ANKARA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DOKTORA TEZİ

ÇOK DEĞİŞKENLİ ORTOGONAL POLİNOMLARIN ÖZELLİKLERİNDE BAZI GENİŞLETMELER

Rabia AKTAŞ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ANKARA
2012

TEZ ONAYI

Rabia AKTAŞ tarafından hazırlanan " **ÇOK DEĞİŞKENLİ ORTOGONAL POLİNOMLARIN ÖZELLİKLERİNDE BAZI GENİŞLETMELER** " adlı tez çalışması 11.04.2012 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından **oy birliği / oy çokluğu** ile Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda **DOKTORA TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Danışman: *Prof.Dr. Abdullah ALTIN*

Jüri Üyeleri:

Başkan: *Prof.Dr. Abdullah ALTIN*
Ankara Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü

Üye: *Doç.Dr. Ogün DOĞRU*
Gazi Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü

Üye: *Doç.Dr. Nuri ÖZALP*
Ankara Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü

Üye: *Doç.Dr. Fatma TAŞDELEN YEŞİLDAL*
Ankara Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü

Üye: *Doç.Dr. Esra ERKUŞ DUMAN*
Gazi Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü

Yukarıdaki sonucu onaylarım

Prof.Dr. Özer KOLSARICI
Enstitü Müdürü

ÖZET

Doktora Tezi

ÇOK DEĞİŞKENLİ ORTOGONAL POLİNOMLARIN ÖZELLİKLERİNDE BAZI GENİŞLETMELER

Rabia AKTAŞ

Ankara Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof.Dr. Abdullah ALTIN

Bu tez sekiz bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölüm giriş kısmına ayrılmıştır.

İkinci bölümde, diğer bölümlerde kullanılacak olan bazı tanımlar ve lemmalar verilmektedir.

Üçüncü bölümde, bir değişkenli ortogonal polinomlar ve onların bazı özellikleri tanıtılmaktadır.

Dördüncü bölümde, bir bölgede ortogonal olan iki değişkenli polinomların temel özellikleri incelenip, iki değişkenli polinom çözümlere sahip kabul edilebilir kısmi türevli denklemlerin genel formu verilmektedir. Ayrıca, iki değişkenli ortogonal polinomların çeşitli aileleri üzerinde durulmaktadır.

Beşinci bölümde, çok değişkenli ortogonal polinomlar tanıtılmaktadır. Çok değişkenli polinom çözümlere sahip kabul edilebilir kısmi türevli denklemlerin genel formu verilmekte ve böylesi denklemlerin bazı ortogonal polinom çözümleri ele alınmaktadır.

Altıncı bölümde, çok değişkenli Lagrange polinomları ile Jacobi polinomları arasındaki bir ilişki verilmektedir.

Tezin yedi ve sekizinci bölümleri orjinal bulguları içermektedir. Yedinci bölümde, iki değişkenli ortogonal polinomların yeni bir sınıfı tanımlanmış ve bu polinomlar için çeşitli rekürans bağıntıları ve integral gösterimleri elde edilmiştir. Son bölüm olan sekizinci bölümde ise çok değişkenli Hermite ve Gegenbauer polinomları için bazı yeni sonuçlar verilmektedir.

Nisan 2012 , 95 sayfa

Anahtar Kelimeler: Gamma fonksiyonu, pochhammer sembolü, rekürans bağıntısı, integral gösterim, doğurucu fonksiyon, multilineer ve multilateral doğurucu fonksiyon, Hermite polinomları, Gegenbauer polinomları.

ABSTRACT

Ph.D. Thesis

SOME EXTENSIONS IN THE PROPERTIES OF ORTHOGONAL POLYNOMIALS WITH SEVERAL VARIABLES

Rabia AKTAŞ

Ankara University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Prof.Dr. Abdullah ALTIN

This thesis consists of eight chapters.

The first chapter is devoted to the introduction.

In the second chapter, some definitions and lemmas that will be needed for later use are given.

In the third chapter, orthogonal polynomials with one variable and some properties are discussed.

In the fourth chapter, the general properties of orthogonal polynomials in two variables over a domain are examined and then, the general form of the admissible differential equations of second order which have polynomial solutions in two variables are given. Also, several families of orthogonal polynomials in two variables are presented.

In the fifth chapter, orthogonal polynomials in several variables are presented. Admissible partial differential equations of second order in general form which have polynomial solutions of several variables are given and some of the orthogonal polynomials satisfying such differential equations are examined.

In the sixth chapter, a relationship between Lagrange polynomials in several variables and Jacobi polynomials is given.

The seventh and eighth chapters of this thesis include the original results. In the seventh chapter, a new class of orthogonal polynomials in two variables is introduced and various recurrence relations and integral representations for these polynomials are obtained. In the eighth chapter which is the last chapter, some new results for the multivariable Hermite and Gegenbauer polynomials are given.

April 2012 , 95 pages

Key Words: Gamma function, pochhammer symbol, recurrence relation, integral representation, generating function, multilinear and multilateral generating function, Hermite polynomials, Gegenbauer polynomials.

TEŞEKKÜR

Bana araştırma olanağı sağlayan ve çalışmalarımın her aşamasında yakın ilgi ve önerileri ile beni yönlendiren Danışman Hocam Sayın Prof.Dr. Abdullah ALTIN (Ankara Üniversitesi Matematik Anabilim Dalı)'a ve değerli Hocalarım Doç.Dr. Fatma TAŞDELEN YEŞİLDAL (Ankara Üniversitesi Matematik Anabilim Dalı) ile Doç.Dr. Esra ERKUŞ DUMAN (Gazi Üniversitesi Matematik Anabilim Dalı)'a en derin saygılarımı ve teşekkürlerimi sunmayı bir borç bilirim.

Doktora yaptığım süre boyunca verdiği burs ile beni destekleyen TÜBİTAK'a teşekkürlerimi ve ayrıca, her konuda benden maddi ve manevi desteklerini esirgemeyen aileme de saygı ve sevgilerimi sunarım.

Rabia AKTAŞ
Ankara, Nisan 2012

İÇİNDEKİLER

SİMGELER DİZİNİ

$(\alpha)_n$	Pochhammer sembolü
$\Gamma(x)$	Gamma fonksiyonu
F_1	Birinci Çeşit Appell Hipergeometrik fonksiyonu
ϕ_2	Humbert Konfluent Hipergeometrik fonksiyonu
$P_n(x)$	Legendre polinomu
$C_n^{\nu}(x)$	Gegenbauer polinomu
$H_n(x)$	Hermite polinomu
$L_n^{(\alpha)}(x)$	Laguerre polinomu
$P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$	Jacobi polinomu
$F_n^{(\alpha,\beta)}(a,b,c;x)$	Genişletilmiş Jacobi polinomu
$C_n^{(\lambda,\mu)}(x)$	Genelleştirilmiş Gegenbauer polinomu
$F_{\mathbf{n}}^{(\alpha_1,...,\alpha_r;\beta_1,...,\beta_r)}$	Çok değişkenli Genişletilmiş Jacobi polinomu
$H_{\mathbf{n}}(x_1,...,x_r)$	Çok değişkenli Hermite polinomu
$P_{\mathbf{n}}(x_1,...,x_r)$	Çok değişkenli Legendre polinomu
$C_{\mathbf{n}}^{(\nu_1,...,\nu_r)}(x_1,...,x_r)$	Çok değişkenli Gegenbauer polinomu
$\mathrm{g}_n^{(\alpha_1,...,\alpha_r)}(x_1,...,x_r)$	Çok değişkenli Lagrange polinomu
$h_n^{(\alpha_1,...,\alpha_r)}(x_1,...,x_r)$	Çok değişkenli Lagrange-Hermite polinomu

1. GİRİŞ

Ortogonal polinomlar teorisi üzerinde yapılan çalışmalar ve bunların uygulamaları son yıllarda oldukça gelişmiştir. Bu polinomların matematiksel istatistik, kuantum mekaniği ve matematiksel fiziğin uygulamalarında önemli bir yeri vardır. Uygun koşullar altında ortogonal polinomların farklı tip özellikleri halen araştırılmaktadır. Bir değişkenli klasik ortogonal polinomların ilk örnekleri A.M. Legendre, P.S. Laplace, J.L. Lagrange ve N.H. Abel tarafından ele alınmıştır. Daha sonraları, P.L. Chebychev klasik ortogonal polinomların bazı önemli özel durumlarını araştırmış ve ortogonal polinomların genel teorisini geliştirmiştir. Bir değişkenli ortogonal polinomlar teorisi üzerinde yapılan çalışmalar ve elde edilen önemli sonuçlar C. Jacobi, C. Hermite, E. Laguerre ve T. Stieltjes tarafından verilmiştir. Ortogonal polinomlar teorisi üzerinde klasik sonuçlar Szegö (1939) tarafından ele alınmıştır.

Tek değişkenli ortogonal polinomlar üzerinde son yıllardaki çalışmaların yoğun artışı; biortogonal, q-ortogonal, katlı ortogonal, discrete ortogonal, matris ortogonal ve Sobolev ortogonal polinomların da tanımlanarak, bu konulardaki alan çalışmalarının genişletilmesine ve buna paralel olarak da bu konulara olan ilginin artmasına neden olmuştur. Çok değişkenli ortogonal polinomlar ise bu alanlardaki çalışmaların oldukça yeni ve önemli bir boyutunu oluşturmaktadır. Bir değişkenli ortogonal polinomların ışığı altında, çok değişkenli ortogonal polinomlar teorisi üzerinde de önemli çalışmalar yapılmıştır ve halen yapılmaya devam edilmektedir. İki değişkenli Appell polinomlarının özellikleri Appell ve Kampè de Fèriet (1926) tarafından detaylı bir şekilde incelenmiştir. Jackson (1938) bir bölgede keyfi bir ağırlık fonksiyonuna göre ortogonal olan iki değişkenli ortogonal polinomların en basit özelliklerini ele almıştır. Daha sonra, Krall ve Sheffer (1967), Jackson'ın sonuçlarını genelleştirmiş ve özfonksiyonları bir bölgede ortogonal polinomlar olan ikinci basamaktan bazı lineer kısmi diferensiyel operatörleri incelemiştir. Engelis (1974) de benzer sonuçlar bulmuş ve iki değişkenli bazı ortogonal polinom sınıfları için Rodrigues formülünü elde etmiştir. İki değişkenli ortogonal polinomlar teorisi üzerinde klasik sonuçlar Suetin (1988) tarafından ele alınmıştır. Son yıllarda çok değişkenli ortogonal polinomlar teorisi üzerinde önemli çalışmalar verilmiştir (Dunkl ve Xu 2001, Xu, 2006, 2008, Pinar ve Xu 2009).

Bu tezde, ilk olarak bir değişkenli ortogonal polinomlar ve bu polinomların bazı özellikleri ele alınmıştır. Daha sonra bir bölgede ortogonal olan polinomların genel özellikleri üzerinde durulmuş ve iki değişkenli ortogonal polinomların çeşitli örnekleri incelenmiştir (Koornwinder 1975, Suetin 1988). Ayrıca, çok değişkenli polinom çözümlere sahip kabul edilebilir diferensiyel denklemlerin genel formu verilip böylesi denklemlerin bazı çok değişkenli ortogonal polinom çözümleri ele alınmıştır (Lyskova 1991, Lee vd. 2004). Tezde orjinal olarak iki değişkenli ortogonal polinomların bir sınıfı tanımlanmış ve bu polinomlar için çeşitli rekürans bağıntıları ve integral gösterimleri elde edilmiştir. Ayrıca çok değişkenli Hermite ve Gegenbauer polinomları için rekürans bağıntıları, doğurucu fonksiyonlar ve integral gösterimler elde edilmiş ve bu polinomlar için multilineer ve multilateral doğurucu fonksiyonlar üzerinde durulmuştur. Dahası, bu polinomlar ile başka diğer polinomlar arasında çeşitli limit bağıntıları verilmiştir (Altın vd. 2009, Aktaş vd. 2011).

2. TEMEL KAVRAMLAR VE ÖN BİLGİLER

Tanım 2.1 $\Gamma(x)$ *ile gösterilen Gamma fonksiyonu,*

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t}\, dt \quad , \quad x > 0 \tag{2.1}$$

genelleştirilmiş integrali yardımıyla tanımlanır.

$$\begin{aligned} \Gamma(x+1) &= \int_0^\infty t^x e^{-t}\, dt = \lim_{b\to\infty} \int_0^b t^x e^{-t}\, dt \\ &= \underbrace{\lim_{b\to\infty} \left(-t^x e^{-t}\right)\Big|_0^b}_{0} + x \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t}\, dt = x\Gamma(x) \end{aligned}$$

olduğundan, Γ *fonksiyonu*

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x) \tag{2.2}$$

eşitliğini tüm $x > 0$ *değerleri için gerçekler.*

Uyarı 2.1 *Gamma fonksiyonunun tanımından* $a > 0$ *ve* $\nu > 0$ *için*

$$a^{-\nu} = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_0^\infty e^{-at} t^{\nu-1} dt \tag{2.3}$$

sağlanır.

Tanım 2.2 α *reel ya da kompleks bir sayı,* n *sıfır ya da pozitif bir tamsayı olmak üzere* $(\alpha)_n$ *ifadesi*

$$\begin{aligned} (\alpha)_n &= \alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\cdots(\alpha+n-1) \ , \quad n \geq 1 \\ (\alpha)_0 &= 1 \ , \quad \alpha \neq 0 \end{aligned} \tag{2.4}$$

olarak tanımlanır. Bu ifade "Pochhammer sembolü" olarak bilinir.

Lemma 2.1 *Pochhammer sembolü aşağıdaki özelliklere sahiptir.*

$$(\alpha)_n = \frac{\Gamma(\alpha+n)}{\Gamma(\alpha)} \tag{2.5}$$

$$(\alpha)_{n+1} = (\alpha+n)(\alpha)_n \tag{2.6}$$

İspat. (2.2) eşitliği kullanılarak $\Gamma(\alpha+n)$ ifadesi

$$\begin{aligned}
\Gamma(\alpha+n) &= (\alpha+n-1)\Gamma(\alpha+n-1) \\
&= (\alpha+n-1)(\alpha+n-2)\Gamma(\alpha+n-2) \\
&\ \ \vdots \\
&= (\alpha+n-1)(\alpha+n-2)\ldots(\alpha+1)\alpha\Gamma(\alpha) \\
&= (\alpha)_n\Gamma(\alpha)
\end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir. Eşitliğin her iki tarafı $\Gamma(\alpha)$ ile bölünürse (2.5) ifadesi elde edilir. (2.6) eşitliği ise

$$(\alpha)_{n+1} = \frac{\Gamma(\alpha+n+1)}{\Gamma(\alpha)} = \frac{(\alpha+n)\Gamma(\alpha+n)}{\Gamma(\alpha)} = (\alpha+n)(\alpha)_n$$

den görülmektedir. Özel olarak (2.5) de $n=0$ alınırsa $(\alpha)_0 = 1$ dir. ■

Lemma 2.2

$$(1-x)^{-\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_n}{n!} x^n \quad , \quad |x|<1 \tag{2.7}$$

dir.

İspat. (2.7) ifadesini ispat etmek için $f(x) = (1-x)^{-\alpha}$ fonksiyonunu $x=0$ noktası komşuluğunda Taylor serisine (Maclaurin serisi) açmak yeterlidir. $\alpha \in \mathbb{Z}^-$ olması halinde (2.7) ifadesi sonlu binom açılımıdır. ■

Lemma 2.3 *$A(k,n)$ ve $B(k,n)$, k ve n ye bağlı diziler olsunlar. $p = 1,2,...$ olmak üzere*

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} A(k,n) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{[n/p]} A(k,n-pk) \tag{2.8}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{[n/p]} B(k,n) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} B(k,n+pk) \tag{2.9}$$

eşitlikleri sağlanır (Srivastava ve Manocha 1984).

İspat. (2.8) eşitliğinin gerçeklendiğini göstermek için,

$$S_p(t) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} A(k,n)\, t^{n+pk} \quad , \quad p = 1,2,3,...$$

serisini ele alalım. Düzlemde (k,n) doğal sayı çiftlerinin oluşturduğu bir nokta cümlesi

$$D=\{(k,n):\ 0\leq k<\infty\quad,\quad 0\leq n<\infty\}$$

şeklinde tanımlansın. Burada yeni indisler

$$k=j \text{ ve } n=N-pj \tag{2.10}$$

olarak alınırsa $n+pk=N$ sağlanır. $n\geq 0$ ve $k\geq 0$ olduğundan, (2.10) dan kolaylıkla görülür ki

$$N-pj\geq 0 \text{ ve } j\geq 0$$

dır ve buradan

$$0\leq pj\leq N \text{ ve } N\geq 0$$

sağlanır. $0\leq j\leq N/p$ ve j bir tamsayı olduğundan D cümlesi

$$D^{*}=\{(j,N):\ 0\leq j\leq [N/p]\quad,\quad 0\leq N<\infty\quad,\quad p\geq 1\}$$

cümlesine dönüşür. Buna göre

$$S_p(t)=\sum_{N=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{[N/p]}A(j,N-pj)\,t^N$$

yazılabilir. Burada $t=1$ alınırsa ve N,j indisleri yerine n,k indisleri konulursa ispat tamamlanmış olur. Benzer şekilde (2.9) eşitliğinin sağlandığı da kolaylıkla gösterilebilir. ■

Lemma 2.4 $[-a,a]$ *aralığında integrallenebilen herhangi bir f fonksiyonu aşağıdaki bağıntıları gerçekler.*

(i) $$\int_{-a}^{a}f(x)\,dx=2\int_{0}^{a}f(x)\,dx \quad,\quad f \text{ çift fonksiyon ise}$$

(ii) $$\int_{-a}^{a}f(x)\,dx=0 \quad,\quad f \text{ tek fonksiyon ise}$$

3. BİR DEĞİŞKENLİ ORTOGONAL POLİNOMLAR

Tanım 3.1 *$n \in \mathbb{N}_0 := \{0, 1, 2, ...\}$ ve $a_0, a_1, ..., a_n$ ler de $a_n \neq 0$ olmak üzere, sabit sayılar olsun.*

$$p_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

şeklinde tanımlanan $p_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonuna bir "polinom *(çok terimli)" denir. Buradaki n sayısına polinomun derecesi, $a_0, a_1, ..., a_n$ sayılarına da polinomun katsayıları adı verilir. Eğer $a_n = 1$ ise $p_n(x)$ polinomuna* "monik polinom" *denir. x değişkeninin ve katsayıların reel ya da kompleks olmasına göre $p_n(x)$ polinomu reel polinom ya da kompleks polinom olarak adlandırılır.*

Tanım 3.2 *$I \subset \mathbb{R}$ olmak üzere $\omega(x)$, I da tanımlı pozitif bir fonksiyon olsun. $m, n \in \mathbb{N}_0$ ve $m \neq n$ olmak üzere,*

$$(\phi_m, \phi_n) = \int_I \phi_m(x)\, \phi_n(x)\, \omega(x)\, dx = 0 \tag{3.1}$$

sağlanıyorsa $\{\phi_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ polinom sistemine I aralığında $\omega(x)$ ağırlık fonksiyonuna göre ortogonaldir denir.

Ortogonalliğin bir başka tanımı da aşağıdaki teoremle verilebilir.

Teorem 3.1 *$I \subset \mathbb{R}$ aralığında $\{\phi_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ polinom sisteminin $\omega(x)$ ağırlık fonksiyonuna göre ortogonal olması için gerek ve yeter koşul,*

$$\int_I \phi_n(x)\, \omega(x)\, x^k\, dx = 0 \quad ; \quad k = 0, 1, ..., n-1 \tag{3.2}$$

ifadesinin gerçeklenmesidir.

İspat. ($\Rightarrow$) $\phi_n(x)$ ve $\phi_m(x)$ polinomları I aralığında $\omega(x)$ ağırlık fonsiyonuna göre ortogonal iseler

$$\int_I \phi_n(x)\, \phi_m(x)\, \omega(x)\, dx = 0 \quad ; \quad m \neq n$$

gerçeklenir. x in k yıncı kuvveti

$$x^k = a_0 \phi_0(x) + a_1 \phi_1(x) + ... + a_k \phi_k(x) = \sum_{m=0}^{k} a_m \phi_m(x) \tag{3.3}$$

eşitliği ile $\phi_m(x)$ lerin sonlu bir serisi olarak yazılabilir. Buradan (3.3) ün (3.2) de yerine yazılmasıyla $0 \leq m \leq k < n$ için

$$\begin{aligned} \int_I \phi_n(x)\,\omega(x)\,x^k\,dx &= \int_I \phi_n(x)\,\omega(x)\left[\sum_{m=0}^{k} a_m\phi_m(x)\right]dx \\ &= \sum_{m=0}^{k} a_m \int_I \phi_n(x)\,\phi_m(x)\;\omega(x)\;dx \end{aligned}$$

elde edilir. Burada $0 \leq m < n$ olmak üzere $\phi_n(x)$ ve $\phi_m(x)$ lerin (3.1) deki ortogonallik tanımı kullanılırsa

$$\int_I \phi_n(x)\,\omega(x)\,x^k\,dx = 0 \quad , \qquad k = 0, 1, ..., n-1$$

gerçeklenir.

($\Leftarrow$) İspatın ikinci kısmı için $0 \leq m < n$ alalım. $\phi_m(x)$, $m-$yinci dereceden bir polinom olduğundan

$$\phi_m(x) = \sum_{k=0}^{m} a_k x^k \tag{3.4}$$

formunda yazılır. (3.1) ortogonallik bağıntısında (3.4) eşitliği kullanıldıktan sonra (3.2) gözönünde bulundurulursa

$$\begin{aligned} \int_I \phi_n(x)\,\phi_m(x)\;\omega(x)\,dx &= \int_I \phi_n(x)\left[\sum_{k=0}^{m} a_k x^k\right]\omega(x)\,dx \\ &= \sum_{k=0}^{m} a_k \int_I \phi_n(x)x^k\omega(x)\,dx = 0 \end{aligned}$$

elde edilir ki bu da ispatı tamamlar. ■

Şimdi de bir değişkenli ortogonal polinomların bazı özelliklerini hatırlayalım.

3.1 Jacobi Polinomları

$$\begin{aligned} P_n^{(\alpha,\beta)}(x) &= \frac{(-1)^n}{2^n n!}(1-x)^{-\alpha}(1+x)^{-\beta} \\ &\quad \times \frac{d^n}{dx^n}\left\{(1-x)^{n+\alpha}(1+x)^{n+\beta}\right\} \end{aligned} \tag{3.5}$$

Rodrigues formülü ile tanımlanan $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ Jacobi polinomları $(-1,1)$ aralığında $w(x)=(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}$ ağırlık fonksiyonuna göre ortogonaldirler. Yani,

$$\begin{aligned}&\int_{-1}^{1}(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}P_n^{(\alpha,\beta)}(x)\,P_m^{(\alpha,\beta)}(x)\,dx\\ =\;&\frac{2^{\alpha+\beta+1}\Gamma(\alpha+n+1)\,\Gamma(\beta+n+1)}{n!\,(\alpha+\beta+2n+1)\,\Gamma(\alpha+\beta+n+1)}\delta_{nm}\\ &(\min\{\alpha,\beta\}>-1;\quad m,n\in\mathbb{N}_0)\end{aligned}\tag{3.6}$$

ortogonallik bağıntısını gerçeklerler. Burada, δ_{nm} Kronecker deltası

$$\delta_{nm}=\begin{cases}0\;;& n\neq m\\ 1\;;& n=m\end{cases}$$

ile tanımlıdır. (3.5) Rodrigues formülünden açık olarak

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(x)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n+\alpha}{k}\binom{n+\beta}{n-k}\left(\frac{x+1}{2}\right)^{k}\left(\frac{x-1}{2}\right)^{n-k}\qquad;\quad n=0,1,...\tag{3.7}$$

formunda yazılabilen Jacobi polinomları, ikinci basamaktan

$$(1-x^2)y''+(\beta-\alpha-(\alpha+\beta+2)x)y'+n(n+\alpha+\beta+1)y=0\tag{3.8}$$

diferensiyel denkleminin polinom çözümleri olup

$$\begin{aligned}&2n(\alpha+\beta+n)(\alpha+\beta+2n-2)\,P_n^{(\alpha,\beta)}(x)\\ =\;&\left[\alpha^2-\beta^2+x(\alpha+\beta+2n)(\alpha+\beta+2n-2)\right](\alpha+\beta+2n-1)\,P_{n-1}^{(\alpha,\beta)}(x)\\ &-2(\alpha+n-1)(\beta+n-1)(\alpha+\beta+2n)\,P_{n-2}^{(\alpha,\beta)}(x)\end{aligned}\tag{3.9}$$

üç terimli rekürans bağıntısını sağlarlar (Szegö 1939, Rainville 1960). Ayrıca bu polinomlar

$$(\alpha+\beta+2n)\,P_n^{(\alpha,\beta-1)}(x)=(\alpha+\beta+n)\,P_n^{(\alpha,\beta)}(x)+(\alpha+n)\,P_{n-1}^{(\alpha,\beta)}(x)\tag{3.10}$$

ve

$$\begin{aligned}&\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta+2n+2)(x+1)\,P_n^{(\alpha,\beta+1)}(x)\\ &\qquad=(n+1)\,P_{n+1}^{(\alpha,\beta)}(x)+(n+\beta+1)\,P_n^{(\alpha,\beta)}(x)\end{aligned}\tag{3.11}$$

rekürans bağıntılarını da gerçeklerler (Rainville 1960).

3.2 Genişletilmiş Jacobi Polinomları

Klasik ortogonal polinomların bir genişlemesi olan $F_n^{(\alpha,\beta)}(x;a,b,c)$ genişletilmiş Jacobi polinomları

$$\begin{aligned} F_n^{(\alpha,\beta)}(x;a,b,c) &= \frac{(-c)^n}{n!}(x-a)^{-\alpha}(b-x)^{-\beta} \\ &\times \frac{d^n}{dx^n}\left\{(x-a)^{n+\alpha}(b-x)^{n+\beta}\right\} \quad , \quad (c>0) \end{aligned} \tag{3.12}$$

Rodrigues formülü ile tanımlanır (Szegö 1939, Fujiwara 1966). (3.5) ve (3.12) Rodrigues formülleri kıyaslanırsa, bu polinomlar ile Jacobi polinomları arasında

$$F_n^{(\alpha,\beta)}(x;a,b,c) = \{c(a-b)\}^n P_n^{(\alpha,\beta)}\left(\frac{2(x-a)}{a-b}+1\right) \tag{3.13}$$

eşitliği gerçeklenir (Szegö 1939, Srivastava ve Manocha 1984). (3.13) den görülür ki $a=-b=-1$ ve $c=\frac{1}{2}$ özel durumu $P_n^{(\beta,\alpha)}(x)$ Jacobi polinomlarını verir. (3.8) ve (3.13) den görülür ki $F_n^{(\alpha,\beta)}(x;a,b,c)$ genişletilmiş Jacobi polinomları ikinci basamaktan

$$\begin{aligned} (x-a)(b-x)y'' + \{a(\beta+1)+b(\alpha+1)-(\alpha+\beta+2)x\}y' \\ = -n(\alpha+\beta+n+1)y \end{aligned}$$

denklemini gerçeklerler. Bu polinomlar (a,b) aralığında $\omega(x;a,b)=(x-a)^{\alpha}(b-x)^{\beta}$ ağırlık fonksiyonuna göre ortogonaldirler. Yani,

$$\begin{aligned} &\int_a^b (x-a)^{\alpha}(b-x)^{\beta} F_n^{(\alpha,\beta)}(x;a,b,c)\,F_m^{(\alpha,\beta)}(x;a,b,c)\,dx \\ = &\frac{c^{2n}(-1)^{\alpha+\beta+1}(a-b)^{2n+\alpha+\beta+1}\,\Gamma(\alpha+n+1)\,\Gamma(\beta+n+1)}{n!\,(\alpha+\beta+2n+1)\,\Gamma(\alpha+\beta+n+1)}\delta_{nm} \\ &(\min\{\alpha,\beta\}>-1;\quad m,n\in\mathbb{N}_0) \end{aligned}$$

bağıntısını gerçeklerler.

3.3 Gegenbauer Polinomları

$C_n^{\nu}(x)$ Gegenbauer polinomları

$$\left(1-2xt+t^2\right)^{-\nu} = \sum_{n=0}^{\infty} C_n^{\nu}(x)\,t^n \tag{3.14}$$

doğurucu fonksiyonu ile tanımlanır. Bu polinomlar için bir diğer doğurucu fonksiyon

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda)_n}{(\mu)_n} C_n^{\nu}(x)\, t^n = F_1\left[\lambda, \nu, \nu; \mu; \left(x+\sqrt{x^2-1}\right)t, \left(x-\sqrt{x^2-1}\right)t\right] \tag{3.15}$$

formunda verilir (*Srivastava ve Manocha 1984*). Burada λ, $\mu \in \mathbb{R}$ ve F_1 Appell hipergeometrik fonksiyonu

$$F_1\left[\alpha, \beta, \beta'; \gamma; x, y\right] = \sum_{r,s=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_{r+s}(\beta)_r\left(\beta'\right)_s}{(\gamma)_{r+s}} \frac{x^r}{r!}\frac{y^s}{s!}, \quad \max\{|x|, |y|\} < 1$$

ile tanımlanır (Appell ve Kampé de Fériet 1926). Gegenbauer polinomları ile Jacobi polinomları arasında

$$C_n^{\nu}(x) = \frac{(2\nu)_n P_n^{\left(\nu-\frac{1}{2}, \nu-\frac{1}{2}\right)}(x)}{\left(\nu+\frac{1}{2}\right)_n}$$

formunda bir bağıntı gerçeklenir. $\nu = \frac{1}{2}$ özel durumu ise

$$\left(1-2xt+t^2\right)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)\, t^n$$

doğurucu fonksiyonu ile tanımlanan $P_n(x)$ Legendre polinomlarını verir (Rainville 1960).

3.4 Genelleştirilmiş Gegenbauer Polinomları

$P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ Jacobi polinomları yardımıyla tanımlanan $C_n^{(\lambda,\mu)}(x)$ genelleştirilmiş Gegenbauer polinomları

$$C_{2n}^{(\lambda,\mu)}(x) = \frac{(\lambda+\mu)_n}{\left(\mu+\frac{1}{2}\right)_n} P_n^{\left(\lambda-\frac{1}{2}, \mu-\frac{1}{2}\right)}\left(2x^2-1\right), \tag{3.16}$$

$$C_{2n+1}^{(\lambda,\mu)}(x) = \frac{(\lambda+\mu)_{n+1}}{\left(\mu+\frac{1}{2}\right)_{n+1}} x P_n^{\left(\lambda-\frac{1}{2}, \mu+\frac{1}{2}\right)}\left(2x^2-1\right) \tag{3.17}$$

eşitlikleri ile tanımlanır.

Teorem 3.2 $\lambda > -\frac{1}{2}$, $\mu \geq 0$, $n \in \mathbb{N}_0$ *olmak üzere,* $C_n^{(\lambda,\mu)}(x)$ *polinomları* $(-1, 1)$ *aralığında* $w(x) = |x|^{2\mu}\left(1-x^2\right)^{\lambda-\frac{1}{2}}$ *ağırlık fonksiyonuna göre ortogonaldirler. Yani,*

$$\int_{-1}^{1} |x|^{2\mu}\left(1-x^2\right)^{\lambda-\frac{1}{2}} C_{2n}^{(\lambda,\mu)}(x)\, C_{2m}^{(\lambda,\mu)}(x)\, dx$$

$$= \frac{\left[(\lambda+\mu)_n\right]^2 \Gamma\left(\lambda+n+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\mu+n+\frac{1}{2}\right)}{\left[\left(\mu+\frac{1}{2}\right)_n\right]^2 n!\,(\lambda+\mu+2n)\,\Gamma(\lambda+\mu+n)}\delta_{nm}, \tag{3.18}$$

$$\int_{-1}^{1} |x|^{2\mu} (1-x^2)^{\lambda-\frac{1}{2}} C_{2n+1}^{(\lambda,\mu)}(x)\, C_{2m+1}^{(\lambda,\mu)}(x)\, dx$$

$$= \frac{\left[(\lambda+\mu)_{n+1}\right]^2 \Gamma\left(\lambda+n+\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\mu+n+\frac{3}{2}\right)}{\left[\left(\mu+\frac{1}{2}\right)_{n+1}\right]^2 n!\,(\lambda+\mu+2n+1)\,\Gamma(\lambda+\mu+n+1)} \delta_{nm} \tag{3.19}$$

ve

$$\int_{-1}^{1} |x|^{2\mu} \left(1-x^2\right)^{\lambda-\frac{1}{2}} C_{2n+1}^{(\lambda,\mu)}(x)\, C_{2m}^{(\lambda,\mu)}(x)\, dx = 0 \tag{3.20}$$

bağıntıları gerçeklenir.

İspat. (3.18) eşitliğinin sol yanında (3.16) ifadesi kullanılıp, Lemma 2.4 (i) den yararlanılırsa

$$\begin{aligned}
&\int_{-1}^{1} |x|^{2\mu} \left(1-x^2\right)^{\lambda-\frac{1}{2}} C_{2n}^{(\lambda,\mu)}(x)\, C_{2m}^{(\lambda,\mu)}(x)\, dx \\
= \;& \frac{(\lambda+\mu)_n (\lambda+\mu)_m}{\left(\mu+\frac{1}{2}\right)_n \left(\mu+\frac{1}{2}\right)_m} \int_{-1}^{1} |x|^{2\mu} \left(1-x^2\right)^{\lambda-\frac{1}{2}} P_n^{\left(\lambda-\frac{1}{2},\mu-\frac{1}{2}\right)} \left(2x^2-1\right) \\
& \times P_m^{\left(\lambda-\frac{1}{2},\mu-\frac{1}{2}\right)} \left(2x^2-1\right) dx \\
= \;& \frac{2\,(\lambda+\mu)_n (\lambda+\mu)_m}{\left(\mu+\frac{1}{2}\right)_n \left(\mu+\frac{1}{2}\right)_m} \int_{0}^{1} x^{2\mu} \left(1-x^2\right)^{\lambda-\frac{1}{2}} P_n^{\left(\lambda-\frac{1}{2},\mu-\frac{1}{2}\right)} \left(2x^2-1\right) \\
& \times P_m^{\left(\lambda-\frac{1}{2},\mu-\frac{1}{2}\right)} \left(2x^2-1\right) dx
\end{aligned}$$

yazılır. Burada $u = 2x^2 - 1$ değişken değiştirmesi uygulanırsa

$$\begin{aligned}
= \;& \frac{(\lambda+\mu)_n (\lambda+\mu)_m}{2^{\lambda+\mu} \left(\mu+\frac{1}{2}\right)_n \left(\mu+\frac{1}{2}\right)_m} \int_{-1}^{1} (1-u)^{\lambda-\frac{1}{2}} (1+u)^{\mu-\frac{1}{2}} P_n^{\left(\lambda-\frac{1}{2},\mu-\frac{1}{2}\right)}(u) \\
& \times P_m^{\left(\lambda-\frac{1}{2},\mu-\frac{1}{2}\right)}(u)\, du
\end{aligned}$$

elde edilir. (3.6) ile verilen Jacobi polinomlarının ortogonallik bağıntısından $m \neq n$ için

$$\int_{-1}^{1} |x|^{2\mu} \left(1-x^2\right)^{\lambda-\frac{1}{2}} C_{2n}^{(\lambda,\mu)}(x)\, C_{2m}^{(\lambda,\mu)}(x)\, dx = 0$$

sağlanır. $m=n$ durumunda ise

$$\int_{-1}^{1}|x|^{2\mu}(1-x^2)^{\lambda-\frac{1}{2}}\left[C_{2n}^{(\lambda,\mu)}(x)\right]^2dx$$

$$=\frac{[(\lambda+\mu)_n]^2\,\Gamma\left(\lambda+n+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\mu+n+\frac{1}{2}\right)}{\left[\left(\mu+\frac{1}{2}\right)_n\right]^2 n!\,(\lambda+\mu+2n)\,\Gamma(\lambda+\mu+n)}$$

gerçeklenir. (3.19) eşitliğini elde etmek için (3.17) eşitliğini kullanıp benzer işlemleri yapmak yeterlidir. Son olarak (3.20) eşitliğinin sağlandığını gösterelim. (3.20) nin sol yanında (3.16) ve (3.17) eşitlikleri yerine yazılırsa

$$\int_{-1}^{1}|x|^{2\mu}\left(1-x^2\right)^{\lambda-\frac{1}{2}}C_{2n+1}^{(\lambda,\mu)}(x)\,C_{2m}^{(\lambda,\mu)}(x)\,dx$$

$$=\frac{(\lambda+\mu)_m\,(\lambda+\mu)_{n+1}}{\left(\mu+\frac{1}{2}\right)_m\left(\mu+\frac{1}{2}\right)_{n+1}}\int_{-1}^{1}|x|^{2\mu}\left(1-x^2\right)^{\lambda-\frac{1}{2}}xP_n^{\left(\lambda-\frac{1}{2},\mu+\frac{1}{2}\right)}\left(2x^2-1\right)$$
$$\times P_m^{\left(\lambda-\frac{1}{2},\mu-\frac{1}{2}\right)}\left(2x^2-1\right)dx$$

elde edilir. İntegralin içindeki fonksiyon tek fonksiyon olduğundan, Lemma 2.4 (ii) den

$$\int_{-1}^{1}|x|^{2\mu}\left(1-x^2\right)^{\lambda-\frac{1}{2}}C_{2n+1}^{(\lambda,\mu)}(x)\,C_{2m}^{(\lambda,\mu)}(x)\,dx=0$$

gerçeklenir. Bu da ispatı tamamlar. ■

Teorem 3.3 $C_n^{(\lambda,\mu)}(x)$ *genelleştirilmiş Gegenbauer polinomları*

$$C_{2n+1}^{(\lambda,\mu)}(x)=\frac{2(\lambda+\mu+2n)}{2\mu+2n+1}xC_{2n}^{(\lambda,\mu)}(x)-\frac{2\lambda+2n-1}{2\mu+2n+1}C_{2n-1}^{(\lambda,\mu)}(x) \qquad (3.21)$$

ve

$$C_{2n+2}^{(\lambda,\mu)}(x)=\frac{\lambda+\mu+2n+1}{n+1}xC_{2n+1}^{(\lambda,\mu)}(x)-\frac{\lambda+\mu+n}{n+1}C_{2n}^{(\lambda,\mu)}(x) \qquad (3.22)$$

rekürans bağıntılarını sağlarlar (Dunkl ve Xu 2001).

İspat. (3.10) eşitliğinde x yerine $2x^2-1$, α yerine $\lambda-\frac{1}{2}$ ve β yerine $\mu+\frac{1}{2}$ alınırsa

$$
\begin{aligned}
&(\lambda+\mu+2n)\, P_n^{(\lambda-\frac{1}{2},\mu-\frac{1}{2})}(2x^2-1)\\
&=(\lambda+\mu+n)\, P_n^{(\lambda-\frac{1}{2},\mu+\frac{1}{2})}(2x^2-1)+\left(\lambda+n-\frac{1}{2}\right) P_{n-1}^{(\lambda-\frac{1}{2},\mu+\frac{1}{2})}(2x^2-1)
\end{aligned}
$$

sağlanır. Burada (3.16) ve (3.17) eşitlikleri gözönünde tutulur ve de (2.6) eşitliğinden dolayı

$$\left(\mu+\frac{1}{2}\right)_{n+1}=\left(\mu+n+\frac{1}{2}\right)\left(\mu+\frac{1}{2}\right)_n \tag{3.23}$$

ve

$$(\lambda+\mu)_{n+1}=(\lambda+\mu+n)\,(\lambda+\mu)_n \tag{3.24}$$

oldukları dikkate alınırsa

$$2x\,(\lambda+\mu+2n)\, C_{2n}^{(\lambda,\mu)}(x)=(2\mu+2n+1)\, C_{2n+1}^{(\lambda,\mu)}(x)+(2\lambda+2n-1)\, C_{2n-1}^{(\lambda,\mu)}(x)$$

elde edilir. Eşitliğin her iki yanı $(2\mu+2n+1)$ ile bölünürse

$$C_{2n+1}^{(\lambda,\mu)}(x)=\frac{2\,(\lambda+\mu+2n)}{2\mu+2n+1}xC_{2n}^{(\lambda,\mu)}(x)-\frac{2\lambda+2n-1}{2\mu+2n+1}C_{2n-1}^{(\lambda,\mu)}(x)$$

bulunur ki bu da istenilen eşitliktir.

(3.22) bağıntısını elde etmek için (3.11) eşitliğinde x yerine $2x^2-1$, α yerine $\lambda-\frac{1}{2}$ ve β yerine $\mu-\frac{1}{2}$ alınırsa

$$
\begin{aligned}
&(\lambda+\mu+2n+1)\, x^2 P_n^{(\lambda-\frac{1}{2},\mu+\frac{1}{2})}(2x^2-1)\\
&=(n+1)\, P_{n+1}^{(\lambda-\frac{1}{2},\mu-\frac{1}{2})}(2x^2-1)+\left(\mu+n+\frac{1}{2}\right) P_n^{(\lambda-\frac{1}{2},\mu-\frac{1}{2})}(2x^2-1)
\end{aligned}
$$

elde edilir. Burada (3.16) ve (3.17) eşitlikleri gözönünde bulundurulup, (3.23) ve (3.24) den yararlanılırsa

$$\frac{\lambda+\mu+2n+1}{\lambda+\mu+n}xC_{2n+1}^{(\lambda,\mu)}(x)=\frac{n+1}{\lambda+\mu+n}C_{2n+2}^{(\lambda,\mu)}(x)+C_{2n}^{(\lambda,\mu)}(x)$$

olur. Bu eşitliğin her iki yanı $\dfrac{(\lambda+\mu+n)}{n+1}$ ile çarpıldığında

$$C_{2n+2}^{(\lambda,\mu)}(x)=\frac{\lambda+\mu+2n+1}{n+1}xC_{2n+1}^{(\lambda,\mu)}(x)-\frac{\lambda+\mu+n}{n+1}C_{2n}^{(\lambda,\mu)}(x)$$

elde edilir ki bu da ispatı tamamlar. ■

3.5 Hermite Polinomları

$-\infty < x < \infty$ ve $n \in \mathbb{N}_0$ olmak üzere

$$y'' - 2xy' + 2ny = 0 \tag{3.25}$$

denkleminin çözümlerinden biri

$$H_n(x) = \sum_{k=0}^{[n/2]} \frac{(-1)^k \; n!\,(2x)^{n-2k}}{k!\;(n-2k)!} \qquad ; \qquad n = 0, 1, ...$$

ile gösterilen $H_n(x)$ Hermite polinomlarıdır. Hermite polinomları $I = (-\infty, \infty)$ aralığında

$$\omega(x) = e^{-x^2}$$

ağırlık fonksiyonuna göre ortogonal olup

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_n\,(x)\,H_m\,(x)\,dx = 0 \qquad ; \qquad m \neq n$$

$$(\ m, n \in \mathbb{N}_0)$$

bağıntısını gerçeklerler. Öte yandan

$$\|\ H_n\ \|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_n^2\,(x)\,dx = 2^n n!\sqrt{\pi}$$

dir. Hermite polinomları

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)\,t^n}{n!} = \exp\left(2xt - t^2\right) \tag{3.26}$$

doğurucu fonksiyon bağıntısına ve

$$H_n\,(x) = (-1)^n\,e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n}\left(e^{-x^2}\right)$$

Rodrigues formülüne sahiptir. Hermite polinomları için üç terimli rekürans bağıntısı

$$H_{n+1}(x) - 2xH_n(x) + 2nH_{n-1}(x) = 0 \quad ; \quad n = 1, 2, ...$$

şeklindendir (Szegö 1939, Rainville 1960). Ayrıca, Hermite polinomları ile Jacobi polinomları arasında

$$H_n(x) = n!\,\lim_{\nu\to\infty}\left\{\frac{\nu^{-\frac{n}{2}}(2\nu)_n}{\left(\nu+\frac{1}{2}\right)_n} P_n^{\left(\nu-\frac{1}{2},\nu-\frac{1}{2}\right)}\left(x/\sqrt{\nu}\right)\right\} \tag{3.27}$$

formunda bir limit gösterimi vardır. Bunun bir sonucu olarak, Gegenbauer polinomları ile Hermite polinomları arasında da

$$H_n(x) = n! \lim_{\nu \to \infty} \left\{ \nu^{-n/2} C_n^{\nu} \left(x/\sqrt{\nu} \right) \right\} \tag{3.28}$$

eşitliği gerçeklenir (Szegö 1939).

$H_n(x)$ Hermite polinomlarına benzer olarak $He_n(x)$ Hermite polinomları da $I = (-\infty, \infty)$ aralığında

$$\omega(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$$

ağırlık fonksiyonuna göre ortogonaldirler. Yani,

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} He_n(x) He_m(x) \, dx = \sqrt{2\pi} n! \delta_{nm}$$
$$(\ m, n \in \mathbb{N}_0)$$

bağıntısını gerçeklerler. Bu polinomlar

$$He_n(x) = (-1)^n e^{x^2/2} \frac{d^n}{dx^n} \left(e^{-x^2/2} \right)$$

formunda bir Rodrigues formülüne sahip olup, ikinci basamaktan

$$y'' - xy' + ny = 0 \tag{3.29}$$

diferensiyel denklemini sağlarlar.

3.6 Laguerre Polinomları

$$L_n^{(\alpha)}(x) = \frac{x^{-\alpha} e^x}{n!} \frac{d^n}{dx^n} \left(x^{\alpha+n} e^{-x} \right)$$

Rodrigues formülü ile tanımlanan $L_n^{(\alpha)}(x)$ Laguerre polinomları, $(0, \infty)$ aralığında $\omega(x) = x^{\alpha} e^{-x}$ ağırlık fonksiyonuna göre ortogonaldirler. Yani,

$$\int_0^{\infty} x^{\alpha} e^{-x} L_n^{(\alpha)}(x) \, L_m^{(\alpha)}(x) \, dx = \frac{\Gamma(\alpha + n + 1)}{n!} \delta_{nm}$$
$$(\alpha > -1; \quad m, n \in \mathbb{N}_0)$$

ortogonallik bağıntısını gerçeklerler. Bu polinomlar

$$\sum_{n=0}^{\infty} L_n^{(\alpha)}(x)\, t^n = \frac{1}{(1-t)^{\alpha+1}} \exp\left(-\frac{xt}{1-t}\right)$$

doğurucu fonksiyon bağıntısına sahip olup, ikinci basamaktan

$$xy'' + (\alpha + 1 - x)y' + ny = 0 \tag{3.30}$$

diferensiyel denklemini ve

$$nL_n^{(\alpha)}(x) = (2n - 1 + \alpha - x)\, L_{n-1}^{(\alpha)}(x) - (n - 1 + \alpha)\, L_{n-2}^{(\alpha)}(x) \quad ; \quad n = 2, 3, ...$$

üç terimli rekürans bağıntısını sağlarlar (Szegö 1939, Rainville 1960).

4. İKİ DEĞİŞKENLİ ORTOGONAL POLİNOMLAR

4.1 Bir Bölgede Ortogonal İki Değişkenli Polinomların Genel Özellikleri

Tanım 4.1 *x ve y bağımsız değişkenlerinin kuvvetlerinin çarpımlarıyla elde edilen monomiallerinin kümesi*

$$\left\{x^{n-k}y^k\right\} \quad , \quad n=0,1,... \quad ; \quad k=0,1,...,n$$

olsun.

$$\{c_{nk}\} \quad , \quad n=0,1,... \quad ; \quad k=0,1,...,n$$

reel sabitler ve $c_{nk} \neq 0$ olmak üzere n-yinci dereceden iki değişkenli cebirsel bir polinom

$$P_{nk}(x,y)=\sum_{m=0}^{n-1}\sum_{s=0}^{m}c_{ms}x^{m-s}y^s+\sum_{s=0}^{k}c_{ns}x^{n-s}y^s \tag{4.1}$$

dir. Burada n indisi, x ve y değişkenlerine göre polinomun toplam derecesini, k indisi de polinomdaki y değişkeninin en yüksek kuvvetini göstermektedir. c_{nk} katsayısına bu polinomun başkatsayısı adı verilir. Kolaylık açısından bu polinom (n,k)-yıncı basamaktan bir polinom olarak adlandırılır. Burada k indisi en fazla n ye eşit olabilir.

Lemma 4.1 *Başkatsayıları sıfırdan farklı olan (n,k)-yıncı basamaktan bir polinom sistemi*

$$\begin{array}{l} P_{00}(x,y) \\ P_{10}(x,y)\ ,\ P_{11}(x,y) \\ P_{20}(x,y)\ ,\ P_{21}(x,y)\,,\ P_{22}(x,y) \\ \cdots \\ P_{n0}(x,y)\ ,\ P_{n1}(x,y)\,,...,\ P_{n,k-1}(x,y)\,,\ P_{nk}(x,y) \end{array} \tag{4.2}$$

olarak verilsin. (n,k)-yıncı basamaktan herhangi bir $Q_{nk}(x,y)$ polinomu, (4.2) polinom sistemi yardımıyla

$$Q_{nk}(x,y)=\sum_{m=0}^{n-1}\sum_{s=0}^{m}a_{ms}P_{ms}(x,y)+\sum_{s=0}^{k}a_{ns}P_{ns}(x,y) \tag{4.3}$$

formunda tek türlü olarak ifade edilebilir.

İspat. (4.1) den $Q_{nk}(x,y)$ polinomu

$$Q_{nk}(x,y)=\sum_{m=0}^{n-1}\sum_{s=0}^{m} b_{ms}x^{m-s}y^{s}+\sum_{s=0}^{k} b_{ns}x^{n-s}y^{s} \tag{4.4}$$

gösterimine sahiptir. (4.2) sistemindeki polinomların tamamı (4.1) formunda yazılır ve (4.3) ile (4.4) deki monomiallerin katsayıları kıyaslanırsa

$$\begin{aligned}
b_{nk} &= a_{nk}c_{nk}^{(n,k)} \\
b_{n,k-1} &= a_{nk}c_{n,k-1}^{(n,k)}+a_{n,k-1}c_{n,k-1}^{(n,k-1)} \\
b_{n,k-2} &= a_{nk}c_{n,k-2}^{(n,k)}+a_{n,k-1}c_{n,k-2}^{(n,k-1)}+a_{n,k-2}c_{n,k-2}^{(n,k-2)} \\
&\cdots \\
b_{00} &= a_{nk}c_{00}^{(n,k)}+a_{n,k-1}c_{00}^{(n,k-1)}+...+a_{00}c_{00}^{(0,0)}
\end{aligned}$$

lineer homogen olmayan bir denklem sistemi elde edilir. Bu sistem $\{a_{ms}\}$ bilinmeyenlerine bağlı $\left\{\frac{n(n+1)}{2}+k+1\right\}$ tane denklem içerir. (4.2) deki her polinomun, başkatsayısı sıfırdan farklı olduğundan, bu denklem sisteminin katsayılar determinantı

$$\Delta=\begin{vmatrix}
c_{nk}^{(n,k)} & 0 & 0 & ... & 0 \\
c_{n,k-1}^{(n,k)} & c_{n,k-1}^{(n,k-1)} & 0 & ... & 0 \\
c_{n,k-2}^{(n,k)} & c_{n,k-2}^{(n,k-1)} & c_{n,k-2}^{(n,k-2)} & ... & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
c_{00}^{(n,k)} & c_{00}^{(n,k-1)} & c_{00}^{(n,k-2)} & ... & c_{00}^{(0,0)}
\end{vmatrix}\neq 0$$

olup, $\{a_{ms}\}$ ler tek türlü olarak belirlenir. Böylece ispat tamamlanır. ■

Tanım 4.2 *xoy- düzleminde basit, kapalı bir Γ eğrisi tarafından sınırlanan sonlu, basit irtibatlı bir bölge G olsun. $h(x,y)$, G de tanımlı negatif olmayan bir fonksiyon olmak üzere*

$$0<\iint_{G} h(x,y)\,dxdy<\infty$$

koşulu gerçeklenirse, bu fonksiyon G bölgesinde bir "ağırlık fonksiyonu" olarak adlandırılır.

Tanım 4.3 *Cebirsel bir polinom sistemi*

$$\begin{aligned}
&F_{00}(x,y)\\
&F_{10}(x,y)\ ,\ F_{11}(x,y)\\
&F_{20}(x,y)\ ,\ F_{21}(x,y)\,,\ F_{22}(x,y)\\
&\cdots\\
&F_{n0}(x,y)\ ,\ F_{n1}(x,y)\,,...,\ F_{n,k-1}(x,y)\,,\ F_{nk}(x,y)
\end{aligned} \tag{4.5}$$

olsun. Bu polinom sistemi aşağıdaki koşulları sağlarsa, $h(x,y)$ ağırlık fonksiyonuna göre G bölgesinde "ortonormal polinom sistemi" olarak adlandırılır.

i. *Her bir $F_{nk}(x,y)$ polinomunun başkatsayısı pozitif olmalıdır,*

ii. *(4.5) polinomları G bölgesinde $h(x,y)$ ağırlık fonksiyonuna göre ortonormallik koşulunu sağlamalıdır. Yani*

$$\begin{aligned}
(F_{nk},F_{ms}) &= \iint\limits_G h(x,y)\,F_{nk}(x,y)\,F_{ms}(x,y)\,dxdy \\
&= \delta_{nm}\delta_{ks}
\end{aligned} \tag{4.6}$$

iç çarpımı gerçeklenmelidir. Burada

$$\delta_{nm}\delta_{ks}=\begin{cases} 0\ ; & (n,k)\neq(m,s) \\ 1\ ; & (n,k)=(m,s) \end{cases}$$

dir.

Teorem 4.1 *Bir G bölgesinde tanımlanan herhangi bir ağırlık fonksiyonu $h(x,y)$ olsun. G bölgesinde $h(x,y)$ ağırlık fonksiyonuna göre ortonormal olan bir tek $\{F_{nk}(x,y)\}$ polinom sistemi vardır (Suetin 1988).*

İspat. İspatı tümevarım yöntemi ile yapalım. Sıfırıncı basamaktan keyfi bir polinom $F_{00}(x,y)=a_{00}>0$ olarak alınırsa

$$\iint\limits_G h(x,y)\,F_{00}^2(x,y)\,dxdy=\iint\limits_G h(x,y)\,a_{00}^2 dxdy=1$$

koşulu sağlanacak şekilde $F_{00}(x,y)=a_{00}$ polinomu tek olarak belirlenir.

Şimdi de

$$F_{00}(x,y)\,,F_{10}(x,y)\,,F_{11}(x,y)\,,\ldots,F_{n0}(x,y)\,,\ldots,F_{n,k-1}(x,y) \tag{4.7}$$

polinom kümesinin ortonormal bir küme oluşturduğunu kabul edelim ve bu küme ile ortonormal olacak şekilde (n,k)-yıncı basamaktan bir $F_{nk}(x,y)$ polinomunun olduğunu gösterelim. Lemma 4.1 den $F_{nk}(x,y)$ polinomu

$$F_{nk}(x,y) = \sum_{m=0}^{n-1}\sum_{s=0}^{m} a_{ms}F_{ms}(x,y) + \sum_{s=0}^{k-1} a_{ns}F_{ns}(x,y) + a_{nk}\,x^{n-k}y^{k} \tag{4.8}$$

formunda yazılabilir. (4.6) dan $(n,k) \neq (m,s)$ için

$$(F_{nk}, F_{ms}) = \left(\sum_{m=0}^{n-1}\sum_{s=0}^{m} a_{ms}F_{ms}(x,y) + \sum_{s=0}^{k-1} a_{ns}F_{ns}(x,y) + a_{nk}\,x^{n-k}y^{k}, F_{ms}\right) = 0$$

sağlanmalıdır. Burada (4.7) polinom kümesinin ortonormal olduğu gözönünde bulundurulursa

$$a_{ms} + a_{nk}\left(x^{n-k}y^{k}, F_{ms}\right) = 0 \tag{4.9}$$

elde edilir. (4.9) daki iç çarpım A_{ms} ile gösterilirse

$$a_{ms} = -a_{nk}A_{ms}$$

olur. Bu değer (4.8) de yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} F_{nk}(x,y) &= a_{nk}\left[x^{n-k}y^{k} - \sum_{m=0}^{n-1}\sum_{s=0}^{m} A_{ms}F_{ms}(x,y) - \sum_{s=0}^{k-1} A_{ns}F_{ns}(x,y)\right] \\ &= a_{nk}\,\Phi_{nk}(x,y) \end{aligned}$$

olarak bulunur. Bu ise (4.7) polinom kümesine ortogonal olan (n,k)-yıncı basamaktan $F_{nk}(x,y)$ polinomunun sabit çarpan farkıyla tek olduğunu gösterir. Diğer yandan (4.6) daki ortonormallik koşulundan

$$\iint_G h(x,y)\,F_{nk}^2(x,y)\,dxdy = 1$$

sağlanmalıdır. Buradan

$$a_{nk}^2 \iint_G h(x,y)\,\Phi_{nk}^2(x,y)\,dxdy = 1$$

olup, $a_{nk} > 0$ koşulu altında bu katsayı tek türlü olarak belirlenir. Böylelikle G bölgesinde $h(x,y)$ ağırlık fonksiyonuna göre ortonormal olan tek bir

$$\{F_{00}(x,y), F_{10}(x,y), F_{11}(x,y), ..., F_{n0}(x,y), ..., F_{n,k-1}(x,y), F_{nk}(x,y)\}$$

polinom sistemi elde edilir. Şimdi de bu teoremden yararlanarak, bir polinomun bir bölgedeki ortogonallik tanımını verelim. ■

Teorem 4.2 *c_{nk} başkatsayısı sıfırdan farklı olan (n,k)-yıncı basamaktan bir polinom $F_{nk}(x,y)$ olsun. $F_{nk}(x,y)$ polinomunun, bir G bölgesinde tanımlı $h(x,y)$ ağırlık fonksiyonuna göre ortogonal olması için gerek ve yeter koşul,*

$$\iint\limits_{G} h(x,y) F_{nk}(x,y) Q_{pq}(x,y)\, dxdy = 0 \quad , \quad (p,q) \prec (n,k) \tag{4.10}$$

ifadesinin gerçeklenmesidir. Burada $(p,q) \prec (n,k)$ gösterimi

$$(p,q) \prec (n,k) \equiv \begin{cases} p = n \quad , \quad q < k \\ p < n \end{cases}$$

dır (Suetin 1988).

İspat. $(\Rightarrow)$ G bölgesinde $h(x,y)$ ağırlık fonksiyonuna göre (n,k)-yıncı basamaktan ortogonal bir polinom $F_{nk}(x,y)$ olsun. Yani,

$$\iint\limits_{G} h(x,y) F_{nk}(x,y) F_{ms}(x,y)\, dxdy = 0 \quad , \quad (n,k) \neq (m,s)$$

sağlansın. Lemma 4.1 den $Q_{pq}(x,y)$ polinomu, $\{F_{ms}(x,y)\}$ polinom ailesi yardımıyla ifade edilebileceğinden

$$Q_{pq}(x,y) = \sum_{m=0}^{p-1} \sum_{s=0}^{m} a_{ms} F_{ms}(x,y) + \sum_{s=0}^{q} a_{ps} F_{ps}(x,y)$$

eşitliği yazılabilir. Bu açılım (4.10) integralinde yerine yazılır ve $\{F_{nk}(x,y)\}$ polinom ailesinin ortogonalliği kullanılırsa

$$\iint_G h(x,y)\, F_{nk}(x,y)\, Q_{pq}(x,y)\, dxdy$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{m=0}^{p-1}\sum_{s=0}^{m} a_{ms} \left\{ \iint_G h(x,y)\, F_{nk}(x,y)\, F_{ms}(x,y)\, dxdy \right\} \\ &\quad + \sum_{s=0}^{q} a_{ps} \left\{ \iint_G h(x,y)\, F_{nk}(x,y)\, F_{ps}(x,y)\, dxdy \right\} \\ &= 0 \end{aligned}$$

gerçeklenir.

($\Leftarrow$) Tersine (n,k)-yıncı basamaktan daha düşük basamaklı herhangi bir $Q_{pq}(x,y)$ polinomu için (4.10) eşitliğinin sağlandığını kabul edelim. Burada $Q_{pq}(x,y)$ polinomu yerine (4.7) ile verilen

$$F_{00}(x,y), F_{10}(x,y), F_{11}(x,y), \ldots, F_{n0}(x,y), \ldots, F_{n,k-1}(x,y)$$

polinomları alınabilir. Teorem 4.1 in ispatı göstermektedir ki, düşük basamaktan (4.7) polinomlarına ortogonal olan (n,k)-yıncı basamaktan $F_{nk}(x,y)$ polinomu sabit çarpan farkıyla tektir. Bu da teoremi ispatlar. ∎

4.2 Temel Ortogonal Polinomlar

Bir değişkenli ortogonal polinomlar gibi iki değişkenli ortogonal polinomlar da ağırlık fonksiyonunun momentleri yardımıyla temsil edilebilir. Bir G bölgesinde herhangi bir $h(x,y)$ ağırlık fonksiyonunun kuvvet momentleri,

$$h_{nk} = \iint_G h(x,y)\, x^{n-k} y^k dxdy \quad ; n = 0,1,\ldots \quad ; \quad k = 0,1,\ldots,n \tag{4.11}$$

formülü ile tanımlanır (Jackson 1936). Bu momentleri,

$$\begin{array}{l} h_{00} \\ h_{10},\ h_{11} \\ h_{20},\ h_{21}, h_{22} \\ \cdots \\ h_{n0},\ h_{n1}, ..., h_{n,n-1}, h_{nn} \\ \cdots \end{array} \tag{4.12}$$

formunda bir tablo ile göstermek daha uygundur. (4.12) kuvvet momentleri yardımıyla aşağıdaki determinantları tanımlamak mümkündür.

$$\Delta_{00} = h_{00}, \Delta_{10} = \begin{vmatrix} h_{00} & h_{10} \\ h_{10} & h_{20} \end{vmatrix}, \Delta_{11} = \begin{vmatrix} h_{00} & h_{10} & h_{11} \\ h_{10} & h_{20} & h_{21} \\ h_{11} & h_{21} & h_{22} \end{vmatrix}, ...,$$

$$\Delta_{nk} = \begin{vmatrix} h_{00} & h_{10} & h_{11} & \cdots & h_{n0} & \cdots & h_{n,k-1} & h_{nk} \\ h_{10} & h_{20} & h_{21} & \cdots & h_{n+1,0} & \cdots & h_{n+1,k-1} & h_{n+1,k} \\ h_{11} & h_{21} & h_{22} & \cdots & h_{n+1,1} & \cdots & h_{n+1,k} & h_{n+1,k+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ h_{n0} & h_{n+1,0} & h_{n+1,1} & \cdots & h_{2n,0} & \cdots & h_{2n,k-1} & h_{2n,k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ h_{n,k-1} & h_{n+1,k-1} & h_{n+1,k} & \cdots & h_{2n,k-1} & \cdots & h_{2n,2(k-1)} & h_{2n,2k-1} \\ h_{nk} & h_{n+1,k} & h_{n+1,k+1} & \cdots & h_{2n,k} & \cdots & h_{2n,2k-1} & h_{2n,2k} \end{vmatrix}. \tag{4.13}$$

Bu determinantlar aşağıdaki şekilde elde edilebilir.

$$\left\{1,\ x,\ y,\ x^2,\ xy,\ y^2, \ldots, x^n, x^{n-1}y, \ldots, x^{n-k}y^k\right\} \tag{4.14}$$

lineer bağımsız fonksiyonlarının bir sistemini ele alalım. (4.11) formülü ile elde edilen momentler, (4.14) sistemindeki fonksiyonların iç çarpımı olarak düşünülebilir. (4.14) sisteminin her fonksiyonu aynı sistemin bir elemanı olan 1 ile çarpılıp $h(x,y)$ ağırlık fonksiyonuna göre G bölgesinde integre edilirse, (4.11) den Δ_{nk} determinantının birinci satırını oluşturan momentler elde edilir. Δ_{nk} determinantının ikinci satırının elde edilebilmesi için (4.14) sisteminin her fonksiyonunun x ile çarpılıp G bölgesinde $h(x,y)$ ağırlığına göre integre edilmesi yeterlidir. Böyle devam edilerek, (4.14) sisteminin her fonksiyonu, aynı sistemin son elemanı olan $x^{n-k}y^k$ ile çarpılıp G bölgesinde integrallenirse Δ_{nk} determinantının son satırı elde edilmiş olur. (4.13) determinantlarının hepsi (4.14) lineer bağımsız fonksiyon sisteminin "Gram Determinantları" olarak adlandırılır.

Lemma 4.2 *Δ_{nk} , $n = 0,1,...$; $k = 0,1,\ldots,n$ Gram determinantların herbiri sıfırdan farklıdır.*

İspat. (4.14) lineer bağımsız fonksiyonlarının sistemi yeniden adlandırılırsa,

$$\{\varphi_1(x,y), \varphi_2(x,y), \ldots, \varphi_N(x,y)\} \quad ; \quad N = \frac{n(n+1)}{2} + k + 1 \tag{4.15}$$

sistemi elde edilir. Bu fonksiyon sistemine ilişkin Δ_{nk} determinantı,

$$\Delta_{nk} = \begin{vmatrix} (\varphi_1,\varphi_1) & (\varphi_1,\varphi_2) & \cdots & (\varphi_1,\varphi_N) \\ (\varphi_2,\varphi_1) & (\varphi_2,\varphi_2) & \cdots & (\varphi_2,\varphi_N) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (\varphi_N,\varphi_1) & (\varphi_N,\varphi_2) & \cdots & (\varphi_N,\varphi_N) \end{vmatrix}$$

olarak tanımlanır. Kabul edelim ki, bu determinant sıfıra denk olsun. Bu durumda aşikar olmayan $\{b_m\}$, $m = 1,2,\ldots,N$ çözümlerine sahip

$$\sum_{m=1}^{N} (\varphi_k,\varphi_m)\, b_m = 0 \quad , \quad k = 1,2,\ldots,N$$

lineer homogen denklem sistemini ele alabiliriz. İç çarpımın lineerlik özelliğinden, bu denklem sistemi

$$\left(\varphi_k, \sum_{m=1}^{N} b_m\varphi_m\right) = 0 \ , \ \ k = 1,2,\ldots,N \tag{4.16}$$

formunda yazılabilir. (4.16) denklem sistemindeki herbir denklem b_k ile çarpılıp terim terim toplanırsa

$$\left(\sum_{k=1}^{N} b_k\varphi_k, \sum_{m=1}^{N} b_m\varphi_m\right) = 0$$

elde edilir. (4.6) dan bu iç çarpım,

$$\iint\limits_G h\left(x,y\right)\sum_{k=1}^{N} b_k\varphi_k \sum_{m=1}^{N} b_m\varphi_m \, dxdy = 0$$

olarak yazılır. Buradan

$$\iint\limits_G h\left(x,y\right)\left[\sum_{m=1}^{N} b_m\varphi_m\right]^2 dxdy = 0$$

olup

$$\sum_{m=1}^{N} b_m\varphi_m = 0$$

ifadesi sağlanır. (4.15) fonksiyon sistemi lineer bağımsız olduğundan

$$b_m = 0 \ ; \ m = 1,2,\ldots,N$$

elde edilir ki bu da kabulümüzle çelişir. Dolayısıyla Δ_{nk} determinantları sıfırdan farklı olmalıdır. ■

Şimdi de Δ_{nk} Gram determinantları yardımıyla ortogonal polinomlar tanımlayalım. (4.13) determinantının son satırı (4.14) fonksiyonları ile yer değiştirilirse, (n,k)-yıncı basamaktan

$$P_{nk}\left(x,y\right) = \begin{vmatrix} h_{00} & h_{10} & h_{11} & \cdots & h_{n0} & \cdots & h_{n,k-1} & h_{nk} \\ h_{10} & h_{20} & h_{21} & \cdots & h_{n+1,0} & \cdots & h_{n+1,k-1} & h_{n+1,k} \\ h_{11} & h_{21} & h_{22} & \cdots & h_{n+1,1} & \cdots & h_{n+1,k} & h_{n+1,k+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ h_{n0} & h_{n+1,0} & h_{n+1,1} & \cdots & h_{2n,0} & \cdots & h_{2n,k-1} & h_{2n,k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ h_{n,k-1} & h_{n+1,k-1} & h_{n+1,k} & \cdots & h_{2n,k-1} & \cdots & h_{2n,2(k-1)} & h_{2n,2k-1} \\ 1 & x & y & \cdots & x^n & \cdots & x^{n-k+1}y^{k-1} & x^{n-k}y^k \end{vmatrix} \quad (4.17)$$

polinomu elde edilir. Burada $k \geq 1$ ise bu polinomun başkatsayısı $\Delta_{n,k-1}$ olur. $k = 0$

için $P_{n0}(x,y)$ polinomu,

$$P_{n0}(x,y)=\begin{vmatrix} h_{00} & h_{10} & h_{11} & \cdots & h_{n-1,0} & \cdots & h_{n-1,n-1} & h_{n0} \\ h_{10} & h_{20} & h_{21} & \cdots & h_{n,0} & \cdots & h_{n,n-1} & h_{n+1,0} \\ h_{11} & h_{21} & h_{22} & \cdots & h_{n,1} & \cdots & h_{n,n} & h_{n+1,1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ h_{n-1,0} & h_{n,0} & h_{n,1} & \cdots & h_{2(n-1),0} & \cdots & h_{2(n-1),n-1} & h_{2n-1,0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ h_{n-1,n-1} & h_{n,n-1} & h_{n,n} & \cdots & h_{2(n-1),n-1} & \cdots & h_{2(n-1),2(n-1)} & h_{2n-1,n-1} \\ 1 & x & y & \cdots & x^{n-1} & \cdots & y^{n-1} & x^n \end{vmatrix} \tag{4.18}$$

olup, bu polinomun başkatsayısı ise $\Delta_{n-1,n-1}$ dir.

Lemma 4.3 (4.17) *ile tanımlanan* $P_{nk}(x,y)$ *polinomu* G *bölgesinde* $h(x,y)$ *ağırlık fonksiyonuna göre ortogonaldir. Burada* $P_{nk}(x,y)$, (n,k)*-yıncı basamaktan bir polinomdur (Krall ve Sheffer 1967).*

İspat. (4.17) polinomu, (4.14) fonksiyon sisteminin ilk elemanı olan 1 ile çarpıldıktan sonra G bölgesinde $h(x,y)$ ağırlık fonksiyonuna göre integrallenir ve (4.11) formülü kullanılırsa, birinci ve son satırı aynı olan

$$(P_{nk}(x,y),1)=\begin{vmatrix} h_{00} & h_{10} & h_{11} & \cdots & h_{n0} & \cdots & h_{n,k-1} & h_{nk} \\ h_{10} & h_{20} & h_{21} & \cdots & h_{n+1,0} & \cdots & h_{n+1,k-1} & h_{n+1,k} \\ h_{11} & h_{21} & h_{22} & \cdots & h_{n+1,1} & \cdots & h_{n+1,k} & h_{n+1,k+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ h_{n0} & h_{n+1,0} & h_{n+1,1} & \cdots & h_{2n,0} & \cdots & h_{2n,k-1} & h_{2n,k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ h_{n,k-1} & h_{n+1,k-1} & h_{n+1,k} & \cdots & h_{2n,k-1} & \cdots & h_{2n,2(k-1)} & h_{2n,2k-1} \\ h_{00} & h_{10} & h_{11} & \cdots & h_{n0} & \cdots & h_{n,k-1} & h_{nk} \end{vmatrix}=0$$

determinantı elde edilir. (4.17) polinomu x ile çarpılıp benzer işlemler uygulanırsa bu durumda ikinci ve son satırı aynı olan bir determinant bulunur. Bu işlem, (4.14) deki son monomial hariç diğer

$$y,\ x^2,\ xy,\ y^2,\ldots,x^n,\ldots,x^{n-k+1}y^{k-1}$$

monomialleri için de tekrarlanırsa, her bir durumda iki satırı aynı olan bir determinant elde edilir ki, bunların herbiri sıfırdır. Bu ise $P_{nk}(x,y)$ polinomunun herbir

$$1, x,\ y,\ x^2,\ xy,\ y^2, \ldots, x^n, \ldots, x^{n-k+1}y^{k-1}$$

monomialine ortogonal olduğunu gösterir. Buradan

$$\iint\limits_G h(x,y)\, P_{nk}(x,y)\, x^{m-s}y^s\, dxdy = 0 \quad , \quad (m,s) \prec (n,k) \tag{4.19}$$

gerçeklenir ki bu ise istenilendir. ■

Lemma 4.4 (4.17) *ve* (4.18) *ile tanımlanan polinomların normları sırasıyla,* $n \geq 1$ *için*

$$\left.\begin{array}{l} \|P_{nk}\| = (\Delta_{n,k-1}\Delta_{nk})^{1/2} \quad ; \quad k \geq 1 \\ \|P_{n0}\| = (\Delta_{n-1,n-1}\Delta_{n0})^{1/2} \end{array}\right\} \tag{4.20}$$

dır.

İspat. (4.17) polinomu, (4.14) fonksiyon sisteminin son elemanı olan $x^{n-k}y^k$ ile çarpılıp $h(x,y)$ ağırlığına göre G bölgesinde integrallenirse,

$$\iint\limits_G h(x,y)\, P_{nk}(x,y)\ x^{n-k}y^k dxdy = \Delta_{nk} \tag{4.21}$$

eşitliği elde edilir. (4.17) determinantı ile tanımlanan $P_{nk}(x,y)$ polinomu

$$P_{nk}(x,y) = \Delta_{n,k-1}\, x^{n-k}y^k + H_{n,k-1}(x,y) \tag{4.22}$$

olarak ifade edilebilir. Burada $H_{n,k-1}(x,y)$, (n,k) dan daha düşük basamaklı bir polinomdur. (4.22) polinomu

$$\|P_{nk}\|^2 = \iint\limits_G h(x,y)\, P_{nk}^2(x,y)\ dxdy$$

integralinde dikkate alınırsa,

$$\|P_{nk}\|^2 = \iint\limits_G h(x,y)\, P_{nk}(x,y)\left[\Delta_{n,k-1}\, x^{n-k}y^k + H_{n,k-1}(x,y)\right] dxdy$$

olarak yazılır. (4.19) ve (4.21) eşitliklerinden yararlanılırsa,

$$\|P_{nk}\| = (\Delta_{n,k-1}\Delta_{nk})^{1/2}$$

elde edilmiş olur. Benzer işlemler (4.18) polinomu için tekrarlanırsa,

$$\|P_{n0}\| = (\Delta_{n-1,n-1}\Delta_{n0})^{1/2}$$

olarak bulunur. Bu normlar, keyfi n ve k lar için ardışık iki Gram determinantının çarpımıdır. Norm pozitif olduğundan bu determinantlar aynı işaretli olmalıdır. h_{00} pozitif olduğundan Δ_{00} pozitif olup buradan diğer Gram determinantları da pozitif olmak zorundadır. ■

Sonuç 4.1 (4.17) *ve* (4.20) *eşitliklerinden yararlanılarak,*

$$F_{nk}(x,y) = \frac{P_{nk}(x,y)}{\|P_{nk}\|} = \frac{1}{\sqrt{\Delta_{n,k-1}\Delta_{nk}}} P_{nk}(x,y) \tag{4.23}$$

formülü yardımıyla G bölgesinde $h(x,y)$ ağırlık fonksiyonuna göre ortonormal polinomlar elde edilebilir. Bu polinomların birkaçı açık olarak yazılırsa,

$$F_{00}(x,y) = \frac{P_{00}(x,y)}{\|P_{00}\|} = \frac{1}{\left[\iint\limits_G h(x,y)\,dxdy\right]^{1/2}} = \frac{1}{(h_{00})^{1/2}} = \frac{1}{\sqrt{\Delta_{00}}}$$

$$F_{10}(x,y) = \frac{P_{10}(x,y)}{\|P_{10}\|} = \frac{1}{\sqrt{\Delta_{00}\Delta_{10}}} \begin{vmatrix} h_{00} & h_{10} \\ 1 & x \end{vmatrix}$$

$$F_{11}(x,y) = \frac{P_{11}(x,y)}{\|P_{11}\|} = \frac{1}{\sqrt{\Delta_{10}\Delta_{11}}} \begin{vmatrix} h_{00} & h_{10} & h_{11} \\ h_{10} & h_{20} & h_{21} \\ 1 & x & y \end{vmatrix}$$

$$F_{20}(x,y) = \frac{P_{20}(x,y)}{\|P_{20}\|} = \frac{1}{\sqrt{\Delta_{11}\Delta_{20}}} \begin{vmatrix} h_{00} & h_{10} & h_{11} & h_{20} \\ h_{10} & h_{20} & h_{21} & h_{30} \\ h_{11} & h_{21} & h_{22} & h_{31} \\ 1 & x & y & x^2 \end{vmatrix}$$

$$F_{21}(x,y) = \frac{P_{21}(x,y)}{\|P_{21}\|} = \frac{1}{\sqrt{\Delta_{20}\Delta_{21}}} \begin{vmatrix} h_{00} & h_{10} & h_{11} & h_{20} & h_{21} \\ h_{10} & h_{20} & h_{21} & h_{30} & h_{31} \\ h_{11} & h_{21} & h_{22} & h_{31} & h_{32} \\ h_{20} & h_{30} & h_{31} & h_{40} & h_{41} \\ 1 & x & y & x^2 & xy \end{vmatrix}$$

olarak bulunurlar. (4.23) *formülü, bir bölgedeki ağırlık fonksiyonunun kuvvet momentlerinin bilinmesi durumunda, keyfi sonlu sayıda ortonormal polinomun bulunmasına izin verir.*

Tanım 4.4 (4.23) *formülü ile tanımlanan polinomlara G bölgesinde $h(x,y)$ ağırlık fonksiyonuna göre "Temel Ortonormal Polinomlar" adı verilir. Burada*

$$\{F_{n0}(x,y), F_{n1}(x,y), \ldots, F_{n,n-1}(x,y), F_{nn}(x,y)\}$$

n-yinci dereceden temel ortonormal polinom sistemini oluşturur. G bölgesinde $h(x,y)$ ağırlık fonksiyonuna göre temel ortonormal polinomların sistemi

$$\{F_{nk}(x,y)\} \ , \ \ n = 0, 1, ... \ ; \ \ k = 0, 1, \ldots, n$$

formunda yazılabilir.

4.3 Monik Ortogonal Polinomlar

(4.14) fonksiyon sistemindeki

$$\left\{1,\, x,\, y,\, x^2,\, xy,\, y^2, \ldots, x^{n-1}, \ldots, y^{n-1}\right\} \tag{4.24}$$

monomialleri sabit tutulup, n-yinci dereceden keyfi bir $x^{n-k}y^k$ monomiali alınırsa

$$\left\{1,\, x,\, y,\, x^2,\, xy,\, y^2, \ldots, x^{n-1}, \ldots, y^{n-1}, x^{n-k}y^k\right\} \tag{4.25}$$

lineer bağımsız fonksiyon sistemi elde edilir.

Tanım 4.5 (4.25) *monomialleri ve $\{A_{ms}\}$ reel katsayıları yardımıyla elde edilen n-yinci dereceden*

$$\widetilde{\Phi}_{nk}(x,y) = x^{n-k}y^k + \sum_{m=0}^{n-1}\sum_{s=0}^{m} A_{ms}x^{m-s}y^s \tag{4.26}$$

polinomu "monik polinom" olarak adlandırılır.

Lemma 4.5 $\{A_{ms}\}$ *bilinmeyenlerine bağlı* (4.26) *polinomu,*

$$\begin{gathered}\iint\limits_G h(x,y)\,\widetilde{\Phi}_{nk}(x,y)\,x^{p-q}y^q dxdy=0\\ p=0,1,\ldots,n-1\ ;\quad q=0,1,\ldots,p\end{gathered}\tag{4.27}$$

koşulları sağlanacak şekilde tek türlü belirlenebilir.

İspat. p ve q nun değerleri için (4.26) polinomu (4.27) de yerine yazılıp (4.11) momentleri kullanılırsa, (4.27) sistemi

$$\begin{aligned}\sum_{m=0}^{n-1}\sum_{s=0}^{m}A_{ms}h_{ms} &= -h_{nk}\\ \sum_{m=0}^{n-1}\sum_{s=0}^{m}A_{ms}h_{m+1,s} &= -h_{n+1,k}\\ \sum_{m=0}^{n-1}\sum_{s=0}^{m}A_{ms}h_{m+1,s+1} &= -h_{n+1,k+1}\\ &\vdots\\ \sum_{m=0}^{n-1}\sum_{s=0}^{m}A_{ms}h_{m+n-1,n+s-1} &= -h_{2n-1,n+k-1}\end{aligned}\tag{4.28}$$

formuna indirgenir. Bu sistem $\{A_{ms}\}$ bilinmeyenlerine bağlı homogen olmayan bir denklem sistemidir. Bu sistemin katsayılar determinantı $\Delta_{n-1,n-1}$ olup, bu determinant sıfırdan farklı ve pozitiftir. Böylelikle (4.28) denklem sistemi, tek bir $\{A_{ms}\}$ çözümüne sahip olacağından, $\widetilde{\Phi}_{nk}(x,y)$ polinomu tek türlü belirlenir. Bu lemmanın bir sonucu olarak aşağıdaki teorem verilebilir. ■

Teorem 4.3 *Bir G bölgesinde* (4.26) *ile tanımlanan $\widetilde{\Phi}_{nk}(x,y)$ polinomu,* (4.27) *koşulu altında $h(x,y)$ ağırlık fonksiyonuna göre ortogonaldir. Yani, $\widetilde{\Phi}_{nk}(x,y)$ polinomu, n-yinci dereceden daha düşük olan* (4.24) *polinom sistemindeki tüm monomiallere ortogonaldir (Suetin 1988).*

Tanım 4.6 (4.27) *koşulunu sağlayan* (4.26) *polinomu "monik ortogonal polinom" olarak adlandırılır. Bu polinom normu ile bölünürse,*

$$\Phi_{nk}(x,y)=\frac{\widetilde{\Phi}_{nk}(x,y)}{\left\|\widetilde{\Phi}_{nk}\right\|}=A_{nk}x^{n-k}y^k+R_{n-1}(x,y)$$

"monik ortonormal polinomu" elde edilir. Burada $R_{n-1}(x,y)$, derecesi $(n-1)$ den büyük olmayan bir polinomdur.

4.4 Keyfi Basamaktan Kabul Edilebilir Diferensiyel Denklemler

Tanım 4.7

$$\begin{aligned}
&Q_{10}(x,y)\,,\ Q_{11}(x,y)\\
&Q_{20}(x,y)\,,\ Q_{21}(x,y)\,,\ Q_{22}(x,y)\\
&\cdots\\
&Q_{N0}(x,y)\,,\ Q_{N1}(x,y)\,,\ldots,\ Q_{NN}(x,y)
\end{aligned} \tag{4.29}$$

polinom sistemini ele alalım. Bu polinom sistemine bağlı olarak N-yinci basamaktan lineer kısmi diferensiyel operatörü

$$D_N[u] = \sum_{m=1}^{N}\sum_{k=0}^{m} Q_{mk} D_1^{m-k} D_2^{k} u \tag{4.30}$$

olsun. Buna uygun kısmi diferensiyel denklem

$$D_1 = \frac{\partial}{\partial x}\ ,\ D_2 = \frac{\partial}{\partial y}$$

gösterimi altında

$$D_N[u] = \sum_{m=1}^{N}\sum_{k=0}^{m} Q_{mk} D_1^{m-k} D_2^{k} u = \lambda u \tag{4.31}$$

olarak tanımlansın.

Tanım 4.8 *Aşağıdaki koşullar sağlanacak şekilde*

$$\lambda_{0,}\lambda_1,\ldots,\lambda_n,...$$

sayılarının bir dizisi varsa, (4.31) *denklemine "Kabul Edilebilir (Admissible) Kısmi Diferensiyel Denklem" adı verilir (Krall ve Sheffer 1967).*

i. *Her bir n için*

$$D_N[u] = \lambda_n u$$

denklemi, x ve y değişkenlerine göre toplamda n-yinci dereceden $(n+1)$ tane lineer bağımsız

$$\Phi_{n0}(x,y)\,,\ \Phi_{n1}(x,y)\,,\ldots,\Phi_{nn}(x,y) \tag{4.32}$$

polinom çözümlerine sahip olmalıdır. Burada (4.32) *polinom sistemindeki polinomların ikinci indisi, y nin derecesini değil, bu sistemdeki polinomların sayısını gösterir.*

ii. *Derecesi n den küçük olan polinom çözümlerinin kümesinde aşikar olmayan çözümler yoktur.*

Sabit bir n için, (4.31) *denklemini sağlayan n-yinci dereceden $(n+1)$ tane lineer bağımsız polinom çözümlerin oluşturduğu polinomların uzayını V_n ile gösterelim. $u=0$ çözümü de* (4.31) *denklemini sağlayacağından, V_n uzayı sıfır çözümünü de içine alır. Burada V_n, $(n+1)$ boyutlu bir vektör uzayıdır.*

Tanım 4.9 (4.31) *denkleminde aşikar olmayan çözümler veren λ_n sayılarına* (4.31) *denkleminin özdeğerleri, λ_n sayılarına karşılık gelen çözümlere de bu denklemin özfonksiyonları adı verilir.*

Lemma 4.6 (4.31) *denklemi kabul edilebilir bir denklem ise,*

$$\lambda_0=0,\ \ \lambda_m\ \neq\lambda_n\quad(m\neq n)$$

sağlanır.

İspat: (4.31) denklemi kabul edilebilir bir denklem olduğundan, $\lambda=\lambda_0$ için sıfırdan farklı $u=k\quad(k\,\text{sabit})$ çözümüne sahiptir. Bu çözüm (4.31) denklemini sağlayacağından

$$\lambda_0 k=0$$

elde edilir. Burada $k\neq0$ olduğundan $\lambda_0=0$ olmak zorundadır. Diğer yandan

$$\lambda_m\ \neq\lambda_n\quad(m\neq n)$$

ifadesinin sağlandığını göstermek için

$$\lambda_m\ =\lambda_n,\ m>n$$

olduğunu kabul edelim. Bu durumda

$$D_N \Phi_{nk}(x,y) = \lambda_m \Phi_{nk}(x,y)$$

gerçeklenir. $m > n$ olduğundan Tanım 4.8 den $\Phi_{nk}(x,y) \equiv 0$ olmalıdır. Bu da $\lambda = \lambda_n$ için denklemin n-yinci dereceden polinom çözümlere sahip olmasıyla çelişir. Dolayısıyla

$$\lambda_m \neq \lambda_n, \ m \neq n$$

olmalıdır.

Teorem 4.4 (4.31) *denklemi kabul edilebilir bir denklem ise,* (4.29) *sistemindeki her* $Q_{mk}(x,y)$ *polinomunun derecesi* m *yi aşamaz.*

İspat. $\lambda = \lambda_n$ için (4.31) denkleminin

$$B_{n0}(x,y), \ B_{n1}(x,y), \ldots, B_{nn}(x,y) \tag{4.33}$$

lineer bağımsız çözümleri, V_n uzayının bir bazını oluştursun. (4.33) sistemindeki her polinom

$$B_{ns}(x,y) = \sum_{p=0}^{n} a_{sp} x^{n-p} y^p + R_{n-1}^{(n,s)}(x,y) \ , \quad s = 0,1,\ldots,n \tag{4.34}$$

açılımına sahiptir. Burada $R_{n-1}^{(n,s)}(x,y)$, derecesi $(n-1)$-i geçmeyen bir polinomdur. (4.33) sistemindeki polinomlar lineer bağımsız olduklarından

$$A_n = \begin{vmatrix} a_{00} & a_{01} & \cdots & a_{0n} \\ a_{10} & a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n0} & a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0 \tag{4.35}$$

olmalıdır. Bunu göstermek için $A_n = 0$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda (4.33) polinomlarının öyle bir kombinasyonu bulunabilir ki, bu polinom hem (4.31) denklemini sağlar hem de derecesi $(n-1)$-i geçemez. Bu ise (4.31) denkleminin kabul edilebilir bir denklem olmasıyla çelişir. Dolayısıyla $A_n \neq 0$ olmalıdır.

Şimdi de bu koşul altında, V_n uzayının

$$w_{n0}(x,y), \ w_{n1}(x,y), \ldots, w_{nn}(x,y) \tag{4.36}$$

monik bir bazına sahip olabileceğini gösterelim. Bunu göstermek için,

$$\sum_{s=0}^{n} c_{sk} a_{sm} = \delta_{km} \quad ; \; m = 0, 1, ..., n \tag{4.37}$$

sistemini ele alalım. $A_n \neq 0$ olduğundan bu sistemin katsayılar determinantı olan $A_n^{\perp}$ da sıfırdan farklı olmalıdır. Dolayısıyla herhangi bir k için, bu sistem tek bir $\{c_{sk}\}$ çözümüne sahiptir. Buradan, (4.33) polinomları ve $\{c_{sk}\}$ sayıları yardımıyla elde edilen

$$\sum_{s=0}^{n} c_{sk} B_{ns}(x, y)$$

polinomu, (4.31) denklemini gerçekler. (4.34) ve (4.37) den bu polinom

$$\begin{aligned}
\sum_{s=0}^{n} c_{sk} B_{ns}(x, y) &= \sum_{s=0}^{n} c_{sk} \left[\sum_{p=0}^{n} a_{sp} x^{n-p} y^{p} \right] + R_{n-1}^{(n,k)}(x, y) \\
&= \sum_{p=0}^{n} \left[\sum_{s=0}^{n} c_{sk} a_{sp} \right] x^{n-p} y^{p} + R_{n-1}^{(n,k)}(x, y) \\
&= \sum_{s=0}^{n} c_{sk} a_{sk} x^{n-k} y^{k} + R_{n-1}^{(n,k)}(x, y) \\
&= x^{n-k} y^{k} + R_{n-1}^{(n,k)}(x, y)
\end{aligned}$$

olarak yazılabilir.

$$w_{nk} = \sum_{s=0}^{n} c_{sk} B_{ns}(x, y)$$

ile gösterilirse, (4.31) denklemini sağlayan

$$w_{nk} = x^{n-k} y^{k} + R_{n-1}^{(n,k)}(x, y) \quad ; \quad k = 0, 1, ..., n \tag{4.38}$$

formunda monik polinomlar elde edilir. Buradan

$$w_{n0}(x, y), w_{n1}(x, y), \ldots, w_{nn}(x, y)$$

lineer bağımsız polinomları V_n uzayının bir monik bazını oluşturur. Şimdi de tümevarım yönteminden yararlanarak, $Q_{mk}(x, y)$ polinomunun derecesinin m yi aşamayacağını gösterelim. $n = 1$ için (4.36) sistemi

$$\begin{aligned}
w_{10}(x, y) &= x + c_0^{(1,0)} \\
w_{11}(x, y) &= y + c_0^{(1,1)}
\end{aligned}$$

polinomlarından oluşur. Bu polinomlar $n = 1$ durumunda (4.31) denklemini sağlayacağından

$$\begin{aligned}
\sum_{m=1}^{N}\sum_{k=0}^{m} Q_{mk} D_1^{m-k} D_2^{k} w_{10}(x,y) &= \lambda_1 w_{10}(x,y) \\
\sum_{m=1}^{N}\sum_{k=0}^{m} Q_{mk} D_1^{m-k} D_2^{k} w_{11}(x,y) &= \lambda_1 w_{11}(x,y)
\end{aligned}$$

gerçeklenir. Burada $m \geq 2$ için türevler sıfır olacağından yukarıdaki eşitlikler

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{1} Q_{1k} D_1^{1-k} D_2^{k} w_{10}(x,y) &= \lambda_1 w_{10}(x,y) \\
\sum_{k=0}^{1} Q_{1k} D_1^{1-k} D_2^{k} w_{11}(x,y) &= \lambda_1 w_{11}(x,y)
\end{aligned}$$

formuna indirgenir. Buradan

$$\begin{cases} Q_{10}(x,y) = \lambda_1 w_{10}(x,y) = \lambda_1 \left(x + c_0^{(1,0)}\right) \\ Q_{11}(x,y) = \lambda_1 w_{11}(x,y) = \lambda_1 \left(y + c_0^{(1,1)}\right) \end{cases} \tag{4.39}$$

olarak elde edilir. Bu ise gösterir ki, $m = 1$ için $Q_{10}(x,y)$ ve $Q_{11}(x,y)$ polinomlarının derecesi 1 i aşamaz.

Şimdi de $m = 2$ durumunu ele alalım. $n = 2$ için (4.36) sistemi

$$\begin{aligned}
w_{20}(x,y) &= x^2 + R_1^{(2,0)}(x,y) \\
w_{21}(x,y) &= xy + R_1^{(2,1)}(x,y) \\
w_{22}(x,y) &= y^2 + R_1^{(2,2)}(x,y)
\end{aligned}$$

polinomlarından oluşur. Bu polinomlar (4.31) denkleminde yerine yazılıp, $m \geq 3$ için karma türevlerin sıfır olduğu gözönünde tutulursa,

$$\begin{aligned}
\sum_{m=1}^{2}\sum_{k=0}^{m} Q_{mk} D_1^{m-k} D_2^{k} w_{20}(x,y) &= \lambda_2 w_{20}(x,y) \\
\sum_{m=1}^{2}\sum_{k=0}^{m} Q_{mk} D_1^{m-k} D_2^{k} w_{21}(x,y) &= \lambda_2 w_{21}(x,y) \\
\sum_{m=1}^{2}\sum_{k=0}^{m} Q_{mk} D_1^{m-k} D_2^{k} w_{22}(x,y) &= \lambda_2 w_{22}(x,y)
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada w_{20}, w_{21} ve w_{22} polinomlarının açık ifadeleri yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} 2Q_{20} + (Q_{10}D_1w_{20} + Q_{11}D_2w_{20}) &= \lambda_2 w_{20} \\ Q_{21} + (Q_{10}D_1w_{21} + Q_{11}D_2w_{21}) &= \lambda_2 w_{21} \\ 2Q_{22} + (Q_{10}D_1w_{22} + Q_{11}D_2w_{22}) &= \lambda_2 w_{22} \end{aligned} \tag{4.40}$$

eşitlikleri bulunur. (4.39) ifadeleri (4.40) da dikkate alınırsa, Q_{20}, Q_{21} ve Q_{22} polinomlarının derecelerinin 2 yi aşamayacağı kolaylıkla görülür.

Şimdi de $m \leq n-1$ $(n \leq N)$ için teoremin sağlandığını kabul edelim ve $m = n$ için gerçeklendiğini gösterelim. (4.36) sisteminden

$$\begin{aligned} w_{n0}(x,y) &= x^n + R_{n-1}^{(n,0)}(x,y) \\ w_{n1}(x,y) &= x^{n-1}y + R_{n-1}^{(n,1)}(x,y) \\ &\vdots \\ w_{nn}(x,y) &= y^n + R_{n-1}^{(n,n)}(x,y) \end{aligned}$$

polinomları, (4.31) denklemini gerçekleyeceğinden

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{N}\sum_{k=0}^{m} Q_{mk}D_1^{m-k}D_2^k w_{n0} &= \lambda_n w_{n0} \\ \sum_{m=1}^{N}\sum_{k=0}^{m} Q_{mk}D_1^{m-k}D_2^k w_{n1} &= \lambda_n w_{n1} \\ &\vdots \\ \sum_{m=1}^{N}\sum_{k=0}^{m} Q_{mk}D_1^{m-k}D_2^k w_{ns} &= \lambda_n w_{ns} \\ &\vdots \\ \sum_{m=1}^{N}\sum_{k=0}^{m} Q_{mk}D_1^{m-k}D_2^k w_{nn} &= \lambda_n w_{nn} \end{aligned}$$

eşitlikleri sağlanır. $m > n$ için yukarıdaki karma türevler sıfır olacağından, bu eşitlikler aşağıdaki forma indirgenir:

$$\begin{aligned}
\sum_{m=1}^{n}\sum_{k=0}^{m} Q_{mk} D_1^{m-k} D_2^k w_{n0} &= \lambda_n w_{n0} \\
\sum_{m=1}^{n}\sum_{k=0}^{m} Q_{mk} D_1^{m-k} D_2^k w_{n1} &= \lambda_n w_{n1} \\
&\vdots \\
\sum_{m=1}^{n}\sum_{k=0}^{m} Q_{mk} D_1^{m-k} D_2^k w_{ns} &= \lambda_n w_{ns} \\
&\vdots \\
\sum_{m=1}^{n}\sum_{k=0}^{m} Q_{mk} D_1^{m-k} D_2^k w_{nn} &= \lambda_n w_{nn}.
\end{aligned}$$

Bu eşitliklerde $m = n$ durumu açık olarak yazılırsa,

$$\begin{aligned}
n!Q_{n0} + \sum_{m=1}^{n-1}\sum_{k=0}^{m} Q_{mk} D_1^{m-k} D_2^k w_{n0} &= \lambda_n w_{n0} \\
(n-1)!Q_{n1} + \sum_{m=1}^{n-1}\sum_{k=0}^{m} Q_{mk} D_1^{m-k} D_2^k w_{n1} &= \lambda_n w_{n1} \\
&\vdots \\
(n-s)!s!Q_{ns} + \sum_{m=1}^{n-1}\sum_{k=0}^{m} Q_{mk} D_1^{m-k} D_2^k w_{ns} &= \lambda_n w_{ns} \\
&\vdots \\
n!Q_{nn} + \sum_{m=1}^{n-1}\sum_{k=0}^{m} Q_{mk} D_1^{m-k} D_2^k w_{nn} &= \lambda_n w_{nn}
\end{aligned} \tag{4.41}$$

elde edilir. Hipotezimiz gereği $m \le n-1$ için Q_{mp} lerin derecesi m yi aşamayacağından, (4.41) sistemindeki

$$\{Q_{np}(x,y)\} \quad ; \quad p = 0, 1, \ldots, n$$

polinomlarının derecesi de n yi geçemez. Bu da teoremi ispatlar. ■

Teorem 4.5 (4.31) *denkleminin kabul edilebilir (admissible) kısmi diferensiyel denklem olması için gerek ve yeter koşul,*

(i) $\lambda_0 = 0 \;\; , \;\; \lambda_m \neq \lambda_n \quad (m \neq n)$

(ii) $\lambda_n = n! \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{(n-k)!} \;\; , \;\; n \geq 1$

(iii) $Q_{nk}(x,y) = C_n^k a_n x^{n-k} y^k + R_{n-1}^{(n,k)}(x,y)$

eşitliklerinin sağlanmasıdır. Burada $a_1, a_2, ..., a_N$ *ler keyfi olup bunlardan en az biri sıfırdan farklıdır ve* (ii) *de* $n > N$ *için* $a_n = 0$ *dır (Krall ve Sheffer 1967, Suetin 1988).*

İspat. $(\Rightarrow)$ (4.31) denklemi kabul edilebilir bir denklem olsun. Lemma 4.6 dan (i) sağlanır. (ii) ve (iii) nin sağlandığını göstermek için de tümevarım yöntemini kullanalım. $n = 1$ için (4.39) dan

$$Q_{10}(x,y) = \lambda_1 x + a_{10}$$
$$Q_{11}(x,y) = \lambda_1 y + a_{11}$$

eşitlikleri vardır ve bu polinomlar için (ii) ve (iii) formülleri gerçeklenir. Şimdi de (ii) ve (iii) formüllerinin $1, 2, ..., n-1$ $(n \leq N)$ için sağlandığını kabul edelim ve n için gerçeklendiğini gösterelim. $Q_{ns}(x,y)$ polinomu

$$Q_{ns}(x,y) = \sum_{p=0}^{n} \sum_{q=0}^{p} a_{pq} x^{p-q} y^q \tag{4.42}$$

açılımına sahip olsun. $\lambda = \lambda_n$ için w_{ns} çözümleri (4.31) denklemini sağlayacağından, bu polinom çözümler (4.31) de yerine yazılır ve $m > n$ $(n \leq N)$ için karma türevlerin sıfır olduğu gözönünde tutulursa,

$$\begin{aligned}
&\sum_{m=1}^{N} \sum_{k=0}^{m} Q_{mk} D_1^{m-k} D_2^k w_{ns} \\
&= \sum_{k=0}^{n} Q_{nk} D_1^{n-k} D_2^k w_{ns} + \sum_{m=1}^{n-1} \sum_{k=0}^{m} Q_{mk} D_1^{m-k} D_2^k w_{ns} \\
&= \lambda_n w_{ns} \\
&= \lambda_n \left(x^{n-s} y^s + R_{n-1}^{(n,s)}(x,y) \right)
\end{aligned} \tag{4.43}$$

olduğu görülür. Bu eşitlikte $m = 1, 2, ..., n-1$ için (iii) açılımı kullanılırsa

$$\begin{aligned}
&\sum_{m=1}^{N}\sum_{k=0}^{m} Q_{mk} D_1^{m-k} D_2^k w_{ns} = \sum_{k=0}^{n} Q_{nk} D_1^{n-k} D_2^k \left(x^{n-s}y^s + R_{n-1}^{(n,s)}(x,y)\right) \\
&+\sum_{m=1}^{n-1}\sum_{k=0}^{m}\left[C_m^k a_m x^{m-k}y^k + R_{m-1}^{(m,k)}(x,y)\right] D_1^{m-k}D_2^k\left(x^{n-s}y^s + R_{n-1}^{(n,s)}(x,y)\right) \\
= \;& Q_{ns} D_1^{n-s} D_2^s\left(x^{n-s}y^s + R_{n-1}^{(n,s)}(x,y)\right) \\
&+\sum_{m=1}^{n-1}\sum_{k=0}^{m}\left[C_m^k a_m x^{m-k}y^k + R_{m-1}^{(m,k)}(x,y)\right] D_1^{m-k}D_2^k\left(x^{n-s}y^s + R_{n-1}^{(n,s)}(x,y)\right) \\
= \;& s!\,(n-s)!Q_{ns} \\
&+\sum_{m=1}^{n-1}\sum_{k=0}^{m}\left[C_m^k a_m x^{m-k}y^k + R_{m-1}^{(m,k)}(x,y)\right] D_1^{m-k}D_2^k\left(x^{n-s}y^s + R_{n-1}^{(n,s)}(x,y)\right) \\
= \;& \lambda_n\left(x^{n-s}y^s + R_{n-1}^{(n,s)}(x,y)\right) \qquad (4.44)
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada (4.42) deki Q_{ns} polinomunun açık ifadesi yerine yazılır ve n-yinci dereceden $x^{n-s}y^s$ monomialleri kıyaslanırsa,

$$\begin{aligned}
&s!\,(n-s)!a_{ns}x^{n-s}y^s + \sum_{m=1}^{n-1}\sum_{k=0}^{s} C_m^k a_m \frac{(n-s)!s!}{(n-s-m+k)!\,(s-k)!} x^{n-s}y^s \\
&= \lambda_n x^{n-s}y^s
\end{aligned}$$

olduğu görülür ki, $x^{n-s}y^s$ in katsayılarının eşitlenmesiyle

$$\lambda_n = s!\,(n-s)!a_{ns} + \sum_{m=1}^{n-1} a_m \sum_{k=0}^{s} C_m^k \frac{(n-s)!s!}{(n-s-m+k)!\,(s-k)!} \qquad (4.45)$$

elde edilir. Burada

$$\sum_{k=0}^{s} C_m^k \frac{(n-s)!s!}{(n-s-m+k)!\,(s-k)!} = \frac{n!}{(n-m)!} \qquad (4.46)$$

eşitliğinden yararlanılırsa, (4.45) ifadesi

$$\lambda_n = s!\,(n-s)!a_{ns} + n!\sum_{m=1}^{n-1} \frac{a_m}{(n-m)!}$$

formuna indirgenir. Burada

$$a_{ns} = C_n^s a_n \qquad (4.47)$$

notasyonu kullanılırsa

$$\lambda_n = n!a_n + n!\sum_{m=1}^{n-1} \frac{a_m}{(n-m)!}$$

olarak yazılır ki buradan

$$\lambda_n = n! \sum_{m=1}^{n} \frac{a_m}{(n-m)!}$$

elde edilir. Bu ise (ii) nin gerçeklendiğini gösterir. (4.44) de Q_{ns} in açık ifadesi yerine yazılıp n-yinci dereceden tüm monomialler kıyaslanırsa,

$$Q_{ns}(x,y) = \sum_{p=0}^{n} \sum_{q=0}^{p} a_{pq} x^{p-q} y^q$$

polinomunda

$$a_{nq} = 0 \ , \ q \neq s$$

olduğu görülür. O halde Q_{ns} polinomu

$$Q_{ns}(x,y) = a_{ns} x^{n-s} y^s + R_{n-1}^{(n,s)}$$

formunda olmalıdır. Burada (4.47) eşitliği dikkate alınırsa

$$Q_{ns}(x,y) = C_n^s a_n x^{n-s} y^s + R_{n-1}^{(n,s)}$$

olarak elde edilir ki, bu da (iii) nin sağlandığını gösterir. Eğer $n > N$ ise (4.44) den

$$\begin{aligned} & \sum_{m=1}^{N} \sum_{k=0}^{m} Q_{mk} D_1^{m-k} D_2^k w_{ns} \\ = & \sum_{m=1}^{N} \sum_{k=0}^{m} \left[C_m^k a_m x^{m-k} y^k + R_{m-1}^{(m,k)}(x,y) \right] D_1^{m-k} D_2^k \left(x^{n-s} y^s + R_{n-1}^{(n,s)}(x,y) \right) \\ = & \lambda_n \left(x^{n-s} y^s + R_{n-1}^{(n,s)}(x,y) \right) \end{aligned}$$

olur. Burada (4.42) deki Q_{ns} polinomunun açık ifadesi yerine yazılır ve n-yinci dereceden $x^{n-s}y^s$ monomialleri kıyaslanırsa,

$$\sum_{m=1}^{N} \sum_{k=0}^{s} C_m^k a_m \frac{(n-s)!s!}{(n-s-m+k)!(s-k)!} x^{n-s} y^s = \lambda_n x^{n-s} y^s$$

eşitliğinden

$$\lambda_n = n! \sum_{m=1}^{N} \frac{a_m}{(n-m)!}$$

olduğu görülür. Böylelikle (ii) ve (iii) eşitliklerinin de sağlandığı gösterilmiş olur.

($\Leftarrow$) Kabul edelim ki (i), (ii) ve (iii) eşitlikleri sağlansın. Keyfi katsayılı

$$B_{ns}(x,y) = \sum_{p=0}^{n} \sum_{q=0}^{p} A_{pq}^{(n,s)} x^{p-q} y^q$$

polinomunu ele alalım. (iii) eşitliği gözönünde bulundurularak, bu polinom (4.31) denkleminde yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned}
&\sum_{m=1}^{N}\sum_{k=0}^{m}\left[C_m^k a_m x^{m-k}y^k + R_{m-1}^{(m,k)}(x,y)\right] D_1^{m-k}D_2^k B_{ns}(x,y) \\
= &\sum_{m=1}^{N}\sum_{k=0}^{m}\left[C_m^k a_m x^{m-k}y^k + R_{m-1}^{(m,k)}(x,y)\right] \sum_{p=0}^{n}\sum_{q=0}^{p} A_{pq}^{(n,s)} D_1^{m-k}D_2^k x^{p-q}y^q \\
= &\lambda_n \sum_{p=0}^{n}\sum_{q=0}^{p} A_{pq}^{(n,s)} x^{p-q}y^q
\end{aligned}$$

olarak bulunur. Buradan

$$\begin{aligned}
&\sum_{p=0}^{n}\sum_{q=0}^{p}\Bigg\{\sum_{m=1}^{p}\sum_{k=0}^{m}\left[C_m^k a_m x^{m-k}y^k + R_{m-1}^{(m,k)}(x,y)\right] \\
&\times \frac{A_{pq}^{(n,s)}(p-q)!q!}{(p-q-m+k)!(q-k)!} x^{p-q-m+k}y^{q-k}\Bigg\} \\
&+\sum_{p=0}^{n}\sum_{q=0}^{p}\Bigg\{\sum_{m=p+1}^{n}\sum_{k=0}^{m}\left[C_m^k a_m x^{m-k}y^k + R_{m-1}^{(m,k)}(x,y)\right] \\
&\times \frac{A_{pq}^{(n,s)}(p-q)!q!}{(p-q-m+k)!(q-k)!} x^{p-q-m+k}y^{q-k}\Bigg\} \\
= &\lambda_n \sum_{p=0}^{n}\sum_{q=0}^{p} A_{pq}^{(n,s)} x^{p-q}y^q
\end{aligned}$$

elde edilir. Gerekli düzenlemeler yapılıp $x^{p-q}y^q$ monomiallerinin katsayıları karşılaştırılırsa,

$$\begin{aligned}
&\sum_{p=0}^{n}\sum_{q=0}^{p}\left[\sum_{m=1}^{p}\sum_{k=0}^{q} C_m^k a_m A_{pq}^{(n,s)} \frac{(p-q)!q!}{(p-q-m+k)!(q-k)!}\right] x^{p-q}y^q \\
&+\sum_{p=0}^{n}\sum_{q=0}^{p}\left[\sum_{m=p+1}^{n}\sum_{k=0}^{m} C_m^k a_m A_{pq}^{(n,s)}\right] x^{p-q}y^q \\
= &\sum_{p=0}^{n}\sum_{q=0}^{p}\left[\sum_{m=1}^{p}\sum_{k=0}^{q} C_m^k a_m A_{pq}^{(n,s)} \frac{(p-q)!q!}{(p-q-m+k)!(q-k)!}\right] x^{p-q}y^q \\
&+\sum_{p=0}^{n}\sum_{q=0}^{p}\left[\sum_{m=p+1}^{n}\sum_{k=0}^{m} b_{mk} A_{mk}^{(n,s)}\right] x^{p-q}y^q \\
= &\sum_{p=0}^{n}\sum_{q=0}^{p} \lambda_n A_{pq}^{(n,s)} x^{p-q}y^q
\end{aligned}$$

eşitliğinden

$$\sum_{m=1}^{p}\sum_{k=0}^{q}\left[C_m^k a_m \frac{(p-q)!q!}{(p-q-m+k)!\,(q-k)!}\right] A_{pq}^{(n,s)} + \sum_{m=p+1}^{n}\sum_{k=0}^{m} b_{mk} A_{mk}^{(n,s)} = \lambda_n A_{pq}^{(n,s)}$$

bulunur. Burada (4.46) eşitliği ve (ii) formülü dikkate alınırsa

$$\left(\lambda_p - \lambda_n\right) A_{pq}^{(n,s)} + \sum_{m=p+1}^{n}\sum_{k=0}^{m} b_{mk} A_{mk}^{(n,s)} = 0$$

elde edilir. Buradan $p = n$ için

$$A_{n0}^{(n,s)}, A_{n1}^{(n,s)}, \ldots, A_{nn}^{(n,s)} \tag{4.48}$$

katsayılarının keyfi olarak seçilebileceği kolaylıkla görülür. O halde

$$\left(\lambda_p - \lambda_n\right) A_{pq}^{(n,s)} + \sum_{m=p+1}^{n-1}\sum_{k=0}^{m} b_{mk} A_{mk}^{(n,s)} = c_{pq} \tag{4.49}$$

olarak yazılabilir. Buradan $p = 0, 1, \ldots, n-1$; $q = 0, 1, \ldots, p$ için lineer homogen olmayan üst üçgensel bir denklem sistemi elde edilir. Bu denklem sisteminin esas köşegeni üzerinde $p < n$ için $(\lambda_p - \lambda_n)$ formunda tekrarlanan farklar karşımıza çıkar. Bu denklem sisteminin katsayılar determinantı, esas köşegen üzerindeki elemanların çarpımı olacağından, (i) formülü dikkate alınırsa bu determinant sıfırdan farklı olur. Dolayısıyla $p = 0, 1, \ldots, n-1$; $q = 0, 1, \ldots, p$ için $A_{pq}^{(n,s)}$ katsayıları tek türlü çözülebilir. Buradan (4.49) denklem sistemi, $(n+1)$ tane keyfi (4.48) katsayılarını içerir. O halde bu denklem sisteminin $(n+1)$ tane lineer bağımsız çözümü vardır. Böylelikle (4.31) denkleminin $(n+1)$ tane lineer bağımsız çözümü elde edilir ki bu da ispatı tamamlar. ■

Sonuç 4.2 *$N = 2$ durumunda ikinci basamaktan kabul edilebilir diferensiyel denklem*

$$\begin{aligned} L[u] &:= \left(Ax^2 + a_1 x + b_1 y + c_1\right) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \left(2Axy + a_2 x + b_2 y + c_2\right) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \\ &+ \left(Ay^2 + a_3 x + b_3 y + c_3\right) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \left(Bx + d_1\right) \frac{\partial u}{\partial x} + \left(By + d_2\right) \frac{\partial u}{\partial y} \\ &= n\left(B + A\left(n-1\right)\right) u \end{aligned} \tag{4.50}$$

formunda verilir (Krall ve Sheffer 1967, Suetin 1988).

4.5 $w_1(x)\, w_2(y)$ Formunda Ağırlık Fonksiyonuna Göre Ortogonal Polinomlar

Teorem 4.6 *$\{p_n(x)\}$ ve $\{q_n(y)\}$ polinom aileleri sırasıyla (a,b) ve (c,d) aralığında $w_1(x)$ ve $w_2(y)$ ağırlık fonksiyonlarına göre ortogonal olsunlar. Bu durumda*

$$F_{n,k}(x,y) = p_{n-k}(x)\, q_k(y)$$

polinom ailesi

$$W(x,y) = w_1(x)\, w_2(y)$$

ağırlık fonksiyonuna göre

$$R = \{(x,y) : a < x < b \quad , \quad c < y < d\}$$

bölgesinde ortogonaldir.

İspat. $(n,k) \neq (m,l)$ için

$$\begin{aligned}
& \iint\limits_R F_{n,k}(x,y)\, F_{m,l}(x,y)\, W(x,y)\, dxdy \\
= & \int\limits_{x=a}^{b} \int\limits_{y=c}^{d} p_{n-k}(x)\, q_k(y)\, p_{m-l}(x)\, q_l(y)\, w_1(x)\, w_2(y)\, dydx \\
= & \left(\int\limits_{x=a}^{b} p_{n-k}(x)\, p_{m-l}(x)\, w_1(x)\, dx \right) \left(\int\limits_{y=c}^{d} q_k(y)\, q_l(y)\, w_2(y)\, dy \right) \\
= & \ 0
\end{aligned}$$

elde edilir ki bu da ispatı tamamlar. ∎

Bu teoremin bazı özel durumlarını aşağıda verelim.

i. Hermite-Hermite polinomları: $W(x,y) = e^{-x^2-y^2}$ ağırlık fonksiyonuna göre $R = \{(x,y) : -\infty < x < \infty, \ -\infty < y < \infty\}$ bölgesinde ortogonal olan bu polinomlar

$$F_{n,k}(x,y) = H_{n-k}(x)\, H_k(y) \quad , \quad 0 \leq k \leq n \tag{4.51}$$

formundadır. (3.25) diferensiyel denkleminden $H_{n-k}(x)$ ve $H_k(y)$ Hermite polinomları sırasıyla

$$H''_{n-k}(x) - 2xH'_{n-k}(x) + 2(n-k)\, H_{n-k}(x) = 0$$

ve

$$H_k^{''}(y) - 2yH_k^{'}(y) + 2kH_k(y) = 0$$

diferensiyel denklemlerini sağlarlar. Birinci denklem $H_k(y)$ ile, ikinci denklem ise $H_{n-k}(x)$ ile çarpılıp terim terim toplanırsa,

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}[H_{n-k}(x) H_k(y)] + \frac{\partial^2}{\partial y^2}[H_{n-k}(x) H_k(y)] - 2x\frac{\partial}{\partial x}[H_{n-k}(x) H_k(y)]$$

$$-2y\frac{\partial}{\partial y}[H_{n-k}(x) H_k(y)] + 2n[H_{n-k}(x) H_k(y)] = 0$$

denklemine ulaşılır. Buradan (4.51) polinomlarının, ikinci basamaktan

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 2x\frac{\partial u}{\partial x} - 2y\frac{\partial u}{\partial y} = -2nu$$

denklemini sağladığı görülür. Sonuç 4.2 den, bu denklem kabul edilebilir bir denklem olup, $\lambda_n = -2n$ için $(n+1)$ tane n-yinci dereceden lineer bağımsız polinom çözüme sahiptir.

ii. Laguerre-Laguerre polinomları*:* Bu polinomlar

$$F_{n,k}(x,y) = L_{n-k}^{(\alpha)}(x) L_k^{(\beta)}(y) \quad , \quad 0 \le k \le n \tag{4.52}$$

formunda olup $W(x,y) = x^{\alpha} y^{\beta} e^{-x-y}$ ağırlık fonksiyonuna göre

$$R = \{(x,y) : 0 < x < \infty, \ 0 < y < \infty\}$$

bölgesinde ortogonaldirler. (3.30) diferensiyel denkleminden $L_{n-k}^{(\alpha)}(x)$ ve $L_k^{(\beta)}(y)$ Laguerre polinomları sırasıyla

$$x\frac{\partial^2}{\partial x^2}L_{n-k}^{(\alpha)}(x) + (1+\alpha-x)\frac{\partial}{\partial x}L_{n-k}^{(\alpha)}(x) + (n-k)L_{n-k}^{(\alpha)}(x) = 0$$

ve

$$y\frac{\partial^2}{\partial y^2}L_k^{(\beta)}(y) + (1+\beta-y)\frac{\partial}{\partial y}L_k^{(\beta)}(y) + kL_k^{(\beta)}(y) = 0$$

denklemlerini sağlarlar. Bu iki denklem sırasıyla $L_k^{(\beta)}(y)$ ve $L_{n-k}^{(\alpha)}(x)$ ile çarpılıp taraf tarafa toplanırsa, (4.52) polinomlarının

$$xu_{xx} + yu_{yy} + (1+\alpha-x)u_x + (1+\beta-y)u_y = -nu$$

kısmi türevli denklemini gerçeklediği görülür. Bu denklem kabul edilebilir bir denklem olup $\lambda_n = -n$ için $(n+1)$ tane n-yinci dereceden lineer bağımsız polinom çözüme sahiptir.

iii. Laguerre-Hermite polinomları: $W(x,y) = x^{\alpha} e^{-x-\frac{y^2}{2}}$ ağırlık fonksiyonuna göre $R = \{(x,y) : 0 < x < \infty, \ -\infty < y < \infty\}$ bölgesinde ortogonal olan Laguerre-Hermite polinomları, $F_{n,k}(x,y) = L_{n-k}^{(\alpha)}(x)\, He_k(y)$, $0 \le k \le n$ formundadır. (3.29) ve (3.30) diferensiyel denklemlerinden görülür ki, bu polinomlar ikinci basamaktan

$$xu_{xx} + u_{yy} + (1+\alpha-x)\, u_x - yu_y = -nu$$

kısmi türevli denklemini sağlarlar. Sonuç 4.2 den bu denklem kabul edilebilir bir denklem olup $\lambda_n = -n$ için $(n+1)$ tane n-yinci dereceden lineer bağımsız polinom çözüme sahiptir.

iv. Jacobi-Jacobi, Hermite, Laguerre polinomları:

$$F_{n,k}(x,y) = P_{n-k}^{(\alpha,\beta)}(x)\, P_k^{(\gamma,\delta)}(y) \ ; \ k = 0,1,\ldots,n$$

Jacobi-Jacobi polinomları

$$\begin{aligned}
&(1-x^2)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + [\beta-\alpha-(\alpha+\beta+2)\, x]\frac{\partial u}{\partial x} \\
&+(1-y^2)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + [\delta-\gamma-(\gamma+\delta+2)\, y]\frac{\partial u}{\partial y} \\
&= -\left[(n-k)(n-k+\alpha+\beta+1) + k(k+\gamma+\delta+1)\right] u
\end{aligned} \tag{4.53}$$

denklemini sağlar. Benzer şekilde

$$F_{n,k}(x,y) = P_{n-k}^{(\alpha,\beta)}(x)\, H_k(y) \ ; \ k = 0,1,\ldots,n$$

Jacobi-Hermite polinomları ve

$$F_{n,k}(x,y) = P_{n-k}^{(\alpha,\beta)}(x)\, L_k^{(\gamma)}(y) \ ; \ k = 0,1,\ldots,n$$

Jacobi-Laguerre polinomları da sırasıyla

$$\begin{aligned}
(1-x^2)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + [\beta-\alpha-(\alpha+\beta+2)\, x]\frac{\partial u}{\partial x} - 2y\frac{\partial u}{\partial y}& \\
= -\left[(n-k)(n-k+\alpha+\beta+1) + 2k\right] u&
\end{aligned} \tag{4.54}$$

ve

$$(1-x^2)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+y\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+[\beta-\alpha-(\alpha+\beta+2)\,x]\frac{\partial u}{\partial x}+[1+\gamma-y]\frac{\partial u}{\partial y}$$
$$=-\left[(n-k)(n-k+\alpha+\beta+1)+k\right]u \tag{4.55}$$

denklemlerini gerçeklerler. (4.53), (4.54) ve (4.55) denklemleri kabul edilebilir bir denklem değildirler. Çünkü, bu denklemler

$$Du=\lambda_{nk}u$$

formunda olup, n ve k lar değiştikçe n-yinci dereceden $\{F_{n,k}(x,y)\}$ polinomlarına karşılık gelen λ_{nk} sayıları da değişmektedir.

4.6 $w_1(x)\,w_2\left(y\,(\rho(x))^{-1}\right)$ Formunda Ağırlık Fonksiyonuna Göre Ortogonal Polinomlar

Koornwinder bir değişkenli ortogonal polinomlardan iki değişkenli ortogonal polinomlar türetmek için genel bir metod vermiştir (Koornwinder 1975). Öncelikle bununla ilgili aşağıdaki genel teoremi verelim.

Teorem 4.7 *$w_1(x)$, (a,b) aralığında, $w_2(y)$ ise (c,d) aralığında bir ağırlık fonksiyonu olsun. $\rho(x)$, (a,b) aralığında ya r $(r=0,1,2,...)$-yinci dereceden bir polinom ya da $2r$ $\left(r=\frac{1}{2},1,\frac{3}{2},...\right)$-yinci dereceden pozitif bir polinomun kare kökü olsun. Eğer $\rho(x)$ bir polinom değilse bu durumda $c=-d$ olsun ve $w_2(y)$, $(-d,d)$ aralığında çift fonksiyon olsun. $k\geq 0$ için $p_n^k(x)$ $(n=0,1,...)$ polinomları (a,b) aralığında $(\rho(x))^{2k+1}\,w_1(x)$ ağırlık fonksiyonuna göre, $q_n(y)$ polinomları da (c,d) aralığında $w_2(y)$ ağırlık fonksiyonuna göre ortogonal olsunlar. Bu durumda*

$$F_{n,k}(x,y)=p_{n-k}^k(x)\,(\rho(x))^k\,q_k\left(\frac{y}{\rho(x)}\right),\quad n\geq k\geq 0$$

polinom ailesi

$$R=\{(x,y):\ a<x<b,\quad c\rho(x)<y<d\rho(x)\}$$

bölgesinde

$$W(x,y)=w_1(x)\,w_2\left(\frac{y}{\rho(x)}\right)$$

ağırlık fonksiyonuna göre ortogonaldir (Koornwinder 1975).

İspat. $F_{n,k}(x,y)$ polinomunun açık ifadesi ortogonallik bağıntısında yerine yazılıp, $u = \frac{y}{\rho(x)}$ değişken değiştirmesi yapılırsa $(n,k) \neq (m,l)$ için

$$\begin{aligned}
&\iint\limits_R F_{n,k}(x,y)\, F_{m,l}(x,y)\, W(x,y)\, dxdy \\
&= \int\limits_{x=a}^{b} \int\limits_{y=c\rho(x)}^{d\rho(x)} p_{n-k}^{k}(x)\, p_{m-l}^{l}(x)\, (\rho(x))^{k+l} \\
&\quad \times q_k\left(\frac{y}{\rho(x)}\right) q_l\left(\frac{y}{\rho(x)}\right) w_1(x)\, w_2\left(\frac{y}{\rho(x)}\right) dydx \\
&= \int\limits_{x=a}^{b} p_{n-k}^{k}(x)\, p_{m-l}^{l}(x)\, (\rho(x))^{k+l+1}\, w_1(x)\, dx \\
&\quad \times \int\limits_{u=c}^{d} q_k(u)\, q_l(u)\, w_2(u)\, du \\
&= 0
\end{aligned}$$

elde edilir ki bu da ispatı tamamlar. ■

Bu teoremde özel seçimler yaparak Jacobi polinomlarının farklı iki değişkenli analoglarını aşağıda verelim (Koornwinder 1975).

i. $\rho(x) = (1-x^2)^{1/2}$, $w_1(x) = w_2(x) = (1-x^2)^{\gamma}$, $(a,b) = (c,d) = (-1,1)$ özel seçimi

$$\begin{aligned}
{}_2P_{n,k}^{\gamma}(x,y) &= P_{n-k}^{\left(\gamma+k+\frac{1}{2},\gamma+k+\frac{1}{2}\right)}(x)\left(1-x^2\right)^{k/2} P_k^{(\gamma,\gamma)}\left(\frac{y}{\sqrt{1-x^2}}\right) \qquad (4.56)\\
&(\gamma > -1\ ,\ n \geq k \geq 0\ ,\ \ n,k \in \mathbb{N}_0)
\end{aligned}$$

polinom ailesini verir. Bu polinomlar $W(x,y) = (1-x^2-y^2)^{\gamma}$ ağırlık fonksiyonuna göre birim diskte ortogonaldirler.

Malave, bu polinomları eliptik bölgede tanımlamıştır.

$$\Omega = \left\{(x,y) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1\right\}$$

eliptik bölgesinde $\left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right)^{\gamma}$ ağırlık fonksiyonuna göre ortogonal olan bu polinomlar

$$\begin{aligned}
S_{p,m}^{\gamma}(x,y) &= P_{p-m}^{\left(\gamma+m+\frac{1}{2},\gamma+m+\frac{1}{2}\right)}\left(\frac{x}{a}\right)\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)^{m/2} P_m^{(\gamma,\gamma)}\left(\frac{y}{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}\right) \qquad (4.57)\\
&(\gamma > -1\ ,\ p \geq m \geq 0\ ,\ \ p,m \in \mathbb{N}_0)
\end{aligned}$$

formunda verilir (Malave 1979).

ii. $\rho(x) = x^{1/2}$, $w_1(x) = x^{\beta}(1-x)^{\alpha}$, $w_2(x) = (1-x^2)^{\beta}$, $(a,b) = (0,1)$ ve $(c,d) = (-1,1)$ özel seçimi

$$R = \left\{(x,y): \quad y^2 < x < 1\right\}$$

bölgesinde

$$W(x,y) = (1-x)^{\alpha}\left(x-y^2\right)^{\beta}$$

ağırlık fonksiyonuna göre ortogonal olan

$$\begin{aligned} {}_3P_{n,k}^{\alpha,\beta}(x,y) &= P_{n-k}^{\left(\alpha,\beta+k+\frac{1}{2}\right)}(2x-1)\,x^{k/2}P_k^{(\beta,\beta)}\left(\frac{y}{\sqrt{x}}\right) \\ &\quad (\alpha,\beta > -1\ ,\ n \geq k \geq 0\ ,\quad n,k \in \mathbb{N}_0) \end{aligned}$$

polinom ailesini verir.

iii. $\rho(x) = x$, $w_1(x) = (1-x)^{\alpha}x^{\beta+\gamma}$, $w_2(x) = x^{\gamma}(1-x)^{\beta}$, $(a,b) = (0,1)$ ve $(c,d) = (0,1)$ özel seçimi

$$\begin{aligned} {}_4P_{n,k}^{\alpha,\beta,\gamma}(x,y) &= P_{n-k}^{(\alpha,\beta+\gamma+2k+1)}(2x-1)\,x^kP_k^{(\beta,\gamma)}\left(\tfrac{2y}{x}-1\right) \\ &\quad (\alpha,\beta,\gamma > -1\ ,\ n \geq k \geq 0\ ,\quad n,k \in \mathbb{N}_0) \end{aligned}$$

polinom ailesini verir. Bu polinomlar

$$W(x,y) = (1-x)^{\alpha}(x-y)^{\beta}y^{\gamma}$$

ağırlık fonksiyonuna göre

$$R = \{(x,y): \quad 0 < y < x < 1\}$$

üçgensel bölgede ortogonaldirler.

iv. $\rho(x) = 1$ durumunda bu teorem bir önceki teoreme indirgenir. $w_1(x) = (1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}$, $w_2(x) = (1-x)^{\gamma}(1+x)^{\delta}$, $(a,b) = (-1,1)$, $(c,d) = (-1,1)$ özel durumunda

$$R = \{(x,y): \ -1 < x < 1\quad ,\quad -1 < y < 1\}$$

bölgesinde

$$W(x,y) = (1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}(1-y)^{\gamma}(1+y)^{\delta}$$

ağırlık fonksiyonuna göre ortogonal olan

$$\begin{aligned} {}_5P_{n,k}^{\alpha,\beta,\gamma,\delta}(x,y) &= P_{n-k}^{(\alpha,\beta)}(x)\,P_{k}^{(\gamma,\delta)}(y) \\ &\quad (\alpha,\beta,\gamma,\delta > -1\ ,\ n \geq k \geq 0\ ,\quad n,k \in \mathbb{N}_0) \end{aligned}$$

polinom ailesi elde edilir.

5. ÇOK DEĞİŞKENLİ ORTOGONAL POLİNOMLAR

Tanım 5.1 $\mathbb{N}_0$ *negatif olmayan tamsayıların kümesi olmak üzere bir multi-index* $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_d) \in \mathbb{N}_0^d$ *olsun.* $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$ *ve* $\mathbf{x} = (x_1, ..., x_d)$ *için* $x_1, ..., x_d$ *değişkenlerinin bir monomiali*

$$\mathbf{x}^\alpha = x_1^{\alpha_1} ... x_d^{\alpha_d}$$

formundadır. Burada $|\alpha| = (\alpha_1 + ... + \alpha_d)$ *sayısı* $\mathbf{x}^\alpha$ *nın toplam derecesini gösterir.* $n-$*yinci dereceden homogen polinomların uzayı*

$$\mathcal{P}_n^d := span\{\mathbf{x}^\alpha : |\alpha| = n, \quad \alpha \in \mathbb{N}_0^d\}$$

ile derecesi en fazla n *olan polinomların uzayı ise*

$$\Pi_n^d := span\{\mathbf{x}^\alpha : |\alpha| \leq n, \quad \alpha \in \mathbb{N}_0^d\}$$

ile gösterilir. Π_n^d *uzayı,* $k = 0, 1, ..., n$ *için* $\mathcal{P}_k^d$ *polinom uzaylarının bir direkt toplamıdır. Bu polinom uzaylarının boyutu sırasıyla*

$$\dim \mathcal{P}_n^d = \binom{n+d-1}{n} \quad ve \quad \dim \Pi_n^d = \binom{n+d}{n}$$

ile verilir (Dunkl ve Xu 2001). d *değişkenli polinomların uzayı üzerinde tanımlanan bir iç çarpım*

$$\langle f, g \rangle = \int_{\mathbb{R}^d} f(\mathbf{x})\, g(\mathbf{x})\, d_\mu(\mathbf{x})$$

olsun. Burada d_μ*,* $\mathbb{R}^d$ *de pozitif Borel ölçüsüdür.*

Tanım 5.2 $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ *olsun.* $P \in \Pi_n^d$ *polinomu*

$$\langle P, Q \rangle = \int_\Omega P(\mathbf{x})\, Q(\mathbf{x})\, d_\mu(\mathbf{x}) = 0 \quad , \quad \forall\, Q \in \Pi_{n-1}^d \ , \quad derQ < derP$$

koşulunu sağlıyorsa, P *ye* $\langle , \rangle$ *iç çarpımına göre* n*- yinci dereceden ortogonal polinom adı verilir. Yani,* P *düşük dereceli bütün polinomlara ortogonaldir. Fakat, aynı dereceden polinomlar birbirine ortogonal olmak zorunda değildir.*

n-yinci dereceden ortogonal polinomların uzayı

$$\mathcal{V}_n^d := \left\{ P \in \Pi_n^d : \ \langle P, Q \rangle = 0 \ \ , \ \ \forall\, Q \in \Pi_{n-1}^d \right\}$$

ile gösterilsin. Bu polinom uzayının boyutu

$$\dim \mathcal{V}_n^d = \dim \mathcal{P}_n^d = \binom{n+d-1}{n}$$

dir.

Tanım 5.3 $\{P_\alpha\} \in \mathcal{V}_n^d$ *polinomlarının bir dizisi*

$$\langle P_\alpha, P_\beta \rangle = 0 \quad , \quad \alpha \neq \beta \ \ ve \ \ \langle P_\alpha, P_\alpha \rangle = 1$$

koşullarını sağlıyorsa $\{P_\alpha\}$ *polinom dizisi "ortonormaldir" denir.*

Uyarı 5.1 $\mathcal{V}_n^d$ *polinom uzayı birçok farklı baza sahip olabilir. Fakat bütün bazlar ortonormal olmak zorunda değildir.*

Tanım 5.4 $A_{ij}(\mathbf{x})$ *ve* $B_i(\mathbf{x})$ *ler* $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ *de tanımlı polinomlar olmak üzere,*

$$\begin{aligned} L[u] &= \sum_{i,j=1}^{d} A_{ij}(\mathbf{x}) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{d} B_i(\mathbf{x}) \frac{\partial u}{\partial x_i} = \lambda u \qquad (5.1) \\ \mathbf{x} &= (x_1, ..., x_d) \quad , \quad A_{ij}(\mathbf{x}) = A_{ji}(\mathbf{x}) \quad , \quad 1 \leq i, j \leq d \end{aligned}$$

formunda ikinci basamaktan kısmi diferensiyel denklemini ele alalım. Aşağıdaki koşullar sağlanacak şekilde

$$\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n, \ldots$$

reel sayılarının bir dizisi varsa, (5.1) *denklemine "Kabul Edilebilir (Admissible) Kısmi Diferensiyel Denklem" adı verilir.*

i. *Her bir* n *için*

$$L[u] = \lambda_n u$$

denklemi; $x_1, ..., x_d$ *değişkenlerine göre* $\binom{n+d-1}{n}$ *tane* n*-yinci dereceden lineer bağımsız polinom çözümlere sahip olmalıdır.*

ii. *Derecesi* n *den küçük olan polinom çözümlerinin kümesinde aşikar olmayan çözümler yoktur.*

Teorem 5.1 (5.1) *denkleminin kabul edilebilir (admissible) kısmi diferensiyel denklem olması için gerek ve yeter koşul,*

$$(i)\ \lambda_0 = 0 \quad , \quad \lambda_m \neq \lambda_n \quad (m \neq n)$$

$$(ii)\ \ A_{ij}(x) = a x_i x_j + \sum_{k=1}^{d} b_k^{ij} x_k + f_{ij} \quad , \quad B_i(x) = g x_i + h_i$$

$$(iii)\ \lambda_n = n\left(g + a(n-1)\right)$$

eşitliklerinin sağlanmasıdır (Lee vd. 2004).

Şimdi de çok değişkenli ortogonal polinomların bazı örneklerini tanıtalım.

5.1 Klasik Ortogonal Polinomların Farklı Çarpımları

Teorem 5.2 $\{Q_{n_i}(x_i)\}$ $i = 1, 2, ..., d$ *polinomları,* $h_i(x_i)$ *ağırlık fonksiyonuna göre* (a_i, b_i) *aralığında ortonormal polinomlar olsunlar. Yani*

$$\int_{a_i}^{b_i} h_i(x_i)\, Q_{n_i}(x_i)\, Q_{m_i}(x_i)\, dx_i = \delta_{n_i, m_i} \tag{5.2}$$

koşulunu sağlasınlar. Bu durumda

$$\Omega := \{(x_1, ..., x_d) : \ a_i < x_i < b_i \ , \ i = 1, 2, ..., d\}$$

ve

$$h(\mathbf{x}) = h_1(x_1)\, h_2(x_2) \cdots h_d(x_d)$$

olmak üzere

$$f_{\mathbf{n}}(\mathbf{x}) = f_{n_1, \ldots, n_d}(\mathbf{x}) = Q_{n_1}(x_1) \cdots Q_{n_d}(x_d)$$

polinomları Ω *bölgesinde* $h(\mathbf{x})$ *ağırlık fonksiyonuna göre ortonormal bir sistem teşkil eder. Burada* $\mathbf{n} = (n_1, \ldots, n_d)$ *olmak üzere* $|\mathbf{n}| = n_1 + \cdots + n_d$*, polinomun toplam derecesini gösterir (Lyskova 1991, Dunkl ve Xu 2001).*

İspat. (5.2) koşulu kullanılırsa,

$$\int_{\Omega} h(\mathbf{x}) f_{\mathbf{n}}(\mathbf{x}) f_{\mathbf{m}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{\Omega} h(\mathbf{x}) f_{n_1,\dots,n_d}(\mathbf{x}) f_{m_1,\dots,m_d}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \\
&= \int_{\Omega} [h_1(x_1) h_2(x_2) \cdots h_d(x_d)] [Q_{n_1}(x_1) \cdots Q_{n_d}(x_d)] [Q_{m_1}(x_1) \cdots Q_{m_d}(x_d)] d\mathbf{x} \\
&= \int_{a_1}^{b_1} h_1(x_1) Q_{n_1}(x_1) Q_{m_1}(x_1) dx_1 \cdots \int_{a_d}^{b_d} h_d(x_d) Q_{n_d}(x_d) Q_{m_d}(x_d) dx_d \\
&= \delta_{n_1,m_1} \cdots \delta_{n_d,m_d} \\
&= \begin{cases} 1 \ , & (n_1,...,n_d) = (m_1,...,m_d) \\ 0 \ , & (n_1,...,n_d) \neq (m_1,...,m_d) \end{cases}
\end{aligned}$$

elde edilir ki bu da ispatı tamamlar. ■

Şimdi de bu teoremin önemli bazı örneklerini görelim.

i.

$$f_{n_1,\dots,n_d}(\mathbf{x}) = H_{\mathbf{n}}(\mathbf{x}) = H_{n_1}(x_1) \cdots H_{n_d}(x_d) \tag{5.3}$$

çok değişkenli Hermite polinomları

$$\Omega := \{(x_1,...,x_d) : -\infty < x_i < \infty \ , \ i = 1,2,\dots,d\}$$

bölgesinde

$$h(\mathbf{x}) = \exp\left(-x_1^2 - \cdots - x_d^2\right)$$

ağırlık fonksiyonuna göre ortogonal bir sistem teşkil eder. Bu polinomlar

$$\sum_{j=1}^{d} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2} - 2\sum_{j=1}^{d} x_j \frac{\partial u}{\partial x_j} = -2nu$$

denklemini gerçeklerler. Yine bu denklem Teorem 5.1 in koşullarını gerçeklediğinden kabul edilebilir bir denklem olup $\lambda_n = -2n$ için $\binom{n+d-1}{n}$ tane n-yinci dereceden lineer bağımsız polinom çözüme sahiptir.

ii.

$$f_{n_1,\dots,n_d}(\mathbf{x}) = L_{\mathbf{n}}^{(\alpha_1,\dots,\alpha_d)}(\mathbf{x}) = L_{n_1}^{(\alpha_1)}(x_1) \cdots L_{n_d}^{(\alpha_d)}(x_d)$$

çok değişkenli Laguerre polinomları

$$\Omega := \{(x_1, ..., x_d) : \ 0 < x_i < \infty \ , \ \ i = 1, 2, ..., d\}$$

bölgesinde

$$h(\mathbf{x}) = x_1^{\alpha_1} \cdots x_d^{\alpha_d} e^{-(x_1 + \cdots + x_d)} \quad ; \quad \alpha_i > -1 \, , \, i = 1, 2, \ldots, d$$

ağırlık fonksiyonuna göre ortogonaldirler. Bu polinomlar

$$\sum_{j=1}^{d} x_j \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2} - \sum_{j=1}^{d} (x_j - \alpha_j - 1) \frac{\partial u}{\partial x_j} = -nu$$

denklemini gerçekler. Bu denklem Teorem 5.1 in koşullarını gerçeklediğinden kabul edilebilir bir denklem olup $\lambda_n = -n$ için $\binom{n+d-1}{n}$ tane n-yinci dereceden lineer bağımsız polinom çözüme sahiptir.

iii.

$$f_{n_1, \ldots, n_d}(\mathbf{x}) = C_{\mathbf{n}}^{(\nu_1, \ldots, \nu_d)}(\mathbf{x}) = C_{n_1}^{\nu_1}(x_1) \cdots C_{n_d}^{\nu_d}(x_d) \tag{5.4}$$

çok değişkenli Gegenbauer polinomları

$$\Omega := \{(x_1, \ldots, x_d) : \ -1 < x_i < 1 \, , \ \ i = 1, 2, \ldots, d\}$$

bölgesinde

$$h(\mathbf{x}) = \left(1 - x_1^2\right)^{\nu_1 - \frac{1}{2}} \cdots \left(1 - x_d^2\right)^{\nu_d - \frac{1}{2}} \quad ; \quad \nu_i > -\frac{1}{2} \, , \, i = 1, 2, \ldots, d$$

ağırlık fonksiyonuna göre ortogonal bir sistem oluştururlar.

iv.

$$f_{n_1, \ldots, n_d}(\mathbf{x}) = P_{\mathbf{n}}^{(\alpha_1, \ldots, \alpha_d; \beta_1, \ldots, \beta_d)}(\mathbf{x}) = P_{n_1}^{(\alpha_1, \beta_1)}(x_1) \cdots P_{n_d}^{(\alpha_d, \beta_d)}(x_d)$$

çok değişkenli Jacobi polinomları

$$\Omega := \{(x_1, ..., x_d) : \ -1 < x_i < 1 \, , \ \ i = 1, 2, \ldots, d\}$$

bölgesinde

$$h(\mathbf{x}) = (1 - x_1)^{\alpha_1} (1 + x_1)^{\beta_1} \cdots (1 - x_d)^{\alpha_d} (1 + x_d)^{\beta_d} \quad ; \quad \alpha_i, \beta_i > -1 \, , \, i = 1, 2, \ldots, d$$

ağırlık fonksiyonuna göre ortogonaldirler.

Uyarı 5.2 *(iii) ve (iv) de verilen çok değişkenli Gegenbauer polinomları ve Jacobi polinomlarının sağladığı denklemler kabul edilebilir diferensiyel denklemler değildirler. Çünkü, $n-$yinci dereceden her bir polinoma karşılık gelen λ_n özdeğeri farklıdır. Ayrıca, $f_{n_1,\dots,n_d}(\mathbf{x})$ polinomunun çarpanlarından en az birinin Jacobi polinomu olması durumunda da $f_{n_1,\dots,n_d}(\mathbf{x})$ polinomlarının sağladığı denklem, kabul edilebilir bir diferensiyel denklem olamaz.*

5.2 n-Boyutlu Kürede Ortogonal Polinomlar

$B^d = \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d : \ \|\mathbf{x}\| \leq 1\right\}$ birim küresinde

$$W_\mu(\mathbf{x}) = \left(1 - \|\mathbf{x}\|^2\right)^{\mu - \frac{1}{2}} \quad , \quad \mu > -\frac{1}{2}$$

ağırlık fonksiyonuna göre ortogonal olan polinomların uzayı $\mathcal{V}_n^d$ olsun. Burada $\|\mathbf{x}\| = (x_1^2 + \cdots + x_d^2)^{1/2}$ Öklid normunu gösterir. Bu polinomlar

$$\sum_{i=1}^{d} \frac{\partial^2 P}{\partial x_i^2} - \sum_{j=1}^{d} \frac{\partial}{\partial x_j} x_j \left[(2\mu - 1) P + \sum_{i=1}^{d} x_i \frac{\partial P}{\partial x_i}\right] = -(n+d)(n+2\mu-1) P$$

denklemini sağlarlar. Bu denklem (5.1) formunda kabul edilebilir bir kısmi türevli denklem olup $\lambda_n = -(n+d)(n+2\mu-1)$ için $\binom{n+d-1}{n}$ tane n-yinci dereceden lineer bağımsız polinom çözüme sahiptir. W_μ ağırlık fonksiyonuna göre ortogonal olan $\mathcal{V}_n^d$ polinom uzayının birçok farklı bazı vardır. Bu bazların hepsi bu kısmi türevli denklemi sağlarlar. Bu bazlardan bir tanesi aşağıdaki gibidir.

$\mathbf{x} = (x_1, ..., x_d) \in \mathbb{R}^d$ ve $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_d)$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_0 &= 0, \ \ \mathbf{x}_j = (x_1, ..., x_j) \quad , \quad 1 \leq j \leq d \\ \alpha^j &= (\alpha_j, ..., \alpha_d) \quad , \quad 1 \leq j \leq d \end{aligned} \tag{5.5}$$

olarak tanımlansın. $C_{\alpha_j}^{\lambda_j}(x_j)$, ortonormal Gegenbauer polinomlarını göstersin. $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$ için

$$P_\alpha(\mathbf{x}) = (h_\alpha)^{-1} \prod_{j=1}^{d} \left(1 - \|\mathbf{x}_{j-1}\|^2\right)^{\frac{\alpha_j}{2}} C_{\alpha_j}^{\lambda_j}\left(\frac{x_j}{\sqrt{1 - \|\mathbf{x}_{j-1}\|^2}}\right)$$

polinomları W_μ ağırlık fonksiyonuna göre B^d birim küresinde ortonormaldirler. Burada $\lambda_j = \mu + |\alpha^{j+1}| + \frac{d-j}{2}$ ve

$$h_\alpha = \left\{ \frac{1}{\left(\mu + \frac{d+1}{2}\right)_{|\alpha|}} \prod_{j=1}^{d} \left(\mu + \left|\alpha^{j+1}\right| + \frac{d-j+2}{2} \right)_{\alpha_j} \right\}^{1/2}$$

ile verilir (Dunkl ve Xu 2001).

5.3 Simplekste Ortogonal Polinomlar

$\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$ için $|\mathbf{x}| := x_1 + \cdots + x_d$ olsun.

$$T^d = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d : \ x_1 \geq 0 \ , \ldots , \ x_d \geq 0, \ 1 - |x| \geq 0 \right\}$$

simpleksinde $W_\kappa(\mathbf{x}) = x_1^{\kappa_1 - \frac{1}{2}} \cdots x_d^{\kappa_d - \frac{1}{2}} (1 - |x|)^{\kappa_{d+1} - \frac{1}{2}}$, $\kappa_i > -\frac{1}{2}$ ağırlık fonksiyonuna göre ortogonal olan polinomların uzayı $\mathcal{V}_n^d$ olsun. Bu uzayın elemanları

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{d} x_i (1 - x_i) \frac{\partial^2 P}{\partial x_i^2} - 2 \sum_{1 \leq i < j \leq d} x_i x_j \frac{\partial^2 P}{\partial x_i \partial x_j} \\ &+ \sum_{i=1}^{d} \left(\left(\kappa_i + \tfrac{1}{2} \right) - \left(|\kappa| + \tfrac{d+1}{2} \right) x_i \right) \frac{\partial P}{\partial x_i} = -n \left\{ n + |\kappa| + \tfrac{d-1}{2} \right\} P \end{aligned}$$

kısmi türevli denklemini sağlarlar. Bu denklem (5.1) formunda olup

$$\lambda_n = -n \left\{ n + |\kappa| + \frac{d-1}{2} \right\}$$

için $\binom{n+d-1}{n}$ tane n-yinci dereceden lineer bağımsız polinom çözüme sahiptir. Burada $|\kappa| = \kappa_1 + \cdots + \kappa_{d+1}$ dir. $W_\kappa(\mathbf{x})$ ağırlık fonksiyonuna göre ortogonal olan $\mathcal{V}_n^d$ nin birçok farklı bazı vardır. Bu bazlardan bir tanesi aşağıdaki gibidir.

$\mathbf{x}_j$ ve α^j, (5.5) deki gibi tanımlansın. $\kappa = (\kappa_1, \ldots, \kappa_{d+1})$ olmak üzere

$$\kappa^j = (\kappa_j, \ldots, \kappa_{d+1}) \quad , \quad 1 \leq j \leq d+1$$

olsun. $P_{\alpha_j}^{(a_j, b_j)}(x_j)$, Jacobi polinomlarını göstersin. Bu durumda, $\mathcal{V}_n^d$ uzayının ortonormal bir bazı

$$P_\alpha(\mathbf{x}) = (h_\alpha)^{-1} \prod_{j=1}^{d} \left(\frac{1 - |\mathbf{x}_j|}{1 - |\mathbf{x}_{j-1}|} \right)^{2\left|\alpha^{j+1}\right|} P_{\alpha_j}^{(a_j, b_j)} \left(\frac{2x_j}{1 - |\mathbf{x}_{j-1}|} - 1 \right)$$

formundadır. Burada, $a_j = 2\left|\alpha^{j+1}\right| + \left|\kappa^{j+1}\right| + \frac{d-j-1}{2},\ b_j = \kappa_j - \frac{1}{2}$ ve

$$h_\alpha = \left\{ \frac{\left(|\kappa| + \frac{d+1}{2}\right)_{|\alpha|}}{\prod\limits_{j=1}^{d} \left(2\left|\alpha^{j+1}\right| + \left|\kappa^{j}\right| + \frac{d-j+2}{2}\right)_{2\alpha_j}} \right\}^{1/2}$$

olarak verilir (Dunkl ve Xu 2001).

6. ÇOK DEĞİŞKENLİ LAGRANGE POLİNOMLARI İLE JACOBİ POLİNOMLARI ARASINDAKİ İLİŞKİLER

İki değişkenli $\mathrm{g}_n^{(\alpha,\beta)}(x,y)$ Lagrange polinomları

$$\frac{1}{(1-xt)^{\alpha}(1-yt)^{\beta}} = \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{g}_n^{(\alpha,\beta)}(x,y)\,t^n,$$
$$\left(\alpha,\beta\in\mathbb{C}\ \ ;\ \ |t|<min\left\{|x|^{-1},|y|^{-1}\right\}\right)$$

doğurucu fonksiyon bağıntısı yardımıyla tanımlanmaktadır (Erdélyi vd. 1955). Jacobi polinomları ile iki değişkenli Lagrange polinomları arasında aşağıdaki formda bir bağıntı gerçeklenir (Chan vd. 2001):

$$P_n^{(-\alpha-n,-\beta-n)}\left(\frac{x+y}{x-y}\right) = (y-x)^{-n}\,\mathrm{g}_n^{(\alpha,\beta)}(x,y). \tag{6.1}$$

Bu eşitlikte $\alpha\to-\alpha-n$, $\beta\to-\beta-n$ alınırsa

$$P_n^{(\alpha,\beta)}\left(\frac{x+y}{x-y}\right) = (y-x)^{-n}\,\mathrm{g}_n^{(-\alpha-n,-\beta-n)}(x,y) \tag{6.2}$$

sağlanır.

Lagrange polinomlarının çok değişkenli bir analoğu

$$\prod_{i=1}^{r}\left\{(1-x_it)^{-\alpha_i}\right\} = \sum_{n=0}^{\infty}\mathrm{g}_n^{(\alpha_1,\ldots,\alpha_r)}(x_1,\ldots,x_r)\,t^n, \tag{6.3}$$
$$\left(\alpha_1,\ldots,\alpha_r\in\mathbb{C}\ \ ;\ \ |t|<min\left\{|x_1|^{-1},\ldots,|x_r|^{-1}\right\}\right)$$

doğurucu fonksiyon bağıntısı ile tanımlanır (Chan vd. 2001). Bu polinomlar Chan-Chyan-Srivastava polinomları olarak da adlandırılırlar. (6.1) bağıntısına benzer olarak çok değişkenli Lagrange polinomları ile Jacobi polinomları arasında aşağıdaki formda bir bağıntı gerçeklenir.

Teorem 6.1 *Çok değişkenli Lagrange polinomları ile Jacobi polinomları arasında*

$$\begin{aligned}&\mathrm{g}_n^{(\alpha_1,\ldots,\alpha_r)}(x_1,\ldots,x_r)\\ =& \sum_{n_1+\ldots+n_{r-1}=n}\ \prod_{i=1}^{r-2}\binom{-\alpha_i}{n_i}(-1)^{n_i}x_i^{n_i}(x_{r-1}-x_r)^{n_{r-1}}\\ &\times P_{n_{r-1}}^{(-\alpha_r-n_{r-1},-\alpha_{r-1}-n_{r-1})}\left(\frac{x_r+x_{r-1}}{x_r-x_{r-1}}\right)\end{aligned} \tag{6.4}$$

eşitliği sağlanır (Altın vd. 2009).

İspat. (6.3) doğurucu fonksiyonundan çok değişkenli Lagrange polinomları açık formda

$$\mathrm{g}_n^{(\alpha_1,\ldots,\alpha_r)}(x_1,\ldots,x_r)=\sum_{k_1+\cdots+k_r=n}(\alpha_1)_{k_1}\cdots(\alpha_r)_{k_r}\frac{x_1^{k_1}}{k_1!}\cdots\frac{x_r^{k_r}}{k_r!} \tag{6.5}$$

olarak yazılır (Chan vd. 2001). $\binom{-s}{m}=(-1)^m\dfrac{(s)_m}{m!}$ özelliği kullanılarak (6.5) eşitliği

$$\begin{aligned}
\mathrm{g}_n^{(\alpha_1,\ldots,\alpha_r)}(x_1,\ldots,x_r) &= \sum_{k_1+\cdots+k_r=n}\binom{-\alpha_1}{k_1}\cdots\binom{-\alpha_r}{k_r}(-1)^{k_1+\cdots+k_r}x_1^{k_1}\cdots x_r^{k_r}\\
&= \sum_{k_1=0}^{n}\sum_{k_2=0}^{k_1}\cdots\sum_{k_{r-1}=0}^{k_{r-2}}\binom{-\alpha_1}{n-k_1}\cdots\binom{-\alpha_{r-1}}{k_{r-2}-k_{r-1}}\binom{-\alpha_r}{k_{r-1}}(-1)^n\\
&\quad\times x_1^{n-k_1}x_2^{k_1-k_2}\cdots x_r^{k_{r-1}}
\end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir. Bu eşitliğin sağ tarafı $(x_{r-1}-x_r)^{k_{r-1}+k_{r-2}}$ ile çarpılıp bölünürse ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned}
&\mathrm{g}_n^{(\alpha_1,\ldots,\alpha_r)}(x_1,\ldots,x_r)\\
&= \sum_{k_1=0}^{n}\sum_{k_2=0}^{k_1}\cdots\sum_{k_{r-2}=0}^{k_{r-3}}\binom{-\alpha_1}{n-k_1}\cdots\binom{-\alpha_{r-2}}{k_{r-3}-k_{r-2}}(-1)^{n-k_{r-2}}\\
&\quad\times x_1^{n-k_1}x_2^{k_1-k_2}\cdots x_{r-2}^{k_{r-3}-k_{r-2}}(x_{r-1}-x_r)^{k_{r-2}}\\
&\quad\times\sum_{k_{r-1}=0}^{k_{r-2}}\binom{-\alpha_r}{k_{r-1}}\binom{-\alpha_{r-1}}{k_{r-2}-k_{r-1}}\left(\frac{x_r}{x_r-x_{r-1}}\right)^{k_{r-1}}\left(\frac{x_{r-1}}{x_r-x_{r-1}}\right)^{k_{r-2}-k_{r-1}}
\end{aligned}$$

bulunur. Burada Jacobi polinomlarının (3.7) ile verilen açık ifadesi gözönünde bulundurulursa

$$\begin{aligned}
&\mathrm{g}_n^{(\alpha_1,\ldots,\alpha_r)}(x_1,\ldots,x_r)\\
&= \sum_{k_1=0}^{n}\sum_{k_2=0}^{k_1}\cdots\sum_{k_{r-2}=0}^{k_{r-3}}\binom{-\alpha_1}{n-k_1}\cdots\binom{-\alpha_{r-2}}{k_{r-3}-k_{r-2}}(-1)^{n-k_{r-2}}\\
&\quad\times x_1^{n-k_1}x_2^{k_1-k_2}\cdots x_{r-2}^{k_{r-3}-k_{r-2}}(x_{r-1}-x_r)^{k_{r-2}}\\
&\quad\times P_{k_{r-2}}^{(-\alpha_r-k_{r-2},-\alpha_{r-1}-k_{r-2})}\left(\frac{x_r+x_{r-1}}{x_r-x_{r-1}}\right)\\
&= \sum_{n_1+\cdots+n_{r-1}=n}\prod_{i=1}^{r-2}\binom{-\alpha_i}{n_i}(-1)^{n_i}x_i^{n_i}(x_{r-1}-x_r)^{n_{r-1}}\\
&\quad\times P_{n_{r-1}}^{(-\alpha_r-n_{r-1},-\alpha_{r-1}-n_{r-1})}\left(\frac{x_r+x_{r-1}}{x_r-x_{r-1}}\right)
\end{aligned}$$

elde edilir ki bu da istenilendir. ■

7. İKİ DEĞİŞKENLİ ORTOGONAL POLİNOMLARIN BİR AİLESİ VE BAZI ÖZELLİKLERİ

Bu bölümde, (4.57) ile verilen iki değişkenli ortogonal polinomlar ile genelleştirilmiş Gegenbauer polinomlarından yararlanarak iki değişkenli polinomların bir ailesini tanımlayacağız ve bazı özelliklerini vereceğiz.

7.1 İki Değişkenli Ortogonal Polinomların Bir Ailesi

$\gamma > -1,\ \mu \geq 0,\ a, b \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere, $n \geq k \geq 0$, $n, k \in \mathbb{N}_0$ için aşağıdaki formda Jacobi polinomlarının iki değişkenli farklı bir analoğunu ele alalım (Aktaş vd. 2011):

$$P_{2n,2k}^{(\gamma,\mu)}(x,y) = P_{n-k}^{\left(\gamma+2k+\frac{1}{2},\mu-\frac{1}{2}\right)}\left(\frac{2x^2}{a^2}-1\right)\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)^k P_{2k}^{(\gamma,\gamma)}\left(\frac{y}{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}\right), \tag{7.1}$$

$$P_{2n+1,2k}^{(\gamma,\mu)}(x,y) = xP_{n-k}^{\left(\gamma+2k+\frac{1}{2},\mu+\frac{1}{2}\right)}\left(\frac{2x^2}{a^2}-1\right)\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)^k P_{2k}^{(\gamma,\gamma)}\left(\frac{y}{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}\right). \tag{7.2}$$

x ve y değişkenlerine göre bu polinomların toplam derecesi sırasıyla $2n$ ve $2n+1$ dir. y değişkenine göre dereceleri ise $2k$ dır. (7.1) ve (7.2) ile verilen polinomların ilk birkaç tanesi aşağıdaki formda yazılabilir:

$$P_{0,0}^{(\gamma,\mu)}(x,y) = 1$$
$$P_{1,0}^{(\gamma,\mu)}(x,y) = x$$
$$P_{2,0}^{(\gamma,\mu)}(x,y) = \frac{(\gamma+\mu+2)}{a^2}x^2 - \frac{(2\mu+1)}{2}$$
$$P_{2,2}^{(\gamma,\mu)}(x,y) = \frac{(\gamma+2)}{4a^2}x^2 + \frac{(2\gamma+3)(\gamma+2)}{4b^2}y^2 - \frac{(\gamma+2)}{4}$$
$$P_{3,0}^{(\gamma,\mu)}(x,y) = \frac{(\gamma+\mu+3)}{a^2}x^3 - \frac{(2\mu+3)}{2}x$$
$$P_{3,2}^{(\gamma,\mu)}(x,y) = \frac{(\gamma+2)}{4a^2}x^3 + \frac{(2\gamma+3)(\gamma+2)}{4b^2}xy^2 - \frac{(\gamma+2)}{4}x$$
$$P_{4,0}^{(\gamma,\mu)}(x,y) = \frac{(\gamma+\mu+3)(\gamma+\mu+4)}{2a^4}x^4 - \frac{(\gamma+\mu+3)(2\mu+3)}{2a^2}x^2 + \frac{1}{2}(\mu^2+2\mu+\tfrac{3}{4}).$$

Teorem 7.1 *Yukarıda tanımlanan polinomlar genelleştirilmiş Gegenbauer polinomları yardımıyla aşağıdaki şekilde gösterilebilirler:*

$$P_{2n,2k}^{(\gamma,\mu)}(x,y) = \frac{\left(\mu+\frac{1}{2}\right)_{n-k}}{(\gamma+2k+\mu+1)_{n-k}} C_{2(n-k)}^{(\gamma+2k+1,\mu)}\left(\frac{x}{a}\right)\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)^k P_{2k}^{(\gamma,\gamma)}\left(\frac{y}{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}\right), \tag{7.3}$$

$$P_{2n+1,2k}^{(\gamma,\mu)}(x,y) = \frac{a\left(\mu+\frac{1}{2}\right)_{n-k+1}}{(\gamma+2k+\mu+1)_{n-k+1}} C_{2(n-k)+1}^{(\gamma+2k+1,\mu)}\left(\frac{x}{a}\right)\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)^k P_{2k}^{(\gamma,\gamma)}\left(\frac{y}{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}\right). \tag{7.4}$$

İspat. (7.1) ve (7.2) polinomlarında sırasıyla (3.16) ve (3.17) eşitlikleri dikkate alınırsa (7.3) ve (7.4) elde edilir. ■

Teorem 7.2 *(7.1) ve (7.2) ile tanımlanan Jacobi polinomlarının iki değişkenli analogları*

$$\Omega = \left\{(x,y) : \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} \leq 1\right\}$$

eliptik bölgesinde

$$\omega(x,y;\gamma,\mu) = |x|^{2\mu}\left(1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\right)^{\gamma}$$

ağırlık fonksiyonuna göre ortogonaldirler. Bu polinomların normları

$$\begin{aligned}\left\|P_{2n,2k}^{(\gamma,\mu)}(x,y)\right\| &= \left\{\frac{ba^{2\mu+1}2^{2\gamma+1}\left(\Gamma(\gamma+2k+1)\right)^2\Gamma\left(\gamma+n+k+\frac{3}{2}\right)}{(n-k)!\,(2k)!\,(\gamma+\mu+2n+1)\,(2\gamma+4k+1)}\right. \\ &\quad \left.\times\frac{\Gamma\left(\mu+n-k+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(\gamma+\mu+n+k+1)\,\Gamma(2\gamma+2k+1)}\right\}^{1/2}\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}\left\|P_{2n+1,2k}^{(\gamma,\mu)}(x,y)\right\| &= \left\{\frac{ba^{2\mu+3}2^{2\gamma+1}\left(\Gamma(\gamma+2k+1)\right)^2\Gamma\left(\gamma+n+k+\frac{3}{2}\right)}{(n-k)!\,(2k)!\,(\gamma+\mu+2n+2)\,(2\gamma+4k+1)}\right. \\ &\quad \left.\times\frac{\Gamma\left(\mu+n-k+\frac{3}{2}\right)}{\Gamma(\gamma+\mu+n+k+2)\,\Gamma(2\gamma+2k+1)}\right\}^{1/2}\end{aligned}$$

bağıntıları ile verilir.

İspat. (7.1) eşitliğinden

$$\begin{aligned}
&\iint\limits_{\Omega} P_{2n,2k}^{(\gamma,\mu)}(x,y)\;\; P_{2m,2l}^{(\gamma,\mu)}(x,y)\,\omega(x,y;\gamma,\mu)\,dxdy \\
=\; &\iint\limits_{\Omega} \left\{ P_{n-k}^{\left(\gamma+2k+\frac{1}{2},\mu-\frac{1}{2}\right)}\left(\frac{2x^2}{a^2}-1\right)\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)^{k+l} P_{2k}^{(\gamma,\gamma)}\left(\frac{y}{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}\right)\right. \\
&\times P_{m-l}^{\left(\gamma+2l+\frac{1}{2},\mu-\frac{1}{2}\right)}\left(\frac{2x^2}{a^2}-1\right) P_{2l}^{(\gamma,\gamma)}\left(\frac{y}{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}\right)|x|^{2\mu}\left(1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\right)^{\gamma} dxdy\Bigg\} \\
=\; &\left\{\int\limits_{-1}^{1} P_{n-k}^{\left(\gamma+2k+\frac{1}{2},\mu-\frac{1}{2}\right)}\left(2v^2-1\right) P_{m-l}^{\left(\gamma+2l+\frac{1}{2},\mu-\frac{1}{2}\right)}\left(2v^2-1\right)\left(1-v^2\right)^{k+l+\gamma+\frac{1}{2}}|v|^{2\mu}\,dv\right\} \\
&\times a^{2\mu+1} b\left\{\int\limits_{-1}^{1} P_{2k}^{(\gamma,\gamma)}(u)\, P_{2l}^{(\gamma,\gamma)}(u)\left(1-u^2\right)^{\gamma} du\right\}
\end{aligned}$$

yazılabilir. (3.6) ve (3.18) ortogonallik bağıntılarından dolayı

$$\begin{aligned}
&\iint\limits_{\Omega} P_{2n,2k}^{(\gamma,\mu)}(x,y)\;\; P_{2m,2l}^{(\gamma,\mu)}(x,y)\,\omega(x,y;\gamma,\mu)\,dxdy \\
=\; &\frac{ba^{2\mu+1}2^{2\gamma+1}\left(\Gamma(\gamma+2k+1)\right)^2\Gamma\left(\gamma+n+k+\frac{3}{2}\right)}{(n-k)!\,(2k)!\,(\gamma+\mu+2n+1)\,(2\gamma+4k+1)\,\Gamma(\gamma+\mu+n+k+1)} \\
&\times\frac{\Gamma\left(\mu+n-k+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(2\gamma+2k+1)}\delta_{nm}\delta_{kl}
\end{aligned}$$

gerçeklenir. Benzer şekilde (7.2) eşitliği kullanılıp (3.6) ve (3.19) ortogonallik bağıntılarından yararlanılırsa

$$\begin{aligned}
&\iint\limits_{\Omega} P_{2n+1,2k}^{(\gamma,\mu)}(x,y)\;\; P_{2m+1,2l}^{(\gamma,\mu)}(x,y)\,\omega(x,y;\gamma,\mu)\,dxdy \\
=\; &\frac{ba^{2\mu+3}2^{2\gamma+1}\left(\Gamma(\gamma+2k+1)\right)^2\Gamma\left(\gamma+n+k+\frac{3}{2}\right)}{(n-k)!\,(2k)!\,(\gamma+\mu+2n+2)\,(2\gamma+4k+1)\,\Gamma(\gamma+\mu+n+k+2)} \\
&\times\frac{\Gamma\left(\mu+n-k+\frac{3}{2}\right)}{\Gamma(2\gamma+2k+1)}\delta_{nm}\delta_{kl}
\end{aligned}$$

elde edilir. Diğer taraftan, (7.1) ve (7.2) eşitliklerinden

$$\begin{aligned}
&\iint\limits_{\Omega} P_{2n,2k}^{(\gamma,\mu)}(x,y)\ P_{2m+1,2l}^{(\gamma,\mu)}(x,y)\,\omega(x,y;\gamma,\mu)\,dxdy \\
&= \iint\limits_{\Omega} P_{n-k}^{\left(\gamma+2k+\frac{1}{2},\mu-\frac{1}{2}\right)}\left(\tfrac{2x^2}{a^2}-1\right)\left(1-\tfrac{x^2}{a^2}\right)^{k+l} P_{2k}^{(\gamma,\gamma)}\left(\frac{y}{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}\right) \\
&\times P_{m-l}^{\left(\gamma+2l+\frac{1}{2},\mu+\frac{1}{2}\right)}\left(\tfrac{2x^2}{a^2}-1\right) P_{2l}^{(\gamma,\gamma)}\left(\frac{y}{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}\right) x\,|x|^{2\mu}\left(1-\tfrac{x^2}{a^2}-\tfrac{y^2}{b^2}\right)^{\gamma} dxdy \\
&= \left\{\int_{-1}^{1} P_{n-k}^{\left(\gamma+2k+\frac{1}{2},\mu-\frac{1}{2}\right)}(2v^2-1)\,P_{m-l}^{\left(\gamma+2l+\frac{1}{2},\mu-\frac{1}{2}\right)}(2v^2-1)\,(1-v^2)^{k+l+\gamma+\frac{1}{2}}\,\nu\,|v|^{2\mu}\,dv\right\} \\
&\times a^{2\mu+2}b\left\{\int_{-1}^{1} P_{2k}^{(\gamma,\gamma)}(u)\,P_{2l}^{(\gamma,\gamma)}(u)\,(1-u^2)^{\gamma}\,du\right\}
\end{aligned}$$

yazılabilir ki, burada birinci integralin içindeki fonksiyon tek fonksiyon olup Lemma 2.4 (ii) den dolayı

$$\iint\limits_{\Omega} P_{2n,2k}^{(\gamma,\mu)}(x,y)\ P_{2m+1,2l}^{(\gamma,\mu)}(x,y)\,\omega(x,y;\gamma,\mu)\,dxdy = 0$$

sağlanır. ∎

İki değişkenli $g_n^{(\alpha,\beta)}(x,y)$ Lagrange polinomları ve Jacobi polinomları arasında (6.1) ile verilen

$$P_n^{(-\alpha-n,-\beta-n)}\left(\frac{x+y}{x-y}\right) = (y-x)^{-n}\,g_n^{(\alpha,\beta)}(x,y)$$

eşitliği sağlanır. Bu eşitlik yardımıyla $P_{2n,2k}^{(\gamma,\mu)}(x,y)$ ve $P_{2n+1,2k}^{(\gamma,\mu)}(x,y)$ polinomları ile Lagrange polinomları arasında aşağıdaki formda bağıntılar elde edilebilir.

Teorem 7.3 *$P_{2n,2k}^{(\gamma,\mu)}(x,y)$ ve $P_{2n+1,2k}^{(\gamma,\mu)}(x,y)$ polinomları ile Lagrange polinomları arasında*

$$\begin{aligned}
P_{2n,2k}^{(\gamma,\mu)}(x,y) &= (-1)^{n-k}x^{n-k}a^{2k-2n}\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)^{k} g_{n-k}^{\left(-\gamma-n-k-\frac{1}{2},-\mu-n+k+\frac{1}{2}\right)}\left(x,\tfrac{x^2-a^2}{x}\right) \\
&\times g_{2k}^{(-\gamma-2k,-\gamma-2k)}\left(-\frac{\frac{y}{b}+\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}{2\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}},-\frac{\frac{y}{b}-\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}{2\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}\right)
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
P_{2n+1,2k}^{(\gamma,\mu)}(x,y) &= (-1)^{n-k}x^{n-k+1}a^{2k-2n}\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)^{k} g_{n-k}^{\left(-\gamma-n-k-\frac{1}{2},-\mu-n+k-\frac{1}{2}\right)}\left(x,\tfrac{x^2-a^2}{x}\right) \\
&\times g_{2k}^{(-\gamma-2k,-\gamma-2k)}\left(-\frac{\frac{y}{b}+\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}{2\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}},-\frac{\frac{y}{b}-\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}{2\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}\right)
\end{aligned}$$

eşitlikleri gerçeklenir.

İspat. (6.1) eşitliğinde y yerine $x - \dfrac{a^2}{x}$, α yerine $-\left(\gamma + n + 2k + \frac{1}{2}\right)$ ve β yerine $-n - \mu + \frac{1}{2}$ alınırsa

$$P_n^{\left(\gamma+2k+\frac{1}{2},\mu-\frac{1}{2}\right)}\left(\frac{2x^2}{a^2}-1\right) = \frac{(-1)^n x^n}{a^{2n}} \mathrm{g}_n^{\left(-\gamma-n-2k-\frac{1}{2},-n-\mu+\frac{1}{2}\right)}\left(x, \frac{x^2-a^2}{x}\right)$$

elde edilir. Burada n yerine $n-k$ alınırsa

$$P_{n-k}^{\left(\gamma+2k+\frac{1}{2},\mu-\frac{1}{2}\right)}\left(\frac{2x^2}{a^2}-1\right) = \frac{(-1)^{n-k} x^{n-k}}{a^{2(n-k)}} \mathrm{g}_{n-k}^{\left(-\gamma-n-k-\frac{1}{2},-n+k-\mu+\frac{1}{2}\right)}\left(x, \frac{x^2-a^2}{x}\right)$$

olur. Benzer işlemler yapıldığında

$$P_{2k}^{(\gamma,\gamma)}\left(\frac{y}{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}\right) = \mathrm{g}_{2k}^{(-\gamma-2k,-\gamma-2k)}\left(-\frac{\frac{y}{b}+\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}{2\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}, -\frac{\frac{y}{b}-\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}{2\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}\right)$$

eşitliği bulunur. Bu son iki eşitlikten $P_{2n,2k}^{(\gamma,\mu)}(x,y)$ polinomları

$$\begin{aligned} P_{2n,2k}^{(\gamma,\mu)}(x,y) &= (-1)^{n-k} x^{n-k} a^{2k-2n}\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)^k \mathrm{g}_{n-k}^{\left(-\gamma-n-k-\frac{1}{2},-\mu-n+k+\frac{1}{2}\right)}\left(x, \frac{x^2-a^2}{x}\right) \\ &\quad \times \mathrm{g}_{2k}^{(-\gamma-2k,-\gamma-2k)}\left(-\frac{\frac{y}{b}+\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}{2\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}, -\frac{\frac{y}{b}-\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}{2\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}\right) \end{aligned}$$

formunda yazılır. Benzer şekilde, (6.1) eşitliğinden $P_{2n+1,2k}^{(\gamma,\mu)}(x,y)$ polinomları için de istenilen bağıntı elde edilir. ■

7.2 Rekürans Bağıntıları

Jacobi polinomları (3.9) ile verilen aşağıdaki üç terimli rekürans bağıntısını gerçekler.

$$\begin{aligned} & 2n(\alpha+\beta+n)(\alpha+\beta+2n-2) P_n^{(\alpha,\beta)}(x) \\ = \; & \left[\alpha^2-\beta^2+x(\alpha+\beta+2n)(\alpha+\beta+2n-2)\right](\alpha+\beta+2n-1) P_{n-1}^{(\alpha,\beta)}(x) \\ & -2(\alpha+n-1)(\beta+n-1)(\alpha+\beta+2n) P_{n-2}^{(\alpha,\beta)}(x). \end{aligned}$$

Bu rekürans bağıntısından yararlanılarak $P_{2n,2k}^{(\gamma,\mu)}(x,y)$ ve $P_{2n+1,2k}^{(\gamma,\mu)}(x,y)$ polinomları için aşağıdaki rekürans bağıntıları da verilebilir.

Teorem 7.4 *$P_{2n,2k}^{(\gamma,\mu)}(x,y)$ ve $P_{2n+1,2k}^{(\gamma,\mu)}(x,y)$ polinomları sırasıyla*

$$2(n-k)(\gamma+\mu+k+n)(\gamma+\mu+2n-2)P_{2n,2k}^{(\gamma,\mu)}(x,y) = \Big[(\gamma+\mu+2k)(\gamma-\mu+2k+1)$$
$$+\left(\tfrac{2x^2}{a^2}-1\right)(\gamma+\mu+2n)(\gamma+\mu+2n-2)\Big](\gamma+\mu+2n-1)P_{2n-2,2k}^{(\gamma,\mu)}(x,y)$$
$$-2\left(\gamma+n+k-\tfrac{1}{2}\right)\left(n-k+\mu-\tfrac{3}{2}\right)(\gamma+\mu+2n)P_{2n-4,2k}^{(\gamma,\mu)}(x,y)$$

ve

$$2(n-k)(\gamma+\mu+k+n+1)(\gamma+\mu+2n-1)P_{2n+1,2k}^{(\gamma,\mu)}(x,y)$$
$$=-2\left(\gamma+n+k-\tfrac{1}{2}\right)\left(n-k+\mu-\tfrac{1}{2}\right)(\gamma+\mu+2n+1)P_{2n-3,2k}^{(\gamma,\mu)}(x,y)$$
$$+\left[(\gamma+\mu+2k+1)(\gamma-\mu+2k)+\left(\tfrac{2x^2}{a^2}-1\right)(\gamma+\mu+2n+1)(\gamma+\mu+2n-1)\right]$$
$$\times(\gamma+\mu+2n)P_{2n-1,2k}^{(\gamma,\mu)}(x,y)$$

üç terimli rekürans bağıntılarını gerçekler.

İspat. (3.9) eşitliğinde $n\to n-k,\ \alpha\to\gamma+2k+\frac{1}{2},\ \beta\to\mu-\frac{1}{2},\ x\to\frac{2x^2}{a^2}-1$ alınırsa

$$2(n-k)(\gamma+\mu+k+n)(\gamma+\mu+2n-2)P_{n-k}^{\left(\gamma+2k+\frac{1}{2},\mu-\frac{1}{2}\right)}\left(\tfrac{2x^2}{a^2}-1\right)$$
$$=-2\left(\gamma+n+k-\tfrac{1}{2}\right)\left(n-k+\mu-\tfrac{3}{2}\right)(\gamma+\mu+2n)P_{n-k-2}^{\left(\gamma+2k+\frac{1}{2},\mu-\frac{1}{2}\right)}\left(\tfrac{2x^2}{a^2}-1\right)$$
$$+\left\{(\gamma+\mu+2k)(\gamma-\mu+2k+1)+\left(\tfrac{2x^2}{a^2}-1\right)(\gamma+\mu+2n)(\gamma+\mu+2n-2)\right\}$$
$$\times(\gamma+\mu+2n-1)P_{n-k-1}^{\left(\gamma+2k+\frac{1}{2},\mu-\frac{1}{2}\right)}\left(\tfrac{2x^2}{a^2}-1\right)$$

elde edilir. Eşitliğin her iki yanı $\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)^k P_{2k}^{(\gamma,\gamma)}\left(\frac{y}{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}\right)$ ile çarpılıp (7.1) eşitliği gözönünde tutulursa ilk rekürans bağıntısı elde edilir. Benzer işlemler tekrarlanarak ikinci rekürans bağıntısı da kolaylıkla bulunur. ■

Teorem 7.5 *$P_{2n,2k}^{(\gamma,\mu)}(x,y)$ ve $P_{2n+1,2k}^{(\gamma,\mu)}(x,y)$ polinomları için*

$$(\gamma+\mu+n+k+1)P_{2n+1,2k}^{(\gamma,\mu)}(x,y) = (\gamma+\mu+2n+1)xP_{2n,2k}^{(\gamma,\mu)}(x,y) - \left(\gamma+n+k+\tfrac{1}{2}\right)P_{2n-1,2k}^{(\gamma,\mu)}(x,y)$$

ve

$$\begin{aligned} a^2(n-k+1)P^{(\gamma,\mu)}_{2n+2,2k}(x,y) &= x(\gamma+\mu+2n+2)P^{(\gamma,\mu)}_{2n+1,2k}(x,y) \\ &\quad -a^2\left(\mu+n-k+\tfrac{1}{2}\right)P^{(\gamma,\mu)}_{2n,2k}(x,y) \end{aligned}$$

rekürans bağıntıları sağlanır.

İspat. Genelleştirilmiş Gegenbauer polinomları (3.21) ile verilen

$$C^{(\gamma,\mu)}_{2n+1}(x)=\frac{2(\gamma+\mu+2n)}{2\mu+2n+1}xC^{(\gamma,\mu)}_{2n}(x)-\frac{2\gamma+2n-1}{2\mu+2n+1}C^{(\gamma,\mu)}_{2n-1}(x)$$

rekürans bağıntısını gerçekler. Bu bağıntıda n yerine $n-k$, γ yerine $\gamma+2k+1$ ve x yerine $\frac{x}{a}$ alınıp eşitliğin her iki yanı$\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)^k P^{(\gamma,\gamma)}_{2k}\left(\frac{y}{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}\right)$ ile çarpılırsa

$$\begin{aligned} &\left(1-\tfrac{x^2}{a^2}\right)^k P^{(\gamma,\gamma)}_{2k}\left(\tfrac{y}{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}\right)C^{(\gamma+2k+1,\mu)}_{2n-2k+1}\left(\frac{x}{a}\right) \\ =\ & \tfrac{2(\gamma+\mu+2n+1)}{(2\mu+2n-2k+1)a}x\left(1-\tfrac{x^2}{a^2}\right)^k P^{(\gamma,\gamma)}_{2k}\left(\tfrac{y}{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}\right)C^{(\gamma+2k+1,\mu)}_{2n-2k}\left(\frac{x}{a}\right) \\ & -\tfrac{(2\gamma+2n+2k+1)}{(2\mu+2n-2k+1)}\left(1-\tfrac{x^2}{a^2}\right)^k P^{(\gamma,\gamma)}_{2k}\left(\tfrac{y}{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}\right)C^{(\gamma+2k+1,\mu)}_{2n-2k-1}\left(\frac{x}{a}\right) \end{aligned}$$

bulunur. (7.3) ve (7.4) eşitlikleri gözönünde tutulursa

$$\begin{aligned} (\gamma+\mu+n+k+1)P^{(\gamma,\mu)}_{2n+1,2k}(x,y) &= (\gamma+\mu+2n+1)xP^{(\gamma,\mu)}_{2n,2k}(x,y) \\ &\quad -\left(\gamma+n+k+\tfrac{1}{2}\right)P^{(\gamma,\mu)}_{2n-1,2k}(x,y) \end{aligned}$$

elde edilir. İkinci rekürans bağıntısını elde etmek için de benzer işlemleri uygulamak yeterlidir. ■

7.3 İntegral Gösterimler

$P^{(\alpha,\beta)}_n(x)$ Jacobi polinomları için bir integral gösterim

$$\begin{aligned} P^{(\alpha,\beta)}_n(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta+n+1)}\int_0^\infty t^{\alpha+\beta+n}e^{-t}L^{(\alpha)}_n\left(\frac{1}{2}(1-x)t\right)dt \qquad (7.5) \\ (\alpha+\beta &> -1 \quad ; \quad n\in\mathbb{N}_0) \end{aligned}$$

ya da

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta+n+1)}\int_0^1 \left(\log\frac{1}{t}\right)^{\alpha+\beta+n} L_n^{(\alpha)}\left(\frac{1}{2}(1-x)\log\frac{1}{t}\right)dt \quad (7.6)$$
$$(\alpha+\beta>-1 \quad , \quad n\in\mathbb{N}_0)$$

formunda verilmektedir (Feldheim 1941). Burada $L_n^{(\alpha)}(x)$, $n-$yinci dereceden Laguerre polinomlarıdır. (7.5) formülünün bir sonucu olarak aşağıdaki teoremi verebiliriz.

Teorem 7.6 *$\gamma > -\frac{1}{2}$ ve $\gamma+\mu > -1$ olmak üzere $P_{2n,2k}^{(\gamma,\mu)}(x,y)$ ve $P_{2n+1,2k}^{(\gamma,\mu)}(x,y)$ polinomları için birer integral gösterim*

$$\begin{aligned} P_{2n,2k}^{(\gamma,\mu)}(x,y) &= \frac{\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)^k}{\Gamma(\gamma+\mu+n+k+1)\,\Gamma(2\gamma+2k+1)}\int_0^\infty\int_0^\infty t^{\gamma+\mu+n+k}\; s^{2\gamma+2k}e^{-t-s} \\ &\times L_{n-k}^{\left(\gamma+2k+\frac{1}{2}\right)}\left(t\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)\right)L_{2k}^{(\gamma)}\left(\frac{s}{2}-\frac{ys}{2b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}\right)dtds, \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} P_{2n+1,2k}^{(\gamma,\mu)}(x,y) &= \frac{x\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)^k}{\Gamma(\gamma+\mu+n+k+2)\,\Gamma(2\gamma+2k+1)}\int_0^\infty\int_0^\infty t^{\gamma+\mu+n+k+1}\; s^{2\gamma+2k}e^{-t-s} \\ &\times L_{n-k}^{\left(\gamma+2k+\frac{1}{2}\right)}\left(t\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)\right)L_{2k}^{(\gamma)}\left(\frac{s}{2}-\frac{ys}{2b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}\right)dtds \end{aligned}$$

formunda verilir.

Teorem 7.7 *$f_{n,m}^{(\alpha,\beta)}(\theta,\phi)$ ve $\Omega(x,y;\theta,\phi)$ sırasıyla*

$$\begin{aligned} f_{n,m}^{(\alpha,\beta)}(\theta,\phi) &= e^{\{(n-m)\phi i+(\alpha-\beta)\theta i\}}\cos^{m+n}\phi\cos^{\alpha+\beta}\;\theta, \\ \Omega(x,y;\theta,\phi) &= \frac{\cos\theta}{\cos\phi}\left[xe^{(\theta-\phi)i}+ye^{-(\theta-\phi)i}\right] \end{aligned}$$

eşitlikleri ile verilsinler. $\gamma+\mu>-1$, $\gamma>-\frac{1}{2}$ olmak üzere, $P_{2n,2k}^{(\gamma,\mu)}(x,y)$ ve $P_{2n+1,2k}^{(\gamma,\mu)}(x,y)$

polinomları

$$P_{2n,2k}^{(\gamma,\mu)}(x,y)$$

$$= \frac{2^{2\gamma+3k+n+\frac{1}{2}}\Gamma\left(\gamma+n+k+\frac{3}{2}\right)\Gamma(\gamma+2k+1)}{\pi^2\Gamma\left(2\gamma+n+3k+\frac{3}{2}\right)\Gamma(2\gamma+2k+1)\Gamma(\gamma+\mu+n+k+1)}$$
$$\times\int_0^1\int_0^1\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)^k\left(\log\frac{1}{t}\right)^{2\gamma+2k}\left(\log\frac{1}{s}\right)^{\gamma+\mu+n+k} f_{n-k,2k}^{\left(\gamma+2k+\frac{1}{2},\gamma\right)}(\theta,\phi)$$
$$\times L_{n+k}^{\left(2\gamma+2k+\frac{1}{2}\right)}\left(\Omega\left\{\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)\log(1/s),\frac{1}{2}\left(1-\frac{y}{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}\right)\log(1/t);\theta,\phi\right\}\right)d\phi d\theta dt ds$$

ve

$$P_{2n+1,2k}^{(\gamma,\mu)}(x,y)$$

$$= \frac{2^{2\gamma+3k+n+\frac{1}{2}}\Gamma\left(\gamma+n+k+\frac{3}{2}\right)\Gamma(\gamma+2k+1)}{\pi^2\Gamma\left(2\gamma+n+3k+\frac{3}{2}\right)\Gamma(2\gamma+2k+1)\Gamma(\gamma+\mu+n+k+2)}$$
$$\times\int_0^1\int_0^1\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}x\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)^k\left(\log\frac{1}{t}\right)^{2\gamma+2k}\left(\log\frac{1}{s}\right)^{\gamma+\mu+n+k+1} f_{n-k,2k}^{\left(\gamma+2k+\frac{1}{2},\gamma\right)}(\theta,\phi)$$
$$\times L_{n+k}^{\left(2\gamma+2k+\frac{1}{2}\right)}\left(\Omega\left\{\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)\log(1/s),\frac{1}{2}\left(1-\frac{y}{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}\right)\log(1/t);\theta,\phi\right\}\right)d\phi d\theta dt ds$$

integral gösterimlerine sahiptir.

İspat. İki Laguerre polinomunun çarpımı için bir integral gösterim

$$L_n^{(\alpha)}(x)\,L_m^{(\beta)}(y) = \frac{2^{\alpha+\beta+m+n}\Gamma(\alpha+n+1)\Gamma(\beta+m+1)}{\pi^2\Gamma(\alpha+\beta+m+n+1)}$$
$$\times\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} f_{n,m}^{(\alpha,\beta)}(\theta,\phi)\,L_{m+n}^{(\alpha+\beta)}(\Omega\{x,y;\theta,\phi\})\,d\phi d\theta \quad (7.7)$$
$$(\alpha+\beta > -1 \;;\quad m,\ n\in\mathbb{N}_0)$$

ile tanımlanır (Carlitz 1962). Bu bağıntıda

$$n\to n-k,\alpha\to\gamma+2k+\frac{1}{2},x\to\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)\log(1/s)$$

alınıp, eşitliğin her iki yanı $(\log(1/s))^{\gamma+\mu+k+n}$ ile çarpılarak $(0,1)$ aralığında s ye göre integrallenirse, (7.6) integral gösteriminden dolayı

$$P_{n-k}^{\left(\gamma+2k+\frac{1}{2},\mu-\frac{1}{2}\right)}\left(\frac{2x^2}{a^2}-1\right)L_m^{(\beta)}(y) \tag{7.8}$$

$$\begin{aligned} = {} & \frac{2^{\gamma+\beta+n+k+m+\frac{1}{2}}\Gamma\left(\gamma+n+k+\frac{3}{2}\right)\Gamma(\beta+m+1)}{\pi^2\Gamma(\gamma+\mu+n+k+1)\Gamma\left(\gamma+\beta+n+k+m+\frac{3}{2}\right)} \\ & \times\int_0^1\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}(\log(1/s))^{\gamma+\mu+k+n}f_{n-k,m}^{\left(\gamma+2k+\frac{1}{2},\beta\right)}(\theta,\phi) \\ & \times L_{m+n-k}^{\left(\gamma+\beta+2k+\frac{1}{2}\right)}\left(\Omega\left\{\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)\log(1/s),y;\theta,\phi\right\}\right)d\phi d\theta ds \end{aligned} \tag{7.9}$$

sağlanır. Bu son eşitlikte

$$m\to 2k,\ \beta\to\gamma,\ y\to\frac{1}{2}\left(1-\frac{y}{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}\right)\log(1/t)$$

alınır ve eşitliğin her iki yanı $(\log(1/t))^{2\gamma+2k}$ ile çarpılıp $(0,1)$ aralığında t ye göre integrallenirse, ve de (7.6) integral gösteriminden yararlanılırsa

$$P_{n-k}^{\left(\gamma+2k+\frac{1}{2},\mu-\frac{1}{2}\right)}\left(\frac{2x^2}{a^2}-1\right)P_{2k}^{(\gamma,\gamma)}\left(\frac{y}{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}\right)$$

$$\begin{aligned} = {} & \frac{2^{2\gamma+3k+n+\frac{1}{2}}\Gamma\left(\gamma+n+k+\frac{3}{2}\right)\Gamma(\gamma+2k+1)}{\pi^2\Gamma\left(2\gamma+n+3k+\frac{3}{2}\right)\Gamma(2\gamma+2k+1)\Gamma(\gamma+\mu+n+k+1)} \\ & \times\int_0^1\int_0^1\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(\log\frac{1}{t}\right)^{2\gamma+2k}\left(\log\frac{1}{s}\right)^{\gamma+\mu+n+k}f_{n-k,2k}^{\left(\gamma+2k+\frac{1}{2},\gamma\right)}(\theta,\phi) \\ & \times L_{n+k}^{\left(2\gamma+2k+\frac{1}{2}\right)}\left(\Omega\left\{\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)\log(1/s),\frac{1}{2}\left(1-\frac{y}{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}\right)\log(1/t);\theta,\phi\right\}\right)d\phi d\theta dt ds \end{aligned}$$

elde edilir. (7.1) eşitliğinin dikkate alınmasıyla da, $P_{2n,2k}^{(\gamma,\mu)}(x,y)$ polinomları için istenilen integral gösterim bulunmuş olur. Benzer işlemler uygulanarak $P_{2n+1,2k}^{(\gamma,\mu)}(x,y)$ polinomları için de istenilen integral gösterim kolaylıkla elde edilir. ■

Teorem 7.8 *$f_{n,m}^{(\alpha,\beta)}(\theta,\phi)$ fonksiyonu Teorem 7.7 deki gibi tanımlansın. $\gamma>-\frac{1}{2}$ ve $\gamma+\mu>-1$ olmak üzere $P_{2n,2k}^{(\gamma,\mu)}(x,y)$ ve $P_{2n+1,2k}^{(\gamma,\mu)}(x,y)$ polinomları için birer integral* *gösterim*

$$
\begin{aligned}
&P_{2n,2k}^{(\gamma,\mu)}(x,y) \\
= \; & \frac{\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)^k 2^{2\gamma+3k+n+\frac{1}{2}}\Gamma\left(\gamma+n+k+\frac{3}{2}\right)\Gamma(\gamma+2k+1)}{\pi^2(n+k)!\Gamma\left(2\gamma+2k+\frac{3}{2}\right)} \\
&\times \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} f_{n-k,2k}^{\left(\gamma+2k+\frac{1}{2},\gamma\right)}(\theta,\phi)\, F_1[-n-k,\gamma+\mu+n+k+1,2\gamma+2k+1; \\
&2\gamma+2k+\frac{3}{2};\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)\frac{\cos\theta}{\cos\phi}e^{(\theta-\phi)i},\left(\frac{1}{2}-\frac{y}{2b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}\right)\frac{\cos\theta}{\cos\phi}e^{-(\theta-\phi)i}]d\phi d\theta
\end{aligned}
$$

ve

$$
\begin{aligned}
&P_{2n+1,2k}^{(\gamma,\mu)}(x,y) \\
= \; & \frac{x\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)^k 2^{2\gamma+3k+n+\frac{1}{2}}\Gamma\left(\gamma+n+k+\frac{3}{2}\right)\Gamma(\gamma+2k+1)}{\pi^2(n+k)!\Gamma\left(2\gamma+2k+\frac{3}{2}\right)} \\
&\times \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} f_{n-k,2k}^{\left(\gamma+2k+\frac{1}{2},\gamma\right)}(\theta,\phi)\, F_1[-n-k,\gamma+\mu+n+k+2,2\gamma+2k+1; \\
&2\gamma+2k+\frac{3}{2};\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)\frac{\cos\theta}{\cos\phi}e^{(\theta-\phi)i},\left(\frac{1}{2}-\frac{y}{2b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}\right)\frac{\cos\theta}{\cos\phi}e^{-(\theta-\phi)i}]d\phi d\theta
\end{aligned}
$$

eşitlikleri ile verilir.

İspat. Teorem 7.7 nin ispatındaki (7.9) eşitliği

$$
\begin{aligned}
&P_{n-k}^{\left(\gamma+2k+\frac{1}{2},\mu-\frac{1}{2}\right)}\left(\frac{2x^2}{a^2}-1\right)L_m^{(\beta)}(y) \\
= \; & \frac{2^{\gamma+\beta+n+k+m+\frac{1}{2}}\Gamma\left(\gamma+n+k+\frac{3}{2}\right)\Gamma(\beta+m+1)}{\pi^2\Gamma\left(\gamma+\beta+2k+\frac{3}{2}\right)(m+n-k)!} \\
&\times \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} f_{n-k,m}^{\left(\gamma+2k+\frac{1}{2},\beta\right)}(\theta,\phi)\,\Phi_1\left[-m-n+k,\gamma+\mu+n+k+1;\gamma+\beta+2k+\frac{3}{2};\right. \\
&\left.\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)\frac{\cos\theta}{\cos\phi}e^{(\theta-\phi)i},y\frac{\cos\theta}{\cos\phi}e^{-(\theta-\phi)i}\right]d\phi d\theta
\end{aligned}
$$

olarak yazılabilir (Singhal 1974). Burada Φ_1, iki değişkenli Humbert Konfluent hipergeometrik fonksiyonu olup

$$\Phi_1[\alpha,\beta;\gamma;x,y]=\sum_{r,s=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_{r+s}(\beta)_r}{(\gamma)_{r+s}}\frac{x^r}{r!}\frac{y^s}{s!},\quad |x|<1$$

eşitliği ile tanımlanır (Erdélyi vd. 1953). Bu son integral gösterimde $m\to 2k$, $\beta\to\gamma,\ y\to\frac{1}{2}\left(1-\frac{y}{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}\right)\log(1/t)$ alınır ve eşitliğin her iki yanı $(\log(1/t))^{2\gamma+2k}$ ile çarpılarak $(0,1)$ aralığında t ye göre integrallenirse, ve de (7.6) integral gösterimi kullanılırsa

$$\begin{aligned}
&P_{n-k}^{\left(\gamma+2k+\frac{1}{2},\mu-\frac{1}{2}\right)}\left(\frac{2x^2}{a^2}-1\right)P_{2k}^{(\gamma,\gamma)}\left(\frac{y}{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}\right)\\
=\;&\frac{2^{2\gamma+n+3k+\frac{1}{2}}\Gamma\left(\gamma+n+k+\frac{3}{2}\right)\Gamma(\gamma+2k+1)}{\pi^2\Gamma\left(2\gamma+2k+\frac{3}{2}\right)(n+k)!}\\
&\times\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}f_{n-k,2k}^{\left(\gamma+2k+\frac{1}{2},\gamma\right)}(\theta,\phi)\,F_1[-n-k,\gamma+\mu+n+k+1,2\gamma+2k+1;\\
&2\gamma+2k+\frac{3}{2};\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)\frac{\cos\theta}{\cos\phi}e^{(\theta-\phi)i},\left(\frac{1}{2}-\frac{y}{2b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}\right)\frac{\cos\theta}{\cos\phi}e^{-(\theta-\phi)i}]d\phi d\theta
\end{aligned}$$

eşitliğine ulaşılır. Burada $2\gamma>-1$ ve $\gamma+\mu>-1$ dir. (7.1) eşitliğinin dikkate alınmasıyla da $P_{2n,2k}^{(\gamma,\mu)}(x,y)$ polinomları için integral gösterim elde edilmiş olur. $P_{2n+1,2k}^{(\gamma,\mu)}(x,y)$ polinomları için de benzer işlemler uygulanırsa diğer integral gösterim bulunur. ■

8. ÇOK DEĞİŞKENLİ HERMİTE VE GEGENBAUER POLİNOMLARININ YENİ BAZI ÖZELLİKLERİ

$H_n(x)$ Hermite polinomlarının çok değişkenli bir analoğu (5.3) ile verilen

$$H_{\mathbf{n}}(\mathbf{x}) = H_{n_1,...,n_r}(x_1,...,x_r) = H_{n_1}(x_1)\cdots H_{n_r}(x_r)$$

polinomlarıdır. Burada $\mathbf{x} = (x_1,...,x_r)$, $\mathbf{n} = (n_1,...,n_r)$, $|\mathbf{n}| = n_1+\cdots+n_r$; $n_1,...,n_r \in \mathbb{N}_0$ dır (Dunkl ve Xu 2001).

Teorem 5.2 den dolayı $H_{\mathbf{n}}(\mathbf{x})$ Hermite polinomları için ortogonallik teoremi aşağıdaki gibi verilir.

Teorem 8.1 $H_{\mathbf{n}}(\mathbf{x})$ *Hermite polinomları*

$$\Omega = \{(x_1,...,x_r): \ -\infty < x_i < \infty \ ; \ \ i = 1,2,...,r\}$$

bölgesinde

$$\omega(x_1,...,x_r) = \omega_1(x_1)\cdots\omega_r(x_r) = e^{-\left(x_1^2+\cdots+x_r^2\right)}$$

ağırlık fonksiyonuna göre ortogonaldir (Lyskova 1991, Dunkl ve Xu 2001).

İspat. $H_n(x)$ Hermite polinomlarının ortogonallik özelliği kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
&\int\limits_{\Omega} \omega(x_1,...,x_r)\, H_{\mathbf{n}}(\mathbf{x})\, H_{\mathbf{m}}(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} \\
= \ & \int\limits_{-\infty}^{\infty} H_{n_1}(x_1)\, H_{m_1}(x_1)\, e^{-x_1^2} dx_1 \cdots \int\limits_{-\infty}^{\infty} H_{n_r}(x_r)\, H_{m_r}(x_r)\, e^{-x_r^2} dx_r \\
= \ & \pi^{r/2} \prod_{i=1}^{r} 2^{n_i} n_i! \delta_{m_i,n_i} \\
& (m_i, n_i \in \mathbb{N}_0 \ \ ; \ \ i = 1,2,...,r)
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada $d\mathbf{x} = dx_1\cdots dx_r$ dir. ■

8.1 Çok Değişkenli Hermite Polinomları İçin Bazı Limit Bağıntıları

Bu kısımda, Hermite polinomları ile, bilinen diğer bazı polinomlar arasında çeşitli limit bağıntıları elde edilecektir.

Teorem 8.2 *$H_n(x)$ klasik Hermite polinomları ile genişletilmiş Jacobi polinomları, iki değişkenli Lagrange polinomları ve çok değişkenli Lagrange polinomları arasında aşağıdaki limit bağıntıları sağlanır.*

(i) $H_n(x) = n!\left\{c(a-b)\right\}^{-n}$

$$\times \lim_{\nu\to\infty}\left\{\frac{\nu^{-\frac{n}{2}}(2\nu)_n}{\left(\nu+\frac{1}{2}\right)_n}F_n^{\left(\nu-\frac{1}{2},\nu-\frac{1}{2}\right)}\left(a+\tfrac{a(x-\sqrt{\nu})}{2\sqrt{\nu}}-\tfrac{b(x-\sqrt{\nu})}{2\sqrt{\nu}};a,b,c\right)\right\},$$

(ii) $H_n(x) = n!\,(-2x)^{-n}\lim\limits_{\nu\to\infty}\left\{\frac{\nu^{-\frac{n}{2}}(2\nu)_n}{\left(\nu+\frac{1}{2}\right)_n}\mathrm{g}_n^{\left(-\nu-n+\frac{1}{2},-\nu-n+\frac{1}{2}\right)}\left(x,\frac{x^2-x\sqrt{\nu}}{x+\sqrt{\nu}}\right)\right\},$

(iii) $\lim\limits_{\nu\to\infty}\left\{\mathrm{g}_n^{\left(\alpha_1,\ldots,\alpha_{r-2},-\nu-n_{r-1}+\frac{1}{2},-\nu-n_{r-1}+\frac{1}{2}\right)}\left(x_1,\ldots,x_{r-2},\frac{x_r^2-x_r\sqrt{\nu}}{x_r+\sqrt{\nu}},x_r\right)\right.$

$$\left.\times\,\nu^{-\frac{n_{r-1}}{2}}\frac{(2\nu)_{n_{r-1}}}{\left(\nu+\frac{1}{2}\right)_{n_{r-1}}}\right\}$$

$$=\sum_{n_1+\cdots+n_{r-1}=n}\left\{\prod_{i=1}^{r-2}\binom{-\alpha_i}{n_i}(-1)^{n_i}x_i^{n_i}\right\}(-2x_r)^{n_{r-1}}\frac{H_{n_{r-1}}(x_r)}{n_{r-1}!}.$$

İspat. (i) (3.13) ve (3.27) eşitliklerinden,

$$\begin{aligned}H_n(x) &= n!\lim_{\nu\to\infty}\left\{\frac{\nu^{-\frac{n}{2}}(2\nu)_n}{\left(\nu+\frac{1}{2}\right)_n}P_n^{\left(\nu-\frac{1}{2},\nu-\frac{1}{2}\right)}\left(x/\sqrt{\nu}\right)\right\}\\ &= \lim_{\nu\to\infty}\left\{\frac{\nu^{-\frac{n}{2}}(2\nu)_n}{\left(\nu+\frac{1}{2}\right)_n}F_n^{\left(\nu-\frac{1}{2},\nu-\frac{1}{2}\right)}\left(a+\tfrac{a(x-\sqrt{\nu})}{2\sqrt{\nu}}-\tfrac{b(x-\sqrt{\nu})}{2\sqrt{\nu}};a,b,c\right)\right\}\\ &\quad\times n!\left\{c(a-b)\right\}^{-n}\end{aligned}$$

elde edilir.

(ii) (6.2) eşitliğinde $\alpha=\beta\to\nu-\frac{1}{2},\ y\to\frac{x^2-x\sqrt{\nu}}{x+\sqrt{\nu}}$ alınırsa

$$P_n^{\left(\nu-\frac{1}{2},\nu-\frac{1}{2}\right)}\left(\frac{x}{\sqrt{\nu}}\right)=\left(-\frac{2x\sqrt{\nu}}{x+\sqrt{\nu}}\right)^{-n}\mathrm{g}_n^{\left(-\nu-n+\frac{1}{2},-\nu-n+\frac{1}{2}\right)}\left(x,\frac{x^2-x\sqrt{\nu}}{x+\sqrt{\nu}}\right)$$

elde edilir. Bu eşitliğin her iki yanı $\dfrac{\nu^{-n/2}(2\nu)_n}{\left(\nu+\frac{1}{2}\right)_n}$ ile çarpılıp $\nu\to\infty$ için limit alınırsa

$$\begin{aligned}&\lim_{\nu\to\infty}\frac{\nu^{-n/2}(2\nu)_n}{\left(\nu+\frac{1}{2}\right)_n}P_n^{\left(\nu-\frac{1}{2},\nu-\frac{1}{2}\right)}\left(\frac{x}{\sqrt{\nu}}\right)\\ =&\lim_{\nu\to\infty}\frac{\nu^{-n/2}(2\nu)_n}{\left(\nu+\frac{1}{2}\right)_n}\left(-\frac{2x\sqrt{\nu}}{x+\sqrt{\nu}}\right)^{-n}\mathrm{g}_n^{\left(-\nu-n+\frac{1}{2},-\nu-n+\frac{1}{2}\right)}\left(x,\frac{x^2-x\sqrt{\nu}}{x+\sqrt{\nu}}\right)\end{aligned}$$

yazılabilir. Burada

$$\lim_{\nu\to\infty}\left(-\frac{2x\sqrt{\nu}}{x+\sqrt{\nu}}\right)^{-n}=(-2x)^{-n}$$

olduğu gözönünde bulundurulur ve (3.27) limit bağıntısından yararlanılırsa

$$\begin{aligned}H_n(x) &= n!\lim_{\nu\to\infty}\left\{\frac{\nu^{-\frac{n}{2}}(2\nu)_n}{\left(\nu+\frac{1}{2}\right)_n}P_n^{\left(\nu-\frac{1}{2},\nu-\frac{1}{2}\right)}\left(x/\sqrt{\nu}\right)\right\}\\ &= n!\,(-2x)^{-n}\lim_{\nu\to\infty}\left\{\frac{\nu^{-\frac{n}{2}}(2\nu)_n}{\left(\nu+\frac{1}{2}\right)_n}\mathrm{g}_n^{\left(-\nu-n+\frac{1}{2},-\nu-n+\frac{1}{2}\right)}\left(x,\frac{x^2-x\sqrt{\nu}}{x+\sqrt{\nu}}\right)\right\}\end{aligned}$$

elde edilir.

(iii) (6.4) eşitliğinde $x_{r-1}\to\frac{x_r^2-x_r\sqrt{\nu}}{x_r+\sqrt{\nu}},\ \alpha_r=\alpha_{r-1}\to-\nu-n_{r-1}+\frac{1}{2}$ alınırsa

$$\begin{aligned}&\mathrm{g}_n^{\left(\alpha_1,\ldots,\alpha_{r-2},-\nu-n_{r-1}+\frac{1}{2},-\nu-n_{r-1}+\frac{1}{2}\right)}\left(x_1,\ldots,x_{r-2},\frac{x_r^2-x_r\sqrt{\nu}}{x_r+\sqrt{\nu}},x_r\right)\\ =&\sum_{n_1+\ldots+n_{r-1}=n}\left\{\prod_{i=1}^{r-2}\binom{-\alpha_i}{n_i}(-1)^{n_i}x_i^{n_i}\right\}\left(-\frac{2x_r\sqrt{\nu}}{x_r+\sqrt{\nu}}\right)^{n_{r-1}}P_{n_{r-1}}^{\left(\nu-\frac{1}{2},\nu-\frac{1}{2}\right)}\left(\frac{x_r}{\sqrt{\nu}}\right)\end{aligned}$$

bulunur. Eşitliğin her iki yanı $\nu^{-n_{r-1}/2}\frac{(2\nu)_{n_{r-1}}}{\left(\nu+\frac{1}{2}\right)_{n_{r-1}}}$ ile çarpılıp $\nu\to\infty$ için limit alınır ve de

$$\lim_{\nu\to\infty}\left(-\frac{2x_r\sqrt{\nu}}{x_r+\sqrt{\nu}}\right)^{n_{r-1}}=(-2x_r)^{n_{r-1}}$$

eşitliği kullanılırsa

$$\begin{aligned}&\lim_{\nu\to\infty}\nu^{-n_{r-1}/2}\frac{(2\nu)_{n_{r-1}}}{\left(\nu+\frac{1}{2}\right)_{n_{r-1}}}\mathrm{g}_n^{\left(\alpha_1,\ldots,\alpha_{r-2},-\nu-n_{r-1}+\frac{1}{2},-\nu-n_{r-1}+\frac{1}{2}\right)}\left(x_1,\ldots,x_{r-2},\frac{x_r^2-x_r\sqrt{\nu}}{x_r+\sqrt{\nu}},x_r\right)\\ =&\sum_{n_1+\cdots+n_{r-1}=n}\left\{\prod_{i=1}^{r-2}\binom{-\alpha_i}{n_i}(-1)^{n_i}x_i^{n_i}\right\}(-2x_r)^{n_{r-1}}\\ &\times\lim_{\nu\to\infty}\nu^{-n_{r-1}/2}\frac{(2\nu)_{n_{r-1}}}{\left(\nu+\frac{1}{2}\right)_{n_{r-1}}}P_{n_{r-1}}^{\left(\nu-\frac{1}{2},\nu-\frac{1}{2}\right)}\left(\frac{x_r}{\sqrt{\nu}}\right)\end{aligned}$$

yazılabilir. (3.27) limit bağıntısının kullanılmasıyla

$$\begin{aligned}&\lim_{\nu\to\infty}\nu^{-n_{r-1}/2}\frac{(2\nu)_{n_{r-1}}}{\left(\nu+\frac{1}{2}\right)_{n_{r-1}}}\mathrm{g}_n^{\left(\alpha_1,\ldots,\alpha_{r-2},-\nu-n_{r-1}+\frac{1}{2},-\nu-n_{r-1}+\frac{1}{2}\right)}\left(x_1,\ldots,x_{r-2},\frac{x_r^2-x_r\sqrt{\nu}}{x_r+\sqrt{\nu}},x_r\right)\\ =&\sum_{n_1+\cdots+n_{r-1}=n}\left\{\prod_{i=1}^{r-2}\binom{-\alpha_i}{n_i}(-1)^{n_i}x_i^{n_i}\right\}(-2x_r)^{n_{r-1}}\frac{H_{n_{r-1}(x_r)}}{n_{r-1}!}\end{aligned}$$

elde edilir ki bu da ispatı tamamlar. ■

Genişletilmiş Jacobi polinomlarının çok değişkenli bir analoğu

$$F_{\mathbf{n}}^{(\alpha_1,\dots,\alpha_r;\beta_1,\dots,\beta_r)}(\mathbf{x}) := F_{n_1}^{(\alpha_1,\beta_1)}(x_1;a_1,b_1,c_1)\cdots F_{n_r}^{(\alpha_r,\beta_r)}(x_r;a_r,b_r,c_r) \qquad (8.1)$$

formunda tanımlanır. Burada $\mathbf{x}=(x_1,...,x_r)$, $\mathbf{n}=(n_1,...,n_r)$, $|\mathbf{n}|=n_1+\cdots+n_r$; $n_1,...,n_r\in\mathbb{N}_0$ dır (Altın vd. 2009). Ayrıca, Gegenbauer polinomlarının çok değişkenli bir analoğu (5.4) ile verilen

$$C_{\mathbf{n}}^{(\nu_1,\dots,\nu_r)}(\mathbf{x}) = C_{n_1,\dots,n_r}^{(\nu_1,\dots,\nu_r)}(x_1,...,x_r) = C_{n_1}^{\upsilon_1}(x_1)\cdots C_{n_r}^{\upsilon_r}(x_r)$$

polinomlarıdır.

Buradan $F_{\mathbf{n}}^{(\alpha_1,\dots,\alpha_r;\beta_1,\dots,\beta_r)}(\mathbf{x})$, $C_{\mathbf{n}}^{(\nu_1,\dots,\nu_r)}(\mathbf{x})$ ve $H_{\mathbf{n}}(\mathbf{x})$ polinomlarını kullanarak aşağıdaki teoremi verebiliriz.

Teorem 8.3 *Çok değişkenli $H_{\mathbf{n}}(\mathbf{x})$ Hermite polinomları için aşağıdaki bağıntılar sağlanır.*

(i) $$H_{\mathbf{n}}(\mathbf{x}) = \left(\prod_{i=1}^{r} n_i!\,\{c_i(a_i-b_i)\}^{-n_i}\right)$$

$$\times \lim_{(\nu_1,\dots,\nu_r)\to\infty}\left\{F_{\mathbf{n}}^{\left(\nu_1-\frac{1}{2},\dots,\nu_r-\frac{1}{2};\nu_1-\frac{1}{2},\dots,\nu_r-\frac{1}{2}\right)}\left(\mathbf{a}+\frac{\mathbf{a}(\mathbf{x}-\sqrt{\boldsymbol{\nu}})}{2\sqrt{\boldsymbol{\nu}}}-\frac{\mathbf{b}(\mathbf{x}-\sqrt{\nu})}{2\sqrt{\nu}}\right)\prod_{i=1}^{r}\frac{\nu_i^{-\frac{n_i}{2}}(2\nu_i)_{n_i}}{\left(\nu_i+\frac{1}{2}\right)_{n_i}}\right\}.$$

Burada

$$\begin{aligned}&\mathbf{a}+\frac{\mathbf{a}(\mathbf{x}-\sqrt{\boldsymbol{\nu}})}{2\sqrt{\boldsymbol{\nu}}}-\frac{\mathbf{b}(\mathbf{x}-\sqrt{\nu})}{2\sqrt{\nu}}\\ :&=\left(a_1+\frac{a_1(x_1-\sqrt{\nu_1})}{2\sqrt{\nu_1}}-\frac{b_1(x_1-\sqrt{\nu_1})}{2\sqrt{\nu_1}},...,a_r+\frac{a_r(x_r-\sqrt{\nu_r})}{2\sqrt{\nu_r}}-\frac{b_r(x_r-\sqrt{\nu_r})}{2\sqrt{\nu_r}}\right)\end{aligned}$$

dir.

(ii) $$H_{\mathbf{n}}(\mathbf{x}) = n_1!\cdots n_r! \lim_{(\nu_1,\dots,\nu_r)\to\infty}\left\{\nu_1^{-\frac{n_1}{2}}\cdots\nu_r^{-\frac{n_r}{2}}C_{\mathbf{n}}^{(\nu_1,\dots,\nu_r)}\left(\frac{x_1}{\sqrt{\nu_1}},...,\frac{x_r}{\sqrt{\nu_r}}\right)\right\}.$$

İspat. **(i)** Teorem 8.2 (i) ve (8.1) den,

$$\begin{aligned}
& H_{\mathbf{n}}(\mathbf{x}) = H_{n_1}(x_1)\ldots H_{n_r}(x_r) \\
= & \prod_{i=1}^{r} n_i! \left\{c_i(a_i-b_i)\right\}^{-n_i} \\
& \times \lim_{\nu_i\to\infty}\left\{ F_{n_i}^{\left(\nu_i-\frac{1}{2},\nu_i-\frac{1}{2}\right)}\left(a_i+\tfrac{a_i(x_i-\sqrt{\nu_i})}{2\sqrt{\nu_i}}-\tfrac{b_i(x_i-\sqrt{\nu_i})}{2\sqrt{\nu_i}};a_i,b_i,c_i\right)\right. \\
& \left.\times\ \frac{\nu_i^{-\frac{n_i}{2}}(2\nu_i)_{n_i}}{\left(\nu_i+\frac{1}{2}\right)_{n_i}}\right\} \\
= & \left(\prod_{i=1}^{r} n_i! \left\{c_i(a_i-b_i)\right\}^{-n_i}\right) \\
& \times \lim_{(\nu_1,\ldots,\nu_r)\to\infty}\left\{ F_{\mathbf{n}}^{\left(\nu_1-\frac{1}{2},\ldots,\nu_r-\frac{1}{2};\nu_1-\frac{1}{2},\ldots,\nu_r-\frac{1}{2}\right)}\left(\mathbf{a}+\tfrac{\mathbf{a}(\mathbf{x}-\sqrt{\boldsymbol{\nu}})}{2\sqrt{\boldsymbol{\nu}}}-\tfrac{\mathbf{b}(\mathbf{x}-\sqrt{\boldsymbol{\nu}})}{2\sqrt{\boldsymbol{\nu}}}\right)\right. \\
& \left.\times \prod_{i=1}^{r}\frac{\nu_i^{-\frac{n_i}{2}}(2\nu_i)_{n_i}}{\left(\nu_i+\frac{1}{2}\right)_{n_i}}\right\}
\end{aligned}$$

sağlanır.

(ii) İspat için (5.3), (5.4) ve (3.28) eşitliklerini kullanmak yeterlidir. ■

8.2 Doğurucu Fonksiyonlar ve Rekürans Bağıntıları

Bu kısımda, $H_{\mathbf{n}}(\mathbf{x})$ ve $C_{\mathbf{n}}^{(\nu_1,\ldots,\nu_r)}(\mathbf{x})$ polinomları için doğurucu fonksiyonlar ve rekürans bağıntıları verilecektir. $H_n(x)$ Hermite polinomları için bir doğurucu fonksiyon

$$\sum_{n=0}^{\infty} H_{m+n}(x)\frac{t^n}{n!} = \exp\left(2xt-t^2\right)H_m(x-t) \quad , \quad m\in\mathbb{N}_0 \tag{8.2}$$

formundadır (Rainville 1960). Diğer taraftan, Kısım 3.3 de görüldü ki, $C_n^{\nu}(x)$ Gegenbauer polinomları (3.14) ve (3.15) ile verilen

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n^{\nu}(x)\,t^n = \left(1-2xt+t^2\right)^{-\nu}$$

ve

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\lambda)_n}{(\mu)_n}C_n^{\nu}(x)\,t^n = F_1\left[\lambda,\nu,\nu;\mu;\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)t,\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)t\right]$$

doğurucu fonksiyonlarına sahiptir. Bu bağıntıları kullanarak aşağıdaki sonuçları elde edebiliriz.

Teorem 8.4 *Çok değişkenli* $H_{\mathbf{n}}(x_1,\ldots,x_r)$ *Hermite polinomları aşağıdaki doğurucu fonksiyonlara sahiptir.*

(i) $\displaystyle\sum_{n_1,\dots,n_r=0}^{\infty} H_{\mathbf{n}}(x_1,\dots,x_r)\frac{t_1^{n_1}}{n_1!}\cdots\frac{t_r^{n_r}}{n_r!}$

$$= \prod_{i=1}^{r}\exp\left(2x_it_i - t_i^2\right), \tag{8.3}$$

(ii) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} Y_{n+m_1+\cdots+m_r}(x_1,\dots,x_r)\,t^n$

$$= \left\{\prod_{i=1}^{r}\exp\left(2x_it - t^2\right)\right\} H_{\mathbf{m}}(\mathbf{x}-t) \tag{8.4}$$

Burada

$$\begin{aligned} Y_{n+m_1+\cdots+m_r}(x_1,\dots,x_r) &= \sum_{n_1=0}^{n}\sum_{n_2=0}^{n-n_1}\cdots\sum_{n_{r-1}=0}^{n-n_1-\cdots-n_{r-2}} \xi_n(n_1,\dots,n_{r-1}) \\ &\quad \times H_{n+m_1-(n_1+\cdots+n_{r-1}),n_1+m_2,\dots,n_{r-1}+m_r}(x_1,\dots,x_r), \end{aligned}$$

$$H_{\mathbf{m}}(\mathbf{x}-t) = H_{m_1,\dots,m_r}(x_1-t,\dots,x_r-t)$$

ve

$$\xi_n(n_1,\dots,n_{r-1}) = \frac{1}{(n-(n_1+\cdots+n_{r-1}))!n_1!\cdots n_{r-1}!}$$

olarak ifade edilirler.

İspat. (i) (3.26) doğurucu fonksiyonundan (8.3) ün gerçeklendiği görülür.

(ii) $m_1,\dots,m_r \in \mathbb{N}_0$ olmak üzere, (8.2) den $H_{m_1+n_1}(x_1),\dots,H_{m_r+n_r}(x_r)$ polinomları için doğurucu fonksiyonlar sırasıyla

$$\begin{aligned} \sum_{n_1=0}^{\infty} H_{m_1+n_1}(x_1)\frac{t^{n_1}}{n_1!} &= \exp\left(2x_1t-t^2\right)H_{m_1}(x_1-t) \\ \sum_{n_2=0}^{\infty} H_{m_2+n_2}(x_2)\frac{t^{n_2}}{n_2!} &= \exp\left(2x_2t-t^2\right)H_{m_2}(x_2-t) \\ &\ \ \vdots \\ \sum_{n_r=0}^{\infty} H_{m_r+n_r}(x_r)\frac{t^{n_r}}{n_r!} &= \exp\left(2x_rt-t^2\right)H_{m_r}(x_r-t) \end{aligned}$$

formundadır. Bu eşitlikleri taraf tarafa çarparsak

$$\sum_{n_1,\ldots,n_r=0}^{\infty} \frac{H_{m_1+n_1}(x_1)\cdots H_{m_r+n_r}(x_r)}{n_1!\cdots n_r!} t^{n_1+\cdots+n_r}$$
$$= \left\{\prod_{i=1}^{r} \exp\left(2x_i t - t^2\right)\right\} H_{\mathbf{m}}(\mathbf{x}-t) \tag{8.5}$$

elde edilir. Burada $H_{\mathbf{m}}(\mathbf{x}-t) := H_{m_1,\ldots,m_r}(x_1 - t, \ldots, x_r - t)$ dir. Lemma 2.3 den $p = 1$ için

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} A(k,n) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} A(k, n-k)$$

eşitliği sağlanır. Bu özelliğin kullanılmasıyla

$$\sum_{n_1,\ldots,n_r=0}^{\infty} A(n_1,\ldots,n_r) = \sum_{n_1=0}^{\infty}\sum_{n_2=0}^{n_1}\sum_{n_3=0}^{n_1-n_2}\cdots\sum_{n_r=0}^{n_1-n_2-\cdots-n_{r-1}} A(n_1-n_2-\cdots-n_r, n_2,\ldots,n_r)$$

serisel gösteriminin gerçeklendiği görülür. (8.5) eşitliğinin sol yanında bu serisel gösterim kullanılırsa

$$\sum_{n_1,\ldots,n_r=0}^{\infty} \frac{H_{m_1+n_1}(x_1)\cdots H_{m_r+n_r}(x_r)}{n_1!\cdots n_r!} t^{n_1+\cdots+n_r}$$
$$= \sum_{n_1=0}^{\infty}\sum_{n_2=0}^{n_1}\sum_{n_3=0}^{n_1-n_2}\cdots\sum_{n_r=0}^{n_1-n_2-\cdots-n_{r-1}} \frac{H_{m_1+n_1-(n_2+\cdots+n_r)}(x_1)\, H_{m_2+n_2}(x_2)\cdots H_{m_r+n_r}(x_r)}{(n_1-n_2-\cdots-n_r)!n_2!\cdots n_r!} t^{n_1}$$
$$= \left\{\prod_{i=1}^{r} \exp\left(2x_i t - t^2\right)\right\} H_{\mathbf{m}}(\mathbf{x}-t)$$

elde edilir. $n_1 \to n,\ n_2 \to n_1, \ldots, n_r \to n_{r-1}$ indis değiştirmesi yapıldığında

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{n_1=0}^{n}\sum_{n_2=0}^{n-n_1}\cdots\sum_{n_{r-1}=0}^{n-n_1-\cdots-n_{r-2}} \frac{H_{m_1+n-(n_1+\cdots+n_{r-1})}(x_1)\, H_{m_2+n_1}(x_2)\cdots H_{m_r+n_{r-1}}(x_r)}{(n-n_1-\cdots-n_{r-1})!n_1!\cdots n_{r-1}!} t^{n}$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} Y_{n+m_1+\cdots+m_r}(x_1,\ldots,x_r)\, t^n$$
$$= \left\{\prod_{i=1}^{r} \exp\left(2x_i t - t^2\right)\right\} H_{\mathbf{m}}(\mathbf{x}-t)$$

olarak bulunur. Burada $Y_{n+m_1+\cdots+m_r}(x_1,\ldots,x_r)$

$$Y_{n+m_1+\cdots+m_r}(x_1,\ldots,x_r) = \sum_{n_1=0}^{n}\sum_{n_2=0}^{n-n_1}\cdots\sum_{n_{r-1}=0}^{n-n_1-\cdots-n_{r-2}} \xi_n(n_1,\ldots,n_{r-1})$$
$$\times H_{n+m_1-(n_1+\cdots+n_{r-1}),n_1+m_2,\ldots,n_{r-1}+m_r}(x_1,\ldots,x_r)$$

ile tanımlanır. Böylelikle ispat tamamlanır. ■

(3.14) ve (3.15) doğurucu fonksiyonlarını kullanarak ve Teorem 8.4 dekine benzer işlemler uygulanarak çok değişkenli Gegenbauer polinomları için aşağıdaki teorem ispatsız olarak verilebilir.

Teorem 8.5 *Çok değişkenli* $C_{\mathbf{n}}^{(\nu_1,...,\nu_r)}(\mathbf{x})$ *Gegenbauer polinomları aşağıdaki doğurucu fonksiyonlara sahiptir:*

(i) $\displaystyle\sum_{n_1,...,n_r=0}^{\infty} C_{\mathbf{n}}^{(\nu_1,...,\nu_r)}(x_1,...,x_r)\; t_1^{n_1}\cdots t_r^{n_r}$

$$= \prod_{i=1}^{r} \left(1-2x_it_i+t_i^2\right)^{-\nu_i}, \tag{8.6}$$

(ii) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} u_n^{(\nu_1,...,\nu_r)}(x_1,...,x_r)\, t^n$

$$= \prod_{i=1}^{r} F_1\left[\lambda_i,\nu_i,\nu_i;\mu_i;\left(x_i+\sqrt{x_i^2-1}\right)t,\left(x_i-\sqrt{x_i^2-1}\right)t\right]. \tag{8.7}$$

Burada

$$\begin{aligned} u_n^{(\nu_1,...,\nu_r)}(x_1,...,x_r) &= \sum_{n_1=0}^{n}\sum_{n_2=0}^{n-n_1}\cdots\sum_{n_{r-1}=0}^{n-n_1-\cdots-n_{r-2}} \delta_n(n_1,...,n_{r-1}) \\ &\quad \times C_{n-(n_1+\cdots+n_{r-1}),n_1,...,n_{r-1}}^{(\nu_1,...,\nu_r)}(x_1,...,x_r) \end{aligned} \tag{8.8}$$

ve

$$\delta_n(n_1,...,n_{r-1}) = \frac{(\lambda_1)_{n-(n_1+\cdots+n_{r-1})}(\lambda_2)_{n_1}\cdots(\lambda_r)_{n_{r-1}}}{(\mu_1)_{n-(n_1+\cdots+n_{r-1})}(\mu_2)_{n_1}\cdots(\mu_r)_{n_{r-1}}}$$

dir.

Şimdi de $H_{\mathbf{n}}(x_1,...,x_r)$ ve $C_{\mathbf{n}}^{(\nu_1,...,\nu_r)}(x_1,...,x_r)$ ler için rekürans bağıntısı elde etmede kullanacağımız aşağıdaki lemmayı verelim.

Lemma 8.1 $f_{n_1,...,n_r}(x_1,...,x_r)$, *herbir* x_i $(i=1,2,...,r)$ *değişkenine göre* n_i*-yinci dereceden ve toplam derecesi* $n=n_1+\cdots+n_r$ *olan bir polinom olmak üzere,*

$$\Psi(2x_1t_1-t_1^2,...,2x_rt_r-t_r^2) = \sum_{n_1,...,n_r=0}^{\infty} f_{n_1,...,n_r}(x_1,...,x_r)t_1^{n_1}\cdots t_r^{n_r} \tag{8.9}$$

formunda bir doğurucu fonksiyona sahip olsun. Ayrıca

$$\begin{aligned}\Psi(u_1,...,u_r) &= \Psi_1(u_1)\cdots\Psi_r(u_r) \quad ; \quad u_i = 2x_it_i - t_i^2 \quad ; \quad i=1,2,...,r \\ \Psi_i(u_i) &= \sum_{n_i=0}^{\infty}\gamma_{n_i}u_i^{n_i} \quad , \quad \gamma_0 \neq 0\end{aligned}$$

gerçeklensin. Bu durumda $f_{n_1,...,n_r}(x_1,...,x_r)$ fonksiyonları için

$$\begin{aligned}& x_i\frac{\partial}{\partial x_i}f_{n_1,...,n_r}(x_1,...,x_r) \\ = \; & \frac{\partial}{\partial x_i}f_{n_1,...,n_{i-1},n_i-1,n_{i+1},...,n_r}(x_1,...,x_r) + n_if_{n_1,...,n_r}(x_1,...,x_r), \;\; n_i \geq 1\end{aligned} \tag{8.10}$$

rekürans bağıntısı sağlanır.

İspat. (8.9) doğurucu fonksiyonunun x_i ve t_i $(i=1,2,...,r)$ değişkenlerine göre türevleri alınıp gerekli düzenlemeler yapılırsa (8.10) rekürans bağıntısı elde edilir. ■

Lemma 8.1 den yararlanarak çok değişkenli Hermite ve çok değişkenli Gegenbauer polinomları için çeşitli rekürans bağıntıları verilebilir.

Teorem 8.6 *Çok değişkenli $H_{\mathbf{n}}(x_1,...,x_r)$ Hermite polinomları*

$$\begin{aligned}& x_i\frac{\partial}{\partial x_i}H_{n_1,...,n_r}(x_1,...,x_r) - n_i\frac{\partial}{\partial x_i}H_{n_1,...,n_{i-1},n_i-1,n_{i+1},...,n_r}(x_1,...,x_r) \\ = \; & n_iH_{n_1,...,n_r}(x_1,...,x_r) \quad , \quad n_i \geq 1\end{aligned} \tag{8.11}$$

rekürans bağıntısını gerçekler.

İspat. Lemma 8.1 deki doğurucu fonksiyon bağıntısında, (8.3) ile verilen

$$\sum_{n_1,...,n_r=0}^{\infty} H_{\mathbf{n}}(x_1,...,x_r)\frac{t_1^{n_1}}{n_1!}\cdots\frac{t_r^{n_r}}{n_r!} = \prod_{i=1}^{r}\exp\left(2x_it_i - t_i^2\right)$$

doğurucu fonksiyonu dikkate alınırsa

$$\begin{aligned}f_{n_1,...,n_r}(x_1,...,x_r) &= \frac{H_{\mathbf{n}}(x_1,...,x_r)}{n_1!\cdots n_r!}, \\ \gamma_{n_i} &= \frac{1}{n_i!} \quad , \quad i=1,2,...,r\end{aligned}$$

olduğu görülür. $f_{n_1,...,n_r}(x_1,...,x_r) = \frac{H_{\mathbf{n}}(x_1,...,x_r)}{n_1!\cdots n_r!}$ ifadesinin (8.10) rekürans formülünde yerine yazılmasıyla da (8.11) bağıntısı elde edilir. ■

Lemma 8.1 de, (8.6) ile verilen

$$\sum_{n_1,...,n_r=0}^{\infty} C_{\mathbf{n}}^{(\nu_1,...,\nu_r)}(x_1,...,x_r)\ t_1^{n_1}\cdots t_r^{n_r} = \prod_{i=1}^{r}\left(1-2x_it_i+t_i^2\right)^{-\nu_i}$$

doğurucu fonksiyonu gözönünde tutulursa,

$$\begin{aligned} f_{n_1,...,n_r}(x_1,...,x_r) &= C_{\mathbf{n}}^{(\nu_1,...,\nu_r)}(x_1,...,x_r), \\ \gamma_{n_i} &= \frac{(\nu_i)_{n_i}}{n_i!} \quad , \quad i=1,2,...,r \end{aligned}$$

elde edilir ki bunların (8.10) da dikkate alınmasıyla, çok değişkenli $C_{\mathbf{n}}^{(\nu_1,...,\nu_r)}(x_1,...,x_r)$ Gegenbauer polinomları için bir rekürans bağıntısı aşağıdaki gibi bulunur.

Teorem 8.7 *Çok değişkenli $C_{\mathbf{n}}^{(\nu_1,...,\nu_r)}(x_1,...,x_r)$ Gegenbauer polinomları*

$$\begin{aligned} & x_i\frac{\partial}{\partial x_i}C_{n_1,...,n_r}^{(\nu_1,...,\nu_r)}(x_1,...,x_r) - \frac{\partial}{\partial x_i}C_{n_1,...,n_{i-1},n_i-1,n_{i+1},...,n_r}^{(\nu_1,...,\nu_r)}(x_1,...,x_r) \\ & = n_iC_{n_1,...,n_r}^{(\nu_1,...,\nu_r)}(x_1,...,x_r) \quad , \quad n_i \geq 1 \end{aligned}$$

rekürans formülünü gerçekler.

Teorem 8.7 de $\nu_i = 1/2$, $(i=1,2,...,r)$ olarak seçilirse,

$$P_{\mathbf{n}}(x_1,...,x_r) = P_{n_1,...,n_r}(x_1,...,x_r) = P_{n_1}(x_1)\cdots P_{n_r}(x_r)$$

ile tanımlanan çok değişkenli Legendre polinomları için aşağıdaki sonuç verilebilir.

Sonuç 8.1 *Çok değişkenli $P_{\mathbf{n}}(x_1,...,x_r)$ Legendre polinomları*

$$\begin{aligned} & x_i\frac{\partial}{\partial x_i}P_{n_1,...,n_r}(x_1,...,x_r) - \frac{\partial}{\partial x_i}P_{n_1,...,n_{i-1},n_i-1,n_{i+1},...,n_r}(x_1,...,x_r) \\ & = n_iP_{n_1,...,n_r}(x_1,...,x_r) \quad , \quad n_i \geq 1 \end{aligned}$$

rekürans bağıntısını sağlar.

Başka rekürans bağıntıları elde etmek amacıyla, Lemma 8.1'e benzer aşağıdaki lemmayı verelim.

Lemma 8.2 *$f_{n_1,...,n_r}(x_1,...,x_r)$ fonksiyonu herbir x_i $(i=1,2,...,r)$ değişkenine göre n_i-yinci dereceden ve toplam derecesi $n=n_1+\cdots+n_r$ olan bir polinom olmak üzere*

$$e^{-t_1^2-\cdots-t_r^2}\,\Phi(x_1t_1,...,x_rt_r)=\sum_{n_1,...,n_r=0}^{\infty}f_{n_1,...,n_r}(x_1,...,x_r)t_1^{n_1}\cdots t_r^{n_r} \qquad (8.12)$$

formunda bir doğurucu fonksiyona sahip olsun. Ayrıca

$$\begin{aligned}\Phi(u_1,...,u_r) &= \Phi_1(u_1)\cdots\Phi_r(u_r) \quad ; \quad u_i=x_it_i \quad ; \quad i=1,2,...,r\\ \Phi_i(u_i) &= \sum_{n_i=0}^{\infty}\varphi_{n_i}u_i^{n_i} \quad , \quad \varphi_0\neq 0\end{aligned}$$

gerçeklensin. Bu durumda $f_{n_1,...,n_r}(x_1,...,x_r)$ fonksiyonları

$$\begin{aligned}&n_if_{n_1,...,n_r}(x_1,...,x_r)+2f_{n_1,...,n_{i-1},n_i-2,n_{i+1},...,n_r}(x_1,...,x_r)\\ &\qquad = x_i\frac{\partial}{\partial x_i}f_{n_1,...,n_r}(x_1,...,x_r) \quad , \quad n_i\geq 2 \qquad (8.13)\end{aligned}$$

bağıntısını gerçekler.

İspat. (8.12) doğurucu fonksiyonunun x_i ve t_i $(i=1,2,...,r)$ değişkenlerine göre türevleri alınır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa (8.13) rekürans bağıntısı elde edilir. ∎

Bu lemmadan yararlanarak çok değişkenli $H_{n_1,...,n_r}(x_1,...,x_r)$ Hermite polinomları için aşağıdaki rekürans bağıntısı verilebilir.

Teorem 8.8 *Çok değişkenli $H_{n_1,...,n_r}(x_1,...,x_r)$ Hermite polinomları için*

$$\begin{aligned}&x_i\frac{\partial}{\partial x_i}H_{n_1,...,n_r}(x_1,...,x_r)-n_iH_{n_1,...,n_r}(x_1,...,x_r) \qquad (8.14)\\ = \;& 2n_i(n_i-1)H_{n_1,...,n_{i-1},n_i-2,n_{i+1},...,n_r}(x_1,...,x_r) \quad , \quad n_i\geq 1\end{aligned}$$

rekürans formülü sağlanır.

İspat. Lemma 8.2 de (8.3) ile verilen

$$\sum_{n_1,...,n_r=0}^{\infty}H_{\mathbf{n}}(x_1,...,x_r)\frac{t_1^{n_1}}{n_1!}\cdots\frac{t_r^{n_r}}{n_r!}=\prod_{i=1}^{r}\exp\left(2x_it_i-t_i^2\right),$$

doğurucu fonksiyonu gözönünde bulundurulursa

$$
\begin{aligned}
f_{n_1,\ldots,n_r}(x_1,...,x_r) &= \frac{H_{n_1,\ldots,n_r}(x_1,...,x_r)}{n_1!\cdots n_r!} \\
\varphi_{n_i} &= \frac{2^{n_i}}{n_i!}\ ,\quad i=1,2,...,r
\end{aligned}
$$

yazılabilir. (8.13) bağıntısında $f_{n_1,\ldots,n_r}(x_1,...,x_r)$ yerine $\frac{H_{n_1,\ldots,n_r}(x_1,...,x_r)}{n_1!\cdots n_r!}$ yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa, çok değişkenli $H_{n_1,\ldots,n_r}(x_1,...,x_r)$ Hermite polinomları için (8.14) rekürans formülü elde edilmiş olur. ■

Teorem 8.6 ve Teorem 8.8 den aşağıdaki sonuç verilebilir.

Sonuç 8.2 *Çok değişkenli $H_{n_1,\ldots,n_r}(x_1,...,x_r)$ Hermite polinomları*

$$
\frac{\partial}{\partial x_i}H_{n_1,\ldots,n_r}(x_1,...,x_r) = 2n_iH_{n_1,\ldots,n_{i-1},n_i-1,n_{i+1},\ldots,n_r}(x_1,...,x_r)
$$

ve

$$
\begin{aligned}
& 2x_iH_{n_1,\ldots,n_{i-1},n_i-1,n_{i+1},\ldots,n_r}(x_1,...,x_r) \\
= \ & H_{n_1,\ldots,n_r}(x_1,...,x_r) + \frac{\partial}{\partial x_i}H_{n_1,\ldots,n_{i-1},n_i-1,n_{i+1},\ldots,n_r}(x_1,...,x_r)
\end{aligned}
$$

rekürans bağıntılarını gerçekler.

8.3 İntegral Gösterimler

Bu kısımda, (8.3) ve (8.6) doğurucu fonksiyonları ile tanımlanan çok değişkenli $H_{\mathbf{n}}(x_1,...,x_r)$ Hermite ve çok değişkenli $C_{\mathbf{n}}^{(\nu_1,\ldots,\nu_r)}(\mathbf{x})$ Gegenbauer polinom aileleri için çeşitli integral gösterimler elde edilecektir.

Klasik Hermite polinomları ile Legendre polinomları arasında

$$
H_n(x) = 2^{n+1}\exp\left(x^2\right)\int_x^{\infty}\exp\left(-t^2\right)t^{n+1}P_n(x/t)\,dt \tag{8.15}
$$

formunda bir integral gösterim vardır (Rainville 1960).

Bu özelliğin bir sonucu olarak aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 8.9 *Çok değişkenli $H_{\mathbf{n}}(x_1,...,x_r)$ Hermite polinomları*

$$\begin{aligned} H_{\mathbf{n}}(x_1,...,x_r) &= \int_{x_1}^{\infty}\int_{x_2}^{\infty}\cdots\int_{x_r}^{\infty}\exp\left(-t_1^2-\cdots-t_r^2\right)t_1^{n_1+1}\cdots t_r^{n_r+1}P_{\mathbf{n}}\left(\mathbf{x}/\mathbf{t}\right)dt_1\cdots dt_r \\ &\quad\times 2^{n_1+\cdots+n_r+r}\exp\left(x_1^2+\cdots+x_r^2\right) \end{aligned}$$

integral gösterimine sahiptir. Burada, çok değişkenli $P_{\mathbf{n}}\left(\mathbf{x}/\mathbf{t}\right)$ Legendre polinomları

$$P_{\mathbf{n}}\left(\mathbf{x}/\mathbf{t}\right)=P_{n_1,...,n_r}\left(x_1/t_1,...,x_r/t_r\right)=P_{n_1}\left(x_1/t_1\right)\cdots P_{n_r}\left(x_r/t_r\right)$$

ile ifade edilirler.

İspat. (5.3) ve (8.15) eşitlikleri kullanılırsa ispat kolaylıkla görülür. ■

Teorem 8.10 *Çok değişkenli $C_{\mathbf{n}}^{(\nu_1,...,\nu_r)}(x_1,...,x_r)$ Gegenbauer polinomları*

$$\begin{aligned} C_{\mathbf{n}}^{(\nu_1,...,\nu_r)}(x_1,...,x_r) &= \frac{1}{\Gamma\left(\nu_1\right)\cdots\Gamma\left(\nu_r\right)}\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\cdots\int_0^{\infty}\xi_1^{\nu_1-1}\cdots\xi_r^{\nu_r-1}e^{-(\xi_1+\cdots+\xi_r)} \\ &\quad\times S\left(\mathbf{x};\boldsymbol{\xi}\right)d\xi_1\cdots d\xi_r \qquad (8.16) \\ &\quad\left(\nu_i>0 \quad ; \quad i=1,2,...,r\right) \end{aligned}$$

integral gösterimi ile ifade edilirler. Burada, $S\left(\mathbf{x};\boldsymbol{\xi}\right)$ fonksiyonu

$$\begin{aligned} S\left(\mathbf{x};\boldsymbol{\xi}\right) &= \prod_{j=1}^{r}\sum_{m_j=0}^{\left[\frac{n_j}{2}\right]}\frac{2^{n_j-2m_j}(-1)^{m_j}\left(x_j\xi_j\right)^{n_j-2m_j}\left(\xi_j\right)^{m_j}}{(n_j-2m_j)!m_j!}, \\ \mathbf{x} &= (x_1,...,x_r) \quad , \quad \boldsymbol{\xi}=(\xi_1,...,\xi_r) \end{aligned}$$

ile verilir.

İspat. (8.6) ile ifade edilen

$$\sum_{n_1,...,n_r=0}^{\infty}C_{\mathbf{n}}^{(\nu_1,...,\nu_r)}(x_1,...,x_r)\,t_1^{n_1}\cdots t_r^{n_r}=\prod_{i=1}^{r}\left(1-2x_it_i+t_i^2\right)^{-\nu_i}$$

doğurucu fonksiyonunun sağ yanında (2.3) ile verilen

$$a^{-\nu}=\frac{1}{\Gamma\left(\nu\right)}\int_0^{\infty}e^{-at}t^{\nu-1}dt \quad , \quad \nu>0$$

eşitliği kullanılırsa

$$\begin{aligned}
&\sum_{n_1,...,n_r=0}^{\infty} C_{\mathbf{n}}^{(\nu_1,...,\nu_r)}(x_1,...,x_r)\ t_1^{n_1}\cdots t_r^{n_r} \\
=& \prod_{i=1}^{r}\left(1-2x_it_i+t_i^2\right)^{-\nu_i} \\
=& \frac{1}{\Gamma(\nu_1)\cdots\Gamma(\nu_r)}\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\cdots\int_0^{\infty} e^{-(\xi_1+\cdots+\xi_r)}\xi_1^{\nu_1-1}\cdots\xi_r^{\nu_r-1}\prod_{j=1}^{r}e^{2t_jx_j\xi_j}e^{-t_j^2\xi_j}d\xi_1\cdots d\xi_r \\
=& \frac{1}{\Gamma(\nu_1)\cdots\Gamma(\nu_r)}\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\cdots\int_0^{\infty} e^{-(\xi_1+\cdots+\xi_r)}\xi_1^{\nu_1-1}\cdots\xi_r^{\nu_r-1} \\
&\times\prod_{j=1}^{r}\sum_{n_j=0}^{\infty}\sum_{m_j=0}^{\left[\frac{n_j}{2}\right]}\frac{2^{n_j-2m_j}(-1)^{m_j}\left(x_j\xi_j\right)^{n_j-2m_j}\left(\xi_j\right)^{m_j}}{(n_j-2m_j)!m_j!}t_j^{n_j}d\xi_1\cdots d\xi_r
\end{aligned}$$

elde edilir ki, burada $t_1^{n_1}\cdots t_r^{n_r}$ nin katsayıları eşitlenirse (8.16) integral gösterimi bulunmuş olur. ■

Teorem 8.10 da $\nu_i = 1/2$, $i = 1, 2, ..., r$ olarak seçilirse çok değişkenli $P_{n_1,...,n_r}(x_1,...,x_r)$ Legendre polinomları için aşağıdaki integral gösterim elde edilir.

Sonuç 8.3 *Çok değişkenli $P_{n_1,...,n_r}(x_1,...,x_r)$ Legendre polinomları*

$$\begin{aligned}
P_{n_1,...,n_r}(x_1,...,x_r) &= \frac{1}{\pi^{r/2}}\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\cdots\int_0^{\infty}\xi_1^{-1/2}\cdots\xi_r^{-1/2}e^{-(\xi_1+\cdots+\xi_r)} \\
&\quad\times S(\mathbf{x};\boldsymbol{\xi})\,d\xi_1\cdots d\xi_r
\end{aligned}$$

integral gösterimine sahiptir. Burada, $S(\mathbf{x};\boldsymbol{\xi})$ fonksiyonu

$$\begin{aligned}
S(\mathbf{x};\boldsymbol{\xi}) &= \prod_{j=1}^{r}\sum_{m_j=0}^{\left[\frac{n_j}{2}\right]}\frac{2^{n_j-2m_j}(-1)^{m_j}\left(x_j\xi_j\right)^{n_j-2m_j}\left(\xi_j\right)^{m_j}}{(n_j-2m_j)!m_j!}, \\
\mathbf{x} &= (x_1,...,x_r)\quad,\quad \boldsymbol{\xi}=(\xi_1,...,\xi_r)
\end{aligned}$$

ile ifade edilir.

8.4 Multilineer ve Multilateral Doğurucu Fonksiyonlar

Bu kısımda, çok değişkenli Hermite ve Gegenbauer polinomları için bazı multilineer ve multilateral doğurucu fonksiyonlar elde edilmektedir. Bu tip doğurucu fonksiyonları bulmak için ilk önce aşağıdaki teoremi verelim.

Teorem 8.11 *μ-yüncü basamaktan ve s kompleks değişkenli ($s \in \mathbb{N}$), sıfıra denk olmayan $\Omega_\mu(y_1,...,y_s)$ fonksiyonu için $\Lambda_{\mu,\psi}(y_1,...,y_s;z)$ ve $\Theta_{n,p,\mu,\psi}(x_1,...,x_r;y_1,...,y_s;\tau)$ fonksiyonları sırasıyla*

$$\Lambda_{\mu,\psi}(y_1,...,y_s;z) := \sum_{k=0}^{\infty} a_k \Omega_{\mu+\psi k}(y_1,...,y_s)z^k \tag{8.17}$$
$$(a_k \neq 0\,,\ \ \mu,\psi \in \mathbb{C})$$

ve

$$\begin{aligned}\Theta_{n,p,\mu,\psi}(x_1,...,x_r;y_1,...,y_s;\tau) \ :&= \sum_{k=0}^{[n/p]} a_k\ Y_{n-pk+m_1+\cdots+m_r}(x_1,...,x_r) \\ &\quad \times\Omega_{\mu+\psi k}(y_1,...,y_s)\tau^k \qquad (8.18)\\ &\quad (n,p \in \mathbb{N})\end{aligned}$$

ile ifade edilsinler. Bu taktirde, (8.18) ile verilen $\Theta_{n,p,\mu,\psi}(x_1,...,x_r;y_1,...,y_s;\tau)$ fonksiyonu, çok değişkenli Hermite polinomları cinsinden

$$\begin{aligned}&\sum_{n=0}^{\infty} \Theta_{n,p,\mu,\psi}\left(x_1,...,x_r;y_1,...,y_s;\frac{\eta}{t^p}\right)t^n \\ &= \left\{\prod_{i=1}^{r}\exp\left(2x_it-t^2\right)\right\} H_{\mathbf{m}}(\mathbf{x}-t)\,\Lambda_{\mu,\psi}(y_1,...,y_s;\eta) \qquad (8.19)\end{aligned}$$

doğurucu fonksiyonuna sahiptir.

İspat. Bu teoremi ispatlamak için önce (8.18) ile tanımlanan

$$\Theta_{n,p,\mu,\psi}\left(x_1,...,x_r;y_1,...,y_s;\frac{\eta}{t^p}\right)$$

fonksiyonunu, (8.19) un sol yanında yerine yazalım ve bunu S ile gösterelim. Bu durumda

$$S = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{[n/p]} a_k\ Y_{n-pk+m_1+\cdots+m_r}(x_1,...,x_r)\,\Omega_{\mu+\psi k}(y_1,...,y_s)\eta^k t^{n-pk} \tag{8.20}$$

olur. (8.20) de n yerine $(n+pk)$ alınıp, (2.9) özelliği kullanılır ve daha sonra (8.4) doğurucu fonksiyonundan yararlanılırsa

$$\begin{aligned}S &= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} a_k\ Y_{n+m_1+\cdots+m_r}(x_1,...,x_r)\,\Omega_{\mu+\psi k}(y_1,...,y_s)\eta^k t^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} Y_{n+m_1+\cdots+m_r}(x_1,...,x_r)\,t^n \sum_{k=0}^{\infty} a_k\Omega_{\mu+\psi k}(y_1,...,y_s)\eta^k \\ &= \left\{\prod_{i=1}^{r}\exp\left(2x_it-t^2\right)\right\} H_{\mathbf{m}}(\mathbf{x}-t)\,\Lambda_{\mu,\psi}(y_1,...,y_s;\eta)\end{aligned}$$

elde edilir ki bu da ispatı tamamlar. ■

Teorem 8.12 *μ-yüncü basamaktan ve s kompleks değişkenli ($s \in \mathbb{N}$), sıfıra denk olmayan $\Omega_{\mu}(y_1, ..., y_s)$ fonksiyonu*

$$\Lambda_{\mu,\upsilon}(y_1, ..., y_s; z) \quad : \quad = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \Omega_{\mu+\upsilon k}(y_1, ..., y_s) z^k$$
$$(a_k \neq 0 \ , \ \ \mu, \upsilon \in \mathbb{C})$$

ile verilen doğurucu fonksiyonuna sahip olsun. Bu durumda, çok değişkenli Hermite polinomları ile $\Omega_{\mu+\upsilon k}(y_1, ..., y_s)$ fonksiyonlarının çarpımı için

$$\begin{aligned} & \sum_{n_1=0}^{\infty} \sum_{n_2,...,n_r=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{[n_1/p]} \frac{a_k H_{n_1-pk,n_2,...,n_r}(\mathbf{x})}{(n_1-pk)!n_2! \cdots n_r!} t_2^{n_2} \cdots t_r^{n_r} \\ & \times \Omega_{\mu+\upsilon k}(y_1, ..., y_s) \eta^k t_1^{n_1-pk} \\ = \ & \Lambda_{\mu,\upsilon}(y_1, ..., y_s; \eta) \prod_{i=1}^{r} \exp\left(2x_i t_i - t_i^2\right) \end{aligned} \tag{8.21}$$

doğurucu fonksiyonu gerçeklenir.

İspat. (8.21) eşitliğinin sol yanında n_1 yerine $(n_1 + pk)$ alınıp, (2.9) özelliği kullanılır ve daha sonra (8.3) doğurucu fonksiyonundan yararlanılırsa

$$\begin{aligned} & \sum_{n_1=0}^{\infty} \sum_{n_2,...,n_r=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{[n_1/p]} \frac{a_k H_{n_1-pk,n_2,...,n_r}(\mathbf{x})}{(n_1-pk)!n_2! \cdots n_r!} t_2^{n_2} \cdots t_r^{n_r} \\ & \times \Omega_{\mu+\upsilon k}(y_1, ..., y_s) \eta^k t_1^{n_1-pk} \\ = \ & \sum_{n_1,...,n_r=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k H_{n_1,n_2,...,n_r}(\mathbf{x})}{n_1! \cdots n_r!} t_1^{n_1} \cdots t_r^{n_r} \Omega_{\mu+\upsilon k}(y_1, ..., y_s) \eta^k \\ = \ & \sum_{k=0}^{\infty} a_k \Omega_{\mu+\upsilon k}(y_1, ..., y_s) \eta^k \sum_{n_1,...,n_r=0}^{\infty} \frac{H_{n_1,n_2,...,n_r}(\mathbf{x})}{n_1! \cdots n_r!} t_1^{n_1} \cdots t_r^{n_r} \\ = \ & \Lambda_{\mu,\upsilon}(y_1, ..., y_s; \eta) \prod_{i=1}^{r} \exp\left(2x_i t_i - t_i^2\right) \end{aligned}$$

olarak bulunur ki bu da ispatı tamamlar. ■

Bu teoreme benzer olarak, çok değişkenli Gegenbauer polinomları için de benzer bir teoremi ispatsız olarak aşağıda verelim.

Teorem 8.13 *μ-yüncü basamaktan ve s kompleks değişkenli ($s \in \mathbb{N}$), sıfıra denk olmayan $\Omega_\mu(y_1, ..., y_s)$ fonksiyonu*

$$\begin{aligned} \Lambda_{\mu,\upsilon}(y_1, ..., y_s; z) \ &: = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \Omega_{\mu+\upsilon k}(y_1, ..., y_s) z^k \\ & (a_k \neq 0\,, \ \ \mu, \upsilon \in \mathbb{C}) \end{aligned}$$

doğurucu fonksiyonuna sahip olsun. Bu durumda, çok değişkenli Gegenbauer polinomları ile $\Omega_{\mu+\upsilon k}(y_1, ..., y_s)$ fonksiyonlarının çarpımı için bir doğurucu fonksiyon

$$\begin{aligned} & \sum_{n_1,n_2,...,n_r=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{[n_1/p]} a_k C_{n_1-pk,n_2,...,n_r}^{(\nu_1,...,\nu_r)}(\mathbf{x})\, t_2^{n_2} \cdots t_r^{n_r} \\ & \times \Omega_{\mu+\upsilon k}(y_1, ..., y_s) \eta^k t_1^{n_1-pk} \\ = \ & \Lambda_{\mu,\upsilon}(y_1, ..., y_s; \eta) \prod_{i=1}^{r} \left(1 - 2x_i t_i + t_i^2\right)^{-\nu_i} \end{aligned} \tag{8.22}$$

formunda verilir.

Yukarıdaki teoremlerde

$$\Omega_{\mu+\psi k}(y_1, ..., y_s) \ (k \in \mathbb{N}_0\,, \ s \in \mathbb{N})$$

fonksiyonunun bazı özel seçimlerini düşünerek bu teoremlerin farklı uygulamalarını verebiliriz. Örneğin, Teorem 8.11 de

$$s = r \ \ \text{ve} \ \ \Omega_{\mu+\psi k}(y_1, ..., y_r) = h_{\mu+\psi k}^{(\gamma_1,...,\gamma_r)}(y_1, ..., y_r)$$

olarak alalım. Burada, çok değişkenli $h_n^{(\alpha_1,...,\alpha_r)}(x_1, ..., x_r)$ Lagrange-Hermite polinomları

$$\begin{aligned} \prod_{j=1}^{r} \left\{ \left(1 - x_j t^j\right)^{-\alpha_j} \right\} \ &= \ \sum_{n=0}^{\infty} h_n^{(\alpha_1,...,\alpha_r)}(\mathbf{x})\, t^n, \\ |t| \ &< \ \min\left\{ |x_1|^{-1}, |x_2|^{-1/2}, ..., |x_r|^{-1/r} \right\} \end{aligned} \tag{8.23}$$

doğurucu fonksiyonu ile tanımlanır (Altın ve Erkuş 2006). Bu durumda, çok değişkenli Lagrange-Hermite polinomları ve çok değişkenli Hermite polinomları için bilateral doğurucu fonksiyonların bir sınıfını aşağıdaki şekilde verebiliriz:

Sonuç 8.4 *Çok değişkenli Lagrange-Hermite polinomları*

$$\Lambda_{\mu,\psi}(y_1,...,y_r;z) \quad : \quad = \sum_{k=0}^{\infty} a_k h_{\mu+\psi k}^{(\gamma_1,...,\gamma_r)}(y_1,...,y_r)z^k$$
$$(a_k \neq 0\,,\ \psi,\mu \in \mathbb{C})$$

doğurucu fonksiyonuna sahip olsun ve

$$\begin{aligned}\Theta_{n,p,\mu,\psi}\left(x_1,...,x_r;y_1,...,y_r;\tau\right) \quad : \quad &= \sum_{k=0}^{[n/p]} a_k\ Y_{n-pk+m_1+\cdots+m_r}\left(x_1,...,x_r\right) \\ &\times h_{\mu+\psi k}^{(\gamma_1,...,\gamma_r)}(y_1,...,y_r)\tau^k \\ &(n,p \in \mathbb{N})\end{aligned}$$

ile gösterilsin. Bu taktirde

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} \Theta_{n,p,\mu,\psi}\left(x_1,...,x_r;y_1,...,y_r;\frac{\eta}{t^p}\right)t^n \qquad (8.24)\\ = \ & \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{[n/p]} a_k\ Y_{n-pk+m_1+\cdots+m_r}\left(x_1,...,x_r\right) \\ & \times h_{\mu+\psi k}^{(\gamma_1,...,\gamma_r)}(y_1,...,y_r)t^{n-pk}\eta^k \\ = \ & \left\{\prod_{i=1}^{r}\exp\left(2x_it-t^2\right)\right\} H_{\mathbf{m}}\left(\mathbf{x}-t\right)\Lambda_{\mu,\psi}(y_1,...,y_r;\eta)\end{aligned}$$

olur.

Uyarı 8.1 *(8.24) de $a_k = 1$, $\mu = 0$, $\psi = 1$ alınıp, (8.23) doğurucu fonksiyonu kullanılırsa, çok değişkenli Hermite ve çok değişkenli Lagrange-Hermite polinomları için*

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{[n/p]} Y_{n-pk+m_1+\cdots+m_r}\left(x_1,...,x_r\right) h_k^{(\gamma_1,...,\gamma_r)}(y_1,...,y_r)\eta^k t^{n-pk} \\ = \ & \left\{\prod_{i=1}^{r}\exp\left(2x_it-t^2\right)\left\{\left(1-y_i\eta^i\right)^{-\gamma_i}\right\}\right\} H_{\mathbf{m}}\left(\mathbf{x}-t\right)\end{aligned}$$

bilateral doğurucu fonksiyonu elde edilmiş olur. Burada

$$|\eta| < \min\left\{|y_1|^{-1}, |y_2|^{-1/2}, ..., |y_r|^{-1/r}\right\}$$

dir.

Şimdi de Teorem 8.11 in başka bir özel durumunu verelim. Bu teoremde, $s = r$ ve $\Omega_{\mu+\psi k}(y_1, ..., y_r) = Y_{\mu+\psi k}(y_1, ..., y_r)$, $\mu, \psi \in \mathbb{N}_0$ olarak alınırsa, çok değişkenli Hermite polinomları için bilineer doğurucu fonksiyonların bir sınıfı aşağıdaki şekilde elde edilir:

Sonuç 8.5 *$Y_{\mu+\psi k}(y_1, ..., y_r)$ polinomları*

$$\begin{aligned} \Lambda_{\mu,\psi}(y_1, ..., y_r; z) \quad : &= \sum_{k=0}^{\infty} a_k Y_{\mu+\psi k}(y_1, ..., y_r) z^k, \\ &(a_k \neq 0, \mu, \psi \in \mathbb{N}_0) \end{aligned}$$

doğurucu fonksiyonuna sahip olsun ve

$$\begin{aligned} \Theta_{n,p,\mu,\psi}\left(x_1, ..., x_r; y_1, ..., y_r; \tau\right) \quad : &= \sum_{k=0}^{[n/p]} a_k \; Y_{n-pk+m_1+\cdots+m_r}\left(x_1, ..., x_r\right) \\ &\times Y_{\mu+\psi k}(y_1, ..., y_r) \tau^k \\ &(n, p \in \mathbb{N}) \end{aligned}$$

ile gösterilsin. Bu durumda,

$$\begin{aligned} &\sum_{n=0}^{\infty} \Theta_{n,p,\mu,\psi}\left(x_1, ..., x_r; y_1, ..., y_r; \frac{\eta}{t^p}\right) t^n \\ = \quad &\left\{\prod_{i=1}^{r} \exp\left(2x_i t - t^2\right)\right\} H_{\mathbf{m}}\left(\mathbf{x}{-}t\right) \Lambda_{\mu,\psi}(y_1, ..., y_r; \eta) \end{aligned} \tag{8.25}$$

gerçeklenir.

Son olarak Teorem 8.12 de $s = r$ ve $\Omega_{\mu+\upsilon k}(y_1, ..., y_r) = u_{\mu+\upsilon k}^{(\nu_1,...,\nu_r)}(y_1, ..., y_r)$ alınırsa, çok değişkenli Gegenbauer polinomları ve çok değişkenli Hermite polinomları için bilateral doğurucu fonksiyonların bir sınıfı aşağıdaki gibi verilebilir.

Sonuç 8.6 *(8.8) ile tanımlanan çok değişkenli Gegenbauer polinomları*

$$\begin{aligned} \Lambda_{\mu,\upsilon}(y_1, ..., y_r; z) \quad : &= \sum_{k=0}^{\infty} a_k u_{\mu+\upsilon k}^{(\nu_1,...,\nu_r)}\left(y_1, ..., y_r\right) z^k, \\ &(a_k \neq 0, \mu, \upsilon \in \mathbb{N}_0) \end{aligned}$$

doğurucu fonksiyonuna sahip olsun. Bu durumda

$$
\begin{aligned}
&\sum_{n_1=0}^{\infty}\sum_{n_2,...,n_r=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{[n_1/p]}\frac{a_k H_{n_1-pk,n_2,...,n_r}(\mathbf{x})}{(n_1-pk)!n_2!\cdots n_r!}t_2^{n_2}\cdots t_r^{n_r} \\
&\times u_{\mu+\upsilon k}^{(\nu_1,...,\nu_r)}(y_1,...,y_r)\,\eta^k t_1^{n_1-pk} \\
= \; &\Lambda_{\mu,\upsilon}(y_1,...,y_r;\eta)\prod_{i=1}^{r}\exp\left(2x_i t_i - t_i^2\right) \qquad (8.26)
\end{aligned}
$$

sağlanır.

Uyarı 8.2 *(8.26) da $a_k = 1, \mu = 0, \ \upsilon = 1$ alınır ve çok değişkenli $u_n^{(\nu_1,...,\nu_r)}(y_1,...,y_r)$ Gegenbauer polinomları için (8.7) doğurucu fonksiyonu kullanılırsa, çok değişkenli $u_n^{(\nu_1,...,\nu_r)}(y_1,...,y_r)$ Gegenbauer polinomları ve çok değişkenli Hermite polinomları için*

$$
\begin{aligned}
&\sum_{n_1=0}^{\infty}\sum_{n_2,...,n_r=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{[n_1/p]}\frac{H_{n_1-pk,n_2,...,n_r}(\mathbf{x})}{(n_1-pk)!n_2!\cdots n_r!}t_2^{n_2}\cdots t_r^{n_r}u_k^{(\nu_1,...,\nu_r)}(y_1,...,y_r) \\
&\times \eta^k t_1^{n_1-pk} \\
= \; &\prod_{i=1}^{r}\left\{F_1\left[\lambda_i,\nu_i,\nu_i;\mu_i;\left(y_i+\sqrt{y_i^2-1}\right)\eta,\left(y_i-\sqrt{y_i^2-1}\right)\eta\right]\right. \\
&\left.\times\exp\left(2x_i t_i - t_i^2\right)\right\}
\end{aligned}
$$

bilateral doğurucu fonksiyonu elde edilir. Burada

$$
\begin{aligned}
&u_k^{(\nu_1,...,\nu_r)}(y_1,...,y_r) \\
= \; &\sum_{k_1=0}^{k}\sum_{k_2=0}^{k-k_1}\cdots\sum_{k_{r-1}=0}^{k-k_1-\cdots-k_{r-2}}C_{k-(k_1+\cdots+k_{r-1}),k_1,...,k_{r-1}}^{(\nu_1,...,\nu_r)}(y_1,...,y_r) \\
&\times\delta_k(k_1,...,k_{r-1})
\end{aligned}
$$

ve

$$
\delta_k(k_1,...,k_{r-1}) = \frac{(\lambda_1)_{k-(k_1+\cdots+k_{r-1})}(\lambda_2)_{k_1}\cdots(\lambda_r)_{k_{r-1}}}{(\mu_1)_{k-(k_1+\cdots+k_{r-1})}(\mu_2)_{k_1}\cdots(\mu_r)_{k_{r-1}}}
$$

ile ifade edilirler.

a_k $(k \in \mathbb{N}_0)$ katsayılarının uygun herbir seçimi için, $\Omega_{\mu+\psi k}(y_1,...,y_s)$ $(s \in \mathbb{N})$ çok değişkenli fonksiyonu, bazı fonksiyonların uygun bir çarpımı olarak ifade edilebilirse bu durumda Teorem 8.11, Teorem 8.12 ve Teorem 8.13 den, çok değişkenli Hermite ve çok değişkenli Gegenbauer polinomları için, multilineer ve multilateral doğurucu fonksiyonların çeşitli aileleri de elde edilebilir.

KAYNAKLAR

Aktaş, R., Altın, A. and Taşdelen, F. 2011. A note on a family of two-variable polynomials. J. Comput. Appl. Math., Vol. 235; pp. 4825-4833.

Altın, A., Aktaş, R. and Çekim, B. 2009. On a multivariable extension of Hermite polynomials. Ars Combinatoria, In press.

Altın, A., Aktaş R. and Erkuş, E. 2009. On a multivariable extension of the extended Jacobi polynomials. J. Math. Anal. Appl., Vol. 353; pp. 121–133.

Altın, A. and Erkuş, E. 2006. On a multivariable extension of the Lagrange-Hermite polynomials. Integral Transforms Spec. Funct., Vol. 17; pp. 239-244.

Altın, A., Erkuş, E. and Özarslan, M. A. 2006. Families of linear generating functions for polynomials in two variables. Integral Transforms Spec. Funct., Vol. 17, number 5; pp. 315–320.

Appell, P. and Kampè de Fèriet, J. 1926. Fonctions hypergèometriques et hypersp–heriques. Polynōmes d'Hermite. Gauthier-Villars, 434 p., Paris.

Carlitz, L. 1962. An integral for the product of two Laguerre polynomials. Boll. Un. Mat. Ital., Vol. 17, number 3; pp. 25-28.

Chan, W.-C. C., Chyan, C.-J.and Srivastava, H. M. 2001. The Lagrange polynomials in several variables. Integral Transforms Spec. Funct., Vol. 12; pp. 139-148.

Dunkl, C.F. and Xu, Y. 2001. Orthogonal polynomials of several variables. Cambridge univ. press, 390 p., New York.

Engelis, G.K. 1974. On some two-dimensional analogues of classical orthogonal polynomials. Latv. Mat. Ezhegodnik, Vol. 15; pp. 169-202.

Erdélyi, A., Magnus, W., Oberhettinger, F. and Tricomi, F. G. 1953. Higher Transcendental Functions, vol. I, McGraw-Hill Book Company, 302 p., New York, Toronto and London.

Erdélyi, A., Magnus, W., Oberhettinger, F. and Tricomi, F. G. 1955. Higher Transcendental Functions, vol. III, McGraw-Hill Book Company, 292 p., New York,Toronto and London.

Feldheim, E. 1941. Relations entre les polynômes de Jacobi, Laguerre et Hermite. Acta Math., Vol. 74; pp. 117-138.

Fujiwara, I. 1966. A unified presentation of classical orthogonal polynomials. Math. Japon., Vol. 11; pp. 133-148.

Jackson, D. 1936. Formal properties of orthogonal polynomials in two variables. Duke Math. Journal, Vol. 2; pp. 423-434.

Koornwinder, T. H. 1975. Two variable analogues of the classical orthogonal polynomials. Theory and application of special functions, Acad. Press. Inc., New York.

Krall, H. L. and Sheffer, I. M. 1967. Orthogonal polynomials in two variables. Ann. Math. Pura Appl., Vol. 4; pp. 325-376.

Lee, J.K., Littlejohn, L.L. and Yoo, B.H. 2004. Orthogonal polynomials satisfying partial differential equations belonging to the basic class. J. Korean Math. Soc., Vol. 41, number 6; pp. 1049-1070.

Lyskova, A.S. 1991. Orthogonal polynomials in several variables. Soviet Math. Dokl., Vol. 43, number 19; pp. 264-268.

Malave, P. 1979. Multi-dimensional orthogonal polynomials. A Ph.D. thesis submit ted to Marathwada Univ., Aurangabad.

Piñar, M. and Xu, Y. 2009. Orthogonal polynomials and partial differential equations on the unit ball. Proc. Amer. Math. Soc., Vol. 137; pp. 2979-2987.

Rainville, E.D. 1960. Special functions. The Macmillan Company, 365 p., New York.

Singhal, B. M. 1974. Integral representation for the product of two polynomials. Vijnana Parishad Anusandhan Patrica, Vol. 17; pp. 165-169.

Srivastava, H.M. and Manocha, H. L. 1984. A Treatise on Generating Functions. Halsted Press (Ellis Horwood Limited, Chichester), John Wiley and Sons, 569 p., New York.

Srivastava, H. M. and Panda, R. 1975. An integral representation for the product of two jacobi polynomials. J. London Math. Soc., Vol. 12, number 4; pp. 419-425.

Suetin, P.K. 1988. Orthogonal polynomials in two variables. Gordon and Breach Science Publishers, 348 p., Moscow.

Szegö, G. 1939. Orthogonal polynomials. American Mathematical Society Colloquium Publications, 403 p., New York.

Xu, Y. 2006. A family of Sobolev orthogonal polynomials on the unit ball. J. Approx. Theory, Vol. 138; pp. 232-241.

Xu, Y. 2008. Sobolev orthogonal polynomials defined via gradient on the unit ball. J. Approx. Theory, Vol. 152; pp. 52-65.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Rabia AKTAŞ
Doğum Yeri : Çankırı/Orta
Doğum Tarihi : 27.05.1982
Medeni Hali : Bekar
Yabancı Dili : İngilizce

Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl):

Lise : Ankara Lisesi (2000)
Lisans : Ankara Üniversitesi, Fen Fakültesi
Matematik Bölümü (2004)
Yüksek Lisans : Ankara Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı (2007)

Çalıştığı Kurum/Kurumlar ve Yıl:

Ankara Üniversitesi, Fen Fakültesi
Matematik Anabilim Dalı, Araştırma Görevlisi (2005-...)

Yayınları:

Aktaş, R., Altın, A. and Taşdelen, F. 2011. A note on a family of two variable polynomials. J. Comput. Appl. Math. 235; 4825-4833.

Altın, A., **Aktaş, R.** and Çekim, B. 2009. On a multivariable extension of Hermite polynomials. Ars Combinatoria (in press).