

**BİR ABELYEN ÖRTÜ UZAYI
OLARAK YÜKSEK HOMOTOPİ
GRUPLARININ H_n DEMETİ**

Erdal GÜNER

**DOKTORA TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
1996**

42829

ANKARA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**BİR ABELYEN ÖRTÜ UZAYI OLARAK
YÜKSEK HOMOTOPİ GRUPLARININ H_n DEMETİ**

Erdal GÜNER

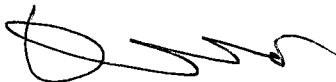
DOKTORA TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Bu tez 28.06/1996 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından 90 (DOKSAN) not taktir edilerek Oybirliği / ~~Okunmuş~~ ile kabul edilmiştir.

Prof.Dr. Sabahattin BALCI
(Danışman)



PROF.DR. EKREM ÖZTÜRK



PROF.DR. CİHAN ORHAN



F.B. YÜKSEKÖĞRETİM ENSTİTÜSÜ
DOKTORA TEZİ

ÖZET

Doktora Tezi

BİR ABELYEN ÖRTÜ UZAYI OLARAK
YÜKSEK HOMOTOPI GRUPLARININ H_n DEMETİ

Erdal GÜNER

Ankara Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof.Dr. Sabahattin BALCI

1996, Sayfa: 54

Jüri: Prof.Dr. Sabahattin BALCI

Prof.Dr. Cihan ORHAN

Prof.Dr. Ekrem ÖZTÜRK

Dört bölümden oluşan bu çalışmada ilk bölüm giriş için ayrıldı.

İkinci bölümde temel kavramlara yer verildi.

Üçüncü bölümde, irtibatlı, lokal eğrisel irtibatlı bir topolojik uzay üzerinde Yüksek Homotopi gruplarının H_n demeti teşkil edilerek bazı karakterizasyonları oluşturuldu ve "Genelleştirilmiş Whitney Toplamı" tanımı verilerek gösterildi ki $H^* = H_{n_1} \oplus H_{n_2} \oplus \dots \oplus H_{n_n}$ demeti $H_{n_1} \times H_{n_2} \times \dots \times H_{n_n}$ demetine izomorftur.

Dördüncü bölümde, H_n nin regüler ve abelyen bir örtü uzayı olduğu ispatlandı. Herhangibir $H'_n \subset H_n$ grup alt demeti için $Q_{H'_n}$ bölüm demeti teşkil edilerek bu bölüm demetinin abelyen grupların bir demeti olarak regüler bir örtü uzayı olduğu gösterildi.

ANAHTAR KELİMELER: Yüksek Homotopi gruplarının H_n demeti, Kesit, Genelleştirilmiş Whitney Toplamı, Abelyen grupların demeti, Regüler örtü uzayı, Abelyen örtü uzayı, Bölüm demeti, Yükseltme.

ABSTRACT

Ph.D. Thesis

THE SHEAF H_n OF HIGHER HOMOTOPY GROUPS
AS AN ABELIAN COVERING SPACE

Erdal GÜNER

Ankara University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Prof.Dr. Sabahattin BALCI

1996, Page: 54

Jury: Prof.Dr. Sabahattin BALCI

Prof.Dr. Cihan ORHAN

Prof.Dr. Ekrem ÖZTÜRK

This thesis consists of four chapters. The first chapter is devoted to the introduction.

In the second chapter, fundamental concepts are included.

In the third chapter, constructing the sheaf H_n of higher homotopy groups on a connected and locally path connected topological space, its some characterizations are examined and defining "The Generalized Whitney Sum" show that the sheaf $H^* = H_{n_1} \oplus H_{n_2} \oplus \dots \oplus H_{n_n}$ is isomorphic to the sheaf $H_{n_1} \times H_{n_2} \times \dots \times H_{n_n}$.

Finally in the fourth chapter, we prove that H_n is a regular and abelian covering space. Constructing the Quotient sheaf $Q_{H'_n}$ for any subsheaf of group $H'_n \subset H_n$, it is shown that $Q_{H'_n}$ is a regular covering space as a sheaf of abelian groups.

KEY WORDS: The sheaf H_n of higher homotopy groups, Section, Generalized Whitney Sum, Sheaf of abelian groups, Regular covering space, Abelian covering space, Quotient sheaf, Lifting.

TEŐEKKÖR

Bu alıőma konusunu bana veren ve araőtırmalarım süresince yakın ilgi ve yardımlarını hiçbir zaman esirgemeyen sayın hocam Prof.Dr. Sabahattin BALCI'ya en derin saygı ve teőekkürlerimi sunarım.



İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa</u>
ÖZET.....	i
ABSTRACT.....	ii
TEŞEKKÜR.....	iii
SİMGELER.....	v
1. GİRİŞ.....	1
2. TEMEL KAVRAMLAR.....	2
2.1. Esas Grup.....	2
2.2. Yüksek Homotopi Grubu.....	5
3. YÜKSEK HOMOTOPI GRUPLARININ DEMETİ.....	16
3.1. Demet Kavramı.....	16
3.2. Yüksek Homotopi Gruplarının Demeti.....	20
3.3. Yüksek Homotopi Gruplarının Demetleri Üzerine Karakterizasyonlar.....	23
3.4. Karşıt Teoremler.....	26
3.5. Genelleştirilmiş Whitney Toplamı.....	30
4. BİR ABELYEN ÖRTÜ UZAYI OLARAK H_n DEMETİ.....	37
4.1. H_n nin Karakteristik Görünümü.....	37
4.2. H_n nin Altdemetleri ve Bölüm Demeti.....	43
KAYNAKLAR.....	52
ÖZGEÇMİŞ.....	54

SİMGELER

$\pi_1(X, x_0)$	1- boyutlu Homotopi grubu veya Esas grup
$\pi_n(X, x_0)$	n- boyutlu Homotopi grubu veya Yüksek Homotopi grubu
S_x	S demetinin x noktası üzerindeki sapı
$\Gamma(W, S)$	S demetinin W üzerindeki kesitlerinin cümlesi
S^*	S_1, S_2, \dots, S_L demetlerinin Whitney toplamı
(f, f^*)	Çiftler arasındaki homomorfizm veya izomorfizm
H_n	Yüksek Homotopi gruplarının demeti
H'_n	H_n nin grup altdemeti
H^*	$H_{n_1}, H_{n_2}, \dots, H_{n_n}$ demetlerinin Genelleştirilmiş Whitney toplamı
$\overset{*}{H}$	H_n demetinin $H_n^1, H_n^2, \dots, H_n^n$ grup altdemetlerinin Whitney toplamı
$Q_{H'_n}$	Bölüm demeti

BÖLÜM 1

GİRİŞ

Esas grup (veya 1- boyutlu homotopi grubu) cebirsel topolojide önemli bir kavram olup, topolojik uzaylara ait çözümü zor olan topolojik problemler için daha kolay bir çözüm yolu bulunabilmesinde ve mukabil cebirsel problemlerde önemli bir araçtır. Balcı (1982) demet kavramını da gözönüne alarak Esas gruplarını demetini teşkil etmiş ve Esas grubun cebirsel topolojide yüklendiği rolün bu demet tarafından da yüklenebileceğini göstermiştir. Ayrıca Esas grup yardımıyla teşkili mümkün olmayan karşıt problemlerin çözümüne yer vermiştir (Balcı 1983). Yine, Balcı (1988) Esas grupların demetinin örtü uzaylarını tamamen belirttiğini göstermiştir. Canbolat (1982) ise Yüksek Homotopi gruplarının demetini teşkil etmiş ve tek yönlü bazı karakterizasyonlar vermiştir.

Çalışmamızın ikinci bölümü iki kısma ayrılmış olup, diğer bölümler için temel oluşturmaktadır. Birinci kısımda Esas grup'a ikinci kısımda ise Yüksek Homotopi grubuna ait konumuzla ilgili tarif ve teoremler verilmiştir.

Üçüncü bölümde, önce demet kavramı üzerinde durularak Yüksek Homotopi gruplarının demetinin Abelyen grupların bir demeti olduğu gösterilmiş ve çift yönlü karakterizasyonlar verilmiştir. Daha sonra $i=1,2,\dots,n$ olmak üzere irtibatlı, lokal eğrisel irtibatlı X_i topolojik uzayları üzerinde Yüksek Homotopi gruplarının H_{n_i} demetleri dikkate alınarak "Genelleştirilmiş Whitney Toplamı" tarif edilmiş ve $H^* = H_{n_1} \oplus H_{n_2} \oplus \dots \oplus H_{n_n}$ demetinin $H_{n_1} \times H_{n_2} \times \dots \times H_{n_n}$ demetine izomorf olduğu gösterilmiştir.

Dördüncü bölümde, X irtibatlı, lokal eğrisel irtibatlı bir topolojik uzay (veya bir Riemann yüzeyi) olmak üzere H_n nin X üzerinde Regüler örtü uzayı olduğu ispatlanarak, herhangi $H'_n \subset H_n$ grup aldemeti için $Q_{H'_n}$ bölüm demeti teşkil edilmiş ve bu bölüm demetinin X üzerinde Abelyen grupların bir demeti olduğu gösterilmiştir. Ayrıca H_n nin grup aldemetlerinin Whitney toplamı tarif edilerek H_x^* sapının $(H_n^1)_x \times (H_n^2)_x \times \dots \times (H_n^n)_x$ sapına izomorf olduğu belirlenmiştir. Burada $i=1,2,\dots,n$ olmak üzere H_n^i ler X üzerinde H_n demetinin grup aldemetleridir.

BÖLÜM 2

TEMEL KAVRAMLAR

2.1. Esas Grup

Tarif 2.1.1. X bir topolojik uzay, $I=[0,1]=\{x:0\leq x\leq 1\}$ birim kapalı aralığı olsun. Bu taktirde bir $\alpha:I\rightarrow X$ sürekli tasvirine eğri denir. $\alpha(0)$ noktasına eğrinin başlangıç, $\alpha(1)$ noktasına eğrinin bitim noktası denir.

α eğrisinin inversi diye de $\alpha^{-1}:I\rightarrow X$, öyleki $\alpha^{-1}(x)=\alpha(1-x)$, tasvirine denir.

Teorem 2.1.1. X, Y topolojik uzaylar, $A, B\subset X$ kapalı altuzaylar ve $X=A\cup B$ olsun. Şayet $f:A\rightarrow Y$ ve $g:B\rightarrow Y$, $f|_{A\cap B}=g|_{A\cap B}$ şartını sağlayan sürekli tasvirler ise bu taktirde $h|_A=f$, $h|_B=g$ olacak şekilde sürekli bir $h:X\rightarrow Y$ tasviri vardır.

İspat. $P\subset X$ bir altcümle ve $P_1=P\cap A$, $P_2=P\cap B$ olsun. Bu taktirde $P=P_1\cup P_2$ ve dolayısıyla $h(P)=h(P_1)\cup h(P_2)$ dir. Buradan $h(\bar{P})=h(\bar{P}_1)\cup h(\bar{P}_2)$ dir. Şimdi $x\in\bar{P}_1$ bir nokta olsun. Bu durumda x i ihtiva eden herbir açık cümle, P_1 e ait bir nokta ihtiva eder, ve dolayısıyla A ya ait bir nokta ihtiva eder. O halde $x\in\bar{A}$ dir. A kapalı olduğundan $x\in A$ dir. Böylece $\bar{P}_1\subset A$ dir. Buradan $h(\bar{P}_1)=f(\bar{P}_1)$ dir. Aynı şekilde $\bar{P}_2\subset B$ ve $h(\bar{P}_2)=g(\bar{P}_2)$ dir. Fakat f ve g sürekli olduklarından $f(\bar{P}_1)\subset\overline{f(P_1)}$ ve $g(\bar{P}_2)\subset\overline{g(P_2)}$ dir. Dolayısıyla

$$\begin{aligned} h(\bar{P}) &= h(\bar{P}_1)\cup h(\bar{P}_2) \\ &= f(\bar{P}_1)\cup g(\bar{P}_2) \\ &\subset \overline{f(P_1)}\cup\overline{g(P_2)} \\ &= \overline{h(P_1)}\cup\overline{h(P_2)} \\ &= \overline{h(P_1\cup P_2)} \end{aligned}$$

$$=\overline{h(P)}$$

dir. Böylece $h(\overline{P}) \subset \overline{h(P)}$ dir. Bu ise h tasvirinin sürekli olduğunu gösterir.

Tarif 2.1.2. $\alpha, \beta: I \rightarrow X$ $\alpha(1)=\beta(0)$ şartını sağlayan eğriler olsun. Bu taktirde

$$\gamma(x) = \begin{cases} \alpha(2x) & . \quad 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ \beta(2x-1) & . \quad \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

şeklinde tarif edilen $\gamma: I \rightarrow X$ tasviri, Teorem 2.1.1 den dolayı sürekli dir. Dolayısıyla γ , X de bir eğri tarif eder. Bu eğriye α ve β eğrilerinin çarpımı denir ve $\gamma = \alpha \beta$ şeklinde gösterilir.

Tarif 2.1.3. α sabit bir tasvir, yani $\alpha(I)$ X de bir tek noktadan ibaret ise, α eğrisine "sıfır eğri" denir.

Tarif 2.1.4. α eğrisi $\alpha(0)=\alpha(1)$ şartını sağlıyorsa bu taktirde α ya bir "kapalı eğri" denir.

Tarif 2.1.5. $\alpha, \beta: I \rightarrow X$ iki eğri olsun. Şayet $F(x,0)=\alpha$, $F(x,1)=\beta$ şartını sağlayan sürekli bir $F=F(x,t): I \times J \rightarrow X$ tasviri varsa α, β ya homotoptur denir ve $\alpha \sim \beta$ ile gösterilir.

F tasvirine de α dan β ya homotopi denir.

Tarif 1.1.6. $\alpha, \beta: I \rightarrow X$, $\alpha(0)=\beta(0)$ ve $\alpha(1)=\beta(1)$ şartlarını sağlayan eğriler olsun. Şayet α ve β , I nin $(0,1)$ altcümlesine nazaran homotop iseler $\alpha \sim \beta \text{ rel}(0,1)$ denir.

X bir topolojik uzay ve $x_0 \in X$ keyfi saibt bir nokta olsun X de x_0 da başlayıp x_0 da biten bütün kapalı eğrilerin cümlesini gözönüne alalım. x_0 a eğriler için taban nokta, eğrilere de x_0 da eğriler denir. Şimdi α , x_0 da herhangi bir kapalı eğri olsun. x_0 da α ya homotop bütün kapalı eğrilerin cümlesini $[\alpha]$ homotopi sınıfı ile, bu homotopi sınıflarının cümlesini de

$$\pi_1(X, x_0) = \{ [\alpha] \mid \alpha: I \rightarrow X, x_0 \text{ da kapalı eğri} \}$$

ile gösterelim. Bu cümle üzerinde $[\alpha]$, $[\beta]$ gibi iki homotopi sınıfının çarpımı

$$[\alpha].[\beta]=[\alpha.\beta]$$

şeklinde tarif edilir. Bu çarpım iyi tariflidir. Gerçekten $\alpha\sim\gamma$ ve $\beta\sim\delta$ ise $\alpha\beta\sim\gamma\delta$ olup

$$[\alpha].[\beta]=[\alpha.\beta]=[\gamma.\delta]$$

dır (Balcı 1982).

Gösterilebilir ki yukarıda tarif edilen işlemle birlikte $\Pi_1(X, x_0)$ bir grup teşkil eder. Bu gruba X topolojik uzayının x_0 noktasındaki "Esas Grubu" denir (Balcı 1982).

Dikkat edilmelidir ki, eğrisel irtibatlı bir topolojik uzayın esas grubu taban noktasına bağlı değildir. Taban nokta değiştiğinde esas grup da değişir. Şimdi bunu ifade eden teoremi verelim.

Teorem 2.1.2. X eğrisel irtibatlı bir topolojik uzay, x_0 ve x_1 , X de farklı iki nokta olsun. Bu takdirde

$$\Pi_1(X, x_0) \cong \Pi_1(X, x_1)$$

dır (Balcı 1982).

Şimdi de farklı topolojik uzayların esas grupları arasındaki ilişkiyi veren aşağıdaki teoremi ifade ediyoruz.

Teorem 2.1.3. X_0 , X_1 iki topolojik uzay, $x_0 \in X_0$ keyfi sabit bir nokta ve $f: X_0 \rightarrow X_1$ de sürekli bir tasvir olsun. Bu takdirde bir

$$f^*: \Pi_1(X, x_0) \rightarrow \Pi_1(X_1, x_1=f(x_0))$$

homomorfizmi vardır (Uluçay 1978).

Bu teoremi gözöntüne alarak söyleyebiliriz ki; her noktalı topolojik uzaya, bu uzayın esas grubunu ve her $f: X_0 \rightarrow X_1$ sürekli tasvirine de $f^*: \Pi_1(X_0, x_0) \rightarrow \Pi_1(X_1, x_1=f(x_0))$ homomorfizmini karşılık getirmek şartıyla noktalı topolojik uzaylar

ve sürekli tasvirleri kategorisinden, gruplar ve homomorfizmleri kategorisine bir fonktor (kovaryant fonktor) vardır (Uluçay 1978).

Teorem 2.1.4. X_0, X_1 iki topolojik uzay, $x_0 \in X_0$ keyfi sabit bir nokta ve $f: X_0 \rightarrow X_1$ bir homeomorfizm olsun. Bu takdirde

$$f^*: \Pi_1(X_0, x_0) \rightarrow \Pi_1(X_1, x_1 = f(x_0))$$

tasviri bir izomorfizmdir (Uluçay 1978).

2.2. Yüksek Homotopi Grubu

Bundan önceki kısımda bir X topolojik uzayının x_0 noktasındaki Esas grubunu teşkil etmiş ve $\Pi_1(X, x_0)$ ile göstermiştik. Bu notasyondaki 1 indeksi R-Euclid uzayının bir parçası olan $I=[0,1]$ birim kapalı aralığının boyutunu ifade etmektedir. Şayet I yerine R^n Euclid uzayının bir parçası olan I_n birim kübü gözönüne alınırsa Esas grup kavramı n -boyuta genelleştirilebilir. Ancak bu genelleştirmede $n > 1$ durumunda Esas grup ifadesi yerine Yüksek veya n -boyutlu Homotopi grubu ifadesi kullanılmaktadır. Dolayısıyla Esas gruba 1-boyutlu Homotopi grubu da denilir.

$x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, R^n de herhangi bir nokta ise

$I_n = \{x \in R^n : 0 \leq x_i \leq 1, i=1, 2, \dots, n\}$ dir. I_n deki topoloji

$$\|x\| = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{1/2}$$

olmak üzere

$$d(x, y) = \|x - y\|$$

metriği ile tespit edilen topolojidir. I_n nin sınırı

$$i_n = \left\{ x \in I_n : \prod_{i=1}^n x_i (1 - x_i) = 0 \right\}$$

cümlesidir.

Tarif 2.2.1. X bir topolojik uzay, $x_0 \in X$ sabit bir nokta ve $\alpha, \beta: I_n \rightarrow X \ni \alpha(i_n) = \beta(i_n) = x_0$ herhangi iki sürekli tasvir olsun. Şayet

$$i) F(x,0) = \alpha, F(x,1) = \beta$$

$$ii) F(I_n \times J) = x_0$$

şartlarını sağlayan bir $F = F(x,t): I_n \times J \rightarrow X$ sürekli tasviri varsa, bu takdirde α, i_n ye göre β ya homotoptur denir ve $\alpha \sim \beta$ rel. i_n ile gösterilir.

Tarif 2.2.2. X bir topolojik uzay ve $\alpha, \beta: I_n \rightarrow X \ni \alpha(i_n) = \beta(i_n) = x_0$ herhangi iki sürekli tasvir olsun.

$$\gamma = \begin{cases} \alpha(2x_1, x_2, \dots, x_n) & \cdot \quad 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ \beta(2x_1 - 1, x_2, \dots, x_n) & \cdot \quad \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

şeklinde tarif edilen $\gamma: I_n \rightarrow X$ tasviri sürekli olup $\gamma(i_n) = x_0$ dir. $n=1$ durumunda γ, α ve β eğrilerinin çarpımıdır. $n > 1$ için γ tasvirine α ve β tasvirlerinin çarpımı denir ve $\gamma = \alpha\beta$ ile gösterilir.

Teorem 2.2.1. \sim rel. i_n bağıntısı bir eşdeğerlik bağıntısıdır (Uluçay 1978).

Şimdi, Yüksek Homotopi grubunun teşkilinde istifade edeceğimiz aşağıdaki lemmaları veriyoruz.

Lemma 2.2.1. X bir topolojik uzay, $x_0 \in X$ sabit bir nokta ve $\alpha, \beta, \gamma, \delta: I_n \rightarrow X \ni \alpha(i_n) = \beta(i_n) = \gamma(i_n) = \delta(i_n) = x_0$ sürekli tasvirler olsun. Eğer $\alpha \sim \beta$ rel. i_n ve $\gamma \sim \delta$ rel. i_n ise bu takdirde $\alpha\gamma \sim \beta\delta$ rel. i_n dir.

İspat.

$\alpha \sim \beta$ rel. $i_n \Rightarrow \exists F = F(x,t): I_n \times J \rightarrow X$ sürekli, ve $F(x,0) = \alpha,$

$$F(x,1) = \beta, F(I_n \times J) = x_0.$$

$\gamma \sim \delta \text{ rel. } I_n \Rightarrow \exists G = G(x, t): I_n \times J \rightarrow X$ sürekli, ve $G(x, 0) = \gamma$,

$$G(x, 1) = \delta, \quad G(I_n \times J) = x_0.$$

dir. Şimdi bir $H: I_n \times J \rightarrow X$ tasvirini aşağıdaki şekilde tarif edelim:

$$H = H(x, t) = \begin{cases} F((2x_1, x_2, \dots, x_n), t) & . \quad 0 \leq x_1 \leq \frac{1}{2} \\ G((2x_1 - 1, x_2, \dots, x_n), t) & . \quad \frac{1}{2} \leq x_1 \leq 1 \end{cases}$$

H tasviri Teorem 2.1.1 den dolayı sürekli dir. Üstelik,

$$H(x, 0) = \begin{cases} F((2x_1, x_2, \dots, x_n), 0) & . \quad 0 \leq x_1 \leq \frac{1}{2} \\ G((2x_1 - 1, x_2, \dots, x_n), 0) & . \quad \frac{1}{2} \leq x_1 \leq 1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \alpha(2x_1, x_2, \dots, x_n) & . \quad 0 \leq x_1 \leq \frac{1}{2} \\ \gamma(2x_1 - 1, x_2, \dots, x_n) & . \quad \frac{1}{2} \leq x_1 \leq 1 \end{cases}$$

$$= \alpha\gamma$$

ve

$$H(x, 1) = \begin{cases} F((2x_1, x_2, \dots, x_n), 1) & . \quad 0 \leq x_1 \leq \frac{1}{2} \\ G((2x_1 - 1, x_2, \dots, x_n), 1) & . \quad \frac{1}{2} \leq x_1 \leq 1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \beta(2x_1, x_2, \dots, x_n) & . \quad 0 \leq x_1 \leq 1 \\ \delta(2x_1 - 1, x_2, \dots, x_n) & . \quad \frac{1}{2} \leq x_1 \leq 1 \end{cases}$$

$$= \beta\delta$$

dir. Diğer taraftan

$$H(I_n \times J) = x_0$$

dır. Dolayısıyla $\alpha\gamma \sim \beta\delta$ rel. I_n dir.

Lemma 2.2.2. X bir topolojik uzay, $x_0 \in X$ sabit bir nokta ve $\alpha, \beta, \gamma: I_n \rightarrow X \ni \alpha(i_n) = \beta(i_n) = \gamma(i_n) = x_0$ herhangi sürekli tasvirler olsun. Bu takdirde $(\alpha\beta)\gamma \sim \alpha(\beta\gamma)$ rel. I_n dir.

İspat. $F = F(x, t): I_n \times J \rightarrow X$ tasviri aşağıdaki şekilde tarif edilmiş olsun.

$$F(x, t) = \begin{cases} \alpha\left(\frac{4x_1}{1+t}, x_2, \dots, x_n\right) & \cdot \quad 0 \leq x_1 \leq \frac{1+t}{4} \\ \beta(4x_1 - 1 - t, x_2, \dots, x_n) & \cdot \quad \frac{1+t}{4} \leq x_1 \leq \frac{2+t}{4} \\ \gamma\left(1 - \frac{4(1-x_1)}{2-t}, x_2, \dots, x_n\right) & \cdot \quad \frac{2+t}{4} \leq x_1 \leq 1 \end{cases}$$

F tasviri Teorem 2.1.1 den dolayı süreklidir. Üstelik,

$$F(x, 0) = \begin{cases} \alpha(4x_1, x_2, \dots, x_n) & \cdot \quad 0 \leq x_1 \leq \frac{1}{4} \\ \beta(4x_1 - 1, x_2, \dots, x_n) & \cdot \quad \frac{1}{4} \leq x_1 \leq \frac{1}{2} \\ \gamma(2x_1 - 1, x_2, \dots, x_n) & \cdot \quad \frac{1}{2} \leq x_1 \leq 1 \end{cases}$$

$$= (\alpha\beta)\gamma$$

ve

$$F(x, 1) = \begin{cases} \alpha(2x_1, x_2, \dots, x_n) & \cdot \quad 0 \leq x_1 \leq \frac{1}{2} \\ \beta(4x_1 - 2, x_2, \dots, x_n) & \cdot \quad \frac{1}{2} \leq x_1 \leq \frac{3}{4} \\ \gamma(4x_1 - 3, x_2, \dots, x_n) & \cdot \quad \frac{3}{4} \leq x_1 \leq 1 \end{cases}$$

$$= \alpha(\beta\gamma).$$

Diğer taraftan

$$F(\dot{I}_n \times J) = x_0.$$

Dolayısıyla $(\alpha\beta)\gamma \sim \alpha(\beta\gamma)$ rel. \dot{I}_n dir.

Lemma 2.2.3. X bir topolojik uzay, $x_0 \in X$ sabit bir nokta, $\alpha: \dot{I}_n \rightarrow X \ni \alpha(\dot{I}_n) = x_0$ sürekli tasvir ve $\beta: \dot{I}_n \rightarrow X$, $x_0 \in X$ de sıfır tasvir, yani $\beta(\dot{I}_n) = x_0$ olsun. Bu takdirde $\alpha\beta \sim \alpha$ rel. \dot{I}_n dir. Aynı şekilde γ , x_0 da sıfır tasvir ise $\gamma\alpha \sim \alpha$ rel. \dot{I}_n dir.

İspat. $F = F(x, t): \dot{I}_n \times J \rightarrow X$ tasviri aşağıdaki şekilde tarif edilmiş olsun:

$$F(x, t) = \begin{cases} \alpha\left(\frac{2x_1}{1+t}, x_2, \dots, x_n\right) & \cdot \quad 0 \leq x_1 \leq \frac{1+t}{2} \\ \alpha(\dot{I}_n) = \beta(x_1, x_2, \dots, x_n) & \cdot \quad \frac{1+t}{2} \leq x_1 \leq 1 \end{cases}$$

Bu tasvir Teorem 2.1.1 den dolayı sürekli dir. Üstelik ,

$$F(x, 0) = \begin{cases} \alpha(2x_1, x_2, \dots, x_n) & \cdot \quad 0 \leq x_1 \leq \frac{1}{2} \\ \alpha(\dot{I}_n) = \beta(x_1, x_2, \dots, x_n) & \cdot \quad \frac{1}{2} \leq x_1 \leq 1 \end{cases}$$

$$= \alpha\beta$$

ve

$$F(x, 1) = \begin{cases} \alpha(x_1, x_2, \dots, x_n) & \cdot \quad 0 \leq x_1 \leq 1 \\ \alpha(\dot{I}_n) & \cdot \quad x = 1 \end{cases}$$

$$= \alpha$$

dir. Diğer taraftan

$$F(\dot{I}_n \times J) = x_0$$

dir. Dolayısıyla $\alpha\beta \sim \alpha$ rel. \dot{I}_n dir.

Benzer şekilde $\gamma\alpha \sim \alpha$ rel. \dot{I}_n dir.

Lemma 2.2.4. X bir topolojik uzay, $x_0 \in X$ sabit bir nokta, $\alpha: I_n \rightarrow X$ $\alpha(i_n) = x_0$ sürekli bir tasvir olsun. Bu takdirde $\alpha\alpha^{-1}$ ve $\alpha^{-1}\alpha$ sıfır tasvire homotopurlar.

İspat. $F = F(x, t): I_n \times I \rightarrow X$ tasviri aşağıdaki şekilde tarif edilmiş olsun:

$$F(x, t) = \begin{cases} \alpha(2x_1(1-t), x_2, \dots, x_n) & \cdot \quad 0 \leq x_1 \leq \frac{1}{2} \\ \alpha(2(1-x_1)(1-t), x_2, \dots, x_n) & \cdot \quad \frac{1}{2} \leq x_1 \leq 1 \end{cases}$$

Bu tasvir Teorem 2.1.1 den dolayı sürekli, üstelik ,

$$F(x, 0) = \begin{cases} \alpha(2x_1, x_2, \dots, x_n) & \cdot \quad 0 \leq x_1 \leq \frac{1}{2} \\ \alpha(2(1-x_1), x_2, \dots, x_n) & \cdot \quad \frac{1}{2} \leq x_1 \leq 1 \end{cases}$$

$$= \alpha \cdot \alpha^{-1}$$

ve

$$F(x, 1) = \begin{cases} \alpha(0, x_2, \dots, x_n) & \cdot \quad 0 \leq x_1 \leq \frac{1}{2} \\ \alpha(0, x_2, \dots, x_n) & \cdot \quad \frac{1}{2} \leq x_1 \leq 1 \end{cases}$$

$$= \alpha(0, x_2, \dots, x_n)$$

$$= x_0$$

dır. Dolayısıyla $\alpha\alpha^{-1}$, resmi x_0 olan sıfır tasvire homotopur. Benzer şekilde gösterilebilir ki $\alpha^{-1}\alpha$ da, resmi x_0 olan sıfır tasvire homotopur.

Şimdi, X bir topolojik uzay, $x_0 \in X$ keyfi sabit bir nokta olmak üzere $\alpha(i_n) = x_0$ şartını sağlayan $\alpha: I_n \rightarrow X$ sürekli tasvirlerini gözönüne alalım. $\sim_{rel. I_n}$ bağıntısı bir eşdeğerlik bağıntısı olup α sürekli tasvirlerini ayrık eşdeğerlik sınıflarına ayırır. Bu ayrık eşdeğerlik sınıflarına homotopi sınıfları $rel. I_n$ denilir ve $[\alpha]$ ile gösterilir. Bu eşdeğerlik sınıflarının cümlesini de $\Pi_n(X, x_0)$ ile gösterelim. $\Pi_n(X, x_0)$ üzerinde aşağıdaki şekilde bir işlem tarif ediyoruz: Herhangi $[\alpha], [\beta] \in \Pi_n(X, x_0)$ için,

$$[\alpha].[\beta]=[\alpha.\beta]$$

olsun. Kolaylıkla gösterilebilir ki bu işlem iyi tariftir.

Teorem 2.2.2. $(\Pi_n(X, x_0), \cdot)$ bir gruptur.

İspat. Bu ikilinin grup olduğu Lemma 2.2.1, Lemma 2.2.2, Lemma 2.2.3 ve Lemma 2.2.4 ün bir direkt neticesidir.

Bu şekilde elde edilen $\Pi_n(X, x_0)$ grubuna X topolojik uzayının x_0 noktasındaki n boyutlu homotopi grubu veya n . mertebeden Yüksek Homotopi grubu denir. $n=1$ için $\Pi_1(X, x_0)$ bildiğimiz Esas gruptur. Şunu da belirtelim ki $n>1$ için $\Pi_n(X, x_0)$ yüksek homotopi grubu komütatiftir (Hilton 1961).

Şimdi yüksek homotopi grubu için karakterizasyonlar mahiyetinde olan aşağıdaki teoremleri veriyoruz.

Teorem 2.2.3. X eğrisel irtibatlı bir topolojik uzay ve $x_0, x_1 \in X$ herhangi iki nokta olsun. Bu takdirde

$$\Pi_n(X, x_0) \cong \Pi_n(X, x_1)$$

dir (Hilton 1961).

Dikkat edilmelidir ki, eğrisel irtibatlı uzaylar için yüksek homotopi grubu taban noktaya bağlı değildir.

Teorem 2.2.4. $(X, x_0), (Y, y_0)$ noktalı topolojik uzaylar ve $\Pi_n(X, x_0), \Pi_n(Y, y_0)$ bu uzayların yüksek mertebeden homotopi grupları olsun. Bu durumda

$$\Pi_n(X \times Y, x_0 \times y_0) \cong \Pi_n(X, x_0) \otimes \Pi_n(Y, y_0)$$

dir.

İspat. P_x, P_y $X \times Y$ nin sırası ile X ve Y üzerine izdüşüm tasvirleri olsun. Yani, $f \in L(X \times Y, x_0 \times y_0)$ için $P_x \circ f \in L(X, x_0)$ ve $P_y \circ f \in L(Y, y_0)$ olsun.

Şimdi bir $\Phi: \Pi_n(X \times Y, x_0 \times y_0) \rightarrow \Pi_n(X, x_0) \otimes \Pi_n(Y, y_0)$ tasvirini her $[f] \in \Pi_n(X \times Y, x_0 \times y_0)$ için

$$\Phi([f]) = ([P_x \circ f], [P_y \circ f])$$

şeklinde tarif edelim. Bu tasvir iyi tariflidir. Gerçekten $f_0 \in [f]$ ise $f_0 \sim f$ rel $x_0 \times y_0$ dir.

Dolayısıyla bir

$$F = F(x, t): I_n \times J \rightarrow X \times Y$$

homotopisi vardır öyleki

$$F(x, 0) = f_0, F(x, 1) = f \text{ ve } F(I_n \times J) = x_0 \times y_0$$

dır.

$P_x \circ F: I_n \times J \rightarrow X$ tasvirini gözönüne alalım. Buna göre $(P_x \circ F)(x, 0) = P_x \circ f_0$, $(P_x \circ F)(x, 1) = P_x \circ f$ ve $(P_x \circ F)(I_n \times J) = x_0$ dir. Buradan $P_x \circ f_0 \sim P_x \circ f$ rel I_n bulunur. Yani $[P_x \circ f]$ birtek olarak belirtilmiştir.

Benzer şekilde $[P_y \circ f]$ nin de birtek olarak belirtildiği kolayca görülebilir.

i) Φ üzerinedir. Gerçekten $([g_1], [g_2]) \in \pi_n(X, x_0) \otimes \pi_n(Y, y_0)$ olmak üzere $f \in L(X \times Y, x_0 \times y_0)$ elemanını

$$f(x) = \begin{cases} (g_1(2x_1, x_2, \dots, x_n), y_0) & \cdot \quad 0 \leq x_1 \leq \frac{1}{2} \\ (x_0, g_2(2x_1 - 1, x_2, \dots, x_n)) & \cdot \quad \frac{1}{2} \leq x_1 \leq 1 \end{cases}$$

şeklinde tarif edelim. f sürekli bir tasvirdir. Tariften dolayı $[P_x \circ f] = [g_1]$ ve $[P_y \circ f] = [g_2]$ dir. Yani $P_x \circ f \sim g_1$ ve $P_y \circ f \sim g_2$ dir. Diğer taraftan $f(I_n \times J) = (x_0, y_0)$ olduğundan $f \in L(X \times Y, x_0 \times y_0)$ dir. Böylece $\Phi([f]) = ([g_1], [g_2])$ dir.

ii) Φ birebirdir. Gerçekten her $[f_0], [f_1] \in \pi_n(X \times Y, x_0 \times y_0)$ için $\Phi([f_0]) = \Phi([f_1])$ ise

$$([P_x \circ f_0], [P_y \circ f_0]) = ([P_x \circ f_1], [P_y \circ f_1])$$

dir. Bu demektir ki, $P_x \circ f_0$ ile $P_x \circ f_1$ arasında F_1 ve $P_y \circ f_0$ ile $P_y \circ f_1$ arasında bir F_2 homotopisi vardır. Bu homotopiler yardımıyla

$$F: I_n \times J \rightarrow X \times Y$$

homotopisi $F(x,t)=(F_1(x,t),F_2(x,t))$ şeklinde tarif edelim. $F; X,Y$ nin herbirinde sürekli olduğundan $X \times Y$ de sürekli dir. Üstelik

$$F(x,0)=(P_x \circ f_0, P_y \circ f_0)=f_0(x)$$

$$F(x,1)=(P_x \circ f_1, P_y \circ f_1)=f_1(x)$$

$$F(I_n \times J)=(F_1(I_n \times J), F_2(I_n \times J))=(x_0, y_0)=x_0 \times y_0$$

dir. Dolayısıyla $f_0 \sim f_1$ rel. I_n dir. Buradan $[f_0]=[f_1]$ elde edilir.

iii) Φ bir homomorfizmdir. Gerçekten $[f_0], [f_1] \in \Pi_n(X \times Y, x_0 \times y_0)$ ise bu takdirde

$$\Phi([f_0] \cdot [f_1])=\Phi([f_0 f_1])$$

$$=([P_x \circ (f_0 f_1)], [P_y \circ (f_0 f_1)])$$

$$=([P_x \circ f_0 \cdot P_x \circ f_1], [P_y \circ f_0 \cdot P_y \circ f_1])$$

$$=([P_x \circ f_0] \cdot [P_x \circ f_1], [P_y \circ f_0] \cdot [P_y \circ f_1])$$

$$=([P_x \circ f_0], [P_y \circ f_0])([P_x \circ f_1], [P_y \circ f_1])$$

$$=\Phi([f_0]) \cdot \Phi([f_1])$$

dir.

Teorem 2.2.5. X_0, X_1 iki topolojik uzay, $x_0 \in X_0$ keyfi sabit bir nokta ve $f: X_0 \rightarrow X_1$ sürekli bir tasvir olsun. Bu takdirde bir

$$f^*: \Pi_n(X_0, x_0) \rightarrow \Pi_n(X_1, x_1=f(x_0))$$

homomorfizmi vardır.

İspat. $\alpha, \beta, x_0 \in X_0$ da iki tasvir ise $f \circ \alpha, f \circ \beta$ da $x_1=f(x_0)$ da iki tasvirdir.

$$\alpha \sim \beta \text{ rel. } I_n \Rightarrow F=F(x,t): I_n \times J \rightarrow X_0 \ni F \text{ sürekli ve}$$

$$F(x,0)=\alpha, F(x,1)=\beta, F(I_n \times J)=x_0$$

dir.

Şimdi $G(x,t):I_n \times J \rightarrow X_1$ tasvirini, $G(x,t)=f(F(x,t))$ şeklinde tarif edelim. G sürekli olup

$$G(x,0)=f\circ\alpha, \quad G(x,1)=f\circ\beta, \quad G(I_n \times J)=f(x_0)=x_1$$

dir. O halde $f\circ\alpha \sim f\circ\beta$ rel. I_n dir.

Böylece $f^*: \Pi_n(X_0, x_0) \rightarrow \Pi_n(X_1, x_1)$ tasviri $f^*([\alpha])=[f\circ\alpha]$ şeklinde tarif edilirse f^* , $x_0 \in X_0$ da tasvirlerin homotopi sınıfını $f(x_0) \in X_1$ de tasvirlerin homotopi sınıfına götürür, öyleki $[\alpha]$ birtek olarak $f^*([\alpha])$ yı belirtir. Dolayısıyla f^* tasviri, $\Pi_n(X_0, x_0)$ in herbir elemanına $\Pi_n(X_1, f(x_0))$ in birtek elemanını karşılık tutmaktadır. Şimdi göstereceğiz ki f^* homomorfizmdir. Gerçekten her $[\alpha], [\beta] \in \Pi_n(X_0, x_0)$ için

$$f^*([\alpha]).f^*([\beta])=[f\circ\alpha].[f\circ\beta]=[f\circ\alpha\beta]=f^*([\alpha\beta])$$

dir.

Bu teoremi dikkate alarak; her noktalı topolojik uzaya bu uzayın yüksek homotopi grubunu, her $f:(X_0, x_0) \rightarrow (X_1, x_1)$ sürekli tasvirine de f^* homomorfizmini karşılık getirmek şartıyla noktalı topolojik uzaylar ve sürekli tasvirleri kategorisinden, yüksek homotopi grupları ve homomorfizmleri kategorisine bir fonktor (kovaryant fonktor) (Tennison 1975) un varlığından bahsedebiliriz. Gerçekten,

C: Noktalı topolojik uzaylar ve sürekli tasvirleri kategorisi.

D: Yüksek homotopi grupları ve homomorfizmleri kategorisi olsun. İddia ediyoruz ki $\varphi: C \rightarrow D$ bir fonktor (kovaryant fonktor) dur.

i) $X_0 = X_1$ olsun. Bu durumda $f=1_{X_0}$ tasviri olup

$$\varphi(f)=\varphi(1_{X_0})=(1_{X_0})^*: \Pi_n(X_0, x_0) \rightarrow \Pi_n(X_0, x_0)$$

dir. Her $[\alpha] \in \Pi_n(X_0, x_0)$ için

$$(1_{X_0})^*([\alpha])=[1_{X_0} \circ \alpha]=[\alpha]$$

olduğundan

$$\varphi(1_{X_0})=1_{X_0}^*=1_{\Pi_n(X_0, x_0)}$$

dir.

ii) $f:(X_0, x_0) \rightarrow (X_1, x_1)$, $g:(X_1, x_1) \rightarrow (X_2, x_2)$ iki sürekli tasvir ise $gf:(X_0, x_0) \rightarrow (X_2, x_2)$ bir sürekli tasvir olup $\varphi(f): \Pi_n(X_0, x_0) \rightarrow \Pi_n(X_1, x_1)$, $\varphi(g): \Pi_n(X_1, x_1) \rightarrow \Pi_n(X_2, x_2)$ ve $\varphi(gf): \Pi_n(X_0, x_0) \rightarrow \Pi_n(X_2, x_2)$ dir. Her $[\alpha] \in \Pi_n(X_0, x_0)$ için $(gf)\alpha \sim g(f\alpha)$ dir. Üstelik,

$$\begin{aligned} (\varphi(gf))([\alpha]) &= [(gf)\alpha] \\ &= [g(f\alpha)] \\ &= (\varphi(g))([f\alpha]) \\ &= (\varphi(g)) \cdot (\varphi(f))([\alpha]) \\ &= (\varphi(g) \cdot \varphi(f))([\alpha]) \end{aligned}$$

dır. Dolayısıyla $\varphi(gf) = \varphi(g) \cdot \varphi(f)$ dir.

O halde,

Teorem 2.2.6. Noktalı topolojik uzaylar ve sürekli tasvirleri kategorisinden, Yüksek homotopi grupları ve homomorfizmleri kategorisine bir fonktor (kovaryant fonktor) vardır.

Bu teoremi de gözöntüne alarak aşağıdaki teoremi ifade ediyoruz.

Teorem 2.2.7. X_0, X_1 iki topolojik uzay, $x_0 \in X_0$ herhangi bir nokta ve $f: X_0 \rightarrow X_1$ bir topolojik tasvir (homeomorfizm) olsun. Bu takdirde

$$f^*: \Pi_n(X_0, x_0) \rightarrow \Pi_n(X_1, x_1 = f(x_0))$$

bir izomorfizmdir (Hilton 1961).

BÖLÜM 3

YÜKSEK HOMOTOPI GRUPLARININ DEMETİ

Bu bölümde önce demet ile ilgili temel kavramlar verilerek irtibatlı, lokal eğrisel irtibatlı bir X topolojik uzayı üzerinde yüksek homotopi gruplarının demeti teşkil edilecek ve gösterilecektir ki bu demet, abelyen grupların bir demetidir. Daha sonra yüksek homotopi gruplarının demetleri için karakterizasyonlar verilecektir. Nihayet $H_{n_1}, H_{n_2}, \dots, H_{n_n}$ demetlerinin Genelleştirilmiş Whitney Toplamı $H^* = H_{n_1} \oplus H_{n_2} \oplus \dots \oplus H_{n_n}$ olmak üzere H^* demetinin $H_{n_1} \times H_{n_2} \times \dots \times H_{n_n}$ demetine izomorf olduğu ispatlanacaktır.

3.1. Demet Kavramı

Tarif 3.1.1. S, X iki topolojik uzay ve $\Pi : S \rightarrow X$ lokal topolojik bir tasvir olsun. Bu takdirde (S, Π) çiftine veya kısaca S ye X üzerinde bir demet denir.

Her $x \in X$ için $S_x = \Pi^{-1}(x)$ e x üzerinde (S, Π) nin veya sadece S nin sapı denir.

Tarif 3.1.2. (S, Π) , X üzerinde bir demet olsun. $S^* \subset S$ açık bir cümle ve $\Pi^* = \Pi|_{S^*}$ ise bu takdirde (S^*, Π^*) a S nin altdemeti denir.

Dikkat edilmelidir ki, herbir altdemet bir demettir. Bunun için $\Pi^* : S^* \rightarrow X$ tasvirinin lokal topolojik olduğunu göstermek yeterlidir. Gerçekten, herbir $\sigma \in S$ için enaz bir $U(\sigma) \subset S$ ve $V(\Pi(\sigma)) \subset X$ açık civarları vardır öyleki $\Pi|_U : U \rightarrow V$ tasviri topolojiktir. Fakat $U^* = U \cap S^*$ ve $V^* = \Pi(U^*)$ sırasıyla σ nın S^* da $\Pi(\sigma)$ nın X de açık civarları olup $\Pi^*|_{U^*} : U^* \rightarrow V^*$ topolojiktir.

Tarif 3.1.3. (S, Π) , X üzerinde bir demet, $W \subset X$ açık bir cümle ve $s : W \rightarrow S$ sürekli bir tasvir, öyleki $\Pi \circ s = 1_W$ olsun. Bu takdirde s ye S nin W üzerindeki kesiti denir.

S nin W üzerindeki kesitlerin cümlesini $\Gamma(W, S)$ ile göstereceğiz.

Teorem 3.1.1. (S, Π) , X üzerinde bir demet, $W \subset X$ bir açık cümle ve $s \in \Gamma(W, S)$ olsun. Bu takdirde $\Pi : s(W) \rightarrow W$ topolojiktir ve $s = (\Pi |_{s(W)})^{-1}$ dir.

İspat. $x \in W$ için $\Pi \circ s = 1_W$ olduğundan

$$s \circ (\Pi |_{s(W)}) \circ s(x) = s \circ (\Pi \circ s)(x) = s(x)$$

dir.

Teorem 3.1.2. (S, Π) , X üzerinde bir demet, $W \subset X$ bir açık cümle ve $s : W \rightarrow S$ bir tasvir, öyleki $\Pi \circ s = 1_W$ olsun. Bu takdirde $s \in \Gamma(W, S)$ dir yalnız ve yalnız $s(W)$, S de açık ise.

İspat. Kabul edelim ki, s süreklidir. $\sigma_0 \in s(W)$ ve $x_0 = \Pi(\sigma_0)$ olmak üzere $s(x_0) = \sigma_0$ dir. Üstelik, $V(x_0) \subset W$ ve $U(\sigma_0) \subset S$ açık civarları mevcut olup $\Pi |_{U : U \rightarrow V \cap W}$ topolojiktir. s sürekli olduğundan öylebir $V'(x_0) \subset V$ civarı vardır ki $s(V') \subset U$ dur.

Dolayısıyla

$$(\Pi |_{U}) \circ (s |_{V'}) = (\Pi \circ s) |_{V'} = 1_{V'}$$

ve

$$(\Pi |_{U})^{-1}(V') = s(V') \subset s(W)$$

dir. Böylece $s(V')$, σ_0 in açık bir civarıdır. Yani σ_0 , $s(W)$ nın bir iç noktasıdır.

Karşıt hal de kolaylıkla ispatlanabilir.

Teorem 3.1.3. (S, Π) , X üzerinde bir demet ve $\sigma \in S$ olsun. Bu takdirde, bir $V \subset X$ açık cümlesi ve $\sigma \in s(V)$ şartını sağlayan bir $s \in \Gamma(V, S)$ kesiti vardır.

İspat. $x = \Pi(\sigma)$ olsun. Π lokal topolojik tasvir olduğundan $U(\sigma) \subset S$ ve $V(x) \subset X$ açık civarları mevcut olup $\Pi : U \rightarrow V$ topolojiktir. Bu durumda, V ve $s = (\Pi |_{U})^{-1}$ istenen şartları yerine getirir.

Teorem 3.1.4. (S, Π) , X üzerinde bir demet ve WCX bir açık cümle olsun. Şayet $s_1, s_2 \in \Gamma(W, S)$ kesitleri bir $x \in W$ noktasında eşit iseler bu takdirde bir $V(x) \subset W$ açık civarında eşittirler.

İspat. $\sigma = s_1(x) = s_2(x)$ olsun. Bu takdirde $U = s_1(W_1) \cap s_2(W_2)$, σ nın açık bir civarıdır ve $\Pi|_U: U \rightarrow V = \Pi(U) \subset W$ topolojik tasvirdir. Dolayısıyla $s_1|_V = (\Pi|_U)^{-1} = s_2|_V$ dir.

Tarif 3.1.4. (S_1, Π_1) , (S_2, Π_2) , X üzerinde iki demet olsun.

i) $\varphi: S_1 \rightarrow S_2$ tasviri $\Pi_2 \circ \varphi = \Pi_1$ şartını sağlıyorsa, yani her $x \in X$ için $\varphi((S_1)_x) \subseteq (S_2)_x$ ise, sapları koruyor denir.

ii) Sapları koruyan sürekli $\varphi: S_1 \rightarrow S_2$ tasvirine Demet morfizmi denir.

iii) Sapları koruyan topolojik $\varphi: S_1 \rightarrow S_2$ tasvirine Demet izomorfizmi denir. Bu takdirde S_1 ve S_2 demetlerine izomorfurlar denir (Balcı 1996, Tennison 1975).

Teorem 3.1.5. (S_i, Π_i) , $i=1,2$, X üzerinde iki demet ve $\varphi: S_1 \rightarrow S_2$ sapları koruyan bir tasvir olsun. Bu takdirde aşağıdaki ifadeler eşdeğerdir:

i) φ bir demet morfizmidir.

ii) Herbir WCX açık cümlesi ve herbir $s \in \Gamma(W, S_1)$ kesiti için $\varphi \circ s \in \Gamma(W, S_2)$ dir.

iii) Herbir $\sigma \in S_1$ için bir WCX açık cümlesi ve bir $s \in \Gamma(W, S_1)$ kesiti vardır $\exists \sigma \in s(W)$ ve $\varphi \circ s \in \Gamma(W, S_2)$ dir.

İspat:

1) φ sürekli, WCX açık ve $s \in \Gamma(W, S_1)$ ise $\varphi \circ s$ de sürekli dir. Diğer taraftan

$$\Pi_2 \circ (\varphi \circ s) = (\Pi_2 \circ \varphi) \circ s = \Pi_1 \circ s = 1_w$$

dir. Dolayısıyla $\varphi \circ s \in \Gamma(W, S_2)$ dir. Böylece (i) \Rightarrow (ii) dir.

2) $\sigma \in S_1$ ise, bu takdirde $\sigma \in s(W)$ şartını sağlayan bir WCX açık cümlesi ve bir $s \in \Gamma(W, S_1)$ kesiti vardır. (ii) den dolayı $\varphi \circ s \in \Gamma(W, S_2)$ dir. O halde (ii) \Rightarrow (iii) dir.

3) (iii) den dolayı $s: W \rightarrow s(W)$ topolojiktir. Böylece $\varphi|_{s(W)} = (\varphi \circ s) \circ s^{-1}: s(W) \rightarrow S_2$ sürekli dir. O halde φ , σ da sürekli dir. Bu ise (iii) \Rightarrow (i) demektir.

Tarif 3.1.5. X bir topolojik uzay olsun. Herbir WCX açık cümlesine bir M_w cümlesinin karşılık geldiğini, herbir (V,W) , VCW , açık cümle çifti için bir $\gamma_{w,v}:M_w \rightarrow M_v$ tasvirinin verildiğini kabul edelim. Şayet

$$i) \text{ Her } WCX \text{ açığı için } \gamma_{w,w}=1_{M_w}$$

$$ii) UCVCW \text{ için } \gamma_{v,u} \circ \gamma_{w,v} = \gamma_{w,u}$$

ise bu taktirde $\{X, M_w, \gamma_{w,v}\}$ koleksiyonuna öndemet denir. $\gamma_{w,v}$ tasvirlerine de tahdit edici tasvirler denir (Grauret and Remmert 1979).

Herbir (S, Π) demetine tabii şekilde bir öndemet karşılık gelir. Gerçekten V ve W , VCW , X in açık cümleleri ise $M_w = \Gamma(W, S)$ ve $\gamma_{w,v}(s) = s|_V$, $s \in M_w$, kabul edilebilir. Bu durumda $\{X, \Gamma(W, S), \gamma_{w,v}\}$ bir öndemettir.

Teorem 3.1.6. Herbir $\{X, M_w, \gamma_{w,v}\}$ öndemetine indüktif limit teşkil etmek suretiyle bir demet karşılık getirilebilir (Grauret and Fritzsche 1976).

Tarif 3.1.6. $(S_1, \Pi_1), (S_2, \Pi_2), \dots, (S_L, \Pi_L)$, X üzerinde demetler olsun. WCX açık cümlesi için $M_w = \Gamma(W, S_1) \times \Gamma(W, S_2) \times \dots \times \Gamma(W, S_L)$ kartezyen çarpımını teşkil edelim. $s = (s_1, s_2, \dots, s_L) \in M_w$ ve VCW açık cümlesi için $\gamma_{w,v}(s) = (s_1|_V, s_2|_V, \dots, s_L|_V)$ olsun. Bu taktirde $\{X, M_w, \gamma_{w,v}\}$ bir öndemettir. Bu öndemetin tarif ettiği $S^* = S_1 \oplus S_2 \oplus \dots \oplus S_L$ demetine S_1, S_2, \dots, S_L demetlerinin Whitney Toplamı denir.

Misal 3.1.1. R bir Riemann yüzeyi, $A(R)$ R üzerinde tarifli analitik fonksiyonların halkası olsun. Herhangibir $x_0 \in R$ için $f, g \in A(R)$ eşdeğerdir yalnız ve yalnız $\exists W(x_0) \subset R$ açık cümlesi varsa $\exists f|_W = g|_W$ dir. Bu bağıntı bir eşdeğerlik bağıntısı olup $A(R)$ yi ayrık eşdeğerlik sınıflarına ayırır. Herbir $f \in A(R)$ nin eşdeğerlik sınıfını $[f]_{x_0}$ ile, bu eşdeğerlik sınıflarının cümlesini de $O(R)_{x_0}$ ile gösterelim. Şimdi

$$O(R) = \bigvee_{x_0 \in R} O(R)_{x_0}$$

ayrık birleşimini teşkil edelim. $O(R)$, R üzerinde bir cümle olup her $[f]_{x_0} \in O(R)_{x_0} \subset O(R)$ için $p([f]_{x_0}) = x_0$ şeklinde tarif edilen

$$p: O(R) \rightarrow R$$

tasviri üzerinedir. $O(R)$ cümlesi üzerinde tabii bir topoloji vardır. Gerçekten, WCR açık ve $f \in A(R)$ olmak üzere herbir f elemanına $\gamma f(x_0) = [f]_{x_0}$, $x_0 \in W$ ile tarifli

$$\gamma f = s: W \rightarrow O(R)$$

tasvirini karşılık getirelim. Bu taktirde

$$T = \{(\gamma f = s)(W) \mid WCR \text{ açık, } f \in A(R)\}$$

cümlesi $O(R)$ üzerinde bir topoloji tabanıdır. p bu topolojiye nazaran lokal topolojiktir. Dolayısıyla $(O(R), p)$, R üzerinde bir demettir. Bu demete R üzerinde analitik fonksiyonların nüvelerinin demeti denir. Aynı zamanda bu demet R üzerinde regüler bir örtü uzayı olarak \mathbb{C} - Cebir demetidir.

3.2. Yüksek Homotopi Gruplarının Demeti

Bu kısımda bir demet örneği olarak, yüksek homotopi gruplarının demetini teşkil ediyor ve bazı karakterizasyonlar veriyoruz (Canbolat 1982).

X irtibatlı, lokal eğrisel irtibatlı bir topolojik uzay olsun. Bu taktirde X eğrisel irtibatlıdır ve yalnız bir eğrisel bileşeni vardır, o da X dır. Bu kısımda X topolojik uzayı olarak $c \in X$ keyfi sabit bir nokta olmak üzere (X, c) noktalı topolojik uzayını gözönüne alacağız.

Şimdi yüksek homotopi gruplarının demetini teşkil edip, göstereceğiz ki bu demet bir cebirsel yapıya demet olarak Abelyen grupların bir demetidir.

$$H_n = \bigvee_{x \in X} \Pi_n(X, x)$$

cümlesi herbir $x \in X$ için $\Pi_n(X, x)$ yüksek homotopi gruplarının ayrık birleşimini gösterebilir. H_n , X üzerinde bir cümle olup her $\sigma_x = [\alpha]_x \in (H_n)_x \subset H_n$ için $\psi(\sigma_x) = x$ şeklinde tarif edilen $\psi: H_n \rightarrow X$ tasviri üzerinedir. Diğer taraftan, H_n üzerinde bir tabii topoloji vardır, şöyleki; $x_0 \in X$ keyfi sabit bir nokta, $W = W(x_0)$, x_0 in eğrisel irtibatlı

bir açık komşuluğu olsun. X eğrisel irtibatlı olduğundan her $x \in W$ için başlangıç noktası c , bitim noktası x olan bir γ eğrisi vardır. Bu durumda γ eğrisi herhangi $[\alpha]_c \in (H_n)_c$ için $\gamma^*([\alpha]_c) = [\beta]_x$ şeklinde tarifli bir $\gamma^*: (H_n)_c \rightarrow (H_n)_x$ izomorfizmini intac eder. Bu izomorfizm sadece γ nın homotopi sınıfına bağlıdır. Şimdi $s: W \rightarrow H_n$ tasvirini her $x \in W$ için $s(x) = \gamma^*([\alpha]_c) = [\beta]_x$ şeklinde tarif edelim. Şayet $c \in W$ ise γ , c de sabit bir tasvir olmak üzere $s(c) = \gamma^*([\alpha]_c) = [\alpha]_c$ dir. Görülmektedir ki, s tasviri hem $[\gamma]$ homotopi sınıfına, hem de $[\alpha]_c$ homotopi sınıfına bağlıdır. Her $x \in W$ için $[\gamma]$ homotopi sınıfını sabit tutarsak bu durumda s , yalnız $[\alpha]_c$ homotopi sınıfına bağlıdır ve $[\alpha]_c$ değiştikçe kendisi de değişmektedir. Dolayısıyla s iyi tarifli olup $\psi \circ s = 1_W$ dır. Şimdi; B, X için eğrisel irtibatlı açık komşulukların bir tabanı olsun.

$$T_n = \{s(W) : W \in B, s \in \Gamma(W, H_n)\}$$

cümlesi H_n için bir tabandır. Bu topolojide ψ ve s sürekli tasvirlerdir. Üstelik ψ lokal topolojik bir tasvirdir. s ise ψ nin lokal inversidir. Gerçekten,

i) $\sigma_{x_0} \in H_n$ ise $\psi(\sigma_{x_0}) = x_0 \in X$ dır. Eğer $W = W(x_0)$ bir açık cümle ise her $W_i \in B$ için

$$W = \bigcup_{i \in I} W_i$$

şeklinde yazılabilir. Böylece her W_i için $\psi \circ s_i = 1_{W_i}$ şartını sağlayan

$$s_i: W_i \rightarrow H_n$$

tasviri vardır ve $s_i(W_i) \in T_n$ dir.

Şimdi $s: W \rightarrow H_n \ni s|_{W_i} = s_i$ şeklinde bir s tasvirini tarif edelim. Böylece

$$s(W) = \bigcup_{i \in I} s_i(W_i)$$

H_n de açık bir cümle olup $\psi \circ s = 1_W$ dır. $s(W) = U$ dersek

$$\psi \circ s = 1_W, \quad s \circ \psi = 1_U$$

olduğundan $\psi|_U: U \rightarrow W$ bijektif bir tasvirdir ve $(\psi|_U)^{-1} = s$ dir.

ii) U ve W üzerindeki topolojiler; H_n ve X den elde edilen altuzay topolojileridir. $W' \subset W$ açık bir cümle olsun. Herhangi $i \in I$ için $W'_i = W_i \cap W'$ olmak üzere

$$W' = \bigcup_{i \in I} W'_i$$

şeklinde yazılabilir. Şimdi $s'_i: W'_i \rightarrow U \ni s'_i = s_i |_{W'_i}$ şeklinde bir tasvir ise

$$s': W \rightarrow U \ni s' |_{W'_i} = s'_i$$

dır. Böylece $s'(W') = \bigcup_{i \in I} s'_i(W'_i) \subset U$ açık bir cümledir. Dolayısıyla $\psi |_{U'}$ sürekli bir tasvirdir.

iii) $U' \subset U$ açık bir cümle ise

$$U' = \bigcup_{i \in I} s'_i(W'_i)$$

dır. Böylece $\psi(U') = \bigcup_{i \in I} W'_i \subset W$ açık bir cümledir. Dolayısıyla s sürekli bir tasvirdir.

$(\psi |_{U'})^{-1} = s$ olduğundan $(\psi |_{U'})^{-1}$ süreklidir.

O halde (H_n, ψ) X üzerinde bir demettir. Bu demete "Yüksek Homotopi Gruplarının Demeti" denir. Diğer taraftan tarif olarak $s \in \Gamma(W, H_n)$ tasvirine H_n nin bir W üzerinde kesiti denir. Ayrıca her $x \in X$ için $(H_n)_x$ cümlesine de H_n demetinin $x \in X$ üzerindeki sapı denir. Dikkat edilmelidir ki $(H_n)_x$ sapı abelyen gruptur. Böylece $\Gamma(W, H_n)$ cümlesi noktasal çarpma operasyonu ile birlikte bir abelyen gruptur. Bu abelyen grupta özdeş eleman; $1, x_1$ de sıfır tasvir olmak üzere $e(x_1) = [1]_{x_1}$ şeklinde tarif edilen $e \in \Gamma(W, H_n)$ kesitidir. Herhangi $s \in \Gamma(W, H_n)$ kesitinin inversi ise; $s^{-1}(x_1) = s(x_1)^{-1}$ şeklinde tarif edilen $s^{-1} \in \Gamma(W, H_n)$ kesitidir. $\odot: H_n \oplus H_n \rightarrow H_n$ operasyonunun H_n nin her sapına tahditi süreklidir. Dolayısıyla H_n , X üzerinde Abelyen grupların demetidir ve bu sebeple bir cebirsel demettir.

3.3. Yüksek Homotopi Gruplarının Demetleri Üzerine Karakterizasyonlar

X_1, X_2 herhangi irtibatlı, lokal eğrisel irtibatlı topolojik uzaylar ve bu uzaylara karşılık gelen Yüksek homotopi gruplarının demetleri de sırasıyla (H_{n_1}, ψ_1) ve (H_{n_2}, ψ_2) olsun. Bunu notasyon olarak (X_1, H_{n_1}) ve (X_2, H_{n_2}) çiftleri ile gösterelim.

Tarif 3.3.1. (X_1, H_{n_1}) ve (X_2, H_{n_2}) verilmiş olsun. Bu çiftler arasında bir homomorfizm vardır denir ve

$$(f, f^*): (X_1, H_{n_1}) \rightarrow (X_2, H_{n_2})$$

yazılır, şayet bir (f, f^*) çifti varsa öyleki

1. $f: X_1 \rightarrow X_2$ süreklidir
2. $f^*: H_{n_1} \rightarrow H_{n_2}$ süreklidir
3. f^*, f ye nazaran sapları korur
4. Her $x_1 \in X_1$ için $f^* |_{(H_{n_1})_{x_1}}: (H_{n_1})_{x_1} \rightarrow (H_{n_2})_{f(x_1)}$ bir homomorfizmdir.

Tarif 3.3.2. $(f, f^*): (X_1, H_{n_1}) \rightarrow (X_2, H_{n_2})$ bir homomorfizm olmak üzere (X_1, H_{n_1}) ve (X_2, H_{n_2}) çiftleri verilmiş olsun. Şayet f ve f^* topolojik iseler (f, f^*) a bir izomorfizm denir. (X_1, H_{n_1}) ve (X_2, H_{n_2}) çiftlerine de izomorfiktirler denir.

Teorem 3.3.1. (X_1, H_{n_1}) ve (X_2, H_{n_2}) çiftleri verilmiş olsun. Şayet $f: X_1 \rightarrow X_2$ sürekli bir tasvir ise bu takdirde (X_1, H_{n_1}) ve (X_2, H_{n_2}) çiftleri arasında bir homomorfizm vardır.

İspat.

i) f^* süreklidir. Çünkü $U_2 \subset H_{n_2}$ herhangi bir açık cümle ise gösterilebilir ki $f^{*-1}(U_2) = U_1 \subset H_{n_1}$ bir açık cümledir

ii) f^*, f ye nazaran sapları korur. Çünkü her $\sigma = [\alpha]_{x_1} \in (H_{n_1})_{x_1} \subset H_{n_1}$ için

$$(f \circ \psi_1)([\alpha]_{x_1}) = f(\psi_1([\alpha]_{x_1})) = f(x_1)$$

$$(\psi_2 \circ f^*)([\alpha]_{x_1}) = \psi_2(f^*([\alpha]_{x_1})) = \psi_2([f \circ \alpha]_{f(x_1)}) = f(x_1)$$

dir. Dolayısıyla $f \circ \psi_1 = \psi_2 \circ f^*$ dir.

iii) Her $x_1 \in X_1$ için $f^*|_{(H_{n_1})_{x_1}} : (H_{n_1})_{x_1} \rightarrow (H_{n_2})_{f(x_1)}$ bir homomorfizmdir. Çünkü $\alpha_1, \beta_1 \in (H_{n_1})_{x_1}$ de iki tasvir, $\alpha_2 = f \circ \alpha_1, \beta_2 = f \circ \beta_1$ de $(H_{n_2})_{f(x_1)}$ de iki tasvir olmak üzere

$$\begin{aligned} f^*([\alpha_1])f^*([\beta_1]) &= [f \circ \alpha_1] \cdot [f \circ \beta_1] = [\alpha_2] \cdot [\beta_2] \\ &= [f \circ (\alpha_1 \cdot \beta_1)] = f^*([\alpha_1 \beta_1]) \end{aligned}$$

dir.

Teorem 3.3.2. $(X_1, H_{n_1}), (X_2, H_{n_2}), (X_3, H_{n_3})$ çiftleri ve $f_1: X_1 \rightarrow X_2, f_2: X_2 \rightarrow X_3$ sürekli tasvirleri verilmiş olsun. Bu takdirde bir $(f, f^*): (X_1, H_{n_1}) \rightarrow (X_3, H_{n_3})$ homomorfizmi vardır öyleki $f = f_2 \circ f_1$ ve $f^* = f_2^* \circ f_1^*$ dir.

İspat. $f = f_2 \circ f_1: X_1 \rightarrow X_3$ sürekli bir tasvir olduğundan bir $(f, f^*): (X_1, H_{n_1}) \rightarrow (X_3, H_{n_3})$ homomorfizmi vardır. Burada $f^* = f_2^* \circ f_1^*$ olduğunu göstermek yeterlidir. Bunun için de herhangi bir $[\alpha] \in H_{n_1}$ için

$$f^*([\alpha]) = (f_2^* \circ f_1^*)([\alpha])$$

olduğunu göstermek gerekir. Fakat

$$f^*([\alpha]) = [(f_2 \circ f_1) \circ \alpha]$$

ve

$$(f_2^* \circ f_1^*)([\alpha]) = f_2^*(f_1^*([\alpha])) = [f_2 \circ (f_1 \circ \alpha)]$$

olduğundan

$$(f_2 \circ f_1) \circ \alpha \sim f_2 \circ (f_1 \circ \alpha) \text{ rel. } I_n$$

olduğunu göstermeliyiz.

Şayet $\alpha, x_1 \in X_1$ de bir tasvir ise $(f_2 \circ f_1) \circ \alpha: I_n \rightarrow X_3$ ve $f_2 \circ (f_1 \circ \alpha): I_n \rightarrow X_3, f_2(f_1(x_1)) \in X_3$ de sürekli tasvirlerdir. Şimdi

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n, t): I_n \times J \rightarrow X_3$$

tasvirini

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n, t) = \begin{cases} (f_2 \circ f_1)(\alpha(x_1, x_2, \dots, x_n)) & . \quad 0 \leq x_1 \leq 1-t \\ f_2 \circ (f_1 \circ \alpha(x_1, x_2, \dots, x_n)) & . \quad 1-t \leq x_1 \leq 1 \end{cases}$$

şeklinde tarif edelim. F süreklidir. Diğer taraftan

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n, 0) = (f_2 \circ f_1) \circ \alpha$$

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n, 1) = f_2 \circ (f_1 \circ \alpha)$$

$$F(\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dots, \dot{x}_n, t) = f_2(f_1(x_1))$$

dir. Dolayısıyla $(f_2 \circ f_1) \circ \alpha \sim f_2 \circ (f_1 \circ \alpha)$ rel. I_n bulunur.

Şimdi

C : İrtibatlı, lokal eğrisel irtibatlı topolojik uzaylar ve sürekli tasvirleri kategorisini

D : Demetler ve sürekli demet homomorfizmleri kategorisini göstereyim.

$\Phi: C \rightarrow D$ tasvirini her X ve $f: X_1 \rightarrow X_2$ için $\Phi(X) = \prod_{x \in X} \pi_n(X, x) = H_n$ ve $\Phi(f) = f^*: H_{n_1} \rightarrow H_{n_2}$ şeklinde tarif edelim. Bu takdirde

i) $X_1 = X_2$ ve $f = 1_{X_1}$ ise $\Phi(1_{X_1}) = 1_{H_{n_1}}$, $H_{n_1} = \Phi(X_1)$ dir. Çünkü $\Phi(1_{X_1}) = 1_{X_1}^*$ ve her $[\alpha] \in H_{n_1}$ için

$$(1_{X_1}^*)([\alpha]) = [1_{X_1} \circ \alpha] = [\alpha]$$

dır. Dolayısıyla $1_{X_1}^* = 1_{H_{n_1}}$ dir.

ii) $f: X_1 \rightarrow X_2$ ve $g: X_2 \rightarrow X_3$ sürekli ise $gf: X_1 \rightarrow X_3$ süreklidir. Dolayısıyla $\Phi(gf): H_{n_1} \rightarrow H_{n_3}$ bir sürekli homomorfizmdir. Gerçekten

$$\Phi(gf) = (gf)^* = g^* \circ f^* = \Phi(g) \circ \Phi(f)$$

dir.

O halde $\Phi: C \rightarrow D$ bir kovaryant funktordur.

Dolayısıyla;

Teorem 3.3.3. İrtibatlı, lokal eğrisel irtibatlı topolojik uzaylar ve sürekli tasvirleri kategorisinden, Demetler ve sürekli demet homomorfizmleri kategorisine bir fonktor (kovaryant fonktor) vardır öyle ki bu fonktor bir irtibatlı, lokal eğrisel irtibatlı topolojik uzaya, bu uzay üzerinde inşa edilen yüksek homotopi gruplarının demetini, f tasvirine de f^* tasvirini karşılık getirir.

Şimdi aşağıdaki teoremleri ispatsız olarak veriyoruz (Canbolat 1982).

Teorem 3.3.4. (X_1, H_{n_1}) ve (X_2, H_{n_2}) çiftleri verilmiş olsun. Şayet $f: X_1 \rightarrow X_2$ bir topolojik tasvir ise bu taktirde

$$F=(f, f^*):(X_1, H_{n_1}) \rightarrow (X_2, H_{n_2})$$

bir izomorfizmdir.

Teorem 3.3.5. (X_1, H_{n_1}) , (X_2, H_{n_2}) çiftleri ve $f_1, f_2: X_1 \rightarrow X_2$ sürekli tasvirleri verilmiş olsun. Bu taktirde $F_1=(f_1, f_1^*)$ ve $F_2=(f_2, f_2^*)$ homomorfizmlerindeki $f_1^*=f_2^*$ dir yalnız ve yalnız $f_1=f_2$ ise.

3.4. Karşıt Teoremler

Burada, kısım 3.3 de verilen teoremlerin karşılarını ifade ve ispat edeceğiz. Bu teoremler literatürde daha önce hiçbir yerde ifade edilmemiştir.

Önce Teorem 3.3.1 in karşıtını ele alıyoruz.

Teorem 3.4.1. (X_1, H_{n_1}) ve (X_2, H_{n_2}) çiftleri verilmiş olsun. Şayet $f^*: H_{n_1} \rightarrow H_{n_2}$ bir demet homomorfizmi ise bu taktirde birtek $f: X_1 \rightarrow X_2$ sürekli tasviri vardır öyleki (f, f^*) , (X_1, H_{n_1}) ve (X_2, H_{n_2}) çiftleri arasında bir homomorfizmdir.

İspat. Bu teoremin ispatı için önce bir $f: X_1 \rightarrow X_2$ tasviri bulacağız. f^* sapları koruduğundan her $(H_{n_1})_{x_1} \subset H_{n_1}$ sapı için bir $(H_{n_2})_{x_2} \subset H_{n_2}$ sapı vardır öyleki

$f^*((H_{n_1})_{x_1}) \subset (H_{n_2})_{x_2}$ dir. Dolayısıyla, herhangi bir $x_1 \in X_1$ noktasına bir $x_2 \in X_2$ noktası karşılık gelir. Böylece $f^*((H_{n_1})_{x_1}) \subset (H_{n_2})_{x_2}$ özelliğini gözönünde tutarak bir $f: X_1 \rightarrow X_2$ tasvirini $f(x_1) = x_2$ şeklinde tarif edebiliriz. Şimdi göstereceğiz ki f süreklidir.

$W \subset f(X_1)$ bir açık cümle olsun. $f^{-1}(W) \subset X_1$ in açık olduğunu göstermek, ispat için yeterlidir. W, X_2 de açık olduğundan X_2 de $W_i, i \in I$ eğrisel irtibatlı açık cümleleri vardır öyleki

$$W = \bigcup_{i \in I} W_i$$

dır. Böylece

$$s^2(W) = \bigcup_{i \in I} s_i^2(W_i), \quad s^2 \in \Gamma(W, H_{n_2})$$

H_{n_2} de açık bir cümledir. f^* sürekli olduğundan

$$f^{*-1}(s^2(W)) = \bigcup_{i \in I} f^{*-1}(s_i^2(W_i))$$

H_{n_1} de açık bir cümledir.

O halde X_1 de eğrisel irtibatlı açık $V_i, i \in I$, cümleleri vardır öyleki

$$f^{*-1}(s^2(W)) = \bigcup_{i \in I} s_i^1(V_i)$$

dir. Burada s_i^1 ler V_i üzerinde kesitlerdir. Böylece

$$\psi_1(f^{*-1}(s^2(W))) = \bigcup_{i \in I} V_i$$

X_1 de açık bir cümledir. Şimdi gösterelim ki

$$f^{-1}(W) = \bigcup_{i \in I} V_i$$

dir.

1. $x_1 \in f^{-1}(W)$ olsun. Bu takdirde yalnız bir $x_2 \in X_2$ noktası vardır öyleki $f(x_1) = x_2$ dir.

$$s^2(x_2) = \sigma_{x_2} \in s^2(W), \quad s^2(W) = \bigcup_{i \in I} s_i^2(W_i)$$

ve

$$f^{*-1}(s^2(W)) = \bigcup_{i \in I} s_i^1(V_i)$$

olduğundan bir

$$\sigma_{x_1} \in f^{*-1}(s^2(W)) \ni f^*(\sigma_{x_1}) = \sigma_{x_2}, \sigma_{x_1} \in s_i^1(V_i), i \in I$$

elemanı vardır. Böylece

$$\psi_1(\sigma_{x_1}) = x_1 \in V_i$$

dır. Dolayısıyla $f^{-1}(W) \subset \bigcup_{i \in I} V_i$ dir.

2. $x_1 \in \bigcup_{i \in I} V_i$ olsun. Bu takdirde $x_1 \in V_i$ ve $s_i^1(x_1) \in (H_{n_1})_{x_1}$ dir. Buradan da

$$f^*(s_i^1(x_1))_{x_2} \in s^2(W)$$

ve

$$\psi_2(f^*(s_i^1(x_1))_{x_2}) = x_2 \in W$$

dır. f tasvirinin tarifinden $f(x_1) = x_2$ dir. Dolayısıyla $x_1 \in f^{-1}(W)$ dir. O halde

$$\bigcup_{i \in I} V_i \subset f^{-1}(W)$$

dır. Böylece (1) ve (2) den istenilen elde edilir. Diğer taraftan gösterilebilir ki $(f, f^*): (X_1, H_{n_1}) \rightarrow (X_2, H_{n_2})$ bir homomorfizmdir ve $f \circ \psi_1 = \psi_2 \circ f^*$ olduğundan f birtektir.

Teorem 3.4.2. (X_1, H_{n_1}) , (X_2, H_{n_2}) ve (X_3, H_{n_3}) çiftleri verilmiş olsun. Şayet $f_1^*: H_{n_1} \rightarrow H_{n_2}$, $f_2^*: H_{n_2} \rightarrow H_{n_3}$ demet homomorfizmleri ise bu takdirde (X_1, H_{n_1}) ve (X_3, H_{n_3}) çiftleri arasında bir (f, f^*) homorfizmi vardır öyleki $f = f_2 \circ f_1$, $f^* = f_2^* \circ f_1^*$.

İspat. f_1^* , f_2^* sürekli tasvirler olduğundan $f_2^* \circ f_1^*$ sürekli bir tasvir dir. Teorem 3.4.1. den dolayı bir $f: X_1 \rightarrow X_3$ sürekli tasviri vardır. Açık olarak $f_2^* \circ f_1^*$, f ye nazaran sapları

korur ve $f_2^* \circ f_1^*$ her sap üzerinde bir homomorfizmdir. Böylece $(f, f_2^* \circ f_1^*): (X_1, H_{n_1}) \rightarrow (X_3, H_{n_3})$ bir homomorfizmdir.

Şimdi gösterelim ki $f = f_2 \circ f_1$ dir. Herhangibir $(H_{n_1})_{x_1} \subset H_{n_1}$ sapı için bir $(H_{n_2})_{x_2} \subset H_{n_2}$ sapı vardır öyleki $f_1^*((H_{n_1})_{x_1}) \subset (H_{n_2})_{x_2}$ dir. Diğer taraftan herhangi bir $(H_{n_2})_{x_2} \subset H_{n_2}$ sapı için de bir $(H_{n_3})_{x_3} \subset H_{n_3}$ sapı vardır öyleki $f_2^*((H_{n_2})_{x_2}) \subset (H_{n_3})_{x_3}$ dir. O halde

$$(f_2^* \circ f_1^*)((H_{n_1})_{x_1}) = f_2^*(f_1^*((H_{n_1})_{x_1})) \subset f_2^*((H_{n_2})_{x_2}) \subset (H_{n_3})_{x_3}$$

ve

$$f(x_1) = x_3.$$

dir. Öte taraftan $f_1(x_1) = x_2$, $f_2(x_2) = x_3$ dir. Böylece $(f_2 \circ f_1)(x_1) = f_2(f_1(x_1)) = x_3$ dır. Buradan $f_2 \circ f_1 = f$ bulunur.

Şimdi,

C: Yüksek homotopi gruplarının demeti ve demet homomorfizmleri kategorisi

D: İrtibatlı, lokal eğrisel irtibatlı topolojik uzaylar ve sürekli tasvirleri kategorisi olsun. Bu durumda bir $T: C \rightarrow D$ tasvirini şu şekilde tarif edebiliriz: Herhangi H_n demeti ve her $f^*: H_{n_1} \rightarrow H_{n_2}$ demet homomorfizmi için $T(H_n) = X$, $T(f^*) = f: X_1 \rightarrow X_2$ dir.

i) $H_{n_1} = H_{n_2}$ ise $f^* = 1_{H_{n_1}}$ olup $T(f^*) = T(1_{H_{n_1}}) = 1_{X_1}$ dir.

ii) Şayet $f_1^*: H_{n_1} \rightarrow H_{n_2}$ ve $f_2^*: H_{n_2} \rightarrow H_{n_3}$ iki demet homomorfizmi ise

$$T(f_2^* \circ f_1^*) = T((f_2 \circ f_1)^*) = f_2 \circ f_1 = T(f_2^*) \circ T(f_1^*)$$

dir. Dolayısıyla $T: C \rightarrow D$ kovaryant bir funktordur.

O halde aşağıdaki teoremi ifade ediyoruz.

Teorem 3.4.3. Yüksek homotopi gruplarının demetleri ve demet homomorfizmleri kategorisinden, İrtibatlı, lokal eğrisel irtibatlı topolojik uzaylar ve sürekli tasvirleri kategorisine bir funktor (kovaryant funktor) vardır öyleki bu funktor, bir yüksek homotopi grubunun demetine, İrtibatlı, lokal eğrisel irtibatlı bir topolojik uzayını, f^* tasvirine de f tasvirini karşılık getirir.

Teorem 3.4.4. (X_1, H_{n_1}) ve (X_2, H_{n_2}) çiftleri verilmiş olsun. Şayet $f^*: H_{n_1} \rightarrow H_{n_2}$ bir demet izomorfizmi ise bu taktirde (X_1, H_{n_1}) ve (X_2, H_{n_2}) çiftleri arasında bir izomorfizm vardır.

İspat. Teorem 3.4.1. den dolayı bir $f: X_1 \rightarrow X_2$ sürekli tasviri vardır. Şimdi göstereceğiz ki f bijektiftir. Gerçekten $x_1, y_1 \in X_1$ olmak üzere $f(x_1) = f(y_1) = x_2$ ise bu taktirde bir $(H_{n_2})_{x_2}$ sapı vardır öyleki $f^*((H_{n_1})_{x_1}) = f^*((H_{n_1})_{y_1}) = (H_{n_2})_{x_2}$ dir. f^* birebir olduğundan bu imkansızdır. Dolayısıyla $x_1 = y_1$ dir. Diğer taraftan f^* üzerine olduğundan her $(H_{n_2})_{x_2}$ sapı için bir $(H_{n_1})_{x_1}$ sapı vardır öyleki $f^*((H_{n_1})_{x_1}) = (H_{n_2})_{x_2}$. Bu sonuçtan dolayı her $x_2 \in X_2$ için bir $x_1 \in X_1$ vardır öyleki $f(x_1) = x_2$ dir.

f^{*-1} sürekli olduğundan Teorem 3.4.1. den dolayı bir $g: X_2 \rightarrow X_1$ sürekli tasviri vardır. Kolaylıkla gösterilebilir ki g bir bijeksiyondur. Diğer taraftan gösterilebilir ki $g = f^{-1}$ dir. Dolayısıyla f bir homeomorfizmdir. O halde (f, f^*) bir izomorfizmdir.

3.5. Genelleştirilmiş Whitney Toplamı

Şimdi, yine literatüre katkı mahiyetinde olan bir kavram ve karakterizasyon takdim ediyoruz.

$(X_1, H_{n_1}), (X_2, H_{n_2}), \dots, (X_n, H_{n_n})$ çiftleri verilmiş olsun. $W_1 \subset X_1, W_2 \subset X_2, \dots, W_n \subset X_n$ açık cümleler olmak üzere $\Gamma_1(W_1, H_{n_1}), \Gamma_2(W_2, H_{n_2}), \dots, \Gamma_n(W_n, H_{n_n})$ kesitler cümlelerini dikkate alalım. $W = W_1 \times W_2 \times \dots \times W_n \subset X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$ için

$$M_w = \Gamma_1(W_1, H_{n_1}) \times \Gamma_2(W_2, H_{n_2}) \times \dots \times \Gamma_n(W_n, H_{n_n})$$

cümlesini teşkil edelim. $s = (s_1, s_2, \dots, s_n) \in M_w$ ve $V \subset W$ ($V = V_1 \times V_2 \times \dots \times V_n, V_1 \subset W_1, V_2 \subset W_2, \dots, V_n \subset W_n$ açık cümledir) açığı için de

$$\begin{aligned} \gamma_{w,v}(s) &= \gamma_{w,v}(s_1, s_2, \dots, s_n) = (\gamma_{w_1, v_1}(s_1), \gamma_{w_2, v_2}(s_2), \dots, \gamma_{w_n, v_n}(s_n)) \\ &= (s_1 |_{V_1}, s_2 |_{V_2}, \dots, s_n |_{V_n}) \end{aligned}$$

İNGİLİZCE ABSTRAKT (en fazla 250 sözcük) :

This thesis consists of four chapters. The first chapter is devoted to the introduction.

In the second chapter, fundamental concepts are included.

In the third chapter, constructing the sheaf H_n of higher homotopy groups on a connected and locally path connected topological space, its some characterizations are examined and defining "The Generalized Whitney Sum" show that the sheaf $H^* = H_{n_1} \oplus H_{n_2} \oplus \dots \oplus H_{n_n}$ is isomorphic to the sheaf $H_{n_1} \times H_{n_2} \times \dots \times H_{n_n}$.

Finally in the fourth chapter, we prove that H_n is a regular and abelian covering space. Constructing the Quotient sheaf $\mathcal{Q}_{H'_n}$ for any subsheaf of group $H'_n \subset H_n$, it is shown that $\mathcal{Q}_{H'_n}$ is a regular covering space as a sheaf of abelian groups.

TÜRKÇE ABSTRAKT (en fazla 250 sözcük) :

(TÜBİTAK/TÜRDOK'un Abstrakt Hazırlama Kılavuzunu kullanınız!)

Dört bölümden oluşan bu çalışmada, ilk bölüm giriş için ayrıldı.

İkinci bölümde temel kavramlara yer verildi.

Üçüncü bölümde, İrtibatlı, lokal eğrisel irtibatlı bir topolojik uzay üzerinde yüksek homotopi gruplarının H_n demeti teşkil edilerek bazı karakterizasyonları oluşturuldu ve "Genelleştirilmiş Whitney Toplamı" tarifini verilerek gösterildi ki $H^* = H_n \oplus H_{n-2} \oplus \dots \oplus H_n$ demeti $H_n \times H_{n-2} \times \dots \times H_n$ demetine izomorftur.

Dördüncü bölümde, H_n nin regüler ve abelyen bir örtü uzayı olduğu ispatlandı. Herhangi bir $H'_n \subset H_n$ grup alt demeti için $Q_{H'_n}$ bölüm demeti teşkil edilerek bu bölüm demetinin abelyen grupların bir demeti olarak regüler bir örtü uzayı olduğu gösterildi.

olsun. Bu takdirde $\{X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n, M_w, \gamma_{w,v}\}$ bir öndemettir. Böylece indüktif limit teşkil etmek suretiyle $\{X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n, M_w, \gamma_{w,v}\}$ öndemetinden bir demet elde edilir (Grauret and Fritzsche 1976).

Tarif 3.5.1. İndüktif limit teşkil etmek suretiyle $\{X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n, M_w, \gamma_{w,v}\}$ öndemetinden elde edilen demete H_{n_1}, H_{n_2}, \dots ve H_{n_n} demetlerinin "Genelleştirilmiş Whitney Toplamı" denir ve $H^* = H_{n_1} \oplus H_{n_2} \oplus \dots \oplus H_{n_n}$ ile gösterilir.

Şimdi gösterelim ki $H^*_{(x_1, x_2, \dots, x_n)}$ saplı bir grup yapısına sahiptir. Gerçekten

$$\{(W, (s_1, s_2, \dots, s_n))_{(x_1, x_2, \dots, x_n)} : W = W(x_1, x_2, \dots, x_n) \subset X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n \text{ açık}\}$$

cümlesini $H^*_{(x_1, x_2, \dots, x_n)}$ ile gösterelim ve herhangi $(W, (s_1, s_2, \dots, s_n))_{(x_1, x_2, \dots, x_n)}$ $(W', (s'_1, s'_2, \dots, s'_n))_{(x_1, x_2, \dots, x_n)} \in H^*_{(x_1, x_2, \dots, x_n)}$ elemanları için " \bullet " işlemini

$$\begin{aligned} (W, (s_1, s_2, \dots, s_n))_{(x_1, x_2, \dots, x_n)} \bullet (W', (s'_1, s'_2, \dots, s'_n))_{(x_1, x_2, \dots, x_n)} \\ = (W'', (s_1 s'_1, s_2 s'_2, \dots, s_n s'_n))_{(x_1, x_2, \dots, x_n)} \end{aligned}$$

şeklinde tarif edelim. Burada

$$W'' = W''_1 \times \dots \times W''_n$$

ve

$$W''_1 = W_1 \cap W'_1, W''_2 = W_2 \cap W'_2, \dots, W''_n = W_n \cap W'_n$$

dır. Böylece

$$\begin{aligned} (W, (s_1, s_2, \dots, s_n))_{(x_1, x_2, \dots, x_n)} \bullet (W', (s'_1, s'_2, \dots, s'_n))_{(x_1, x_2, \dots, x_n)} = \\ (W'', (\gamma_{w_1, w''_1}(s_1) \cdot \gamma_{w_1, w''_1}(s'_1), \gamma_{w_2, w''_2}(s_2) \cdot \gamma_{w_2, w''_2}(s'_2), \dots, \gamma_{w_n, w''_n}(s_n) \cdot \gamma_{w_n, w''_n}(s'_n))) \end{aligned}$$

dir. Dolayısıyla $s_1 s'_1 \in \Gamma_1(W''_1, H_{n_1}), s_2 s'_2 \in \Gamma_2(W''_2, H_{n_2}), \dots, s_n s'_n \in \Gamma_n(W''_n, H_n)$ dır. O halde tarif edilen çarpma işlemi iyi tarifli olup $H^*_{(x_1, x_2, \dots, x_n)}$ de kapalıdır. Ayrıca görülebilir ki bu çarpma operasyonuna göre $H^*_{(x_1, x_2, \dots, x_n)}$ bir gruptur (Balci 1984).

Diğer taraftan $(H_{n_1})_{x_1} \times (H_{n_2})_{x_2} \times \dots \times (H_{n_n})_{x_n}$ üzerinde aşağıdaki şekilde bir işlem tarif edelim: Herhangi $(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n), (\sigma'_1, \sigma'_2, \dots, \sigma'_n) \in (H_{n_1})_{x_1} \times (H_{n_2})_{x_2} \times \dots \times (H_{n_n})_{x_n}$ elemanları için

$$(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)(\sigma'_1, \dots, \sigma'_n) = (\sigma_1 \cdot \sigma'_1, \sigma_2 \cdot \sigma'_2, \dots, \sigma_n \cdot \sigma'_n)$$

dır. Bu çarpma işlemi iyi tarifli olup $(H_{n_1})_{x_1} \times (H_{n_2})_{x_2} \times \dots \times (H_{n_n})_{x_n}$ de kapalıdır. Kolaylıkla gösterilebilir ki $(H_{n_1})_{x_1} \times (H_{n_2})_{x_2} \times \dots \times (H_{n_n})_{x_n}$ bu çarpma işlemiyle birlikte bir gruptur (Balcı 1984).

Şimdi aşağıdaki teoremi verebiliriz.

Teorem 3.5.1. $(X_1, H_{n_1}), (X_2, H_{n_2}), \dots, (X_n, H_{n_n})$ çiftleri için $H^* = H_{n_1} \oplus H_{n_2} \oplus \dots \oplus H_{n_n}$ verilsin. Bu taktirde herhangi bir $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$ için $k((W, s = (s_1, s_2, \dots, s_n))_{(x_1, x_2, \dots, x_n)}) = (s_1(x_1), s_2(x_2), \dots, s_n(x_n))$ şeklinde tarif edilen

$$k: H^*_{(x_1, x_2, \dots, x_n)} \rightarrow (H_{n_1})_{x_1} \times (H_{n_2})_{x_2} \times \dots \times (H_{n_n})_{x_n}$$

tasviri bir izomorfizmdir.

İspat.

1. $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$ herhangi bir nokta ve W, W' bu noktanın herhangi iki açık komşuluğu olsun. Bilinmektedir ki

$$(W, s = (s_1, s_2, \dots, s_n)) \stackrel{(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\sim} (W', s' = (s'_1, s'_2, \dots, s'_n))$$

yalnız ve yalnız bir $V((x_1, x_2, \dots, x_n)) \subset W \cap W'$ komşuluğu vardır öyleki $s|_V = s'|_V$.

Bu ise $s(x) = s'(x)$ durumuna eşittir. Dolayısıyla k iyi tariflidir ve birebirdir.

2. $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n) \in (H_{n_1})_{x_1} \times (H_{n_2})_{x_2} \times \dots \times (H_{n_n})_{x_n}$ olsun. Bu durumda $W_1 \subset X_1, W_2 \subset X_2, \dots, W_n \subset X_n$ açık komşulukları vardır öyleki $s_1 \in \Gamma_1(W_1, H_{n_1}), s_2 \in \Gamma_2(W_2, H_{n_2}), \dots, s_n \in \Gamma_n(W_n, H_{n_n})$ kesitleri için

$$s_1(x_1) = \sigma_1, s_2(x_2) = \sigma_2, \dots, s_n(x_n) = \sigma_n$$

dır. Böylece $W = W_1 \times W_2 \times \dots \times W_n, (x_1, x_2, \dots, x_n)$ nin açık komşuluğudur ve $s = (s_1, s_2, \dots, s_n) \in M_w$ için

$$s(x_1, x_2, \dots, x_n) = (s_1(x_1), s_2(x_2), \dots, s_n(x_n))$$

dir. Dolayısıyla $\gamma s(x) = \gamma s((x_1, x_2, \dots, x_n)) = (W, s = (s_1, s_2, \dots, s_n))_{(x_1, x_2, \dots, x_n)}$ şeklinde tarif edilen γs , W üzerinde bir kesittir ve

$$k((W, s = (s_1, s_2, \dots, s_n))_{(x_1, x_2, \dots, x_n)}) = (s_1(x_1), s_2(x_2), \dots, s_n(x_n)) = \sigma$$

dir. O halde k üzerinedir.

3. Herhangi

$$(W, s = (s_1, s_2, \dots, s_n))_{(x_1, x_2, \dots, x_n)}, (W', s' = (s'_1, s'_2, \dots, s'_n))_{(x_1, x_2, \dots, x_n)} \in H^*(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

elemanları için

$$\begin{aligned} k(((W, s = (s_1, s_2, \dots, s_n))_{(x_1, x_2, \dots, x_n)}) \cdot ((W', s' = (s'_1, s'_2, \dots, s'_n))_{(x_1, x_2, \dots, x_n)})) \\ = k((W'', (s_1 s'_1, \dots, s_n s'_n))_{(x_1, x_2, \dots, x_n)}) \\ = (s_1(x_1) s'_1(x_1), s_2(x_2) s'_2(x_2), \dots, s_n(x_n) s'_n(x_n)) \\ = (s_1(x_1), s_2(x_2), \dots, s_n(x_n)) (s'_1(x_1), s'_2(x_2), \dots, s'_n(x_n)) \\ = k((W, (s_1, s_2, \dots, s_n))_{(x_1, x_2, \dots, x_n)}) k((W', (s'_1, s'_2, \dots, s'_n))_{(x_1, x_2, \dots, x_n)}) \end{aligned}$$

olduğundan k bir homomorfizmdir. O halde k bir izomorfizmdir. Dolayısıyla,

$$H^*(x_1, x_2, \dots, x_n) \cong (H_{n_1})_{x_1} \times (H_{n_2})_{x_2} \times \dots \times (H_{n_n})_{x_n}$$

dır.

Böylece $H^*(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ile $(H_{n_1})_{x_1} \times (H_{n_2})_{x_2} \times \dots \times (H_{n_n})_{x_n}$

i özdeşleyebiliriz.

Şimdi $(X_1, H_{n_1}), (X_2, H_{n_2}), \dots, (X_n, H_{n_n})$ çiftleri verilmiş olsun. Bu takdirde

$$H_{n_1} = \bigvee_{x_1 \in X_1} (H_{n_1})_{x_1}, \quad H_{n_2} = \bigvee_{x_2 \in X_2} (H_{n_2})_{x_2}, \dots, \quad H_{n_n} = \bigvee_{x_n \in X_n} (H_{n_n})_{x_n}$$

dır. Dolayısıyla

$$H_{n_1} \times H_{n_2} \times \dots \times H_{n_n} = \bigvee_{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n} (H_{n_1})_{x_1} \times (H_{n_2})_{x_2} \times \dots \times (H_{n_n})_{x_n}$$

dır. Böylece $H_{n_1} \times H_{n_2} \times \dots \times H_{n_n}$, $X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$ üzerinde bir cümledir. $H_{n_1}, H_{n_2}, \dots, H_{n_n}$ topolojik uzaylar olduğundan $H_{n_1} \times H_{n_2} \times \dots \times H_{n_n}$ de topolojik uzaydır. O halde $(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n) \in H_{n_1} \times H_{n_2} \times \dots \times H_{n_n}$ için

$$\Phi(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n) = (\psi_1(\sigma_1), \psi_2(\sigma_2), \dots, \psi_n(\sigma_n))$$

şeklinde tarifli

$$\Phi: H_{n_1} \times H_{n_2} \times \dots \times H_{n_n} \rightarrow X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$$

tasvirini gözönüne alabiliriz.

İddia ediyoruz ki $\Phi = (\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n)$ lokal topolojik bir tasvirdir. Gerçekten $(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n) \in H_{n_1} \times H_{n_2} \times \dots \times H_{n_n}$ ise bu taktirde $\Phi((\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)) = (\psi_1(\sigma_1), \psi_2(\sigma_2), \dots, \psi_n(\sigma_n)) = (x_1, \dots, x_n)$ dir. $\psi_1: H_{n_1} \rightarrow X_1, \psi_2: H_{n_2} \rightarrow X_2, \dots, \psi_n: H_{n_n} \rightarrow X_n$ lokal topolojik tasvirler olduklarından $U_1(\sigma_1) \subset H_{n_1}, W_1(x_1) \subset X_1, U_2(\sigma_2) \subset H_{n_2}, W_2(x_2) \subset X_2, \dots, U_n(\sigma_n) \subset H_{n_n}, W_n(x_n) \subset X_n$ açık komşulukları vardır öyleki $\psi_1|_{U_1}: U_1 \rightarrow W_1, \psi_2|_{U_2}: U_2 \rightarrow W_2, \dots, \psi_n|_{U_n}: U_n \rightarrow W_n$ topolojiktir. Böylece $U(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n) = U_1(\sigma_1) \times U_2(\sigma_2) \times \dots \times U_n(\sigma_n)$ ve $W = W_1(x_1) \times \dots \times W_n(x_n)$ sırasıyla $(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$ ve (x_1, x_2, \dots, x_n) noktalarının açık komşuluklarıdır.

Sonuç olarak, açıkça görülür ki $\psi|_U: U \rightarrow W$ bir topolojik tasvirdir.

Böylece $(H_{n_1} \times H_{n_2} \times \dots \times H_{n_n}, \Phi)$, $X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$ üzerinde bir demettir. Üstelik $\Gamma(W, H_{n_1} \times H_{n_2} \times \dots \times H_{n_n})$, $W \subset X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$ açık, bir gruptur. O halde çarpma işlemi $H_{n_1} \times H_{n_2} \times \dots \times H_{n_n}$ nin topolojisine göre her sap üzerinde süreklidir. Böylece $H_{n_1} \times H_{n_2} \times \dots \times H_{n_n}$ cebirsel yapıli bir demettir.

Tarif 3.5.2. $(X_1, H_{n_1}), (X_2, H_{n_2}), \dots, (X_n, H_{n_n})$ çiftleri verilmiş olsun. Bu taktirde $H_{n_1} \times H_{n_2} \times \dots \times H_{n_n}$ demetine $H_{n_1}, H_{n_2}, \dots, H_{n_n}$ demetlerinin direkt toplamı denir.

Şimdi aşağıdaki teoremi verelim.

Teorem 3.5.2. $(X_1, H_{n_1}), (X_2, H_{n_2}), \dots, (X_n, H_{n_n})$ çiftleri verilmiş olsun. Bu taktirde $H^* = H_{n_1} \oplus H_{n_2} \oplus \dots \oplus H_{n_n}$ demeti ile $H_{n_1} \times H_{n_2} \times \dots \times H_{n_n}$ demeti izomorftur.

İspat. $H^*=(H^*,\psi^*)$ ve $H_{n_1}\times H_{n_2}\times\dots\times H_{n_n}=(H_{n_1}\times H_{n_2}\times\dots\times H_{n_n}, \Phi=(\psi_1,\psi_2,\dots,\psi_n))$ olduğunu kabul edelim.

$$K: H^* \rightarrow H_{n_1}\times H_{n_2}\times\dots\times H_{n_n}$$

tasviri her $(W,(s_1,s_2,\dots,s_n))(x_1,x_2,\dots,x_n)\in H^*$ için $K((W,(s_1,s_2,\dots,s_n))(x_1,x_2,\dots,x_n))=(s_1(x_1),s_2(x_2),\dots,s_n(x_n))$ şeklinde tarif edilsin. Önce göstereyim ki K süreklidir. Gerçekten, W_i ($i\in I$), V_j ($j\in J$) ve O_t ($t\in T$) ler eğrisel irtibatlı açık cümleler olmak üzere $U\subset K(H^*)$ açık bir cümle yani $U=U_1\times U_2\times\dots\times U_n$,

$$U_1=\bigcup_{i\in I} s_i^1(W_i), U_2=\bigcup_{j\in J} s_j^2(V_j),\dots,U_n=\bigcup_{t\in T} s_t^n(O_t)$$

olsun. Dolayısıyla $U_1=s_1(W)$, $U_2=s_2(V)$, \dots , $U_n=s_n(O)$ ve $U=s_1(W)\times s_2(V)\times\dots\times s_n(O)$ dur. Burada $s_1\in\Gamma(W,H_{n_1})$, $s_2\in\Gamma(V,H_{n_2})$, \dots , $s_n\in\Gamma(O,H_{n_n})$ ve $W=\bigcup_{i\in I} W_i$, $V=\bigcup_{j\in J} V_j$, \dots , $O=\bigcup_{t\in T} O_t$ dır. Böylece $\Phi(U)=W\times V\times\dots\times O$ dır. Göstereceğiz ki $K^{-1}(U)\subset H^*$ açık bir cümledir.

Eğer $\sigma^*\in K^{-1}(U)$ ise bu takdirde bir $\sigma\in U$ vardır öyleki $K(\sigma^*)=\sigma$ dır. Dolayısıyla $\sigma^*=(\Phi(U),(s_1,s_2,\dots,s_n))(x_1,x_2,\dots,x_n)$ ise

$$K(\sigma^*)=(s_1(x_1),s_2(x_2),\dots,s_n(x_n))\in U$$

ve

$$\Phi(K(\sigma^*))=(x_1,x_2,\dots,x_n)\in\Phi(U)$$

dır. Böylece $\gamma_s((x_1,x_2,\dots,x_n))=(\Phi(U),(s_1,s_2,\dots,s_n))(x_1,x_2,\dots,x_n)=\sigma^*\in\gamma_s(\Phi(U))$ şeklinde tarifli bir

$$\gamma_s=\gamma(s_1,s_2,\dots,s_n):\Phi(U)\rightarrow H^*$$

kesiti vardır. Dolayısıyla σ^* keyfi sabit bir nokta olduğundan

$$K^{-1}(U)\subset\gamma_s(\Phi(U))$$

dır. Diğer taraftan, eğer $\sigma^{*'}\in\gamma_s(\Phi(U))$ ise bu takdirde

$$\sigma^{*'} = (\Phi(U), (s_1, s_2, \dots, s_n))(x'_1, x'_2, \dots, x'_n)$$

ve

$$\psi^*(\sigma^{*'}) = (x'_1, x'_2, \dots, x'_n) \in \Phi(U)$$

dır. Buradan $(s_1(x'_1), s_2(x'_2), \dots, s_n(x'_n)) \in U$ dır. Dolayısıyla $K(\sigma^{*'}) = (s_1(x'_1), s_2(x'_2), \dots, s_n(x'_n))$ dır. Böylece $\sigma^{*'} \in K^{-1}(U)$ ve $\gamma_s(\Phi(U)) \subset K^{-1}(U)$ dır. O halde $K^{-1}(U) = \gamma_s(\Phi(U))$ dur. Yani $K^{-1}(U) \subset H^*$ açık bir cümle olup K süreklidir.

Teorem 3.5.1. den dolayı her $H^*(x_1, x_2, \dots, x_n) \subset H^*$ sapı için $K|_{H^*(x_1, x_2, \dots, x_n)} = k$ olduğundan K tasviri bijektiftir. Diğer taraftan her $\sigma^* \in H^*$ için

$$(\Phi \circ K)(\sigma^*) = \psi^*(\sigma^*)$$

olduğundan K sapları koruyan bir tasvirdir. Dolayısıyla K bir demet morfizmidir. Üstelik K açık bir tasvir olduğundan K^{-1} süreklidir.

Böylece K tasviri bir demet izomorfizmidir.

O halde H^* ile $H_{n_1} \times H_{n_2} \times \dots \times H_{n_n}$ özdeşlenebilir. Dolayısıyla her $W \subset X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$ açığı için

$$\Gamma(W, H^*) \cong \Gamma(W, H_{n_1} \times H_{n_2} \times \dots \times H_{n_n})$$

dır.

BÖLÜM 4

BİR ABELYEN ÖRTÜ UZAYI OLARAK H_n DEMETİ

Bu bölümde, önce $X=(X,c)$ irtibatlı, lokal eğrisel irtibatlı bir topolojik uzay (veya bir Riemann yüzeyi) olmak üzere X üzerinde inşa edilen Yüksek Homotopi gruplarının H_n demetinin bir regüler örtü uzayı (Knill 1973, Massey 1991) olduğu gösterilecek ve Genel Yükseltme Probleminin bir çözümü verilecektir. Daha sonra $H'_n \subset H_n$ bir grup altdemet olmak üzere $Q_{H'_n}$ bölüm demeti teşkil edilecek ve ispat edilecektir ki, bu bölüm demet de X üzerinde abelyen grupların bir demeti (Tennison 1975) ve regüler bir örtü uzayıdır. Nihayet H_n demetinin $H_n^1, H_n^2, \dots, H_n^n$ grup altdemetleri yardımıyla $H^* = H_n^1 \oplus H_n^2 \oplus \dots \oplus H_n^n$ Whitney Toplamı teşkil edilecek ve gösterilecektir ki H^*_X sapı $(H_n^1)_X \times (H_n^2)_X \times \dots \times (H_n^n)_X$ sapına izomorftur.

4.1. H_n nin Karakteristik Görünümü.

Bir önceki bölümde gösterdik ki H_n , X üzerinde abelyen grupların demeti ve dolayısıyla bir cebirsel demettir. Şimdi de H_n demetinin karakteristik görünümünü vereceğiz. Öncelikle H_n demeti aşağıdaki özellikleri sağlar:

(i) WCX açık bir cümle olsun. Bu taktirde W üzerindeki bir kesit X üzerindeki global bir kesite genişletilebilir. Üstelik, her $s \in \Gamma(X, H_n)$ için

$$\Gamma(W, H_n) = \Gamma(s|_W, H_n)$$

dir.

(ii) H_n nin herhangi iki sapı birbirine izomorftur. Çünkü, eğrisel irtibatlı topolojik uzaylarda yüksek homotopi grubu noktaya bağlı değildir.

(iii) $W_1, W_2 \subset CX$ iki açık cümle, $s_1 \in \Gamma(W_1, H_n)$ ve $s_2 \in \Gamma(W_2, H_n)$ olsun. Şayet bir $x_0 \in W_1 \cap W_2$ için $s_1(x_0) = s_2(x_0)$ ise bu taktirde bütün $W_1 \cap W_2$ üzerinde

$$s_1 = s_2$$

dir.

Gerçekten, $W_1, W_2 \subset X$ iki açık cümle ve $x_0 \in W_1 \cap W_2$ için $s_1(x_0) = s_2(x_0)$ olsun. Bu durumda $[\alpha_1]_{x_0} = [\alpha_2]_{x_0}$ dir. Buradan γ , x_0 noktasını keyfi bir $x_1 \in W_1 \cap W_2$ noktasına birleştiren bir eğri olmak üzere

$$\gamma^*([\alpha_1]_{x_0}) = \gamma^*([\alpha_2]_{x_0})$$

dir. Buradan da $[\beta_1]_{x_1} = [\beta_2]_{x_1}$ elde edilir. Yani $s_1(x_1) = s_2(x_1)$ dir. x_1 keyfi bir nokta olduğundan $s_1 = s_2$ dir.

(iv) $W \subset X$ açık bir cümle ve $s_1, s_2 \in \Gamma(W, H_n)$ olsun. Şayet herhangi $x_0 \in W$ için $s_1(x_0) = s_2(x_0)$ ise bu taktirde bütün W üzerinde

$$s_1 = s_2$$

dir (Balcı 1988).

Şimdi de gösterelim ki H_n , X in bir regüler örtü uzayıdır. Önce aşağıdaki teoremi veriyoruz.

Teorem 4.1.1. H_n , X üzerinde abelyen grupların demeti ve W , X de bir açık cümle olsun. Bu taktirde

$$(H_n)_c \cong \Gamma(W, H_n)$$

dır.

İspat. $W \subset X$ açık bir cümle ve $s \in \Gamma(W, H_n)$ olsun. Bu taktirde birtek $\sigma_c = [\alpha]_c \in (H_n)_c$ vardır \ni her $x \in W$ için

$$s(x) = \gamma^*([\alpha]_c) = [\beta]_x$$

dir. $(H_n)_c$ nin herbir elemanına $\Gamma(W, H_n)$ de yalnız bir eleman karşılık gelir. Bunu ifade eden tasviri her $\sigma_c \in (H_n)_c$ için $\Phi(\sigma_c) = s$ olmak üzere

$$\Phi: (H_n)_c \rightarrow \Gamma(W, H_n)$$

ile gösterelim.

$\sigma_c^1 = [\alpha_1]_c$, $\sigma_c^2 = [\alpha_2]_c \in (H_n)_c$ olsun. σ_c^1 ve σ_c^2 sırasıyla $s_1 \in \Gamma(W, H_n)$ ve $s_2 \in \Gamma(W, H_n)$ kesitlerini belirlesin. Bu taktirde her $x \in W$ için

$$s_1(x) = \gamma^*([\alpha_1]_c) = [\beta_1]_x$$

ve

$$s_2(x) = \gamma^*([\alpha_2]_c) = [\beta_2]_x$$

dir. Eğer $\sigma_c^1 \neq \sigma_c^2$ ise $s_1(x) \neq s_2(x)$ dir. Dolayısıyla Φ birebirdir. Tariften dolayı Φ üzerinedir. Böylece Φ bijektiftir.

Üstelik Φ bir homomorfizmdir. Çünkü $\sigma_c^1 = [\alpha_1]_c$, $\sigma_c^2 = [\alpha_2]_c \in (H_n)_c$ ise

$$\sigma_c^1 \cdot \sigma_c^2 = [\alpha_1 \cdot \alpha_2]_c$$

dir. Böylece $\sigma_c^1 \cdot \sigma_c^2 \in (H_n)_c$ bir $s \in \Gamma(W, H_n)$ kesitini tarif eder öyleki her $x \in W$ için

$$s(x) = \gamma^*([\alpha_1 \cdot \alpha_2]_c) = [\beta_1 \cdot \beta_2]_x$$

dir. Diğer taraftan

$$\begin{aligned} s_1(x) \cdot s_2(x) &= \gamma^*([\alpha_1]_c) \cdot \gamma^*([\alpha_2]_c) \\ &= \gamma^*([\alpha_1]_c \cdot [\alpha_2]_c) \\ &= \gamma^*([\alpha_1 \cdot \alpha_2]_c) \\ &= [\beta_1 \cdot \beta_2]_x \end{aligned}$$

dir. Böylece

$$\Phi(\sigma_c^1 \cdot \sigma_c^2) = s_1 \cdot s_2 = \Phi(\sigma_c^1) \cdot \Phi(\sigma_c^2)$$

dir. Dolayısıyla

$$(H_n)_c \cong \Gamma(W, H_n)$$

dir.

Sonuç 4.1.1. H_n X üzerinde abelyen grupların demeti, $(H_n)_x$, $x \in X$ noktası üzerinde bir sap olsun. Bu takdirde

$$(H_n)_x \cong \Gamma(X, H_n)$$

dir.

Teorem 3.1.1 den dolayı $\psi|_{s(W)}: s(W) \rightarrow W$ topolojik bir tasvir ve $s = (\psi|_{s(W)})^{-1}$ dir. Dolayısıyla

$$\psi^{-1}(W) = \bigcup_{i \in I} s_i(W), \quad s_i \in \Gamma(W, H_n)$$

olup

$$\psi|_{s_i(W)}: s_i(W) \rightarrow W$$

bir topolojik tasvirdir. Böylece $W = W(x)$ açık cümlesi ψ yardımıyla tamamen örtülür. Dolayısıyla ψ bir örtü projeksiyonu (Uluçay 1987) olup (H_n, ψ) X in bir örtü uzayıdır. Hatta, abelyen bir örtü uzayıdır.

Şimdi, $x_0 \in X$ herhangi bir nokta ve γ , x_0 başlangıç noktalı bir eğri olsun. Bu durumda

$$s \circ \gamma: I \rightarrow H_n$$

sürekli bir tasvirdir ve

$$\psi \circ (s \circ \gamma) = \gamma$$

dır. Eğer $(s \circ \gamma)(x_0) = \rho_{x_0} \in (H_n)_{x_0}$ ise $s \circ \gamma$, H_n de x_0 üzerinde ρ_{x_0} başlangıç noktasında γ nın bir yükseltmesidir. $s \circ \gamma = \gamma^*$ diyelim. γ^* birtektir. Çünkü

$$\psi|_{s(X)}: s(X) \rightarrow X$$

bir homeomorfizmdir.

Böylece aşağıdaki teoremi ifade edebiliriz.

Teorem 4.1.2. (H_n, ψ) , X üzerinde abelyen grupların demeti, $x_0 \in X$ herhangi bir nokta ve γ , X de x_0 başlangıç noktalı bir eğri olsun. Bu takdirde herhangi bir $\rho_{x_0} \in (H_n)_{x_0}$ için γ , H_n de ρ_{x_0} başlangıç noktalı bir tek γ^* yükseltmesine sahiptir.

Dolayısıyla H_n , X in regüler bir örtü uzayıdır diyebiliriz.

Şimdi, Monodromy Teoremi (Beardon 1984, Conway 1978) olarak da isimlendirebileceğimiz aşağıdaki teoremi veriyoruz.

Teorem 4.1.3. (H_n, ψ) X üzerinde abelyen grupların demeti ve γ_1^* , γ_2^* H_n de ρ_{x_0} ortak başlangıç noktalı, ρ_{x_1} ortak bitim noktalı eğriler olsun. Bu takdirde H_n de γ_1^* , γ_2^* a homotopdur yalnız ve yalnız X de $\psi \circ \gamma_1^*$ da $\psi \circ \gamma_2^*$ a homotop ise

İspat. γ_1^* , γ_2^* , G homotopisi ile homotopik olsun. Bu takdirde $\psi \circ G$, $\psi \circ \gamma_1^*$ ve $\psi \circ \gamma_2^*$ arasındaki homotopiyi verir.

Karşıt olarak, $\psi \circ \gamma_1^*$ ve $\psi \circ \gamma_2^*$ X de x_0 ortak başlangıç, x_1 ortak bitim noktalı eğriler ve

$$H: I \times J \rightarrow X$$

bu eğriler arasındaki homotopi olsun. $\rho_{x_0} \in H_n$ olduğundan

$$s(x_0) = \rho_{x_0}$$

şartını sağlayan bir tek $s \in \Gamma(X, H_n)$ kesiti vardır. Böylece

$$s(\psi \circ \gamma_1^*) = \gamma_1^*$$

ve

$$s(\psi \circ \gamma_2^*) = \gamma_2^*$$

dır. Üstelik $s \circ H$, γ_1^* ile γ_2^* arasındaki bir homotopidir.

Teorem 4.1.4. (H_n, ψ) X üzerinde abelyen grupların demeti, $x_0 \in X$ keyfi sabit bir nokta ve $\rho_{x_0} \in (H_n)_{x_0}$ herhangi bir nokta olsun. Bu takdirde H_n nin ρ_{x_0} taban noktalı esas grubu $(H_n)_{x_0}$ a izomorftur.

İspat. Teorem 4.1.1 ve Teorem 4.1.2 ve Teorem 4.1.3 ün direkt bir sonucudur.

Şimdi de, H_n abelyen gruplarının demeti için "Genel Yükseltme Teoremi" (Massey 1991)'ni vereceğiz.

Teorem 4.1.5. $X=(X,x_0)$, $Y=(Y,y_0)$ irtibatlı, lokal eğrisel irtibatlı iki topolojik uzay (veya iki Riemann yüzeyi), (H_n, ψ) X üzerinde abelyen grupların demeti ve $\rho_{x_0} \in \psi^{-1}(x_0)$ herhangi bir nokta olsun. Şayet $f:Y \rightarrow X$ herhangi sürekli bir tasvir ise bu taktirde f , $\psi \circ f^* = f$ şartını sağlayan birtek $f^*: (Y, y_0) \rightarrow (H_n, \rho_{x_0})$ yükseltmesine sahiptir.

İspat. $f: (Y, y_0) \rightarrow (X, x_0)$ sürekli bir tasvir olsun. Şayet $\rho_{x_0} \in \psi^{-1}(x_0)$ herhangi bir nokta ise bu taktirde

$$s(x_0) = \rho_{x_0}$$

şartını sağlayan birtek $s \in \Gamma(X, H_n)$ kesiti vardır. Böylece

$$s \circ f: (Y, y_0) \rightarrow (H_n, \rho_{x_0})$$

sürekli bir tasvir olup

$$\psi \circ (s \circ f) = f$$

dir. Dolayısıyla $s \circ f$, f nin H_n e yükseltilmesidir. $s \circ f = f^*$ olduğunu kabul edelim. s kesiti birtek olduğundan f^* da birtektir.

Böylece aşağıdaki teoremi verebiliriz.

Teorem 4.1.6. $X=(X,x_0)$, $Y=(Y,y_0)$ irtibatlı, lokal eğrisel irtibatlı iki topolojik uzay (veya iki Riemann yüzeyi), (H_n, ψ) X üzerinde abelyen grupların demeti, $\rho_{x_0} \in \psi^{-1}(x_0)$ herhangi bir nokta ve

$$f^*, g^*: (Y, y_0) \rightarrow (H_n, \rho_{x_0})$$

$\psi \circ f^* = \psi \circ g^*$ özelliğini sağlayan iki tasvir olsun. Bu taktirde

$$f^* = g^*$$

dır.

İspat. Teorem 4.1.5 in direkt bir sonucudur.

4.2. H_n nin Altdemetleri ve Bölüm Demeti

Bu kısımda, H_n X üzerinde abelyen grupların demeti ve $H'_n \subset H_n$ bir grup altdemeti olmak üzere $Q_{H'_n}$ bölüm demetini teşkil ederek bu demetin de X üzerinde abelyen grupların bir demeti ve regüler bir örtü uzayı olduğunu göstereceğiz. Ayrıca H_n nin grup altdemetlerinin Whitney Toplamını teşkil ederek H_X^* sapının $(H_n^1)_X \times (H_n^2)_X \times \dots \times (H_n^n)_X$ sapına izomorf olduğunu ispatlayacağız.

Tarif 4.2.1. H_n , X üzerinde abelyen grupların demeti ve $H'_n \subset H_n$ açık bir cümle olsun. Şayet

$$i) \psi(H'_n) = X$$

$$ii) \text{ Her } x \in X \text{ için } (H'_n)_x \subset (H_n)_x \text{ bir altgrup ise}$$

bu takdirde H'_n ye Abelyen grupların H_n demetinin bir altdemeti denir (Uluçay 1981).

Şimdi aşağıdaki teoremi verelim.

Teorem 4.2.1. $X=(X,c)$ irtibatlı, lokal eğrisel irtibatlı bir topolojik uzay (veya bir Riemann yüzeyi) ve $(H_n)_c$, $c \in X$ noktasına karşılık gelen yüksek homotopi grubu olsun. Bu takdirde, her $(H'_n)_c \subset (H_n)_c$ altcümlesi X üzerinde bir demet belirtir.

İspat. $(H_n)_c$, $c \in X$ noktasına karşılık gelen yüksek homotopi grubu ve $(H'_n)_c \subset (H_n)_c$ olsun. Her $x \in X$ için $[\gamma]$ homotopi sınıfı tarafından belirlenen tasvir Φ olmak üzere

$$(H_n)_c \stackrel{\Phi}{\cong} (H_n)_x$$

dir. Dolayısıyla $(H'_n)_c$ cümlesi Φ izomorfizmi ile $(H'_n)_x$ cümlesine dönüştürülür.

Şimdi

$$H'_n = \bigvee_{x \in X} (H'_n)_x$$

olsun. Açık olarak H'_n , X üzerinde bir cümledir ve her $\alpha'_x \in (H'_n)_x \subset H'_n$ için $\psi(\alpha'_x) = x$ şeklinde tarif edilen

$$\psi': H'_n \rightarrow X$$

tasviri üzerinedir.

Ayrıca H'_n üzerinde aşağıdaki şekilde bir topoloji vardır:

$x_0 \in X$ herhangi bir nokta, $W = W(x_0)$ x_0 in eğrisel irtibatlı açık bir komşuluğu ve $[\gamma]$ da, $(H'_n)_c$ ile $(H'_n)_x$ arasında Φ keyfi sabit izomorfizmini belirten bir homotopi sınıfı olsun. Şimdi, $s': W \rightarrow H'_n$ tasvirini her $x \in W$ için $\sigma'_c = [\alpha'_c] \in (H'_n)_c$ olmak üzere

$$s'(x) = \gamma^*([\alpha]_c) = [\beta]_x$$

şeklinde tarif edelim. Eğer $c \in W$ ise γ, c de sabit tasvir seçilerek

$$s'(c) = \sigma'_c$$

yazılabilir. s' iyi tarifli olup $\psi' \circ s' = 1_W$ dir. Diğer taraftan B, X için eğrisel irtibatlı açık komşulukların bir tabanı ise

$$T'_n = \{s'(W) : W \in B\}$$

cümlesi de H'_n için bir tabandır. Dolayısıyla H'_n bir topolojik uzaydır. Bu topolojide ψ' ve s' süreklidir. Üstelik ψ' bir lokal topolojik tasvirdir. Böylece (H'_n, ψ') , X üzerinde bir demettir.

Şimdi de bu teoremin bir sonucunu verelim.

Sonuç 4.2.1.

i) Eğer $(H'_n)_c = (H_n)_c$ ise $H'_n = H_n$ dir. Böylece H'_n demetleri H_n nin altdemetleridir.

ii) Eğer $(H'_{n_1})_c, (H'_{n_2})_c \subset (H'_n)_c$ iki altcümle ve $(H'_{n_1})_c \subset (H'_{n_2})_c$ ise $H'_{n_1} \subset H'_{n_2}$ dir. Üstelik $W \subset X$ bir açık cümle ise

$$\Gamma(W, H'_{n_1}) \subset \Gamma(W, H'_{n_2}) \subset \Gamma(W, H_n)$$

dır.

$H'_n \subset H_n$ abelyen grupların bir aldemeti ve WCX bir açık cümle olsun. Bu takdirde $\Gamma(W, H'_n) \subset \Gamma(W, H_n)$ bir altgruptur. Eğer $W=X$ alınırsa $\Gamma(X, H'_n) \subset \Gamma(X, H_n)$ bir altgruptur.

Şunu da belirtelim ki, H_n nin bütün H'_n aldemetleri H_n ile aynı özelliklere sahip olup birer regüler örtü uzaylarıdır (Uluçay 1987).

Şimdi $D', D'' \subset \Gamma(X, H_n)$, $D' \subset D''$, iki altgrup olsun. Bu durumda D' ve D'' altgruplarına, $H'_n \subset H''_n$ şartını sağlayan H'_n ve H''_n aldemetleri karşılık gelir. Üstelik $D' \subset D'' \subset \dots \subset \Gamma(X, H_n)$ altgruplarının sıralısı, $H'_n \subset H''_n \subset \dots \subset H_n$ aldemetleri sıralısına izomorftur. Bu aldemetlerin her zinciri bir üst sınıra sahiptir. Zorn Lemmasından dolayı bir maksimal demet vardır. Bu ise $\Gamma(X, H_n)$ ye karşılık gelen H_n dir.

Şimdi de Bölüm Demetinin tarifini verelim.

Tarif 4.2.2. H_n , X üzerinde abelyen grupların demeti ve $H'_n \subset H_n$ bir grup aldemet olsun. Her WCX açık cümlesi için

$$M_w = \frac{\Gamma(W, H_n)}{\Gamma(W, H'_n)}$$

cümlesini teşkil edelim. Bu durumda $\{X, M_w, \gamma_{w,v}\}$ bir öndemettir. Bu öndemet tarafından tarif edilen demete "Bölüm Demeti" denir ve $Q_{H'_n}$ ile gösterilir.

Teorem 4.2.2. H_n , X üzerinde abelyen grupların demeti, $H'_n \subset H_n$, bir grup aldemet ve $Q_{H'_n}$ bölüm demeti olsun. Bu durumda

$$\frac{\Gamma(X, H_n)}{\Gamma(X, H'_n)} \cong \Gamma(X, Q_{H'_n})$$

dir.

İspat. Bir

$$\gamma: \frac{\Gamma(X, H_n)}{\Gamma(X, H'_n)} \rightarrow \Gamma(X, Q_{H'_n})$$

tasvirini her $[s] \in \frac{\Gamma(X, H_n)}{\Gamma(X, H'_n)}$ için $\gamma([s]) = \gamma[s]$ şeklinde tarif edelim. Burada γ induktif

limiti göstermektedir (Grauret and Fritzsche 1976).

Şayet $\gamma([s]) = 1$ ise bu taktirde $\gamma[s] = 1$ ve böylece herhangi $x \in X$ için $\gamma[s](x) = (X, [e])_x$ dir. Buradan $(W, [s])_x = (W, [e])_x$ ve $[s] = [e]$ elde edilir. Dolayısıyla γ birebirdir. Açık olarak γ üzerinedir. Her $[s_1], [s_2] \in \frac{\Gamma(X, H_n)}{\Gamma(X, H'_n)}$ için

$$\gamma([s_1] \cdot [s_2]) = \gamma([s_1 \cdot s_2]) = \gamma[s_1 \cdot s_2] = \gamma[s_1] \cdot \gamma[s_2]$$

olduğundan γ homomorfizmdir. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 4.2.3. H_n , X üzerinde abelyen grupların demeti ve $H'_n \subset H_n$ bir grup altdemet olsun. Bu durumda $Q_{H'_n}$ bölüm demeti X üzerinde Abelyen grupların bir demetidir.

İspat. H_n , X üzerinde abelyen grupların demeti ve H'_n , H_n nin bir grup altdemeti olsun. Dolayısıyla H'_n abelyen grupların bir normal altdemetidir. Böylece $\Gamma(X, H'_n) \subset \Gamma(X, H_n)$ bir normal altgruptur. O halde $\frac{\Gamma(X, H_n)}{\Gamma(X, H'_n)}$ bir gruptur.

$$Q_{H'_n} = \bigvee_{x \in X} (Q_{H'_n})_x$$

ve

$$(Q_{H'_n})_x = \{ (W, [s])_x : W \subset X \text{ açık, } [s] \in \frac{\Gamma(X, H_n)}{\Gamma(X, H'_n)} \}$$

olsun. Her $(Q_{H'_n})_x$ sapında

$$(W, [s_1])_x \cdot (W, [s_2])_x = (W, [s_1 \cdot s_2])_x$$

şeklinde iyi tarifli bir "." işlemi tarif edelim. Gösterilebilirki $(Q_{H'_n})_x$ sapı bu işlemle birlikte bir abel grubudur. Böylece $\Gamma(X, Q_{H'_n})$ de bir abel grubu olup, $Q_{H'_n}$ Abelyen grupların bir demetidir.

Üstelik $Q_{H'_n}$ Abelyen grupların bir demeti olarak regüler bir örtü uzayıdır.

Diğer taraftan $H'_n \subset H''_n \subset \dots \subset H_n$ abelyen gruplarının alt demetlerinin sıralısı $Q_{H'_n} \supset Q_{H''_n} \supset \dots \supset Q_{H_n}$ abelyen gruplarının demetlerinin sıralısına izomorftur. Üstelik bu abelyen grupları demetlerinin her zinciri bir üst sınıra sahiptir. Zorn Lemmasından dolayı $Q_{H'_n}$ maksimal demettir.

Şimdi, H_n X üzerinde Abelyen grupların bir demeti ve $H_n^1, H_n^2, \dots, H_n^n$ bu demetin grup alt demetleri olsun. $(X, H_n^1), (X, H_n^2), \dots, (X, H_n^n)$ çiftlerini gözönüne alalım. $W \subset X$ açık bir cümle ve $\Gamma(W, H_n^1), \Gamma(W, H_n^2), \dots, \Gamma(W, H_n^n)$ kesitler cümleleri olmak üzere

$$M_W = \Gamma(W, H_n^1) \times \Gamma(W, H_n^2) \times \dots \times \Gamma(W, H_n^n)$$

cümlesini teşkil edelim. $s = (s_1, s_2, \dots, s_n) \in M_W$ ve $V \subset W$ açık altcümlesi için de

$$\gamma_{W,V}(s) = \gamma_{W,V}(s_1, s_2, \dots, s_n)$$

$$= (s_1|_V, s_2|_V, \dots, s_n|_V)$$

olsun. Bu taktirde $\{X, M_W, \gamma_{W,V}\}$ bir öndemettir. Bu öndemetin tarif ettiği demete $H_n^1, H_n^2, \dots, H_n^n$ grup alt demetlerinin "Whitney Toplamı" denir ve

$$H^* = H_n^1 \oplus H_n^2 \oplus \dots \oplus H_n^n$$

ile gösterilir.

Teorem 4.2.4. $i=1,2,\dots,n$ ve $\varphi_i = \varphi|_{H_n^i}$ olmak üzere (H_n^i, φ_i) , X üzerinde H_n

demetinin grup alt demetleri ve H^* de bu grup alt demetlerinin Whitney Toplamı olsun.

Bu taktirde her $x \in X$ için $(W, (s_1, s_2, \dots, s_n))_x \rightarrow (s_1(x), s_2(x), \dots, s_n(x))$ şeklinde tarifli

$$\theta: H^*_x \rightarrow (H_n^1)_x \times (H_n^2)_x \times \dots \times (H_n^n)_x$$

tasviri bir izomorfizmdir.

İspat

i) $\lambda=1,2$ ve $x \in W_1 \cap W_2$ için $s_\lambda = (s_1^\lambda, s_2^\lambda, \dots, s_n^\lambda) \in \Gamma(W_\lambda, H^*)$ olsun. $(W_1, s_1) \overset{x}{\sim} (W_2, s_2)$ dir yalnız ve yalnız bir $V(x) \subset W_1 \cap W_2$ civarı vardır öyleki

$$(s_1^1 |_{\mathcal{V}}, s_2^1 |_{\mathcal{V}}, \dots, s_n^1 |_{\mathcal{V}}) = (s_1^2 |_{\mathcal{V}}, s_2^2 |_{\mathcal{V}}, \dots, s_n^2 |_{\mathcal{V}})$$

dır. Bu ise $i=1,2,\dots,n$ için $s_i^1(x) = s_i^2(x)$ demektir. Dolayısıyla θ birebirdir.

ii) θ tasviri üzerinedir. Gerçekten, $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$ olmak üzere $\sigma \in (H_n^1)_x \times (H_n^2)_x \times \dots \times (H_n^n)_x$ ise

$$s_i^*(x) = \sigma_i \ni s_i^* \in \Gamma(W_i, H_n^i)$$

dersek

$$W = \bigcap_{i=1}^n W_i$$

x noktasının bir civarındır ve

$$s_i^* |_W = s_i \in \Gamma(W, H_n^i)$$

dır. Böylece $s = (s_1, s_2, \dots, s_n) \in M_W$ dır. Dolayısıyla

$$\gamma s(x) = (W, (s_1, s_2, \dots, s_n))_x \rightarrow s(x) = \sigma$$

şeklinde tarifli γs , W üzerinde bir kesittir.

iii) Herhangi $(W, s = (s_1, s_2, \dots, s_n))_x$, $(W', s' = (s'_1, s'_2, \dots, s'_n))_x \in H_x^*$ elemanları için

$$\theta((W, s)_x \cdot (W', s')_x) = \theta((W'', (s_1 s'_1, s_2 s'_2, \dots, s_n s'_n))_x), \quad W'' = W \cap W'$$

$$= (s_1(x) s'_1(x), s_2(x) s'_2(x), \dots, s_n(x) s'_n(x))$$

$$= (s_1(x), s_2(x), \dots, s_n(x)) \cdot (s'_1(x), s'_2(x), \dots, s'_n(x))$$

$$= \theta((W, (s_1, s_2, \dots, s_n))_x) \cdot \theta((W', (s'_1, s'_2, \dots, s'_n))_x)$$

$$= \theta((W, s)_x) \cdot \theta((W', s')_x)$$

olduğundan θ bir homomorfizmdir. O halde θ bir izomorfizmdir. Dolayısıyla

$$H_x^* \cong (H_n^1)_x \times (H_n^2)_x \times \dots \times (H_n^n)_x$$

dır. Böylece H_x^* ile $(H_n^1)_x \times (H_n^2)_x \times \dots \times (H_n^n)_x$ i özdeşleyebiliriz.

Teorem 4.2.5. $i=1,2,\dots,n$ ve $\varphi_i = \varphi|_{H_n^i}$ olmak üzere (H_n^i, φ_i) , X üzerinde H_n demetinin grup altdemetleri ve \tilde{H} da bu grup altdemetlerinin Whitney Toplamı olsun. Bu takdirde

$$p_i(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n) = \sigma_i$$

şeklinde tarifli

$$p_i: H \rightarrow H_n^i$$

kanonik projeksiyonları birer demet morfizmleridir.

İspat. Açık olarak p_i ler sapları korur. Diğer taraftan $\sigma \in H_x^* = (H_n^1)_x \times (H_n^2)_x \times \dots \times (H_n^n)_x$ ise bu takdirde $s = (s_1, s_2, \dots, s_n)$ için $s_i(x) = p_i(\sigma)$ ve $\gamma s(x) = \sigma$ olacak şekilde H_n^i de s_i kesitleri vardır. Dolayısıyla $p_i \circ \gamma s = s_i$ süreklidir, p_i bir demet morfizmidir.

Şimdi $i=1,2,\dots,n$ ve $s_i \in \Gamma(W, H_n^i)$ olsun. Her $x \in W$ için $(s_1 \oplus s_2 \oplus \dots \oplus s_n)(x) = (s_1(x), s_2(x), \dots, s_n(x))$ şeklinde tarifli bir

$$(s_1 \oplus s_2 \oplus \dots \oplus s_n): W \rightarrow H^*$$

tasvirini gözönüne alalım. Açık olarak $s = (s_1, s_2, \dots, s_n) \in M_W$ ve

$$\begin{aligned} (\gamma s)(x) &= (W, (s_1, s_2, \dots, s_n))_x \\ &= (s_1(x), s_2(x), \dots, s_n(x)) \\ &= (s_1 \oplus s_2 \oplus \dots \oplus s_n)(x) \end{aligned}$$

dir. Dolayısıyla $s_1 \oplus s_2 \oplus \dots \oplus s_n = \gamma s \in \Gamma(W, H)$ dır. Böylece $\Gamma(W, H)$ cümlesi ile $\Gamma(W, H_n^1 \times H_n^2 \times \dots \times H_n^n)$ cümlesini özdeşleyebiliriz.

Teorem 4.2.6. H_n , X üzerinde abelyen grupların demeti ve $H_n^1, H_n^2, \dots, H_n^n$, $H \subset H_n$ ler X üzerinde sırasıyla $i=1,2,\dots,n$ olmak üzere $\{X, M_W^i, \gamma_{W,V}^i\}$, $\{X, M_W, \gamma_{W,V}\}$ abelyen grupların öndemetlerinin tarif ettiği grup aldemetleri olsun. Herbir $W \subset X$ açık cümlesi için

$$\gamma_{W,V} \varphi_W(s_1, s_2, \dots, s_n) = \varphi_V(\gamma_{W,V}^1(s_1), \gamma_{W,V}^2(s_2), \dots, \gamma_{W,V}^n(s_n))$$

şartını sağlayan bir

$$\varphi_W: M_W^1 \times M_W^2 \times \dots \times M_W^n \rightarrow M_W$$

tasviri mevcut olsun. Burada $s_i \in M_W^i$ ve $V \subset W$ açık cümledir. Bu taktirde

$$\varphi(\gamma s_1, \gamma s_2, \dots, \gamma s_n) = \gamma \varphi_W(s_1, s_2, \dots, s_n)$$

şeklinde tarifli birtek

$$\varphi: H \rightarrow H$$

demet morfizmi vardır.

İspat.

i) $W, \tilde{W} \subset X$ açık cümleler, $x \in W \cap \tilde{W}$ ve $i=1,2,\dots,n$ için $(W, s_i) \overset{x}{\sim} (\tilde{W}, \tilde{s}_i)$ olsun. Bu taktirde bir $V(x) \subset W \cap \tilde{W}$ açık cümlesi vardır öyleki

$$\gamma_{W,V}^i(s_i) = \gamma_{\tilde{W},V}^i(\tilde{s}_i)$$

dir. Böylece

$$\begin{aligned}
\gamma_{W,V} \varphi_W(s_1, s_2, \dots, s_n) &= \varphi_V(\gamma_{W,V}^1(s_1), \gamma_{W,V}^2(s_2), \dots, \gamma_{W,V}^n(s_n)) \\
&= \varphi_V(\gamma_{\tilde{W},V}^1(\tilde{s}_1), \gamma_{\tilde{W},V}^2(\tilde{s}_2), \dots, \gamma_{\tilde{W},V}^n(\tilde{s}_n)) \\
&= \gamma_{\tilde{W},V} \varphi_{\tilde{W}}(\tilde{s}_1, \tilde{s}_2, \dots, \tilde{s}_n)
\end{aligned}$$

ve

$$(W, \varphi_W(s_1, s_2, \dots, s_n)) \stackrel{x}{\sim} (\tilde{W}, \varphi_{\tilde{W}}(\tilde{s}_1, \tilde{s}_2, \dots, \tilde{s}_n))$$

dır. O halde bir $\varphi: H \rightarrow H$ tasviri

$$\begin{aligned}
(\gamma_{s_1}(x), \gamma_{s_2}(x), \dots, \gamma_{s_n}(x)) &\rightarrow (W, \varphi_W(s_1, s_2, \dots, s_n))_x \\
&= \gamma_{\varphi_W(s_1, s_2, \dots, s_n)}(x)
\end{aligned}$$

şeklinde tarif edilebilir. φ sapları korur ve

$$\varphi(\gamma_{s_1}, \gamma_{s_2}, \dots, \gamma_{s_n}) = \gamma_{\varphi_W(s_1, s_2, \dots, s_n)}$$

dır. Dolayısıyla φ birtek olarak belirlenmiştir.

ii) $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n) \in (H_n^1)_x \times (H_n^2)_x \times \dots \times (H_n^n)_x$ için $\sigma_i = (W, s_i)_x$, $i=1, 2, \dots, n$ şartını sağlayan bir $W(x)$ komşuluğu ve $s_i \in M_W^i$ elemanları mevcuttur. Böylece $s = (\gamma_{s_1}, \gamma_{s_2}, \dots, \gamma_{s_n}) \in \Gamma(W, H)$, $\sigma \in s(W)$ ve

$$\varphi \circ s = \gamma_{\varphi_W(s_1, s_2, \dots, s_n)} \in \Gamma(W, H)$$

dır. Dolayısıyla φ süreklidir.

KAYNAKLAR

BALCI, S. 1982. The Sheaf of The Fundamental Groups. Comm. Fac. Sci. Univ. Ankara, Ser A₁: Mathématiques, Tome:31, pp:59-65.

_____. 1983. On The Sheaf of The Fundamental Groups. Comm. Fac. Sci. Univ. Ankara, Ser A₁: Mathématiques, Tome:32, pp:41-47.

_____. 1984. Some Theorems On The Sheaf of The Fundamental Groups. Comm. Fac. Sci. Univ. Ankara, Ser A₁: Mathématiques, Tome:33, pp:29-36.

_____. 1988. On The Restricted Sheaf. Comm. Fac. Sci. Univ. Ankara, Ser A₁: Mathématiques and Statistics, Vol. 37, pp:41-51.

_____. 1996. The Seifert-Van Kampen Theorem for The Group of Global Sections. Indian Journal of Pure and Applied Mathematics (in print).

BEARDON, A.F. 1984. A Primer on Riemann Surfaces. Cambridge University Press, Cambridge.

CANBOLAT, N. 1982. Yüksek Homotopi Gruplarının Demeti ve İlgili Karakterizasyonlar. Fac. Sc. Ank. Un., Ph.D. Thesis.

CONWAY, J.B. 1978. Functions of One Complex Variable. Springer-Verlag, New York.

GRAURET, H. and FRITZSCHE, K. 1976. Several Complex Variables, Springer-Verlag, New York.

_____. and REMMERT, R. 1979. Theory of Stein Spaces. Springer-Verlag, New York.

HILTON, P.J. 1961. An Introduction to Homotopy Theory. Cambridge University Press., Cambridge.

KNILL, R.J. 1973. The Seifert-Van Kampen Theorem via Regular Covering Spaces. Pacific. J. Math., Vol.49, pp.149-160.

MASSEY, W.S. 1991. A Basic Course in Algebraic Topology, Springer-Verlag, New York.

TENNISON, B.R. 1975. Sheaf Theory. Cambridge University Press, Cambridge.

ULUÇAY, C. 1978. Fonksiyonlar Teorisi ve Riemann Yüzeyleri, K.T.Ü. Temel Bilimler Fakültesi Yayınları, 2. Baskı.

_____. 1981. Restricted Sheaf Theory. Jour. Fac. Sci. KTÜ, Vol.3, pp.59-68.

_____. 1987. Restricted Analytic Sheaves and Abelian Normal Covering Spaces. Journal Karadeniz University Faculty of Arts and Sciences Series of Mathematics-physics, pp.173-186.

ÖZGEÇMİŞ

1965 yılında Malatya'da doğdu. İlk ve orta öğretimini Ankara'da tamamladı. 1983 yılında girdiği Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümünden 1987 yılında mezun oldu. Kısa bir süre öğretmenlik yaptı. 1990 yılında yüksek lisans tezini tamamladı. Halen Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümünde Araştırma Görevlisi olarak çalışmaktadır.

