

ANKARA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DOKTORA TEZİ

GENELLEŞTİRİLMİŞ CHOQUET İNTEGRAL TABANLI BULANIK
BİLGİ ÖLÇÜLERİ VE BAZI UYGULAMALARI

Mahmut Can BOZYİĞİT

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ANKARA
2024

Her hakkı saklıdır

ÖZET

Doktora Tezi

GENELLEŞTİRİLMİŞ CHOQUET İNTEGRAL TABANLI BULANIK BİLGİ ÖLÇÜLERİ VE BAZI UYGULAMALARI

Mahmut Can BOZYİĞİT

Ankara Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Mehmet ÜNVER

Bu tez yedi bölümden oluşmaktadır.

İlk bölüm genel bir literatür taramasını içeren giriş kısmına ayrılmıştır.

İkinci bölümde bulanık küme teorisi ve bulanık ölçü teorisine ilişkin temel kavramlara yer verilmiştir.

Üçüncü bölümde mevcut entropi ve çapraz-entropi ölçüleri hatırlatılarak sonrasında sezgisel bulanık kümelere ilişkin ait olma ve ait olmama derecelerinin etkisini analiz etmeye yarayan orijinal bir parametrik sezgisel bulanık çapraz-entropi tanımlanmıştır.

Dördüncü bölümde çok kriterli karar verme problemlerinin çözümünde etkin rol oynayan ağırlıklı sezgisel çapraz-entropi ölçüleri tanımlanmış ve özellikleri incelenmiştir.

Beşinci bölümde, kriterler arası etkileşimin söz konusu olduğu karar verme problemlerinde etkileşimi modellemede oldukça başarılı olan bulanık ölçüler yardımıyla orijinal Choquet integrali ve d -Choquet integrali tabanlı sezgisel bulanık çapraz-entropi ölçüleri tanımlanmıştır.

Altıncı bölümde, tanımlanan çapraz-entropi ölçüleri yardımıyla bir sezgisel bulanık TOPSIS (Technique for Order of Preference by Similarity to Ideal Solution) geliştirilerek tanımlanan çapraz-entropi ölçülerinin etkinliğini incelemek için bu yöntem bir karar verme problemine uygulanmıştır.

Son kısımda ise tezin katkıları ve sonuçlarına ilişkin bir değerlendirme yapılmıştır.

Temmuz 2024, 63 sayfa

Anahtar Kelimeler: Shannon entropi, çapraz-entropi ölçüsü, Choquet integrali, Çok kriterli karar verme, TOPSIS.

ABSTRACT

PhD Thesis

FUZZY INFORMATION MEASURES BASED ON GENERALIZED CHOQUET INTEGRAL AND SOME APPLICATIONS

Mahmut Can BOZYİĞİT

Ankara University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Prof.Dr. Mehmet ÜNVER

This thesis consists of seven sections.

The first section is devoted to a general literature review as an introduction.

In the second section, the basic concepts of fuzzy set theory and fuzzy measure theory are covered.

In the third section, existing entropy and cross-entropy measures are revisited, followed by the proposal of an original parametric intuitionistic fuzzy cross-entropy measure to analyze the effect of membership and non-membership degrees related to intuitionistic fuzzy sets.

In the fourth section, weighted intuitionistic cross-entropy measures, which play an effective role in solving multi-criteria decision-making problems involving criterion weights, are introduced and their properties are examined.

In the fifth section, intuitionistic fuzzy cross-entropy measures based on the original Choquet integral and d -Choquet integral are defined using fuzzy measures, which are highly successful in modeling interactions between criteria in decision-making problems where such interactions are present.

In the sixth section, a generalized intuitionistic fuzzy TOPSIS (Technique for Order of Preference by Similarity to Ideal Solution) is developed using the defined cross-entropy measures, and this method is applied to a decision-making problem to examine the effectiveness of these measures.

In the final section, an evaluation of the contributions and results of the thesis is presented.

July 2024, 63 pages

Key Words: Shannon entropy, cross-entropy measure, Choquet integral, Multi-criteria decision making, TOPSIS.

TEŞEKKÜR

Bu tezin hazırlanma sürecinde bana rehberlik eden ve değerli bilgileriyle yol gösteren saygıdeğer danışman hocam Sayın Prof. Dr. Mehmet ÜNVER (Ankara Üniversitesi, Matematik Anabilim Dalı)'e içten saygı ve teşekkürlerimi sunarım. Seminerlerde ve tez döneminde kendisinden edindiğim tecrübe tüm kariyerime ışık tutacaktır.

Doktora eğitimim sürecinde değerli bilgilerini ve desteğini esirgemeyen kıymetli hocalarım Sayın Prof. Dr. Murat OLGUN (Ankara Üniversitesi, Matematik Anabilim Dalı)'a ve Sayın Prof. Dr. Şeyhmus YARDIMCI (Ankara Üniversitesi, Matematik Anabilim Dalı)'ya saygı ve teşekkürlerimi sunarım. Ayrıca tez izleme komitesinde yer alarak bana kıymetli zamanını ayıran ve değerli görüşleriyle çalışmalarımı destekleyen saygıdeğer hocam Sayın Prof. Dr. İshak ALTUN (Kırıkkale Üniversitesi, Matematik Anabilim Dalı)'a saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

Çalışmalarım boyunca değerli bilgilerini esirgemeyen ve sorularıma içtenlikle cevap veren Sayın Prof. Dr. Radko MESIAR (Faculty of Civil Engineering, Department of Mathematics, Slovak University of Technology)'a ve Sayın Doç. Dr. Harish GARG (School of Mathematics, Thapar Institute of Engineering and Technology)'a saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

Bu doktora tezinin hazırlanmasında bana her zaman destek olan ve yanımda duran sevgili eşime, kıymetli anneme ve canım aileme en derin teşekkürlerimi sunarım. Onların varlığı ve sürekli desteği, bu çalışmanın tamamlanmasında en büyük motivasyon kaynağım olmuştur.

Doktora çalışmalarımı “2211-E Yurt İçi Doğrudan Doktora Burs Programı” ile destekleyen Türkiye Bilimsel ve Teknolojik Araştırma Kurumu (TÜBİTAK)'na en içten teşekkürlerimi sunarım.

Mahmut Can BOZYİĞİT
Ankara, Temmuz 2024

İÇİNDEKİLER

TEZ ONAY SAYFASI	
ETİK	i
ÖZET	ii
ABSTRACT	iii
TEŞEKKÜR	iv
SİMGELER DİZİNİ	vi
ŞEKİLLER DİZİNİ	vii
ÇİZELGELER DİZİNİ	viii
1. GİRİŞ	1
1.1 Bulanık Küme Teorisi	1
1.2 Bulanık Bilgi Teorisi	2
1.3 Bulanık Ölçü ve Bulanık İntegral Teorisi	4
1.4 Çok Kriterli Karar Verme ve TOPSIS	5
1.5 Motivasyon ve Katkılar	6
2. TEMEL KAVRAMLAR	7
2.1 Bulanık Kümeler	7
2.2 Bulanık Kümeler İçin Küme İşlemleri	8
2.3 Sezgisel Bulanık Kümeler	9
2.4 Sezgisel Bulanık Kümeler İçin Küme İşlemleri	9
2.5 Bulanık Ölçü Teorisi ve Kümeleme Operatörleri	10
3. SEZGİSEL BULANIK ÇAPRAZ-ENTROPİ ÖLÇÜLERİ	18
4. AĞIRLIKLIL SEZGİSEL BULANIK ÇAPRAZ-ENTROPİ ÖLÇÜLERİ	26
5. CHOQUET SEZGİSEL BULANIK ÇAPRAZ-ENTROPİ ÖLÇÜLERİ	31
6. ÇAPRAZ-ENTROPİ ÖLÇÜSÜ TABANLI GENELLEŞTİRİLMİŞ BİR SEZGİSEL BULANIK TOPSIS	38
6.1 Genelleştirilmiş Bir Sezgisel Bulanık TOPSIS	38
6.2 Bir Çok Kriterli Karar Verme Problemine Uygulama	41
6.3 Önerilen Yöntemin Duyarlılık Analizi	45
6.4 Önerilen Yöntemin Karşılaştırma Analizi	49
7. TARTIŞMA VE SONUÇ	55
KAYNAKLAR	56
ÖZGEÇMİŞ	62

SİMGELER DİZİNİ

Ψ	Karakteristik fonksiyon
τ	Ait olma fonksiyonu
ν	Ait olmama fonksiyonu
Y	Skor fonksiyonu
ρ	Bulanık ölçü
M_α^w	Ağırlıklı kuvvet ortalaması
C_ρ	Choquet integrali
$C_{\rho,s}$	d -Choquet integrali
$CE_{S,J}$	Bulanık çapraz-entropi ölçüsü
CE_Y	Düzenlenmiş sezgisel bulanık çapraz-entropi ölçüsü
$CE_Y^{p,q}$	Parametrik düzenlenmiş sezgisel bulanık çapraz-entropi ölçüsü
ϱ	Ağırlık vektörü
SC	Skor matrisi
\mathcal{H}	Kısmi bilgi

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 3.1	$CE_{S,J}^*(D, E)$ 'nin grafiği	20
Şekil 3.2	$CE_Y^*(D, D^c)$ 'nin grafiği	21
Şekil 3.3	$p = 1$ ve $q = 0.25$ için $CE_Y^{p,q*}(D, D^c)$ 'nin grafiği	25

ÇİZELGELER DİZİNİ

Çizelge 6.1	Sezgisel bulanık karar matrisi ve normalize sezgisel karar matrisi	41
Çizelge 6.2	Skor matrisi SC	42
Çizelge 6.3	Pozitif ve negatif ideal çözümler.	42
Çizelge 6.4	λ -bulanık ölçüsü.....	43
Çizelge 6.5	f_{D^+,D_k} ve f_{D_k,D^+} değerleri.	43
Çizelge 6.6	f_{D^-,D_k} ve f_{D_k,D^-} değerleri.	44
Çizelge 6.7	D_k ve D^+ arasındaki $CE_Y^{(C,\rho)}$ değerleri	45
Çizelge 6.8	D_k ve D^- arasındaki $CE_Y^{(C,\rho)}$ değerleri.	45
Çizelge 6.9	D_k ile D^+ ve D^- arasındaki $CE_Y^{(C,\rho)*}$ değerleri	45
Çizelge 6.10	$q \in \{0.10,0.20\}$ için alternatiflerin sıralaması.....	46
Çizelge 6.11	$q \in \{0.30,0.40\}$ için alternatiflerin sıralaması	46
Çizelge 6.12	$q \in \{0.50,0.60\}$ için alternatiflerin sıralaması	47
Çizelge 6.13	$q \in \{0.70,0.80\}$ için alternatiflerin sıralaması	47
Çizelge 6.14	$q \in \{0.90,1.00\}$ için alternatiflerin sıralaması	48
Çizelge 6.15	Diğer yöntemler ve önerilen yöntemin karşılaştırılması.....	53

1. GİRİŞ

Belirsizlik içeren verilerin analizi ve modellenmesi için genellikle olasılık teorisinin kavramlarına başvurulmuştur. Yeni önerilen teoriler sayesinde belirsizlik, çok boyutlu bir kavram olarak ele alınmaya başlanmış ve olasılığın belirsizlik kavramının sadece bir alt dalını oluşturduğu görülmüştür. Kümelere ilişkin olarak gerçek hayattaki belirsizliği incelemek için bulanık küme teorisi, Zadeh (1965) tarafından matematiksel bir kuram olarak bulanık mantık temelinde oluşturulmuş bir küme analizi teorisidir.

1.1 Bulanık Küme Teorisi

Bulanık kümelerde, kesin sınıflandırmalar yerine belirsizlik içeren verilerin analizi için elemanların her bir kümeye olan aitlik derecesinden bahsedilir. Bulanık kümeler, her bir elemanın birden fazla kümeye belirli bir aitlik derecesi ile ait olabileceğini kabul eder. Aitlik derecesi 0 ile 1 arasında bir değer alırken 0 kesinlikle ait olmayı, 1 ise kesin olarak ait olmayı ifade eder. 0 ile 1 arasındaki değerler ise elemanın kümeye ait olma derecesini belirtir. Bulanık küme teorisi, verilerin belirsizlik içerdiği veya net bir sınıflandırmanın yapılamadığı durumlarda kullanılır. Örneğin; bir kişinin yaşının genç, orta yaşlı veya yaşlı gibi kesin kategorilere ayrılamadığı durumlarda bulanık küme teorisi kullanılabilir. Verilerin bulanık olması, daha gerçekçi modellemelerin yapılabilmesini sağlar. Bulanık küme teorisi; akıllı sistemler, kontrol sistemleri, yapay zeka, görüntü işleme, veri madenciliği, karar verme sistemleri, ekonomi, istatistik, kimya, tıp gibi alanlarda sıklıkla kullanılır (Otto, 1990; Steimann, 1997; Ragin, 2000; Zopounidis vd. 2001; Szmidt ve Kacprzyk, 2001; Dubois ve Prade, 2003; Coppi vd., 2006; Feng vd., 2020; Olgun vd., 2021). Zadeh'in önerdiği bulanık küme kavramı bazı gerçek hayat problemlerini modellerken tek başına yeterli olmayabilir. Bu nedenle, bulanık kümelerin genelleştirilmiş versiyonları olan sezgisel bulanık kümeler (Atanassov, 1986, 1999), Pisagor bulanık kümeler (Yager, 2013a, 2013b), q .mertebeden ortoikili bulanık kümeler (Yager, 2016), resim bulanık kümeler (Cuong, 2013), küresel bulanık kümeler (Ashraf vd., 2019; Kutlu Gündoğdu ve Kah-

raman, 2019), sürekli fonksiyon değerli bulanık kümeler (Ünver ve Olgun, 2023) ve dairesel Pisagor bulanık kümeler (Bozyiğit vd. 2023) gibi farklı tipte bulanık kümeler tanımlanmıştır.

1.2 Bulanık Bilgi Teorisi

Entropi, ilk olarak termodinamik sistemlerdeki düzensizliğin ölçüsü olarak Clausius (1865) tarafından tanımlanmıştır. Termodinamik entropi, bir sistemin içindeki enerjinin düzensizlik veya rastgelelik derecesini ifade eder. Genel olarak, bir sistemdeki entropi arttıkça, sistemin düzensizliği veya dağınıklığı artar. Boltzmann (1866), entropiyi istatistiksel mekanikle ilişkilendirmiş ve entropiyi olasılık dağılımı ve mikroskopik durumların sayısı ile hesaplamıştır. Boltzmann tipli entropi istatistiksel olarak k_b Boltzmann sabiti ve M mikroskopik durumların sayısını temsil etmek üzere

$$S = k_b \ln M$$

şeklinde ifade edilir. Entropi, bir sistemdeki düzenin veya belirsizliğin bir ölçüsü olarak da çeşitli alanlarda kullanılmıştır. Bilgi teorisinde entropi, bir bilgi kaynağındaki bilginin düzenlilik veya belirsizlik düzeyini ifade eder. Nyquist (1924) ve Hartley (1928) tarafından yapılan çalışmaların sonucu olarak “Bilgi nasıl ölçülebilir?” sorusu ortaya çıkmıştır. Hartley (1928) bilgiyi ölçmek için m sembol sayısı ve z her seçimde kullanılacak farklı sembol sayısı olmak üzere

$$B = \log_z m$$

formülünü vermiştir. Bu formülü daha iyi anlamak için şu örnek verilebilir: “1 ile 32 arasında bir sayı seçen bir kişinin hangi sayıyı seçtiğini tahmin etmek için ortalama kaç evet veya hayır sorusu sormak gerekir?”. Sorular “5 mi?” ya da “24 mü?” diye sormak yerine “16’dan küçük mü?” şeklinde sorulduğunda, olasılığın yarıya indiği görülür. Aynı şekilde sorular yöneltildiğinde maksimum soru sayısının

$$B = \log_2 32 = 5$$

olduğu görülür. Soru sayısı bit olarak adlandırıldığından, bu örnekteki verinin 5 bit ile ifade edilebileceği söylenebilir. Shannon, 1948 yılında yayımlanan “İletişimin Matematiksel Teorisi” başlıklı çalışmasında, bir iletinin içerdiği bilgi miktarını ölçmek

amacıyla bilgi entropisi kavramını geliştirmiştir. Bilgi entropisi, bir veri kaynağındaki belirsizlik miktarını temsil eden bit sayısıdır. Guiaşu (1971, 1986), nesnel olasılıklar ve bazı niteliksel ağırlıklara sahip olasılıklı bir deney tarafından sağlanan bilgiyi ölçmek için Shannon entropi ölçüsünün genelleştirilmiş bir versiyonu olan ağırlıklı entropi kavramını tanımlamış ve bunu verileri gruplamak için kullanmıştır. Ağırlıklar alan bilgisine, uzman görüşlerine veya eldeki problemle ilgili belirli kriterlere dayalı olarak bazı sayısal metotlarla belirlenebilir. Ağırlıklar, her bir olay veya sonuca atanan göreceli önemi veya önceliği yansıtır. Çapraz-entropi iki olasılık dağılımı arasındaki farklılığı ölçen bir bilgi teorisi kavramıdır. Shannon entropi ölçüsünü kullanarak iki olasılık dağılımının farkını ölçmek için çapraz-entropi ölçüsü kavramı Kullback ve Leibler (1951) ve Kullback (1959) tarafından tanımlanmıştır. Daha sonra bu tanım Lin (1991) tarafından geliştirilmiştir.

Bulanık entropi, bir bulanık kümenin içerdiği belirsizliği veya karmaşıklığı ölçmek için kullanılan bir bulanık bilgi teorisi ölçüsüdür. Bulanık entropi, bulanık kümelerin aitlik fonksiyonlarından kaynaklanan belirsizlik düzeyini ölçmek için Zadeh (1968) tarafından tanımlanmıştır. De Luca ve Termini (1972), bir bulanık entropi ölçüsünün sağlaması gereken aksiyomları belirlemiştir. İki bulanık küme arasındaki farkı ölçmek için bulanık çapraz-entropi ölçüsü ve simetrik fark bilgi ölçüsü kavramları Shang ve Jiang (1997) tarafından tanımlanmıştır. Daha sonra Vlachos ve Sergiadis (2007), iki sezgisel bulanık küme arasındaki farkı ölçmek için çapraz-entropi kavramını bulanık kümelerden sezgisel bulanık kümelere genelleştirmiştir. Ancak tanımlanan sezgisel bulanık çapraz-entropi ölçüsü negatif olmama özelliğini sağlamadığından Wei ve Ye (2010), düzenlenmiş sezgisel bulanık çapraz-entropi ölçüsü ve sezgisel bulanık simetrik fark bilgi ölçüsünü tanımlamıştır. Farklı tip bulanık kümeler için bulanık çapraz-entropi ölçüleri tanımlanmış ve bu ölçüler çok kriterli karar verme, örüntü tanıma, tıbbi teşhis, yüz tanıma sistemleri, sınıflandırma, veri işleme gibi birçok alanda etkin bir araç olarak kullanılmıştır (Shang ve Jiang, 1997; Vlachos ve Sergiadis, 2007; Zhang ve Jiang, 2008; Ye, 2009, 2010, 2014; Wei ve Ye, 2010; Zhang ve Yu, 2012; Xia ve Xu, 2012; Verma ve Sharma, 2013; Mao vd., 2013; Song vd., 2016, 2019; Parkash ve Kumar, 2021; Verma, 2021; Türkaslan vd. 2023; Bozyiğit vd., 2024).

1.3 Bulanık Ölçü ve Bulanık İntegral Teorisi

Matematiksel analizdeki ölçü kavramında toplamsallık aksiyomu kaldırılıp yerine monotonluk aksiyomu getirilerek bulanık ölçü kavramı ilk kez Sugeno (1974) tarafından önerilmiştir. Böylece, bir kümenin elemanlarını kriterler olarak düşünürsek kriterler arasındaki etkileşimin modellenenilmesi sağlanmıştır. Örnek olarak bir firmanın Ali, Burak ve Ceyda adındaki üç çalışanın günde toplam 1 birimlik iş yaptığı varsayalım. Toplamları 1 birim iş olacak şekilde Ali 0.3 birim, Burak 0.5 birim ve Ceyda 0.2 birimlik iş yapsın. Burada Ali ve Burak birlikte 0.8 birim, Ali ve Ceyda birlikte 0.5 ve Burak ve Ceyda birlikte 0.7 birimlik iş yapar sonucunu çıkarabiliriz. Ancak her zaman böyle olmayabilir. Yani gerçek hayatta verimlilik her zaman toplamsal olmak zorunda değildir. Ali ve Burak birlikte uyumsuz çalışabileceklerinden yapılan iş ayrı ayrı yaptıkları toplam işten az olabilir ya da Burak ve Ceyda uyumlu çalışarak 0.7 birimlik işten daha fazlasını yapabilir. Bu örnek klasik ölçülerin böyle durumları modellemede yetersiz olduğunu basitçe göstermektedir. Çalışanlar arasındaki bu etkileşimi dikkate alan yapı bulanık ölçü ile oluşturulabilir ve böylece klasik ölçüye göre daha doğru bir modelleme yapılmış olur. Bulanık ölçü ve bulanık integral kavramlarının Sugeno (1974) tarafından önerilmesi ile kapasite teorisinde tanımlanan ve aynı zamanda bir bulanık integral olan Choquet integrali (Choquet, 1953) çok kriterli karar verme, yüz tanıma, sınıflandırma, sinyal işleme, ekonomi, psikoloji gibi alanlarda kullanılmıştır (Grabisch, 1995, 2000; Heilpern, 2002; Bhowal vd., 2021; Ünver vd., 2018, 2020; Olgun vd., 2021). Choquet integralinde bulanık ölçü toplamsal olursa ağırlıklı aritmetik ortalama elde edilir. Choquet integralinin ağırlıklı aritmetik ortalamaya kıyasla avantajlarından biri, bulanık ölçü yardımıyla kriterlerin, nesnelere ve kişilerin birbirleriyle nasıl etkileşime girdiğini hesaba katmasıdır. Son yıllarda Choquet integralinin bazı genelleştirmeleri de tanımlanmıştır. Choquet integralinin t-norm (triangular norm), kopula, sıralı yönlü monoton fonksiyon gibi özel operatörler yardımıyla genelleştirmeleri verilip akıllı bulanık sınıflandırma sistemleri, yüz tanıma sistemleri, örüntü tanıma ve karar verme problemleri üzerine uygulamaları verilmiştir (Lucca vd. 2017, 2017, 2018; Dimuro vd. 2018; Wieczynski vd. 2020). Bustince vd. (2021), Choquet integralinde fark işlemi yerine sınırlı fark

fonksiyonu alarak d -Choquet integralini tanımlamıştır. d -Choquet integrali ile sınıflandırma, çok kriterli karar verme, sinyal işleme, örüntü tanıma gibi akıllı sistem alanlarında çeşitli algoritmalar geliştirilmiştir (Wieczynski vd. 2021, 2022; Karczmarek vd. 2022, 2022; Fumanal-Idocin vd, 2023).

1.4 Çok Kriterli Karar Verme ve TOPSIS

Çok kriterli karar verme, karar verme aşamasında birden fazla kriteri dikkate alan bir süreçtir. Bu yöntem, karar vericilerin bir dizi kriter veya hedef arasında denge kurmasını veya en iyi seçeneği seçmesini sağlar. Tek kriterli karar vermeden farklı olarak, karar vericilerin genellikle çeşitli ve bazen birbiriyle çelişen amaçları veya kriterleri göz önünde bulundurması gerekir. Çok kriterli karar verme için birçok yöntem geliştirilmiştir. Hwang ve Yoon (1981) tarafından geliştirilen TOPSIS (Technique for Order of Preference by Similarity to Ideal Solution), sık kullanılan çok kriterli karar verme yöntemlerinden biridir. Yöntemin temeli alternatiflerin belirli kriterler doğrultusunda sıralanması üzerine dayanır. TOPSIS, alternatiflerin pozitif ve negatif ideal çözümlere olan uzaklıklarını kullanarak alternatifler için bir sıralama önerir. TOPSIS'in temel amacı, en iyi çözümün pozitif ideal çözüme daha yakın ve negatif ideal çözümden daha uzak olmasıdır. Chen ve Hwang (1992), bulanık kümeler yardımıyla ilk kez bulanık bir TOPSIS tanımlamıştır. Triantaphyllou ve Lin (1996), her bir alternatif için göreceli yakınlığın bulanık aritmetik işlemlere dayalı olarak değerlendirildiği bir bulanık TOPSIS geliştirmişlerdir. Chen (2000), üçgensel bulanık değerleri dikkate alarak ve iki bulanık değer arasındaki Öklid uzaklığını tanımlayarak TOPSIS'i bulanık grup karar verme durumlarına genişletmiştir. Chen ve Tsao (2007), sezgisel bulanık kümeler için bir uzaklık ölçüsü tanımlayarak ilk kez bir sezgisel bulanık TOPSIS önermiştir. Tedarik seçimine ilişkin bir grup karar verme problemini incelemek için Boran vd. (2009) kümeleme operatörü ve Öklid uzaklık ölçüsü tabanlı bir sezgisel bulanık TOPSIS vermiştir. Ye (2010), sanal iş ortağı seçimine ilişkin bir karar verme problemini çözmek için aralık değerli sezgisel bulanık ortamda genişletilmiş bir TOPSIS vermiştir. Zhang ve Yu (2012), aralık değerli sezgisel bulanık çapraz-entropi ölçüsü kullanarak yeni bir genişletilmiş TOPSIS ortaya koymuştur.

1.5 Motivasyon ve Katkılar

Farklı tip bulanık kümelerle modellenen ve çok kriterli karar verme, örüntü tanıma, tıbbi teşhis, sınıflandırma, yüz tanıma gibi akıllı sistem içeren problemlerde uygulaması olan çok sayıda çapraz-entropi ölçüsü mevcuttur. Ancak bu ölçülerde genellikle kriterlerin ağırlığı ve kriterler arasındaki etkileşim dikkate alınmamaktadır. Örneğin; araba satın almak isteyen bir kişinin fiyat, konfor, hız, yakıt tipi gibi kriterlere vereceği önem, yani ağırlıklar farklılık göstermektedir. Bundan dolayı, karar verme uygulamalarında kriterlerin ağırlıkları dikkate alınarak ağırlıklı çapraz-entropi ölçülerinin tanımlanması yararlı olacaktır. Ayrıca kriterler arası etkileşim söz konusu olduğunda etkileşimi doğru bir şekilde modelleyen bulanık ölçülere başvurulabilir. Bulanık ölçü ile tanımlanan Choquet integrali ve d -Choquet integrali kullanılarak inşa edilen çapraz-entropi ölçüleri gerçek hayat problemlerinde daha doğru modelleme sağlayacağından uygulamalarda daha hassas sonuçlar verecektir. Ayrıca sezgisel bulanık kümelerde ait olma ve ait olmama derecelerinin sonuçlar üzerindeki analizini yapmak için parametrik çapraz-entropi ölçüleri inşa edilip bu parametreler kullanılarak duyarlılık analizi yapılması önemlidir.

Bu çalışmanın katkıları ve sunduğu yenilikler aşağıda özetlenmiştir:

- Sezgisel bulanık kümelerde ait olma ve ait olmama derecelerinin uygulamalarda etkisini incelemek için parametrik bir sezgisel bulanık çapraz-entropi ölçüsü tanımlanacaktır.
- Kriter ağırlıklarını içeren karar verme problemlerini çözmek için ağırlıklı sezgisel bulanık çapraz-entropi ölçüleri tanımlanacaktır.
- Gerçek hayat problemlerinde kriterlerin arasında etkileşim söz konusu olabileceğinden bu etkileşimi modellemede başarılı olan bulanık ölçü yardımıyla tanımlanan Choquet ve d -Choquet integralleri kullanılarak yeni sezgisel bulanık çapraz-entropi ölçüleri geliştirilecektir.
- Geliştirilen çapraz-entropi ölçüleri yardımıyla geliştirilmiş bir sezgisel bulanık TOPSIS verilerek literatürden yatırıma ilişkin bir çok kriterli karar verme problemine bu yöntem uygulanacaktır.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde çalışmada kullanacağımız bazı temel tanım ve kavramlar verilecektir.

2.1 Bulanık Kümeler

Tanım 2.1 Δ bir evrensel küme ve $D \subset \Delta$ olsun.

$$\Psi_D(\delta) = \begin{cases} 1 & , \delta \in D \\ 0 & , \delta \notin D \end{cases}$$

ile tanımlı $\Psi_D : \Delta \rightarrow \{0, 1\}$ fonksiyonuna D kümesinin karakteristik fonksiyonu denir.

Karakteristik fonksiyon, bir elemanın bir kümeye ait olup olmadığını belirleyen bir fonksiyondur. Fakat, bazı gerçek hayat uygulamalarında karakteristik fonksiyonun yetersiz kalabileceği durumlar vardır. Bu durumu daha iyi anlamak için aşağıdaki örneği inceleyebiliriz.

Örnek 2.1 100 km/s üzeri hız hızlı 100 km/s altı hız yavaş diye ifade edilirse $D = \{\delta : \delta \geq 100\}$ kümesinin karakteristik fonksiyonu

$$\Psi_D(x\delta) = \begin{cases} 1 & , \delta \geq 100 \\ 0 & , \delta < 100 \end{cases}$$

ile hızlı ve yavaş kavramları modellenenmektedir. Burada 120 km/s ve 200 km/s hızları, Ψ_D fonksiyonu ile aynı değerleri aldığından her ikisi de hızlı olarak değerlendirilirler. Ancak bu, hıza ilişkin olarak detaylı olmayan bir modelleme verir. Bu tür eksiklikleri gidermek için bulanık küme kavramı önerilmiştir.

Tanım 2.2 Δ bir evrensel küme olmak üzere, Δ kümesinden $[0, 1]$ aralığına tanımlı her fonksiyona bir bulanık küme denir. Yani Δ üzerinde bir D bulanık kümesi $\tau_D : \Delta \rightarrow [0, 1]$ fonksiyonu ile temsil edilir. D bulanık kümesi

$$D = \{ \langle \delta, \tau_D(\delta) \rangle : \delta \in \Delta \}$$

şeklinde ifade edilir. Burada τ_D fonksiyonuna D bulanık kümesinin ait olma fonksiyonu ve her $\delta \in X$ için $\tau_D(\delta)$ değerine de δ elemanının D kümesine olan ait olma derecesi denir (Zadeh, 1965).

Klasik küme teorisinde, bir küme ve onun karakteristik fonksiyonu birebir eşleşir. Tanım 2.2'de $\tau_D = \Psi_D$ olarak alınır, her klasik kümenin de bir bulanık küme olduğu görülür. Dolayısıyla, bulanık kümeler, klasik kümelerin genelleştirilmiş halidir.

Tanım 2.3 $\tau_\theta \in [0, 1]$ olmak üzere $\theta = \langle \tau_\theta \rangle$ ifadesine bir bulanık değer denir (Zadeh, 1965).

Örnek 2.2 $\Delta = \{\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4\}$ kümesi üzerinde $\tau_D(\delta_1) = 0.1$, $\tau_D(\delta_2) = 0.4$, $\tau_D(\delta_3) = 0.8$ ve $\tau_D(\delta_4) = 1$ ile tanımlanan τ_D fonksiyonu bir bulanık küme tanımlar. Bu bulanık küme

$$D = \{\langle \delta_1, 0.1 \rangle, \langle \delta_2, 0.4 \rangle, \langle \delta_3, 0.8 \rangle, \langle \delta_4, 1 \rangle\}$$

şeklinde bir gösterime sahiptir.

Örnek 2.3 $\Delta = \{\delta : 0 \leq \delta \leq 350\}$ olsun. $\tau_D(\delta) = \frac{\delta}{350}$ fonksiyonu 0 km/s en yavaş 350 km/s en hızlı olmak üzere 0 km/s ile 350 km/s arasındaki hızı modellemektedir. Bu durumda Örnek 2.1'in aksine $\tau_D(120) \simeq 0.3428$ ve $\tau_D(200) \simeq 0.5714$ olur. Böylece hız daha detaylı olarak modellenmiş olur.

2.2 Bulanık Kümeler İçin Küme İşlemleri

Bu kısımda bulanık kümeler için tanımlı temel küme işlemleri hatırlatılacaktır. Bu kısımdan itibaren aksi belirtilmedikçe $\Delta = \{\delta_1, \dots, \delta_l\}$ boş kümeden farklı sonlu bir küme olarak dikkate alınacaktır.

Tanım 2.4 Ait olma fonksiyonu her durumda sıfıra eşit olan bulanık kümeye boş bulanık küme denir (Zadeh, 1965).

Tanım 2.5 D ve E iki bulanık küme olsun. Eğer her $\delta \in X$ için $\tau_D(\delta) = \tau_E(\delta)$ ise D ve E kümeler eşittir denir. Bu durum $D = E$ veya $\tau_D = \tau_E$ ile gösterilir (Zadeh, 1965).

Tanım 2.6 D bir bulanık küme olsun. Ait olma fonksiyonu $1 - \tau_D$ olan bulanık kümeye, D bulanık kümesinin tümleyeni denir ve D^c ile gösterilir (Zadeh, 1965).

Tanım 2.7 D ve E iki bulanık küme olsun. Eğer her $\delta \in \Delta$ için $\tau_D(\delta) \leq \tau_E(\delta)$ ise D bulanık kümesi E bulanık kümesinin bir alt kümesidir denir. Bu durum $D \subset E$ ile gösterilir (Zadeh, 1965).

2.3 Sezgisel Bulanık Kümeler

Bulanık kümelerde her elemana $[0, 1]$ aralığından bir değer atanmaktadır. Bu durumda her elemanın ait olmama derecesi, 1'den ait olma derecesinin çıkartılması ile elde edilir. Ancak bazı gerçek hayat problemlerinde belirsizlik söz konusu olabileceğinden ait olmama derecesi, 1'den ait olma derecesinin çıkartılması ile elde edilemeyebilir. Dolayısıyla Atanassov (1986), belirsizlik derecesini dikkate alan sezgisel bulanık küme kavramını tanımlamıştır.

Tanım 2.8 Δ kümesinden $[0, 1]$ aralığına tanımlı ve her $\delta \in \Delta$ için $\tau_D(\delta) + \nu_D(\delta) \leq 1$ koşulunu sağlayan (τ_D, ν_D) fonksiyon ikilisine bir sezgisel bulanık küme denir. Yani, Δ üzerinde bir D sezgisel bulanık kümesi τ_D ve ν_D fonksiyonları ile tanımlanır. D sezgisel bulanık kümesi

$$D = \{\langle \delta, \tau_D(\delta), \nu_D(\delta) \rangle : \delta \in \Delta\}$$

ile gösterilir. Burada her $\delta \in \Delta$ için $\tau_D(\delta)$ değerine δ elemanının D sezgisel bulanık kümesine ait olma derecesi ve $\nu_D(\delta)$ değerine δ elemanının D sezgisel bulanık kümesine ait olmama derecesi denir. Ayrıca her $\delta \in \Delta$ için $\kappa_D(\delta) = 1 - \tau_D(\delta) - \nu_D(\delta)$ değerine belirsizlik derecesi denir. $\kappa_D(\delta)$ büyüdükçe, δ elemanı üzerindeki belirsiz artar (Atanassov, 1986).

Uyarı 2.1 Her $\delta \in \Delta$ için $\kappa_D(\delta) = 0$ oluyorsa, D sezgisel bulanık kümesi, bulanık kümeye indirgenir (Atanassov, 1986).

Tanım 2.9 $\tau_\theta, \nu_\theta \in [0, 1]$ ve $\tau_\theta + \nu_\theta \leq 1$ olmak üzere $\theta = \langle \tau_\theta, \nu_\theta \rangle$ ikilisine bir sezgisel bulanık değer denir (Atanassov, 1986).

2.4 Sezgisel Bulanık Kümeler İçin Küme İşlemleri

Bu kısımda sezgisel bulanık kümeler için tanımlı bazı temel küme işlemleri hatırlanacaktır.

Tanım 2.10 D ve E iki sezgisel bulanık küme olsun. Eğer her $\delta \in \Delta$ için $\tau_D(\delta) \leq \tau_E(\delta)$ ve $\nu_D(\delta) \geq \nu_E(\delta)$ oluyorsa D sezgisel bulanık kümesi E sezgisel bulanık kümesinin alt kümesidir denir ve $D \subset E$ ile gösterilir (Atanassov, 1986).

Tanım 2.11 D ve E iki sezgisel bulanık küme olmak üzere $D \subset E$ ve $E \subset D$ ise D ve E sezgisel bulanık kümeleri eşittir denir ve $D = E$ ile gösterilir (Atanassov, 1986).

Tanım 2.12 D bir sezgisel bulanık küme olsun. D kümesinin tümleyeni

$$D^c = \{\langle \delta, \nu_D(\delta), \tau_D(\delta) \rangle : \delta \in \Delta\}$$

ile tanımlanan sezgisel bulanık kümedir (Atanassov, 1986).

Sezgisel bulanık değerleri sıralamak için bir çok skor fonksiyonu tanımlanmıştır. Bunlardan biri Feng vd. (2018) tarafından önerilen aşağıdaki skor fonksiyonudur.

Tanım 2.13 $\theta = \langle \mu_\theta, \nu_\theta \rangle$ bir sezgisel bulanık değer olsun. Sezgisel bulanık değerler için bir Y skor fonksiyonu

$$Y(\theta) = \frac{\tau_\theta - \nu_\theta + 1}{2}$$

ile tanımlanır. Y skor fonksiyonu $Y(\langle 1, 0 \rangle) = 1$, $Y(\langle 0, 1 \rangle) = 0$ ve $Y(\theta) \in [0, 1]$ özelliklerine sahiptir (Feng vd., 2020).

2.5 Bulanık Ölçü Teorisi ve Kümeleme Operatörleri

Bulanık ölçü kavramı, klasik ölçünün bir genelleştirmesi olarak Sugeno (1974) tarafından verilmiştir. Bulanık ölçü tanımında toplamsallık aksiyomu kaldırılarak monotonluk aksiyomu getirilir. Böylece elemanlar arasındaki etkileşim modellenir.

Tanım 2.14 2^Δ , Δ kümesinin kuvvet kümesi olmak üzere bir $\rho : 2^\Delta \rightarrow [0, 1]$ küme fonksiyonu her $A, B \in 2^\Delta$ için $A \cap B \neq \emptyset$ iken $\rho(A \cup B) = \rho(A) + \rho(B)$ sağlıyorsa bu fonksiyona toplamsaldır denir.

Tanım 2.15 Bir $\rho : 2^\Delta \rightarrow [0, 1]$ küme fonksiyonu

(B1) $\rho(\emptyset) = 0$,

(B2) $\rho(\Delta) = 1$,

(B3) her $A, B \in 2^\Delta$ için $A \subset B$ iken $\rho(A) \leq \rho(B)$ (monotonluk)

özelliklerine sahip ise bu fonksiyona bir bulanık (toplamsal olmayan) ölçü denir. Eğer boş küme hariç her $A \in 2^\Delta$ için $\rho(A) > 0$ ise bulanık ölçüye kesin pozitifdir denir. (Sugeno, 1974).

Tanım 2.16 $\rho : 2^\Delta \rightarrow [0, 1]$ bir bulanık ölçü olsun. $\delta_m, \delta_n \in \Delta$ ve $m \neq n$ olmak üzere
(i) eğer $\rho(\{\delta_m, \delta_n\}) = \rho(\{\delta_m\}) + \rho(\{\delta_n\})$ ise δ_m ve δ_n arasında etkileşim yoktur,
(ii) eğer $\rho(\{\delta_m, \delta_n\}) < \rho(\{\delta_m\}) + \rho(\{\delta_n\})$ ise δ_m ve δ_n arasında negatif etkileşim vardır,
(iii) eğer $\rho(\{\delta_m, \delta_n\}) > \rho(\{\delta_m\}) + \rho(\{\delta_n\})$ ise δ_m ve δ_n arasında pozitif etkileşim vardır
denir (Grabisch, 1997).

Elemanlar arasındaki etkileşimi modellemek için Sugeno (1974) tarafında λ -bulanık ölçü kavramı verilmiştir.

Tanım 2.17 $\lambda \geq -1$ ve $\rho : 2^\Delta \rightarrow [0, 1]$ bir küme fonksiyonu olsun. Eğer her $A, B \subset \Delta$ için $A \cap B = \emptyset$ iken

$$\rho(A \cup B) = \rho(A) + \rho(B) + \lambda \rho(A)\rho(B)$$

gerçekleniyor ise ρ fonksiyonuna λ -bulanık ölçü denir. Murofushi ve Sugeno (1974) tarafında bir ρ , λ -bulanık ölçüsünün gerçekten de bir bulanık ölçü olduğu gösterilmiştir (Sugeno, 1974; Murofushi ve Sugeno, 2000).

Bir λ -bulanık ölçüsü bir etkileşim indeksi λ ve elemanların ağırlıkları ile inşa edilebilir. Takahagi (2000), bir λ -bulanık ölçüsü elde etmek için çeşitli algortimalar geliştirmiştir.

Tanım 2.18 $l > 1$ bir tam sayı olmak üzere $H : [0, 1]^l \rightarrow [0, 1]$ bir fonksiyon olsun. Eğer

(K1) $H(0, \dots, 0) = 0$ ve $H(1, \dots, 1) = 1$ (sınırlılık koşulu),

(K2) her $t \in \{1, \dots, l\}$ için $\delta_t \leq \varepsilon_t$ iken $H(\delta_1, \dots, \delta_l) \leq H(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_l)$ (monotonluk) gerçekleşiyorsa H fonksiyonuna bir kümeleme operatörü denir. Ayrıca

(a) eğer her $\delta \in [0, 1]$ için $H(\delta, \dots, \delta) = \delta$ ise H kümeleme operatörü eşgüçlüdür (idempotent),

(b) eğer her $t \in \{1, \dots, l\}$ için $\min(\delta_1, \dots, \delta_l) \leq H(\delta_1, \dots, \delta_l) \leq \max(\delta_1, \dots, \delta_l)$ ise H kümeleme operatörü ortalama özelliğine sahiptir denir.

Kümeleme operatörlerinin monotonluğundan dolayı eşgüçlü ve ortalama özellikleri denktir (Beliakov vd., 2020).

Tanım 2.19 $t \in \{1, \dots, l\}$ olmak üzere eğer $\varrho_t \in [0, 1]$ ve $\sum_{t=1}^l \varrho_t = 1$ ise $\varrho = (\varrho_1, \dots, \varrho_l)$ bir ağırlık vektörüdür denir.

Tanım 2.20 Her $t \in \{1, \dots, l\}$ için $\delta_t \in [0, 1]$, α bir reel sayı ve $\varrho = (\varrho_1, \dots, \varrho_l)$ bir ağırlık vektörü olmak üzere ağırlıklı kuvvet ortalaması

$$M_\alpha^w(\delta_1, \dots, \delta_l) = \left(\sum_{t=1}^l \varrho_t \delta_t^\alpha \right)^{\frac{1}{\alpha}}$$

ile tanımlanır. α parametresinin seçimine göre üç önemli kümeleme operatörü elde edilir.

- (i) Eğer $\alpha = 1$ ise, ağırlıklı kuvvet ortalaması, ağırlıklı aritmetik ortalama ile çıkarılır.
- (ii) Eğer $\alpha \rightarrow 0$ olduğunda ise, ağırlıklı kuvvet ortalaması, ağırlıklı geometrik ortalamaya indirgenir.
- (iii) Eğer $\alpha = -1$ ise, ağırlıklı kuvvet ortalaması, ağırlıklı harmonik ortalamaya indirgenir (Beliakov vd., 2020).

Kapasite teorisinde ortaya çıkan Choquet integrali ağırlıklı aritmetik ortalama kavramını genelleştirir.

Tanım 2.21 $\rho : 2^\Delta \rightarrow [0, 1]$ bir bulanık ölçü olsun. ρ bulanık ölçüsüne göre bir $f : \Delta \rightarrow [0, 1]$ fonksiyonun Choquet integrali

$$C_\rho(f) = (C) \int_{\Delta} f d\rho := \sum_{t=1}^l [f(\delta_{(t)}) - f(\delta_{(t-1)})] \rho(F_{(t)})$$

ile tanımlanır. Burada $\{\delta_{(t)}\}_{t=0}^l$, $\{\delta_t\}_{t=0}^l$ dizisinin $0 := f(\delta_{(0)}) \leq f(\delta_{(1)}) \leq \dots \leq f(\delta_{(l)})$ olmak üzere permütasyonudur ve $F_{(t)} := \{\delta_{(t)}, \delta_{(t+1)}, \dots, \delta_{(l)}\}$ şeklindedir (Choquet, 1954).

Uyarı 2.2 ρ bulanık ölçüsü toplamsal olsun. $\varrho = (\varrho_{(0)}, \varrho_{(1)}, \dots, \varrho_{(l)})$ ağırlık vektörü her $t = 1, \dots, l$ için $\varrho_{(t)} = \rho(\{\delta_{(t)}\})$ ve $\varrho_{(0)} = 0$ olacak şekilde verilsin. Bu durumda

$$\begin{aligned}
C_\rho(f) &= (C) \int_{\Delta} f d\rho \\
&= \sum_{t=1}^l \left(f(\delta_{(t)}) - f(\delta_{(t-1)}) \right) \rho(F_{(t)}) \\
&= \sum_{t=1}^l \left[f(\delta_{(t)}) \rho(F_{(t)}) - f(\delta_{(t-1)}) \rho(F_{(t-1)}) + f(\delta_{(t-1)}) \varrho_{(t-1)} \right] \\
&= f(\delta_{(l)}) \rho(F_{(l)}) - f(\delta_{(0)}) \rho(F_{(0)}) + f(\delta_{(0)}) \varrho_{(0)} + \sum_{t=2}^l f(\delta_{(t-1)}) \varrho_{(t-1)} \\
&= f(\delta_{(l)}) \rho(F_{(l)}) + \sum_{t=1}^{l-1} f(\delta_{(t)}) \varrho_{(t)} \\
&= \sum_{t=1}^l f(\delta_{(t)}) \varrho_{(t)}
\end{aligned}$$

elde edilir. Yani bulanık ölçü toplamsalık özelliğini sağladığında Choquet integrali, ağırlıklı aritmetik ortalamaya indirgenir.

Choquet integralinin sağladığı bazı özellikler aşağıdaki önermede verilmiştir.

Önerme 2.1 Δ sonlu bir küme, $\rho : 2^\Delta \rightarrow [0, 1]$ bir bulanık ölçü ve $f, g : \Delta \rightarrow [0, 1]$ iki fonksiyon olsun. Bu durumda aşağıdaki özellikler sağlanır:

a) Eğer $f = 0$ ise

$$(C) \int_{\Delta} f d\rho = 0$$

olur.

b) Ψ_A , $A \subset \Delta$ kümesinin karakteristik fonksiyonu olmak üzere

$$(C) \int_{\Delta} \Psi_A d\rho = \rho(A) \text{ ve } (C) \int_{\Delta} \Psi_{\Delta} d\rho = 1$$

olur.

c) Eğer $f \leq g$ ise

$$(C) \int_{\Delta} f d\rho \leq (C) \int_{\Delta} g d\rho \text{ (monotonluk)}$$

olur (Murofushi ve Sugeno, 2000).

Uyarı 2.3 Önerme 2.1(a)'da önermenin iki yönlü sağlanması için ρ bulanık ölçüsünün kesin pozitif olması gerekir.

Choquet integralinin bir genelleştirmesi olan d -Choquet integrali için öncelikle sınırlı fark fonksiyonu kavramı hatırlatılacaktır.

Tanım 2.22 $s : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ bir fonksiyon olsun. Eğer $\delta, \varepsilon, \gamma \in [0, 1]$ için

$$(S1) \quad s(\delta, \varepsilon) = s(\varepsilon, \delta),$$

$$(S2) \quad s(\delta, \varepsilon) = 1 \text{ gerek ve yeter koşul } \{\delta, \varepsilon\} = \{0, 1\},$$

$$(S3) \quad s(\delta, \varepsilon) = 0 \text{ gerek ve yeter koşul } \delta = \varepsilon,$$

$$(S4) \quad \text{eğer } \delta \leq \varepsilon \leq \gamma \text{ ise } s(\delta, \varepsilon) \leq s(\delta, \gamma) \text{ ve } s(\varepsilon, \gamma) \leq s(\delta, \gamma)$$

özellikleri gerçekleşiyor ise s bir sınırlı fark fonksiyonu olarak adlandırılır (Bustince vd.,2021).

Bustince vd. (2021) Choquet integrali tanımındaki $\delta_{(t)} - \delta_{(t-1)}$ farkı yerine $s(\delta_{(t)}, \delta_{(t-1)})$ ifadesini getirerek d -Choquet integrali tanımını vermişlerdir.

Tanım 2.23 Her $t \in \{1, \dots, l\}$ için $\delta_t \in [0, 1]$, $s : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ bir sınırlı fark fonksiyonu ve $\rho, \{1, \dots, l\}$ üzerinde bir bulanık ölçü olsun. ρ ve s ye göre d -Choquet integrali

$$C_{\rho, s}(\delta_1, \dots, \delta_l) := \sum_{t=1}^l s(\delta_{(t)}, \delta_{(t-1)}) \rho(F_{(t)})$$

ile tanımlanır. Burada $\{\delta_{(t)}\}_{t=0}^l, \{\delta_t\}_{t=0}^l$ dizisinin $0 := \delta_{(0)} \leq \delta_{(1)} \leq \dots \leq \delta_{(l)}$ olacak şekilde permütasyonudur ve $F_{(t)} := \{(t), (t+1), \dots, (l)\}$ şeklindedir (Bustince vd.,2021).

Uyarı 2.4 Genel olarak $C_{\rho, s}$ fonksiyonunun değer kümesi $[0, l]$ aralığının bir alt kümesidir. Bir sonraki önerme değer kümesinin hangi koşul altında $[0, 1]$ aralığının alt kümesi olduğunu verir.

Önerme 2.2 $C_{\rho, s} : [0, 1]^l \rightarrow [0, l]$, ρ bulanık ölçüsü ve s sınırlı fark fonksiyonuna göre d -Choquet integrali olsun. Eğer s sınırlı fark fonksiyonu $\delta_1 \leq \dots \leq \delta_l$ olmak üzere her $\delta_1, \dots, \delta_l \in [0, 1]$ için

$$s(0, \delta_1) + s(\delta_1, \delta_2) + \dots + s(\delta_{l-1}, \delta_l) \leq 1 \quad (2.1)$$

özellikliğini sağlarsa $C_{\rho, s}$ operatörünün değer kümesi $[0, 1]$ bir alt kümesi olur (Bustince vd.,2021).

Önerme 2.3 $g : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ fonksiyonu $g(0) = 0$ ve $g(1) = 1$ koşulunu sağlayan kesin artan bir fonksiyon olsun. Bu durumda her $\delta, \varepsilon \in [0, 1]$ için

$$s_g(\delta, \varepsilon) = |g(\delta) - g(\varepsilon)|$$

ile tanımlanan $s_g : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ fonksiyonu bir sınırlı fark fonksiyonudur ve (2.1) eşitsizliğini gerçekler (Bustince vd., 2021).

Genel olarak d -Choquet integrali monotonluk özelliğini sağlamamaktadır. Bir sonraki teorem hangi koşullar altında monotonluk özelliğinin sağlandığını verir.

Teorem 2.1 $C_{\rho, s} : [0, 1]^l \rightarrow [0, l]$, ρ bulanık ölçüsü ve s sınırlı fark fonksiyonuna göre d -Choquet integrali olsun. Eğer her $t \in \{1, \dots, l\}$ için $\delta_1, \dots, \delta_t \in [0, 1]$ ve $\delta_1 \leq \dots \leq \delta_t$ olmak üzere

$$s(0, \delta_1) + s(\delta_1, \delta_2) + \dots + s(\delta_{t-1}, \delta_t) = g_t(\delta_t)$$

koşulunu sağlayacak şekilde artan bir $g_t : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ fonksiyonu var ise her $\delta_1 \leq \varepsilon_1, \dots, \delta_n \leq \varepsilon_n$ için

$$C_{\rho, s}(\delta_1, \dots, \delta_l) \leq C_{\rho, s}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_l)$$

gerçeklenir (Bustince vd., 2021).

Teorem 2.2 $g : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ fonksiyonu $g(0) = 0$ ve $g(1) = 1$ olacak şekilde pozitif bir fonksiyon ve $s_g : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ her $\delta, \varepsilon \in [0, 1]$ için $s_g(\delta, \varepsilon) = |g(\delta) - g(\varepsilon)|$ ile tanımlı sınırlı fark fonksiyonu olsun. Bu durumda aşağıdaki özellikler sağlanır:

- a) $C_{\rho, s_g}(0, \dots, 0) = 0$ ve $C_{\rho, s_g}(1, \dots, 1) = 1$.
- b) Her $t \in \{1, \dots, l\}$ için $\delta_t \leq \varepsilon_t$ iken $C_{\rho, s_g}(\delta_1, \dots, \delta_l) \leq C_{\rho, s_g}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_l)$ olur.
- c) Her $\delta_1, \dots, \delta_l \in [0, 1]$ için $C_{\rho, s_g}(\delta_1, \dots, \delta_l) \in [0, 1]$.
- d) $C_{\rho, s_g}(\delta, \dots, \delta) = g(\delta)$ (Bustince vd., 2021).

Uyarı 2.5 Özel durumlarda bile Teorem 2.2 (d)'den, d -Choquet integralinin ortalama özelliğini sağlamadığı görülür. Ortalama özelliğine sahip olacak şekilde bir kümeleme operatörünü bir sonraki teoremde vereceğiz.

Teorem 2.3 $g : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ fonksiyonu $g(0) = 0$ ve $g(1) = 1$ olacak şekilde kesin artan bir fonksiyon ve $s_g : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ her $\delta, \varepsilon \in [0, 1]$ için $s_g(\delta, \varepsilon) = |g(\delta) - g(\varepsilon)|$

ile tanımlı sınırlı fark fonksiyonu olsun. Bu durumda

$$g^{-1}\left(C_{\rho, s_g}(\delta_1, \dots, \delta_l)\right)$$

ile tanımlanan dönüşüm ortalama özelliğine sahip bir kümeleme operatörüdür (Bozyiğit vd., 2024).

İspat. $g^{-1}\left(C_{\tau, \delta_g}(0, \dots, 0)\right) = 0$ ve $g^{-1}\left(C_{\tau, \delta_g}(1, \dots, 1)\right) = 1$ olduğu tanımdan açıktır. g^{-1} kesin artan bir fonksiyon olduğundan, Teorem 2.2 (b)'den, her $t \in \{1, \dots, l\}$ için $\delta_t \leq \varepsilon_t$ iken

$$g^{-1}\left(C_{\rho, s_g}(\delta_1, \dots, \delta_l)\right) \leq g^{-1}\left(C_{\rho, s_g}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_l)\right)$$

elde edilir. Ayrıca Teorem 2.2 (d)'den her $\delta \in [0, 1]$ için

$$g^{-1}\left(C_{\rho, s_g}(\delta, \dots, \delta)\right) = g^{-1}(g(\delta)) = \delta$$

olduğu görülür. Dolayısıyla $g^{-1}(C_{\rho, s_g})$ ortalama özelliğine sahip bir kümeleme operatörüdür. ■

Uyarı 2.6 $\rho, \{1, \dots, l\}$ üzerinde toplamsal bir bulanık ölçü ve $\varrho = (\varrho_{(0)}, \varrho_{(1)}, \dots, \varrho_{(l)})$ ağırlık vektörü her $t = 1, \dots, l$ için $\varrho_{(t)} = \rho(\{t\})$ ve $\varrho_{(0)} = 0$ olsun. Eğer $\alpha > 0$ olmak üzere $g_\alpha(\delta) = \delta^\alpha$ seçilirse

$$\begin{aligned} g_\alpha^{-1}\left(C_{\rho, s_{g_\alpha}}(\delta_1, \dots, \delta_l)\right) &= \left(\sum_{t=1}^l \left(\delta_{(t)}^\alpha - \delta_{(t-1)}^\alpha\right) \rho(F_{(t)})\right)^{\frac{1}{\alpha}} \\ &= \left(\sum_{t=1}^l \left[\delta_{(t)}^\alpha \rho(F_{(t)}) - \delta_{(t-1)}^\alpha \rho(F_{(t-1)}) + \delta_{(t-1)}^\alpha \varrho_{(t-1)}\right]\right)^{\frac{1}{\alpha}} \\ &= \left(\delta_{(l)}^\alpha \rho(F_{(l)}) - \delta_{(0)}^\alpha \rho(F_{(0)}) + \delta_{(0)}^\alpha \varrho_0 + \sum_{t=2}^l \delta_{(t-1)}^\alpha \varrho_{(t-1)}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \\ &= \left(\delta_{(l)}^\alpha \rho(F_{(l)}) + \sum_{t=1}^{l-1} \delta_{(t)}^\alpha \varrho_{(t)}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \\ &= \left(\sum_{t=1}^l \delta_{(t)}^\alpha \varrho_{(t)}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan $\alpha > 0$ için d -Choquet integralinin ağırlıklı kuvvet ortalamasını genelleştirdiği görülür (Bozyiğit vd., 2024).

Bütünlüğün sağlanması açısından Tanım 2.23'te verilen tanım bir f fonksiyonu için d -Choquet integrali tanımlanacak biçimde modifiye ediyoruz.

Tanım 2.24 $s : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ bir sınırlı fark fonksiyonu ve $\rho : 2^\Delta \rightarrow [0, 1]$ bir bulanık ölçü olsun. ρ ve s 'ye göre bir $f : \Delta \rightarrow [0, 1]$ fonksiyonun d -Choquet integrali

$$C_{\rho,s}(f) = (C_{\rho,s}) \int_{\Delta} f d\rho := \sum_{t=1}^l s\left(f(\delta_{(t)}), f(\delta_{(t-1)})\right) \rho(F_{(t)})$$

ile tanımlanır. Burada $\{\delta_{(t)}\}_{t=0}^l, \{\delta_t\}_{t=0}^l$ dizisinin $0 := f(\delta_{(0)}) \leq f(\delta_{(1)}) \leq \dots \leq f(\delta_{(l)})$ olacak biçimde permütasyonudur (Bozyiğit vd., 2024).

Şimdi tez boyunca sıklıkla kullanılacak bir eşitsizliği hatırlatacağız.

Teorem 2.4 (Jensen Eşitsizliği) $\delta_1, \dots, \delta_l$ reel sayılar ve h reel bir konveks fonksiyon olsun. $\sum_{t=1}^l \varrho_t = 1$ ve her $t \in \{1, \dots, l\}$ için $\varrho_t \geq 0$ olmak üzere

$$h\left(\sum_{t=1}^l \varrho_t \delta_t\right) \leq \sum_{t=1}^l \varrho_t h(\delta_t)$$

gerçeklenir. Ayrıca

$$h\left(\sum_{t=1}^l \varrho_t \delta_t\right) = \sum_{t=1}^l \varrho_t h(\delta_t)$$

olması için gerek ve yeter koşul $\delta_1 = \dots = \delta_l$ olmasıdır (Jensen, 1906).

3. SEZGİSEL BULANIK ÇAPRAZ-ENTROPİ ÖLÇÜLERİ

İki olasılık dağılımı arasındaki farklılığı ölçmek amacıyla araştırmacılar entropi fonksiyonlarını kullanarak çapraz-entropi ölçüleri geliştirmişlerdir. Shannon entropi ile tanımlanan Kullback-Leibler çapraz-entropi ölçüsü (ıraksaması) en bilinen çapraz-entropi ölçüsüdür.

Shannon entropi ölçüsü, Shannon (1948) tarafından geliştirilen bir kavramdır ve bir veri kümesindeki belirsizlik veya bilgi içeriğini ölçer. Shannon entropi bilgi teorisi alanında yaygın olarak kullanılır ve bir kaynaktan iletilen mesajları kodlamak veya iletmek için gereken ortalama bilgi miktarını nicelendirmek için kullanılır.

Tanım 3.1 $p : \Delta \rightarrow [0, 1]$ bir kesikli olasılık yoğunluk fonksiyonu ve P karşılık gelen kesikli olasılık dağılımı olsun. Yani her $t \in \{1, \dots, l\}$ için $p(\delta_t) \in [0, 1]$ ve $\sum_{t=1}^l p(\delta_t) = 1$ olsun. P olasılık dağılımının Shannon entropisi

$$S(P) = - \sum_{t=1}^l p(\delta_t) \ln p(\delta_t)$$

ile tanımlanır (Shannon, 1948).

Tanım 3.2 $P = \{p(\delta_1), \dots, p(\delta_l)\}$ ve $Q = \{q(\delta_1), \dots, q(\delta_l)\}$, Δ üzerinde iki kesikli olasılık dağılımı olsun. P ve Q olasılık dağılımları arasındaki Kullback-Leibler çapraz-entropi ölçüsü

$$KL(P, Q) = \sum_{t=1}^l p(\delta_t) \ln \frac{p(\delta_t)}{q(\delta_t)}$$

ile tanımlanır. Buradan itibaren $0 \ln \frac{0}{0} = 0$ ve her $x > 0$ reel sayısı için $0 \ln \frac{0}{x} = 0$ olduğu kabul edilecektir (Cover ve Thomas, 2006). Kullback ve Leibler tarafından $KL(P, Q) \geq 0$ ve $KL(P, Q) = 0$ olması için gerek ve yeter koşul $P = Q$ olduğu gösterilmiştir (Kullback ve Leibler, 1951).

Herhangi bir $t \in \{1, \dots, l\}$ için $q(\delta_t) = 0$ ve $p(\delta_t) \neq 0$ durumunda $KL(P, Q)$ tanımsız olduğundan dolayı Lin (1991) tarafından Kullback-Leibler çapraz-entropi geliştirilmiştir.

Tanım 3.3 $P = \{p(\delta_1), \dots, p(\delta_l)\}$ ve $Q = \{q(\delta_1), \dots, q(\delta_l)\}$, Δ üzerinde iki kesikli olasılık dağılımı olsun. P ve Q olasılık dağılımları arasındaki Lin çapraz-entropi ölçüsü

$$L(P, Q) = \sum_{t=1}^l p(\delta_t) \ln \frac{p(\delta_t)}{\frac{1}{2}(p(\delta_t) + q(\delta_t))}$$

ile tanımlanır. Lin (1991) tarafından $L(P, Q) \geq 0$ and $L(P, Q) = 0$ olması için gerek ve yeter koşul $P = Q$ olduğu ispatlanmıştır (Lin, 1991).

Bir bulanık kümenin belirsizlik derecesini ölçmek için bulanık entropi kavramı ilk kez Zadeh (1968) tarafından verilmiştir. Daha sonra Shang ve Jiang (1997), Lin çapraz-entropiyi baz alarak iki bulanık küme arasındaki farkı ölçmek için bulanık çapraz-entropi kavramını tanımlamıştır.

Tanım 3.4 D ve E , Δ üzerinde iki bulanık küme olsun. D ve E arasında bir bulanık çapraz-entropi ölçüsü

$$CE_{SJ}(D, E) = \sum_{t=1}^l \left[\tau_D(\delta_t) \ln \frac{\tau_D(\delta_t)}{\frac{1}{2}(\tau_D(\delta_t) + \tau_E(\delta_t))} + (1 - \tau_D(\delta_t)) \ln \frac{1 - \tau_D(\delta_t)}{1 - \frac{1}{2}(\tau_D(\delta_t) + \tau_E(\delta_t))} \right]$$

ile tanımlanır. $CE_{SJ}(D, E) \geq 0$ ve $CE_{SJ}(D, E) = 0$ olması için gerek ve yeter şart $D = E$ olmasıdır. Ancak CE_{SJ} simetrik olmadığından dolayı simetrik fark bilgi ölçüsü

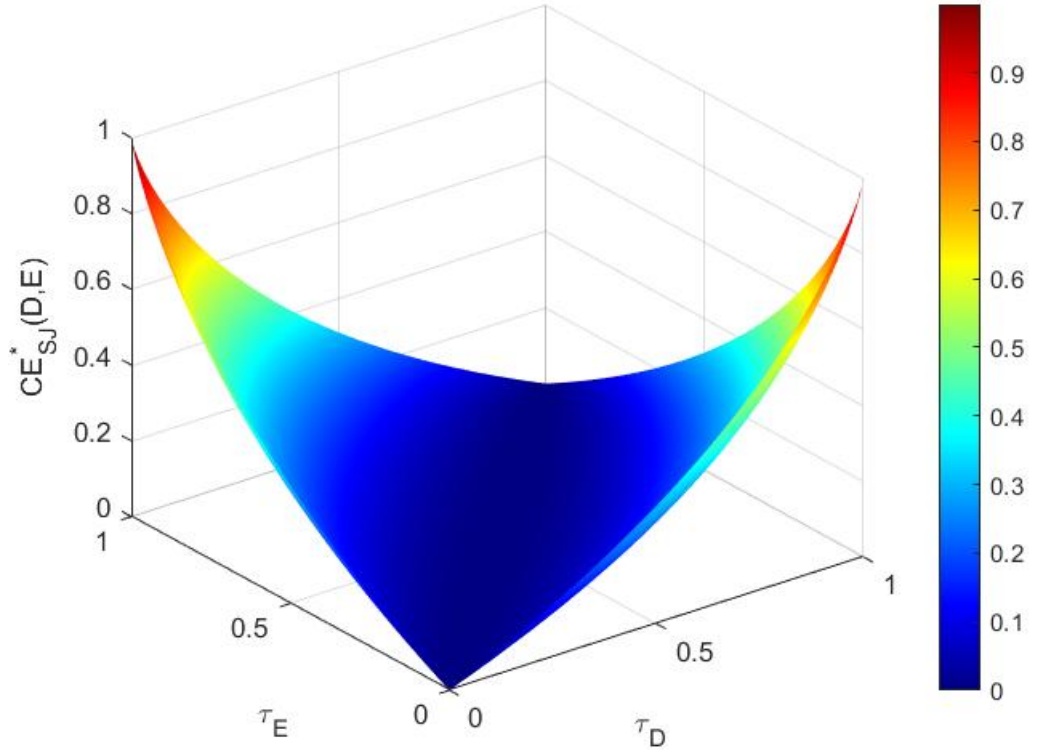
$$CE_{SJ}^*(D, E) = \frac{1}{2l \ln 2} \left(CE_{SJ}(D, E) + CE_{SJ}(E, D) \right)$$

ile tanımlanmıştır. $CE_{SJ}^*(D, E)$ büyüdükçe D ve E arasındaki farklılık artar (Shang ve Jiang, 1997).

Uyarı 3.1 $D = \langle \tau_D \rangle$ ve $E = \langle \tau_E \rangle$ iki bulanık değer olsun. Bu durumda $CE_{SJ}^*(D, E)$ tanımından

$$CE_{SJ}^*(D, E) = \frac{1}{2 \ln 2} \left[\tau_D \ln \frac{\tau_D}{\frac{1}{2}(\tau_D + \tau_E)} + (1 - \tau_D) \ln \frac{1 - \tau_D}{1 - \frac{1}{2}(\tau_D + \tau_E)} + \tau_E \ln \frac{\tau_E}{\frac{1}{2}(\tau_E + \tau_D)} + (1 - \tau_E) \ln \frac{1 - \tau_E}{1 - \frac{1}{2}(\tau_E + \tau_D)} \right]$$

elde edilir. Şekil 3.1 incelenirse CE_{SJ}^* fonksiyonunun negatif olmayan, simetrik ve sınırlı olduğu görülür.



Şekil 3.1. $CE_{Sj}^*(D, E)$ 'nin grafiği

Benzer şekilde, Vlachos ve Sergiadis (2007) çapraz-entropi kavramını bulanık kümelerden sezgisel bulanık kümelere genişletmiştir. D ve E sezgisel bulanık kümeleri arasındaki bir sezgisel bulanık çapraz-entropi ölçüsü

$$CE_{VS}(D, E) = \sum_{t=1}^l \left[\tau_D(\delta_t) \ln \frac{\tau_D(\delta_t)}{\frac{1}{2}(\tau_D(\delta_t) + \tau_E(\delta_t))} + v_D(\delta_t) \ln \frac{v_D(\delta_t)}{\frac{1}{2}(v_D(\delta_t) + v_E(\delta_t))} \right]$$

şeklinde tanımlanmıştır. Ancak Wei ve Ye (2010), bazı durumlarda $CE_{VS}(D, E) < 0$ olabileceğine ilişkin bir örnek vermiştir. Dolayısıyla Wei ve Ye (2010) bu eksikliği gidermek için düzenlenmiş bir sezgisel bulanık çapraz-entropi tanımlamışlardır.

Tanım 3.5 D ve E , Δ üzerinde iki sezgisel bulanık küme olsun. D ve E arasında bir düzenlenmiş sezgisel bulanık çapraz-entropi ölçüsü

$$CE_Y(D, E) = \sum_{t=1}^l \left[\tau_D(\delta_t) \ln \frac{\tau_D(\delta_t)}{\frac{1}{2}(\tau_D(\delta_t) + \tau_E(\delta_t))} + v_D(\delta_t) \ln \frac{v_D(\delta_t)}{\frac{1}{2}(v_D(\delta_t) + v_E(\delta_t))} + \kappa_D(\delta_t) \ln \frac{\kappa_D(\delta_t)}{\frac{1}{2}(\kappa_D(\delta_t) + \kappa_E(\delta_t))} \right]$$

ile tanımlanır. $CE_Y(D, E) \geq 0$ ve $CE_Y(D, E) = 0$ olması için gerek ve yeter şart $D = E$ olmasıdır. CE_Y simetrik olmadığından simetrik fark bilgi ölçüsü

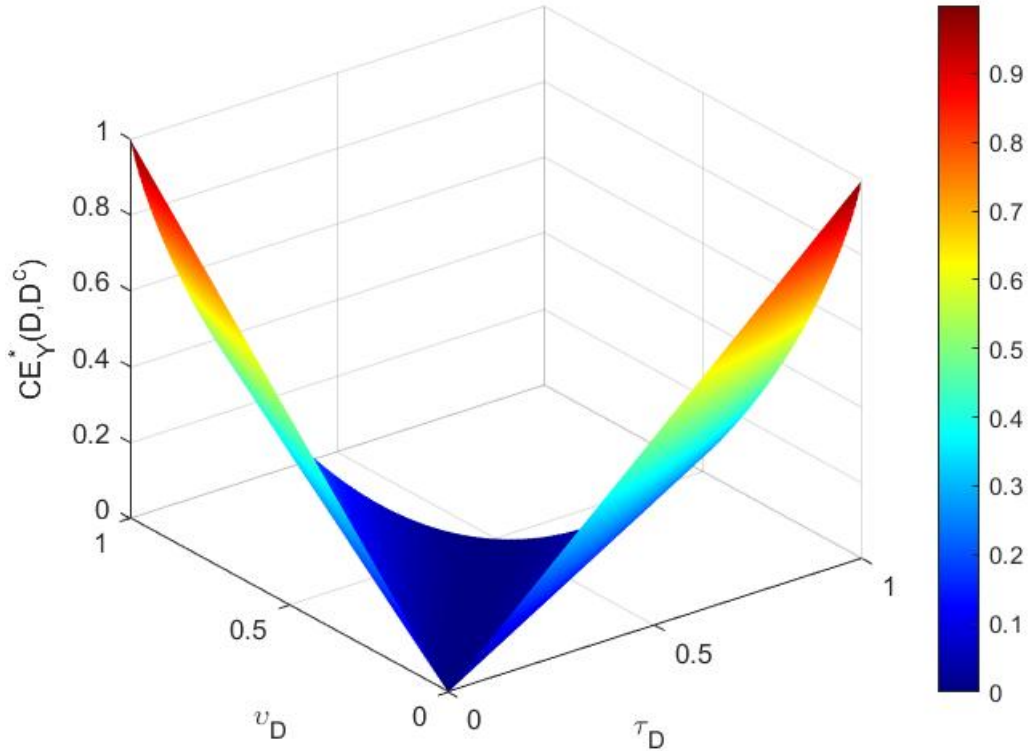
$$CE_Y^*(D, E) = \frac{1}{2l \ln 2} \left(CE_Y(D, E) + CE_Y(E, D) \right)$$

ile tanımlanır. $CE_Y^*(D, E)$ büyüdükçe, D ve E arasındaki farklılık artar (Wei ve Ye, 2010).

Uyarı 3.2 $D = \langle \tau_D, \nu_D \rangle$ bir sezgisel bulanık değer olsun. O halde CE_Y^* tanımı kullanılarak

$$CE_Y^*(D, D^c) = \frac{1}{\ln 2} \left[\tau_D \ln \frac{\tau_D}{\frac{1}{2}(\tau_D + \nu_D)} + \nu_D \ln \frac{\nu_D}{\frac{1}{2}(\nu_D + \tau_D)} \right]$$

elde edilir. Şekil 3.2'den CE_Y^* fonksiyonunun negatif olmadığı, simetrik ve sınırlı olduğu sonucu çıkarılabilir.



Şekil 3.2. $CE_Y^*(D, D^c)$ 'nin grafiği

Ait olma ve ait olmama derecelerinin çapraz-entropi ölçüsü üzerindeki etkisini gözlemlemek için parametrik bir sezgisel bulanık çapraz-entropi ölçüsü tanımlayacağız.

Tanım 3.6 D ve E , Δ üzerinde iki sezgisel bulanık küme ve $p, q \in [0, 1]$ olsun. D ve E arasında parametrik düzenlenmiş sezgisel bulanık çapraz-entropi ölçüsü

$$CE_Y^{p,q}(D, E) = \sum_{t=1}^l \left[\tau_D^p(\delta_t) \ln \left(\frac{\tau_D^p(\delta_t)}{\frac{1}{2}(\tau_D^p(\delta_t) + \tau_E^p(\delta_t))} \right)^p + v_D^q(\delta_t) \ln \left(\frac{v_D^q(\delta_t)}{\frac{1}{2}(v_D^q(\delta_t) + v_E^q(\delta_t))} \right)^q + \right. \\ \left. (1 - p\tau_D^p(\delta_t) - qv_D^q(\delta_t)) \ln \frac{1 - p\tau_D^p(\delta_t) - qv_D^q(\delta_t)}{\frac{1}{2}(1 - p\tau_D^p(\delta_t) - qv_D^q(\delta_t) + (1 - p\tau_E^p(\delta_t) - qv_E^q(\delta_t)))} \right]$$

ile tanımlanır.

(i) Eğer $p = q = 1$ ise $CE_Y^{1,1}$, düzenlenmiş sezgisel bulanık çapraz-entropi ölçüsü CE_Y ile çakışır.

(ii) Eğer $p = 1$ ve $q = 0$ ise $CE_Y^{1,0}$, bulanık çapraz-entropi ölçüsü CE_{SJ} ile çakışır (Garg vd, 2024).

Teorem 3.1 D ve E , Δ üzerinde iki sezgisel bulanık küme ve $p, q \in [0, 1]$ olsun. Bu durumda $CE_Y^{p,q}$ aşağıdaki özellikleri sağlar.

(a) Eğer $p = q$ ise $CE_Y^{p,q}(D^c, E^c) = CE_Y^{p,q}(D, E)$.

(b) $0 \leq CE_Y^{p,q}(D, E) \leq l \ln 2$.

(c) $D = E$ olması için gerek ve yeter koşul $CE_Y^{p,q}(D, E) = 0$ olmasıdır (Garg vd, 2024).

İspat. (a) $p = q$ olsun. Bu durumda

$$CE_Y^{p,q}(D^c, E^c) = \sum_{t=1}^l \left[v_D^p(\delta_t) \ln \left(\frac{v_D^p(\delta_t)}{\frac{1}{2}(v_D^p(\delta_t) + v_E^p(\delta_t))} \right)^p + \tau_D^q(\delta_t) \ln \left(\frac{\tau_D^q(\delta_t)}{\frac{1}{2}(\tau_D^q(\delta_t) + \tau_E^q(\delta_t))} \right)^q + \right. \\ \left. (1 - pv_D^p(\delta_t) - q\tau_D^q(\delta_t)) \ln \frac{1 - pv_D^p(\delta_t) - q\tau_D^q(\delta_t)}{\frac{1}{2}(1 - pv_D^p(\delta_t) - q\tau_D^q(\delta_t) + (1 - pv_E^p(\delta_t) - q\tau_E^q(\delta_t)))} \right] \\ = \sum_{t=1}^l \left[\tau_D^p(\delta_t) \ln \left(\frac{\tau_D^p(\delta_t)}{\frac{1}{2}(\tau_D^p(\delta_t) + \tau_E^p(\delta_t))} \right)^p + v_D^q(\delta_t) \ln \left(\frac{v_D^q(\delta_t)}{\frac{1}{2}(v_D^q(\delta_t) + v_E^q(\delta_t))} \right)^q + \right. \\ \left. (1 - p\tau_D^p(\delta_t) - qv_D^q(\delta_t)) \ln \frac{1 - p\tau_D^p(\delta_t) - qv_D^q(\delta_t)}{\frac{1}{2}(1 - p\tau_D^p(\delta_t) - qv_D^q(\delta_t) + (1 - p\tau_E^p(\delta_t) - qv_E^q(\delta_t)))} \right] \\ = CE_Y^{p,q}(D, E)$$

elde edilir.

(b) $h(\delta) = -\ln \delta$ ile tanımlı h fonksiyonu konveks ve her $t \in \{1, \dots, l\}$ için $\tau_D(\delta_t) +$

$v_D(\delta_t) + \kappa_D(\delta_t) = 1$ olduğundan Jensen eşitsizliğinden

$$\begin{aligned}
CE_Y^{p,q}(D, E) &= \sum_{t=1}^l \left[p\tau_D^p(\delta_t) \left(-\ln \frac{\tau_D^p(\delta_t) + \tau_E^p(\delta_t)}{2\tau_D^p(\delta_t)} \right) + qv_D^q(\delta_t) \left(-\ln \frac{v_D^q(\delta_t) + v_E^q(\delta_t)}{2v_D^q(\delta_t)} \right) + \right. \\
&\quad \left. \left(1 - p\tau_D^p(\delta_t) - qv_D^q(\delta_t) \right) \left(-\ln \frac{1 - p\tau_D^p(\delta_t) - qv_D^q(\delta_t) + \left(1 - p\tau_E^p(\delta_t) - qv_E^q(\delta_t) \right)}{2\left(1 - p\tau_D^p(\delta_t) - qv_D^q(\delta_t) \right)} \right) \right] \\
&\geq -\sum_{t=1}^l \ln \left[p\tau_D^p(\delta_t) \frac{\tau_D^p(\delta_t) + \tau_E^p(\delta_t)}{2\tau_D^p(\delta_t)} + qv_D^q(\delta_t) \frac{v_D^q(\delta_t) + v_E^q(\delta_t)}{2v_D^q(\delta_t)} + \right. \\
&\quad \left. \left(1 - p\tau_D^p(\delta_t) - qv_D^q(\delta_t) \right) \frac{1 - p\tau_D^p(\delta_t) - qv_D^q(\delta_t) + \left(1 - p\tau_E^p(\delta_t) - qv_E^q(\delta_t) \right)}{2\left(1 - p\tau_D^p(\delta_t) - qv_D^q(\delta_t) \right)} \right] \\
&= -\sum_{t=1}^l \ln \left[\frac{p\tau_D^p(\delta_t) + p\tau_E^p(\delta_t) + qv_D^q(\delta_t) + qv_E^q(\delta_t) +}{2} + \right. \\
&\quad \left. \frac{1 - p\tau_D^p(\delta_t) - qv_D^q(\delta_t) + 1 - p\tau_E^p(\delta_t) - qv_E^q(\delta_t)}{2} \right] \\
&= -\sum_{t=1}^l \ln 1 \\
&= 0
\end{aligned}$$

elde edilir. Diğer taraftan $p, q \in [0, 1]$ için $1 - p\tau^p - qv^q \geq 0$ olduğundan dolayı

$$\begin{aligned}
CE_Y^{p,q}(D, E) &= \sum_{t=1}^l \left[\tau_D^p(\delta_t) \ln \left(\frac{2\tau_D^p(\delta_t)}{\tau_D^p(\delta_t) + \tau_E^p(\delta_t)} \right)^p + v_D^q(\delta_t) \ln \left(\frac{2v_D^q(\delta_t)}{v_D^q(\delta_t) + v_E^q(\delta_t)} \right)^q + \right. \\
&\quad \left. \left(1 - p\tau_D^p(\delta_t) - qv_D^q(\delta_t) \right) \ln \frac{2\left(1 - p\tau_D^p(\delta_t) - qv_D^q(\delta_t) \right)}{1 - p\tau_D^p(\delta_t) - qv_D^q(\delta_t) + \left(1 - p\tau_E^p(\delta_t) - qv_E^q(\delta_t) \right)} \right] \\
&\leq \sum_{t=1}^l \left[\left(p\tau_D^p(\delta_t) + qv_D^q(\delta_t) + 1 - p\tau_D^p(\delta_t) - qv_D^q(\delta_t) \right) \ln 2 \right] \\
&= l \ln 2
\end{aligned}$$

olduğu görülür. Sonuç olarak $0 \leq CE_Y^{p,q}(D, E) \leq l \ln 2$ olur.

(c) $D = E$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned}
CE_Y^{p,q}(D, E) &= \sum_{t=1}^l \left[\tau_D^p(\delta_t) \ln \left(\frac{\tau_D^p(\delta_t)}{\frac{1}{2}(\tau_D^p(\delta_t) + \tau_E^p(\delta_t))} \right)^p + v_D^q(\delta_t) \ln \left(\frac{v_D^q(\delta_t)}{\frac{1}{2}(v_D^q(\delta_t) + v_E^q(\delta_t))} \right)^q + \right. \\
&\quad \left. \left(1 - p\tau_D^p(\delta_t) - qv_D^q(\delta_t) \right) \ln \frac{1 - p\tau_D^p(\delta_t) - qv_D^q(\delta_t)}{\frac{1}{2}\left(1 - p\tau_D^p(\delta_t) - qv_D^q(\delta_t) + \left(1 - p\tau_E^p(\delta_t) - qv_E^q(\delta_t) \right) \right)} \right] \\
&= \sum_{t=1}^l \left[\tau_D^p(\delta_t) \ln 1 + v_D^q(\delta_t) \ln 1 + \left(1 - p\tau_D^p(\delta_t) - qv_D^q(\delta_t) \right) \ln 1 \right] \\
&= 0
\end{aligned}$$

olduğu görülür. Diğer taraftan $CE_Y^{p,q}(D, E) = 0$ olduğu varsayılınsın. Bu durumda

Jensen eşitsizliğinden her $t \in \{1, \dots, l\}$ için

$$\begin{aligned}
0 &= p\tau_D^p(\delta_t) \left(-\ln \frac{\tau_D^p(\delta_t) + \tau_E^p(\delta_t)}{2\tau_D^p(\delta_t)} \right) + qv_D^q(\delta_t) \left(-\ln \frac{v_D^q(\delta_t) + v_E^q(\delta_t)}{2v_D^q(\delta_t)} \right) + \\
&\quad \left(1 - p\tau_D^p(\delta_t) - qv_D^q(\delta_t) \right) \left(-\ln \frac{1 - p\tau_D^p(\delta_t) - qv_D^q(\delta_t) + (1 - p\tau_E^p(\delta_t) - qv_E^q(\delta_t))}{2(1 - p\tau_D^p(\delta_t) - qv_D^q(\delta_t))} \right) \\
&\geq -\ln \left[p\tau_D^p(\delta_t) \frac{\tau_D^p(\delta_t) + \tau_E^p(\delta_t)}{2\tau_D^p(\delta_t)} + qv_D^q(\delta_t) \frac{v_D^q(\delta_t) + v_E^q(\delta_t)}{2v_D^q(\delta_t)} + \right. \\
&\quad \left. \left(1 - p\tau_D^p(\delta_t) - qv_D^q(\delta_t) \right) \frac{1 - p\tau_D^p(\delta_t) - qv_D^q(\delta_t) + (1 - p\tau_E^p(\delta_t) - qv_E^q(\delta_t))}{2(1 - p\tau_D^p(\delta_t) - qv_D^q(\delta_t))} \right] \\
&= 0
\end{aligned}$$

gerçeklenir. Bunun olması için gerek ve yeter koşul her $t \in \{1, \dots, l\}$ için c_t bir sabit olmak üzere

$$\begin{aligned}
c_t &= \frac{\tau_D^p(\delta_t) + \tau_E^p(\delta_t)}{2\tau_D^p(\delta_t)} \\
&= \frac{1 - p\tau_D^p(\delta_t) - qv_D^q(\delta_t) + (1 - p\tau_E^p(\delta_t) - qv_E^q(\delta_t))}{2(1 - p\tau_D^p(\delta_t) - qv_D^q(\delta_t))} \\
&= \frac{v_D^q(\delta_t) + v_E^q(\delta_t)}{2v_D^q(\delta_t)}
\end{aligned}$$

gerçeklenmesidir. Bu sistem çözülmüşse her $t \in \{1, \dots, l\}$ için $c_t = 1$ elde edilir. Sonuç olarak her $t \in \{1, \dots, l\}$ için $\tau_D(\delta_t) = \tau_E(\delta_t)$ ve $v_D(\delta_t) = v_E(\delta_t)$ olup $D = E$ olduğu görülür. ■

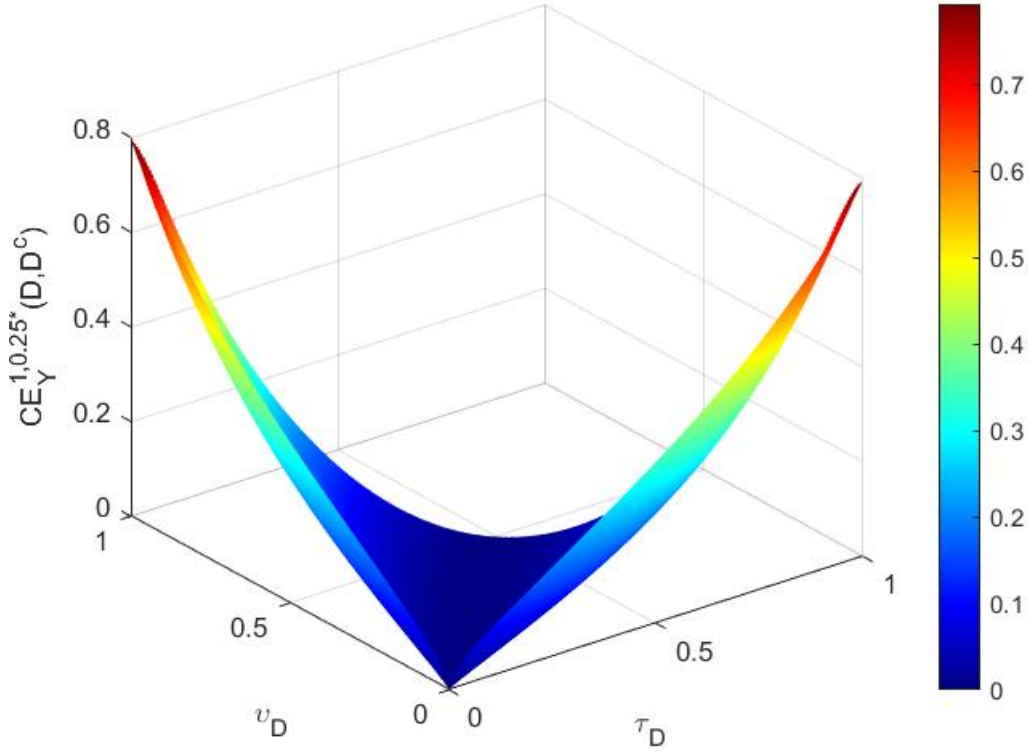
Genel olarak $CE_Y^{p,q}$ simetrik olmadığından dolayı aşağıdaki tanım verilecektir.

Tanım 3.7 D ve E iki sezgisel bulanık küme ve $0 \leq p, q \leq 1$ olsun. $CE_Y^{p,q}$ çapraz-entropi ölçüsü tabanlı bir simetrik fark bilgi ölçüsü

$$CE_Y^{p,q*}(D, E) = \frac{1}{2l \ln 2} \left(CE_Y^{p,q}(D, E) + CE_Y^{p,q}(E, D) \right)$$

ile tanımlanır. $0 \leq CE_Y^{p,q*}(D, E) \leq 1$ olduğu kolayca görülür. $CE_Y^{p,q*}(D, E)$ değeri büyüdükçe, D ve E arasındaki farklılık artar (Garg vd, 2024).

Uyarı 3.3 $D = \langle \tau_D, v_D \rangle$ bir sezgisel bulanık değer olsun. Bu durumda $CE_Y^{p,q*}$ fonksi-



Şekil 3.3. $p = 1$ ve $q = 0.25$ için $CE_Y^{p,q^*}(D, D^c)$ 'nin grafiği

yonunun tanımından

$$\begin{aligned}
 CE_Y^{p,q^*}(D, D^c) = & \frac{1}{2 \ln 2} \left[\tau_D^p \ln \left(\frac{\tau_D^p}{\frac{1}{2}(\tau_D^p + v_D^p)} \right)^p + v_D^q \ln \left(\frac{v_D^q}{\frac{1}{2}(v_D^q + \tau_D^q)} \right)^q + \right. \\
 & \left. (1 - p\tau_D^p - qv_D^q) \ln \frac{1 - p\tau_D^p - qv_D^q}{\frac{1}{2}(1 - p\tau_D^p - qv_D^q + (1 - pv_D^p - q\tau_D^q))} + \right. \\
 & \left. v_D^p \ln \left(\frac{v_D^p}{\frac{1}{2}(v_D^p + \tau_D^p)} \right)^p + \tau_D^q \ln \left(\frac{\tau_D^q}{\frac{1}{2}(\tau_D^q + v_D^q)} \right)^q + \right. \\
 & \left. (1 - pv_D^p - q\tau_D^q) \ln \frac{1 - pv_D^p - q\tau_D^q}{\frac{1}{2}(1 - pv_D^p - q\tau_D^q + (1 - p\tau_D^p - qv_D^q))} \right]
 \end{aligned}$$

elde edilir. Şekil 3.3'de $p = 1$ ve $q = 0.25$ için CE_Y^{p,q^*} fonksiyonunun negatif olmadığı, simetrik ve sınırlı olduğu görülebilir (Garg vd, 2024).

4. AĞIRLIKLI SEZGİSEL BULANIK ÇAPRAZ-ENTROPİ ÖLÇÜLERİ

Bu bölümde, öncelikle Zhang ve Yu (2012) tarafından verilen ve negatif olmama özelliğini sağlamayan ağırlıklı sezgisel bulanık çapraz-entropi ölçüsünün bu eksikliğini gidermek için ağırlıklı düzenlenmiş bir sezgisel bulanık çapraz-entropi ölçüsünü ölçüsü tanımlanacaktır. Bu şekilde, Wei ve Ye (2010) tarafından önerilen düzenlenmiş sezgisel bulanık çapraz-entropi ölçüsünün bir genellemesi de elde edilecektir.

Zhang and Yu (2012), D ve E sezgisel bulanık kümeler arasında $\varrho = (\varrho_1, \dots, \varrho_l)$ bir ağırlık vektörü olmak üzere

$$CE_Z^{\varrho}(D, E) = \sum_{t=1}^l \varrho_t \left[\tau_D(\delta_t) \ln \frac{\tau_D(\delta_t)}{\frac{1}{2}(\tau_D(\delta_t) + \tau_E(\delta_t))} + \nu_D(\delta_t) \ln \frac{\nu_D(\delta_t)}{\frac{1}{2}(\nu_D(\delta_t) + \nu_E(\delta_t))} \right]$$

şeklinde tanımlanan ağırlık sezgisel bulanık çapraz-entropi ölçüsünü tanımlamışlardır. Ancak, CE_Z^w fonksiyonu negatif olmama özelliğini sağlamamaktadır. Aşağıda verilen örnekte CE_Z^w fonksiyonunun negatif değerler alabildiği görülmektedir.

Örnek 4.1 $\Delta = \{\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4\}$ üzerindeki D ve E sezgisel bulanık kümeleri sırasıyla

$$D = \{\langle \delta_1, 0.5, 0.3 \rangle, \langle \delta_2, 0.6, 0.2 \rangle, \langle \delta_3, 0.8, 0.1 \rangle, \langle \delta_4, 0.2, 0.6 \rangle\}$$

ve

$$E = \{\langle \delta_1, 0.8, 0.1 \rangle, \langle \delta_2, 0.7, 0.1 \rangle, \langle \delta_3, 0.8, 0.1 \rangle, \langle \delta_4, 0.2, 0.7 \rangle\}$$

ile verilsin. $\varrho = (0.20, 0.18, 0.32, 0.30)$ ağırlık vektörüne göre $CE_Z^{\varrho}(D, E) < 0$ olduğu görülür (Garg vd, 2024).

Şimdi bu eksikliğini gidermek için yeni bir ağırlıklı düzenlenmiş sezgisel bulanık çapraz-entropi ölçüsü tanımlanacaktır.

Tanım 4.1 D ve E , Δ üzerinde iki sezgisel bulanık küme ve $\varrho = (\varrho_1, \dots, \varrho_l)$ bileşenleri sıfırdan farklı bir ağırlık vektörü olsun. D ve E arasında ağırlıklı bir düzenlenmiş sezgisel bulanık çapraz-entropi ölçüsü

$$CE_Y^{\varrho}(D, E) = \sum_{t=1}^l \varrho_t \left[\tau_D(\delta_t) \ln \frac{\tau_D(\delta_t)}{\frac{1}{2}(\tau_D(\delta_t) + \tau_E(\delta_t))} + \nu_D(\delta_t) \ln \frac{\nu_D(\delta_t)}{\frac{1}{2}(\nu_D(\delta_t) + \nu_E(\delta_t))} + \kappa_D(\delta_t) \ln \frac{\kappa_D(\delta_t)}{\frac{1}{2}(\kappa_D(\delta_t) + \kappa_E(\delta_t))} \right]$$

ile tanımlanır. Özellikle, $\varrho = (\frac{1}{l}, \dots, \frac{1}{l})$ seçersek, o zaman $lCE_Y^{\varrho}(D, E) = CE_Y(D, E)$ elde edilir (Garg vd, 2024).

Teorem 4.1 D ve E , Δ üzerinde iki sezgisel bulanık küme ve $\varrho = (\varrho_1, \dots, \varrho_l)$ bileşenleri sıfırdan farklı bir ağırlık vektörü olsun. CE_Y^{ϱ} fonksiyonu aşağıdaki özellikleri gerçekler:

(a) $CE_Y^{\varrho}(D^c, E^c) = CE_Y^{\varrho}(D, E)$.

(b) $0 \leq CE_Y^{\varrho}(D, E) \leq \ln 2$.

(c) $D = E$ olması için gerek ve yeter koşul $CE_Y^{\varrho}(D, E) = 0$ olmasıdır (Garg vd, 2024).

İspat.

(a-c) Teorem 3.1'in ispatına benzer şekilde ispat tamamlanır.

(b) $h(\delta) = -\ln \delta$ ile tanımlı h fonksiyonu konveks ve her $t \in \{1, \dots, l\}$ için $\tau_D(\delta_t) + v_D(\delta_t) + \kappa_D(\delta_t) = 1$ olduğundan Jensen eşitsizliğinden

$$\begin{aligned}
CE_Y^{\varrho}(D, E) &= \sum_{t=1}^l \varrho_t \left[\tau_D(\delta_t) \ln \frac{\tau_D(\delta_t)}{\frac{1}{2}(\tau_D(\delta_t) + \tau_E(\delta_t))} + v_D(\delta_t) \ln \frac{v_D(\delta_t)}{\frac{1}{2}(v_D(\delta_t) + v_E(\delta_t))} \right. \\
&\quad \left. + \kappa_D(\delta_t) \ln \frac{\kappa_D(\delta_t)}{\frac{1}{2}(\kappa_D(\delta_t) + \kappa_E(\delta_t))} \right] \\
&= \sum_{t=1}^l \varrho_t \left[\tau_D(\delta_t) \left(-\ln \frac{\tau_D(\delta_t) + \tau_E(\delta_t)}{2\tau_D(\delta_t)} \right) + v_D(\delta_t) \left(-\ln \frac{v_D(\delta_t) + v_E(\delta_t)}{2v_D(\delta_t)} \right) \right. \\
&\quad \left. + \kappa_D(\delta_t) \left(-\ln \frac{\kappa_D(\delta_t) + \kappa_E(\delta_t)}{2\kappa_D(\delta_t)} \right) \right] \\
&\geq -\sum_{i=1}^n \varrho_t \left[\ln \left(\tau_D(\delta_t) \frac{\tau_D(\delta_t) + \tau_E(\delta_t)}{2\tau_D(\delta_t)} + v_D(\delta_t) \frac{v_D(\delta_t) + v_E(\delta_t)}{2v_D(\delta_t)} + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \kappa_D(\delta_t) \frac{\kappa_D(\delta_t) + \kappa_E(\delta_t)}{2\kappa_D(\delta_t)} \right) \right] \\
&= -\sum_{t=1}^l \varrho_t \left[\ln \left(\frac{\tau_D(\delta_t) + \tau_E(\delta_t) + v_D(\delta_t) + v_E(\delta_t) + \kappa_D(\delta_t) + \kappa_E(\delta_t)}{2} \right) \right] \\
&= -\sum_{t=1}^l \varrho_t \ln 1 \\
&= 0
\end{aligned}$$

elde edilir. Eşitsizliğin diğer tarafı için

$$\begin{aligned}
CE_Y^{\varrho}(D, E) &= \sum_{t=1}^l \varrho_t \left[\tau_D(\delta_t) \ln \frac{\tau_D(\delta_t)}{\frac{1}{2}(\tau_D(\delta_t) + \tau_E(\delta_t))} + \nu_D(\delta_t) \ln \frac{\nu_D(\delta_t)}{\frac{1}{2}(\nu_D(\delta_t) + \nu_E(\delta_t))} + \right. \\
&\quad \left. \kappa_D(\delta_t) \ln \frac{\kappa_D(\delta_t)}{\frac{1}{2}(\kappa_D(\delta_t) + \kappa_E(\delta_t))} \right] \\
&= \sum_{t=1}^l \varrho_t \left[\tau_D(\delta_t) \ln \frac{2\tau_D(\delta_t)}{\tau_D(\delta_t) + \tau_E(\delta_t)} + \nu_D(\delta_t) \ln \frac{2\nu_D(\delta_t)}{\nu_D(\delta_t) + \nu_E(\delta_t)} + \right. \\
&\quad \left. \kappa_D(\delta_t) \ln \frac{2\kappa_D(\delta_t)}{\kappa_D(\delta_t) + \kappa_E(\delta_t)} \right] \\
&\leq \sum_{t=1}^l \varrho_t \left[\tau_D(\delta_t) + \nu_D(\delta_t) + \kappa_D(\delta_t) \right] \ln 2 \\
&= \ln 2 \sum_{t=1}^l \varrho_t \\
&= \ln 2
\end{aligned}$$

elde edilir. Sonuç olarak $0 \leq CE_Y^{\varrho}(D, E) \leq \ln 2$ olduğu görülür. ■

CE_Y^{ϱ} fonksiyonu simetrik olmadığından dolayı simetrik bir formu aşağıdaki gibi verilir.

Tanım 4.2 D ve E , Δ üzerinde iki sezgisel bulanık küme olsun. $CE_{Y,p,q}$ tabanlı bir simetrik fark bilgi ölçüsü

$$CE_Y^{\varrho*}(D, E)(A, B) = \frac{1}{2 \ln 2} \left(CE_Y^{\varrho}(D, E) + CE_Y^{\varrho}(E, D) \right)$$

ile tanımlanır. $0 \leq CE_Y^{\varrho*}(D, E) \leq 1$ olduğu kolayca görülür. $CE_Y^{\varrho*}(D, E)$ değeri büyüdükçe, D ve E arasındaki farklılık artar (Garg vd, 2024).

Şimdi uygulamalarda hem ait olma ve ait olmama derecelerinin etkisinin incelenmesinde hem de kriter ağırlıklarının dikkate alınması amacıyla parametrik bir sezgisel çapraz-entropi ölçüsü verilecektir.

Tanım 4.3 D ve E , Δ üzerinde iki sezgisel bulanık küme, $\varrho = (\varrho_1, \dots, \varrho_l)$ bileşenleri sıfırdan farklı bir ağırlık vektörü ve $p, q \in [0, 1]$ olsun. D ve E arasında ağırlıklı parametrik

bir düzenlenmiş sezgisel bulanık çapraz-entropi ölçüsü

$$CE_{Y_{p,q}}^{\varrho}(D, E) = \sum_{t=1}^l \varrho_t \left[\tau_D^p(\delta_t) \ln \left(\frac{\tau_D^p(\delta_t)}{\frac{1}{2}(\tau_D^p(\delta_t) + \tau_E^p(\delta_t))} \right)^p + \nu_D^q(\delta_t) \ln \left(\frac{\nu_D^q(\delta_t)}{\frac{1}{2}(\nu_D^q(\delta_t) + \nu_E^q(\delta_t))} \right)^q + \left(1 - p\tau_D^p(\delta_t) - q\nu_D^q(\delta_t) \right) \ln \frac{1 - p\tau_D^p(\delta_t) - q\nu_D^q(\delta_t)}{\frac{1}{2} \left(1 - p\tau_D^p(\delta_t) - q\nu_D^q(\delta_t) + \left(1 - p\tau_E^p(\delta_t) - q\nu_E^q(\delta_t) \right) \right)} \right]$$

ile tanımlanır. Özellikle $\varrho = (\frac{1}{l}, \dots, \frac{1}{l})$ ve $p = q = 1$ seçilirse, bu durumda $lCE_{Y_{p,q}}^{\varrho}(D, E) = CE_Y(D, E)$ olduğu görülür (Garg vd, 2024).

Teorem 4.2 D ve E , Δ üzerinde iki sezgisel bulanık küme ve $\varrho = (\varrho_1, \dots, \varrho_l)$ bileşenleri sıfırdan farklı bir ağırlık vektörü olsun. $CE_{Y_{p,q}}^{\varrho}$ fonksiyonu aşağıdaki özellikleri sağlar:

- (a) Eğer $p = q$ ise $CE_{Y_{p,q}}^{\varrho}(D^c, E^c) = CE_{Y_{p,q}}^{\varrho}(D, E)$.
- (b) $0 \leq CE_{Y_{p,q}}^{\varrho}(D, E) \leq \ln 2$.
- (c) $D = E$ olması için gerek ve yeter koşul $CE_{Y_{p,q}}^{\varrho}(D, E) = 0$ olmasıdır (Garg vd, 2024).

İspat. (a-c) Teorem 3.1'in ispatına benzer şekilde ispat tamamlanır.

(b) $h(\delta) = -\ln \delta$ ile tanımlı h fonksiyonu konveks ve her $t \in \{1, \dots, l\}$ için $\tau_D(\delta_t) + \nu_D(\delta_t) + \kappa_D(\delta_t) = 1$ olduğundan Jensen eşitsizliğinden

$$\begin{aligned} CE_{Y_{p,q}}^{\varrho}(D, E) &= \sum_{t=1}^l \varrho_t \left[p\tau_D^p(\delta_t) \left(-\ln \frac{\tau_D^p(\delta_t) + \tau_E^p(\delta_t)}{2\tau_D^p(\delta_t)} \right) + q\nu_D^q(\delta_t) \left(-\ln \frac{\nu_D^q(\delta_t) + \nu_E^q(\delta_t)}{2\nu_D^q(\delta_t)} \right) + \left(1 - p\tau_D^p(\delta_t) - q\nu_D^q(\delta_t) \right) \left(-\ln \frac{1 - p\tau_D^p(\delta_t) - q\nu_D^q(\delta_t) + \left(1 - p\tau_E^p(\delta_t) - q\nu_E^q(\delta_t) \right)}{2 \left(1 - p\tau_D^p(\delta_t) - q\nu_D^q(\delta_t) \right)} \right) \right] \\ &\geq -\sum_{t=1}^l \ln \left[p\tau_D^p(\delta_t) \frac{\tau_D^p(\delta_t) + \tau_E^p(\delta_t)}{2\tau_D^p(\delta_t)} + q\nu_D^q(\delta_t) \frac{\nu_D^q(\delta_t) + \nu_E^q(\delta_t)}{2\nu_D^q(\delta_t)} + \left(1 - p\tau_D^p(\delta_t) - q\nu_D^q(\delta_t) \right) \frac{1 - p\tau_D^p(\delta_t) - q\nu_D^q(\delta_t) + \left(1 - p\tau_E^p(\delta_t) - q\nu_E^q(\delta_t) \right)}{2 \left(1 - p\tau_D^p(\delta_t) - q\nu_D^q(\delta_t) \right)} \right] \\ &= -\sum_{t=1}^l \varrho_t \ln \left[\frac{p\tau_D^p(\delta_t) + p\tau_E^p(\delta_t) + q\nu_D^q(\delta_t) + q\nu_E^q(\delta_t) + 1 - p\tau_D^p(\delta_t) - q\nu_D^q(\delta_t) + 1 - p\tau_E^p(\delta_t) - q\nu_E^q(\delta_t)}{2} \right] \\ &= -\sum_{t=1}^l \varrho_t \ln 1 \\ &= 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Diğer taraftan $p, q \in [0, 1]$ için $1 - p\tau^p - qv^q \geq 0$

$$\begin{aligned}
CE_{Y_{p,q}}^g(D, E) &= \sum_{t=1}^l \varrho_t \left[\tau_D^p(\delta_t) \ln \left(\frac{2\tau_D^p(\delta_t)}{\tau_D^p(\delta_t) + \tau_E^p(\delta_t)} \right)^p + v_D^q(\delta_t) \ln \left(\frac{2v_D^q(\delta_t)}{v_D^q(\delta_t) + v_E^q(\delta_t)} \right)^q + \right. \\
&\quad \left. (1 - p\tau_D^p(\delta_t) - qv_D^q(\delta_t)) \ln \frac{2(1 - p\tau_D^p(\delta_t) - qv_D^q(\delta_t))}{1 - p\tau_D^p(\delta_t) - qv_D^q(\delta_t) + (1 - p\tau_E^p(\delta_t) - qv_E^q(\delta_t))} \right] \\
&\leq \sum_{t=1}^l \varrho_t \left[(p\tau_D^p(\delta_t) + qv_D^q(\delta_t) + 1 - p\tau_D^p(\delta_t) - qv_D^q(\delta_t)) \ln 2 \right] \\
&= \ln 2
\end{aligned}$$

olduğu görülür. Sonuç olarak $0 \leq CE_{Y_{p,q}}^g(D, E) \leq \ln 2$ olur. ■

$CE_{Y_{p,q}}^g$ simetrik olmadığından dolayı simetrik bir formu aşağıdaki gibi verilir.

Tanım 4.4 D ve E iki sezgisel bulanık küme ve $0 \leq p, q \leq 1$ olsun. $CE_{Y_{p,q}}^g$ çapraz-entropi ölçüsü tabanlı D ve E arasında bir simetrik fark bilgi ölçüsü

$$CE_{Y_{p,q}}^{g*}(D, E) = \frac{1}{2 \ln 2} \left(CE_{Y_{p,q}}^g(D, E) + CE_{Y_{p,q}}^g(E, D) \right)$$

ile verilir. $0 \leq CE_{Y_{p,q}}^{g*}(D, E) \leq 1$ olduğu kolayca görülür. $CE_{Y_{p,q}}^{g*}(D, E)$ değeri büyüdükçe, D ve E arasındaki farklılık artar (Garg vd, 2024).

5. CHOQUET SEZGİSEL BULANIK ÇAPRAZ-ENTROPİ ÖLÇÜLERİ

Bu bölümde, Choquet integrali dikkate alınarak Bölüm 4'te tanımlanan ağırlıklı sezgisel bulanık çapraz-entropi ölçülerinin genelleştirilmeleri tanımlanacaktır. Bu şekilde, elemanlar arasındaki etkileşimler göz önünde bulundurularak çok kriterli karar verme problemlerinde daha hassas sonuçlar elde edilecektir.

Tanım 5.1 D ve E , Δ üzerinde iki sezgisel bulanık küme ve $\rho : 2^\Delta \rightarrow [0, 1]$ kesin pozitif bir bulanık ölçü olsun. Her $t = 1, \dots, l$ için

$$f_{D,E}(\delta_t) = \frac{1}{\ln 2} \left[\tau_D(\delta_t) \ln \frac{\tau_D(\delta_t)}{\frac{1}{2}(\tau_D(\delta_t) + \tau_E(\delta_t))} + v_D(\delta_t) \ln \frac{v_D(\delta_t)}{\frac{1}{2}(v_D(\delta_t) + v_E(\delta_t))} + \kappa_D(\delta_t) \ln \frac{\kappa_D(\delta_t)}{\frac{1}{2}(\kappa_D(\delta_t) + \kappa_E(\delta_t))} \right]$$

olmak üzere D ve E arasında Choquet düzenlenmiş sezgisel bulanık çapraz-entropi ölçüsü

$$CE_Y^{(C,\rho)}(D, E) := (C) \int_{\Delta} f_{D,E} d\rho$$

ile tanımlanır (Garg vd, 2024).

Teorem 5.1 D ve E , Δ üzerinde iki sezgisel bulanık küme ve $\rho : 2^\Delta \rightarrow [0, 1]$ kesin pozitif bir bulanık ölçü olsun. $CE_Y^{(C,\rho)}$ fonksiyonu aşağıdaki özellikleri gerçekleştirir:

- (a) $CE_Y^{(C,\rho)}(D^c, E^c) = CE_Y^{(C,\rho)}(D, E)$.
- (b) $0 \leq CE_Y^{(C,\rho)}(D, E) \leq 1$.
- (c) $D = E$ olması için gerek ve yeter koşul $CE_Y^{(C,\rho)}(D, E) = 0$ olmasıdır (Garg vd, 2024).

İspat.

- (a) Teorem 3.1'in ispatına benzer şekilde ispat tamamlanır.
- (b) Öncelikle $f_{D,E}(\delta_t) \geq 0$ olduğunu gösterelim. $h(\delta) = -\ln \delta$ ile tanımlı h fonksiyonu konveks ve her $t \in \{1, \dots, l\}$ için $\tau_D(\delta_t) + v_D(\delta_t) + \kappa_D(\delta_t) = 1$ olduğundan

Jensen eşitsizliğinden

$$\begin{aligned}
f_{D,E}(\delta_t) &= \frac{1}{\ln 2} \left[\tau_D(\delta_t) \left(-\ln \frac{\tau_D(\delta_t) + \tau_E(\delta_t)}{2\tau_D(\delta_t)} \right) + \nu_D(\delta_t) \left(-\ln \frac{\nu_D(\delta_t) + \nu_E(\delta_t)}{2\nu_D(\delta_t)} \right) \right. \\
&\quad \left. + \kappa_D(\delta_t) \left(-\ln \frac{\kappa_D(\delta_t) + \kappa_E(\delta_t)}{2\kappa_D(\delta_t)} \right) \right] \\
&\geq \frac{1}{\ln 2} \left[-\ln \left(\frac{\tau_D(\delta_t) + \tau_E(\delta_t) + \nu_D(\delta_t) + \nu_E(\delta_t) + \kappa_D(\delta_t) + \kappa_E(\delta_t)}{2} \right) \right] \\
&= 0
\end{aligned}$$

elde edilir. Diğer taraftan

$$\begin{aligned}
f_{D,E}(\delta_t) &= \frac{1}{\ln 2} \left[\tau_D(\delta_t) \ln \frac{\tau_D(\delta_t)}{\frac{1}{2}(\tau_D(\delta_t) + \tau_E(\delta_t))} + \nu_D(\delta_t) \ln \frac{\nu_D(\delta_t)}{\frac{1}{2}(\nu_D(\delta_t) + \nu_E(\delta_t))} + \right. \\
&\quad \left. \kappa_D(\delta_t) \ln \frac{\kappa_D(\delta_t)}{\frac{1}{2}(\kappa_D(\delta_t) + \kappa_E(\delta_t))} \right] \\
&= \frac{1}{\ln 2} \left[\tau_D(\delta_t) \ln \frac{2\tau_D(\delta_t)}{\tau_D(\delta_t) + \tau_E(\delta_t)} + \nu_D(\delta_t) \ln \frac{2\nu_D(\delta_t)}{\nu_D(\delta_t) + \nu_E(\delta_t)} + \right. \\
&\quad \left. \kappa_D(\delta_t) \ln \frac{2\kappa_D(\delta_t)}{\kappa_D(\delta_t) + \kappa_E(\delta_t)} \right] \\
&\leq \frac{1}{\ln 2} \left[(\tau_D(\delta_t) + \nu_D(\delta_t) + \kappa_D(\delta_t)) \ln 2 \right] \\
&= 1
\end{aligned}$$

olduğu görülür. Her $t \in \{1, \dots, l\}$ için $0 \leq f_{D,E}(\delta_t) \leq 1$ ve Choquet integrali monoton olduğundan Önerme 2.1'den $0 \leq CE_Y^{(C,\rho)}(D, E) \leq 1$ elde edilir.

(c) $D = E$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda her $t \in \{1, \dots, l\}$ için

$$\begin{aligned}
f_{D,E}(\delta_t) &= \frac{1}{\ln 2} \left[\tau_D(\delta_t) \ln \frac{\tau_D(\delta_t)}{\frac{1}{2}(\tau_D(\delta_t) + \tau_E(\delta_t))} + \nu_D(\delta_t) \ln \frac{\nu_D(\delta_t)}{\frac{1}{2}(\nu_D(\delta_t) + \nu_E(\delta_t))} + \right. \\
&\quad \left. \kappa_D(\delta_t) \ln \frac{\kappa_D(\delta_t)}{\frac{1}{2}(\kappa_D(\delta_t) + \kappa_E(\delta_t))} \right] \\
&= 0
\end{aligned}$$

olup $CE_Y^{(C,\rho)}(D, E) = 0$ elde edilir. Diğer taraftan $CE_Y^{(C,\rho)}(D, E) = 0$ olduğunu varsayalım. ρ kesin pozitif bir bulanık ölçü olduğundan her $t \in \{1, \dots, l\}$ için

$f_{D,E}(\delta_t) = 0$ olduğu görülür. Dolayısıyla Jensen eşitsiğinden her $t \in \{1, \dots, l\}$ için

$$\begin{aligned}
0 &= \tau_D(\delta_t) \left(-\ln \frac{\tau_D(\delta_t) + \tau_E(\delta_t)}{2\tau_D(\delta_t)} \right) + \nu_D(\delta_t) \left(-\ln \frac{\nu_D(\delta_t) + \nu_E(\delta_t)}{2\nu_D(\delta_t)} \right) + \\
&\quad \kappa_D(\delta_t) \left(-\ln \frac{\kappa_D(\delta_t) + \kappa_E(\delta_t)}{2\kappa_D(\delta_t)} \right) \\
&\geq -\ln \left(\frac{\tau_D(\delta_t) + \tau_E(\delta_t) + \nu_D(\delta_t) + \nu_E(\delta_t) + \kappa_D(\delta_t) + \kappa_E(\delta_t)}{2} \right) \\
&= 0
\end{aligned}$$

gerçeklenir. Bunun olması için gerek ve yeter koşul her $t \in \{1, \dots, l\}$ için c_t bir sabit olmak üzere

$$c_t = \frac{\tau_D(\delta_t) + \tau_E(\delta_t)}{2\tau_D(\delta_t)} = \frac{\nu_D(\delta_t) + \nu_E(\delta_t)}{2\nu_D(\delta_t)} = \frac{\kappa_D(\delta_t) + \kappa_E(\delta_t)}{2\kappa_D(\delta_t)}$$

gerçeklenmesidir. Bu sistem çözümlerse her $t \in \{1, \dots, l\}$ için $c_t = 1$ elde edilir. Sonuç olarak her $t \in \{1, \dots, l\}$ için $\tau_D(\delta_t) = \tau_E(\delta_t)$ ve $\nu_D(\delta_t) = \nu_E(\delta_t)$ olup $D = E$ olduğu görülür. ■

Tanım 5.2 D ve E , Δ üzerinde iki sezgisel bulanık küme ve $\rho : 2^\Delta \rightarrow [0, 1]$ kesin pozitif bir bulanık ölçü olsun. $CE_Y^{(C,\rho)}$ çapraz-entropi ölçüsü tabanlı D ve E arasında bir simetrik fark bilgi ölçüsü

$$CE_Y^{(C,\rho)*}(D, E) = \frac{1}{2} \left(CE_Y^{(C,\rho)}(D, E) + CE_Y^{(C,\rho)}(E, D) \right)$$

ile tanımlanır. $0 \leq CE_Y^{(C,\rho)*}(D, E) \leq 1$ olduğu kolayca görülür. $CE_Y^{(C,\rho)*}(D, E)$ değeri büyüdükçe, D ve E arasındaki fark artar (Garg vd, 2024).

Şimdi ait olma ve ait olmama derecelerinin etkisini gözlemlemek amacıyla parametrik bir çapraz-entropi ölçüsü tanımı verilecektir.

Tanım 5.3 D ve E , Δ üzerinde iki sezgisel bulanık küme, $\rho : 2^\Delta \rightarrow [0, 1]$ kesin pozitif bir bulanık ölçü ve $p, q \in [0, 1]$ olsun. Her $t = 1, \dots, l$ için

$$\begin{aligned}
f_{D,E}(\delta_t) &= \frac{1}{\ln 2} \left[\tau_D^p(\delta_t) \ln \left(\frac{\tau_D^p(\delta_t)}{\frac{1}{2}(\tau_D^p(\delta_t) + \tau_E^p(\delta_t))} \right)^p + \nu_D^q(\delta_t) \ln \left(\frac{\nu_D^q(\delta_t)}{\frac{1}{2}(\nu_D^q(\delta_t) + \nu_E^q(\delta_t))} \right)^q + \right. \\
&\quad \left. (1 - p\tau_D^p(\delta_t) - q\nu_D^q(\delta_t)) \ln \frac{1 - p\tau_D^p(\delta_t) - q\nu_D^q(\delta_t)}{\frac{1}{2}(1 - p\tau_D^p(\delta_t) - q\nu_D^q(\delta_t) + (1 - p\tau_E^p(\delta_t) - q\nu_E^q(\delta_t)))} \right]
\end{aligned}$$

olmak üzere Choquet parametrik düzenlenmiş bir sezgisel bulanık çapraz-entropi ölçüsü

$$CE_{Y_{p,q}}^{(C,\rho)}(D, E) := (C) \int_{\Delta} f_{D,E} d\rho$$

ile ifade edilir (Garg vd, 2024).

Teorem 5.2 D ve E , Δ üzerinde iki sezgisel bulanık küme, $\rho : 2^{\Delta} \rightarrow [0, 1]$ kesin pozitif bir bulanık ölçü ve $0 \leq p, q \leq 1$ olsun. $CE_{Y_{p,q}}^{(C,\rho)}$ fonksiyonu aşağıdaki özellikleri gerçekleştirir.

(a) Eğer $p = q$ ise $CE_{Y_{p,q}}^{(C,\rho)}(D^c, E^c) = CE_{Y_{p,q}}^{(C,\rho)}(D, E)$.

(b) $0 \leq CE_{Y_{p,q}}^{(C,\rho)}(D, E) \leq 1$.

(c) $D = E$ olması gerek ve yeter koşul $CE_{Y_{p,q}}^{(C,\rho)}(D, E) = 0$ olmasıdır (Garg vd, 2024).

İspat. (a-c) Teorem 3.1'in ispatına benzer şekilde ispat tamamlanır.

(b) Öncelikle $f_{D,E}(\delta_t) \geq 0$ olduğunu göstereyim. $h(\delta) = -\ln \delta$ ile tanımlı h fonksiyonu konveks ve her $t \in \{1, \dots, l\}$ için $\tau_D(\delta_t) + \nu_D(\delta_t) + \kappa_D(\delta_t) = 1$ olduğundan Jensen eşitsizliğinden

$$\begin{aligned} f_{D,E}(\delta_t) &= \frac{1}{\ln 2} \left[\tau_D^p(\delta_t) \ln \left(\frac{\tau_D^p(\delta_t)}{\frac{1}{2}(\tau_D^p(\delta_t) + \tau_E^p(\delta_t))} \right)^p + \nu_D^q(\delta_t) \ln \left(\frac{\nu_D^q(\delta_t)}{\frac{1}{2}(\nu_D^q(\delta_t) + \nu_E^q(\delta_t))} \right)^q + \right. \\ &\quad \left. \left(1 - p\tau_D^p(\delta_t) - q\nu_D^q(\delta_t) \right) \ln \frac{1 - p\tau_D^p(\delta_t) - q\nu_D^q(\delta_t)}{\frac{1}{2}(1 - p\tau_D^p(\delta_t) - q\nu_D^q(\delta_t) + (1 - p\tau_E^p(\delta_t) - q\nu_E^q(\delta_t)))} \right] \\ &\geq \frac{1}{\ln 2} \left\{ -\ln \left[p\tau_D^p(\delta_t) \frac{\tau_D^p(\delta_t) + \tau_E^p(\delta_t)}{2\tau_D^p(\delta_t)} + q\nu_D^q(\delta_t) \frac{\nu_D^q(\delta_t) + \nu_E^q(\delta_t)}{2\nu_D^q(\delta_t)} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \left(1 - p\tau_D^p(\delta_t) - q\nu_D^q(\delta_t) \right) \frac{1 - p\tau_D^p(\delta_t) - q\nu_D^q(\delta_t) + (1 - p\tau_E^p(\delta_t) - q\nu_E^q(\delta_t))}{2(1 - p\tau_D^p(\delta_t) - q\nu_D^q(\delta_t))} \right] \right\} \\ &= \frac{1}{\ln 2} \left\{ -\ln \left[\frac{p\tau_D^p(\delta_t) + p\tau_E^p(\delta_t) + q\nu_D^q(\delta_t) + q\nu_E^q(\delta_t)}{2} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \frac{1 - p\tau_D^p(\delta_t) - q\nu_D^q(\delta_t) + 1 - p\tau_E^p(\delta_t) - q\nu_E^q(\delta_t)}{2} \right] \right\} \\ &= \frac{1}{\ln 2} (-\ln(1)) \\ &= 0 \end{aligned}$$

bulunur. Öte yandan $p, q \in [0, 1]$ için $1 - p\tau^p - qv^q \geq 0$ olduğundan

$$\begin{aligned}
f_{D,E}(\delta_t) &= \frac{1}{\ln 2} \left[\tau_D^p(\delta_t) \ln \left(\frac{\tau_D^p(\delta_t)}{\frac{1}{2}(\tau_D^p(\delta_t) + \tau_E^p(\delta_t))} \right)^p + v_D^q(\delta_t) \ln \left(\frac{v_D^q(\delta_t)}{\frac{1}{2}(v_D^q(\delta_t) + v_E^q(\delta_t))} \right)^q + \right. \\
&\quad \left. (1 - p\tau_D^p(\delta_t) - qv_D^q(\delta_t)) \ln \frac{1 - p\tau_D^p(\delta_t) - qv_D^q(\delta_t)}{\frac{1}{2}(1 - p\tau_D^p(\delta_t) - qv_D^q(\delta_t) + (1 - p\tau_E^p(\delta_t) - qv_E^q(\delta_t)))} \right] \\
&= \frac{1}{\ln 2} \left[\tau_D^p(\delta_t) \ln \left(\frac{2\tau_D^p(\delta_t)}{\tau_D^p(\delta_t) + \tau_E^p(\delta_t)} \right)^p + v_D^q(\delta_t) \ln \left(\frac{2v_D^q(\delta_t)}{v_D^q(\delta_t) + v_E^q(\delta_t)} \right)^q + \right. \\
&\quad \left. (1 - p\tau_D^p(\delta_t) - qv_D^q(\delta_t)) \ln \frac{2(1 - p\tau_D^p(\delta_t) - qv_D^q(\delta_t))}{1 - p\tau_D^p(\delta_t) - qv_D^q(\delta_t) + (1 - p\tau_E^p(\delta_t) - qv_E^q(\delta_t))} \right] \\
&\leq \frac{1}{\ln 2} \left[(p\tau_D^p(\delta_t) + qv_D^q(\delta_t) + 1 - p\tau_D^p(\delta_t) - qv_D^q(\delta_t)) \ln 2 \right] \\
&= 1
\end{aligned}$$

olur. Her $t \in \{1, \dots, l\}$ için $0 \leq f_{D,E}(\delta_t) \leq 1$ ve Choquet integrali monoton olduğundan Önerme 2.1'den $0 \leq CE_{Y_{p,q}}^{(C,\rho)}(D, E) \leq 1$ elde edilir. ■

$CE_{Y_{p,q}}^{(C,\rho)}$ çapraz-entropi ölçüsü simetrik olmadığından simetrik bir formu aşağıdaki gibi verilir.

Tanım 5.4 D ve E , Δ üzerinde iki sezgisel bulanık küme, $\rho : 2^\Delta \rightarrow [0, 1]$ kesin pozitif bir bulanık ölçü ve $0 \leq p, q \leq 1$ olsun. $CE_{Y_{p,q}}^{(C,\rho)}$ çapraz-entropi ölçüsü tabanlı bir simetrik fark bilgi ölçüsü

$$CE_{Y_{p,q}}^{(C,\rho)*}(D, E) = \frac{1}{2} \left(CE_{Y_{p,q}}^{(C,\rho)}(D, E) + CE_{Y_{p,q}}^{(C,\rho)}(E, D) \right)$$

ile tanımlanır. $0 \leq CE_{Y_{p,q}}^{(C,\rho)*}(D, E) \leq 1$ olduğu kolayca görülür. $CE_{Y_{p,q}}^{(C,\rho)*}(D, E)$ değeri büyüdükçe, D ve E arasındaki fark artar (Garg vd, 2024).

Tanım 5.5 D ve E , Δ üzerinde iki sezgisel bulanık küme, $\rho : 2^\Delta \rightarrow [0, 1]$ kesin pozitif bir bulanık ölçü ve $g_\alpha(\delta) = \delta^\alpha$ ($\alpha > 0$) olsun. Her $t = 1, \dots, l$ için

$$\begin{aligned}
f_{D,E}(\delta_t) &= \frac{1}{\ln 2} \left[\tau_D(\delta_t) \ln \frac{\tau_D(\delta_t)}{\frac{1}{2}(\tau_D(\delta_t) + \tau_E(\delta_t))} + v_D(\delta_t) \ln \frac{v_D(\delta_t)}{\frac{1}{2}(v_D(\delta_t) + v_E(\delta_t))} \right. \\
&\quad \left. + \kappa_D(\delta_t) \ln \frac{\kappa_D(\delta_t)}{\frac{1}{2}(\kappa_D(\delta_t) + \kappa_E(\delta_t))} \right]
\end{aligned}$$

olmak üzere d -Choquet düzenlenmiş bir sezgisel bulanık çapraz-entropi ölçüsü

$$CE_Y^{(C_{sg_\alpha}, \rho)}(D, E) := \left((C_{sg_\alpha}) \int_{\Delta} f_{D,E} d\rho \right)^{\frac{1}{\alpha}}$$

ile tanımlanır (Bozdoğan vd, 2024).

Teorem 5.3 D ve E , Δ üzerinde iki sezgisel bulanık küme, $\rho : 2^\Delta \rightarrow [0, 1]$ kesin pozitif bir bulanık ölçü ve $g_\alpha(\delta) = \delta^\alpha$ ($\alpha > 0$) olsun. $CE_Y^{(C_{sg\alpha}, \rho)}$ fonksiyonu aşağıdaki özellikleri gerçekler.

(a) $CE_Y^{(C_{sg\alpha}, \rho)}(D^c, E^c) = CE_Y^{(C_{sg\alpha}, \rho)}(D, E)$.

(b) $0 \leq CE_Y^{(C_{sg\alpha}, \rho)}(D, E) \leq 1$.

(c) $D = E$ olması için gerek ve yeter koşul $CE_Y^{(C_{sg\alpha}, \rho)}(D, E) = 0$ olmasıdır (Bozyiğit vd, 2024).

İspat. (a-c) Teorem 3.1'in ispatına benzer şekilde ispat tamamlanır.

(b) Teorem 5.1'in ispatına benzer olarak her $t \in \{1, \dots, l\}$ için $0 \leq f_{D,E}(\delta_t) \leq 1$ elde edilir. Dolayısıyla Teorem 2.2 ve Teorem 2.3'ten $0 \leq CE_Y^{(C_{sg\alpha}, \rho)}(D, E) \leq 1$ olduğu görülür. ■

Tanım 5.6 D ve E iki sezgisel bulanık küme ve $\rho : 2^\Delta \rightarrow [0, 1]$ kesin pozitif bir bulanık ölçü ve $g_\alpha(\delta) = \delta^\alpha$ ($\alpha > 0$) olsun. $CE_Y^{(C_{sg\alpha}, \rho)}$ çapraz-entropi ölçüsü tabanlı bir simetrik fark bilgi ölçüsü

$$CE_Y^{(C_{sg\alpha}, \rho)^*}(D, E) = \frac{1}{2} \left(CE_Y^{(C_{sg\alpha}, \rho)}(D, E) + CE_Y^{(C_{sg\alpha}, \rho)}(E, D) \right).$$

ile tanımlanır. $0 \leq CE_Y^{(C_{sg\alpha}, \rho)^*}(D, E) \leq 1$ olduğu kolayca görülür. $CE_Y^{(C_{sg\alpha}, \rho)^*}(D, E)$ değeri büyüdükçe D ve E arasındaki farklılık artar (Bozyiğit vd, 2024).

Tanım 5.7 D ve E , Δ üzerinde iki sezgisel bulanık küme, $\rho : 2^\Delta \rightarrow [0, 1]$ kesin pozitif bir bulanık ölçü, $g_\alpha(\delta) = \delta^\alpha$ ($\alpha > 0$) ve $p, q \in [0, 1]$ olsun. Her $t = 1, \dots, l$ için

$$f_{D,E}(\delta_t) = \frac{1}{\ln 2} \left[\tau_D^p(\delta_t) \ln \left(\frac{\tau_D^p(\delta_t)}{\frac{1}{2}(\tau_D^p(\delta_t) + \tau_E^p(\delta_t))} \right)^p + v_D^q(\delta_t) \ln \left(\frac{v_D^q(\delta_t)}{\frac{1}{2}(v_D^q(\delta_t) + v_E^q(\delta_t))} \right)^q + \right. \\ \left. (1 - p\tau_D^p(\delta_t) - qv_D^q(\delta_t)) \ln \frac{1 - p\tau_D^p(\delta_t) - qv_D^q(\delta_t)}{\frac{1}{2}(1 - p\tau_D^p(\delta_t) - qv_D^q(\delta_t) + (1 - p\tau_E^p(\delta_t) - qv_E^q(\delta_t)))} \right]$$

olmak üzere d -Choquet parametrik düzenlenmiş sezgisel bulanık çapraz-entropi ölçüsü

$$CE_{Y,p,q}^{(C_{sg\alpha}, \rho)}(D, E) := \left((C_{sg\alpha}) \int_{\Delta} f_{D,E} d\rho \right)^{\frac{1}{\alpha}}$$

ile tanımlanır (Bozyiğit vd, 2024).

Teorem 5.4 D ve E , Δ üzerinde iki sezgisel bulanık küme, $\rho : 2^\Delta \rightarrow [0, 1]$ kesin pozitif bir bulanık ölçü, $g_\alpha(\delta) = \delta^\alpha$ ($\alpha > 0$) ve $p, q \in [0, 1]$ olsun. $CE_{Y_{p,q}}^{(C_{sg_\alpha, \rho})}$ fonksiyonu aşağıdaki özellikleri gerçekler:

- (a) Eğer $p = q$ ise $CE_{Y_{p,q}}^{(C_{sg_\alpha, \rho})}(D^c, E^c) = CE_{Y_{p,q}}^{(C_{sg_\alpha, \rho})}(D, E)$.
- (b) $0 \leq CE_{Y_{p,q}}^{(C_{sg_\alpha, \rho})}(D, E) \leq 1$.
- (c) $D = E$ olması için gerek ve yeter koşul $CE_{Y_{p,q}}^{(C_{sg_\alpha, \rho})}(D, E) = 0$ olmasıdır (Bozyiğit vd, 2024).

İspat. (a-c) Teorem 3.1'in ispatına benzer şekilde ispat tamamlanır.

(b) Teorem 5.2'in ispatına benzer olarak her $t \in \{1, \dots, l\}$ için $0 \leq f_{D,E}(\delta_t) \leq 1$ elde edilir. Dolayısıyla Teorem 2.2 ve Teorem 2.3 den $0 \leq CE_{Y_{p,q}}^{(C_{sg_\alpha, \rho})}(D, E) \leq 1$ olduğu görülür (Bozyiğit vd, 2024). ■

Tanım 5.8 D ve E iki sezgisel bulanık küme ve $\rho : 2^\Delta \rightarrow [0, 1]$ kesin pozitif bir bulanık ölçü, $g_\alpha(\delta) = \delta^\alpha$ ($\alpha > 0$) ve $p, q \in [0, 1]$ olsun. $CE_{Y_{p,q}}^{(C_{sg_\alpha, \rho})}$ çapraz-entropi ölçüsü tabanlı bir simetrik fark bilgi ölçüsü

$$CE_{Y_{p,q}}^{(C_{sg_\alpha, \rho})^*}(D, E) = \frac{1}{2} \left(CE_{Y_{p,q}}^{(C_{sg_\alpha, \rho})}(D, E) + CE_{Y_{p,q}}^{(C_{sg_\alpha, \rho})}(E, D) \right)$$

ile tanımlanır. $0 \leq CE_{Y_{p,q}}^{(C_{sg_\alpha, \rho})^*}(D, E) \leq 1$ olduğu kolayca görülür. $CE_{Y_{p,q}}^{(C_{sg_\alpha, \rho})^*}(D, E)$ büyüdükçe D ve E arasındaki farklılık artar (Bozyiğit vd, 2024).

6. ÇAPRAZ-ENTROPİ ÖLÇÜSÜ TABANLI GENELLEŞTİRİLMİŞ BİR SEZGİSEL BULANIK TOPSIS

Çok kriterli karar verme metotları, alternatifleri değerlendirme yoluyla çeşitli karar verme problemlerini çözmek için yaygın olarak kullanılmaktadır. İlk olarak Hwang ve Yoon (1981) tarafından geliştirilen TOPSIS, sık kullanılan çok kriterli karar verme yaklaşımlarından biridir. Bu bölümde, tezde tanımlanan sezgisel bulanık çapraz-entropi ölçüleri temel alınarak genelleştirilmiş bir sezgisel bulanık TOPSIS verilecektir.

6.1 Genelleştirilmiş Bir Sezgisel Bulanık TOPSIS

TOPSIS'in temel amacı, en iyi çözümün pozitif ideal çözüme daha yakın ve negatif çözüme daha uzak olmasıdır. Bu kısımda, çok kriterli karar verme için çapraz-entropi ölçüsüne dayalı bir genişletilmiş sezgisel bulanık TOPSIS aşağıdaki gibi verilir:

- **Adım 1:** Karar probleminin bileşenlerinin belirlenmesi:

$D = \{D_1, \dots, D_m\}$ ve $K = \{K_1, \dots, K_n\}$ çok kriterli karar verme probleminde sırasıyla alternatiflerin ve kriterlerin kümesini temsil etsin.

- **Adım 2:** Bulanık karar matrisinin oluşturulması:

Karar verici tarafından karar matrisi her $k = 1, \dots, m$ ve $r = 1, \dots, n$ için $\zeta_{kr} = \langle \tau_{\zeta_{kr}}, \nu_{\zeta_{kr}} \rangle$ bir sezgisel bulanık değer olmak üzere

$$D = \begin{bmatrix} \zeta_{11} & \cdots & \zeta_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \zeta_{m1} & \cdots & \zeta_{mn} \end{bmatrix}$$

oluşturulur.

- **Adım 3:** Normalize karar matrisinin oluşturulması:

Her $k = 1, \dots, m$ ve $r = 1, \dots, n$ için $\zeta_{kr}^c = \langle \nu_{\zeta_{kr}}, \tau_{\zeta_{kr}} \rangle$ olmak üzere

$$\xi_{kr} = \begin{cases} \zeta_{kr} & , \quad \zeta_{kr} \text{ fayda kriteri} \\ \zeta_{kr}^c & , \quad \zeta_{kr} \text{ maliyet kriteri} \end{cases}$$

olsun. Bu durumda normalize karar matrisi

$$N = \begin{bmatrix} \xi_{11} & \cdots & \xi_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \xi_{m1} & \cdots & \xi_{mn} \end{bmatrix}$$

olarak ifade edilir.

- **Adım 4:** Skor matrisinin elde edilmesi:

Bir Y skor fonksiyonu kullanılarak N normalize karar matrisinden

$$\mathcal{SC} = \begin{bmatrix} Y(\xi_{11}) & \cdots & Y(\xi_{1n}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ Y(\xi_{m1}) & \cdots & Y(\xi_{mn}) \end{bmatrix}$$

ile ifade edilen \mathcal{SC} skor matrisi oluşturulur.

- **Adım 5:** Kriter ağırlıklarının tespiti:

\mathcal{SC} skor matrisine göre kriterlerin ağırlığını elde etmek için bir optimizasyon modeli \mathcal{H} kriterler hakkında kısmi bilgi olmak üzere

$$\text{maks } g = \sum_{r=1}^n \sum_{k=1}^m \varrho_r Y(\xi_{kr})$$

öyleki $\varrho_r \in \mathcal{H}$

$$\sum_{r=1}^n \varrho_r = 1$$

ile oluşturulur. Bu optimizasyon modeli çözüldükten sonra $(\varrho_1, \dots, \varrho_n) \in [0, 1]^n$ ağırlık vektörü elde edilir.

- **Adım 6:** Pozitif ve negatif ideal çözümlerin belirlenmesi:

Adım 3'te normalize karar matrisi N 'yi kullanarak, sırasıyla pozitif ideal çözüm

$$D^+ = \left\langle \left(\max_{k \in \{1, \dots, m\}} \tau_{\xi_{k,1}}, \min_{k \in \{1, \dots, m\}} \upsilon_{\xi_{k,1}} \right), \dots, \left(\max_{k \in \{1, \dots, m\}} \tau_{\xi_{k,n}}, \min_{k \in \{1, \dots, m\}} \upsilon_{\xi_{k,n}} \right) \right\rangle$$

ve negatif ideal çözüm

$$D^- = \left\langle \left(\min_{k \in \{1, \dots, m\}} \tau_{\xi_{k,1}}, \max_{k \in \{1, \dots, m\}} \upsilon_{\xi_{k,1}} \right), \dots, \left(\min_{k \in \{1, \dots, m\}} \tau_{\xi_{k,n}}, \max_{k \in \{1, \dots, m\}} \upsilon_{\xi_{k,n}} \right) \right\rangle,$$

elde edilir.

- **Step 7:** Bir bulanık ölçünün inşası:

Choquet integralini hesaplayabilmek için bir ρ bulanık ölçü inşa edilir.

- **Adım 8:** Choquet düzenlenmiş sezgisel bulanık çapraz-entropi ölçüsünün hesaplanması:

Öncelikle her D_k ($k = 1, \dots, m$) alternatifine göre Choquet düzenlenmiş sezgisel bulanık çapraz-entropi ölçüsü $CE_Y^{(C,\rho)}$ hesaplamak için $f_{D^+, D_k}(K_r)$, $f_{D_k, D^+}(K_r)$, $f_{D^-, D_k}(K_r)$ ve $f_{D_k, D^-}(K_r)$ ($r = 1, \dots, n$) değerleri bulunur. Daha sonra her D_k ($k = 1, \dots, m$) alternatifi ile sırasıyla D^+ ve D^- arasındaki Choquet düzenlenmiş sezgisel bulanık çapraz-entropi ölçüsü hesaplanır.

- **Adım 9:** Simetrik fark bilgi ölçüsünün hesaplanması:

Choquet düzenlenmiş bulanık çapraz-entropi ölçüsüne dayalı olarak, D_k ($k = 1, \dots, m$) ile hem D^+ hem de D^- arasındaki simetrik fark bilgi ölçüsü $CE_Y^{(C,\rho)*}$ hesaplanır.

- **Adım 10:** Yakınlık katsayısının hesaplanması:

Her bir alternatif için, yakınlık katsayısı alternatif ile negatif ideal çözüm arasındaki simetrik fark bilgi ölçüsünün, alternatif ile negatif ve pozitif ideal çözümler arasındaki simetrik fark bilgi ölçüleri toplamına oranı ile hesaplanır. Yani yakınlık katsayısı d_k^* ($k = 1, \dots, m$) her bir D_k ($k = 1, \dots, m$) alternatifi için

$$d_k^* = \frac{CE_Y^{(C,\rho)*}(D^-, D_k)}{CE_Y^{(C,\rho)*}(D^+, D_k) + CE_Y^{(C,\rho)*}(D^-, D_k)} \quad (6.1)$$

ile hesaplanır.

- **Adım 11:** Alternatiflerin sıralanması:

Alternatifler, daha büyük yakınlık katsayısına sahip alternatifin daha iyi olduğu kabul edilerek sıralanır.

6.2 Bir Çok Kriterli Karar Verme Problemine Uygulama

Bu kısımda, verilen genişletilmiş TOPSIS'i uygulamak amacıyla bir şirketinin yatırım yapacağı sektörün belirlenmesine ilişkin bir problemi ele alacağız. Bu problem, Wei (2008) den adapte edilmiştir.

- **Adım 1:** Bir yatırım şirketi tarafından yatırım yapılabilecek beş şirket: D_1 bir otomobil şirketi; D_2 bir gıda şirketi; D_3 bir bilgisayar şirketi; D_4 bir savunma şirketi; D_5 bir televizyon şirketi olarak belirleniyor. Yatırım şirketi, K_1 risk analizi; K_2 büyüme analizi; K_3 sosyal-politik etki analizi; K_4 çevresel etki analizi kriterlerini kullanarak alternatiflerin değerlendirilmesini istemektedir.
- **Adım 2 ve 3:** Bir uzman tarafından, yukarıdaki dört kriter K_r ($r = 1, 2, 3, 4$) altında, sezgisel bulanık bilgi kullanılarak beş alternatif D_k ($k = 1, 2, 3, 4, 5$) değerlendirilir. Çizelge 6.1'de uzmanın karar matrisi gösterilir. K_1 , K_2 , K_3 ve K_4 kriterlerinin tümü fayda kriterleri olduğundan, normalize edilmiş karar matrisi Çizelge 6.1'deki karar matrisi ile örtüşmektedir.

Çizelge 6.1 Sezgisel bulanık karar matrisi ve normalize sezgisel karar matrisi

	K_1	K_2	K_3	K_4
D_1	$\langle 0.5, 0.4 \rangle$	$\langle 0.6, 0.3 \rangle$	$\langle 0.3, 0.6 \rangle$	$\langle 0.2, 0.7 \rangle$
D_2	$\langle 0.7, 0.3 \rangle$	$\langle 0.7, 0.2 \rangle$	$\langle 0.7, 0.2 \rangle$	$\langle 0.4, 0.5 \rangle$
D_3	$\langle 0.6, 0.4 \rangle$	$\langle 0.5, 0.4 \rangle$	$\langle 0.5, 0.3 \rangle$	$\langle 0.6, 0.3 \rangle$
D_4	$\langle 0.8, 0.1 \rangle$	$\langle 0.6, 0.3 \rangle$	$\langle 0.3, 0.4 \rangle$	$\langle 0.2, 0.6 \rangle$
D_5	$\langle 0.6, 0.2 \rangle$	$\langle 0.4, 0.3 \rangle$	$\langle 0.7, 0.1 \rangle$	$\langle 0.5, 0.3 \rangle$

- **Adım 4:** Her bir alternatifin kriterlere göre skor değerleri, Feng vd. (2008) tarafından tanımlanan sezgisel bulanık skor fonksiyonu kullanarak hesaplandığında Çizelge 6.2'de verilen skor matrisi \mathcal{SC} elde edilir.

Çizelge 6.2 Skor matrisi \mathcal{SC}

	K_1	K_2	K_3	K_4
D_1	0.55	0.65	0.35	0.25
D_2	0.70	0.75	0.75	0.45
D_3	0.60	0.55	0.60	0.65
D_4	0.85	0.65	0.45	0.30
D_5	0.70	0.55	0.80	0.60

- **Adım 5:** Çizelge 6.2'deki skor matrisi \mathcal{SC} ve kriterler hakkındaki kısmi bilgi kullanılarak

$$\begin{aligned}
 maks \quad g &= (3.4) \varrho_1 + (3.15) \varrho_2 + (2.95) \varrho_3 + (2.25) \varrho_4 \\
 \text{öyle ki} \quad &0.15 \leq \varrho_1 \leq 0.20 \quad ; \quad 0.16 \leq \varrho_2 \leq 0.18 \\
 &0.30 \leq \varrho_3 \leq 0.35 \quad ; \quad 0.30 \leq \varrho_4 \leq 0.45 \\
 &\sum_{r=1}^4 \varrho_r = 1
 \end{aligned}$$

optimizasyon modeli oluşturulur. Bu optimizasyon modeli çözüldüğünde, $\varrho = (\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3, \varrho_4) = (0.20, 0.18, 0.32, 0.30)$ ağırlık vektörü elde edilir.

- **Adım 6:** Çizelge 6.1 yardımıyla Çizelge 6.3'te gösterilen pozitif ve negatif ideal çözümler bulunur.

Çizelge 6.3 Pozitif ve negatif ideal çözümler

	K_1	K_2	K_3	K_4
D^+	$\langle 0.8, 0.1 \rangle$	$\langle 0.7, 0.2 \rangle$	$\langle 0.7, 0.1 \rangle$	$\langle 0.6, 0.3 \rangle$
D^-	$\langle 0.5, 0.4 \rangle$	$\langle 0.4, 0.4 \rangle$	$\langle 0.3, 0.6 \rangle$	$\langle 0.2, 0.7 \rangle$

- **Adım 7:** Bu adımda Takahagi (2000, 2005) tarafından önerilen algoritma ile bir λ -bulanık ölçüsü inşa edilecektir. Eğer etkileşim indeksi $\lambda = 0.75$ seçilip $\varrho = (\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3, \varrho_4) = (0.20, 0.18, 0.32, 0.30)$ ağırlık vektörü dikkate alınırsa Çizelge 6.4'te verilen bir bulanık ölçü elde edilir.

- **Adım 8:** Choquet düzenlenmiş sezgisel bulanık çapraz-entropi ölçüsünü hesaplamak için öncelikle Tanım 5.1'deki $f_{D^+, D_k}(K_r)$, $f_{D_k, D^+}(K_r)$, $f_{D^-, D_k}(K_r)$

Çizelge 6.4 λ -bulanık ölçüsü

$\rho(\emptyset) = 0$	$\rho(\{K_1\}) = 0.1579$	$\rho(\{K_2\}) = 0.1413$
$\rho(\{K_3\}) = 0.2615$	$\rho(\{K_4\}) = 0.2437$	$\rho(\{K_1, K_2\}) = 0.3159$
$\rho(\{K_1, K_3\}) = 0.4504$	$\rho(\{K_1, K_4\}) = 0.4305$	$\rho(\{K_2, K_3\}) = 0.4305$
$\rho(\{K_2, K_4\}) = 0.4109$	$\rho(\{K_3, K_4\}) = 0.5530$	$\rho(\{K_1, K_2, K_3\}) = 0.6394$
$\rho(\{K_1, K_2, K_4\}) = 0.6174$	$\rho(\{K_1, K_3, K_4\}) = 0.7764$	$\rho(\{K_2, K_3, K_4\}) = 0.7529$
$\rho(\{K_1, K_2, K_3, K_4\}) = 1$		

ve $f_{D_k, D^-}(K_r)$ ($r = 1, \dots, 4$ ve $k = 1, \dots, 5$) değerlerine ihtiyaç vardır. Bu değerler hesaplandıktan sonra, Çizelge 6.5 ve Çizelge 6.6 verilen değerler elde edilir.

Çizelge 6.5 f_{D^+, D_k} ve f_{D_k, D^+} değerleri

$f_{D^+, D_1}(K_1) = 0.107$	$f_{D^+, D_1}(K_2) = 0.010$	$f_{D^+, D_1}(K_3) = 0.242$	$f_{D^+, D_1}(K_4) = 0.130$
$f_{D^+, D_2}(K_1) = 0.075$	$f_{D^+, D_2}(K_2) = 0$	$f_{D^+, D_2}(K_3) = 0.025$	$f_{D^+, D_2}(K_4) = 0.033$
$f_{D^+, D_3}(K_1) = 0.122$	$f_{D^+, D_3}(K_2) = 0.039$	$f_{D^+, D_3}(K_3) = 0.056$	$f_{D^+, D_3}(K_4) = 0$
$f_{D^+, D_4}(K_1) = 0$	$f_{D^+, D_4}(K_2) = 0.010$	$f_{D^+, D_4}(K_3) = 0.143$	$f_{D^+, D_4}(K_4) = 0.117$
$f_{D^+, D_5}(K_1) = 0.037$	$f_{D^+, D_5}(K_2) = 0.079$	$f_{D^+, D_5}(K_3) = 0$	$f_{D^+, D_5}(K_4) = 0.017$
$f_{D_1, D^+}(K_1) = 0.082$	$f_{D_1, D^+}(K_2) = 0.010$	$f_{D_1, D^+}(K_3) = 0.188$	$f_{D_1, D^+}(K_4) = 0.140$
$f_{D_2, D^+}(K_1) = 0.106$	$f_{D_2, D^+}(K_2) = 0$	$f_{D_2, D^+}(K_3) = 0.025$	$f_{D_2, D^+}(K_4) = 0.032$
$f_{D_3, D^+}(K_1) = 0.138$	$f_{D_3, D^+}(K_2) = 0.035$	$f_{D_3, D^+}(K_3) = 0.044$	$f_{D_3, D^+}(K_4) = 0$
$f_{D_4, D^+}(K_1) = 0$	$f_{D_4, D^+}(K_2) = 0.010$	$f_{D_4, D^+}(K_3) = 0.129$	$f_{D_4, D^+}(K_4) = 0.132$
$f_{D_5, D^+}(K_1) = 0.033$	$f_{D_5, D^+}(K_2) = 0.071$	$f_{D_5, D^+}(K_3) = 0$	$f_{D_5, D^+}(K_4) = 0.014$

Çizelge 6.5 ve Çizelge 6.6'daki değerler kullanılarak alternatifler ile pozitif ve negatif ideal çözümler arasındaki Choquet düzenlenmiş sezgisel bulanık çapraz-entropi $CE_Y^{(C, \rho)}$ hesaplanır. Örneğin, D_1 alternatifi için $f_{D^+, D_1}(K_2) \leq f_{D^+, D_1}(K_1) \leq f_{D^+, D_1}(K_4) \leq f_{D^+, D_1}(K_3)$ olduğundan dolayı D^+ ile D_1 arasındaki Choquet düzenlenmiş sezgisel bulanık çapraz-entropi, $F_{(t)} := \{K_{(t)}, \dots, K_{(4)}\}$

Çizelge 6.6 f_{D^-,D_k} ve f_{D_k,D^-} değerleri

$f_{D^-,D_1}(K_1) = 0$	$f_{D^-,D_1}(K_2) = 0.031$	$f_{D^-,D_1}(K_3) = 0$	$f_{D^-,D_1}(K_4) = 0$
$f_{D^-,D_2}(K_1) = 0.046$	$f_{D^-,D_2}(K_2) = 0.065$	$f_{D^-,D_2}(K_3) = 0.130$	$f_{D^-,D_2}(K_4) = 0.039$
$f_{D^-,D_3}(K_1) = 0.025$	$f_{D^-,D_3}(K_2) = 0.015$	$f_{D^-,D_3}(K_3) = 0.066$	$f_{D^-,D_3}(K_4) = 0.140$
$f_{D^-,D_4}(K_1) = 0.082$	$f_{D^-,D_4}(K_2) = 0.031$	$f_{D^-,D_4}(K_3) = 0.058$	$f_{D^-,D_4}(K_4) = 0.016$
$f_{D^-,D_5}(K_1) = 0.039$	$f_{D^-,D_5}(K_2) = 0.013$	$f_{D^-,D_5}(K_3) = 0.187$	$f_{D^-,D_5}(K_4) = 0.120$
$f_{D_1,D^-}(K_1) = 0$	$f_{D_1,D^-}(K_2) = 0.033$	$f_{D_1,D^-}(K_3) = 0$	$f_{D_1,D^-}(K_4) = 0$
$f_{D_2,D^-}(K_1) = 0.089$	$f_{D_2,D^-}(K_2) = 0.068$	$f_{D_2,D^-}(K_3) = 0.140$	$f_{D_2,D^-}(K_4) = 0.035$
$f_{D_3,D^-}(K_1) = 0.075$	$f_{D_3,D^-}(K_2) = 0.018$	$f_{D_3,D^-}(K_3) = 0.069$	$f_{D_3,D^-}(K_4) = 0.130$
$f_{D_4,D^-}(K_1) = 0.107$	$f_{D_4,D^-}(K_2) = 0.033$	$f_{D_4,D^-}(K_3) = 0.047$	$f_{D_4,D^-}(K_4) = 0.014$
$f_{D_5,D^-}(K_1) = 0.041$	$f_{D_5,D^-}(K_2) = 0.012$	$f_{D_5,D^-}(K_3) = 0.242$	$f_{D_5,D^-}(K_4) = 0.119$

olmak üzere

$$\begin{aligned}
 CE_Y^{(C,\rho)}(D^+, D_1) &= (C) \int f_{D^+,D_1} d\rho \\
 &= \sum_{t=1}^4 [f_{D^+,D_1}(K_{(t)}) - f_{D^+,D_1}(K_{(t-1)})] \rho(F_{(t)}) \\
 &= 0.0104 \times 1 + (0.1074 - 0.0104) \times 0.776412 + \\
 &\quad (0.1298 - 0.1074) \times 0.553017 + (0.2420 - 0.1298) \\
 &\quad \times 0.261484 \\
 &= 0.127438
 \end{aligned}$$

olarak elde edilir. Her bir D_k alternatifi ile sırasıyla D^+ ve D^- arasındaki Choquet düzenlenmiş sezgisel bulanık çapraz-entropi sonuçları sırasıyla Çizelge 6.7 ve Çizelge 6.8'de verilmiştir.

- **Adım 9:** Tanım 5.2'de verilen $CE_Y^{(C,\rho)}$ tabanlı simetrik fark bilgi ölçüsü $CE_Y^{(C,\rho)*}$ değerleri hesaplanırsa Çizelge 6.9 elde edilir.
- **Adım 10:** Çizelge 6.9 ve (6.1) kullanılarak her bir D_k alternatifi için, yakınlık katsayıları sırasıyla $d_1^* = 0.036549$, $d_2^* = 0.699288$, $d_3^* = 0.619495$, $d_4^* = 0.360857$ ve $d_5^* = 0.827920$ olarak elde edilir.

Çizelge 6.7 D_k ve D^+ arasındaki $CE_Y^{(C,\rho)}$ değerleri

$CE_Y^{(C,\rho)}(D^+, D_1) = 0.127438$	$CE_Y^{(C,\rho)}(D_1, D^+) = 0.110224$
$CE_Y^{(C,\rho)}(D^+, D_2) = 0.029316$	$CE_Y^{(C,\rho)}(D_2, D^+) = 0.033931$
$CE_Y^{(C,\rho)}(D^+, D_3) = 0.042824$	$CE_Y^{(C,\rho)}(D_3, D^+) = 0.041103$
$CE_Y^{(C,\rho)}(D^+, D_4) = 0.073604$	$CE_Y^{(C,\rho)}(D_4, D^+) = 0.073990$
$CE_Y^{(C,\rho)}(D^+, D_5) = 0.022721$	$CE_Y^{(C,\rho)}(D_5, D^+) = 0.019933$

Çizelge 6.8 D_k ve D^- arasındaki $CE_Y^{(C,\rho)}$ değerleri

$CE_Y^{(C,\rho)}(D^-, D_1) = 0.004409$	$CE_Y^{(C,\rho)}(D_1, D^-) = 0.004607$
$CE_Y^{(C,\rho)}(D^-, D_2) = 0.068464$	$CE_Y^{(C,\rho)}(D_2, D^-) = 0.078615$
$CE_Y^{(C,\rho)}(D^-, D_3) = 0.063334$	$CE_Y^{(C,\rho)}(D_3, D^-) = 0.073308$
$CE_Y^{(C,\rho)}(D^-, D_4) = 0.0416117$	$CE_Y^{(C,\rho)}(D_4, D^-) = 0.041719$
$CE_Y^{(C,\rho)}(D^-, D_5) = 0.095260$	$CE_Y^{(C,\rho)}(D_5, D^-) = 0.109961$

Çizelge 6.9 D_k ile D^+ ve D^- arasındaki $CE_Y^{(C,\rho)*}$ değerleri

$CE_Y^{(C,\rho)*}(D^+, D_1) = 0.118831$	$CE_Y^{(C,\rho)*}(D^-, D_1) = 0.004508$
$CE_Y^{(C,\rho)*}(D^+, D_2) = 0.031624$	$CE_Y^{(C,\rho)*}(D^-, D_2) = 0.073540$
$CE_Y^{(C,\rho)*}(D^+, D_3) = 0.041964$	$CE_Y^{(C,\rho)*}(D^-, D_3) = 0.068321$
$CE_Y^{(C,\rho)*}(D^+, D_4) = 0.073797$	$CE_Y^{(C,\rho)*}(D^-, D_4) = 0.041665$
$CE_Y^{(C,\rho)*}(D^+, D_5) = 0.021327$	$CE_Y^{(C,\rho)*}(D^-, D_5) = 0.102610$

- **Adım 11** Daha büyük yakınlık katsayısına sahip alternatif daha iyi olmak üzere $D_5 \succ D_2 \succ D_3 \succ D_4 \succ D_1$ sıralaması elde edilir.

6.3 Önerilen Yöntemin Duyarlılık Analizi

Karar vermede duyarlılık analizi, karar verme sürecinde kullanılan parametrelerin ve varsayımların sonuçlar üzerindeki etkisini değerlendiren bir yöntemdir. Bu analiz, karar verme modelindeki belirsizlikleri ve değişkenleri inceleyerek hangi faktörlerin sonuçları ne derece etkilediğini belirlemeye çalışır. Bu kısımda, Kısım 6.2'de ele alınan yatırım problemi p ve q parametrelerini içeren $CE_{Y_{p,q}}^{(C,\rho)}$ tabanlı simetrik fark bilgi ölçüsü $CE_{Y_{p,q}}^{(C,\rho)*}$ fonksiyonuna göre çözümleri elde edilecektir. Burada p ve q

parametreleri $\{0.10, 0.20, 0.30, 0.40, 0.50, 0.60, 0.70, 0.80, 0.90, 1.00\}$ kümesinden seçilmektedir. p ve q parametrelerinin etkisini araştırmak için yapılan bu çözümlerin sonuçları Çizelge 6.10, Çizelge 6.11, Çizelge 6.12, Çizelge 6.13 ve Çizelge 6.14'te özetlenmiştir. Bu şekillerden görülebileceği üzere, 100 sıralama içerisinde sadece 3 farklı sıralama bulunmaktadır.

Çizelge 6.10 $q \in \{0.10, 0.20\}$ için alternatiflerin sıralaması

	$q = 0.10$	$q = 0.20$
$p = 0.10$	$D_5 \succ D_2 \succ D_3 \succ D_4 \succ D_1$	$D_5 \succ D_2 \succ D_3 \succ D_4 \succ D_1$
$p = 0.20$	$D_5 \succ D_2 \succ D_3 \succ D_4 \succ D_1$	$D_5 \succ D_2 \succ D_3 \succ D_4 \succ D_1$
$p = 0.30$	$D_5 \succ D_2 \succ D_3 \succ D_4 \succ D_1$	$D_5 \succ D_2 \succ D_3 \succ D_4 \succ D_1$
$p = 0.40$	$D_2 \succ D_5 \succ D_3 \succ D_4 \succ D_1$	$D_5 \succ D_2 \succ D_3 \succ D_4 \succ D_1$
$p = 0.50$	$D_2 \succ D_5 \succ D_3 \succ D_4 \succ D_1$	$D_2 \succ D_5 \succ D_3 \succ D_4 \succ D_1$
$p = 0.60$	$D_2 \succ D_5 \succ D_3 \succ D_4 \succ D_1$	$D_2 \succ D_5 \succ D_3 \succ D_4 \succ D_1$
$p = 0.70$	$D_2 \succ D_5 \succ D_3 \succ D_4 \succ D_1$	$D_2 \succ D_5 \succ D_3 \succ D_4 \succ D_1$
$p = 0.80$	$D_2 \succ D_5 \succ D_3 \succ D_4 \succ D_1$	$D_2 \succ D_5 \succ D_3 \succ D_4 \succ D_1$
$p = 0.90$	$D_2 \succ D_5 \succ D_3 \succ D_4 \succ D_1$	$D_2 \succ D_5 \succ D_3 \succ D_4 \succ D_1$
$p = 1$	$D_2 \succ D_5 \succ D_3 \succ D_4 \succ D_1$	$D_2 \succ D_5 \succ D_3 \succ D_4 \succ D_1$

Çizelge 6.11 $q \in \{0.30, 0.40\}$ için alternatiflerin sıralaması

	$q = 0.30$	$q = 0.40$
$p = 0.10$	$D_5 \succ D_2 \succ D_3 \succ D_4 \succ D_1$	$D_5 \succ D_2 \succ D_3 \succ D_4 \succ D_1$
$p = 0.20$	$D_5 \succ D_2 \succ D_3 \succ D_4 \succ D_1$	$D_5 \succ D_2 \succ D_3 \succ D_4 \succ D_1$
$p = 0.30$	$D_5 \succ D_2 \succ D_3 \succ D_4 \succ D_1$	$D_5 \succ D_2 \succ D_3 \succ D_4 \succ D_1$
$p = 0.40$	$D_5 \succ D_2 \succ D_3 \succ D_4 \succ D_1$	$D_5 \succ D_2 \succ D_3 \succ D_4 \succ D_1$
$p = 0.50$	$D_2 \succ D_5 \succ D_3 \succ D_4 \succ D_1$	$D_5 \succ D_2 \succ D_3 \succ D_4 \succ D_1$
$p = 0.60$	$D_2 \succ D_5 \succ D_3 \succ D_4 \succ D_1$	$D_5 \succ D_2 \succ D_3 \succ D_4 \succ D_1$
$p = 0.70$	$D_2 \succ D_5 \succ D_3 \succ D_4 \succ D_1$	$D_2 \succ D_5 \succ D_3 \succ D_4 \succ D_1$
$p = 0.80$	$D_2 \succ D_3 \succ D_5 \succ D_4 \succ D_1$	$D_2 \succ D_3 \succ D_5 \succ D_4 \succ D_1$
$p = 0.90$	$D_2 \succ D_3 \succ D_5 \succ D_4 \succ D_1$	$D_2 \succ D_3 \succ D_5 \succ D_4 \succ D_1$
$p = 1$	$D_2 \succ D_3 \succ D_5 \succ D_4 \succ D_1$	$D_2 \succ D_3 \succ D_5 \succ D_4 \succ D_1$

Çizelge 6.12 $q \in \{0.50, 0.60\}$ için alternatiflerin sıralaması

	$q = 0.50$	$q = 0.60$
$p = 0.10$	$D_5 \succ D_2 \succ D_3 \succ D_4 \succ D_1$	$D_5 \succ D_2 \succ D_3 \succ D_4 \succ D_1$
$p = 0.20$	$D_5 \succ D_2 \succ D_3 \succ D_4 \succ D_1$	$D_5 \succ D_2 \succ D_3 \succ D_4 \succ D_1$
$p = 0.30$	$D_5 \succ D_2 \succ D_3 \succ D_4 \succ D_1$	$D_5 \succ D_2 \succ D_3 \succ D_4 \succ D_1$
$p = 0.40$	$D_5 \succ D_2 \succ D_3 \succ D_4 \succ D_1$	$D_5 \succ D_2 \succ D_3 \succ D_4 \succ D_1$
$p = 0.50$	$D_5 \succ D_2 \succ D_3 \succ D_4 \succ D_1$	$D_5 \succ D_2 \succ D_3 \succ D_4 \succ D_1$
$p = 0.60$	$D_5 \succ D_2 \succ D_3 \succ D_4 \succ D_1$	$D_5 \succ D_2 \succ D_3 \succ D_4 \succ D_1$
$p = 0.70$	$D_2 \succ D_5 \succ D_3 \succ D_4 \succ D_1$	$D_2 \succ D_5 \succ D_3 \succ D_4 \succ D_1$
$p = 0.80$	$D_2 \succ D_3 \succ D_5 \succ D_4 \succ D_1$	$D_2 \succ D_5 \succ D_3 \succ D_4 \succ D_1$
$p = 0.90$	$D_2 \succ D_3 \succ D_5 \succ D_4 \succ D_1$	$D_2 \succ D_5 \succ D_3 \succ D_4 \succ D_1$
$p = 1$	$D_2 \succ D_3 \succ D_5 \succ D_4 \succ D_1$	$D_2 \succ D_5 \succ D_3 \succ D_4 \succ D_1$

Çizelge 6.13 $q \in \{0.70, 0.80\}$ için alternatiflerin sıralaması

	$q = 0.70$	$q = 0.80$
$p = 0.10$	$D_5 \succ D_2 \succ D_3 \succ D_4 \succ D_1$	$D_5 \succ D_2 \succ D_3 \succ D_4 \succ D_1$
$p = 0.20$	$D_5 \succ D_2 \succ D_3 \succ D_4 \succ D_1$	$D_5 \succ D_2 \succ D_3 \succ D_4 \succ D_1$
$p = 0.30$	$D_5 \succ D_2 \succ D_3 \succ D_4 \succ D_1$	$D_5 \succ D_2 \succ D_3 \succ D_4 \succ D_1$
$p = 0.40$	$D_5 \succ D_2 \succ D_3 \succ D_4 \succ D_1$	$D_5 \succ D_2 \succ D_3 \succ D_4 \succ D_1$
$p = 0.50$	$D_5 \succ D_2 \succ D_3 \succ D_4 \succ D_1$	$D_5 \succ D_2 \succ D_3 \succ D_4 \succ D_1$
$p = 0.60$	$D_5 \succ D_2 \succ D_3 \succ D_4 \succ D_1$	$D_5 \succ D_2 \succ D_3 \succ D_4 \succ D_1$
$p = 0.70$	$D_5 \succ D_2 \succ D_3 \succ D_4 \succ D_1$	$D_5 \succ D_2 \succ D_3 \succ D_4 \succ D_1$
$p = 0.80$	$D_2 \succ D_5 \succ D_3 \succ D_4 \succ D_1$	$D_2 \succ D_5 \succ D_3 \succ D_4 \succ D_1$
$p = 0.90$	$D_2 \succ D_5 \succ D_3 \succ D_4 \succ D_1$	$D_2 \succ D_5 \succ D_3 \succ D_4 \succ D_1$
$p = 1$	$D_2 \succ D_5 \succ D_3 \succ D_4 \succ D_1$	$D_2 \succ D_5 \succ D_3 \succ D_4 \succ D_1$

İlk önce p parametresinin sabit değerleri için q parametresinin değişiminin sıralama sonuçlarına etkisini analiz edeceğiz.

- $p \in \{0.10, 0.20, 0.30\}$ olsun. q parametresi 0.10 ile 1.00 arasında değiştirildiğinde $D_5 \succ D_2 \succ D_3 \succ D_4 \succ D_1$ sıralaması elde edilir.
- $p = 0.40$ olsun. $q = 0.10$ olduğunda $D_2 \succ D_5 \succ D_3 \succ D_4 \succ D_1$ sıralaması elde edilirken q parametresi 0.20 ile 1.00 arasında değiştiğinde $D_5 \succ D_2 \succ D_3 \succ$

Çizelge 6.14 $q \in \{0.90, 1.00\}$ için alternatiflerin sıralaması

	$q = 0.90$	$q = 1.00$
$p = 0.10$	$D_5 \succ D_2 \succ D_3 \succ D_4 \succ D_1$	$D_5 \succ D_2 \succ D_3 \succ D_4 \succ D_1$
$p = 0.20$	$D_5 \succ D_2 \succ D_3 \succ D_4 \succ D_1$	$D_5 \succ D_2 \succ D_3 \succ D_4 \succ D_1$
$p = 0.30$	$D_5 \succ D_2 \succ D_3 \succ D_4 \succ D_1$	$D_5 \succ D_2 \succ D_3 \succ D_4 \succ D_1$
$p = 0.40$	$D_5 \succ D_2 \succ D_3 \succ D_4 \succ D_1$	$D_5 \succ D_2 \succ D_3 \succ D_4 \succ D_1$
$p = 0.50$	$D_5 \succ D_2 \succ D_3 \succ D_4 \succ D_1$	$D_5 \succ D_2 \succ D_3 \succ D_4 \succ D_1$
$p = 0.60$	$D_5 \succ D_2 \succ D_3 \succ D_4 \succ D_1$	$D_5 \succ D_2 \succ D_3 \succ D_4 \succ D_1$
$p = 0.70$	$D_5 \succ D_2 \succ D_3 \succ D_4 \succ D_1$	$D_5 \succ D_2 \succ D_3 \succ D_4 \succ D_1$
$p = 0.80$	$D_5 \succ D_2 \succ D_3 \succ D_4 \succ D_1$	$D_5 \succ D_2 \succ D_3 \succ D_4 \succ D_1$
$p = 0.90$	$D_5 \succ D_2 \succ D_3 \succ D_4 \succ D_1$	$D_5 \succ D_2 \succ D_3 \succ D_4 \succ D_1$
$p = 1$	$D_5 \succ D_2 \succ D_3 \succ D_4 \succ D_1$	$D_5 \succ D_2 \succ D_3 \succ D_4 \succ D_1$

$D_4 \succ D_1$ sıralaması bulunur.

- $p \in \{0.50, 0.60\}$ olsun. q parametresi 0.10 ile 0.30 arasında değiştiğinde $D_2 \succ D_5 \succ D_3 \succ D_4 \succ D_1$ sıralaması blunurken q parametresi 0.40 ile 1.00 arasında değiştirilirken $D_5 \succ D_2 \succ D_3 \succ D_4 \succ D_1$ sıralamasına ulaşılır.
- $p = 0.7$ olsun. q parametresi 0.10'den 0.60'ya kadar değiştiğinde $D_2 \succ D_5 \succ D_3 \succ D_4 \succ D_1$ sıralamasına sahipken q parametresi 0.70'den 1.00'e kadar değiştiğinde $D_5 \succ D_2 \succ D_3 \succ D_4 \succ D_1$ sıralaması elde edilir.
- $p \in \{0.80, 0.90, 1.00\}$ olsun. $q \in \{0.10, 0.20, 0.60, 0.70, 0.80\}$ iken $D_2 \succ D_5 \succ D_3 \succ D_4 \succ D_1$ sıralaması ve q parametresi 0.30 ile 0.50 arasında olduğunda $D_2 \succ D_3 \succ D_5 \succ D_4 \succ D_1$ sıralaması ve q parametresi 0.90 veya 1.00 olduğunda $D_5 \succ D_2 \succ D_3 \succ D_4 \succ D_1$ sıralaması elde edilir.

Şimdi q parametresinin sabit değerleri için p parametresinin sıralama sonuçlarına etkisini analiz edeceğiz:

- $q = 0.10$ olsun. p parametresi 0.10'den 0.30'e kadar değiştiğinde $D_5 \succ D_2 \succ D_3 \succ D_4 \succ D_1$ sıralaması ve p parametresi 0.40 ile 1.00 arasında değiştiğinde $D_2 \succ D_5 \succ D_3 \succ D_4 \succ D_1$ sıralaması bulunur.

- $q = 0.20$ olsun. p parametresi 0.10 ile 0.40 arasında değiştirildiğinde $D_5 \succ D_2 \succ D_3 \succ D_4 \succ D_1$ sıraması bulunurken p parametresi 0.50'ten 1.00'e kadar değiştiğinde $D_2 \succ D_5 \succ D_3 \succ D_4 \succ D_1$ sıralası elde edilir.
- $q = 0.30$ olsun. p parametresi 0.10 ile 0.40 arasında değiştirildiğinde $D_5 \succ D_2 \succ D_3 \succ D_4 \succ D_1$ sıralaması ve p parametresi 0.50 ile 0.70 arasında olduğunda $D_2 \succ D_5 \succ D_3 \succ D_4 \succ D_1$ sıralaması ve p parametresi 0.80 ile 1.00 arasında olduğunda ise $D_2 \succ D_3 \succ D_5 \succ D_4 \succ D_1$ sıralamasına ulaşılır.
- $q \in \{0.40, 0.50\}$ olsun. p parametresi 0.10'den 0.60'ya kadar değiştiğinde $D_5 \succ D_2 \succ D_3 \succ D_4 \succ D_1$ sıralması ve $p = 0.70$ olduğunda $D_2 \succ D_5 \succ D_3 \succ D_4 \succ D_1$ sıralaması ve p parametresi 0.80 ile 1.00 arasında iken sıralama $D_2 \succ D_3 \succ D_5 \succ D_4 \succ D_1$ sıralaması elde edilir.
- $q = 0.60$ olsun. p parametresi 0.10 ile 0.60 arasında değiştirildiğinde $D_5 \succ D_2 \succ D_3 \succ D_4 \succ D_1$ sıralaması oluşurken p parametresi 0.70 ile 1.00 arasında olduğunda $D_2 \succ D_5 \succ D_3 \succ D_4 \succ D_1$ sıralaması bulunur.
- $q \in \{0.70, 0.80\}$ olsun. p parametresi 0.10'den 0.70'ye kadar değiştiğinde $D_5 \succ D_2 \succ D_3 \succ D_4 \succ D_1$ sıralaması ve p parametresi 0.80 ile 1.00 arasında olduğunda $D_2 \succ D_5 \succ D_3 \succ D_4 \succ D_1$ sıralamasına ulaşılır.
- $q \in \{0.90, 1.00\}$ olsun. p parametresi 0.10'den 1.00'e kadar değiştiğinde $D_5 \succ D_2 \succ D_3 \succ D_4 \succ D_1$ sıralaması bulunur.

Sonuç olarak, tüm sıralamalara bakıldığında $D_5 \succ D_2 \succ D_3 \succ D_4 \succ D_1$ sıralaması, elde edilen 100 sıralamanın 63'ünde tamamen aynı olarak görülmektedir.

6.4 Önerilen Yöntemin Karşılaştırma Analizi

Bu kısımda, sezgisel bulanık ortamda önerilen çapraz-entropi ölçüsü tabanlı TOPSIS'in mevcut yöntemler ile bir kıyaslaması yapılacaktır. Kısım 6.2'de ele alınan yatırım problemi mevcut yöntemler ile çözüldüğünde elde edilen sonuçlar aşağıda listelenmiştir:

- Wei (2008), sezgisel bulanık ortamda kriter ağırlıklarının belirlenebileceği, sapmayı maksimize etme yöntemine dayalı bir optimizasyon modeli oluşturmuştur. Ayrıca kriter ağırlıkları hakkında bilginin tamamen bilinmediği özel durumlar için başka bir optimizasyon modeli de önermiştir. Bu modeli çözerek, kriter ağırlıklarını belirlemek için kullanılabilir basit ve kesin bir formül elde edilir. Wei'nin yöntemi ile tüm kriterler arasında toplam ağırlıklı sapma değerini maksimize eden ağırlık vektörü ϱ elde edilir. Bu yöntemde, kriter ağırlıklarının tam olarak bilinip bilinmemesine bağlı olarak çok kriterli karar verme problemini çözmek için iki durum vardır. Birinci durumda kriter ağırlıkları kısmen bilinir. Bu yatırım problemi için kriterler hakkında kısmi bilgi

$$\mathcal{H} = \{0.15 \leq \varrho_1 \leq 0.20; 0.16 \leq \varrho_2 \leq 0.18; 0.30 \leq \varrho_3 \leq 0.35; 0.30 \leq \varrho_4 \leq 0.45\}$$

olmak üzere

$$\text{maks } L(\varrho) = 1.7\varrho_1 + 1.4\varrho_2 + 2.7\varrho_3 + 3.1\varrho_4$$

öyleki $\varrho_r \in \mathcal{H}$

$$\sum_{r=1}^n \varrho_r = 1$$

optimizasyon modeli çözüldüğünde $\varrho = (0.20, 0.18, 0.32, 0.30)$ ağırlık vektörü elde edilir. Bu ağırlık vektörü yardımıyla normalize karar matrisindeki her bir alternatife ait sezgisel bulanık değerlerden sezgisel bulanık aritmetik kümeleme operatörü ile tek bir sezgisel bulanık değer elde edilir. Daha sonra $V(\theta) = \tau_\theta - v_\theta$ skor fonksiyonu kullanılarak $V(\theta_{D_1}) = -0.1274, V(\theta_{D_2}) = 0.3451, V(\theta_{D_3}) = 0.2181, V(\theta_{D_4}) = 0.1621$ ve $V(\theta_{D_5}) = 0.3858$ skor değerlerine ulaşılır. Sonuç olarak bu skor değerlerine göre $D_5 \succ D_2 \succ D_3 \succ D_4 \succ D_1$ sıralaması elde edilir. İkinci durumda kriter ağırlıkları tamamıyla bilinmediğinden sapmayı maksimize etme yöntemi ile $\varrho = (0.1910, 0.1573, 0.3034, 0.3483)$ ağırlık vektörü elde edilir. Benzer şekilde kümeleme operatörü ile elde edilen sezgisel bulanık değerler bulunduktan sonra $V(\theta_{D_1}) = -0.1551, V(\theta_{D_2}) = 0.3207, V(\theta_{D_3}) = 0.2251, V(\theta_{D_4}) = 0.1335$ ve $V(\theta_{D_5}) = 0.3788$ skor değerlerine ulaşılır. Bu skor değerlerine göre de $D_5 \succ D_2 \succ D_3 \succ D_4 \succ D_1$ sıralaması elde edilir.

- Song vd. (2016) tarafından sezgisel bulanık kümeler için Jusselme uzaklık ve kosinüs benzerlik ölçülerine dayalı bazı benzerlik ölçüleri inşa edilmiş ve daha sonra bu benzerlik ölçüleri yardımıyla bir çok kriterli karar verme yöntemi verilmiştir. Aynı yatırım problemine de uygulanan bu yöntemde ağırlık vektörü $\varrho = (0.20, 0.18, 0.32, 0.30)$ olarak elde edilmiştir. Normalize karar matrisinde pozitif ideal çözüm D^+ ve negatif ideal çözüm D^- belirlendikten sonra göreceli benzerlik değeri her bir D_k alternatifi için bir M benzerlik ölçüsüne göre

$$G(D_k) = \frac{M(D_k, D^+)}{M(D_k, D^+) + M(D_k, D^-)}$$

ile bulunur. S_{wD_q} benzerlik ölçüsü için $G(D_1) = 0.4035, G(D_2) = 0.5467, G(D_3) = 0.5239, G(D_4) = 0.4744, G(D_5) = 0.5627$ göreceli benzerlik değerleri elde edilirken C_{wq} benzerlik ölçüsü için $G(D_1) = 0.4427, G(D_2) = 0.5283, G(D_3) = 0.5206, G(D_4) = 0.4775, G(D_5) = 0.5425$ göreceli benzerlik değerleri bulunur. Her iki benzerlik ölçüsü için de $D_5 \succ D_2 \succ D_3 \succ D_4 \succ D_1$ sıralaması elde edilir.

- Song vd. (2019), sezgisel bulanık kümelerin içerdiği belirsizliği ölçmek için bir entropi ölçüsü ve iki sezgisel bulanık küme arasındaki farklılığı ölçmek için bir çapraz-entropi ölçüsü tanımlamışlardır. Daha sonra bu ölçülere dayalı olarak bir çok kriterli karar verme yöntemi verilmiştir. Bu yöntem kriter ağırlıklarının kısmen veya tamamen bilinmemesine bağlı olarak iki duruma ayrılır. Benzer yatırım problemine uygulanan bu yöntemde kriter ağırlıklarının tamamen bilinmediği durumda entropi ve çapraz-entropi ölçüsüne dayalı

$$\begin{aligned} maks \quad T(\varrho) = & 0.3977\varrho_1 - \varrho_1 \log_2 \varrho_1 + 0.9520\varrho_2 - \varrho_2 \log_2 \varrho_2 + 0.4883\varrho_3 - \\ & \varrho_3 \log_2 \varrho_3 + 0.7237\varrho_4 - \varrho_4 \log_2 \varrho_4 \end{aligned}$$

optimizasyon modeli çözüldüğünde $\varrho = (0.2926, 0.1992, 0.2748, 0.2334)$ ağırlık vektörü elde edilir. Bu ağırlık vektörü yardımıyla normalize karar matrisindeki her bir alternatife ait sezgisel bulanık değerlerden bir sezgisel bulanık aritmetik kümeleme operatörü ile tek bir sezgisel bulanık değer elde edilir. Daha sonraki adımda $V(\theta) = \tau_\theta - \nu_\theta$ skor fonksiyonu kullanılarak $V(\theta_{D_1}) = -0.0665, V(\theta_{D_2}) = 0.3684, V(\theta_{D_3}) = 0.2098, V(\theta_{D_4}) = 0.2755$ ve

$V(\theta_{D_5}) = 0.3809$ skor değerlerine ulaşılır. Kriterlerin ağırlığının tamamen bilinmediği durumda alternatiflerin sıralaması $D_5 \succ D_2 \succ D_4 \succ D_3 \succ D_1$ olarak bulunur. İkinci olarak kriterler hakkında kısmi bilgi

$$\mathcal{H} = \{0.15 \leq \varrho_1 \leq 0.20; 0.16 \leq \varrho_2 \leq 0.18; 0.30 \leq \varrho_3 \leq 0.35; 0.30 \leq \varrho_4 \leq 0.45\}$$

olmak üzere aynı optimizasyon problemi çözülmüşse $\varrho = (0.20, 0.18, 0.32, 0.30)$ ağırlık vektörüne ulaşılmıştır. Bu ağırlık vektörüne göre bir sezgisel bulanık aritmetik kümeleme operatörü ile her bir alternatif için elde edilen sezgisel bulanık değerlerin skor değerleri $V(\theta_{D_1}) = -0.1274, V(\theta_{D_2}) = 0.3451, V(\theta_{D_3}) = 0.2181, V(\theta_{D_4}) = 0.1621$ ve $V(\theta_{D_5}) = 0.3858$ olarak bulunur. Kriterlerin ağırlığının kısmen bilindiği durumda ise alternatiflerin sıralaması $D_5 \succ D_2 \succ D_3 \succ D_4 \succ D_1$ olarak bulunur.

- Xia ve Xu (2012) tarafından sezgisel bulanık kümeler için bazı entropi ve çapraz-entropi ölçüleri tanımlanmıştır. Daha sonra bu ölçülere dayalı bir çok kriterli karar verme yöntemi kriter ağırlıklarının tamamen bilinmemesi veya kısmen bilinmesi göre iki durumda verilmiştir. Aynı yatırım probleminin çözümü içinde kullanılan bu yöntemde ilk durumda kriter ağırlıklarının bilinmediği durum incelenmiştir. Entropi ve çapraz-entropi ölçüleri dayalı bir formülle kriter ağırlıklarına ilişkin vektör $\varrho = (0.1940, 0.2238, 0.1330, 0.2117, 0.2375)$ olarak elde edilir. Daha sonra normalize karar matrisinde bu ağırlık vektörüne göre bir sezgisel bulanık simetrik hibrit kümeleme operatörü ile her bir alternatif için elde edilen sezgisel bulanık değerlerin skor değerleri $V(\theta_{D_1}) = -0.1465, V(\theta_{D_2}) = 0.3464, V(\theta_{D_3}) = 0.2121, V(\theta_{D_4}) = 0.1674$ ve $V(\theta_{D_5}) = 0.3872$ olarak elde edilir. Bu skor değerlerine göre kriterlerin ağırlığının tamamen bilinmediği durumda alternatiflerin sıralamasının $D_5 \succ D_2 \succ D_3 \succ D_4 \succ D_1$ olduğu görülür. Diğer taraftan kriter ağırlıklarının kısmen bilindiği durumda kısmi bilgi

$$\mathcal{H} = \{0.15 \leq \varrho_1 \leq 0.20; 0.16 \leq \varrho_2 \leq 0.18; 0.30 \leq \varrho_3 \leq 0.35; 0.30 \leq \varrho_4 \leq 0.45\}$$

olmak üzere

$$\text{maks } L(\varrho) = 0.9903\varrho_1 + 0.5082\varrho_2 + 1.0296\varrho_3 + 0.7697\varrho_4$$

$$\text{öyleki } \varrho_r \in \mathcal{H}$$

$$\sum_{r=1}^n \varrho_r = 1$$

optimizasyon modeli çözüldüğünde $\varrho = (0.19, 0.16, 0.35, 0.30)$ ağırlık vektörü elde edilir. Benzer şekilde bir kümeleme operatörü ile her bir alternatif için elde edilen sezgisel bulanık değerlerin skor değerleri $V(\theta_{D_1}) = -0.2022$, $V(\theta_{D_2}) = 0.3201$, $V(\theta_{D_3}) = 0.2161$, $V(\theta_{D_4}) = 0.0446$ ve $V(\theta_{D_5}) = 0.3823$ olarak bulunur. Bu skor değerlerine göre kriterlerin ağırlığının kısmen bilindiği durumda alternatiflerin sıralamasının $D_5 \succ D_2 \succ D_3 \succ D_4 \succ D_1$ olarak elde edilir.

Çizelge 6.15 Diğer yöntemler ve önerilen yöntemin karşılaştırılması

Yöntemler	Sıralama
I.durum (Wei, 2008)	$D_5 \succ D_2 \succ D_3 \succ D_4 \succ D_1$
II.durum (Wei, 2008)	$D_5 \succ D_2 \succ D_3 \succ D_4 \succ D_1$
S_{wD_q} (Song, 2016)	$D_5 \succ D_2 \succ D_3 \succ D_4 \succ D_1$
C_{wq} (Song, 2016)	$D_5 \succ D_2 \succ D_3 \succ D_4 \succ D_1$
I.durum (Song, 2019)	$D_5 \succ D_2 \succ D_4 \succ D_3 \succ D_1$
II.durum (Song, 2019)	$D_5 \succ D_2 \succ D_3 \succ D_4 \succ D_1$
I.durum (Xia ve Xu, 2012)	$D_5 \succ D_2 \succ D_3 \succ D_4 \succ D_1$
II.durum (Xia ve Xu, 2012)	$D_5 \succ D_2 \succ D_3 \succ D_4 \succ D_1$
I.durum (Wu, 2021)	$D_5 \succ D_2 \succ D_4 \succ D_3 \succ D_1$
II.durum (Wu, 2021, 2021)	$D_5 \succ D_2 \succ D_3 \succ D_4 \succ D_1$
Önerilen TOPSIS ($p = 1.00, q = 1.00$)	$D_5 \succ D_2 \succ D_3 \succ D_4 \succ D_1$
Önerilen TOPSIS ($p = 0.90, q = 0.20$)	$D_2 \succ D_5 \succ D_3 \succ D_4 \succ D_1$
Önerilen TOPSIS ($p = 0.80, q = 0.40$)	$D_2 \succ D_3 \succ D_5 \succ D_4 \succ D_1$

- Wu vd. (2021), sezgisel bulanık kümeler için uzaklık ve bilgi ölçüleri tanımlamıştır. Daha sonra bu ölçüleri kullanarak bir çok kriterli karar verme yöntemi

tanıtılmıştır. Bu yöntemde de kriter ağırlıklarının tamamen bilinmemesi ve kısmen bilinmesine göre iki durum söz konusudur. Benzer yatırım problemi için kriter ağırlıklarının bilinmediği durumda uzaklık ve bilgi ölçülerine dayalı bir formülle kriter ağırlıkları $\varrho = (0.2563, 0.2142, 0.2696, 0.2600)$ olarak elde edilir. Bu ağırlık vektörü ve bir kümeleme operatörü yardımıyla her bir alternatif için elde edilen sezgisel bulanık değerlerin skor değerleri hesaplanır. Skor değerleri $V(\theta_{D_1}) = -0.0750, V(\theta_{D_2}) = 0.3592, V(\theta_{D_3}) = 0.2109, V(\theta_{D_4}) = 0.2407$ ve $V(\theta_{D_5}) = 0.3711$ olduğundan dolayı $D_5 \succ D_2 \succ D_4 \succ D_3 \succ D_1$ sıralamasına ulaşılır. İkinci durum olarak kriter ağırlıklarının kısmi bilgisi

$$\mathcal{H} = \{0.15 \leq \varrho_1 \leq 0.20; 0.16 \leq \varrho_2 \leq 0.18; 0.30 \leq \varrho_3 \leq 0.35; 0.30 \leq \varrho_4 \leq 0.45\}$$

olmak üzere uzaklık ve bilgi ölçülerine dayalı

$$\text{maks } U(\varrho) = 3.6266\varrho_1 + 3.0310\varrho_2 + 3.8153\varrho_3 + 3.6791\varrho_4$$

öyleki $\varrho_r \in \mathcal{H}$

$$\sum_{r=1}^n \varrho_r = 1$$

optimizasyon modeli ile $\varrho = (0.20, 0.16, 0.34, 0.30)$ ağırlık vektörü elde edilir. Benzer şekilde daha sonra kümeleme operatörü ile her bir alternatif için elde edilen sezgisel bulanık değerlerin skor değerleri $V(\theta_{D_1}) = -0.1415, V(\theta_{D_2}) = 0.3451, V(\theta_{D_3}) = 0.2201, V(\theta_{D_4}) = 0.1545$ ve $V(\theta_{D_5}) = 0.3958$ olarak bulunur. Bu skor değerleri yardımıyla $D_5 \succ D_2 \succ D_3 \succ D_4 \succ D_1$ sıralamasına ulaşılır.

Çizelge 15'te yukarıda analiz edilen yöntemlerin bir özetlemesi verilmiştir. İncelenen beş yöntem içinde en iyi alternatifin D_5 olduğu görülür. Bu çalışmada tanımlanan çapraz-entropi tabanlı TOPSIS'in getirdiği yenilik p ve q parametrelerinin seçimine ve kriterlerin etkileşiminin modellenmesine bağlı olarak bazı durumlarda en iyi alternatifin değişmesidir. Örneğin, Çizelge 6.10'da $p = 0.90$ ve $q = 0.20$ için $D_2 \succ D_5 \succ D_3 \succ D_4 \succ D_1$ sıralamasının elde edildiği görülür. Bu da hassas incelemeler için önerilen yöntemin önemini gösterir. Karar vericiler probleme uygun p ve q değerleri ve bir bulanık ölçü yardımıyla daha hassas sonuçlar elde ederler.

7. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bilgi teorisinin önemli kavramlarından biri olan çapraz-entropi, iki olasılık dağılımı arasındaki farklılığı ölçmek için geliştirilmiştir. Daha sonra, iki bulanık küme arasındaki farklılığı ölçmek ve çeşitli uygulamalarda kullanmak amacıyla bulanık çapraz-entropi ölçüleri geliştirilmiştir. Ancak, çok kriterli karar verme problemlerinde kullanılan bu bulanık bilgi ölçülerinde genellikle kriter ağırlıkları dikkate alınmamaktadır. Gerçek dünya problemlerinde, uzman görüşüne göre bir kriter diğerlerinden daha önemli veya önemsiz olabilir, bu yüzden kriter ağırlıklarının göz önüne alınması gerekir. Bu tezde sezgisel bulanık kümeler için çeşitli ağırlıklı çapraz-entropi ölçüleri önerilmiştir. Ayrıca, kriterler arası etkileşimin söz konusu olduğu karar verme problemlerinde bu etkileşimi modellemede başarılı olan bulanık ölçüler kullanılarak tanımlanan Choquet ve d -Choquet integraleri yardımıyla yeni sezgisel bulanık çapraz-entropi ölçüleri tanıtılmıştır. Bunun yanı sıra, sezgisel bulanık kümelerdeki ait olma ve ait olmama derecelerinin uygulama sonuçlarına etkisinin incelenmesini olanaklı kılan yeni bir parametrik sezgisel bulanık çapraz-entropi ölçüsü tanıtılmış ve bu ölçünün ağırlıklı ve Choquet integrali tabanlı genelleştirmeleri sunulmuştur. Son olarak, önerilen çapraz-entropi ölçülerine dayalı bir genelleştirilmiş sezgisel bulanık TOPSIS verilmiş ve bu yöntemin performansını değerlendirmek amacıyla bir çok kriterli karar verme problemi çözülmüştür. Duyarlılık ve karşılaştırma analizleri ile önerilen yöntemin getirdiği yenilikler tartışılmıştır.

Bu tezden hareketle, bilgi teorisindeki diğer çapraz-entropi ölçüleri yardımıyla yeni bulanık ve sezgisel çapraz-entropi ölçüleri inşa edilebilir. Ayrıca önerilen çapraz-entropi ölçüleri örüntü tanıma, tıbbi teşhis, yüz tanıma sistemleri, sınıflandırma ve yapay zeka alanlarındaki problemlerin çözümünde etkin bir araç olarak kullanılabilir.

KAYNAKLAR

- Ashraf, S., Abdullah, S., Mahmood, T., Ghani, F. ve Mahmood, T. 2019. Spherical fuzzy sets and their applications in multi-attribute decision making problems, *Journal of Intelligent & Fuzzy Systems*, 36(3), 2829-2844.
- Atanassov, K. T., 1986. Intuitionistic fuzzy sets. *Fuzzy Sets Systems* 20(1), 87–96.
- Atanassov, K. T. 1999. Intuitionistic fuzzy sets. In *Intuitionistic fuzzy sets* (pp. 1-137). Physica, Heidelberg.
- Beliakov, G., James, S., Wu, J. 2020. *Discrete fuzzy measures*. Berlin: Springer International Publishing.
- Bhowal, P., Sen, S., Yoon, J. H., Geem, Z. W., Sarkar, R. 2021. Choquet integral and coalition game-based ensemble of deep learning models for covid-19 screening from chest x-ray images. *IEEE Journal of Biomedical and Health Informatics*, 25(12), 4328-4339.
- Boltzmann, L. 1866. Über die mechanische Bedeutung des zweiten Hauptsatzes der Wärmetheorie:(vorgelegt in der Sitzung am 8. Februar 1866). Staatsdruckerei.
- Boran, F. E., Genç, S., Kurt, M., Akay, D. 2009. A multi-criteria intuitionistic fuzzy group decision making for supplier selection with TOPSIS method. *Expert systems with applications*, 36(8), 11363-11368.
- Bozyiğit, M. C., Olgun, M., Ünver, M. 2023. Circular Pythagorean Fuzzy Sets and Applications to Multi-Criteria Decision Making. *Informatica*, 34(4), 713-742.
- Bozyiğit, M. C., Olgun, M., Ünver, M., Söylemez, D. 2024. Parametric Picture Fuzzy Cross-Entropy Measures Based on d -Choquet Integral for Building Material Recognition. *Applied Soft Computing* (Submitted).
- Bustince, H., Mesiar, R., Fernández, J., Galar, M., Paternain, D., Altalhi, A., Dimuro, G.P., Bedregal, B. ve Takáč, Z. 2021. d -Choquet integrals: Choquet integrals based on dissimilarities, *Fuzzy Sets and Systems*, 414, 1-27.
- Chen, S. J., Hwang, C. L. 1992. Fuzzy multiple attribute decision making methods. In *Fuzzy multiple attribute decision making: Methods and applications* (pp. 289-486). Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg.
- Chen, C. T. 2000. Extensions of the TOPSIS for group decision-making under fuzzy environment. *Fuzzy sets and systems*, 114(1), 1-9.
- Chen, T. Y., Tsao, C. Y. 2007. Experimental analysis of the intuitionistic fuzzy TOPSIS method on distance measures. In *Information Sciences 2007* (pp. 1057-1063).
- Choquet, G. 1954. Theory of Capacities. *Annals del Institut Fourier*, 5, 131–295.

- Clausius, R. 1865. Ueber verschiedene für die Anwendung bequeme Formen der Hauptgleichungen der mechanischen Wärmetheorie: vorgetragen in der naturforsch, Gesellschaft den 24. April 1865. éditeur inconnu.
- Coppi, R., Gil, M. A. ve Kiers, H. A. 2006. The fuzzy approach to statistical analysis, *Computational statistics data analysis*, 51(1), 1-14.
- Cuong, B. C. ve Kreinovich, V. 2013 . Picture fuzzy sets-a new concept for computational intelligence problems, In 2013 third world congress on information and communication technologies (WICT 2013) (pp. 1-6). IEEE.
- Cover, T. M., and Thomas, J. A. 2006. Elements of information theory 2nd edition (wiley series in telecommunications and signal processing).
- De Luca, A., Termini, S. 1972. A definition of a nonprobabilistic entropy in the setting of fuzzy sets theory. *Information and Control* 20 (1972) 301–312.
- Dimuro, G. P., Lucca, G., Sanz, J. A., Bustince, H. ve Bedregal, B. 2018. CMin-Integral: a Choquet-like aggregation function based on the minimum t-norm for applications to fuzzy rule-based classification systems. In *Aggregation Functions in Theory and in Practice* (pp. 83-95). Springer International Publishing.
- Ding, Q., Wang, Y. M. 2019. Intuitionistic fuzzy TOPSIS multi-attribute decision making method based on revised scoring function and entropy weight method. *Journal of Intelligent & Fuzzy Systems*, 36(1), 625-635.
- Dubois, D. ve Prade, H. 2003. Fuzzy set and possibility theory-based methods in artificial intelligence, *Artificial Intelligence*, 148(1-2), 1-9.
- Feng, F., Zheng, Y., Alcantud, J. C. R., Wang, Q. 2020. Minkowski weighted score functions of intuitionistic fuzzy values. *Mathematics*, 8(7), 1143.
- Fumanal-Idocin, J., Cordon, O. ve Bustince, H. 2023. The Krypteia ensemble: Designing classifier ensembles using an ancient Spartan military tradition, *Information Fusion*, 90, 283-297.
- Garg, H, Bozyigit, M. C., Olgun, M., Ünver, M. 2024. An extended intuitionistic fuzzy TOPSIS for Multi-criteria Decision-Making with A Parametric Intuitionistic Fuzzy Cross-Entropy Based on Choquet Integral. *Cybernetics and systems an international journal* (Submitted).
- Grabisch, M. 1995. Fuzzy integral in multicriteria decision making. *Fuzzy sets and Systems*, 69(3), 279-298.
- Grabisch, M. 1997. K-order additive discrete fuzzy measures and their representation, *Fuzzy sets and systems*, 92(2), 167-189.
- Grabisch, M., Roubens, M. 2000. Application of the Choquet integral in multicriteria decision making. *Fuzzy Measures and Integrals-Theory and Applications*, 348-374.

- Guiasu, S. 1971. Weighted entropy. *Reports on Mathematical Physics*, 2(3), 165-179.
- Guiasu, S. 1986. Grouping data by using the weighted entropy. *Journal of Statistical Planning and Inference*, 15, 63-69.
- Hartley, R. V. 1928. Transmission of information 1, *Bell System technical journal*, 7(3), 535-563.
- Heilpern, S. 2002. Using Choquet integral in economics. *Statistical Papers*, 43(1), 53-73.
- Hwang, C. L., Yoon, K. 1981. Methods for multiple attribute decision making. In *Multiple attribute decision making* (pp. 58-191). Springer, Berlin, Heidelberg.
- Jensen, J. L. W. V. 1906. Sur les fonctions convexes et les inégalités entre les valeurs moyennes. *Acta mathematica*, 30(1), 175-193.
- Karczmarek, P., Dolecki, M., Powroźnik, P., Gałka, Ł., Pedrycz, W. ve Czerwinski, D. 2022, July. Quadrature-Inspired Generalized Choquet Integral, In 2022 IEEE International Conference on Fuzzy Systems (FUZZ-IEEE) (pp. 1-7). IEEE.
- Karczmarek, P., Powroznik, P., Skublewska-Paszowska, M., Przylucki, S. ve Lukasik, E. 2022, July. Analysis of Sub-Integral Functions in the Aggregation of Classification Results Using Generalizations of the Choquet Integral on the Example of Emotion Classification, In 2022 IEEE International Conference on Fuzzy Systems (FUZZ-IEEE) (pp. 1-8). IEEE.
- Kullback, S., Leibler, R. A., 1951. On information and sufficiency. *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*. 4: 99–111.
- Kullback, S. 1959: *Information theory and statistics*. Wiley, New York.
- Kutlu Gündoğdu, F. ve Kahraman, C. 2019. Spherical fuzzy sets and spherical fuzzy TOPSIS method, *Journal of intelligent & fuzzy systems*, 36(1), 337-352.
- Lin, J., Divergence measures based on Shannon entropy 1991, *IEEE Trans. Information Theory* 37 (1991) 145-151.
- Lucca, G., Sanz, J. A., Dimuro, G. P., Bedregal, B., Asiain, M. J., Elkano, M. ve Bustince, H. 2017. CC-integrals: Choquet-like copula-based aggregation functions and its application in fuzzy rule-based classification systems, *Knowledge-Based Systems*, 119, 32-43.
- Lucca, G., Sanz, J. A., Dimuro, G. P., Bedregal, B., Fernández, J. ve Bustince, H. 2017, July. Analyzing the behavior of a CC-integral in a fuzzy rule-based classification system, In 2017 IEEE International Conference on Fuzzy Systems (FUZZ-IEEE) (pp. 1-6). IEEE.
- Lucca, G., Sanz, J. A., Dimuro, G. P., Bedregal, B., Bustince, H. ve Mesiar, R. 2018. CF-integrals: A new family of pre-aggregation functions with application to fuzzy rule-based classification systems, *Information Sciences*, 435, 94-110.

- Mao, J., Yao, D., Wang, C. 2013. A novel cross-entropy and entropy measures of IFSs and their applications. *Knowledge-Based Systems*, 48, 37-45.
- Murofushi, T., Sugeno, M. 2000. Fuzzy measures and fuzzy integrals. *Fuzzy measures and integrals: theory and applications*, 2000, 3-41.
- Nyquist, H. 1924. Certain factors affecting telegraph speed, *Transactions of the American Institute of Electrical Engineers*, 43, 412-422.
- Olgun, M., Türkarlan, E., Ünver, M., Ye, J. 2021. A cosine similarity measure based on the choquet integral for intuitionistic fuzzy sets and its applications to pattern recognition. *Informatica*, 32(4), 849-864.
- Otto, M. 1990. Fuzzy sets-applications to analytical chemistry. *Analytical Chemistry*, 62(14), 797A-802A.
- Parkash, O., Kumar, R. 2021. Multi-attribute decision making based on novel generalized parametric exponential intuitionistic fuzzy divergence measure. *Risk and Decision Analysis*, 8(3-4), 67-76.
- Ragin, C. C. 2000. *Fuzzy-set social science*, University of Chicago Press.
- Shang, X. G., Jiang, W. S. 1997. A note on fuzzy information measures. *Pattern recognition letters*, 18(5), 425-432.
- Shannon, C., 1948. A mathematical theory of communication. *Bell Syst., Tech. J.* 27:379-423.
- Song, Y., Wang, X., Lei, L., Quan, W., Huang, W. 2016. An evidential view of similarity measure for Atanassov's intuitionistic fuzzy sets. *Journal of Intelligent & Fuzzy Systems*, 31(3), 1653-1668.
- Song, Y., Fu, Q., Wang, Y. F., Wang, X. 2019. Divergence-based cross entropy and uncertainty measures of Atanassov's intuitionistic fuzzy sets with their application in decision making. *Applied Soft Computing*, 84, 105703.
- Steimann, F. 1997. Fuzzy set theory in medicine, *Artificial Intelligence in Medicine*, 11(1), 1-7.
- Sugeno, M. 1974. *Theory of Fuzzy Integrals and Its Applications*. Ph.D. Thesis, Tokyo Institute of Technology, Tokyo.
- Szmidt, E. ve Kacprzyk, J. 2001. Intuitionistic fuzzy sets in some medical applications, In *Computational Intelligence. Theory and Applications: International Conference, 7th Fuzzy Days Dortmund, Germany, October 1-3, 2001 Proceedings 7* (pp. 148-151), Springer Berlin Heidelberg.
- Takahagi, E. 2000. On identification methods of λ -fuzzy measures using weights and λ . *Japanese Journal of Fuzzy Sets and Systems*, 12, 665-676.
- Takahagi, E. 2005. λ -fuzzy measure identification methods using λ and weights. Senshu University, Japan.

- Triantaphyllou, E., Lin, C. T. 1996. Development and evaluation of five fuzzy multiattribute decision-making methods. *international Journal of Approximate reasoning*, 14(4), 281-310.
- Türkarslan, E., Ye, J., Ünver, M., Olgun, M. 2023. Consistency fuzzy cross entropy based VIKOR approach for multi-criteria decision making. *Iranian Journal of Fuzzy Systems*, 20(4), 39-56.
- Ünver, M., Özçelik, G. ve Olgun, M. 2018. A fuzzy measure theoretical approach for multi criteria decision making problems containing sub-criteria, *Journal of Intelligent & Fuzzy Systems*, 35(6), 6461-6468.
- Ünver, M., Özçelik, G., ve Olgun, M. 2020. A pre-subadditive fuzzy measure model and its theoretical interpretation, *TWMS Journal of Applied and Engineering Mathematics*, 10(1), 270-278.
- Ünver, M., Olgun, M. 2023. Continuous Function Valued q-Rung Orthopair Fuzzy Sets and an Extended TOPSIS. *International Journal of Fuzzy Systems*, 25(6), 2203-2217.
- Verma, R., Sharma, B. D. 2013. Intuitionistic fuzzy Jensen-Rényi divergence: applications to multiple-attribute decision making. *Informatica*, 37(4).
- Verma, R. 2021. On intuitionistic fuzzy order- α divergence and entropy measures with MABAC method for multiple attribute group decision-making. *Journal of Intelligent & Fuzzy Systems*, 40(1), 1191-1217.
- Vlachos, I. K., Sergiadis, G. D. 2007. Intuitionistic fuzzy information–applications to pattern recognition. *Pattern Recognition Letters*, 28(2), 197-206.
- Wei, P., Ye, J. 2010. Improved intuitionistic fuzzy cross-entropy and its application to pattern recognitions. In *2010 IEEE International Conference on Intelligent Systems and Knowledge Engineering* (pp. 114-116). IEEE
- Wei, G. W. 2008. Maximizing deviation method for multiple attribute decision making in intuitionistic fuzzy setting. *Knowledge-Based Systems*, 21(8), 833-836.
- Wieczynski, J. C., Dimuro, G. P., Borges, E. N., Santos, H. S., Lucca, G., Lourenzutti, R. ve Bustince, H. 2020, July. “Generalizing the GMC-RTOPSIS method using CT-integral pre-aggregation functions”, In *2020 IEEE International Conference on Fuzzy Systems (FUZZ-IEEE)* (pp. 1-8). IEEE.
- Wieczynski, J., Lucca, G., Borges, E. N., Pereira Dimuro, G., Lourenzutti, R. ve Bustince Sola, H. 2021. CC-separation measure applied in business group decision making, In *Filipe, F.; Smialek, M.; Brodsky, A.; Hammoudi, S.(Eds.): Proceedings of the 23rd International Conference on Enterprise Information Systems (ICEIS 2021)*. Scitepress, 2021, pp. 452-462,. SciTePress.

- Wieczynski, J., Lucca, G., Borges, E., Emmendorfer, L., Ferrero-Jaurrieta, M., Dimuro, G. ve Bustince, H. 2022, July. Applying d-XChoquet integrals in classification problems, In 2022 IEEE International Conference on Fuzzy Systems (FUZZ-IEEE) (pp. 1-7). IEEE.
- Wu, X., Song, Y., and Wang, Y. 2021. Distance-Based Knowledge Measure for Intuitionistic Fuzzy Sets with Its Application in Decision Making. *Entropy*, 23(9), 1119.
- Xia, M., Xu, Z. 2012. Entropy/cross entropy-based group decision making under intuitionistic fuzzy environment. *Information Fusion*, 13(1), 31-47.
- Yager, R. R. 2013a. Pythagorean membership grades in multicriteria decision making, *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 22(4), 958-965.
- Yager, R. R. 2013b. Pythagorean fuzzy subsets, In 2013 joint IFSA world congress and NAFIPS annual meeting (IFSA/NAFIPS) (pp. 57-61). IEEE.
- Yager, R. R. 2016. Generalized orthopair fuzzy sets, *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 25(5), 1222-1230.
- Ye, J. 2009. Multicriteria fuzzy decision-making method based on the intuitionistic fuzzy cross-entropy. In 2009 international conference on intelligent human-machine systems and cybernetics (Vol. 1, pp. 59-61). IEEE.
- Ye, F. 2010. An extended TOPSIS method with interval-valued intuitionistic fuzzy numbers for virtual enterprise partner selection. *Expert Systems with Applications*, 37(10), 7050-7055.
- Zadeh, L. A., 1965. Fuzzy sets. *Information and control*. 8(3):338-353.
- Zadeh, L. A. 1968. Probability measures of fuzzy events. *Journal of mathematical analysis and applications*, 23(2), 421-427.
- Zhang, Q. S., Jiang, S. Y. 2008. A note on information entropy measures for vague sets and its applications. *Information Sciences*, 178(21), 4184-4191.
- Zhang, H., Yu, L. 2012. MADM method based on cross-entropy and extended TOPSIS with interval-valued intuitionistic fuzzy sets. *Knowledge-Based Systems*, 30, 115-120.
- Zopounidis, C., Pardalos, P. M. ve Baourakis, G. 2001. *Fuzzy sets in management, economics, and marketing*, world Scientific.