ANKARA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DOKTORA TEZİ

İMPALSİF KLEİN-GORDON S-DALGA DENKLEMİNİN SPEKTRAL ÖZELLİKLERİ

Halit TAŞ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ANKARA
2024

ÖZET

Doktora Tezi

İMPALSİF KLEİN-GORDON S-DALGA DENKLEMİNİN SPEKTRAL ÖZELLİKLERİ

Halit TAŞ

Ankara Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Elgiz BAYRAM

Bu tez dört bölümden oluşmaktadır.
Birinci bölüm giriş kısmına ayrılmıştır.
İkinci bölümde, spektral teori ve saçılım teorisinde kullanılan bazı temel kavramlar ve teoremler verilmiştir.
Üçüncü bölümde, impalsif koşul ve bir sınır koşulu ile reel potansiyelli Klein-Gordon s-dalga denklemi tarafından elde edilen bir sınır değer problemi incelenmiştir. Problemin üst yarı düzlemde Jost çözümü ve Jost fonksiyonu elde edilmiş, elde edilen bu veriler yardımıyla da saçılım fonksiyonu tanımlanmış ve saçılım fonksiyonunun bazı özellikleri ispatlanmıştır. Ayrıca Jost çözümünün katsayılarıyla ilgili olan Jost fonksiyonu için asimptotik eşitlik verilmiştir.
Dördüncü bölüm tartışma ve sonuç kısmına ayrılmıştır.

Mart 2024, 36 sayfa

Anahtar Kelimeler: Klein-Gordon denklemi, saçılım fonksiyonu, Jost fonksiyonu, Jost çözümü, impalsif koşul, özdeğerler, asimptotik eşitlik

ABSTRACT

PhD Thesis

SPECTRAL PROPERTIES OF IMPULSIVE KLEIN-GORDON S-WAVE EQUATIONS

Halit TAŞ

Ankara University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Elgiz BAYRAM

This thesis consists of four chapters.
The first chapter is devoted to the introduction.
The second chapter, some well known basic definitions and theorems of spectral theory are given.
The third chapter, a boundary value problem generated by the Klein-Gordon s-wave equation with a real potential with an impulsive condition and a boundary condition is examined. The Jost solution and Jost function of the problem in the upper half plane were obtained, and with the help of these data, the scatter function was defined and some properties of the scatter function were proven. Additionally, asymptotic equality is given for the Jost function, which is related to the coefficients of the Jost solution.
The fourth chapter is devoted to discussion and conclusion.

March 2024, 36 pages

Key Words: Klein-Gordon equation, scattering function, Jost function, Jost solution, impulsive condition, eigenvalue, asymptotic equality

TEŞEKKÜR

Bu tezin hazırlanmasında ve yürütülmesinde emeği büyük olan, engin bilgi birikimleriyle beni yönlendiren danışman hocam, saygıdeğer Prof.Dr. Elgiz BAYRAM'a (Ankara Üniversitesi Matematik Anabilim Dalı) teşekkür ederim.
Çalışmam boyunca değerli katkılarından ve yönlendirmelerinden dolayı tez izleme komite üyeleri hocalarım Doç.Dr. Yelda AYGAR KÜÇÜKEVCİLİOĞLU'na (Ankara Üniversitesi Matematik Anabilim Dalı) ve Prof.Dr. Ekin UĞURLU'ya (Çankaya Üniversitesi Matematik Anabilim Dalı) teşekkür ederim.
Çalışmamda bana motivasyon sağlayan değerli hocam Prof.Dr. Cihan ORHAN'a (Ankara Üniversitesi Matematik Anabilim Dalı) teşekkür ederim.
Çalışmama sağladıkları değerli katkılardan dolayı tez jüri üyeleri değerli hocalarım Prof.Dr. Şeyhmus YARDIMCI ve Prof.Dr. Esra KIR ARPAT'a teşekkür ederim.
Çalışmalarım boyunca manevi desteklerinden ötürü başta eşim Cennet TAŞ olmak üzere, biriciklerim Ecem TAŞ ve Ömer Mustafa TAŞ'a teşekkür ederim.
Üstün emekleri ve fedakarlıklarıyla bugünlere gelmemi sağlayan babam Necip TAŞ'a, annem Melahat TAŞ'a, ağabeylerim Seracettin TAŞ ve Mustafa TAŞ'a ve de her daim yanımda olan ikiz kardeşim Ekrem TAŞ'a teşekkür ederim.
Bu tez "TÜBİTAK-2211 Yurt İçi Doktora Burs Programı" tarafından desteklenmiştir. Doktora yaptığım süreç içerisinde verdiği burstan ötürü TÜBİTAK'a teşekkür ederim.

Halit TAŞ
Ankara, Mart 2024

İÇİNDEKİLER

SİMGELER DİZİNİ

$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
$\mathbb{C}$	Kompleks sayılar kümesi
$\mathbb{C}_+$	$\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$
$\mathbb{C}_-$	$\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z < 0\}$
$\overline{\mathbb{C}_+}$	$\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z \geq 0\}$
$\overline{\mathbb{C}_-}$	$\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z \leq 0\}$
$\rho(L)$	L operatörünün rezolvent kümesi
$\sigma(L)$	L operatörünün spektrumu
$\sigma_d(L)$	L operatörünün özdeğerlerinin kümesi
$\sigma_{ss}(L)$	L operatörünün spektral tekilliklerinin kümesi
$L_2[0,\infty)$	$\left\{ f \mid f : [0,\infty) \to \mathbb{R},\ \int\limits_a^b \lvert f(x)\rvert^2 \, dx < \infty \right\}$
$\operatorname{Im}\gimel$	$\gimel$ kompleks sayısının sanal kısmı
$\operatorname{Re}\gimel$	$\gimel$ kompleks sayısının reel kısmı
$o(1)$	Sonsuz küçük değer
$O(1)$	Sınırlı değerler
$W[X,Y]$	X ve Y çözümlerinin Wronskiyeni
$S(\gimel)$	Saçılım fonksiyonu
$R_\gimel(L)$	L operatörünün rezolventi
$D(L)$	L operatörünün tanım kümesi
$R(L)$	L operatörünün değer kümesi

1. GİRİŞ

Kuantum mekaniğinin özelliklerinden faydalanabilmek amacıyla insanoğlu tarafından kuantum mekaniği detaylıca araştırılmaktadır. Göçmen kuşların da yaradılış özellikleri gereği kuantum mekaniğinin özelliklerinden faydalanarak göç yollarını bulduğu düşünülmektedir. Dünyanın mikroskobik özelliklerinin anlaşılmasında temel bir araç olan kuantum mekaniğinin, matematiksel fiziğin ve uygulamalı matematiğin birçok problemlerinin çözümünde diferensiyel denklemlerin ve diferansiyel operatörlerin spektral analizi kullanılmaktadır. Spektral analizde genel olarak diferensiyel operatörlerin özdeğer problemleri incelenir. Kuantum mekaniğinde, bu özdeğerler enerji seviyelerine karşılık gelir ve özfonksiyonları tanımlar. Saçılım teorisinin genel olarak kapsamı dalga fonksiyonlarıdır. Dalga fonksiyonları, bir sistemdeki parçacıkların davranışını tanımlayan matematiksel ifadelerdir.
Saçılım teorisi, Schrödinger denklemi veya Klein-Gordon denklemi gibi kuantum mekaniği denklemleri kullanılarak geliştirilir. Bu denklemler, parçacıkların bir potansiyel alan içindeki hareketini ifade eder ve saçılma sürecini anlamaya katkı sağlar.

Ervin Schrödinger'in 1926 yılında yayımlanan makalesinde yer alan Schrödinger denklemi kuantum mekaniğinin temel taşlarından biri olup dalga denklemini ifade eder (Schrödinger 1926). Schrödinger denklemi elektron ve diğer atom altı parçacıkların matematiksel ifadesinde kullanılır.

Keldysh 1951 yılında kendine eşlenik olmayan bir operatörün tanım kümesinden bir fonksiyonun spektral analizini, o fonksiyonun operatörün özfonksiyonları cinsinden bir serisiyle ifade ederek incelemiştir (Keldysh 1951). Keldysh'in bu çalışması, teorik fizikteki ileri matematiksel konuların anlaşılmasına ve uygulanmasına önemli katkı sağlamıştır.

Naimark 1960 yılında Schrödinger operatörünün spektral analizini incelemiştir. Bu çalışmasında;
"$L_2[0,\infty)$ uzayı üzerinde, q potansiyelini kompleks değerli, h'yi kompleks sayı ve ℷ'yı spektral parametre alarak,

$$l(\xi) := -\xi^{''} + q(x)\xi = \gimel^2\xi \ , \ 0 \leq x < \infty \tag{1.1}$$

denklemini

$$\xi^{'}(0) - h\xi(0) = 0 \tag{1.2}$$

sınır koşulu ile sınır değer problemini (SDP) oluşturmuştur. Elde ettiği bu problemin spektral tekilliklerinin, rezolvent operatörün çekirdeğinin kutup noktaları olduğunu, sürekli spektrum üzerinde bulunduğunu ve özdeğer olmadığını kanıtlamıştır. Bunun yanı sıra en az bir $\epsilon > 0$ için, q potansiyel fonksiyonu;

$$\int_0^\infty e^{\epsilon x} |q(x)| \, dx < \infty \tag{1.3}$$

(1.3) şartını sağlandığında, (1.1) - (1.2) SDP'nin sonlu sayıda spektral tekilliklerinin ve özdeğerlerinin olduğunu göstermiştir (Naimark 1960). Bu sonuçların elde edilmesinden sonra birçok matematikçi yaptığı çalışmalarla spektral teoriye önemli katkılar sağlamıştır (Schwartz 1960, Lyance 1967, Pavlov 1967, Cornille 1970, Jaulent ve Jean 1972, Gasymov ve Maksudov 1972, Marchenko 1986, Levitan ve Sargsjan 1991, Adıvar ve Bairamov 2001, Guseinov 2009, Allahverdiev vd. 2013).

Özellikle genel fonksiyon teorisi ve dağılım teorisi üzerine çalışmalar yapan Schwartz, spektral tekillik ifadesini ilk kullanan bilim adamıdır (Schwartz 1960).

Marchenko tarafından, (1.1) denklemi ve

$$\xi(0) = 0 \tag{1.4}$$

(1.4) sınır koşulu ele alınarak,

$$\lim_{x\to 0} \xi(x,\gimel)e^{-i\gimel x} = 1, \ \gimel \in \overline{\mathbb{C}_+} := \{\gimel : \gimel \in \mathbb{C}, \ \ \mathrm{Im}\,\gimel \geq 0\}$$

şartını sağlayan ve $e(x,\gimel)$ ile gösterilen sınırlı bir çözüm elde edilmiştir. Elde edilen $e(x,\gimel)$, sınır değer probleminin Jost çözümüdür. Bu Jost çözümü

$$\int_0^\infty x\, |q(x)| \, dx < \infty \tag{1.5}$$

(1.5) şartı doğrultusunda

$$e(x,\gimel) = e^{i\gimel x} + \int_0^\infty \text{Ç}(x,t)e^{i\gimel t}dt < \infty,\ \gimel \in \overline{\mathbb{C}_+}$$

integral gösterimine sahiptir. Eşitlikte ifade edilen $\text{Ç}(x,t)$, q fonksiyonu yardımıyla yazılan çekirdek fonksiyonudur.

Ayrıca, Marchenko tarafından

$$e(\gimel) = 1 + \int_0^\infty \text{Ç}(0,t)e^{i\gimel t}dt < \infty,\ \gimel \in \overline{\mathbb{C}_+}$$

şeklinde tanımlanan fonksiyonun, (1.1) denklemi ve (1.4) sınır koşulu ile ele alınan SDP'nin Jost fonksiyonu olduğu belirtilmiştir. Bununla birlikte $e(\gimel)$ Jost fonksiyonunun, (1.5) şartı altında açık üst yarı düzlemde sonlu sayıda basit sıfırlarının olduğu gösterilmiştir (Marchenko 1986). (1.1) denklemi ve (1.4) sınır koşulu ile ele alınan sınır değer probleminin saçılım fonksiyonu aşağıdaki gibidir.

$$S(\gimel) = \frac{\overline{e(\gimel)}}{e(\gimel)},\ \gimel \in \mathbb{R}.$$

Bir diferensiyel denklem veya denklem sistemini ele aldığımızda, bu denklemler genellikle belirli bir süre zarfında süreklilik içindeki davranışı tanımlar; ancak, bazı durumlarda sistem, belirli anlarda anlık değişikliklere uğrar veya anlık etkileşimlere maruz kalır. Bu tür durumlar, impalsif sınır değer problemlerini doğurur. İmpalsif sınır değer problemleri, matematiksel modellerde belirli anlarda meydana gelen anlık etkileşimleri veya değişiklikleri ifade eden problemlerdir. Bu anlık değişim durumları veya kontrol sistemlerinin belirli anlarda sistem davranışını değiştiren impalsif etkileşimleri, sınır değer problemleri içinde tanımlanan modelleri etkileyebilir. Örneğin, biyolojik popülasyon modellerinin belirli anlarda çevresel değişikliklere, doğal afetlere veya diğer faktörlere maruz kaldığı durumlar, elektrik devrelerinin belirli anlarda ani voltaj değişiklikleri veya akım darbeleri gibi impalsif etkileşimlere maruz kaldığı durumlar, ekonomik modellerde belirli anlarda piyasa koşullarındaki değişiklikler veya ekonomik politikalardaki değişiklikler gibi anlık etkileşimler, robot kontrol sistemlerinde belirli anlarda sensörlerden gelen bilgiler veya dış kuvvetler nedeniyle anlık değişiklikler, tıpta belirli anlarda ilaç uygulamaları veya epidemiyolojik modellerde anlık müdahaleler gibi durumlar impalsif sınır değer problemleriyle modellenebilir. Bu örnekler, impalsif sınır değer problemlerinin çeşitli uygulama alanlarında nasıl kullanılabileceğini göstermektedir.

Diferensiyel operatörlerin spektral teorisinin önemi nedeniyle son yıllarda Sturm-Liouville, Schrödinger ve Dirac denklemlerinin spektral teorisi aktif bir biçimde çalışılmaktadır (Weiss ve Scharf 1971, Bainov ve Simeonov 1993, Bainov ve Simeonov 1995, Bairamov vd. 1997, Krall vd. 1999, Bairamov vd. 1999, Nakanishi 2002, Mukhtarov vd. 2004, Wibowo 2009, Baev 2014, Bairamov vd. 2017, Yildirim 2018, Bairamov vd. 2018, Aygar ve Bairamov 2019, Bairamov vd. 2020, Solmaz ve Bairamov 2022).

Klein-Gordon denklemi, kuantum mekaniği ve kuantum alan teorisinde kullanılan kuantum alanlarının matematiksel modellemesinde önemli role sahip olan, skaler parçacıkların davranışını, kuantum alanların dalga fonksiyonlarını ve etkileşimlerini açıklamak için kullanılan, sadece parçacıkların değil aynı zamanda bazı fiziksel olmayan sistemlerin, örneğin belirli tip salınımların matematiksel modellenmesinde kullanılan, bir parçacığın zaman ve uzaydaki değişimini açıklayan ve bu parçacığın dalga fonksiyonunu ifade eden önemli bir denklemdir. Klein-Gordon denklemi, Schrödinger denklemiyle ilgili olan göreli bir dalga denklemi olup Schrödinger denklemi biçimine getirilebilir. Herhangi bir potansiyele sahip Klein-Gordon denklemleri, göreli kuantum mekaniğinde önemli bir rol oynar (Wang ve Wong 1988) ve bu nedenle, Klein-Gordon s-dalga denkleminin farklı yöntemler kullanılarak yapılmış çeşitli potansiyellere sahip kesin çözümleri üzerine birçok çalışma vardır. Bu yöntemlerden bazıları değişkenlerine ayırma yöntemi (Greiner 2000), cebirsel yöntem (Chen vd. 2006), Nikiforov-Uvarov yöntemi (Ikhdair ve Sever 2007) ve asimptotik iterasyon yöntemidir (Ciftci vd. 2003). Klein-Gordon denklemlerinin bu kesin çözümlerini kullanarak bir çok yazar da bu denklemlerin spektral analizini araştırmaktadır (Degasperis 1970, Bairamov ve Çelebi 1997, Adıvar ve Bairamov 2001, Bairamov vd. 2001, Bairamov ve Karaman 2002, Bairamov 2004, Başcanbaz-Tunca 2004). Genel olarak, bahsedilen çalışmalar, farklı sınır koşulları ile çeşitli varsayımlar altında, varsa özdeğerlerin ve spektral tekilliklerin özelliklerini sunar.

"S-dalga" denklemi, Klein-Gordon denkleminin özel bir durumunu temsil eder. "S-dalga" terimi, dalga mekaniği ve kuantum mekaniğinde saçılım teorisi bağlamında kullanılan bir terimdir. Dalga mekaniği, kuantum mekaniğinin parçacıkların davranışını matematiksel bir yaklaşımla açıklayan dalıdır.

Literatürde Klein-Gordon s-dalga denkleminin saçılım analizi ile ilgili araştırmalara rastlamak mümkündür. Klein-Gordon s–dalga denkleminin spektral özellikleri Degasperis, Jaulent ve Jean, Bairamov gibi önemli matematikçiler tarafından incelenmiştir (Degasperis 1970, Jaulent ve Jean 1972, Bairamov ve Çelebi 1997, Bairamov vd. 2001, Bairamov ve Karaman 2002, Bairamov 2004, Ballesteros vd. 2022). Klein-Gordon s-dalga denklemleri ile ilgili problemler 1926'dan beri birçok araştırmacının ilgisini çekmiş olsa da, bu tür problemlerin sıçrama koşullarının olduğu her durumda saçılım analizini araştırmak hala açık bir problemdir. Bu vesileyle, fizik, biyoteknoloji, kimya teknolojisi, popülasyon dinamikleri ve ekonomide incelenen birkaç gerçek dünya probleminin gözlenen evrim fenomeninin doğal bir açıklaması olarak görünen sıçramalı bir etki yapar (Benchohra 2006, Lakshmikantham vd. 1989, Samoilenko ve Perestyuk 1995). Süreksizliklerin olduğu bu noktalara atlama koşulları, impalsif koşullar, iletim veya arayüz koşulları da denir. İmpalsif problemleri ilk olarak Mil'man ve Myshkis çalışmışlardır (Mil'man ve Myshkis 1960).

Göreli kuantum mekaniğinde; q fonksiyonu statik potansiyel olmak üzere, kütlesi sıfır olan parçacığın radyal Klein-Gordon s-Dalga denklemi aşağıdadır (Greiner 2000)

$$y^{''} + [\beth - q(x)]^2 y = 0,\ x \in (-\infty, \infty).$$

1970 yılında Degasperis, $L_2(0,\infty)$ uzayında

$$y^{''} + [\beth - q(x)]^2 y = 0,\ x \in [0, \infty),$$

denklemi ve $y(0) = 0$ sınır koşulu ile elde ettiği operatörü L_0 simgesiyle göstermiş, bu operatörün, q fonksiyonunun reel, analitik ve sonsuzlukta hızla azalan bir fonksiyon olması durumunda L_0 operatörünün sonlu sayıda ve sonlu katlı özdeğerlerinin olduğunu ispatlamıştır (Degasperis 1970).

1972 yılında Jaulent ve Jean, Schrödinger radyal s-dalga denkleminin ters saçılım problemini ele almış, Marchenko'nun yönteminin genel halini kullanarak problemin Jost fonksiyonunu, saçılım fonksiyonunu elde etmiş ve fonksiyonun sıfırlarının sonlu olduğunu göstermiştir (Jaulent ve Jean 1972).

1994 yılında Greiner, q sabit, üstel azalan, Newton tipinde bir potansiyel olduğunda operatörün spektrumunun özdeğerlerden ibaret olduğunu göstermiş ve bu özdeğerlere karşılık gelen özfonksiyonları da elde etmiştir (Greiner 2000).

Bairamov ve Çelebi, q kompleks potansiyeli ve basit bir sınır koşulu altında Klein-Gordon s-dalga denkleminin sonlu sayıda özdeğere ve sonlu kata sahip spektral tekilliklerini elde etmiş ve özdeğerlere ve spektral tekilliklere karşılık gelen temel fonksiyonların özelliklerini incelemiştir (Bairamov ve Çelebi 1997). Ayrıca aynı problem, Bairamov vd. tarafından "tüm eksende" incelenmiştir (Bairamov vd. 2001).

İmpalsif koşullu Klein-Gordon denklemi, kuantum alan teorisinde belirli bir noktada bir parçacığın momentum değişimini tanımlayan matematiksel ifadedir. Denklem bir parçacığın belirli bir noktada etkileşim veya diğer dış etmenler nedeniyle ani momentum değişimine uğraması durumunu ele alır. Denklem genellikle zamanla değişen bir fonksiyonun zaman türevini açıklar ve özellikle parçacıkların belirli bir noktada bir impals alması durumunu modeller.

Bu tezde öncelikle $L_2[0,\infty)$ uzayında, q potansiyel fonksiyonu reel değerli, $\gimel$ spektral parametre ve $x = 1$ impalsif nokta olmak üzere,

$$y'' + [\gimel - q(x)]^2 y = 0, \;\; x \in [0,1) \cup (1,\infty), \tag{1.6}$$

$$y(0) = 0, \tag{1.7}$$

$$\left.\begin{array}{r} y(1^+) = \varrho y(1^-) \\ y'(1^+) = \zeta y'(1^-) \end{array}\right\}, \;\; \varrho\zeta \neq 0, \;\; \varrho, \zeta \in \mathbb{R}, \tag{1.8}$$

(1.8) impalsif koşullu altında (1.6) - (1.8) sınır değer problemininin Jost çözümü ve Jost fonksiyonu bulunacaktır. Bulunan veriler kullanılarak problemin saçılım fonksiyonu elde edilecek ve saçılım fonksiyonunun özellikleri incelenecektir.

İlgili literatür incelendiğinde impalsif koşullu Klein-Gordon s-dalga denkleminin spektral özelliklerinin ele alındığı herhangi bir çalışmanın bulunmadığı tespit edilmiştir. Bu nedenle çalışmamız önemli ve orijinal bir çalışmadır. Yapılan bu çalışma ile literatürdeki boşluğun kapatılması hedeflenmiştir.

2. TEMEL KAVRAMLAR VE TEOREMLER

Bu bölümde, çalışmamızda ihtiyacımız olan bazı temel kavramlar ve teoremler ifade edilecektir.

Tanım 2.1 Boas kompleks değişkenli fonksiyonlarda analitikliği " h bir D bölgesinde kompleks değişkenli bir fonksiyon ve keyfi bir $x_0 \in D$ *için*

$$\lim_{x \longrightarrow x_0} \frac{h(x) - h(x_0)}{x - x_0}$$

limiti varsa h'ye x_0'da diferensiyellenebilir denir. h, x_0'ın belli bir açık komşuluğundaki tüm noktalarda diferensiyellenebiliyorsa h'ye x_0'da analitiktir." şeklinde tanımlamıştır (Boas 1954).

Tanım 2.2 Boas reel değişkenli fonksiyonlarda analitikliği " $h : [m, n] \to \mathbb{R}$ olsun.
i) h, $[m, n]$'de sonsuz türevlenebilir, yani $h \in C^{\infty}[m, n]$,
ii) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{h^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$ serisi $\forall x_0 \in [m, n]$ için normal yakınsak,
iii) $h(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{h^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$, $\forall x \in [m, n]$ için kendi Taylor serisine eşit ise
h fonksiyonuna $[m, n]$ aralığında analitik fonksiyon denir." şeklinde tanımlamıştır (Boas 1954).

Tanım 2.3 Kompleks düzlemin tamamında analitik olan h fonksiyonuna tam fonksiyon denir (Boas 1954).

Tanım 2.4 D_x ve D_y bölgeleri $D_x \cap D_y \neq \varnothing$ olmak üzere $\forall z \in D_x \cap D_y$ için $f_x(z) = f_y(z)$ oluyorsa (f_x, D_x) *ve* (f_y, D_y) fonksiyon elemanlarına birbirinin analitik devamıdır denir (Conway 1978).

Tanım 2.5 Bir dönüşümün tanım ve değer bölgesi aynı K cismi üzerinde vektör uzayı ise bu dönüşüme operatör denir.
$L : D \to X$ dönüşümü bir operatör ve $\forall x_1, x_2 \in D$ *ve* $\forall \alpha_1, \alpha_2 \in K$ için,

$$L(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 L(x_1) + \alpha_2 L(x_2)$$

eşitliği gerçekleniyorsa L dönüşümüne lineer operatör, $X = \mathbb{C}$ olması durumunda ise L'ye lineer fonksiyonel adı verilir (Kreyszing 1978).

Tanım 2.6 Lusternik ve Sobolev, "V boştan farklı bir küme ve $L : V \to V$ lineer operatör olmak üzere,

$$Lx = \gimel x, \ x \in D(L),$$

denkleminin $\gimel = \gimel_0$ kompleks sayısı için sıfırdan farklı bir çözümü varsa $\gimel_0$ sayısına L operatörünün özdeğeri ve elde edilen çözüme de bu özdeğere karşılık gelen özvektör denir." şeklinde tanımlamıştır (Naimark 1968).

Tanım 2.7 "V bir kompleks vektör uzayı, $L : V \to V$ lineer bir operatör olmak üzere, $\gimel \in \mathbb{C}$ için

$$Lx = \gimel x$$

denkleminin aşikar olmayan bir $x \in V$ çözümünün olması durumunda $\gimel'$ya L operatörünün özdeğeri, x çözümüne ise L operatörünün $\gimel$ özdeğerine karşılık gelen özvektörü denir." L operatörünün özdeğerler kümesi

$$\sigma_d(L) = \{\gimel \mid \gimel \in \mathbb{C} : R_\gimel(L) \ mevcut \ değil\}$$

biçimde olup $\sigma_d(L)$ simgesiyle gösterilir (Lusternik ve Sobolev 1974).

Tanım 2.8 Lusternik ve Sobolev, "$V \neq \{0\}$ bir kompleks normlu uzay,

$$V : D(L) \subset V \to V$$

bir lineer operatör, $\gimel \in \mathbb{C}$ ve I birim operatör olmak üzere,

$$R_\gimel(L) = (L - \gimel I)^{-1}$$

operatörü varsa, bu operatöre L lineer operatörünün rezolventi denir. $R_\gimel(L)$ var, sınırlı ve V uzayında yoğunsa $\gimel$ kompleks ifadesine L operatörünün regüler değeri denir. L operatörünün regüler değerlerinden oluşan cümlesine L operatörünün rezolvent cümlesi denir." L operatörünün rezolvent cümlesi $\rho(L)$ ile gösterilir şeklinde ifade etmiştir (Lusternik ve Sobolev 1974).

Tanım 2.9 Naimark, "Bir L operatörünün rezolventinin çekirdeğinin kutup noktası olan, spektrumda bulunan ve operatörün özdeğeri olmayan noktalara L operatörünün spektral tekillikleri denir." şeklinde L'nin spektral tekilliklerini tanımlamış ve bu kümeyi $\sigma_{ss}(L)$ simgesi ile göstermiştir (Naimark 1968).

Tanım 2.10 İlk kez Bachmann tarafından kullanılan "O" ve "o" kavramları " $f : [m,n] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu sınırlı ise $x \in [m,n]$ için

$$f(x) = O(1)$$

olarak tanımlanır. Başka bir deyişle $\forall x \in [m,n]$ *olmak üzere*,

$$|f(x)| \leq S \Longleftrightarrow f(x) = O(1)$$

veya

$$\left|\frac{f(x) - r(x)}{t(x)}\right| \leq S \Longleftrightarrow f(x) = r(x) + O(t(x))$$

şeklinde tanımlanır." Ayrıca $O(1)$ gösteriminden farklı olarak $o(1)$ asimptotik ifadesi ise sıfıra yakınsama anlamında kullanılır.

$$f(x) = o(1),\ x \to \infty \Longleftrightarrow \lim_{x \longrightarrow \infty} f(x) = 0$$

veya

$$f(x) = h(x) + o(g(x)) \Longleftrightarrow \lim_{x \longrightarrow \infty} \left|\frac{f(x) - h(x)}{g(x)}\right| = 0$$

şeklinde tanımlıdır (Bachmann 1894).

Tanım 2.11 Kompleks değişkeni $0 \neq \Bbbk = re^{i\theta}$ olan logaritmik fonksiyon,

$$\log \Bbbk = Logr + i\theta$$

şeklindedir. Başka bir ifadeyle sıfırdan farklı $\Bbbk$ karmaşık sayısı için

$$\log \Bbbk = \ln |\Bbbk| + i \arg \Bbbk$$

eşitliği sağlanır. Burada $arg\Bbbk = Arg\Bbbk + 2n\pi,\ n \in \mathbb{Z},\ -\pi \leq Arg\Bbbk < \pi$ biçimindedir. Bu eşitlikte $n = 0$ alınırsa logaritmanın esas değeri elde edilir (Sarason 2007).

Tanım 2.12 $X \neq \varnothing$ bir küme olmak üzere,
$A : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ B : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonları X üzerinde türevlenebilir olmak üzere,
$\forall x \in X$ *için* A ve B fonksiyonlarının Wronskiyeni

$$W[A(x,\gimel), B(x,\gimel)] = A(x,\gimel)B_x(x,\gimel) - A_x(x,\gimel)B(x,\gimel)$$

biçimindedir (Naimark 1968).

Teorem 2.1 (Weierstrass-M Kriteri) $\digamma \neq \varnothing$ bir küme ve $\digamma$ üzerinde tanımlı fonksiyonların bir serisi $\sum f_k$ olmak üzere,
$\forall x \in \digamma$ ve $k \in \mathbb{N}$ için $|f_k| \leq a_k$ ve $\sum a_k < \infty$ ise $\sum f_k$ serisi $\digamma$'de düzgün yakınsaktır (Balcı 2012).

Lemma 2.1 (Riemann Lebesque Lemması) " $f,\ [a,b]$ aralığında tanımlı bir fonksiyon olmak üzere bu aralıkta Riemann integrallenebilirse

$$\lim_{\gimel \longrightarrow \pm\infty} \int_a^b f(t)\cos(\gimel t)dt = 0,$$

$$\lim_{\gimel \longrightarrow \pm\infty} \int_a^b f(t)\sin(\gimel t)dt = 0,$$

eşitlikleri gerçeklenir." (Titchmarsh 1939).

Tanım 2.13 $\theta(x,y)$ bir $D = \{(x,y) : e \leq x \leq f,\ p \leq y \leq r\ \}$ dikdörtgeninde tanımlı bir fonksiyon, $a(x)$ ve $b(x)$ de $e \leq x \leq f$ aralığında tanımlı bir fonksiyon olmak üzere,

$$\vartheta(x) = \int_{a(x)}^{b(x)} \theta(x,t)dt$$

biçiminde ifade edilen integral yardımıyla tanımlanmış $\vartheta(x)$ fonksiyonunun türevi

$$\vartheta'(x) = \theta[x, b(x)]b'(x) - \theta[x, a(x)]a'(x) + \int\limits_{a(x)}^{b(x)} \frac{\partial\theta(x,t)}{\partial x} dt$$

biçimindedir (Altın 2020).

Tanım 2.14 $\forall\epsilon > 0,\ \exists\Im > 0$ bulunabiliyorsa,

arakesiti boş olan keyfi ikişer $[p_j, r_j] \subset [a, b]\,,\ j = 1, 2, .., t$ aralıkları için

$$\sum_{j=1}^{t} |p_k - r_k| < \Im\ iken\ \sum_{j=1}^{t} |f(p_j) - f(r_j)| < \epsilon$$

ise, f fonksiyonuna $[a, b]$ aralığında mutlak sürekli fonksiyon denir (Lojasiewicz 1988).

3. İMPALSİF KLEİN-GORDON S-DALGA DENKLEMİNİN SPEKTRAL ÖZELLİKLERİ

Bu bölümde, öncelikle, çalışmamızda kullanacağımız Klein-Gordon s-dalga denklemi ile ilgili yapılmış bazı çalışmaların önemli sonuçları hakkında bilgiler verilecektir. Sonrasında, impalsif koşulu ve sınır koşulu ile Klein-Gordon s-dalga denkleminden impalsif koşullu SDP oluşturulacaktır. Oluşturduğumuz impalsif koşullu Klein-Gordon s-dalga denklemininin Jost fonksiyonu ve Jost çözümü bulunacak. Bu çözümler kullanılarak saçılım fonksiyonu tanımlanacak ve saçılım fonksiyonunun özellikleri incelenecektir. İmpalsif koşullu Klein-Gordon s-dalga denkleminin Jost fonksiyonu için asimptotik eşitlik verilecektir. Bir örnekle elde edilen sonuçlar gösterilecektir.

3.1 Ön Bilgiler

$L_2(\mathbb{R}^+)$ uzayında aşağıdaki problemi ele alalım

$$y'' + [\gimel - q(x)]^2 y = 0,\ x \in \mathbb{R}^+ = [0, \infty)\,, \tag{3.1}$$

$$y(0) = 0, \tag{3.2}$$

sınır koşuludur. Burada $\gimel$ spektral parametre, q reel değerli, sınırlı ve $\mathbb{R}^+$'nın her bir sınırlı alt aralığında mutlak sürekli bir fonksiyondur. Ayrıca q,

$$\int_0^\infty x\left[|q(x)| + \left|q'(x)\right|\right] dx < \infty \tag{3.3}$$

eşitsizliğini sağlar. Bairamov ve Çelebi "(3.1) ve (3.2) sınır değer problemi, (3.3) koşulu altında ve $\gimel \in \mathbb{R}$ olmak üzere, $e^+(x,\gimel)$ ve $e^-(x,\gimel)$ Jost çözümleri için

$$\left.\begin{aligned} e^+(x,\gimel) &= e^{i\gamma(x)+i\gimel x} + \int_x^\infty K^+(x,t)e^{i\gimel t}dt \\ \overline{e^+(x,\gimel)} &= e^{-i\gamma(x)-i\gimel x} + \int_x^\infty K^+(x,t)e^{-i\gimel t}dt \end{aligned}\right\} \tag{3.4}$$

(3.4) eşitlikleri gerçeklenir." ifadesini elde etmiştir (Bairamov ve Çelebi 1997).

Jaulent ve Jean "$\gamma(x) = \int_x^\infty q(t)dt$ ve $K^+(x,t)$ bağımsız değişkenlerine göre sürekli türevlenebilir olan Volterra tipli integral denklemlerin çözümüdür. Bu nedenle $K^+(x,t)$, $\dfrac{d}{dx}K^+(x,t)$ ve $\dfrac{d}{dt}K^+(x,t)$'ler için

$$\begin{aligned} \left|K^+(x,t)\right| &\leq Cw(\frac{x+t}{2})\exp\{g(x)\}, \\ \left|K_x^+(x,t)\right|, \ \left|K_t^+(x,t)\right| &\leq C[w^2(\frac{x+t}{2}) + \theta(\frac{x+t}{2})], \end{aligned}$$

burada

$$\begin{aligned} w(x) &= \int_x^\infty \left[|q(t)|^2 + \left|q'(t)\right|\right] dt \\ g(x) &= \int_x^\infty \left[t\,|q(t)|^2 + 2\,|q(t)|\right] dt \\ \theta(x) &= \frac{1}{4}\left\{2\,|q(x)|^2 + \left|q'(x)\right|\right\} \end{aligned}$$

ve C bir sabittir." sonuçlarını elde etmişlerdir (Jaulent ve Jean 1972).
$e^+(x,\gimel)$ çözümü $\mathbb{C}_+ := \{\gimel \in \mathbb{C} : \operatorname{Im}\gimel > 0\}$'da ve $\overline{e^+(x,\gimel)}$ çözümü de $\mathbb{C}_- := \{\gimel \in \mathbb{C} : \operatorname{Im}\gimel < 0\}$'de $\gimel$'ya göre analitiktir. Ayrıca bu çözümler üst yarı düzlemde süreklidir. Bu çözümlere (3.1) ve (3.2)'nin Jost çözümleri denir.
Başcanbaz-Tunca " $e^+(x,\gimel)$ çözümü

$$e^+(x,\gimel) = e^{i\gimel x}[1 + o(1)],\ \gimel \in \overline{\mathbb{C}}_+ := \{\gimel \in \mathbb{C} : \operatorname{Im}\gimel \geq 0\},\ x \longrightarrow \infty, \tag{3.5}$$

$$e_x^+(x,\gimel) = e^{i\gimel x}[i\gimel + o(1)],\ \gimel \in \overline{\mathbb{C}}_+,\ x \longrightarrow \infty, \tag{3.6}$$

$$e^+(x,\gimel) = e^{i[\gamma(x)+\gimel x]} + o(1),\ \gimel \in \overline{\mathbb{C}}_+,\ |\gimel| \longrightarrow \infty, \tag{3.7}$$

eşitliklerini sağlar." asimptotik eşitliklerini elde etmiştir (Başcanbaz-Tunca 2004).
Bu eşitlikleri kullanarak, Wronskiyenin aşağıdaki gibi olduğunu elde ederiz.

$$W[e^+(x,\gimel), \overline{e^+(x,\gimel)}] = \lim_{x\longrightarrow\infty} W[e^+(x,\gimel), \overline{e^+(x,\gimel)}] = -2i\gimel\ ,\gimel \in \mathbb{R}. \tag{3.8}$$

Wronskiyen sıfırdan farklı olduğundan dolayı $\gimel \in \mathbb{R} - \{0\}$ olmak üzere, $e^{+}(x,\gimel)$ ve $\overline{e^{+}(x,\gimel)}$, (3.1)'in temel çözümleridir.

$\Theta(x,\gimel)$ ve $\Psi(x,\gimel)$, (3.1)'in başlangıç koşullarını sağlayan çözümleri olup aşağıdaki eşitlikler sağlanır,

$$\begin{aligned} \Theta(0,\gimel) &= 0\ ,\ \Theta_x(0,\gimel) = 1, \\ \Psi(0,\gimel) &= 1\ ,\ \Psi_x(0,\gimel) = 0. \end{aligned}$$

$\Theta(x,\gimel)$ ve $\Psi(x,\gimel)$, $\gimel$ parametresinin tam fonksiyonlarıdır.
$\gimel \in \mathbb{R}$ için $\Theta(x,\gimel)$ ve $\Psi(x,\gimel)$ çözümlerinin Wronskiyeni;

$$W[\Theta(x,\gimel),\Psi(x,\gimel)] = \Theta(x,\gimel)\Psi_x(x,\gimel) - \Theta_x(x,\gimel)\Psi(x,\gimel)$$

olup, üstteki eşitlikte $x = 0$ alınırsa,

$$W[\Theta(0,\gimel),\Psi(0,\gimel)] = \Theta(0,\gimel)\Psi_x(0,\gimel) - \Theta_x(0,\gimel)\Psi(0,\gimel) = -1$$

elde edilir. Wronskiyen x değişkeninden bağımsız olduğundan dolayı

$$W[\Theta(x,\gimel),\Psi(x,\gimel)] = -1 \tag{3.9}$$

yazılabilir.
$\Theta(x,\gimel)$ ve $\Psi(x,\gimel)$ çözümleri

$$\Theta(x,\gimel) = \frac{\sin\gimel x}{\gimel} + \int\limits_0^x Ç_1(x,t)\frac{\sin\gimel t}{\gimel}dt, \tag{3.10}$$

$$\Psi(x,\gimel) = \cos\gimel x + \int\limits_0^x Ç_2(x,t)\cos\gimel t dt, \tag{3.11}$$

integral gösterimlerine sahiptir. Burada $Ç_1(x,t)$ ve $Ç_2(x,t)$ çekirdek fonksiyonları, q potansiyel fonksiyonu yardımıyla yazılır (Levitan ve Sargsjan 1991).

3.2 İmpalsif Klein-Gordon s-Dalga Denklemi

$L_2[0,\infty)$ uzayında $\varrho, \zeta \in \mathbb{R}$ ve $\varrho\zeta \neq 0$ olmak üzere, (3.1) - (3.2) SDP'ni aşağıdaki impalsif koşulları ile birlikte dikkate alalım.

$$\left.\begin{aligned} y(1^+) &= \varrho y(1^-) \\ y'(1^+) &= \zeta y'(1^-) \end{aligned}\right\} \tag{3.12}$$

Tez boyunca (3.1) - (3.2) sınır değer problemi ve (3.12) impalsif koşulu ile elde edilen impalsif koşullu sınır değer problemine kısaca SSDP diyeceğiz.

Konuyla İlgili Problem

Bu tezde (3.1) - (3.2) ve (3.12) impalsif koşullu sınır değer probleminin saçılım teorisi incelenecektir.

Burada, (3.12) sınır değer probleminin impalsif koşulu ve $x = 1$ noktası impalsif noktasıdır.

Öncelikle $\gimel \in \mathbb{R}$, daha önce elde ettiğimiz $e^+(x,\gimel)$, $\Theta(x,\gimel)$ ve $\Psi(x,\gimel)$ çözümleri için SSDP'nin aşağıdaki çözümünü düşünelim.

$$E^+(x,\gimel) = \begin{cases} c_1\Theta(x,\gimel) + c_2\Psi(x,\gimel) & ; \quad x \in [0,1) \\ e^+(x,\gimel) & ; \quad x \in (1,\infty) \end{cases} \tag{3.13}$$

$E^+(x,\gimel)$ çözümünün (3.12) impalsif koşulunu sağlayabilmesi için bu koşullar uygulanarak

$$e^+(1,\gimel) = \varrho c_1\Theta(1,\gimel) + \varrho c_2\Psi(1,\gimel)$$

ve

$$e^{+'}(1,\gimel) = \zeta c_1\Theta'(1,\gimel) + \zeta c_2\Psi'(1,\gimel)$$

elde edilen eşitliklerden ve (3.9) eşitliğinden $\gimel \in \mathbb{R}$ için, c_1 ve c_2 katsayılarını

$$c_1 = \frac{\varrho e^{+'}(1,\gimel)\Psi(1,\gimel) - \zeta e^+(1,\gimel)\Psi'(1,\gimel)}{\varrho\zeta} \tag{3.14}$$

$$c_2 = \frac{\zeta\Theta'(1,\gimel)e^+(1,\gimel) - \varrho\Theta(1,\gimel)e^{+'}(1,\gimel)}{\varrho\zeta} \tag{3.15}$$

şeklinde buluruz.

(3.14) ve (3.15) eşitliğini (3.13) çözümünde yerine yazar ve sınır koşulu kullanılırsa, SSDP'nin Jost fonksiyonunun

$$E^{+}(0,\gimel) = c_2\left(\gimel\right)$$

olduğunu elde ederiz.

(3.3) ve (3.13)'ten $E^{+}(x,\gimel)$, reel eksenden üst kompleks yarı düzleme analitik devam ettirilebilir. Üstelik $\gimel \in \overline{\mathbb{C}}_{+}$ için $E^{+}(x,\gimel)$ Jost çözümünü temsil eder. Bu temsil sonucunda $c_2\left(\gimel\right)$ fonksiyonu $\mathbb{C}_{+}$'da analitiktir ve reel eksene dek süreklidir.

Şimdi $\gimel \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ için (3.12) impalsif koşullu (3.1) - (3.2) sınır değer probleminin (SSDP'nin) aşağıda yer alan çözümünü

$$G^{+}(x,\gimel) = \begin{cases} \Theta(x,\gimel) & , \quad x \in [0,1), \\ c_3 e^{+}(x,\gimel) + c_4 \overline{e^{+}(x,\gimel)} & , \quad x \in (1,\infty), \end{cases}$$

şeklinde ele alalım.

$\gimel \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ için $G^{+}(x,\gimel)$ çözümünün (3.12) impalsif koşulunu sağlayabilmesi için impalsif koşulun uygulanmasıyla ve $e^{+}(x,\gimel)$, $\overline{e^{+}(x,\gimel)}$'nın Wronskiyeni olan (3.8) eşitliğinin kullanılmasıyla c_3 *ve* c_4 katsayılarının

$$c_3 = \frac{-\varrho\Theta(1,\gimel)\overline{e^{+'}(1,\gimel)} + \zeta\Theta'(1,\gimel)\overline{e^{+}(1,\gimel)}}{2i\gimel} \tag{3.16}$$

ve

$$c_4 = \frac{-\zeta e^{+}(1,\gimel)\Theta'(1,\gimel) + \varrho e^{+'}(1,\gimel)\Theta(1,\gimel)}{2i\gimel} \tag{3.17}$$

şeklinde olması gereklidir.

Lemma 3.1 $\gimel \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ için $E^{+}(x,\gimel)$ and $G^{+}(x,\gimel)$'nın Wronskiyeni aşağıdaki gibidir;

$$W[E^{+}(x,\gimel), G^{+}(x,\gimel)] = \begin{cases} -\dfrac{2i\gimel}{\varrho\zeta}c_4 & , \quad x \in [0,1), \\ \\ -2i\gimel c_4 & , \quad x \in (1,\infty). \end{cases}$$

İspat. Wronskiyenin tanımından ve yukarıda yer alan sonuçlardan faydalanılarak

$x \in [0,1)$ için,

$W[E^{+}(x,\gimel), G^{+}(x,\gimel)] = E^{+}(x,\gimel)G_x^{+}(x,\gimel) - E_x^{+}(x,\gimel)G^{+}(x,\gimel)$

$= (c_1\Theta(x,\gimel) + c_2\Psi(x,\gimel))\,\Theta^{'}(x,\gimel) - \left(c_1\Theta^{'}(x,\gimel) + c_2\Psi^{'}(x,\gimel)\right)\Theta(x,\gimel)$

$= c_1\Theta(x,\gimel)\Theta^{'}(x,\gimel) + c_2\Psi(x,\gimel)\Theta^{'}(x,\gimel) - c_1\Theta^{'}(x,\gimel)\Theta(x,\gimel) - c_2\Psi^{'}(x,\gimel)\Theta(x,\gimel)$

$= c_2\Psi(x,\gimel)\Theta^{'}(x,\gimel) - c_2\Psi^{'}(x,\gimel)\Theta(x,\gimel) = -c_2W[\Theta(x,\gimel), \Psi(x,\gimel)] = c_2$

$$W[E^{+}(x,\gimel), G^{+}(x,\gimel)] = c_2,\ x \in [0,1),$$

$x \in (1,\infty)$ için,

$W[E^{+}(x,\gimel), G^{+}(x,\gimel)] = E^{+}(x,\gimel)G_x^{+}(x,\gimel) - E_x^{+}(x,\gimel)G^{+}(x,\gimel)$

$= e^{+}(1,\gimel)\left(c_3e^{+'}(1,\gimel) + c_4\overline{e^{+'}(1,\gimel)}\right) - e^{+'}(1,\gimel)\left(c_3e^{+}(1,\gimel) + c_4\overline{e^{+}(1,\gimel)}\right)$

$= e^{+}(1,\gimel)c_3e^{+'}(1,\gimel) + e^{+}(1,\gimel)c_4\overline{e^{+'}(1,\gimel)} - e^{+'}(1,\gimel)c_3e^{+}(1,\gimel) - e^{+'}(1,\gimel)c_4\overline{e^{+}(1,\gimel)}$

$= c_4e^{+}(1,\gimel)\overline{e^{+'}(1,\gimel)} - c_4e^{+'}(1,\gimel)\overline{e^{+}(1,\gimel)} = c_4W[e^{+}(1,\gimel), \overline{e^{+}(1,\gimel)}] = c_4(-2i\gimel)$

$$\Rightarrow W[E^{+}(x,\gimel), G^{+}(x,\gimel)] = -2i\gimel c_4,\ x \in (1,\infty)$$

elde edilir.

Öte yandan $\gimel \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ için c_2 ve c_4 katsayıları arasındaki ilişki (3.15) ve (3.17)'den

$$c_4 = -\frac{\varrho\zeta}{2i\gimel}c_2$$

elde şeklinde elde edilir. Lemma ispatlanır. ∎

Teorem 3.1 $\gimel \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ alalım. Bu durumda $c_2(\gimel) \neq 0$'dır.

İspat. Öyle bir $\widetilde{\gimel} \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ olduğunu varsayalım ki $c_2(\widetilde{\gimel}) = 0$ olsun.

Bu $E^{+}(0,\widetilde{\gimel}) = 0$ olduğu anlamına gelir. (3.15), (3.16) ve (3.17) kullanılarak $c_3(\widetilde{\gimel}) = c_4(\widetilde{\gimel}) = 0$ elde edilir. Bu da $G^{+}(x,\widetilde{\gimel})$ çözümünün aynı şekilde sıfır olduğunu verir.

Bu durumda $G^{+}(x,\widetilde{\gimel})$, SSDP probleminin aşikar çözümü olduğundan bu bir çelişkidir.

Bu çelişkinin sonucu olarak $\gimel \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ için $c_2(\gimel) \neq 0$ olduğunu söyleriz. ∎

$$S(\gimel) := \frac{\overline{E^{+}(0,\gimel)}}{E^{+}(0,\gimel)},\ \gimel \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$$

fonksiyonu, SSDP probleminin saçılım fonksiyonu olarak adlandırılır.

Her $\gimel \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ olmak üzere, $E^{+}(x,\gimel)$'dan

$$S(\gimel)=\frac{\overline{c_2}}{c_2}=\frac{\varrho\Theta(0,\gimel)\overline{e^{+\prime}(0,\gimel)}-\zeta\Theta'(0,\gimel)\overline{e^{+}(0,\gimel)}}{\varrho\Theta(0,\gimel)e^{+\prime}(0,\gimel)-\zeta\Theta'(0,\gimel)e^{+}(0,\gimel)} \tag{3.18}$$

olduğu açıktır.

(3.18)'den

$$S(0)=\lim_{\gimel\longrightarrow 0}S(\gimel)=1$$

elde edilir.

Teorem 3.2 Her $\gimel \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ için saçılım fonksiyonu $\overline{S(\gimel)}=S^{-1}(\gimel)$ eşitliğini sağlar.
İspat. $\overline{S(\gimel)}:=\dfrac{E^{+}(0,\gimel)}{\overline{E^{+}(0,\gimel)}}=S^{-1}(\gimel)$ elde edilir. ■

$\gimel \in \overline{\mathbb{C}}_{-}$ için, (3.12), (3.1) - (3.2) impalsif koşullu sınır değer probleminin aşağıda yer alan başka bir çözümünü ele alalım.

$$E^{-}(x,\gimel)=\begin{cases} c_5\Theta(x,\gimel)+c_6\Psi(x,\gimel) & ; \quad x\in[0,1) \\ \overline{e^{+}(x,\gimel)} & ; \quad x\in(1,\infty) \end{cases}$$

Önceki katsayıların elde ediliş yöntemi gibi, $E^{-}(x,\gimel)$ çözümünün (3.12) impalsif koşulunu sağlacak şekilde ve impalsif koşulların uygulanmasıyla elde edilen

$$\overline{e^{+}(1,\gimel)}=\varrho c_5\Theta(1,\gimel)+\varrho c_6\Psi(1,\gimel)$$

ve

$$\overline{e^{+\prime}(1,\gimel)}=\zeta c_5\Theta'(1,\gimel)+\zeta c_6\Psi'(1,\gimel)$$

eşitliklerinden ve (3.9) eşitliğinden yararlanarak c_5 ve c_6 katsayıları

$$c_5(\gimel)=\frac{\varrho\overline{e^{+\prime}(1,\gimel)}\Psi(1,\gimel)-\zeta\overline{e^{+}(1,\gimel)}\Psi'(1,\gimel)}{\varrho\zeta} \tag{3.19}$$

$$c_6(\gimel) = \frac{\zeta\Theta'(1,\gimel)\overline{e^{+}(1,\gimel)} - \varrho\Theta(1,\gimel)\overline{e^{+\prime}(1,\gimel)}}{\varrho\zeta} \tag{3.20}$$

şeklinde olmalıdır.

Yargı 3.1 Her $\gimel \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ olmak üzere,
$c_1(\gimel),\ c_2(\gimel),\ c_3(\gimel),\ c_4(\gimel),\ c_5(\gimel)\ ve\ c_6(\gimel)$ katsayıları için aşağıdaki eşitlikleri yazabiliriz.

$$\begin{aligned} c_1(\gimel) &= \overline{c_5(\gimel)}, \\ c_2(\gimel) &= \frac{-2i\gimel}{\varrho\zeta} c_4(\gimel), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c_3(\gimel) &= \frac{\varrho\zeta}{2i\gimel} c_6(\gimel), \\ \overline{c_2(\gimel)} &= c_6(\gimel), \end{aligned}$$

$$c_1(\gimel) c_6(\gimel) - c_2(\gimel) c_5(\gimel) = \frac{2i\gimel}{\varrho\zeta}.$$

Her $\gimel \in \mathbb{R} - \{0\}$ için Yargı 3.1'den ve Wronskiyen tanımından aşağıdaki eşitlikleri yazabiliriz:

$$W[E^{+}(x,\gimel), E^{-}(x,\gimel)] = \begin{cases} -\dfrac{2i\gimel}{\varrho\zeta} & , \quad x \in [0,1), \\ \\ -2i\gimel & , \quad x \in (1,\infty), \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{c_2}{c_4} & , \quad x \in [0,1), \\ \\ \varrho\zeta\dfrac{c_2}{c_4} & , \quad x \in (1,\infty), \end{cases}$$

ve

$$W[G^{+}(x,\gimel), E^{-}(x,\gimel)] = \begin{cases} -c_6 & , \quad x \in [0,1), \\ -\varrho\zeta c_6 & , \quad x \in (1,\infty). \end{cases}$$

Teorem 3.3 (3.12) impalsif koşullu (3.1) - (3.2) sınır değer probleminin özdeğerlerinin kümesi

$$\sigma_d = \left\{\gimel \in \mathbb{C}_+ : \overline{c_6(\gimel)} = 0\right\} \cup \{\gimel \in \mathbb{C}_- : c_6(\gimel) = 0\}$$

ve

$$\sigma_d = \{\gimel \in \mathbb{C}_+ : c_2(\gimel) = 0\} \cup \left\{\gimel \in \mathbb{C}_- : \overline{c_2(\gimel)} = 0\right\}$$

biçimindedir.

Teorem 3.3'ten açıktır ki impalsif koşullu sınır değer probleminin özdeğerlerinin niceliksel özelliklerini araştırmak için $\mathbb{C}_+$ ve $\mathbb{C}_-$düzleminde $c_2(\gimel)$ ve $c_6(\gimel)$'nın sıfırlarının niceliksel özellikleri üzerinde çalışmak gerekir.

Lemma 3.2 *Her* $\gimel \in \overline{\mathbb{C}}_+$ ve $|\gimel| \to \infty$ için aşağıdaki asimptotik eşitlikler gerçeklenir:

$$\Theta(1,\gimel) = \frac{e^{-i\gimel}}{\gimel}[\frac{i}{2} + o(1)],$$

$$\Theta^{'}(1,\gimel) = e^{-i\gimel}[\frac{1}{2} + O(\frac{1}{\gimel})],$$

$$\Psi(1,\gimel) = e^{-i\gimel}[\frac{1}{2} + o(1)],$$

$$\Psi^{'}(1,\gimel) = \gimel e^{-i\gimel}[-\frac{i}{2} + O(\frac{1}{\gimel})].$$

İspat. (3.10)'da verilen

$$\Theta(x,\gimel) = \frac{\sin \gimel x}{\gimel} + \int\limits_0^x A(x,t)\frac{\sin \gimel t}{\gimel}dt$$

eşitliğinde $x = 1$ alınırak

$$\Theta(1,\gimel) = \frac{\sin \gimel}{\gimel} + \int\limits_0^1 A(1,t)\frac{\sin \gimel t}{\gimel}dt$$

bulunur. Bu eşitlikte

$$\sin \gimel = \frac{e^{i\gimel} - e^{-i\gimel}}{2i} \tag{3.21}$$

ifadesi kullanılırsa

$$\Theta(1,\gimel) = \frac{e^{i\gimel} - e^{-i\gimel}}{2i\gimel} + \int_0^1 A(1,t)(\frac{e^{i\gimel t} - e^{-i\gimel t}}{2i\gimel})dt$$

çıkar. Buradan

$$\Theta(1,\gimel) + \frac{e^{-i\gimel}}{2i\gimel} = \frac{e^{i\gimel} - e^{-i\gimel}}{2i\gimel} + \frac{e^{-i\gimel}}{2i\gimel} + \int_0^1 A(1,t)(\frac{e^{i\gimel t} - e^{-i\gimel t}}{2i\gimel})dt$$

$$= \frac{e^{i\gimel}}{2i\gimel} + \int_0^1 A(1,t)(\frac{e^{i\gimel t} - e^{-i\gimel t}}{2i\gimel})dt$$

elde edilen eşitlikte gerekli işlemler yapılırsa

$$\left(\Theta(1,\gimel) - \frac{ie^{-i\gimel}}{2\gimel}\right)\gimel e^{i\gimel} = \left[\frac{e^{i\gimel}}{2i\gimel} + \int_0^1 A(1,t)(\frac{e^{i\gimel t} - e^{-i\gimel t}}{2i\gimel})dt\right]\gimel e^{i\gimel}$$

$$= \frac{e^{i\gimel}}{2i} + \int_0^1 A(1,t)(\frac{e^{i\gimel(t+1)} - e^{i\gimel(1-t)}}{2i})dt \tag{3.22}$$

eşitliği elde edilir. Her $\gimel \in \overline{\mathbb{C}}_+, \ \ |\gimel| \to \infty$ için

$$\frac{e^{i\gimel}}{2i} = o(1) \tag{3.23}$$

olur.

$|A(1,t)| \leq N_1,$

$$\int_0^1 A(1,t)(\frac{e^{i\gimel(t+1)} - e^{i\gimel(1-t)}}{2i})dt = o(1) \ ,\gimel \in \overline{\mathbb{C}}_+ \ ve \ \ |\gimel| \to \infty \tag{3.24}$$

bulunr. (3.22), (3.23) ve (3.24) eşitliklerinden

$$\Theta(1,\gimel) = \frac{e^{-i\gimel}}{\gimel}[\frac{i}{2} + o(1)], \ \gimel \in \overline{\mathbb{C}}_+ \ ve \ \ |\gimel| \to \infty \tag{3.25}$$

asimptotik eşitliği yazılır.

(3.11)'de verilen

$$\Psi(x,\gimel)=\cos\gimel x+\int\limits_0^x B(x,t)\cos\gimel t dt$$

eşitlikte $x=1$ alınırsa,

$$\Psi(1,\gimel)=\cos\gimel+\int\limits_0^1 B(1,t)\cos\gimel t dt$$

bulunur.

$$\cos\gimel=\frac{e^{i\gimel}+e^{-i\gimel}}{2} \tag{3.26}$$

eşitliği kullanılarak,

$$\Psi(1,\gimel)=\frac{e^{i\gimel}+e^{-i\gimel}}{2}+\int\limits_0^1 B(1,t)(\frac{e^{i\gimel t}+e^{-i\gimel t}}{2})dt$$

eşitliği gösterilir. Buradan,

$$\Psi(1,\gimel)-\frac{e^{-i\gimel}}{2}=\frac{e^{i\gimel}+e^{-i\gimel}}{2}-\frac{e^{-i\gimel}}{2}+\int\limits_0^1 B(1,t)(\frac{e^{i\gimel t}+e^{-i\gimel t}}{2})dt$$

$$=\frac{e^{i\gimel}}{2}+\int\limits_0^1 B(1,t)(\frac{e^{i\gimel t}+e^{-i\gimel t}}{2})dt$$

yazılır. Son eşitlikte gerekli işlemler yapılarak

$$(\Psi(1,\gimel)-\frac{e^{-i\gimel}}{2})e^{i\gimel}=[\frac{e^{i\gimel}}{2}+\int\limits_0^1 B(1,t)(\frac{e^{i\gimel t}+e^{-i\gimel t}}{2})dt]e^{i\gimel}$$

$$=\frac{e^{2i\gimel}}{2}+\int\limits_0^1 B(1,t)(\frac{e^{i\gimel(t+1)}+e^{-i\gimel(t-1)}}{2})dt \tag{3.27}$$

eşitliği elde edilir.

$|B(1,t)|\leq N_2$,

$$\int\limits_0^1 B(1,t)(\frac{e^{i\gimel(t+1)}+e^{-i\gimel(t-1)}}{2})dt=o(1),\ \gimel\in\overline{\mathbb{C}}_+ \ ve\ \ |\gimel|\to\infty \tag{3.28}$$

eşitliği yazılır. (3.23), (3.27) ve (3.28) eşitlikleri kullanılarak

Her $\gimel \in \overline{\mathbb{C}}_+$, $|\gimel| \to \infty$ için,

$$\Psi(1,\gimel) = e^{-i\gimel}[\frac{1}{2} + o(1)] \tag{3.29}$$

asimptotik eşitliği elde edilir.

(3.10) ifadesinin x'e göre türevi alınır ve x yerine 1 yazılırsa

$$\Theta^{'}(1,\gimel) = \cos\gimel + A(1,1)\frac{\sin\gimel}{\gimel} + \int\limits_0^1 A_x(1,t)\frac{\sin\gimel t}{\gimel}dt$$

eşitliği bulunur. (3.21) ve (3.26) eşitliklerinden faydalanılarak

$$\Theta^{'}(1,\gimel) = \frac{e^{i\gimel} + e^{-i\gimel}}{2} + A(1,1)(\frac{e^{i\gimel} - e^{-i\gimel}}{2i\gimel}) + \int\limits_0^1 A_x(1,t)(\frac{e^{i\gimel t} - e^{-i\gimel t}}{2i\gimel})dt$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitlikten

$$\Theta^{'}(1,\gimel)e^{i\gimel} = \frac{e^{2i\gimel} + 1}{2} + \frac{1}{\gimel}[A(1,1)(\frac{e^{2i\gimel} - 1}{2i}) + \int\limits_0^1 A_x(1,t)(\frac{e^{i\gimel(t+1)} - e^{i\gimel(1-t)}}{2i})dt]$$

ve

$$\Theta^{'}(1,\gimel)e^{i\gimel} - \frac{1}{2} = \frac{e^{2i\gimel}}{2} + \frac{1}{\gimel}[A(1,1)(\frac{e^{2i\gimel} - 1}{2i}) + \int\limits_0^1 A_x(1,t)(\frac{e^{i\gimel(t+1)} - e^{i\gimel(1-t)}}{2i})dt]$$

yazılır.

Her $\gimel \in \overline{\mathbb{C}}_+$, $|\gimel| \to \infty$ için

$$A(1,1)(\frac{e^{2i\gimel} - 1}{2i}) = O(1) \tag{3.30}$$

asimptotik eşitliği elde edilir.

$|A_x(1,t)| \leq N_3$

$\gimel \in \overline{\mathbb{C}}_+$, $|\gimel| \to \infty$ için

$$\int\limits_0^1 A_x(1,t)(\frac{e^{i\gimel(t+1)} - e^{i\gimel(1-t)}}{2i})dt = o(1) \tag{3.31}$$

yazılır. (3.23), (3.30) ve (3.31) eşitliklerinden faydalanılarak
$\lambda \in \overline{\mathbb{C}}_+, \; |\lambda| \to \infty$ *için*

$$\frac{e^{2i\lambda}}{2} + \frac{1}{\lambda}[A(1,1)(\frac{e^{2i\lambda}-1}{2i}) + \int_0^1 A_x(1,t)(\frac{e^{i\lambda(t+1)} - e^{i\lambda(1-t)}}{2i})dt] = O(\frac{1}{\lambda})$$

çıkar. $\lambda \in \overline{\mathbb{C}}_+, \; |\lambda| \to \infty$ için

$$\Theta'(1,\lambda) = e^{-i\lambda}[\frac{1}{2} + O(\frac{1}{\lambda})] \tag{3.32}$$

asimptotik eşitliği bulunur.

(3.11)'de yer alan ifadenin x'e göre türevi alınır ve x yerine 1 yazılırsa;

$$\Psi'(1,\lambda) = -\lambda \sin\lambda + B(1,1)\cos\lambda + \int_0^1 B_x(1,t)\cos\lambda t dt$$

elde edilir. Burada (3.21) ve (3.26) eşitliklerinden yararlanarak

$$\Psi'(1,\lambda) = -\lambda(\frac{e^{i\lambda} - e^{-i\lambda}}{2i}) + B(1,1)(\frac{e^{i\lambda} + e^{-i\lambda}}{2}) + \int_0^1 B_x(1,t)(\frac{e^{i\lambda t} + e^{-i\lambda t}}{2})dt$$

eşitliği yazılır. Gerekli işlemler yapılırsa

$$\Psi'(1,\lambda)\frac{e^{i\lambda}}{\lambda} = \frac{1-e^{2i\lambda}}{2i} + \frac{1}{\lambda}\left[B(1,1)(\frac{e^{2i\lambda}+1}{2}) + \int_0^1 B_x(1,t)(\frac{e^{i\lambda(t+1)} + e^{i\lambda(1-t)}}{2})dt\right]$$

elde edilir. Buradan

$$\Psi'(1,\lambda)\frac{e^{i\lambda}}{\lambda} - \frac{1}{2i} = -\frac{e^{2i\lambda}}{2i} + \frac{1}{\lambda}\left[B(1,1)(\frac{e^{2i\lambda}+1}{2}) + \int_0^1 B_x(1,t)(\frac{e^{i\lambda(t+1)} + e^{i\lambda(1-t)}}{2})dt\right]$$

bulunur. Her $\lambda \in \overline{\mathbb{C}}_+, \; |\lambda| \to \infty$ için

$$B(1,1)(\frac{e^{2i\lambda}+1}{2}) = O(1) \tag{3.33}$$

elde edilir.

$|B_x(1,t)| \leq N_4$ olduğundan, $\lambda \in \overline{\mathbb{C}}_+, \; |\lambda| \to \infty$ için

$$\int_0^1 B_x(1,t)(\frac{e^{i\gimel(t+1)}+e^{i\gimel(1-t)}}{2i})dt = o(1) \tag{3.34}$$

bulunur.

(3.23), (3.33) ve (3.34) eşitliklerinden $\gimel \in \overline{\mathbb{C}}_+, \ |\gimel| \to \infty$ için

$$\Psi'(1,\gimel) = \gimel e^{-i\gimel}[-\frac{i}{2} + O(\frac{1}{\gimel})] \tag{3.35}$$

asimptotik eşitliği yazılır. ■

Teorem 3.4 (3.3) koşulu altında (3.12) impalsif koşullu (3.1) - (3.2) sınır değer probleminin $c_2(\gimel)$ katsayısı aşağıdaki asimptotik eşitliği sağlar.

$$c_2(\gimel) = B\left(\frac{\varrho+\zeta}{\varrho\zeta}\right) + O(\frac{1}{\gimel}), \ \gimel \in \overline{\mathbb{C}}_+, |\gimel| \to \infty.$$

İspat. (3.5), (3.6), (3.25) ve (3.32) asimptotik eşitlikleri

$$\Theta(1,\gimel) = \frac{e^{-i\gimel}}{\gimel}[\frac{i}{2} + o(1)],$$

$$\Theta'(1,\gimel) = e^{-i\gimel}[\frac{1}{2} + O(\frac{1}{\gimel})],$$

$$e^{+}(x,\gimel) = e^{i\gimel x}[1 + o(1)],$$

$$e^{+'}(x,\gimel) = e^{i\gimel x}[i\gimel + o(1)],$$

c_2'de yerlerine yazılırsa

$$c_2 = \frac{\zeta\Theta'(1,\gimel)e^{+}(1,\gimel) - \varrho\Theta(1,\gimel)e^{+'}(1,\gimel)}{\varrho\zeta}$$

$$= \frac{e^{-i\gimel}\left[\frac{1}{2} + O(\frac{1}{\gimel})\right]e^{i\gimel}\left[1+o(1)\right]}{\varrho} - \frac{\frac{e^{-i\gimel}}{\gimel}\left[\frac{i}{2}+o(1)\right]e^{i\gimel}\left[i\gimel + o(1)\right]}{\zeta}$$

bulunur. Buradan

$$c_2\left(\gimel\right) = B\left(\frac{\varrho+\zeta}{\varrho\zeta}\right) + O(\frac{1}{\gimel}),\ \gimel \in \overline{\mathbb{C}}_+,\ \ |\gimel| \to \infty$$

sonucuna ulaşılır. Burada $B \neq 0$ bir sabittir. Ayrıca $\gimel \in \overline{\mathbb{C}}_-$ ve $|\gimel| \to \infty$ olduğunda $\overline{c_2(\gimel)}$ için de benzer asimptotik eşitliği elde edebiliriz. ■

Örnek 3.1 : $0 \leq x < \infty$ için aşağıda yer alan problemi ele alalım.

$$\begin{cases} y'' + [\gimel - q(x)]^2 y = 0 \\ \qquad y(0) = 0, \end{cases} \tag{3.36}$$

$$q(x) = \begin{cases} 1 \ ; & x \in [0,1) \\ 0 \ ; & x \in (1,\infty). \end{cases} \tag{3.37}$$

(3.36)-(3.37) sınır değer probleminin

$$\begin{cases} y'' + (1-\gimel)^2 y = 0 \ ; & x \in [0,1) \\ \quad y'' + \gimel^2 y = 0 \ ; & x \in (1,\infty) \end{cases} \tag{3.38}$$

$$y(0) = 0 \tag{3.39}$$

sınır koşulu olmak üzere $\varrho, \zeta \in \mathbb{R}$ ve $\varrho\zeta \neq 0$ için

$$\begin{aligned} y(1^+) &= \varrho y(1^-) \\ y'(1^+) &= \zeta y'(1^-), \end{aligned} \tag{3.40}$$

impalsif koşulu ile oluşturulan problemin, $x \in [0,1)$ için Klein-Gordon s-dalga denklemi, $x \in (1,\infty)$ için Sturm-Liouville sınır değer problemi olacağı kolaylıkla görülebilir.

Bu problemde $e^+(x,\gimel)$, $\Theta(x,\gimel)$ ve $\Psi(x,\gimel)$ ifadeleri için

$$e^+(x,\gimel) = e^{i\gimel x},$$

$$\Theta(x,\gimel) = \frac{\sin(\gimel-1)x}{\gimel-1},$$

ve

$$\Psi(x,\gimel) = \cos(\gimel-1)x$$

eşitlikleri elde edilir. Bu sonuçları kullanarak (3.38)-(3.40) sınır değer probleminin Jost çözümünü,

$$m(\gimel) = e^{i\gimel}\left(\frac{\cos(\gimel-1)}{\varrho} - i\gimel\frac{\sin(\gimel-1)}{\zeta(\gimel-1)}\right)$$

ve

$$n(\gimel) = e^{i\gimel}\left(\frac{i\gimel\cos(\gimel-1)}{\zeta} + \frac{(\gimel-1)\sin(\gimel-1)}{\varrho}\right)$$

olmak üzere,

$$E^{+}(x,\gimel) = \begin{cases} m(\gimel)\cos(\gimel-1)x + n(\gimel)\dfrac{\sin(\gimel-1)x}{\gimel-1} & , \quad x \in [0,1), \\ e^{i\gimel x} & , \quad x \in (1,\infty), \end{cases}$$

olarak yazarız.

(3.38)-(3.40)'nin Jost çözümünün tanımından ve $m(\gimel)$, $n(\gimel)$'dan (3.38)-(3.40)'ın Jost fonksiyonu ve saçılım fonksiyonu sırasıyla

$$E^{+}(0,\gimel) = e^{i\gimel}\left(\frac{\cos(\gimel-1)}{\varrho} - i\gimel\frac{\sin(\gimel-1)}{\zeta(\gimel-1)}\right), \gimel \in \overline{\mathbb{C}}_{+},$$

ve

$$S(\gimel) = e^{-2i\gimel}\left(\frac{\dfrac{\cos(\gimel-1)}{\varrho} + i\gimel\dfrac{\sin(\gimel-1)}{\zeta(\gimel-1)}}{\dfrac{\cos(\gimel-1)}{\varrho} - i\gimel\dfrac{\sin(\gimel-1)}{\zeta(\gimel-1)}}\right), \gimel \in \mathbb{R}\backslash\{0\},$$

olarak bulunur. Şimdi Teorem 3.3'ü kullanarak (3.38)'in özdeğerler kümesini yazalım:

$$\sigma_d = \left\{\gimel \in \mathbb{C}_{+} : E^{+}(0,\gimel) = 0\right\} \cup \left\{\gimel \in \mathbb{C}_{-} : \overline{E^{+}(0,\gimel)} = 0\right\}.$$

Bu problemin özdeğerler kümesini elde etmek için $E^{+}(0,\gimel)$'nın sıfırlarını bulmak ve elde edilen özdeğerlerin eşlenik değerlerini dikkate almak gerekir.

Eğer

$$E^{+}(0,\gimel) = 0$$

ise

$$e^{i\gimel}\left(\frac{\cos(\gimel-1)}{\varrho} - i\gimel\frac{\sin(\gimel-1)}{\zeta(\gimel-1)}\right) = 0$$

eşitliği yazılır. Bu eşitlikte

$$\varkappa = \frac{\zeta(\gimel-1)}{\varrho\gimel}$$

alınırsa

$$\gimel_k = -\frac{i}{2}\ln\left|\frac{1+\varkappa}{1-\varkappa}\right| + \frac{1}{2}Arg\left|\frac{1+\varkappa}{1-\varkappa}\right| + 1 + k\pi, k \in \mathbb{Z},$$

elde edilir. Son eşitlik $\varkappa$ sayısına göre incelenirse;

Durum 1: $0 < \varkappa < 1$ için,

$$\gimel_k = -\frac{i}{2}\ln\left(\frac{1+\varkappa}{1-\varkappa}\right) + 1 + k\pi,\ k \in \mathbb{Z},$$

buluruz. $\gimel_k \in \mathbb{C}_- := \{\gimel \in \mathbb{C} : \operatorname{Im}\gimel < 0\}$ olduğundan bu durumda (3.38)-(3.40)'ın özdeğerleri yoktur ve $\gimel_k$ problemin özdeğerleri değildir. Çünkü bu değerler $\gimel \in \mathbb{C}_-$ olduğunda $\overline{E^+(0,\gimel)} = 0$'ın sıfırları değildir.

Durum 2: $1 < \varkappa < \infty$ için,

$$\gimel_k = -\frac{i}{2}\ln\left|\frac{1+\varkappa}{1-\varkappa}\right| + 1 + \left(k+\frac{1}{2}\right)\pi,\ k \in \mathbb{Z},$$

elde ederiz. Durum 1'deki gibi $\gimel_k \in \mathbb{C}_-$ 'dir ve (3.38)-(3.40)'ın özdeğerleri yoktur.

Durum 3: $\varkappa \in (-1, 0)$ için,

$$\gimel_k = \frac{i}{2}\ln\left(\frac{1-\varkappa}{1+\varkappa}\right) + 1 + k\pi, k \in \mathbb{Z},$$

elde edilir. Burada $\gimel_k \in \mathbb{C}_+$'dır ve $\gimel_k$ (3.38)-(3.40) sınır değer probleminin özdeğerleridir. Üstelik $\overline{\gimel_k} \in \mathbb{C}_-$ 'dir, $\overline{E^+(0,\gimel)} = 0$'ın sıfırlarıdır. Bu problem için σ_d'nin tanımını kullanarak $\gimel_k \in \mathbb{C}_-$, $k \in \mathbb{Z}$, (3.38)-(3.40) sınır değer probleminin özdeğerleri olur.

Durum 4: $\varkappa \in (-\infty, -1)$ için,

$$\gimel_k = \frac{i}{2}\ln\left|\frac{1-\varkappa}{1+\varkappa}\right| + 1 + \left(k+\frac{1}{2}\right)\pi,\ k \in \mathbb{Z},$$

elde ederiz ve Durum 3'tekine benzer şekilde $\gimel_k$ sayıları $k \in \mathbb{Z}$ ve $\overline{\gimel_k}$ (3.38)-(3.40)'ın özdeğerleridir.

Yapılan bu çalışma "Turkish Journal of Mathematics" dergisinde yayımlanmıştır (Taş vd. 2023).

4. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu çalışmada, diferensiyel denklemler teorisi ve uygulamalı matematiğin önemli bir diferensiyel denklemi olan Klein-Gordon denkleminin, yarım eksende, impalsif koşul ve bir sınır koşulu altında ele alınarak oluşturulan sınır değer probleminin spektral özellikleri ve saçılım fonksiyonu incelendi. Bu problemin saçılım fonksiyonu, Jost fonksiyonu ve Jost çözümü verildi. Bu temel çözümler kullanılarak saçılım fonksiyonu ve bu fonksiyonun temel özellikleri elde edildi. Bunların yanı sıra impalsif problemin Jost çözümünün katsayılarına ilişkin Jost fonksiyonu için asimptotik bir denklem verildi ve ilgili problemin özdeğerler kümesi belirlendi. Bir örnekle elde edilen sonuçlar gösterildi.

Bu çalışma, impalsif Klein-Gordon s-dalga denkleminin Jost çözümünü, Jost fonksiyonunu ve saçılım fonksiyonunu inceleyen ilk çalışmadır. Ayrıca çalışmamız impalsif Klein-Gordon s-dalga denkleminin bazı spektral özelliklerini de içermektedir.

Bu çalışmanın matematikçilere yeni bir alan açacağını ve uygulamalı matematikte birçok farklı alana temel oluşturacağını umuyoruz. Çalışmamızda elde ettiğimiz sonuçları, farklı yöntemler kullanarak, potansiyel fonksiyonun farklı özellikleri açısından genişletmek mümkündür.

KAYNAKLAR

Adıvar, M., & Bairamov, E. (2001). Spectral properties of non-selfadjoint difference operators. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 261(2), 461-478.

Allahverdiev, B.P., Bairamov, E. and Ugurlu, E. 2013. Eigenparameter dependent Sturm-Liouville problems in boundary conditions with transmission conditions. J. Math. Anal. Appl., 401(1); 388–396.

Altın, A., 2020. Uygulamalı Matematik. Gazi Kitabevi, Ankara.

Aygar, Y., & Bairamov, E. (2019). Scattering theory of impulsive Sturm–Liouville equation in quantum calculus. Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society, 42, 3247-3259.

Baev AV. Local solvability of inverse scattering problems for the Klein-Gordon equation and the Dirac system. Mathematical Notes 2014; 96 (1): 286-289. https://doi.org/10.1134/S000143461407030X

Bachmann, P. (1894). Zahlentheorie: Die analytische zahlentheorie (Vol. 2). Teubner.

Bainov DD, Simeonov PS. Systems with Impulse Effect Stability Theory and Applications, Ellis Horwood Limited, Chichester, 1989. https://doi.org/10.1002/zamm.19910711016

Bainov DD, Simeonov PS. Impulsive Differential Equations: Periodic Solutions and Applications, Longman, Harlow, 1993. https://doi.org/10.1201/9780203751206

Bainov DD, Simeonov PS, Impulsive Differential Equations: Asymptotic Properties of the Solutions, World Scientific, Singapore, 1995. https://doi.org/10.1142/2413

Bairamov, E., Çakar, Ö., & Celebi, A. O. (1997). Quadratic pencil of Schrödinger operators with spectral singularities: Discrete spectrum and principal functions. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 216(1), 303-320.

Bairamov, E., Çakar, Ö., & Krall, A. M. (1999). An eigenfunction expansion for a quadratic pencil of a Schrödinger operator with spectral singularities. Journal of Differential Equations, 151(2), 268-289.

Bairamov E. Spectral properties of the nonhomogeneous Klein-Gordon s-wave equations. Rocky Mountain Journal of Mathematics 2004; 34: 1-11. https://doi.org/10.1216/rmjm/1181069888

Bairamov E, Çakar Ö, Yanik C. Spectral singularities of the Klein–Gordon s-wave equation. Indian Journal of Pure and Applied Mathematics 2001; 32: 851-857.

Bairamov E, Çelebi AO. Spectral properties of the Klein-Gordon s-wave equation with complex potential. Indian Journal of Pure and Applied Mathematics 1997; 8: 813-824.

Bairamov E, Karaman O. Spectral singularities of Klein-Gordon s-wave equations with an integral boundary condition. Acta Mathematica Hungarica 2002; 97 (1-2): 121-131. https://doi.org/10.1023/A:1020815113773

Bairamov, E., Aygar, Y. and Eren, B. 2017a. Scattering theory of impulsive Sturm-Liouville equations. Filomat, 31(17); 5401–5409.

Bairamov, E., Erdal, I., & Yardimci, S. (2018). Spectral properties of an impulsive Sturm–Liouville operator. Journal of Inequalities and Applications, 2018, 1-16.

Bairamov, E., Aygar, Y. and Öznur, G.B. 2020. Scattering properties of eigenparameter-dependent impulsive Sturm–Liouville equations. Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society, 43(3); 2769–2781.

Bairamov, E., Cebesoy, S., Solmaz, S., 2021. Spectrum and symmetries of the impulsive difference equations. Communications Faculty of Sciences University of Ankara Series A1 Mathematics and Statistics, 70(1), 38-51.

Balcı, M., 2012. Matematik Analiz-1. Sürat üniversite yayınları, İstanbul.

Ballesteros M, Iniesta D, Naumkin I, Peña C. Wave and scattering operators for the nonlinear Klein-Gordon equation on a quarter-plane. Journal of Differential Equations 2022; 321: 66-98. https://doi.org/10.1016/j.jde.2022.03.009

Başcanbaz-Tunca G. Spectral properties of the Klein-Gordon s-wave equation with spectral parameter-dependent boundary condition. International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences 2004; 2004 (27): 1437-1445. https://doi.org/10.1155/S0161171204203088

Benchohra M, Henderson J, Ntouyas S. Impulsive Differential Equations and Inclusions, New York, Hindawi Publishing Corporation, 2006. https://doi.org/10.1155/9789775945501

Boas R.P, Entire functions, . New York: Academic Press, 1954.

Chen CY, Lu FL, Sun SD. Relativistic scattering states of coulomb potential plus a new ring-shaped potential. Communications in Theoretical Physics 2006; 45 (5): 889-893. https://doi.org/10.1088/0253-6102/45/5/025

Ciftci H, Hall RL, Saad N. Asymptotic iteration method for eigenvalue problems. Journal of Physics A-Mathematical and General 2003; 36 (47): 11807-11816. https://doi.org/10.1088/0305-4470/36/47/008

Conway,J. B. Functions of One Complex Variable, Springer,1978

Cornille, H. (1970). Existence and Uniqueness of Crossing Symmetric N/D-Type Equations Corresponding to the Klein-Gordon Equation. Journal of Mathematical Physics, 11(1), 79-98.

Degasperis A. On the inverse problem for the Klein-Gordon s-wave equation. Journal of Mathematical Physics 1970; 11 (2): 551-567, 1970. https://doi.org/10.1063/1.1665170

Dominguez-Adame F. Bound states of the Klein-Gordon equation with vector and scalar Hulthén-type potentials. Physics Letters A 1989; 136 (4-5): 175-177. https://doi.org/10.1016/0375-9601(89)90555-0

Gasymov, M.G. and Maksudov, F.G. 1972. The principal part of the resolvent of non-selfadjoint operators in neighbourhood of spectral singularities, Funet. Anal. Appl. 6, 185-192.

Greiner W. Relativistic Quantum Mechanics, Vol. 2, Springer, Berlin, 2000. https://doi.org/10.1007/978-3-662-04275-5

Guseinov, G.S. 2009. On the concept of spectral singularities, Pramana J. Phys. 73, 587.

Hou CF, Sun XD, Zhou ZX, Li Y. General formulas for radial matrix elements of isotropic harmonic oscillators. Acta Physica Sinica 1999; 48 (3): 385-388. https://doi.org/10.7498/aps.48.385

Ikhdair SM, Sever R. Exact solution of the Klein-Gordon equation for the PT-symmetric generalized Woods-Saxon potential by the Nikiforov-Uvarov method. Annalen der Physik 2007; 519 (3): 218-232. https://doi.org/10.1002/andp.20075190303

Jaulent M, Jean C. The inverses-wave scattering problem for a class of potentials depending on energy. Communications in Mathematical Physics 1972; 28 (3): 177-220. https://doi.org/10.1007/BF01645775

Keldysh, M.V. 1951. On certain cases of degeneration of equations of elliptic type on the boundary of a domain. Dokl. Akad. Nauk SSSR, 77(2); 181–183.

Krall, A. M., Bairamov, E., & Çakar, Ö. (1999). Spectrum and spectral singularities of a quadratic pencil of a Schrödinger operator with a general boundary condition. Journal of Differential Equations, 151(2), 252-267.

Kreyszig, E., 1978. Introductory Functional Analysis with Applications. Wiley, New York.

Lakshmikantham V, Bainov DD, Simenov PS. Theory of Impulsive Differential Equations, Series in Modern Applied Mathematics 6, Singapore, World Scientific, 1989. https://doi.org/10.1142/0906

Levitan BM. Inverse Sturm-Liouville Problems, VSP, Zeist, 1987. https://doi.org/10.1515/9783110941937

Levitan, B. M., Sargsjan, I. S., 1991. Sturm-Liouville and Dirac Operators. London, Dordrecht, Kluwer Academic.

Łojasiewicz, S., & Ferreira, A. V. (1988). An introduction to the theory of real functions. (No Title).

Lusternik, L.A. and Sobolev, V.J. 1974. Elements of Functional Analysis. Halsted Press, New York.

Lyance, V.E. 1967. On a diferential operator with spectral singularities, I,II, AMS Transl. 60, 185-225,227-283.

Ma ZS, Dong SH, Gu XY, Yu J, Lozada C. The Klein-Gordon equation with a coulomb plus scalar potential in D dimensions. International Journal of Modern Physics E 2004; 13 (3): 597-610. https://doi.org/10.1142/S0218301304002338

Marchenko, V.A. 1986. Sturm-Liouville Operators and Applications, Birkhöuser, Basel, Switzland.

Mil'man, V.D. and Myshkis, A.D. 1960. On the stability of motion in the presence of impulses. Sib. Math. J., 1; 233–237.

Mukhtarov, O. S., Kadakal, M., & Muhtarov, F. Ş. (2004). Eigenvalues and normalized eigenfunctionsof discontinuous Sturm-Liouville problem with transmission conditions. Reports on mathematical Physics, 54(1), 41-56.

Naimark, M. A. 1960. Investigation of the Spectrum and the Expansion in Eigenfunctions of a Non-selfadjoint Operator of Second Order on a Semi-axis. AMS Translations.

Naimark, M. A. (1968). Linear differential operators. Part II: Linear differential operators in Hilbert space. Frederick Ungar Publishing Company.

Naimark MA. Linear Differential Operators. Part II: Linear Differential Operators in Hilbert Space, World Scientific Publishing Co., Inc., River Edge, 1995.

Nakanishi K. Nonrelativistic limit of scattering theory for nonlinear Klein-Gordon equations. Journal of Differential Equations 2002; 180 (2): 453-470.

Pavlov, B. S. (1967). The nonself-adjoint Schrödinger operator. In Spectral theory and wave processes (pp. 87-114). Boston, MA: Springer US.

Samoilenko AM, Perestyuk NA. Impulsive Differential Equations, Singapore, World Scientific, 1995. https://doi.org/10.1142/2892

Sarason, D. (2007). Complex function theory (No. 49). American Mathematical Soc.

Schrödinger, E. (1926). An undulatory theory of the mechanics of atoms and molecules. Physical review, 28(6), 1049.

Schwartz, J.T. 1960. Some non-selfadjoint operators. Comm. Pure Appl. Math., 13; 609–639.

Solmaz, S. and Bairamov, E., 2022. Scattering properties of impulsive difference Dirac equations. Turkish Journal of Mathematics, 46(2), 397-405.

Taş, H., KÜÇÜKEVCİLİOĞLU, Y. A., & BAYRAM, E. (2023). Scattering solutions and scattering function of a Klein-Gordon s-wave equation with jump conditions. Turkish Journal of Mathematics, 47(2), 721-731.

Titchmarsh, E.C. 1939. The Theory of Functions. Clarendon Press, Oxford.

Ugurlu, E. and Bairamov, E., 2013. Dissipative operators with impulsive conditions. J. Math. Chem., 51(6), 1670-1680.

Wang RC, Wong CY. Finite-size effect in the schwinger particle-production mechanism. Physical Review D 1988; 38 (1): 348-359. https://doi.org/10.1103/PhysRevD.38.348

Weiss R, Scharf G. The inverse problem of potential scattering according to the Klein-Gordon Equation. Helvetica Physica Acta 1971; 44: 910-929. http://doi.org/10.5169/seals-114318

Wibowo RBE. Scattering problem for a system of nonlinear Klein–Gordon equations related to Dirac–Klein–Gordon equations. Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications 2009; 71 (3-4): 881-890. https://doi.org/10.1016/j.na.2008.10.127

Yildirim, E. 2018. Bound states and spectral singularities of an impulsive Schrödinger equation, Turkish Journal of Mathematics, 42. 1670-1679.10.3906/mat-1705-123.