha\beta}$ simetrik bir tensör olduğundan ($g_{\alpha\beta} = g_{\beta\alpha}$), ayar dönüşümü altındaki hâli $\tilde{g}_{\alpha\beta}$ da simetrik olmak zorundadır. $\tilde{g}_{\alpha\beta}$, ikinci terim nedeniyle simetrik değildir. Bu nedenle söz konusu ifade simetrikleştirilmelidir.

$$\tilde{g}_{\alpha\beta} = (\tilde{g}_{\alpha\beta} + \tilde{g}_{\beta\alpha})$$

İkinci terim için simetrikleştirme işlemi yani; $-(T_\alpha U_a X^a_{,\beta} + T_\beta U_a X^a_{,\alpha})$ yapıldığında, elde edilen denklemler

$$\begin{aligned} \tilde{g}_{\alpha\beta} &= g_{\alpha\beta} - (T_\alpha U_a X^a_{,\beta} + T_\beta U_a X^a_{,\alpha}) + U^2 h_{\alpha\beta} \\ \tilde{g}_{\alpha\beta} &= g_{\alpha\beta} - T_{(\alpha} U_a X^a_{,\beta)} + U^2 h_{\alpha\beta} \end{aligned} \quad (4.5.27)$$

olurlar. Görüldüğü üzere kovariyant uzaysal metrik ayar dönüşümleri altında değişir.

Şimdi ise $g_{\alpha\rho} g^{\rho\beta} = \delta_\alpha^\beta - T_\alpha u^\beta$ denkleminin kovaryant türevini hesaplıyalım;

$$\nabla_\gamma (g_{\alpha\rho} g^{\rho\beta}) = -u^\beta \nabla_\gamma T_\alpha - T_\alpha u^\beta_{;\gamma}. \quad (4.5.28)$$

(4.2.21)'den $\nabla_\gamma T_\alpha = 0$ olduğu bilinmektedir; ayrıca uyumluluk koşulundan $g^{\rho\beta}_{;\gamma} = 0$ ve **vii.** koşuldan $u^\beta_{;\gamma} = \phi^\beta T_\gamma$ uygulandığında (4.5.28) denklemi

$$g_{\alpha\rho;\gamma} g^{\rho\beta} = -T_\alpha T_\gamma \phi^\beta \quad (4.5.29)$$

hâlini alır. Her iki taraf $g_{\beta\sigma}$ ile çarpıldığında

$$g_{\alpha\rho;\gamma} \underbrace{g_{\beta\sigma} g^{\rho\beta}}_{\delta_\sigma^\rho - T_\sigma u^\rho} = -T_\alpha T_\gamma \underbrace{g_{\beta\sigma} \phi^\beta}_{\phi_\sigma}, \quad (4.5.30)$$

$$g_{\alpha\sigma;\gamma} - T_\sigma u^\rho g_{\alpha\rho;\gamma} = -T_\alpha T_\gamma \phi_\sigma \quad (4.5.31)$$

sonucuna ulaşılır.

(4.5.9)'dan $g_{\alpha\beta} u^\beta = 0$ denkleminin kovaryant türevi alınarak

$$\nabla_\gamma (g_{\alpha\beta} u^\beta) = u^\beta g_{\alpha\beta;\gamma} + g_{\alpha\beta} u^\beta_{;\gamma} = 0, \quad (4.5.32)$$

$$u^\beta g_{\alpha\beta;\gamma} = -g_{\alpha\beta} u^\beta_{;\gamma} \quad (4.5.33)$$

bağıntısı yazılır. (4.5.33), (4.5.31)'in sol tarafındaki $u^\rho g_{\alpha\rho;\gamma}$ teriminde yerine konduğunda

$$g_{\alpha\sigma;\gamma} + T_\sigma g_{\alpha\rho} \underbrace{u^\rho_{;\gamma}}_{\text{vii.} = \phi^\rho T_\gamma} = -T_\alpha T_\gamma \phi_\sigma, \quad (4.5.34)$$

$$g_{\alpha\sigma;\gamma} + T_\sigma T_\gamma \underbrace{g_{\alpha\rho} \phi^\rho}_{\phi_\alpha} = -T_\alpha T_\gamma \phi_\sigma, \quad (4.5.35)$$

$$g_{\alpha\sigma;\gamma} = -T_\alpha T_\gamma \phi_\sigma - T_\sigma T_\gamma \phi_\alpha \quad (4.5.36)$$

sonucuna ulaşılır.

Öte yandan kovaryant türevin tanımı gereği

$$g_{\alpha\sigma;\gamma} = g_{\alpha\sigma,\gamma} - g_{\rho\sigma} \Gamma_{\alpha\gamma}^\rho - g_{\alpha\rho} \Gamma_{\sigma\gamma}^\rho \quad (4.5.37)$$

yazılabilir. (4.5.36) ile (4.5.37) eşitlendiğinde

$$g_{\alpha\sigma,\gamma} - g_{\rho\sigma} \Gamma_{\alpha\gamma}^\rho - g_{\alpha\rho} \Gamma_{\sigma\gamma}^\rho = -T_\alpha T_\gamma \phi_\sigma - T_\sigma T_\gamma \phi_\alpha \quad (4.5.38)$$

ifadesi elde edilir. Bu son ifadeden bağlantıyı elde edebilmek için yine üç permütasyon yazılır:

$$(1) : \quad g_{\alpha\sigma,\gamma} = g_{\rho\sigma} \Gamma_{\alpha\gamma}^\rho + g_{\alpha\rho} \Gamma_{\sigma\gamma}^\rho - T_\alpha T_\gamma \phi_\sigma - T_\sigma T_\gamma \phi_\alpha, \quad (4.5.39)$$

$$(2) : \quad g_{\sigma\gamma,\alpha} = g_{\rho\gamma} \Gamma_{\sigma\alpha}^\rho + g_{\sigma\rho} \Gamma_{\gamma\alpha}^\rho - T_\sigma T_\alpha \phi_\gamma - T_\gamma T_\alpha \phi_\sigma, \quad (4.5.40)$$

$$(3) : \quad g_{\gamma\alpha,\sigma} = g_{\rho\alpha} \Gamma_{\gamma\sigma}^\rho + g_{\gamma\rho} \Gamma_{\alpha\sigma}^\rho - T_\gamma T_\sigma \phi_\alpha - T_\alpha T_\sigma \phi_\gamma. \quad (4.5.41)$$

$\Gamma_{\mu\nu}{}^\rho = \Gamma_{\nu\mu}{}^\rho$, $g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$ ve $h_{\sigma\alpha} = T_\sigma T_\alpha$ özellikleri kullanılarak (2) + (3) – (1) kombinasyonu hesaplandığında

$$g_{\sigma\gamma,\alpha} + g_{\gamma\alpha,\sigma} - g_{\alpha\sigma,\gamma} = 2 g_{\rho\gamma} \Gamma_{\alpha\sigma}{}^\rho - 2 h_{\sigma\alpha} \phi_\gamma, \quad (4.5.42)$$

$$\frac{1}{2} (g_{\sigma\gamma,\alpha} + g_{\gamma\alpha,\sigma} - g_{\alpha\sigma,\gamma}) = g_{\rho\gamma} \Gamma_{\alpha\sigma}{}^\rho - h_{\sigma\alpha} \phi_\gamma \quad (4.5.43)$$

bağıntısına ulaşılır. (4.5.43) $g^{\gamma\delta}$ ile çarpıldığında

$$\underbrace{\frac{1}{2} g^{\gamma\delta} (g_{\sigma\gamma,\alpha} + g_{\gamma\alpha,\sigma} - g_{\alpha\sigma,\gamma})}_{{}^0\Gamma_{\alpha\sigma}{}^\delta} = g^{\gamma\delta} g_{\rho\gamma} \Gamma_{\alpha\sigma}{}^\rho - h_{\sigma\alpha} g^{\gamma\delta} \phi_\gamma \quad (4.5.44)$$

sonucuna ulaşılır; burada ${}^0\Gamma_{\alpha\sigma}{}^\delta$, $g_{\alpha\beta}$ 'dan Christoffel biçimindeki ifadesi gösterilmektedir.

(4.5.44) denkleminin sağ tarafındaki üçüncü terim incelenip, (4.5.9) kullanıldığında

$$h_{\sigma\alpha} \underbrace{g^{\gamma\delta} g_{\gamma\beta}}_{g_{\beta\gamma} g^{\gamma\delta}} \phi^\beta = h_{\sigma\alpha} (\delta_\beta^\delta - T_\beta u^\delta) \phi^\beta = h_{\sigma\alpha} \phi^\delta - h_{\sigma\alpha} T_\beta u^\delta \cdot \underbrace{\phi^\beta}_{\text{vi.} = g^{\beta\alpha} \phi_{,\alpha}} \quad (4.5.45)$$

yazılır. Son terim, $T_\beta g^{\beta\alpha} = 0$ ortogonallik koşulundan (4.1.1) sıfır olur. Böylece

$$\text{3. terim: } h_{\sigma\alpha} \phi^\delta \quad (4.5.46)$$

olarak kalır.

(4.5.44) denkelminin ikinci terim için ise (4.5.9) uygulandığında

$$g^{\gamma\delta} g_{\rho\gamma} \Gamma_{\alpha\sigma}{}^\rho = (\delta_\rho^\delta - T_\rho u^\delta) \Gamma_{\alpha\sigma}{}^\rho = \Gamma_{\alpha\sigma}{}^\delta - u^\delta T_\rho \Gamma_{\alpha\sigma}{}^\rho \quad (4.5.47)$$

yazılır. (4.2.21)'den $T_{\alpha;\gamma} = T_{\alpha,\gamma} - \Gamma_{\alpha\gamma}{}^\sigma T_\sigma = 0$ olduğu için $T_\rho \Gamma_{\alpha\sigma}{}^\rho = T_{\sigma,\alpha}$ sonucu çıkar. Dolayısıyla

$$\text{2. terim: } \Gamma_{\alpha\sigma}{}^\delta - u^\delta T_{\sigma,\alpha} \quad (4.5.48)$$

şeklini alır.

(4.5.46) ve (4.5.48) sonuçları (4.5.44)'te bir araya getirildiğinde

$${}^0\Gamma_{\alpha\sigma}{}^\delta = \Gamma_{\alpha\sigma}{}^\delta - u^\delta T_{\sigma,\alpha} - h_{\sigma\alpha} \phi^\delta \quad (4.5.49)$$

yazılır ve buradan Newton–Cartan afin bağlantısı

$$\Gamma_{\alpha\sigma}{}^\delta = {}^0\Gamma_{\alpha\sigma}{}^\delta + u^\delta T_{\sigma,\alpha} + T_\sigma T_\alpha \phi^\delta \quad (4.5.50)$$

sonucu elde edilir. Bu sonuç, Newton–Cartan bağlantısının üç katkıdan oluştuğunu ortaya koyar: standart Christoffel benzeri ${}^0\Gamma_{\alpha\sigma}{}^\delta$ terimi, kütleçekim alan şiddeti ϕ^δ ve zaman yapısı T_σ tarafından üretilen ek geometrik katkılar.

Newton–Cartan afin bağlantısının ayar dönüşümleri altında nasıl değiştiği hesaplanabilir:

$$\tilde{\Gamma}_{\alpha\sigma}{}^\delta = {}^0\tilde{\Gamma}_{\alpha\sigma}{}^\delta + \tilde{u}^\delta \tilde{T}_{\sigma,\alpha} + \tilde{T}_\sigma \tilde{T}_\alpha \tilde{\phi}^\delta \quad (4.5.51)$$

Burada ${}^0\tilde{\Gamma}_{\alpha\sigma}{}^\delta$ teriminin ayrıntılı hesabı Ek 2’de verilmiş olup, bu terim

$${}^0\tilde{\Gamma}_{\alpha\sigma}{}^\delta = {}^0\Gamma_{\alpha\sigma}{}^\delta - T_{,\alpha\sigma} U_a X^{a\delta} - h_{\sigma\alpha} a_a X^{a\delta} \quad (4.5.52)$$

ayar dönüşümleri altında değişir. (4.5.51) denkleminde geri dönülürse $\tilde{u}^\delta \tilde{T}_{\sigma,\alpha}$ ve $\tilde{T}_\sigma \tilde{T}_\alpha \tilde{\phi}^\delta$ terimleri hesaplanabilir. Birinci terim $\tilde{u}^\delta \tilde{T}_{\sigma,\alpha}$ iki çarpandan oluşur. $\tilde{u}^\delta = u^\delta + U_a X^{a\delta}$ dönüşümü (4.4.5) denkleminde bilinmektedir. $\tilde{T}_{\sigma,\alpha}$ için ise (4.4.2) denkleminde $\tilde{T} = T - T_0$ (T_0 sabit) olduğundan, türev alındığında sabit kısım kaybolur ve

$$\tilde{T}_{,\sigma} = T_{,\sigma} \implies \tilde{T}_{\sigma,\alpha} = T_{\sigma,\alpha}$$

sonucuna ulaşılır. İki ifade çarpıldığında

$$\tilde{u}^\delta \tilde{T}_{\sigma,\alpha} = (u^\delta + U_a X^{a\delta}) T_{\sigma,\alpha} = u^\delta T_{\sigma,\alpha} + U_a X^{a\delta} T_{\sigma,\alpha}. \quad (4.5.53)$$

elde edilir.

İkinci terim $\tilde{h}_{\sigma\alpha} \tilde{\phi}^\delta$ için (4.4.9) denkleminde $\tilde{h}_{\sigma\alpha} = h_{\sigma\alpha}$ değişmezliği ve (4.4.26) denkleminde $\tilde{\phi}^\delta = \phi^\delta + a_a X^{a\delta}$ dönüşümü kullanılarak

$$\tilde{h}_{\sigma\alpha} \tilde{\phi}^\delta = h_{\sigma\alpha} (\phi^\delta + a_a X^{a\delta}) = h_{\sigma\alpha} \phi^\delta + h_{\sigma\alpha} a_a X^{a\delta} \quad (4.5.54)$$

sonucu bulunur.

(4.5.52), (4.5.53) ve (4.5.54) denklemleri (4.5.51) denkleminde yerine konursa

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma}_{\alpha\sigma}{}^\delta = & {}^0\Gamma_{\alpha\sigma}{}^\delta - T_{,\alpha\sigma} U_a X^{a\delta} - h_{\sigma\alpha} a_a X^{a\delta} + u^\delta T_{\sigma,\alpha} \\ & + U_a X^{a\delta} T_{\sigma,\alpha} + h_{\sigma\alpha} \phi^\delta + h_{\sigma\alpha} a_a X^{a\delta}. \end{aligned} \quad (4.5.55)$$

(4.5.55) denkleminde indis simetrisi $T_{,\alpha\sigma} = T_{\sigma,\alpha}$ kullanılarak sadeleştirme yapılır.

$U_a X^{a\delta}$ ortak çarpanı olan terimler

$$-T_{,\alpha\sigma} U_a X^{a\delta} + U_a X^{a\delta} T_{\sigma,\alpha} = U_a X^{a\delta} (T_{\sigma,\alpha} - T_{,\alpha\sigma}) = 0$$

sonucunu verir. $h_{\sigma\alpha}a_aX^{a\delta}$ ortak çarpanlı terimler de benzer biçimde

$$-h_{\sigma\alpha}a_aX^{a\delta} + h_{\sigma\alpha}a_aX^{a\delta} = 0$$

olur. Geriye kalan terimler

$${}^0\Gamma_{\alpha\sigma}{}^\delta + u^\delta T_{\sigma,\alpha} + h_{\sigma\alpha}\phi^\delta = \Gamma_{\alpha\sigma}{}^\delta$$

biçiminde Newton–Cartan afin bağlantısını oluşturur. Dolayısıyla,

$$\tilde{\Gamma}_{\alpha\sigma}{}^\delta = \Gamma_{\alpha\sigma}{}^\delta \quad (4.5.56)$$

Newton–Cartan kütleçekim kuramında, afin bağlantı ayar dönüşümleri altında değişmez.

Newton–Cartan kütleçekiminde kütleçekim alan şiddeti ϕ 'nin sıfır olduğu özel durum ele alındığında, **vi.** ve **vii.** koşullar aşağıdaki biçime indirgenir: **vi.** koşuldan

$$\phi^\alpha = g^{\alpha\beta}\phi_{,\beta} = 0 \quad (4.5.57)$$

ve **vii.** koşuldan

$$u^\alpha{}_{;\beta} = \phi^\alpha T_\beta = 0 \quad (4.5.58)$$

elde edilir. Dolayısıyla Newton–Cartan afin bağlantısı (4.5.50) denkleminde üçüncü terim ortadan kalkar ve bağlantı

$$\Gamma_{\beta\gamma}{}^\alpha = {}^0\Gamma_{\beta\gamma}{}^\alpha + u^\alpha T_{,\beta\gamma} \quad (4.5.59)$$

biçimine indirgenir. Şimdi ise (4.5.59) indirgenmiş bağlantısı altında Newton–Cartan geometrisinin temel yapılarının uyumluluk koşulları incelenebilir.

İlk olarak $X^{a\alpha}$ kovaryant türevi hesaplanabilir:

$$\overset{V}{\nabla}_\gamma X^{a\alpha} = X^{a\alpha}{}_{;\gamma} + \Gamma_{\rho\gamma}{}^\alpha X^{a\rho} \quad (4.5.60)$$

(4.5.59) bağlantısı (4.5.60) denkleminde yerine konulabilir:

$$\overset{V}{\nabla}_\gamma X^{a\alpha} = X^{a\alpha}{}_{;\gamma} + {}^0\Gamma_{\rho\gamma}{}^\alpha X^{a\rho} + u^\alpha T_{,\rho\gamma} X^{a\rho} \quad (4.5.61)$$

ii. koşuldan Newton–Cartan afin bağlantısı için $X^{a\alpha}{}_{;\gamma} = 0$ koşulu açıldığında

$$X^{a\alpha}{}_{;\gamma} + ({}^0\Gamma_{\rho\gamma}{}^\alpha + u^\alpha T_{,\rho\gamma} + \phi^\alpha T_\rho T_\gamma) X^{a\rho} = 0 \quad (4.5.62)$$

yazılır. $X^{a\alpha} = g^{\alpha\beta} X^a_{,\beta}$ tanımı ve ortogonalite koşulu $T_\rho g^{\rho\beta} = 0$ kullanılarak $T_\rho X^{a\rho} = T_\rho g^{\rho\beta} X^a_{,\beta} = 0$ elde edilir; dolayısıyla $\phi^\alpha T_\rho T_\gamma X^{a\rho} = \phi^\alpha T_\gamma (T_\rho X^{a\rho}) = 0$ olur ve (4.5.62) denklemi

$$X^{a\alpha}_{,\gamma} + {}^0\Gamma_{\rho\gamma}{}^\alpha X^{a\rho} + u^\alpha T_{,\rho\gamma} X^{a\rho} = 0 \quad (4.5.63)$$

hâlini alır. (4.5.63) denklemi tam olarak (4.5.61) ifadesinin sağ tarafına eşittir. Sonuç olarak

$$\overset{V}{\nabla}_\gamma X^{a\alpha} = 0 \quad (4.5.64)$$

elde edilir. Böylece uzaysal Galilei koordinatları, indirgenmiş bağlantı altında da paralel taşınır.

Uzay metriği **iii.** koşul gereği

$$g^{\alpha\beta} = \delta_{ab} X^{a\alpha} X^{b\beta} \quad (4.5.65)$$

şeklindedir. (4.5.65) denkleminin kovaryant türevi alınır

$$\overset{V}{\nabla}_\gamma g^{\alpha\beta} = \delta_{ab} \left(\overset{V}{\nabla}_\gamma X^{a\alpha} \cdot X^{b\beta} + X^{a\alpha} \cdot \overset{V}{\nabla}_\gamma X^{b\beta} \right) \quad (4.5.66)$$

şeklinde olur. (4.5.64) denkleminde $\overset{V}{\nabla}_\gamma X^{a\alpha} = 0$ olduğundan

$$\overset{V}{\nabla}_\gamma g^{\alpha\beta} = 0 \quad (4.5.67)$$

sonucuna ulaşılır ve metrik, indirgenmiş bağlantı altında uyumlu olur.

T_α kovektörünün kovaryant türevi

$$\overset{V}{\nabla}_\gamma T_\alpha = T_{\alpha,\gamma} - \Gamma_{\alpha\gamma}{}^\rho T_\rho \quad (4.5.68)$$

biçimindedir. (4.5.59) bağlantısı (4.5.68) denkleminde yerine konulabilir;

$$\Gamma_{\alpha\gamma}{}^\rho T_\rho = ({}^0\Gamma_{\alpha\gamma}{}^\rho + u^\rho T_{,\alpha\gamma}) T_\rho = {}^0\Gamma_{\alpha\gamma}{}^\rho T_\rho + T_{,\alpha\gamma} (u^\rho T_\rho) \quad (4.5.69)$$

sıfır bağlantısının ortogonalite özelliği gereği $T_\rho {}^0\Gamma_{\alpha\gamma}{}^\rho = 0$ olduğu ve **iv.** koşuldan $u^\rho T_\rho = 1$ olduğu (4.5.69) denkleminde kullanılırsa

$$\Gamma_{\alpha\gamma}{}^\rho T_\rho = T_{,\alpha\gamma} \quad (4.5.70)$$

elde edilir. Kısmi türev simetrisi $T_{\alpha,\gamma} = T_{,\alpha\gamma}$ ve (4.5.70) kullanılarak (4.5.68) denklemi

$$\overset{V}{\nabla}_\gamma T_\alpha = T_{,\alpha\gamma} - T_{,\alpha\gamma} = 0 \quad (4.5.71)$$

sonucunu verir.

Zamansal metrik **i.** koşul gereği $h_{\alpha\beta} = T_\alpha T_\beta$ olarak tanımlıdır. Leibniz kuralından

$$\overset{V}{\nabla}_\gamma h_{\alpha\beta} = \overset{V}{\nabla}_\gamma T_\alpha T_\beta + T_\alpha \overset{V}{\nabla}_\gamma T_\beta \quad (4.5.72)$$

yazılır. (4.5.71) denkleminde $\overset{V}{\nabla}_\gamma T_\alpha = 0$ olduğundan

$$\overset{V}{\nabla}_\gamma h_{\alpha\beta} = 0 \quad (4.5.73)$$

elde edilir ve zamansal metrik de uyumluluk koşulunu sağlar.

Künzle'nin tanımladığı kovaryant uzay metriği $g_{\alpha\beta}$ için projeksiyon özdeşliği (4.5.10) denklemi

$$g_{\alpha\rho} g^{\rho\beta} = \delta_\alpha^\beta - T_\alpha u^\beta$$

biçiminde verilmişti. (4.5.10) özdeşliğinin her iki tarafına $\overset{V}{\nabla}_\gamma$ uygulanırsa

$$\overset{V}{\nabla}_\gamma g_{\alpha\rho} g^{\rho\beta} + g_{\alpha\rho} \overset{V}{\nabla}_\gamma g^{\rho\beta} = -\overset{V}{\nabla}_\gamma T_\alpha u^\beta - T_\alpha \overset{V}{\nabla}_\gamma u^\beta \quad (4.5.74)$$

elde edilir. (4.5.74) denkleminin sağ tarafında (4.5.71) denkleminde $\overset{V}{\nabla}_\gamma T_\alpha = 0$ ve (4.5.58) denkleminde $\overset{V}{\nabla}_\gamma u^\beta = \phi^\beta T_\gamma = 0$ olduğundan, sağ taraf sıfırdır. Ayrıca sol tarafta (4.5.67) denkleminde $\overset{V}{\nabla}_\gamma g^{\rho\beta} = 0$ olduğu gösterilmiştir. Dolayısıyla (4.5.74) denklemi

$$\overset{V}{\nabla}_\gamma g_{\alpha\rho} g^{\rho\beta} = 0 \quad (4.5.75)$$

hâlini alır. (4.5.75) denkleminin her iki tarafı $g_{\beta\sigma}$ ile çarpılırsa:

$$\overset{V}{\nabla}_\gamma g_{\alpha\rho} g^{\rho\beta} g_{\beta\sigma} = 0 \quad (4.5.76)$$

ve (4.5.10) özdeşliğindeki $g^{\rho\beta} g_{\beta\sigma} = \delta_\sigma^\rho - T_\sigma u^\rho$ ifadesi (4.5.76) denkleminde yerleştirilirse

$$\overset{V}{\nabla}_\gamma g_{\alpha\sigma} - T_\sigma u^\rho \overset{V}{\nabla}_\gamma g_{\alpha\rho} = 0 \quad (4.5.77)$$

elde edilir. (4.5.77) denkleminin ikinci terimindeki $u^\rho \overset{V}{\nabla}_\gamma g_{\alpha\rho}$ ifadesi için Leibniz kuralı, $u^\rho g_{\alpha\rho} = 0$ Künzle koşulu ve (4.5.58) kullanılırsa

$$u^\rho \overset{V}{\nabla}_\gamma g_{\alpha\rho} = \overset{V}{\nabla}_\gamma (u^\rho g_{\alpha\rho}) - \overset{V}{\nabla}_\gamma u^\rho g_{\alpha\rho} = 0 \quad (4.5.78)$$

bulunur. (4.5.78) denklemi (4.5.77) denkleminde kullanılırsa

$$\overset{V}{\nabla}_\gamma g_{\alpha\beta} = 0 \quad (4.5.79)$$

sonucuna ulaşılır ve kovaryant uzaysal metrik de uyumlu olur.

Böylece, kütleçekim alan şiddetinin sıfır olduğu özel durumda Newton–Cartan bağlantısı (4.5.59) biçimini alır ve bu bağlantı altında geometrinin tüm temel yapıları paralel taşınır;

$$\overset{V}{\nabla}_\gamma X^{a\alpha} = 0, \quad \overset{V}{\nabla}_\gamma g^{\alpha\beta} = 0, \quad \overset{V}{\nabla}_\gamma T_\alpha = 0, \quad \overset{V}{\nabla}_\gamma h_{\alpha\beta} = 0, \quad \overset{V}{\nabla}_\gamma g_{\alpha\beta} = 0, \quad \overset{V}{\nabla}_\gamma u_\alpha = 0. \quad (4.5.80)$$

5. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu çalışmada Newton kütleçekiminin geometrik formülasyonu olan Newton–Cartan kuramı, afin uzay yapısından başlanarak alan denklemlerine ve afin bağlantının türetimine kadar adım adım inşa edilmiştir. İzlenen yol, Cartan’ın 1923’te ortaya koyduğu geometrik bakış açısının tutarlı bir afin bağlantı kuramına nasıl dönüştüğünü göstermiştir.

2. Bölümde afin nokta uzayı, Öklid nokta uzayı, tensör hesabı ve Galilei uzay–zaman yapısı tanıtılarak sonraki bölümler için kavramsal zemin oluşturulmuştur.

3. Bölümde Cartan’ın bakış açısı tanıtılarak Newton’un mutlak uzayı yerine komşu Galilei çerçeveleri arasındaki geometrik ilişkinin temel kavram olarak alındığı gösterilmiştir. Ardından dört boyutlu uzay–zamanda sürekli ortamlar dinamiği iki aşamada ele alınmıştır. Önce sabit bir Galilei çerçevesinde enerji–momentum vektörü ve kuvvet vektörü diferansiyel formlar diliyle yazılarak sürekli ortamların temel denklemi elde edilmiş ve bu denklemden iki hareket denklemi türetilmiştir; ilki süreklilik denklemini ve üç uzaysal momentum denklemini, ikincisi ise basınç tensörünün simetrisini açısal momentum korunumundan vermiştir. Daha sonra uzay–zamanın her noktasına değişken bir Galilei referans sistemi bağlanması durumunda hareket denklemleri bağlantı bir-formları yardımıyla kovaryant biçimde ifade edilmiştir.

4. Bölümde Newton–Cartan uzay–zamanının temel yapıları, temel varsayımlar (A)–(B)–(C) ile tanıtılmış ve Galilei gözlemcisini karakterize eden **i–vii** koşulları koordinat bağımsız biçimde yeniden yazılmıştır. Trautman koşulundan eğrilik tensörü türetilmiş ve kontraksiyondan alan denklemi elde edilmiş; bu denklem Newton’un Poisson denkleminin tam geometrik karşılığıdır. Çalışmada ele alınan ayar dönüşümleri altında **i–vii** koşullarının ve eğrilik tensörünün bu dönüşümler altındaki davranışı incelenmiş, özellikle eğrilik tensörünün değişmez kaldığı kanıtlanmıştır.

Riemann geometrisinde dejenere olmayan bir metrikten Christoffel sembolleri yalnızca uyumluluk koşulundan elde edilebilirken, Newton–Cartan kuramında her iki metrik de dejenere olduğundan bağlantı yalnızca metriklerden türetilmemektedir;

vi. ve **vii.** koşulların hesaba katılması zorunludur. Bu zorunluluk K nznle'nin projeksiyon formülü ile c z lm ş ve Newton–Cartan afin bağlantısı    katkıdan oluşacak biçimde elde edilmiştir: standart Christoffel benzeri terim, mutlak zaman yapısının katkısı ve kütleçekim potansiyelinin katkısı. Bu sonuç, Cartan'ın 3. Bölümde ortaya koyduğu “kütleçekim alanının uzay–zamanın afin bağlantısında kodlandığı” görüşünü somut bir matematiksel ifadeye kavuşturmaktadır. Son olarak kütleçekim alan şiddetinin sıfır olduğu özel durum ele alınmış ve bu durumda geometrinin tüm temel yapılarının paralel taşındığı bulunmuştur.

Sonuç olarak Newton kütleçekimi, Einstein kütleçekiminin düşük hız limiti olmanın c ok ötesinde, kendi başına geometrik bir kuram olarak ele alınabilmektedir. Afin bağlantının yalnızca metriklerden değil aynı zamanda Galilei gözlemcisini karakterize eden ek koşullardan türetilmesi gerekliliği, kuramın Riemann geometrisine kıyasla kendine özgü yapısını ortaya koymaktadır.

 leriye dönük olarak bu c alışma c eitli yönlerde genişletilebilir. Torsiyonsuz bağlantı yerine torsiyonlu Newton–Cartan bağlantıları incelenebilir; ayrıca torsiyonlu Newton–Cartan kuramı içinde sürekli ortamlar mekaniğinin ele alınması, bu c alışmada geliştirilen geometrik altyapının doğal bir uzantısı olarak araştırılabilir. Bir diğer y n ise sicimsel Newton–Cartan geometrisi ve Bargmann genişletmesi yoluyla holografı, s perk tle ekim ve düşük enerji limitleri bağlamında kuramın oynadığı rol c alışılabilir (Schwartz 2026).

KAYNAKLAR

- Arnold, V. I., 1989. *Mathematical Methods of Classical Mechanics*. 2nd ed., Graduate Texts in Mathematics, Vol. 60, Springer-Verlag, New York.
- Benn, I. M. and Tucker, R. W., 1987. *An Introduction to Spinors and Geometry with Applications in Physics*. Adam Hilger, Bristol and Philadelphia.
- Cartan, É., 1922. *Leçons sur les invariants intégraux*. A. Hermann, Paris.
- Cartan, É., 1923. *Sur les variétés à connexion affine et la théorie de la relativité généralisée (première partie)*, Annales scientifiques de l'École normale supérieure, 40, 325–412.
- Cartan, É., 1986. *On Manifolds with an Affine Connection and the Theory of General Relativity*. Translated by A. Magnon and A. Ashtekar, with a foreword by A. Trautman, Bibliopolis.
- Dereli, T., Koçak, S. and Limoncu, M., 2004. *Newton-Cartan connections with torsion*. arXiv preprint gr-qc/0402116.
- Kuchaş, K., 1980. *Gravitation, geometry, and nonrelativistic quantum theory*. Physical Review D, 22(6), 1285.
- Künzle, Hans-Peter, 1972. *Galilei and Lorentz structures on space-time: comparison of the corresponding geometry and physics*, Annales de l'Institut Henri Poincaré. Section A, Physique Théorique, 17(4), 337–362.
- Lichnerowicz, A., 1962. *Elements of Tensor Calculus*. Translated by J. W. Leech and D. J. Newman, Methuen & Co. Ltd.
- Misner, C. W., Thorne, K. S. and Wheeler, J. A., 1973. *Gravitation*. W. H. Freeman, San Francisco.
- Schwartz, P. K., 2021. *Newton–Cartan gravity*. Lecture notes, Leibniz University Hannover, Winter Semester.
- Schwartz, P. K., 2026. *Newton–Cartan Gravity: A Modern Introduction to Geometrised Newtonian Gravity*. Lecture Notes in Physics, Vol. 1044, Springer, Cham.
- Son, D. T., 2025. *Newton-Cartan geometry and the quantum Hall effect*. Low Temperature Physics, 51(3), 384–391.
- Trautman, A., 1963. *Sur la théorie newtonienne de la gravitation*. Comptes Rendus Hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences, 257, 617–620.
- Trautman, A., Pirani, F. A. E. and Bondi, H., 1965. *Lectures on General Relativity*. Vol. 1, Prentice-Hall.

EK 1

DİFERANSİYEL GEOMETRİNİN TEMEL KAVRAMLARI

Bu ekte, Newton–Cartan kütleçekiminin geometrik formülasyonunda kullanılan temel diferansiyel geometri kavramları Benn ve Tucker (1987)’dan derlenmiştir.

Manifoldlar

Bir n boyutlu *topolojik manifold* M , sayılabilir tabana sahip bir Hausdorff uzayıdır ve her noktası $\mathbb{R}^n$ ’in bir açık alt kümesine homeomorfik bir komşuluğa sahiptir. Bir açık küme $U_a \subset M$ ile bir homeomorfizma $\varphi_a : U_a \rightarrow \varphi_a(U_a) \subset \mathbb{R}^n$ ikilisi (U_a, φ_a) bir *haritadır*; φ_a her $p \in U_a$ noktasına koordinatlarını $(x^1(p), \dots, x^n(p))$ atar. M ’yi kaplayan haritalar ailesine *atlas* denir.

İki haritanın kesişiminde tanımlı *harita geçişi* $\varphi_b \circ \varphi_a^{-1} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ’in açık kümeleri arasında bir dönüşümdür. Tüm geçişleri C^∞ olan bir atlasla donatılmış manifoldda *düzgün (diferansiyellenebilir) manifold* denir. M üzerindeki düzgün gerçel fonksiyonların kümesi $\mathcal{F}(M)$, noktasal toplama ve çarpma altında bir gerçel cebir oluşturur.

Diferansiyel 1-Formlar

$p \in M$ noktasında teğet uzay $T_p M$ ’nin duali *koteğit uzayı* $T_p^* M$ ’dir; elemanlarına ko-vektör veya 1-form denir. Bir *diferansiyel 1-form*, vektör alanları üzerinde $\mathcal{F}(M)$ -doğrusal bir dönüşümdür:

$$\omega : \Gamma(TM) \rightarrow \mathcal{F}(M), \quad \omega(fX + gY) = f\omega(X) + g\omega(Y).$$

Bir koordinat haritasında $\omega = \omega_\mu(x) dx^\mu$ biçiminde açılır; burada $\{dx^\mu\}$, doğal teğet tabana dual koteğit tabandır:

$$dx^\mu \left(\frac{\partial}{\partial x^\nu} \right) = \delta_\nu^\mu.$$

Her $f \in \mathcal{F}(M)$ doğal bir 1-form tanımlar: *diferansiyel df*, her vektör alanı üzerindeki etkisi $df(X) = X(f)$ ile verilir ve koordinatta $df = \frac{\partial f}{\partial x^\mu} dx^\mu$ olur.

p -Formlar ve Dış Çarpım

Bir p -form, p tane vektör argümanı alan, argümanlarına göre tamamen antisimetrik ve her argümanında $\mathcal{F}(M)$ -doğrusal bir dönüşümdür. Tüm p -formların uzayı $\Lambda^p M$ ile gösterilir; $\Lambda^0 M = \mathcal{F}(M)$ ve $\Lambda^1 M$ 1-formlar uzayıdır.

İki form $\alpha \in \Lambda^p M$, $\beta \in \Lambda^q M$ için *dış çarpım* $\alpha \wedge \beta \in \Lambda^{p+q} M$ tanımlanır. Dış çarpım her iki argümanında $\mathbb{R}$ -doğrusal, birleşmeli ve dereceli antisimetriktir:

$$\alpha \wedge \beta = (-1)^{pq} \beta \wedge \alpha.$$

Bunun sonucu olarak bir 1-form için $\omega \wedge \omega = 0$ olur. n boyutlu manifoldda $\dim \Lambda^p M = \binom{n}{p}$ olduğundan $p > n$ için $\Lambda^p M = \{0\}$ 'dir. Koordinatta bir p -form

$$\beta = \frac{1}{p!} \beta_{\mu_1 \dots \mu_p} dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_p}$$

biçiminde açılır; bileşenler indislerine göre tamamen antisimetriktir.

Dış Türev

Dış türev $d : \Lambda^p M \rightarrow \Lambda^{p+1} M$, aşağıdaki üç özellikle benzersiz biçimde belirlenen $\mathbb{R}$ -doğrusal bir operatördür:

- fonksiyonlar üzerinde diferansiyelle örtüşür: $df(X) = X(f)$;
- dereceli Leibniz kuralını sağlar: $d(\alpha \wedge \beta) = d\alpha \wedge \beta + (-1)^p \alpha \wedge d\beta$ ($\alpha \in \Lambda^p M$);
- nilpotenttir: $d^2 = d \circ d = 0$ (Poincaré lemması).

Bir 1-form $\omega = \omega_\mu dx^\mu$ için

$$d\omega = \frac{\partial \omega_\mu}{\partial x^\nu} dx^\nu \wedge dx^\mu.$$

$d\alpha = 0$ ise α *kapalı*, $\alpha = d\beta$ yazılabiliyorsa *tam* adını alır; $d^2 = 0$ gereği her tam form kapalıdır.

Bağlantı

Bir vektör alanını başka bir alan yönünde tutarlı biçimde türevlemek için ek bir yapı, (*lineer*) *bağlantı* ∇ gerekir:

$$\nabla : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \rightarrow \Gamma(TM), \quad (X, Y) \mapsto \nabla_X Y.$$

$\nabla_X Y$ ifadesine Y 'nin X yönünde *kovaryant türevi* denir. Bağlantı iki aksiyomu sağlar: ilk argümanda $\mathcal{F}(M)$ -doğrusaldır,

$$\nabla_{fX+gY} Z = f \nabla_X Z + g \nabla_Y Z$$

(bu, $\nabla_X Z$ 'nin p noktasındaki değerinin yalnızca X_p 'ye bağlı olmasını sağlar); ikinci argümanda Leibniz kuralını sağlar,

$$\nabla_X (fY) = X(f)Y + f \nabla_X Y.$$

Bir taban $\{X_a\}$ verildiğinde bağlantı, *bağlantı katsayıları* ile belirlenir:

$$\nabla_{X_a} X_b = \Gamma_{ab}^c X_c.$$

Bu katsayılar koordinat dönüşümleri altında tensör gibi dönüşmez ancak iki bağlantının *farkı* her zaman bir tensördür. Dual koçerçeve $\{e^a\}$ ile *bağlantı 1-formları*

$$\omega^c_b = \Gamma_{ab}^c e^a, \quad \nabla_{X_a} X_b = \omega^c_b(X_a) X_c$$

biçiminde yazılır. Bir 1-form ω_α ile bir vektör Y^α 'nın kontraksiyonu $\omega_\alpha Y^\alpha$ bir skalerdir; bu skaler üzerinde Leibniz kuralı, vektörler için geçerli olan

$$\nabla_\gamma Y^\alpha = Y^\alpha_{,\gamma} + \Gamma_{\rho\gamma}^\alpha Y^\rho$$

bağıntısıyla birlikte kullanıldığında, 1-formun kovaryant türevi

$$\nabla_\gamma \omega_\alpha = \omega_{\alpha,\gamma} - \Gamma_{\alpha\gamma}^\rho \omega_\rho$$

biçiminde elde edilir; üst (kontravaryant) indiste $+\Gamma$, alt (kovaryant) indiste $-\Gamma$ çıkması bu tutarlılık şartının doğrudan sonucudur. Genel bir (p, q) -tipi tensör için, koordinat tabanında her kontravaryant indis için bir $+\Gamma$, her kovaryant indis için bir $-\Gamma$ terimi eklenir:

$$\begin{aligned} \nabla_\gamma T^{\alpha_1 \dots \alpha_p}_{\beta_1 \dots \beta_q} &= T^{\alpha_1 \dots \alpha_p}_{\beta_1 \dots \beta_q, \gamma} + \Gamma_{\rho\gamma}^{\alpha_1} T^{\rho \alpha_2 \dots \alpha_p}_{\beta_1 \dots \beta_q} + \dots \\ &\quad - \Gamma_{\beta_1 \gamma}^\rho T^{\alpha_1 \dots \alpha_p}_{\rho \beta_2 \dots \beta_q} - \dots \end{aligned}$$

Bu işlem kontraksiyonla değişir, tensör çarpımı üzerinde Leibniz kuralını sağlar ve tensör cebiri üzerinde *tip-koruyan* bir türevdir; bileşenleri çoğu zaman noktalı virgülle $T^{\alpha_1 \dots \alpha_p}_{\beta_1 \dots \beta_q, \gamma}$ olarak gösterilir.

Kovaryant Dış Türev

Tensör-değerli formlar için dış türevin genellemesi *kovaryant dış türev* D 'dir; bağlantı 1-formlarıyla “düzeltme terimleri” içerir. Bileşenleri $S^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q}$ olan tensör-değerli bir form için her kontravaryant indise bir $\wedge$ terimi eklenir, her kovaryant indise ise, bir tane çıkarılır. Skaler-değerli formda $D = d$ 'dir. Temel bağıntı

$$DS = e^a \wedge \nabla_{X_a} S$$

şeklindedir. Tensör-değerli 1-formlar için sade biçim alır:

$$D\Pi^\mu = d\Pi^\mu + \omega^\mu{}_\nu \wedge \Pi^\nu, \quad D\alpha_\mu = d\alpha_\mu - \omega^\nu{}_\mu \wedge \alpha_\nu.$$

$d^2 = 0$ 'ın aksine genel olarak $D^2 \neq 0$ 'dır; D^2 işlemi manifoldun *eğriliğini* ortaya çıkarır.

EK 2

SIFIR BAĞLANTISININ AYAR DÖNÜŞÜMÜ

Sıfır bağlantısının ayar dönüşümü altındaki biçimi

$${}^0\tilde{\Gamma}_{\alpha\sigma}{}^\delta = \frac{1}{2}\tilde{g}^{\gamma\delta}(\tilde{g}_{\sigma\gamma,\alpha} + \tilde{g}_{\gamma\alpha,\sigma} - \tilde{g}_{\alpha\sigma,\gamma})$$

olarak tanımlanır. 4. Bölümde, kontravaryant uzay metriği $g^{\gamma\delta} = \delta_{ab}X^{a\gamma}X^{b\delta}$,nin ayar dönüşümü altında değişmez olduğu gösterilmiş ve buradan

$$\tilde{g}^{\gamma\delta} = g^{\gamma\delta}$$

sonucu elde edilmiştir. Dolayısıyla yukarıdaki ifade

$${}^0\tilde{\Gamma}_{\alpha\sigma}{}^\delta = \frac{1}{2}g^{\gamma\delta}(\tilde{g}_{\sigma\gamma,\alpha} + \tilde{g}_{\gamma\alpha,\sigma} - \tilde{g}_{\alpha\sigma,\gamma})$$

biçimine indirgenir; başka bir deyişle, ${}^0\tilde{\Gamma}_{\alpha\sigma}{}^\delta$ 'nin hesaplanması yalnızca $\tilde{g}_{\alpha\beta}$ 'nin türevlerinin belirlenmesine bağlıdır. Ayrıca, 4. Bölümde kovaryant uzay metriğinin ayar dönüşümü altında

$$\tilde{g}_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta} - T_\alpha U_a X^a{}_{,\beta} - T_\beta U_a X^a{}_{,\alpha} + U^2 h_{\alpha\beta}$$

olduğu gösterilmiştir. Bu doğrultuda, ilk olarak $\tilde{g}_{\alpha\beta,\gamma}$ türevi hesaplanır. U_a ve a_a yalnızca T 'ye bağlı olduğundan, zincir kuralı aracılığıyla $\partial_\gamma U_a = a_a T_\gamma$ ve $\partial_\gamma U^2 = 2U_a a^a T_\gamma$ bağıntıları elde edilir. Ayrıca, $h_{\alpha\beta} = T_\alpha T_\beta$ olduğundan $h_{\alpha\beta,\gamma} = T_{,\alpha\gamma} T_\beta + T_\alpha T_{,\beta\gamma}$ yazılır. Bu özdeşlikler ve çarpım kuralı kullanılarak

$$\begin{aligned} \tilde{g}_{\alpha\beta,\gamma} &= g_{\alpha\beta,\gamma} \\ &\quad - T_{,\alpha\gamma} U_a X^a{}_{,\beta} - T_\alpha a_a T_\gamma X^a{}_{,\beta} - T_\alpha U_a X^a{}_{,\beta\gamma} \\ &\quad - T_{,\beta\gamma} U_a X^a{}_{,\alpha} - T_\beta a_a T_\gamma X^a{}_{,\alpha} - T_\beta U_a X^a{}_{,\alpha\gamma} \\ &\quad + 2U_a a^a T_\gamma h_{\alpha\beta} + U^2 T_{,\alpha\gamma} T_\beta + U^2 T_\alpha T_{,\beta\gamma} \end{aligned}$$

elde edilir.

Christoffel formülünde gerekli olan üç permütasyon, yukarıdaki ifadede uygun indis değişimleri yapılarak elde edilir. $\tilde{g}_{\sigma\gamma,\alpha}$ için $\alpha \rightarrow \sigma$, $\beta \rightarrow \gamma$, $\gamma \rightarrow \alpha$ indis değişimleri

uygulandığında:

$$\begin{aligned}\tilde{g}_{\sigma\gamma,\alpha} &= g_{\sigma\gamma,\alpha} \\ &\quad - T_{,\sigma\alpha}U_aX^a_{,\gamma} - T_\sigma a_a T_\alpha X^a_{,\gamma} - T_\sigma U_a X^a_{,\gamma\alpha} \\ &\quad - T_{,\gamma\alpha}U_aX^a_{,\sigma} - T_\gamma a_a T_\alpha X^a_{,\sigma} - T_\gamma U_a X^a_{,\sigma\alpha} \\ &\quad + 2U_a a^a T_\alpha h_{\sigma\gamma} + U^2 T_{,\sigma\alpha} T_\gamma + U^2 T_\sigma T_{,\gamma\alpha}\end{aligned}$$

$\tilde{g}_{\gamma\alpha,\sigma}$ için $\alpha \rightarrow \gamma$, $\beta \rightarrow \alpha$, $\gamma \rightarrow \sigma$ indis değişimleri uygulandığında:

$$\begin{aligned}\tilde{g}_{\gamma\alpha,\sigma} &= g_{\gamma\alpha,\sigma} \\ &\quad - T_{,\gamma\sigma}U_aX^a_{,\alpha} - T_\gamma a_a T_\sigma X^a_{,\alpha} - T_\gamma U_a X^a_{,\alpha\sigma} \\ &\quad - T_{,\alpha\sigma}U_aX^a_{,\gamma} - T_\alpha a_a T_\sigma X^a_{,\gamma} - T_\alpha U_a X^a_{,\gamma\sigma} \\ &\quad + 2U_a a^a T_\sigma h_{\gamma\alpha} + U^2 T_{,\gamma\sigma} T_\alpha + U^2 T_\gamma T_{,\alpha\sigma}\end{aligned}$$

Üçüncü permütasyon $\tilde{g}_{\alpha\sigma,\gamma}$ için ise yalnızca $\beta \rightarrow \sigma$ indis değişiminin uygulanması yeterlidir:

$$\begin{aligned}\tilde{g}_{\alpha\sigma,\gamma} &= g_{\alpha\sigma,\gamma} \\ &\quad - T_{,\alpha\gamma}U_aX^a_{,\sigma} - T_\alpha a_a T_\gamma X^a_{,\sigma} - T_\alpha U_a X^a_{,\sigma\gamma} \\ &\quad - T_{,\sigma\gamma}U_aX^a_{,\alpha} - T_\sigma a_a T_\gamma X^a_{,\alpha} - T_\sigma U_a X^a_{,\alpha\gamma} \\ &\quad + 2U_a a^a T_\gamma h_{\alpha\sigma} + U^2 T_{,\alpha\gamma} T_\sigma + U^2 T_\alpha T_{,\sigma\gamma}\end{aligned}$$

Her permütasyon onar terim içerdiğinden, $S = \tilde{g}_{\sigma\gamma,\alpha} + \tilde{g}_{\gamma\alpha,\sigma} - \tilde{g}_{\alpha\sigma,\gamma}$ toplamı oldukça uzun bir ifade vermektedir. Hesabın izlenebilirliğini sağlamak amacıyla, her permütasyondaki terimler ayrı ayrı adlandırılır: birinci permütasyondan gelenler $P_1, \dots, P_{10}$, ikinci permütasyondan gelenler $Q_1, \dots, Q_{10}$, üçüncü permütasyondan gelenler ise $R_1, \dots, R_{10}$ ile gösterilir.

Birinci permütasyon:

$$\begin{aligned}P_1 &= +g_{\sigma\gamma,\alpha}, & P_2 &= -T_{,\sigma\alpha}U_aX^a_{,\gamma}, & P_3 &= -T_\sigma a_a T_\alpha X^a_{,\gamma} \\ P_4 &= -T_\sigma U_a X^a_{,\gamma\alpha}, & P_5 &= -T_{,\gamma\alpha}U_aX^a_{,\sigma}, & P_6 &= -T_\gamma a_a T_\alpha X^a_{,\sigma} \\ P_7 &= -T_\gamma U_a X^a_{,\sigma\alpha}, & P_8 &= +2U_a a^a T_\alpha h_{\sigma\gamma}, & P_9 &= +U^2 T_{,\sigma\alpha} T_\gamma \\ P_{10} &= +U^2 T_\sigma T_{,\gamma\alpha}\end{aligned}$$

İkinci permütasyon:

$$\begin{aligned}
Q_1 &= +g_{\gamma\alpha,\sigma}, & Q_2 &= -T_{,\gamma\sigma}U_aX^a_{,\alpha}, & Q_3 &= -T_\gamma a_a T_\sigma X^a_{,\alpha} \\
Q_4 &= -T_\gamma U_a X^a_{,\alpha\sigma}, & Q_5 &= -T_{,\alpha\sigma}U_a X^a_{,\gamma}, & Q_6 &= -T_\alpha a_a T_\sigma X^a_{,\gamma} \\
Q_7 &= -T_\alpha U_a X^a_{,\gamma\sigma}, & Q_8 &= +2U_a a^a T_\sigma h_{\gamma\alpha}, & Q_9 &= +U^2 T_{,\gamma\sigma} T_\alpha \\
Q_{10} &= +U^2 T_\gamma T_{,\alpha\sigma}
\end{aligned}$$

Üçüncü permütasyon (eksi işaretiyle alınmış):

$$\begin{aligned}
R_1 &= -g_{\alpha\sigma,\gamma}, & R_2 &= +T_{,\alpha\gamma}U_aX^a_{,\sigma}, & R_3 &= +T_\alpha a_a T_\gamma X^a_{,\sigma} \\
R_4 &= +T_\alpha U_a X^a_{,\sigma\gamma}, & R_5 &= +T_{,\sigma\gamma}U_aX^a_{,\alpha}, & R_6 &= +T_\sigma a_a T_\gamma X^a_{,\alpha} \\
R_7 &= +T_\sigma U_a X^a_{,\alpha\gamma}, & R_8 &= -2U_a a^a T_\gamma h_{\alpha\sigma}, & R_9 &= -U^2 T_{,\alpha\gamma} T_\sigma \\
R_{10} &= -U^2 T_\alpha T_{,\sigma\gamma}
\end{aligned}$$

Bu terimlerin sadeleştirilmesinde, kısmi türev simetrileri $T_{,\mu\nu} = T_{,\nu\mu}$ ve $X^a_{,\mu\nu} = X^a_{,\nu\mu}$ kullanılacaktır.

P_5 ile R_2 aynı yapıya sahiptir; $T_{,\gamma\alpha} = T_{,\alpha\gamma}$ olduğundan

$$P_5 + R_2 = -T_{,\gamma\alpha}U_aX^a_{,\sigma} + T_{,\alpha\gamma}U_aX^a_{,\sigma} = 0$$

elde edilir. Benzer biçimde $T_{,\gamma\sigma} = T_{,\sigma\gamma}$ ile

$$Q_2 + R_5 = -T_{,\gamma\sigma}U_aX^a_{,\alpha} + T_{,\sigma\gamma}U_aX^a_{,\alpha} = 0$$

sonucuna ulaşılır. T_μ bileşenleri için zamansal metriğin simetrisi ($T_\gamma T_\alpha = T_\alpha T_\gamma$) kullanılarak

$$P_6 + R_3 = -T_\gamma a_a T_\alpha X^a_{,\sigma} + T_\alpha a_a T_\gamma X^a_{,\sigma} = 0$$

elde edilir. Benzer biçimde,

$$Q_3 + R_6 = -T_\gamma a_a T_\sigma X^a_{,\alpha} + T_\sigma a_a T_\gamma X^a_{,\alpha} = 0$$

yazılır. X^a için kısmi türev simetrisi $X^a_{,\gamma\alpha} = X^a_{,\alpha\gamma}$ kullanılarak

$$P_4 + R_7 = -T_\sigma U_a X^a_{,\gamma\alpha} + T_\sigma U_a X^a_{,\alpha\gamma} = 0$$

bulunur ve $X^a_{,\gamma\sigma} = X^a_{,\sigma\gamma}$ eşitliği kullanılarak

$$Q_7 + R_4 = -T_\alpha U_a X^a_{,\gamma\sigma} + T_\alpha U_a X^a_{,\sigma\gamma} = 0$$

bulunur. Son olarak, $U^2 T_{,\mu\nu} T_\rho$ biçimindeki terimler için $T_{,\sigma\alpha} = T_{,\alpha\sigma}$ özdeşliği kullanılarak

$$P_{10} + R_9 = U^2 T_\sigma T_{,\gamma\alpha} - U^2 T_{,\alpha\gamma} T_\sigma = 0$$

ve

$$Q_9 + R_{10} = U^2 T_{,\gamma\sigma} T_\alpha - U^2 T_\alpha T_{,\sigma\gamma} = 0$$

olur.

ve

$$P_2 + Q_5 = -T_{,\sigma\alpha} U_a X^a_{,\gamma} - T_{,\alpha\sigma} U_a X^a_{,\gamma} = -2T_{,\alpha\sigma} U_a X^a_{,\gamma}$$

yazılır. $T_\sigma T_\alpha = h_{\sigma\alpha}$ tanımını kullanılarak

$$P_3 + Q_6 = -T_\sigma a_a T_\alpha X^a_{,\gamma} - T_\alpha a_a T_\sigma X^a_{,\gamma} = -2h_{\sigma\alpha} a_a X^a_{,\gamma}$$

elde edilir. $X^a_{,\sigma\alpha} = X^a_{,\alpha\sigma}$ eşitliği kullanılarak

$$P_7 + Q_4 = -T_\gamma U_a X^a_{,\sigma\alpha} - T_\gamma U_a X^a_{,\alpha\sigma} = -2T_\gamma U_a X^a_{,\alpha\sigma}$$

bulunur ve son olarak,

$$P_9 + Q_{10} = U^2 T_{,\sigma\alpha} T_\gamma + U^2 T_\gamma T_{,\alpha\sigma} = 2U^2 T_{,\alpha\sigma} T_\gamma$$

yazılır.

Bu eşleşmeler dışında kalan terimler ise $P_8 = +2U_a a^a T_\alpha h_{\sigma\gamma}$, $Q_8 = +2U_a a^a T_\sigma h_{\gamma\alpha}$ ve $R_8 = -2U_a a^a T_\gamma h_{\alpha\sigma}$ ifadeleridir.

Bu sadeleştirmelerin ardından S ifadesi

$$\begin{aligned} S = & g_{\sigma\gamma,\alpha} + g_{\gamma\alpha,\sigma} - g_{\alpha\sigma,\gamma} \\ & - 2T_{,\alpha\sigma} U_a X^a_{,\gamma} - 2h_{\sigma\alpha} a_a X^a_{,\gamma} - 2T_\gamma U_a X^a_{,\alpha\sigma} \\ & + 2U_a a^a (T_\alpha h_{\sigma\gamma} + T_\sigma h_{\gamma\alpha} - T_\gamma h_{\alpha\sigma}) + 2U^2 T_{,\alpha\sigma} T_\gamma \end{aligned}$$

biçiminde elde edilir.

Son adımda, bu toplam $\frac{1}{2}g^{\gamma\delta}$ ile çarpılır. Bu işlemde, ortogonalite koşulları $g^{\gamma\delta}T_\gamma = 0$, $g^{\gamma\delta}h_{\sigma\gamma} = 0$ ve $g^{\gamma\delta}X^a_{,\gamma} = X^{a\delta}$ kullanılacaktır. İlk terim, P_1, Q_1 ve R_1 terimlerinden oluşan Christoffel biçimindeki sıfır bağlantısı ifadesini verir:

$$\frac{1}{2}g^{\gamma\delta} (g_{\sigma\gamma,\alpha} + g_{\gamma\alpha,\sigma} - g_{\alpha\sigma,\gamma}) = {}^0\Gamma_{\alpha\sigma}{}^\delta$$

sonucu elde edilir. $X^a_{,\gamma}$ içeren iki terim için

$$\frac{1}{2}g^{\gamma\delta}(-2T_{,\alpha\sigma}U_aX^a_{,\gamma}) = -T_{,\alpha\sigma}U_aX^{a\delta}$$

ve

$$\frac{1}{2}g^{\gamma\delta}(-2h_{\sigma\alpha}a_aX^a_{,\gamma}) = -h_{\sigma\alpha}a_aX^{a\delta}$$

elde edilir. Geriye kalan beş terimin tamamı, ortogonalite koşulları gereği sıfıra indirgenir. T_γ içeren $-2T_\gamma U_a X^a_{,\alpha\sigma}$ terimi için

$$\frac{1}{2}g^{\gamma\delta}(-2T_\gamma U_a X^a_{,\alpha\sigma}) = -U_a X^a_{,\alpha\sigma} \underbrace{(g^{\gamma\delta} T_\gamma)}_{=0} = 0$$

elde edilir. $h_{\sigma\gamma}$ içeren $+2U_a a^a T_\alpha h_{\sigma\gamma}$ terimi için

$$\frac{1}{2}g^{\gamma\delta}2U_a a^a T_\alpha h_{\sigma\gamma} = U_a a^a T_\alpha \underbrace{(g^{\gamma\delta} h_{\sigma\gamma})}_{=0} = 0$$

yazılır. Benzer biçimde $h_{\gamma\alpha}$ içeren $+2U_a a^a T_\sigma h_{\gamma\alpha}$ terimi için

$$\frac{1}{2}g^{\gamma\delta}2U_a a^a T_\sigma h_{\gamma\alpha} = U_a a^a T_\sigma \underbrace{(g^{\gamma\delta} h_{\gamma\alpha})}_{=0} = 0$$

sonucuna ulaşılır. T_γ içeren $-2U_a a^a T_\gamma h_{\alpha\sigma}$ terimi için

$$\frac{1}{2}g^{\gamma\delta}(-2U_a a^a T_\gamma h_{\alpha\sigma}) = -U_a a^a h_{\alpha\sigma} \underbrace{(g^{\gamma\delta} T_\gamma)}_{=0} = 0$$

bulunur ve son olarak $+2U^2 T_{,\alpha\sigma} T_\gamma$ terimi için

$$\frac{1}{2}g^{\gamma\delta}2U^2 T_{,\alpha\sigma} T_\gamma = U^2 T_{,\alpha\sigma} \underbrace{(g^{\gamma\delta} T_\gamma)}_{=0} = 0$$

elde edilir.

Sonuç olarak, sıfır bağlantısının ayar dönüşümü

$${}^0\tilde{\Gamma}_{\alpha\sigma}{}^\delta = {}^0\Gamma_{\alpha\sigma}{}^\delta - T_{,\alpha\sigma}U_a X^{a\delta} - h_{\sigma\alpha}a_a X^{a\delta}$$

biçiminde elde edilir. Buna göre, ${}^0\Gamma_{\alpha\sigma}{}^\delta$ ayar dönüşümleri altında değişmez değildir; dönüşüm sonucunda sağ tarafta iki ek terim ortaya çıkmaktadır.