

ANKARA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

POLİNOM İÇEREN İNTEGRAL TİPLİ OPERATÖRLERİN
VARYASYON YARI NORMUNDA YAKINSAKLIĞI

Gül Emine CANBOLAT

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ANKARA
2025

Her hakkı saklıdır

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

POLİNOM İÇEREN İNTEGRAL TİPLİ OPERATÖRLERİN VARYASYON YARI NORMUNDA YAKINSAKLIĞI

Gül Emine CANBOLAT

Ankara Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Fatma TAŞDELEN YEŞİLDAL

Bu tez altı bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde çalışmanın amacı, kapsamı ve yöntemi sunulmuştur. İkinci bölümde, lineer pozitif operatörlerin temel özellikleri ile tez boyunca kullanılacak temel tanım ve teoremler verilmiş; ayrıca Bernstein'ın Weierstrass problemi üzerine teoremi ve Bohman–Korovkin teoremi ele alınmıştır.

Üçüncü bölümde, varyasyon yarı normunda yakınsama ve yakınsama hızının incelenmesinde temel rol oynayan total varyasyon kavramı tanıtılmış; BV, AC ve TV fonksiyon uzayları arasındaki ilişkiler incelenmiştir.

Dördüncü bölümde, Bernstein–Durrmeyer operatörlerinin merkezi momentleri ile varyasyon yarı normundaki varyasyon azaltıcı özellikleri ve yakınsama davranışları analiz edilmiş; sınırlı salınımlı fonksiyon uzayında yakınsama hızına ilişkin sonuçlar elde edilmiştir.

Beşinci bölüm, çalışmanın özgün katkılarına ayrılmış olup, Appell polinomlarını içeren operatörlerin merkezi momentleri ile varyasyon yarı normundaki varyasyon azaltıcı ve yakınsama özellikleri incelenmiştir.

Son olarak, altıncı bölümde elde edilen bulgular değerlendirilmiş ve gelecekte yapılabilecek çalışmalar için olası araştırma yönleri sunulmuştur.

Aralık 2025, 60 sayfa

Anahtar Kelimeler: Lineer operatör, integral operatör, Kantrovich operatörleri, Durrmeyer operatörleri, Voronovskaya-tipi teorem, sınırlı salınımlı fonksiyon, mutlak sürekli fonksiyon, varyasyon azaltıcı özellik, varyasyon yarı normu, varyasyon yarı normunda yakınsaklık ve yakınsaklık hızı.

ABSTRACT

Master Thesis

CONVERGENCE IN VARIATIONAL SEMINORM FOR INTEGRAL TYPE OPERATORS INVOLVING POLYNOMIALS

Gül Emine CANBOLAT

Ankara University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Fatma TAŞDELEN YEŞİLDAL

This thesis consists of six chapters. The first chapter presents the aim, scope, and methodology of the study. In the second chapter, the fundamental properties of linear positive operators, together with the basic definitions and theorems used throughout the thesis, are introduced. In addition, Bernstein's theorem on the Weierstrass approximation problem and the Bohman–Korovkin theorem are discussed.

The third chapter introduces the concept of total variation, which plays a key role in the study of convergence and rates of convergence with respect to the variation seminorm, and examines the relationships among the function spaces BV , AC , and TV .

In the fourth chapter, the central moments of the Bernstein–Durrmeyer operators are investigated, and their variation-diminishing properties and convergence behavior in the variation seminorm are analyzed, together with results on the rate of convergence in the space of functions of bounded variation.

The fifth chapter is devoted to the original contributions of this thesis, focusing on operators involving Appell polynomials and their variation-diminishing and convergence properties.

Finally, the sixth chapter presents the discussion and conclusions, where the main findings are evaluated and possible directions for future research are outlined.

December 2025, 60 pages

Key Words: Linear operators, Integral operators, Kantrovich operators, Durrmeyer operators, Voronovskaya-type theorem, bounded variation function, absolutely continuous function, variation detracting property, variation seminorm, convergence and rate of convergence in the variation seminorm

TEŞEKKÜR

Tez çalışmamın hazırlanması sürecinde bilgi, deneyim ve değerli yönlendirmeleriyle bana yol gösteren, sabrı ve desteğiyle akademik gelişimime büyük katkı sağlayan danışman hocam sayın Prof. Dr. Fatma TAŞDELEN YEŞİLDAL'a en derin teşekkürlerimi sunarım. Çalışmama bilimsel katkıları, araştırma sürecimde yol gösterici tavsiyeleri ve teşvik edici yaklaşımlarıyla bana her zaman ilham kaynağı olan sayın Prof. Dr. Harun KARSLI'ya; bilgi ve tecrübelerini paylaşmaktan çekinmeyen, katkılarıyla her daim yanımda olan sayın Prof. Dr. Gülen BAŞCANBAZ TUNCA'ya sonsuz teşekkür eder ve saygılarımı sunarım.

Akademik yaşamım kadar kişisel hayatımda da desteğini esirgemeyen, her daim sevgi ve güvenle yanımda olan aileme sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca, sağladığı maddi destek ile bu çalışmanın yürütülmesine katkıda bulunan TÜBİTAK kurumuna teşekkürlerimi sunarım.

Gül Emine CANBOLAT
Ankara, Aralık 2025

İÇİNDEKİLER

TEZ ONAY SAYFASI	
ETİK	i
ÖZET	ii
ABSTRACT.....	iii
TEŞEKKÜR.....	iv
SİMGELER DİZİNİ	vi
1. GİRİŞ	1
2. LİNEER POZİTİF OPERATÖRLER	3
2.1 Linear Pozitif Operatör Tanımı	3
2.2 Linear Pozitif Operatör Özellikleri.....	4
2.3 Kullanılacak Olan Diğer Tanım ve Teoremler.....	7
2.4 Bohman-Korovkin Teoremi	9
3. SINIRLI SALINIMLI FONKSİYONLAR VE İLGİLİ KAVRAMLAR	12
3.1 Sınırlı Salınlı Fonksiyonlar	12
3.2 Stieltjes İntegrali.....	19
4. BERNSTEIN-DURRMEYER OPERATÖRÜ	24
4.1 Bernstein-Durrmeyer Operatörü için Varyasyon Yarı Normunda Yakınsama.....	25
4.2 Bernstein-Durrmeyer Operatörü için TV-Normda Yakınsama Hızı	28
5. APPELL POLİNOMLARI KULLANILARAK İNŞA EDİLEN KANTOROVİCH TİPİ SZÁSZ-MİRAKYAN OPERATÖRÜ ..	36
5.1 Varyasyon Yarı Normunda Yakınsama	39
5.2 TV-Normda Yakınsama Hızı	42
6. TARTIŞMA VE SONUÇ	56
KAYNAKLAR.....	57
ÖZGEÇMİŞ	60

SİMGELER DİZİNİ

$\sum_b$	Toplam
$\bigvee_a(f)$ veya $V_{[a,b]}[f]$	f fonksiyonunun $[a, b]$ aralığında total salınımı veya total varyasyonu
$\Gamma(x)$	Gamma fonksiyonu
$B(x, y)$	Beta fonksiyonu
$\ \cdot\ $	Norm
$(D_n f)(x)$	Bernstein-Durrmeyer polinomları
$(K_n^* f)(x)$	Appell polinomlarını içeren Kantrovich tipli Operatör
$BV(I)$	Sınırlı salınlımlı fonksiyonlar uzayı
$AC(I)$	Mutlak sürekli fonksiyonlar uzayı
$TV(I)$	Üzerinde yarı norm tanımlı sınırlı salınlımlı fonksiyonlar uzayı

1. GİRİŞ

Fonksiyonlar teorisinin en yaygın uygulama alanlarından biri olan yaklaşım teorisi, temel olarak karmaşık fonksiyonları daha basit ve hesaplaması kolay fonksiyonlar aracılığıyla incelemeyi amaçlar. Matematiksel analizde önemli bir yer tutan bu alanda, bir fonksiyonun daha kullanışlı ve anlaşılır fonksiyonlar cinsinden ifade edilmesi hedeflenir.

Yaklaşım teorisinin gelişimi, 1885 yılında Karl Weierstrass'ın "Herhangi bir sürekli f fonksiyonuna $[a,b]$ aralığında düzgün yaklaşan bir polinom ailesi vardır" teoreminin ispatı ile başlamıştır. Weierstrass'ın bu teoremi, Taylor teoreminin aksine, türevlenebilir olma şartı aramayan sürekli fonksiyonlara uygulanabilmesi ve tüm $[a,b]$ aralığında bu fonksiyonuna yakınsayan bir polinomun varlığını garanti etmesi ile dikkat çeker.

Bu teorem üzerinde çalışan önemli matematikçiler arasında "Carl Runge (1885), Henri Lebesgue (1908), Charles de la Vallée-Poussin (1908), Lipót Fejér (1916) ve Sergej N. Bernstein (1912)" sayılabilir. S.N. Bernstein, olasılık yöntemlerini kullanarak $[0,1]$ aralığında sürekli fonksiyona düzgün yaklaşan bir polinom dizisi kurmuş ve böylece Weierstrass teoreminin kısa, basit ve zarif bir ispatını vermiştir. Bu çalışma, bugün çok iyi bilinen Bernstein operatörünü ortaya çıkarmış ve lineer pozitif operatörler teorisinin temelini oluşturmuştur:

$$(B_n f)(x) = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}.$$

Bernstein operatörü, lineer pozitif operatörler sınıfına aittir ve geçtiğimiz yüzyılın ilk yarısında önemi tam olarak anlaşılammıştır. 1951-1953 yılları arasında T. Popoviciu, H. Bohman ve P.P. Korovkin, lineer pozitif operatörlerle belirli operatörlere yaklaşımı daha basit ve sistematik bir şekilde kanıtlamışlardır. Bohman, bu operatörlerin $[0,1]$ aralığında sürekli fonksiyonlara yaklaşması için yalnızca üç koşulun yeterli olduğunu göstermiştir. Daha sonra Korovkin, Bohman-Korovkin teoreminin temelini atmıştır. Bu gelişmeler, lineer pozitif operatörler teorisinin ilerlemesine büyük katkı sağlamıştır.

Yaklaşım teorisinin bir diğer önemli konusu, yakınsaklık hızının hesaplanmasıdır. Bernstein operatörünün bir fonksiyona yaklaşım hızı, Voronovskaya (1932) tarafından $[0, 1]$ aralığında sınır fonksiyonları için ortaya konmuştur. Belirli $x_0 \in [0, 1]$ için:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n [(B_n f)(x_0) - f(x_0)] = \frac{1}{2} x_0 (1 - x_0) f''(x_0)$$

ifadesi elde edilmiştir. Daha sonra Bardaro, Butzer, Stens ve Vinti (2003), bu sonucu birinci türev için genişleterek, f sınırlı ve f''' ise bu durumda

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n [(B_n f)(x) - f(x)] = \frac{1}{2} x (1 - x) f'''(x) + f''(x)$$

gerçeklenir. Tez kapsamında ayrıca Voronovskaya-tipi teoremler incelenecek ve belirli operatörler için bu teoremlerin ispatları verilecektir.

Yaklaşım teorisinin bir başka ilgi çekici alanı, yarı normlu uzaylarda yakınsaklıktır. Bu konuda ilk çalışmayı G.G. Lorentz (1953) ortaya koymuştur. Lorentz, doktora tezinde Bernstein operatörlerinin sınır fonksiyonlar için varyasyon azaltıcı (variation diminishing) özelliğini göstermiştir:

$$V_{[0,1]} [B_n f] \leq V_{[0,1]} [f].$$

Bardaro ve arkadaşları (2003) bu sonucu kullanarak, varyasyon yarı normunda yakınsaklığı araştırmış ve varyasyon azaltıcı özelliğin, yaklaşım hızını hesaplamada gerekli ve yeterli bir koşul olduğunu göstermişlerdir. Bernstein, Kantorovich ve Szász-Mirakyan operatörleri ile genel singüler konvolüsyon operatörlerinin varyasyon azaltıcı özellikleri incelenmiş ve varyasyon yarı normunda yaklaşım hızları hesaplanmıştır. Ayrıca, $AC(I)$ uzayındaki fonksiyonların total varyasyonu ile $L_1(I)$ -normunun eşdeğerliği gösterilmiştir. Bu çalışmalar, yaklaşım teorisinde yeni araştırma alanlarının açılmasına öncülük etmiştir. ((Karsh, H. 2013), (Demiray, R. 2013), (Kivink, A., & Tamberg, G. 2013), (Radu, C. 2008), (Öksüz, Ö., Karsh, H., & Taşdelen, F. 2016)).

2. LİNEER POZİTİF OPERATÖRLER

2.1 Lineer Pozitif Operatör Tanımı

Tanım 2.1 X ve Y iki fonksiyon uzayı olsun. Eğer X den alınan herhangi bir f fonksiyonuna Y de bir g fonksiyonu karşılık getiren bir L kuralı varsa bu L kuralına X den Y uzayına bir operatördür denir ve $L(f(t); x) = g(x)$ veya $L(f; x) = g(x)$ biçiminde gösterilir (Hacısalihoglu ve Hacıyev 1995). Burada $L(f; x) = L(f(t); x)$ olmak üzere x değişkeni L işleminde sabit gibidir ve $L(f(x); x) = f(x)L(1; x)$ yazılabilir.

X uzayı bir lineer uzay olduğunda lineer operatörün tanımı yapılabilir.

Tanım 2.2 X ve Y fonksiyon uzayları olmak üzere,

$$L : X \rightarrow Y$$

şeklindeki L operatörünü gözönüne alalım. $\forall f, g \in X$ ve $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ için

$$L(\alpha f + \beta g; x) = \alpha L(f; x) + \beta L(g; x)$$

koşulunu sağlayan L operatörüne lineer operatör denir (Hacısalihoglu ve Hacıyev 1995).

Tanım 2.3 $L : X \rightarrow Y$ operatör ve $f \in X$ bir fonksiyon olmak üzere,

$$f \geq 0 \text{ iken } L(f; x) \geq 0$$

özelligi sağlamıyor ise L operatörüne pozitif operatör denir (Hacısalihoglu ve Hacıyev 1995).

Hem lineerlik hem de pozitiflik koşullarını sağlayan L operatörüne lineer pozitif operatör denir.

Uyarı 2.1 $f \leq 0$ iken $L(f; x) \leq 0$ gerçekleşir.

İspat. Kabul edelim ki $f \leq 0$ olsun. O halde

$$-f \geq 0$$

yazılabilir. L operatörü pozitif olduğundan

$$L(-f; x) \geq 0$$

bulunur. L operatörünün lineerlik özelliği kullanılırsa

$$-L(f; x) \geq 0 \text{ ise } L(f; x) \leq 0$$

elde edilir. Böylece istenilen özellik gerçekleşmiş olur. ■

2.2 Lineer Pozitif Operatör Özellikleri

Lemma 2.1 i) Lineer pozitif operatörler monoton artandır.

ii) Eğer L lineer pozitif operatör ise, her $f \in X$ için

$$|L(f; x)| \leq L(|f|; x)$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat. i) L lineer pozitif operatör olmak üzere f ve g fonksiyonları için

$$f \leq g \text{ ise } L(f; x) \leq L(g; x)$$

olduğunu göstermek yeterlidir.

Kabul edelim ki $f \leq g$ olsun. O halde $g - f \geq 0$ olacağından ve L operatörü pozitif olduğundan

$$L(g - f) \geq 0 \tag{2.1}$$

yazılabilir. Ayrıca L operatörü lineer olduğundan

$$L(g - f) = L(g) - L(f)$$

elde edilir. Bunun (2.1) de kullanılmasıyla

$$L(g - f) = L(g) - L(f) \geq 0 \text{ ise } L(f) \leq L(g)$$

olup istenilen sonuç bulunur.

ii) Keyfi bir f fonksiyonu için

$$-|f| \leq f \leq |f|$$

olduğu açıktır. L operatörü lineer ve monoton artan olduğundan

$$-L(|f|) \leq L(f) \leq L(|f|)$$

elde edilir. Buradan

$$|L(f)| \leq L(|f|)$$

elde edilir ■

Tanım 2.4 (Hölder Eşitsizliği) $L : X \rightarrow Y$ pozitif lineer operatör olsun, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ eşitliğini sağlayan $p, q > 1$ reel sayılar ve her $f, g \in X$ olmak üzere

$$L(|f.g|) \leq (L(|f|^p))^{1/p} (L(|g|^q))^{1/q}$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 2.5 (Cauchy Schwarz Eşitsizliği) Tanım 2.4’de Hölder eşitsizliğinde $p = q = 2$ alınarak

$$L(|f.g|, x) \leq \sqrt{L(f^2, x)} \sqrt{L(g^2, x)}$$

elde edilir.

Tanım 2.6 $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere $f_n(x)$ ’e bir fonksiyon dizisi denir ve (f_n) ile gösterilir.

Tanım 2.7 Üzerinde bir norm tanımlanmış olan X vektör uzayına bir normlu uzay adı verilir. Bir X vektör uzayı (reel veya kompleks) üzerinde tanımlı bir norm ise, X üzerinde tanımlı olup bir $x \in X$ noktasındaki değeri $\|x\|$ ile gösterilen ve x ve y , X ’de keyfi vektörler, α herhangi bir skaler olmak üzere aşağıdaki özellikleri gerçekleyen reel değerli bir fonksiyondur.

$$(N1) \quad \|x\| \geq 0$$

$$(N2) \quad \|x\| = 0 \iff x = 0$$

$$(N3) \quad \|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$$

$$(N4) \quad \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|.$$

Tanım 2.8 X vektör uzayı üzerinde tanımlı bir yarı norm; (N1), (N3), (N4) şartlarını sağlayıp ve (N2) nin bir kısmını yani, eğer $x = 0 \implies \|x\| = 0$ şartını sağlayan $\rho : X \rightarrow \mathbb{R}$ dönüşüme denir.

Bu tanımdan yola çıkarak yarı normlu bir uzayda, eğer $\|x\| = 0$ ise $x = 0$ söylene-
meyebilir. Bir diğer deyişle $\|x\| = 0$ olması $x = 0$ ifadesini her zaman sağlamaz.

Tanım 2.9 X ve Y normlu uzaylar ve $D(L) \subset X$ olmak üzere $L : D(L) \rightarrow Y$ lineer
operatör olsun. Eğer her $x \in D(L)$ için

$$\|L(f; x)\|_Y \leq c_x \|f\|_X$$

eşitsizliğini gerçekleyen c_x reel sayısı varsa o takdirde L operatörüne lineer operatör
denir. Bu c_x sabitlerinin en küçüğüne L operatörünün normu denir ve $\|L\|$ ile
gösterilir.

Tanım 2.10 Kapalı bir $[a, b]$ aralığı üzerinde sürekli ve reel değerli fonksiyonlardan
oluşan kümeye $C[a, b]$ fonksiyon uzayı denir. Bu uzaydaki norm

$$\|f(x)\|_{C[a,b]} = \max_{a \leq x \leq b} |f(x)|$$

şeklinde tanımlanır. Burada

1. $\forall f, g \in C[a, b]$ için $f + g \in C[a, b]$
2. $\forall f, g \in C[a, b]$ için $f + g = g + f$
3. $\forall f, g, h \in C[a, b]$ için $(f + g) + h = f + (g + h)$
4. $\forall f, \theta \in C[a, b]$ için $f + \theta = \theta + f = f$
5. $\forall f, f' \in C[a, b]$ için $f + f' = f' + f = f + f'$
6. $\forall f, \lambda \in C[a, b]$ ve $\lambda \in \mathbb{C}$ için $\lambda f \in C[a, b]$
7. $\forall f, \lambda, \mu \in C[a, b]$ ve $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ için $(\lambda\mu)f = \lambda(\mu f)$
8. $\forall f, 1 \in C[a, b]$ için $1.f = f$
9. $\forall f, \lambda, \mu \in C[a, b]$ ve $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ için $(\lambda + \mu)f = \lambda f + \mu f$
10. $\forall f, g \in C[a, b]$ ve $\lambda \in \mathbb{C}$ için $\lambda(f + g) = \lambda f + \lambda g$
11. $\forall f, \in C[a, b]$ için $\|f\| \geq 0$
12. $\forall f, \in C[a, b]$ için $\|f\| = 0 \iff f = 0$
13. $\forall f, \in C[a, b]$ ve $\lambda \in \mathbb{C}$ için $\|\lambda f\| = |\lambda| \|f\|$
14. $\forall f, g \in C[a, b]$ için $\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|$

koşulları sağlayan $C[a, b]$ uzayına lineer normlu uzaydır denir.

Tanım 2.11 (f_n) fonksiyonlar dizisinin f fonksiyonuna $C[a, b]$ lineer normlu uzayında düzgün yakınsak olması için, $\forall x \in [a, b]$ iken

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n(x) - f(x)\|_{C[a,b]} = 0$$

olmasıdır. Daha açık olarak ise

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{a \leq x \leq b} |f_n(x) - f(x)| = 0$$

eşitliğinin sağlanmasıdır.

2.3 Kullanılacak Olan Diğer Tanım ve Teoremler

Tanım 2.12 $E \subseteq D \subseteq \mathbb{R}$ ve $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Herhangi bir $\epsilon > 0$ için bir $\delta > 0$ vardır öyleki $|x - t| < \delta$ eşitsizliğini sağlayan her $x, t \in D$ için $|f(x) - f(t)| < \epsilon$ şartını sağlayan f fonksiyonuna E üzerinde düzgün sürekli denir.

Tanım 2.13 X vektör uzayının bir alt kümesi M olsun. X 'in M nin noktası olan ya da olmayan bir x_0 noktasını ele alalım. Eğer x_0 'ın her komşuluğu, x_0 dan farklı en az bir $y \in M$ noktası içerirse, x_0 noktasına M nin yığılma noktası (veya M nin bir limit noktası) adı verilir.

Tanım 2.14 M nin noktalarıyla, M nin yığılma noktalarından oluşan kümeye M nin kapamış denir ve $\overline{M}$ ile gösterilir. $\overline{M}$, M 'yi içeren en küçük kapalı kümedir.

Tanım 2.15 Bir X metrik uzayının bir M alt kümesi verildiğinde eğer

$$\overline{M} = X$$

ise M kümesi X de yoğunur denir.

Bu tanım X in her noktasının M nin bir yığılma noktası olduğu anlamına gelir. Diğer bir deyişle X in her bir noktası için M 'de X 'in bir elemanına yakınsayan bir dizi bulunabilir.

Tanım 2.16 Her $n \in \mathbb{N}$, $D \subseteq \mathbb{R}$ olmak üzere $f_n : D \rightarrow \mathbb{R}$, $\{f_n\}$ fonksiyonlar dizisi D de f fonksiyonuna (noktasal) yakınsaması için gerek ve yeter şart her bir $x_0 \in D$ için $\{f_n(x_0)\}$ reel sayılar dizisinin $f(x_0)$ reel sayısına yakınsamasıdır.

Tanım 2.17 Her $n \in \mathbb{N}$, $D \subseteq \mathbb{R}$ olmak üzere $f_n : D \rightarrow \mathbb{R}$, $\{f_n\}$ fonksiyonlar dizisi f fonksiyonuna düğün yakınsaması için gerek ve yeter şart her bir $\epsilon > 0$ için $n^* \in \mathbb{N}$ vardır öyleki her $x \in D$ ve $n \geq n^*$ için $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$ şartını sağlamasıdır.

Tanım 2.18 (Seriler için Cauchy-Schwarz Eşitsizliği)

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\zeta_i \eta_i| \leq \left(\sum_{k=0}^{\infty} (\zeta_k)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{l=0}^{\infty} (\eta_l)^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

olarak tanımlanır.

Tanım 2.19 (Seriler için Hölder Eşitsizliği) $p, q > 1$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olmak üzere

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\zeta_i \eta_i| \leq \left(\sum_{k=0}^{\infty} (\zeta_k)^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{l=0}^{\infty} (\eta_l)^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 2.20 (İntegral için Cauchy-Schwarz Eşitsizliği)

$$\int |\zeta(x) \eta(x)| dx \leq \left(\int (\zeta(x))^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int (\eta(x))^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

şeklindedir.

Tanım 2.21 (İntegral için Hölder Eşitsizliği) $p, q > 1$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olmak üzere

$$\int |\zeta(x) \eta(x)| dx \leq \left(\int (\zeta(x))^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int (\eta(x))^q dx \right)^{\frac{1}{q}}$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 2.22 Gama fonksiyonu

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt, \quad x > 0$$

şeklinde tanımlanır. Ayrıca $\Gamma(x) = (x-1)!$ özelliğine sahip olup

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$$

eşitliği tüm $x > 0$ değerleri için sağlanır.

Tanım 2.23 $\operatorname{Re}(x), \operatorname{Re}(y) > 0$ için Beta fonksiyonu

$$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt$$

olarak tanımlanır. Ayrıca Beta fonksiyonu $B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$ özelliğini gerçekler.

Tanım 2.24 (Taylor Formülü) $y = f(x)$ fonksiyonu a noktasını içeren bir aralıkta $(n+1)$. dereceden türevlere sahip olsun. Bu takdirde aynı fonksiyon için

$$p(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

polinomunu oluşturabiliriz. Bu polinoma $f(x)$ fonksiyonu tarafından $x = a$ noktasında üretilen n . dereceden Taylor polinomu denir. $f(x)$ fonksiyonu n . dereceden bir polinom olduğunda onun n . dereceden Taylor polinomu özdeşlikle kendisine eşit olduğu, yani $p(x) = f(x)$ eşitliğini gerçeklediği açıktır.

$f(x)$ fonksiyonu n . dereceden bir polinom olduğunda ise $f(x) - p(x)$ farkı, genellikle sıfırdan farklı olur. Bu farkı $R_n(x)$ ile gösterelim.

$$f(x) - p(x) = R_n(x)$$

veya

$$p(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_n(x)$$

eşitliğinde $R_n(x)$ ifadesine kalan terim, fark veya hata denir. Yukarıdaki eşitliğe de kalan terimli Taylor formülü adı verilir.

2.4 Bohman-Korovkin Teoremi

$f \in C[a, b]$ ve tüm reel ekseninde sınırlı

$$|f(x)| < M_f \tag{2.2}$$

olsun. Eğer $L_n(f; x)$ lineer pozitif operatör dizisi $\forall x \in [a, b]$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|L_n(t^i; x) - x^i\|_{C[a,b]} = 0 \quad (i = 0, 1, 2)$$

koşullarını sağlıyorsa bu durumda $[a, b]$ aralığında her $f \in C[a, b]$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|L_n(f; x) - f(x)\|_{C[a, b]} = 0$$

eşitliği sağlanır.

İspat. Kabul edelim ki $f \in C[a, b]$ olsun. Süreklilik tanımından

$$|t - x| \leq \delta \text{ iken } |f(t) - f(x)| < \epsilon$$

dir. $|t - x| > \delta$ olduğundan ise (2.2) den ve üçgen eşitsizliğinden

$$|f(t) - f(x)| \leq |f(t)| + |f(x)| \leq 2M_f \quad (2.3)$$

elde edilir. Diğer taraftan

$$|t - x| > \delta \text{ iken } \frac{(t - x)^2}{\delta^2} > 1$$

sağlanır. (2.2) ve (2.3) ten

$$|f(t) - f(x)| \leq 2M_f \leq 2M_f \frac{(t - x)^2}{\delta^2}$$

yazılabilir. O halde

$$\begin{aligned} |t - x| \leq \delta \text{ iken } |f(t) - f(x)| &< \epsilon \\ |t - x| > \delta \text{ iken } |f(t) - f(x)| &\leq 2M_f \frac{(t - x)^2}{\delta^2} \end{aligned}$$

bulunur. Dolayısıyla $\forall t \in \mathbb{R}$ ve $\forall x \in [a, b]$ için

$$|f(t) - f(x)| \leq \epsilon + 2M_f \frac{(t - x)^2}{\delta^2} \quad (2.4)$$

dir. Eğer (L_n) operatör dizisinin $i = 0, 1, 2$ için $\lim_{n \rightarrow \infty} \|L_n(t^i; x) - x^i\|_{C[a, b]} = 0$ koşullarını sağladığı gösterilirse ispat tamamlanmış olur.

L_n operatörünün lineerlik özelliğinden

$$|L_n(f(t); x) - f(x)| = |L_n((f(t) - f(x)); x) + f(x)(L_n(1; x) - 1)|$$

elde edilir. Burada üçgen eşitsizliği kullanılırsa

$$|L_n(f(t); x) - f(x)| \leq |L_n((f(t) - f(x)); x)| + |f(x)| |L_n(1; x) - 1|$$

yazılabilir. Diğer taraftan lineer pozitif operatörler monoton artan ve

$$f(t) - f(x) \leq |f(t) - f(x)|$$

özellikliğini sağladığından

$$|L_n((f(t) - f(x)); x)| \leq |L_n(|f(t) - f(x)|; x)|$$

yazılabilir. L_n operatörü pozitif olduğundan ve $|f(t) - f(x)| \geq 0$ eşitsizliği gerçekleştirildiğinden

$$|L_n(|f(t) - f(x)|; x)| = L_n(|f(t) - f(x)|; x)$$

dir. O halde

$$|L_n(f(t); x) - f(x)| \leq L_n(|f(t) - f(x)|; x) + |f(x)| |L_n(1; x) - 1|$$

olduğu gösterilmiş olur. (2.2) den

$$|L_n(f(t); x) - f(x)| \leq L_n(|f(t) - f(x)|; x) + M_f |L_n(1; x) - 1|$$

yazılabilir. L_n operatörü monoton artan olduğundan, (2.4) ün kullanılması ile

$$|L_n(f(t); x) - f(x)| \leq L_n\left(\epsilon + 2M_f \frac{(t-x)^2}{\delta^2}; x\right) + M_f |L_n(1; x) - 1| \quad (2.5)$$

bulunur. Diğer taraftan

$$\begin{aligned} L_n\left(\epsilon + 2M_f \frac{(t-x)^2}{\delta^2}; x\right) &= \epsilon L_n(1; x) + \frac{2M_f}{\delta^2} L_n((t-x)^2; x) \\ &= \epsilon L_n(1; x) + \frac{2M_f}{\delta^2} [L_n(t^2; x) - x^2] \\ &\quad + 2x(x, L_n(t; x)) + x^2(L_n(1; x) - 1) \end{aligned}$$

yazılabilir. Son bulunan ifadenin (2.5) te kullanılmasıyla

$$\begin{aligned} |L_n(f(t); x) - f(x)| &\leq [\epsilon L_n(1; x) + M_f |L_n(1; x) - 1|] \\ &\quad + \frac{2M_f}{\delta^2} [L_n(t^2; x) - x^2] \\ &\quad + 2x(x, L_n(t; x)) + x^2(L_n(1; x) - 1) \end{aligned} \quad (2.6)$$

elde edilir. Teoremin koşullarının (2.6) da kullanılmasıyla

$$[L_n(f(t); x) - f(x)] \leq \epsilon$$

elde edilir. O halde

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{a \leq x \leq b} |L_n(f(t); x) - f(x)| = 0$$

eşitliği gerçekleşmiş olur. ■

3. SINIRLI SALINIMLI FONKSİYONLAR VE İLGİLİ KAVRAMLAR

Bu bölümün amacı, varyasyon yarı normunda yakınsama ve yakınsaklık hızı bağlamında kullanılacak toplam varyasyona ilişkin temel tanım ve teoremleri sunmak; ayrıca, söz konusu yaklaşımda belirleyici bir rol üstlenen BV, AC ve TV uzayları arasındaki ilişkileri incelemektir.

3.1 Sınırlı Salınimli Fonksiyonlar

Bir $f(x)$ fonksiyonu

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$$

aralığında sonlu olsun. Toplam formu

$$V = \sum_{k=0}^{n-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)|$$

olsun.

Tanım 3.1 Tüm mümkün olan $\bigvee$ toplamlarının en küçük üst sınırı; $[a, b]$ aralığında $f(x)$ fonksiyonunun total salınımı veya total varyasyonu diye adlandırılır ve $\bigvee_a^b(f)$ ya da $V_{[a,b]}[f]$ ile gösterilir.

Tanım 3.2 Eğer $\bigvee_a^b(f) < +\infty$ ise $f(x)$ fonksiyonuna $[a, b]$ aralığında sınırlı (veya sonlu) salınımlı bir fonksiyondur denir.

Tanım 3.3 I da tanımlı tüm sınırlı salınımlı fonksiyonlar sınıfı BV uzayı diye tanımlanır ve $BV(I)$ ile gösterilir. Bu uzayda $f \in BV(I)$ ve $a \in I$ sabit bir nokta olmak üzere $\|\cdot\|_{BV(I)}$ normu ve $|\cdot|_{BV(I)}$ yarı normu sırasıyla

$$\|f\|_{BV(I)} := V_I[f] + |f(a)|$$

ve

$$|f|_{BV(I)} := V_I[f]$$

ile gösterilir.

Tanım 3.4 $I \subseteq \mathbb{R}$ sabit bir aralık ve $V_I[f]$ ise $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun total salınımı olsun.

$$\|f\|_{TV(I)} := V_I[f] = \int_I |f'| dx$$

yarı normu ile verilen I da tanımlı tüm sınırlı fonksiyonların sınıfı TV uzayı olarak tanımlanır ve $TV(I)$ ile gösterilir.

Teorem 3.1 $[a, b]$ aralığında tanımlı monoton bir fonksiyon, $[a, b]$ de sınırlı salınımına sahiptir.

İspat. Eğer f fonksiyonu $[a, b]$ aralığında monoton artan ise, o zaman $[a, b]$ nin herhangi bir $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ parçalanması için,

$$\sum_{k=0}^{n-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)| = \sum_{k=0}^{n-1} (f(x_{k+1}) - f(x_k)) = f(b) - f(a)$$

eşitliği sağlanır. Bundan dolayı $\bigvee_a^b(f) = f(b) - f(a) < +\infty$ dur. Bu f nin $[a, b]$ de sınırlı salınımına sahip olduğunu gösterir.

Benzer bir yol ile azalan fonksiyonu içinde ispatlanabilir.

Tanım 3.5 Eğer $[a, b]$ aralığının herhangi iki x, y noktası için,

$$|f(x) - f(y)| \leq K |x - y|$$

olacak şekilde bir K sabiti varsa, $[a, b]$ de tanımlı sınırlı $f(x)$ fonksiyonuna Lipschitz sınıfındandır denir.

■

Teorem 3.2 $[a, b]$ aralığında sınırlı salınımlı her fonksiyon, $[a, b]$ de sınırlıdır.

İspat. $a < x < b$ ve $x_0 = a, x_1 = x, x_2 = b$ olmak üzere $\{a, x, b\}$, $[a, b]$ nin bir parçalanması olsun. O zaman

$$\sum_{k=0}^1 |f(x_{k+1}) - f(x_k)| = |f(x) - f(a)| + |f(b) - f(x)| \leq \bigvee_a^b(f)$$

sağlanır. f fonksiyonu $[a, b]$ de sınırlı salınımlı olduğundan, K negatif olmayan bir reel sayı olmak üzere $|f(x) - f(a)| \leq K$ olur. Bu ise

$$f(a) - K \leq f(x) \leq f(a) + K$$

dir. x , $[a, b]$ de keyfi bir sayı olduğundan f , $[a, b]$ de sınırlıdır denir. ■

Teorem 3.3 Sınırlı salımlı iki fonksiyonun toplamı, farkı ve çarpımı da sınırlı salımlı fonksiyondur.

İspat. $f(x)$ ve $g(x) \in BV[a, b]$ olsun. $s(x) = f(x) + g(x)$ olsun. O zaman

$$\begin{aligned} |s(x_{k+1}) - s(x_k)| &= |f(x_{k+1}) + g(x_{k+1}) - f(x_k) - g(x_k)| \\ &\leq |f(x_{k+1}) - f(x_k)| + |g(x_{k+1}) - g(x_k)| \end{aligned}$$

olur. Buradan $\bigvee_a^b(s) \leq \bigvee_a^b(f) + \bigvee_a^b(g)$ eşitsizliği elde edilir. f ve g nin $[a, b]$ de sınırlı salımlı olduğu biliniyor. Böylece M pozitif reel sayı olmak üzere $\bigvee_a^b(s) \leq M$ yazılabilir. Bu ise $s(x)$ in $BV[a, b]$ de olduğunu gösterir.

Benzer şekilde $f - g$ ninde $BV[a, b]$ de olduğu gösterilebilir.

$f.g \in BV[a, b]$ olduğunu ispatlamak için $t(x) = f(x)g(x)$ şeklinde yeni bir fonksiyon düşünelim. O halde

$$|t(x_{k+1}) - t(x_k)| = |f(x_{k+1})g(x_{k+1}) - f(x_k)g(x_k) - f(x_k)g(x_{k+1}) + f(x_k)g(x_{k+1})|$$

yazılabilir. Üçgen eşitsizliğinden

$$|t(x_{k+1}) - t(x_k)| \leq |g(x_{k+1})| |f(x_{k+1}) - f(x_k)| + |f(x_k)| |g(x_{k+1}) - g(x_k)| \quad (3.1)$$

yazılabilir. Teorem 3.2'den f ve g nin $[a, b]$ de sınırlı olduğu bilinir. Buradan (3.1) eşitsizliği, K pozitif reel sayı olmak üzere $\bigvee_a^b(t) = \bigvee_a^b(f.g) \leq K$ olduğunu gösterir. Dolayısıyla $f.g \in BV[a, b]$ dir. ■

Teorem 3.4 $f(x)$, $[a, b]$ aralığında tanımlı sınırlı bir fonksiyon ve $a < c < b$ olsun.

O zaman

$$\bigvee_a^b(f) = \bigvee_a^c(f) + \bigvee_c^b(f)$$

eşitliği sağlanır.

İspat. $[a, c]$ ve $[c, b]$ aralıklarının herbir alt parçalanması

$$a = y_0 < y_1 < \dots < y_m = c, \quad c = z_0 < z_1 < \dots < z_n = b$$

şeklinde olsun. $V_1 = \sum_{k=0}^{m-1} |f(y_{k+1}) - f(y_k)|$ ve $V_2 = \sum_{k=0}^{n-1} |f(z_{k+1}) - f(z_k)|$ alalım.

Bu ise $V_1 + V_2 \leq \bigvee_a^b(f)$ olduğunu gösterir. $\{y_0, y_1, \dots, y_m\}$ ve $\{z_0, z_1, \dots, z_n\}$ nokta

kümeleri keyfi olduğundan $\bigvee_a^c(f) + \bigvee_c^b(f) \leq \bigvee_a^b(f)$ oluşturulur.

Şimdi $[a, b]$ aralığının alt parçalanması

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_m = b$$

olarak alınsın. $a < c < b$ olduğundan, kabul edelim ki $m < n$ olmak üzere $c = x_m$ olsun. O zaman

$$\sum_{k=0}^{n-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)| = \sum_{k=0}^{m-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)| + \sum_{k=m}^{n-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)| \leq \bigvee_a^c(f) + \bigvee_c^b(f)$$

elde edilir. Dolayısıyla $\bigvee_a^b(f) \leq \bigvee_a^c(f) + \bigvee_c^b(f)$ dir. Sonuç olarak

$$\bigvee_a^b(f) = \bigvee_a^c(f) + \bigvee_c^b(f)$$

elde edilmiş olur. ■

Teorem 3.5 $[a, b]$ aralığında tanımlı ve sınırlı $f(x)$ fonksiyonu sınırlı salınımlı bir fonksiyonu olması için gerek ve yeter şart iki artan fonksiyonunun farkı olarak yazılabilmesidir.

İspat. f_1 ve f_2 iki artan fonksiyon olsun. Teorem 3.1 den $f_1, f_2 \in BV[a, b]$ dedir. Böylece $f = f_1 - f_2 \in BV[a, b]$ dir. Tersine $\pi(x) = \bigvee_a^x(f)$, $a < x \leq b$, $\pi(a) = 0$ olsun. Kolayca görülür ki π artan bir fonksiyondur. Şimdi $v(x) = \pi(x) - f(x)$ şeklinde yeni bir fonksiyon düşünelim. İlk olarak $v(x)$ in bir artan fonksiyon olduğu gösterilmelidir.

Eğer $x < y$ ise $v(y) - v(x) = \pi(y) - f(y) - \pi(x) + f(x) = \bigvee_a^y(f) - f(y) - \bigvee_a^x(f) + f(x)$ dir. Teorem 3.4 den $v(y) - v(x) = \bigvee_a^x(f) + \bigvee_x^y(f) - f(y) - \bigvee_a^x(f) + f(x)$ yazılır. Dolayısıyla $v(y) - v(x) = \bigvee_x^y(f) - [f(y) - f(x)] \geq 0$ olduğu açıktır. Bu nedenle $v(x)$ bir artan fonksiyondur.

Sonuç olarak $f(x) = \pi(x) - v(x)$ dir. Bu da ispatı tamamlar. ■

Teorem 3.6 Sınırlı salınımlı bir $f(x)$ fonksiyonu $[a, b]$ aralığında tanımlansın. Eğer $f(x)$ fonksiyonu x_0 noktasında sürekli ise, o zaman

$$\pi(x) = \bigvee_a^x(f)$$

fonksiyonu da x_0 noktasında sürekli.

İspat. Kabul edelim ki $x_0 < b$ olsun. $\pi(x)$ in sürekliliğini göstermek için $\epsilon > 0$ seçelim ve $[x_0, b]$ kısmının alt parçalanması

$$x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$$

olsun. Buradan

$$V = \sum_{k=0}^{n-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)| > \bigvee_{x_0}^b(f) - \epsilon$$

V toplamı sadece artan olduğundan yeni noktalar eklendiğinde

$$|f(x_1) - f(x_0)| < \epsilon$$

olduğu varsayılabilir. Böylece

$$\bigvee_{x_0}^b(f) < \epsilon + \sum_{k=0}^{n-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)| < 2\epsilon + \sum_{k=0}^{n-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)| \leq 2\epsilon + \bigvee_{x_1}^b(f)$$

elde edilir. Bundan dolayı $\bigvee_{x_0}^b(f) - \bigvee_{x_1}^b(f) \leq 2\epsilon$ olup $\bigvee_{x_0}^{x_1}(f) \leq 2\epsilon$ olur. $\pi(x) - \pi(x_0) = \bigvee_a^x(f) - \bigvee_a^{x_0}(f) = \bigvee_{x_0}^x(f)$ olduğundan, $\pi(x)$ in x_0 noktasında sağdan sürekli olduğu ortaya çıkarılır.

Benzer şekilde, soldan sürekliliği de ispatlanabilir. Böylece $\pi(x)$, x_0 noktasında sürekli. ■

Sonuç 3.1 $[a, b]$ aralığında tanımlı sınırlı salınımlı sürekli bir fonksiyon, iki sürekli artan fonksiyonun farkı olarak yazılabilir.

Teorem 3.7 f , $[a, b]$ aralığında tanımlı bir fonksiyon olsun. Eğer f' , $[a, b]$ de var, sınırlı ve Riemann integrallenebilir ise o zaman $f \in BV[a, b]$ ve $\bigvee_a^b(f) = \int_a^b |f'(x)| dx$ dir.

İspat. $[a, b]$ aralığının alt parçalanmasını

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$$

olarak alalım. $[a, b]$ aralığında f' nin sınırlı olduğu biliniyor. O halde $\exists M > 0$ vardır öyleki her $x \in [a, b]$ için $|f'(x)| \leq M$ dir. f' var olduğundan Ortalama Değer

Teoremine göre $x_k \leq c_k \leq x_{k+1}$ olmak üzere $c_k \in \mathbb{R}$ vardır öyleki tüm $k = 0, \dots, n-1$ için

$$\frac{f(x_{k+1}) - f(x_k)}{x_{k+1} - x_k} = f'(c_k)$$

dir. Buradan

$$\sum_{k=0}^{n-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)| = \sum_{k=0}^{n-1} |f'(c_k)| |x_{k+1} - x_k| \leq M(b-a)$$

elde edilir. Böylece $f \in BV[a, b]$ dir. Ayrıca, Riemann integral tanımı kullanılarak

$$\begin{aligned} \bigvee_a^b(f) &= \sup \sum_{k=0}^{n-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)| = \sup \sum_{k=0}^{n-1} |f'(c_k)| |x_{k+1} - x_k| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} |f'(c_k)| |x_{k+1} - x_k| = \int_a^b |f'(x)| dx \end{aligned}$$

elde edilir. Bu ise ispatı tamamlar. ■

Tanım 3.6 $f(x)$, $[a, b]$ aralığında tanımlı sınırlı bir fonksiyon olsun. Kabul edelim ki her $\epsilon > 0$ için bir $\delta > 0$ vardır öyle ki $a_1 < b_1 \leq a_2 < b_2 \leq \dots \leq a_n < b_n$ olmak üzere her $a_1, b_1, \dots, a_n, b_n$ sayıları ve

$$\sum_{k=0}^n (b_k - a_k) < \delta$$

için

$$\left| \sum_{k=0}^n \{f(b_k) - f(a_k)\} \right| < \epsilon$$

ise o zaman $f(x)$ fonksiyonu mutlak süreklidir, denir. $[a, b]$ aralığında tanımlı mutlak sürekli fonksiyonların sınıfı $AC[a, b]$ ile gösterilir.

Teorem 3.8 Bir mutlak sürekli fonksiyon, düzgün süreklidir.

İspat. Tanım 3.6'da eğer $n = 1$ alınırsa ispat elde edilir. ■

Teorem 3.9 Eğer $M > 0$ Lipschitz katsayısı ve $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ Lipschitz fonksiyonu ise f , $[a, b]$ de mutlak süreklidir.

İspat. $\epsilon > 0$ ve (a_k, b_k) , $[a, b]$ de örtüşmeyen bir aralık, öyle ki

$$\sum_{k=0}^n (b_k - a_k) < \delta$$

olsun. Lipschitz koşuluna göre her $k = 1, \dots, n$ için $M_k \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere

$$|f(b_k) - f(a_k)| \leq M |a_k - b_k| < M\delta$$

elde edilir. $\delta \leq \frac{\epsilon}{M}$ seçilirse ispat tamamlanır. Sonuç olarak f mutlak süreklidir. ■

Teorem 3.10 $[a, b]$ aralığında tanımlı her mutlak sürekli fonksiyon o aralıkta sınırlı salınımına sahiptir.

İspat. $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ mutlak sürekli olsun. O halde herhangi bir $\epsilon > 0$ verildiğinde $\delta > 0$ vardır öyleki; $\sum_{i=1}^n |b_i - a_i| < \delta$ ve (a_i, b_i) , $[a, b]$ de örtüşmeyen bir aralık olmak üzere $\sum_{i=1}^n |f(b_i) - f(a_i)| < \epsilon$ dur.

$[a, b]$ nin bir parçalanmasını, $\left\{x_i = a + i \frac{(b-a)}{k} : 0 \leq i \leq k\right\}$ olarak düşünelim. Burada mutlak süreklilik koşulundan $\bigvee_{x_{i-1}}^{x_i} (f) \leq \epsilon$ dur. Bu alt aralıkların en üst k sayısı vardır. Bundan dolayı, Teorem 3.4 den $\bigvee_a^b (f) \leq \epsilon k$ elde edilebilir. Böylece f fonksiyonu $[a, b]$ de sınırlı salımlıdır. ■

Sonuç 3.2 Eğer f fonksiyonu $[a, b]$ de Lipschitz koşulunu sağlarsa, o zaman f fonksiyonu $[a, b]$ de sınırlı salınımına sahiptir.

Teorem 3.11 $AC[a, b]$ varyasyon yarı normunda $TV[a, b]$ nin kapalı bir alt uzayıdır.

İspat. Teorem 3.10 dan, AC nin TV nin alt uzayı olduğu açıktır.

f fonksiyonuna varyasyon yarı normunda yakınsayan $AC[a, b]$ de tanımlı bir $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ fonksiyon dizisini ele alalım. O halde $\epsilon > 0$ verildiğinde $n \in \mathbb{N}$ vardır öyleki

$$V_{[a,b]} = [f_n - f] = \|f_n - f\| < \frac{\epsilon}{2}$$

dir. $f_n \in AC[a, b]$ de olmak üzere öyle bir $\delta > 0$ vardır öyle ki; $\sum_{i=0}^n (b_i - a_i) < \delta$ için birbirini kapsamayan aralıkların her sınırlı $\{[a, b] : i = 1, 2, \dots, k\}$ kümesi için,

$$\sum_{i=0}^k |f_n(b_i) - f_n(a_i)| < \frac{\epsilon}{2}$$

dir. Böylece

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^k |f(b_i) - f(a_i)| &< \sum_{i=0}^k |(f - f_n)(b_i) - (f - f_n)(a_i)| + \sum_{i=0}^k |f_n(b_i) - f_n(a_i)| \\ &\leq V_{[a,b]} = [f - f_n] + \frac{\epsilon}{2} \\ &< \epsilon \end{aligned}$$

sonucu çıkarılır. Buradan $f \in AC[a, b]$ dir ve böylece $AC[a, b]$ kapalıdır. ■

Sonuç 3.3 Eğer f mutlak sürekli ise o zaman f hemen hemen her yerde türevli ve f' Lebesgue integrallenebilir.

3.2 Stieltjes İntegrali

Tanım 3.7 $f(x)$ ve $g(x)$ fonksiyonları $[a, b]$ de sınırlı fonksiyonlar olsun. $[a, b]$ aralığının alt parçalanması

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$$

olmak üzere $k = 0, \dots, n-1$ için $[x_k, x_{k+1}]$ de bir ζ_k noktası seçelim ve toplam formu

$$\sigma = \sum_{k=0}^{n-1} f(\zeta_k)[g(x_{k+1}) - g(x_k)]$$

olsun. Eğer σ toplam formu parçalanma ve ζ_k noktalarının seçiminden bağımsız olarak

$$\lambda = \max(x_{k+1} - x_k) \rightarrow 0$$

şeklinde sonlu bir limite doğru giderse, bu limite $g(x)$ 'e göre $f(x)$ fonksiyonun Stieltjes integrali denir ve

$$\int_a^b f(x)dg(x) \text{ yada } (S) \int_a^b f(x)dg(x)$$

ile gösterilir.

Teorem 3.12 Eğer $f(x)$ fonksiyonu $[a, b]$ aralığında sürekli ve $g(x)$, $[a, b]$ de sınırlı salınımlı bir fonksiyon ise

$$\int_a^b f(x)dg(x)$$

integrali vardır.

İspat. Sınırlı salınımlı her fonksiyon artan iki fonksiyonun farkı olarak yazılabildiğinden g fonksiyonu artandır denir. $[a, b]$ aralığının alt parçalanması

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$$

olsun. m_k ve M_k , $[x_k, x_{k+1}]$ de $f(x)$ fonksiyonunun en küçük ve en büyük değerleri ve

$$s = \sum_{k=0}^{n-1} m_k [g(x_{k+1}) - g(x_k)], \quad S = \sum_{k=0}^{n-1} M_k [g(x_{k+1}) - g(x_k)]$$

olsun. O halde $s \leq \sigma \leq S$ dir. Alt parçalanmanın yeni noktaları eklendiğinde s azalan değildir. Bunu göstermek için $[x_m, x_{m+1}]$ e x_c noktası ekleyelim ve m_i, m_j ; sırasıyla $[x_m, x_c]$ ve $[x_c, x_{m+1}]$ üzerinde f fonksiyonunun en küçük değerleri olmak üzere

$$\begin{aligned} s_1 &= m_0[g(x_1) - g(x_0)] + \dots + m_i[g(x_c) - g(x_m)] + m_j[g(x_{m+1}) - g(x_c)] \\ &\quad + \dots + m_{n-1}[g(x_n) - g(x_{n-1})] \end{aligned}$$

olsun.

$s = m_0[g(x_1) - g(x_0)] + \dots + m_m[g(x_{m+1}) - g(x_m)] + \dots + m_{m-1}[g(x_n) - g(x_{n-1})]$ ve $m_m, [x_m, x_{m+1}]$ üzerinde f fonksiyonunun en küçük değeri olduğundan

$$s_1 \geq s$$

sonucu çıkarılır.

Benzer bir yol ile S in artan olmadığı gösterilebilir. Bu ise gösteriyor ki s toplamlarının hiçbirinin herhangi bir S toplamından büyük değildir. Böylece s_1, S_1 ve s_2, S_2 ye uyan $[a, b]$ aralığının alt parçalanmaları için, $s_1 \leq S_2$ elde edilir.

$$I = \sup\{s\}$$

alalım. Böylece $[a, b]$ nin her alt parçalanması için

$$s \leq I \leq S$$

bulunur ve sonuç olarak

$$|\sigma - I| < S - s$$

elde edilir. f fonksiyonu $[a, b]$ aralığında sürekli olduğundan düzgün süreklidir. Böylece her $\varepsilon > 0$ için $[a, b]$ deki tüm x, y ler $|x - y| < \delta$ olduğunda $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ vardır. Buradaki x ler δ dan bağımsızdır. Böylece $k = 0, 1, \dots, n - 1$ için

$$M_k - m_k < \varepsilon$$

elde edilir. Buradan $\lambda < \delta$ için

$$\begin{aligned}
S - s &= \sum_{k=0}^{n-1} M_k [g(x_{k+1}) - g(x_k)] - \sum_{k=0}^{n-1} m_k [g(x_{k+1}) - g(x_k)] \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} (M_k - m_k) [g(x_{k+1}) - g(x_k)] \\
&\leq \varepsilon \sum_{k=0}^{n-1} [g(x_{k+1}) - g(x_k)] \\
&= \varepsilon [g(b) - g(a)]
\end{aligned}$$

elde edilir. $|\sigma - I| < S - s$ olduğundan

$$|\sigma - I| < \varepsilon [g(b) - g(a)]$$

elde edilir.

Sonuç olarak

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sigma = I$$

yani

$$I = \int_a^b f(x) dg(x)$$

bulunur ki, böylece ispat tamamlanmış olur. ■

Teorem 3.13 Her $f_1, f_2, f \in C[a, b]$ ve $g_1, g_2, g \in BV[a, b]$ için

1. $\int_a^b [f_1(x) + f_2(x)] dg(x) = \int_a^b f_1(x) dg(x) + \int_a^b f_2(x) dg(x),$
2. $\int_a^b f(x) d[g_1(x) + g_2(x)] = \int_a^b f(x) dg_1(x) + \int_a^b f(x) dg_2(x),$
3. Eğer m ve n sabit ise, o zaman

$$\int_a^b m f(x) dng(x) = mn \int_a^b f(x) dg(x),$$

4. Eğer $a < c < b$ ise

$$\int_a^b f(x) dg(x) = \int_a^c f(x) dg(x) + \int_c^b f(x) dg(x)$$

eşitlikleri sağlanır.

Teorem 3.14 Eğer $f(x)$ fonksiyonu $[a, b]$ aralığında sürekli ve $g(x)$, $[a, b]$ de sınırlı salınımlı bir fonksiyon ise o zaman

$$\left| \int_a^b f(x) dg(x) \right| \leq M(f) \bigvee_a^b(g)$$

sağlanır.

İspat. $[a, b]$ nin keyfi bir alt aralığı için

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f(x) dg(x) \right| &= \left| \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} f(\zeta_k) [g(x_{k+1}) - g(x_k)] \right| \\ &\leq \left| \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} |f(\zeta_k)| [g(x_{k+1}) - g(x_k)] \right| \\ &\leq \left| \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} \max_{x \in [a, b]} f(x) [g(x_{k+1}) - g(x_k)] \right| \\ &= M(f) \left| \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} [g(x_{k+1}) - g(x_k)] \right| \\ &= M(f) |g(b) - g(a)| \\ &= M(f) \bigvee_a^b(g) \end{aligned}$$

elde edilir. İspat tamamlanmış olur. ■

Teorem 3.15 Eğer $f(x)$ fonksiyonu $[a, b]$ aralığında sürekli ve $g(x)$, $[a, b]$ nin her noktasında Riemann integrallenebilir ve $g'(x)$ türe ve sahip ise, o zaman

$$(S) \int_a^b f(x) dg(x) = \int_a^b f(x) g'(x) dx$$

eşitliği sağlanır.

İspat. $g(x)$ türe ve sahip olduğundan Lipschitz şartını sağlanır ve böylece $g(x)$ sınırlı salınımlı olur. Bundan dolayı soldan integrali vardır.

$[a, b]$ aralığının alt parçalanması

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$$

olsun. Ortalama değ er teoremine göre $x_k < c_k < x_{k+1}$ olsun üzere

$$g(x_{k+1}) - g(x_k) = g'(c_k)(x_{k+1} - x_k)$$

eşiliği sağlanır. c_k noktası ζ_k noktası için alınabilir. Böylece

$$\begin{aligned}(S) \int_a^b f(x) dg(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} f(c_k)[g(x_{k+1}) - g(x_k)] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} f(c_k)g'(c_k)(x_{k+1} - x_k) \\ &= \int_a^b f(x)g'(x)dx\end{aligned}$$

elde edilir. ■

4. BERNSTEIN-DURRMEYER OPERATÖRÜ

$[0, 1]$ aralığında tanımlı, klasik norm altında tüm Lebesgue ölçülebilir ve integralenebilir fonksiyonlar uzayı $L_1[0, 1]$ olarak gösterilir. Lineer pozitif operatörler örneklerinde görüldüğü üzere, bu uzaydaki fonksiyonların yaklaşım problemlerine yanıt verebilmek amacıyla J. L. Durrmeyer ve Lupas, bağımsız olarak Bernstein polinomlarının integral modifikasyonlarını geliştirmişlerdir. Bu operatörler, Bernstein-Durrmeyer operatörü olarak adlandırılmaktadır ve şu şekilde tanımlanır:

$$(D_n f)(x) = (n+1) \sum_{k=0}^n p_{n,k}(x) \int_0^1 p_{n,k}(t) f(t) dt, \quad x \in [0, 1]. \quad (4.1)$$

Burada klasik anlamda kullanılan (4.1) eşitliğinde $f(\frac{k}{n})$ yerine $\int_0^1 p_{n,k}(t) f(t) dt$ değeri gelmektedir. 1981 yılında Derriennic, bu operatörleri ayrıntılı olarak incelemiştir. Daha sonra Gonska ve Zhou (1991), Ditzian ve Ivanov (1989) gibi araştırmacılar çalışmalarını sürdürmüşlerdir. Alınan $X = x(1-x)$ ile

$$\frac{d}{dx} p_{n,k}(x) = \frac{(k-nx)p_{n,k}(x)}{X}, \quad (4.2)$$

eşitliğinden hareketle, $(D_n f)(x)$ operatörünün birinci türevi:

$$(D_n f)'(x) = \frac{(n+1)}{X} \sum_{k=0}^n (k-nx) p_{n,k}(x) \int_0^1 f(t) p_{n,k}(t) dt \quad (4.3)$$

ve

$$(D_n f)'(x) = n \sum_{k=0}^{n-1} p_{n-1,k}(x) (n+1) \int_0^1 f(t) [p_{n,k+1}(t) - p_{n,k}(t)] dt \quad (4.4)$$

olarak elde edilir.

Bardaro ve arkadaşlarının (Bardaro vd. 2003) çalışmasına göre, $(D_n f)$ operatörü için toplam moment aşağıdaki gibi tanımlanır

$$T_{r,n}(x) = \sum_{k=0}^n [k-nx]^r p_{n,k}(x). \quad (4.5)$$

O halde aşağıdaki eşitlikler sağlanır (Bardaro vd. 2003).

$$T_{r,n}(x) = \begin{cases} 1 & r = 0 \\ 0 & r = 1 \\ nX & r = 2 \\ nX(1 - 2x) & r = 3 \\ 3(nX)^2 + (1 - 6X)nX & r = 4. \end{cases} \quad (4.6)$$

4.1 Bernstein-Durrmeyer Operatörü için Varyasyon Yarı Normunda Yakınsama

Bu bölümde Bernstein-Durrmeyer operatörünün varyasyon azaltıcı özelliği incelenecektir.

Teorem 4.1 Eğer $f \in TV[0, 1]$ ise

$$V_{[0,1]}[D_n f] \leq V_{[0,1]}[f] \quad (4.7)$$

ve

$$\|D_n f\|_{BV[0,1]} \leq \|f\|_{BV[0,1]} \quad (4.8)$$

eşitsizlikleri sağlanır.

İspat. (4.1) ile verilen Bernstein-Durrmeyer operatörünü

$$(D_n f)(x) = \sum_{k=0}^n p_{n,k}(x) F_{k,n}.$$

şeklinde yeniden yazalım. Burada

$$F_{k,n} := (n+1) \int_0^1 f(t) p_{n,k}(t) dt$$

dir. (4.4) deki gibi, (4.1) in türevini alalım

$$\begin{aligned}
(D_n f)'(x) &= \sum_{k=0}^n p'_{n,k}(x) F_{k,n} \\
&= \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} k x^{k-1} (1-x)^{n-k} F_{k,n} - \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} x^k (n-k) (1-x)^{n-k-1} F_{k,n} \\
&= n \sum_{k=0}^{n-1} p_{n-1,k}(x) F_{k+1,n} - n \sum_{k=0}^{n-1} p_{n-1,k}(x) F_{k,n} \\
&= n \sum_{k=0}^{n-1} p_{n-1,k}(x) [F_{k+1,n} - F_{k,n}] \\
&= n \sum_{k=0}^{n-1} p_{n-1,k}(x) \Delta F_{k,n}
\end{aligned} \tag{4.9}$$

elde edilir. Tanım 3.4 de (4.9) eşitliği göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned}
\|D_n f\|_{TV[0,1]} &= V_{[0,1]}[D_n f] = \int_0^1 |(D_n f)'(x)| dx \\
&\leq n \sum_{k=0}^{n-1} |\Delta F_{k,n}| \int_0^1 p_{n-1,k}(x) dx
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. $n \int_0^1 p_{n-1,k}(x) dx = 1$ olduğundan

$$\|D_n f\|_{TV[0,1]} \leq n \sum_{k=0}^{n-1} |\Delta F_{k,n}| \tag{4.10}$$

elde edilir. Burada $\Delta F_{k,n}$ ifadesi

$$\begin{aligned}
\Delta F_{k,n} &= (n+1) \int_0^1 f(t) [p_{n,k+1}(t) - p_{n,k}(t)] dt \\
&= (n+1) \int_0^1 f(t) \Delta p_{n,k}(t) dt
\end{aligned}$$

dir. $p'_{n,k}(x)$;

$$\begin{aligned}
p'_{n,k}(x) &= n(p_{n-1,k-1}(x) - p_{n-1,k}(x)) \\
&= -n(p_{n-1,k}(x) - p_{n-1,k-1}(x)) \\
&= -n\Delta p_{n-1,k-1}(x),
\end{aligned}$$

olduğundan ve

$$\Delta p_{n-1,k-1}(t) = \frac{-p'_{n,k}(t)}{n} \implies \Delta p_{n,k}(t) = \frac{-p'_{n+1,k+1}(t)}{n+1}$$

eşitliğinden,

$$|\Delta F_{k,n}| = \left| (n+1) \int_0^1 f(t) \left[\frac{-p'_{n+1,k+1}(t)}{n+1} \right] dt \right| \quad (4.11)$$

sonucu elde edilir. Böylece (4.10) ve (4.11) den,

$$\begin{aligned} V_{[0,1]}[D_n f] &= \sum_{k=0}^{n-1} |\Delta F_{k,n}| = \sum_{k=0}^{n-1} \left| - \int_0^1 f(t) p'_{n+1,k+1}(t) dt \right| \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \left| \int_0^1 p_{n+1,k+1}(t) f'(t) dt \right| \\ &\leq \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^1 p_{n+1,k+1}(t) |f'(t)| dt \\ &= \int_0^1 \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n+1}{k+1} t^{k+1} (1-t)^{n-k} |f'(t)| dt \\ &= \int_0^1 \sum_{k=1}^n \binom{n+1}{k} t^k (1-t)^{n+1-k} |f'(t)| dt \\ &\leq \int_0^1 \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n+1}{k} t^k (1-t)^{n+1-k} |f'(t)| dt \\ &= \int_0^1 (t+1-t)^{n+1} |f'(t)| dt = \int_0^1 |f'(t)| dt \\ &= V_{[0,1]}[f] \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir, bu ise (4.7) sonucunu ispatlar.

$$(D_n f)(0) = (n+1) \int_0^1 (1-t)^n f(t) dt$$

ve Tanım 3.4

$$\|f\|_{BV[0,1]} := V_{[I]}[f] + |f(0)|$$

olduğundan, (4.8) bağıntısı (4.7) bağıntısının bir sonucudur.

$$\begin{aligned}\|D_n f\|_{BV[0,1]} &= V_{[0,1]}[D_n f] + (D_n f)(0) \\ &\leq V_{[0,1]}[f] + \left| (n+1) \int_0^1 (1-t)^n f(t) dt \right|\end{aligned}$$

dir. Burada $f \in TV[0,1]$ ve $c, [0,1]$ aralığında bir sabit olmak üzere

$$\left| (n+1) \int_0^1 (1-t)^n f(t) dt \right| = |f(0)| \leq |f(c)|$$

olduğundan

$$\|D_n f\|_{BV[0,1]} \leq \|f\|_{BV[0,1]}$$

sonucu elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur. ■

4.2 Bernstein-Durrmeyer Operatörü için TV-Normda Yakınsama Hızı

$TV(I)$ uzayının dikkate değer ve ilgi çekici özellikleri Bardoro ve arkadaşlarının (2003) çalışmasında ele alınmıştır. I aralığında tanımlı reel değerli mutlak sürekli fonksiyonların oluşturduğu uzay $AC(I)$, $\|f\|_{TV(I)}$ yarı normuna göre $TV(I)$ uzayının bir alt uzayıdır. Ayrıca, eğer $(g_n)_{n \geq 1} \in AC(I)$ olup

$$\lim_{n \rightarrow \infty} V_I[g_n - g] = 0$$

şartını sağlıyorsa, bu durumda $g \in AC(I)$ olur. Burada $\|f\| := \|f\|_{L_1(I)}$ olmak üzere

$$V_I[g_n - g] = \int_I |g'_n(t) - g'(t)| dt = \|g'_n - g'\|_{L_1(I)}$$

eşitliği geçerlidir. Böylelikle, $(g_n)_{n \geq 1}$ dizisinin g ye varyasyon yarı normunda yakınsaması, aynı zamanda türevlerinin $L_1(I)$ normunda yakınsadığı anlamına gelir. Bu bölümde ise Bernstein-Durrmeyer operatörünün varyasyon yarı normunda yakınsama hızları incelenecektir.

Teorem 4.2 $g'' \in AC[0,1]$ olsun. δ yeterince küçük pozitif bir reel sabit ve $C > 1$ sabit olmak üzere

$$V_{[0,1]}[D_n g - g] \leq \frac{6(C+1)}{\delta^2} \frac{1}{\sqrt{n}} \{V_{[0,1]}[g] + V_{[0,1]}[g'']\}$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat. g fonksiyonu için integral formunda kalan terimli Taylor formülü yardımıyla

$$g(t) = g(x) + (t-x)g'(x) + (t-x)^2 \frac{g''(x)}{2} + \frac{1}{2} \int_0^{t-x} (t-x-u)^2 g'''(x+u) du$$

yazılabilir. $x+u=v$ değişken değiştirmesi yapılırsa

$$g(t) = g(x) + (t-x)g'(x) + (t-x)^2 \frac{g''(x)}{2} + \frac{1}{2} \int_0^{t-x} (t-v)^2 g'''(v) dv \quad (4.12)$$

eşitliği elde edilir. Eğer D'_n operatörü (4.12) eşitliğinin her iki tarafına uygulanırsa, (4.3)'ten

$$(D_n g)' = A_{0,n}(x)g(x) + A_{1,n}(x)g'(x) + A_{2,n}(x)g''(x) + (R_n g)(x) \quad (4.13)$$

bulunur. Burada $A_{j,n}$ ler

$$A_{j,n}(x) = \frac{n+1}{Xj!} \sum_{k=0}^n (k-nx)p_{n,k}(x) \int_0^1 (t-x)^j p_{n,k}(t) dt \quad (j = 0, 1, 2)$$

ve kalan terim $R_n g$

$$(R_n g)(x) = \frac{n+1}{2X} \sum_{k=0}^n (k-nx)p_{n,k}(x) \int_0^1 \left[\int_x^t (t-v)^2 g'''(v) dv \right] p_{n,k}(t) dt \quad (4.14)$$

ile verilir. (4.5) , (4.6) eşitlikleri, binom katsayıları, Beta ve Gama fonksiyonlarının özelliklerini kullanarak aşağıdaki eşitlikleri elde ederiz.

$$\begin{aligned} A_{0,n}(x) &= \frac{1}{X} [T_{1,n}(x)] = 0, \\ A_{1,n}(x) &= \frac{1}{(n+2)X} [T_{2,n}(x) + (1-2x)T_{1,n}(x)] = \frac{n}{n+2} \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} A_{2,n}(x) &= \frac{1}{2(n+2)(n+3)X} [T_{3,n}(x) + 3(1-2x)T_{2,n}(x) + \\ &\quad (x^2(n^2+n+12) + (n-6)x+2)T_{1,n}(x)] \\ &= \frac{2n(1-2x)}{(n+2)(n+3)}. \end{aligned}$$

Böylece (4.12), (4.13) ve (4.14) den

$$(D_n g)'(x) = \frac{n}{n+2} g'(x) + \frac{2n(1-2x)}{(n+2)(n+3)} g''(x) + (R_n g)(x) \quad (4.15)$$

eşitliğini elde ederiz.

Şimdi yeterince küçük bir δ pozitif reel sayı seçelim. Kalan terim (4.14)'ü aşağıdaki gibi iki kısma ayıralım:

$$(R_n g)(x) = (R_{n,1} g)(x) + (R_{n,2} g)(x). \quad (4.16)$$

Burada

$$(R_{n,1} g)(x) = \frac{n+1}{2X} \sum_{\left|\frac{k}{n}-x\right| \leq \delta} (k-nx)p_{n,k}(x) \int_0^1 \left[\int_x^t (t-v)^2 g'''(v) dv \right] p_{n,k}(t) dt \quad (4.17)$$

ve

$$(R_{n,2} g)(x) = \frac{n+1}{2X} \sum_{\left|\frac{k}{n}-x\right| > \delta} (k-nx)p_{n,k}(x) \int_0^1 \left[\int_x^t (t-v)^2 g'''(v) dv \right] p_{n,k}(t) dt \quad (4.18)$$

dir. Kalan terim (4.14) içindeki çift integralin integrasyon bölgesini hesaplamak için toplamı farklı parçalara ayıralım:

$$(R_{n,1} g)(x) = B_{2,n} g + B_{5,n} g \quad \text{ve} \quad (R_{n,2} g)(x) = B_{1,n} g + B_{3,n} g + B_{4,n} g + B_{6,n} g.$$

Burada $B_{i,n} g$ 'ler $i = 1, 2, \dots, 6$ için

$$\begin{aligned} B_{1,n} g &= \frac{n+1}{2X} \sum_{\delta < x - \frac{k}{n} \leq x} (k-nx)p_{n,k}(x) \int_0^{\frac{k}{n}} \left[\int_x^t (t-v)^2 g'''(v) dv \right] p_{n,k}(t) dt, \\ B_{2,n} g &= \frac{n+1}{2X} \sum_{0 \leq x - \frac{k}{n} \leq \delta} (k-nx)p_{n,k}(x) \int_{\frac{k}{n}}^x \left[\int_x^t (t-v)^2 g'''(v) dv \right] p_{n,k}(t) dt, \\ B_{3,n} g &= \frac{n+1}{2X} \sum_{\delta < x - \frac{k}{n} \leq x} (k-nx)p_{n,k}(x) \int_x^1 \left[\int_x^t (t-v)^2 g'''(v) dv \right] p_{n,k}(t) dt, \\ B_{4,n} g &= \frac{n+1}{2X} \sum_{\delta < \frac{k}{n} - x \leq 1-x} (k-nx)p_{n,k}(x) \int_0^x \left[\int_x^t (t-v)^2 g'''(v) dv \right] p_{n,k}(t) dt, \\ B_{5,n} g &= \frac{n+1}{2X} \sum_{0 < \frac{k}{n} - x \leq \delta} (k-nx)p_{n,k}(x) \int_x^{\frac{k}{n}} \left[\int_x^t (t-v)^2 g'''(v) dv \right] p_{n,k}(t) dt, \end{aligned}$$

ve

$$B_{6,n} g = \frac{n+1}{2X} \sum_{\delta < \frac{k}{n} - x \leq 1-x} (k-nx)p_{n,k}(x) \int_{\frac{k}{n}}^1 \left[\int_x^t (t-v)^2 g'''(v) dv \right] p_{n,k}(t) dt$$

dir. Burada $B_{1,n}g + B_{2,n}g = -B_{4,n}g$ ve $B_{5,n}g + B_{6,n}g = -B_{3,n}g$ olduğu kolayca görülür. Böylece

$$|B_{1,n}g + B_{2,n}g| = |-B_{4,n}g| \leq |B_{1,n}g| + |B_{2,n}g|$$

ve

$$|B_{5,n}g + B_{6,n}g| = |-B_{3,n}g| \leq |B_{5,n}g| + |B_{6,n}g|$$

elde edilir. Buradan

$$|(R_n g)(x)| \leq 2(|B_{1,n}g| + |B_{2,n}g| + |B_{5,n}g| + |B_{6,n}g|)$$

ya da

$$|(R_n g)(x)| \leq 2(|-B_{3,n}g| + |-B_{4,n}g|)$$

şeklinde yazılabilir. Şimdi sadece $B_{i,n}g$ yi sırasıyla $i = 1, 2, 5$ ve 6 için hesaplayacağız.

İlk olarak işlemi $B_{1,n}g$ için yapalım bu durumda:

$$\begin{aligned} |B_{1,n}g| &\leq \frac{n+1}{2X} \sum_{\delta < x - \frac{k}{n} \leq x} |k - nx| p_{n,k}(x) \int_0^{\frac{k}{n}} \left| \int_x^t (t-v)^2 g'''(v) dv \right| p_{n,k}(t) dt \\ &\leq \frac{n+1}{2X} \sum_{\delta < x - \frac{k}{n} \leq x} |k - nx| p_{n,k}(x) \int_0^{\frac{k}{n}} \left| \int_x^t (t-v)^2 |g'''(v)| dv \right| p_{n,k}(t) dt \\ &= \frac{n+1}{2X} \sum_{\delta < x - \frac{k}{n}} (nx - k) p_{n,k}(x) \int_0^{\frac{k}{n}} \left[\int_t^x (t-v)^2 |g'''(v)| dv \right] p_{n,k}(t) dt \\ &\leq \frac{n+1}{2X} \sum_{\delta < x - \frac{k}{n}} (nx - k) p_{n,k}(x) \int_0^{\frac{k}{n}} (t-x)^2 \left[\int_t^x |g'''(v)| dv \right] p_{n,k}(t) dt \\ &\leq \frac{n+1}{2X} \sum_{\delta < x - \frac{k}{n}} (nx - k) p_{n,k}(x) x^2 \int_0^{\frac{k}{n}} \left[\int_t^x |g'''(v)| dv \right] p_{n,k}(t) dt \\ &\leq \frac{n+1}{2X} \sum_{\delta < x - \frac{k}{n}} (nx - k) p_{n,k}(x) x^2 \int_0^{\frac{k}{n}} \left[\int_0^1 |g'''(v)| dv \right] p_{n,k}(t) dt \\ &\leq \frac{x^2}{2X} \|g'''\| \sum_{\delta < x - \frac{k}{n}} (nx - k) p_{n,k}(x) (n+1) \int_0^1 p_{n,k}(t) dt \\ &= \frac{x^2}{2X} \|g'''\| \sum_{\delta < x - \frac{k}{n}} (nx - k) p_{n,k}(x) \end{aligned}$$

olur.

$$\sum_{\delta < x - \frac{k}{n}} (nx - k)p_{n,k}(x) = \sum_{\frac{k}{n} - x < -\delta} (k - nx)p_{n,k}(x)$$

olduğundan

$$|B_{1,n}g| \leq \frac{x^2}{2X} \|g'''\| \sum_{\frac{k}{n} - x < -\delta} (k - nx)p_{n,k}(x) \quad (4.19)$$

elde edilir. Benzer şekilde, $B_{2,n}g$

$$\begin{aligned} |B_{2,n}g| &\leq \frac{n+1}{2X} \sum_{0 \leq x - \frac{k}{n} \leq \delta} |k - nx| p_{n,k}(x) \int_{\frac{k}{n}}^x \left| \int_x^t (t-v)^2 g'''(v) dv \right| p_{n,k}(t) dt \\ &\leq \frac{n+1}{2X} \sum_{0 \leq x - \frac{k}{n} \leq \delta} |k - nx| p_{n,k}(x) \int_{\frac{k}{n}}^x \left| \int_x^t (t-v)^2 |g'''(v)| dv \right| p_{n,k}(t) dt \\ &= \frac{n+1}{2X} \sum_{x - \frac{k}{n} \leq \delta} (nx - k) p_{n,k}(x) \int_{\frac{k}{n}}^x \left[\int_t^x (t-v)^2 |g'''(v)| dv \right] p_{n,k}(t) dt \\ &\leq \frac{n+1}{2X} \sum_{x - \frac{k}{n} \leq \delta} (nx - k) p_{n,k}(x) \int_{\frac{k}{n}}^x (t-x)^2 \left[\int_t^x |g'''(v)| dv \right] p_{n,k}(t) dt \\ &\leq \frac{n+1}{2X} \sum_{x - \frac{k}{n} \leq \delta} (nx - k) p_{n,k}(x) \left(\frac{k}{n} - x \right)^2 \int_{\frac{k}{n}}^x \left[\int_t^x |g'''(v)| dv \right] p_{n,k}(t) dt \\ &\leq \frac{n+1}{2X} \sum_{x - \frac{k}{n} \leq \delta} (nx - k) p_{n,k}(x) \left(\frac{k}{n} - x \right)^2 \int_{\frac{k}{n}}^x \left[\int_0^1 |g'''(v)| dv \right] p_{n,k}(t) dt \\ &\leq \frac{n+1}{2X} \|g'''\| \sum_{x - \frac{k}{n} \leq \delta} (nx - k) p_{n,k}(x) \frac{(k - nx)^2}{n^2} \int_{\frac{k}{n}}^x p_{n,k}(t) dt \\ &\leq \frac{\|g'''\|}{2n^2 X} \sum_{k=0}^n |k - nx| p_{n,k}^{\frac{1}{2}}(x) (k - nx)^2 p_{n,k}^{\frac{1}{2}}(x) \end{aligned}$$

olarak hesaplanır. Burada Hölder eşitsizliği ve (4.6) göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned}
|B_{2,n}g| &\leq \frac{\|g'''\|}{2n^2X} \left(\sum_{k=0}^n (k-nx)^2 p_{n,k}(x) \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=0}^n (k-nx)^4 p_{n,k}(x) \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \frac{\|g'''\|}{2n^2X} (T_{2,n}(x))^{\frac{1}{2}} (T_{4,n}(x))^{\frac{1}{2}} \\
&= \frac{\|g'''\|}{2n^2X} (nX)^{\frac{1}{2}} (3(nX)^2 + (1-6X)nX)^{\frac{1}{2}} \\
&= \frac{\|g'''\|}{2n} (3nX + 1 - 6X)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

bulunur. $B_{2,n}g$ 'nin normunu alınırsa

$$\|B_{2,n}g\| \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \|g'''\| \quad (4.20)$$

eşitsizliği elde edilir. Şimdi (4.6) yardımıyla $B_{5,n}g$ 'yi hesaplayalım.

$$\begin{aligned}
|B_{5,n}g| &\leq \frac{n+1}{2X} \sum_{0 < \frac{k}{n} - x \leq \delta} |k-nx| p_{n,k}(x) \int_x^{\frac{k}{n}} \left| \int_x^t (t-v)^2 g'''(v) dv \right| p_{n,k}(t) dt \\
&\leq \frac{n+1}{2X} \sum_{0 < \frac{k}{n} - x \leq \delta} (k-nx) p_{n,k}(x) \int_x^{\frac{k}{n}} \left[\int_x^t (t-v)^2 |g'''(v)| dv \right] p_{n,k}(t) dt \\
&\leq \frac{n+1}{2X} \sum_{\frac{k}{n} - x \leq \delta} (k-nx) p_{n,k}(x) \left(\frac{k}{n} - x \right)^2 \int_x^{\frac{k}{n}} \left[\int_x^t |g'''(v)| dv \right] p_{n,k}(t) dt \\
&\leq \frac{\|g'''\|}{2n^2X} \sum_{k=0}^n |k-nx|^3 p_{n,k}(x).
\end{aligned}$$

Böylece $B_{2,n}g$ deki gibi benzer işlemlerle

$$\|B_{5,n}g\| \leq \frac{\|g'''\|}{2n} (3nX + 1 - 6X)^{\frac{1}{2}}$$

elde edilir. Normunu alırsak

$$\|B_{5,n}g\| \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \|g'''\|. \quad (4.21)$$

Son olarak $B_{6,n}g$ 'yi (4.6) yardımıyla hesaplayalım.

$$\begin{aligned}
|B_{6,n}g| &\leq \frac{n+1}{2X} \sum_{\delta < \frac{k}{n}-x \leq 1-x} |k-nx| p_{n,k}(x) \int_{\frac{k}{n}}^1 \left| \int_x^t (t-v)^2 g'''(v) dv \right| p_{n,k}(t) dt \\
&\leq \frac{n+1}{2X} \sum_{\delta < \frac{k}{n}-x \leq 1-x} |k-nx| p_{n,k}(x) \int_{\frac{k}{n}}^1 \left| \int_x^t (t-v)^2 |g'''(v)| dv \right| p_{n,k}(t) dt \\
&\leq \frac{n+1}{2X} \sum_{\delta < \frac{k}{n}-x} (k-nx) p_{n,k}(x) \int_{\frac{k}{n}}^1 (t-x)^2 \left[\int_x^t |g'''(v)| dv \right] p_{n,k}(t) dt \\
&\leq \frac{n+1}{2X} \sum_{\delta < \frac{k}{n}-x} (k-nx) p_{n,k}(x) (1-x)^2 \int_{\frac{k}{n}}^1 \left[\int_0^1 |g'''(v)| dv \right] p_{n,k}(t) dt \\
&\leq \frac{(1-x)^2}{2X} \|g'''\| \sum_{\delta < \frac{k}{n}-x} (k-nx) p_{n,k}(x)
\end{aligned} \tag{4.22}$$

olarak hesaplanır. (4.19) ve (4.22) nin toplanması ile

$$\begin{aligned}
|B_{1,n}g| + |B_{6,n}g| &\leq \frac{x^2 + (1-x)^2}{2X} \|g'''\| \sum_{|\frac{k}{n}-x| > \delta} (k-nx) p_{n,k}(x) \\
&\leq \frac{x^2 + (1-x)^2}{2X} \|g'''\| n \sum_{|\frac{k}{n}-x| > \delta} \left(\frac{k}{n} - x \right) \frac{(\frac{k}{n} - x)^2}{\delta^2} p_{n,k}(x) \\
&= \frac{x^2 + (1-x)^2}{2X} \|g'''\| \frac{n}{\delta^2} \sum_{|\frac{k}{n}-x| > \delta} \left(\frac{k}{n} - x \right)^3 p_{n,k}(x) \\
&\leq \frac{x^2 + (1-x)^2}{2X} \|g'''\| \frac{n}{\delta^2} \left[\frac{1}{n^3} T_{3,n}(x) \right] \\
&\leq \frac{1}{n\delta^2} \|g'''\|
\end{aligned} \tag{4.23}$$

elde edilir. (4.23)'ten

$$\|B_{1,n}g\| + \|B_{6,n}g\| \leq \frac{1}{n\delta^2} \|g'''\| \tag{4.24}$$

bulunur. Burada (4.20), (4.21) ve (4.24) eşitsizlikleri (4.16) da yerine yazılırsa

$$\|R_n g\| \leq 2 \left(\frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n\delta^2} \right) \|g'''\| \leq \frac{6}{\delta^2 \sqrt{n}} \|g'''\|$$

elde edilir. Yukarıdaki eşitsizlik (4.15) kullanılırsa

$$\|(D_n g)' - g'\| \leq \frac{2}{n+2} \|g'\| + \frac{2}{n+2} \|g''\| + \frac{6}{\delta^2 \sqrt{n}} \|g'''\|$$

bulunur. $C > 1$ olmak üzere Stein's eşitsizliğinden (Trigub ve Belinsky 2004),

$$\begin{aligned}\|g''(x)\|_{L_1(0,1)} &\leq C \sqrt{\|g'\|_{L_1(0,1)} \|g''\|_{L_1(0,1)}} \\ &\leq C \left(\|g'\|_{L_1(0,1)} + \|g''\|_{L_1(0,1)} \right)\end{aligned}$$

elde edilir. $\frac{1}{n+2} < \frac{1}{\sqrt{n}}$ olduğundan

$$\|(D_n g)' - g'\| \leq \frac{6(C+1)}{\delta^2} \frac{1}{\sqrt{n}} (\|g'\| + \|g''\|)$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur. ■

5. APPELL POLİNOMLARI KULLANILARAK İNŞA EDİLEN KANTOROVİCH TİPİ SZÁSZ-MİRAKYAN OPERATÖRÜ

Tanım 5.1 f fonksiyonu $[0, \infty)$ sınırsız aralığında tanımlı, reel değerli, sürekli bir fonksiyon olmak üzere,

$$S_n(f, x) = e^{-nx} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(nx)^k}{k!} f\left(\frac{k}{n}\right), \quad x \in [0, \infty), \quad n \in \mathbb{N}$$

şeklinde tanımlanan lineer pozitif operatörlere Szász-Mirakyan operatörleri denir.

Tanım 5.2 f fonksiyonu $[0, \infty)$ sınırsız aralığında tanımlı, reel değerli, sürekli bir fonksiyon olmak üzere,

$$K_n(f, x) = ne^{-nx} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(nx)^k}{k!} \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t) dt, \quad x \in [0, \infty), \quad n \in \mathbb{N}$$

şeklinde tanımlanan lineer pozitif operatörlere Szász-Mirakyan Kantorovich operatörleri denir. (V.Totik)

Teorem 5.1 $\{p_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$ bir polinomlar dizisi olsun.

a) $\{p_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$ bir Appell polinomları dizisidir.

b) Appell polinomlarının doğrucu fonksiyonu

$$A(t)e^{xt} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{p_k(x)}{k!} t^k \quad (5.1)$$

şeklindedir. Burada $A(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k!} t^k$ olmak üzere $|t| < R$ ($R > 1$) aralığında tanımlanan kuvvet serileridir.

c) $a_0 \neq 0$ olmak üzere $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$ için

$$p_k(x) = \sum_{r=0}^k \binom{k}{r} a_{k-r} x^r \quad (5.2)$$

eşitliği sağlanır.

d) Her $k \geq 1$ için

$$p'_k(x) = kp_{k-1}(x) \quad (5.3)$$

bağıntısı geçerlidir.

Yukarıda verilen şartlar altında, Varma aşağıdaki lineer pozitif operatör tanımlamaktadır:

$$(K_n f)(x) = n \frac{e^{-nx}}{A(t)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{p_k(x)}{k!} \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(s) ds. \quad (5.4)$$

$t = 1$ için, $x \in [0, \infty)$ için (5.4) operatörü

$$(K_n^* f)(x) = n \frac{e^{-nx}}{A(1)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{p_k(x)}{k!} \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(s) ds \quad (5.5)$$

şeklini alır. (Bardaro vd. 2003) çalışmasında olduğu gibi (5.5) operatörü için toplam momenti

$$T_{r,n}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} [k - nx]^r G_k(nx)$$

şeklinde tanımlayalım. Burada

$$G_k(nx) = \frac{e^{-nx}}{A(1)} \frac{p_k(x)}{k!}$$

dir.

Lemma 5.1

$$T_{r,n}(x) = \begin{cases} 1 & , r = 0 \\ \frac{A'(1)}{A(1)} & , r = 1 \\ \frac{A''(1)}{A(1)} + \frac{A'(1)}{A(1)} + nx & , r = 2 \\ \frac{A^{(4)}(1)}{A(1)} + 3 \frac{A''(1)}{A(1)} + (3nx + 1) \frac{A'(1)}{A(1)} + nx & , r = 3 \\ \frac{A^{(4)}(1)}{A(1)} + 6 \frac{A'''(1)}{A(1)} + (6nx + 7) \frac{A''(1)}{A(1)} & , r = 4. \\ + (10nx - 1) \frac{A'(1)}{A(1)} + 12(nx)^3 - 15(nx)^2 + nx \end{cases} \quad (5.6)$$

İspat. (5.1) denkleminde $t = 1$ ve x yerine nx alınırsa

$$A(1)e^{nx} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{p_k(nx)}{k!}$$

elde edilir. (5.6) denkleminde $r = 0$ için,

$$T_{0,n}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{-nx}}{A(1)} \frac{p_k(nx)}{k!} = 1$$

sağlanır. (5.1) denkleminin t ye göre türevi alınır, $t = 1$ ve x yerine nx alınırsa

$$A'(1)e^{nx} + nx A(1)e^{nx} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{p_k(nx)}{(k-1)!} \quad (5.7)$$

olur. (5.6) denkleminde $r = 1$ için,

$$\begin{aligned} T_{1,n}(x) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{p_k(nx)}{(k-1)!} \frac{e^{-nx}}{A(1)} - nx \sum_{k=0}^{\infty} \frac{p_k(nx)}{k!} \frac{e^{-nx}}{A(1)} \\ &= \frac{A'(1)}{A(1)} + nx - nx = \frac{A'(1)}{A(1)} \end{aligned}$$

sağlanır. (5.1) denkleminin t ye göre iki kere türevi alınır

$$[A''(t) + 2xA'(t) + x^2 A(t)]e^{nt} = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{p_k(x)}{(k-2)!} \quad (5.8)$$

elde edilir. (5.8) eşitliğinde $t = 1$ ve x yerine nx yazılırsa,

$$[A''(1) + 2nx A'(1) + (nx)^2 A(1)]e^{nx} = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{p_k(nx)}{(k-2)!}$$

bulunur. (5.6) denkleminde $r = 2$ alınır , (5.7) denklemini kullanılarak gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$\begin{aligned} T_{2,n}(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} (k - nx)^2 \frac{p_k(nx)}{k!} \frac{e^{-nx}}{A(1)} \\ &= \sum_{k=2}^{\infty} \frac{p_k(nx)}{(k-2)!} \frac{e^{-nx}}{A(1)} + (1 - 2nx) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{p_k(nx)}{(k-1)!} \frac{e^{-nx}}{A(1)} + (nx)^2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{p_k(nx)}{k!} \frac{e^{-nx}}{A(1)} \\ &= \frac{A''(1)}{A(1)} + \frac{A'(1)}{A(1)} + nx \end{aligned}$$

elde edilir. Yine (5.1) denkleminin t ye göre üç kez türevi alınır

$$[A'''(t) + 3xA''(t) + 3x^2 A'(t) + x^3 A(t)]e^{nt} = \sum_{k=3}^{\infty} \frac{p_k(x)}{(k-3)!} \quad (5.9)$$

elde edilir. (5.9) eşitliğinde $t = 1$ ve x yerine nx yazılırsa,

$$[A'''(1) + 3nx A''(1) + 3(nx)^2 A'(1) + (nx)^3 A(1)]e^{nx} = \sum_{k=3}^{\infty} \frac{p_k(nx)}{(k-3)!}$$

olur. (5.6) denkleminde $r = 3$ alınıp (5.8) ve (5.9) denklemleri kullanılarak gerekli

düzenlemeler yapılırsa,

$$\begin{aligned}
T_{3,n}(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} (k-nx)^3 \frac{p_k(nx)}{k!} \frac{e^{-nx}}{A(1)} \\
&= \sum_{k=3}^{\infty} \frac{p_k(nx)}{(k-3)!} \frac{e^{-nx}}{A(1)} + (3-3nx) \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \frac{p_k(nx)}{k!} \frac{e^{-nx}}{A(1)} + \\
&\quad + (3(nx)^2 - 2) \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{p_k(nx)}{k!} \frac{e^{-nx}}{A(1)} - (nx)^3 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{p_k(nx)}{k!} \frac{e^{-nx}}{A(1)} \\
&= \frac{A'''(1)}{A(1)} + 3 \frac{A''(1)}{A(1)} + (3nx+1) \frac{A'(1)}{A(1)} + nx
\end{aligned}$$

olur. Son kez (5.1) denkleminin t ye göre dört kez türevi alınırsa

$$[A^{(4)}(t) + 4xA'''(t) + 6x^2A''(t) + 4x^3A'(t) + x^4A(t)]e^{nt} = \sum_{k=4}^{\infty} \frac{p_k(x)}{(k-4)!} \quad (5.10)$$

elde edilir. (5.10) eşitliğinde $t = 1$ ve x yerine nx yazılırsa,

$$[A^{(4)}(1) + 4nx A'''(1) + 6(nx)^2 A''(1) + 4(nx)^3 A'(1) + (nx)^4 A(1)]e^{nx} = \sum_{k=4}^{\infty} \frac{p_k(nx)}{(k-4)!}$$

sağlanır. (5.6) denkleminde $r = 4$ alınır ve (5.8), (5.9) ve (5.10) denklemleri kullanılarak gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$\begin{aligned}
T_{4,n}(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} (k-nx)^4 \frac{p_k(nx)}{k!} \frac{e^{-nx}}{A(1)} \\
&= \sum_{k=4}^{\infty} \frac{p_k(nx)}{(k-4)!} \frac{e^{-nx}}{A(1)} + (6-4nx) \sum_{k=0}^{\infty} k^3 \frac{p_k(nx)}{k!} \frac{e^{-nx}}{A(1)} + \\
&\quad (6(nx)^2 - 11) \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \frac{p_k(nx)}{k!} \frac{e^{-nx}}{A(1)} + (6-4(nx)^3) \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{p_k(nx)}{k!} \frac{e^{-nx}}{A(1)} + \\
&\quad + (nx)^4 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{p_k(nx)}{k!} \frac{e^{-nx}}{A(1)} \\
&= \frac{A^{(4)}(1)}{A(1)} + 6 \frac{A'''(1)}{A(1)} + (6nx+7) \frac{A''(1)}{A(1)} + (10nx-1) \frac{A'(1)}{A(1)} + 12(nx)^3 \\
&\quad + 15(nx)^2 + nx
\end{aligned}$$

elde edilir. İspat tamamlanmış olur. ■

5.1 Varyasyon Yarı Normunda Yakınsama

Bu bölümde (K_n^*) operatörünün varyasyon azaltıcı özelliği incelenecektir.

Teorem 5.2 Eğer $f \in TV[0, \infty)$ ise

$$V_{[0, \infty)}[K_n^* f] \leq V_{[0, \infty)}[f] \quad (5.11)$$

ve

$$\|K_n^* f\|_{BV[0, \infty)} \leq 2 \|f\|_{BV[0, \infty)} \quad (5.12)$$

eşitsizlikleri sağlanır.

İspat. K_n^* operatörünü aşağıdaki gibi yazalım:

$$(K_n^* f)(x) = \frac{e^{-nx}}{A(t)} \frac{p_k(nx)}{k!} F_{k,n}. \quad (5.13)$$

Burada

$$F_{k,n} := n \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(s) ds = \int_0^1 f\left(\frac{v+k}{n}\right) dv$$

dır. (5.13) ün türevi alınırsa

$$\begin{aligned} (K_n^* f)'(x) &= \frac{-ne^{-nx}}{A(t)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{P_k(nx)}{k!} F_{k,n} + \frac{e^{-nx}}{A(t)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{P'_k(nx)}{k!} F_{k,n} \\ &= \frac{-ne^{-nx}}{A(t)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{P_k(nx)}{k!} F_{k,n} + \frac{ne^{-nx}}{A(t)} \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{P_{k-1}(nx)}{k!} F_{k,n} \\ &= \frac{-ne^{-nx}}{A(t)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{P_k(nx)}{k!} F_{k,n} + \frac{ne^{-nx}}{A(t)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{P_k(nx)}{k!} F_{k+1,n} \\ &= \frac{ne^{-nx}}{A(t)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{P_k(nx)}{k!} [F_{k+1,n} - F_{k,n}] \\ &= \frac{ne^{-nx}}{A(t)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{P_k(nx)}{k!} \triangle F_{k,n} \end{aligned} \quad (5.14)$$

elde edilir. (5.14) eşitliği ve Tanım 3.4 göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned} \|K_n^* f\|_{TV[0, \infty)} &= V_{[0, \infty)}[K_n^* f] = \int_0^{\infty} |(K_n^* f)'| dx \\ &= \int_0^{\infty} \left| \frac{ne^{-nx}}{A(t)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{P_k(nx)}{k!} \triangle F_{k,n} \right| dx \\ &= \int_0^{\infty} \left| \frac{n}{A(t)} \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^m \triangle F_{k,n} e^{-nx} \frac{P_k(nx)}{k!} \right| dx \\ &\leq \frac{n}{A(t)} \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^m |\triangle F_{k,n}| \int_0^{\infty} e^{-nx} \frac{P_k(nx)}{k!} dx \end{aligned} \quad (5.15)$$

olur. Burada

$$\begin{aligned} \frac{n}{A(t)} \int_0^\infty e^{-nx} \frac{P_k(nx)}{k!} dx &= \frac{n}{A(t)} \int_0^\infty e^{-nx} \sum_{r=0}^k \frac{a_r}{k!} \binom{k}{r} (nx)^{k-r} dx \\ &= \frac{n}{A(t)} \sum_{r=0}^k \binom{k}{r} \frac{a_r}{k!} \int_0^\infty e^{-nx} (nx)^{k-r} dx \end{aligned}$$

dir. Bu eşitlikte Gamma fonksiyonunun tanımı dikkate alınır, integral hesaplanırsa

$$\begin{aligned} &= \frac{n}{A(t)} \sum_{r=0}^k \frac{k!}{k!(k-r)!} a_r \frac{(k-r)!}{n} \\ &= 1 \end{aligned}$$

elde edilir. Bu değer (5.15) eşitsizliğinde yerine yazılırsa

$$\|K_n^* f\|_{TV[0,\infty)} \leq \sum_{k=0}^{\infty} |\Delta F_{k,n}|$$

bulunur. $0 \leq k \leq n$ olmak üzere $v_k = (v + k)/n$, $v_{-1} = 0$ ve $v_{n+1} = 1$ olacak şekilde tanımlanmıştır. (Bardaro vd. 2003).

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} |\Delta F_{k,n}| &= \sum_{k=0}^{\infty} |F_{k+1,n} - F_{k,n}| = \sum_{k=0}^{\infty} \left| \int_0^1 (f(v_{k+1}) - f(v_k)) dv \right| \\ &\leq \int_0^1 \sum_{k=-1}^{\infty} |f(v_{k+1}) - f(v_k)| dv \\ &\leq V_{[0,\infty)}[f] \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Bu ise (5.11)'i ispatlar.

$$(K_n^* f)(0) = n \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(s) ds$$

ve

$$\|f\|_{BV[0,\infty)} := V_{[0,\infty)}[f] + |f(0)|,$$

olup bu eşitsizliğin her iki tarafına (K_n^*f) operatörü uygulanırsa

$$\begin{aligned}
\|K_n^*f\|_{BV[0,\infty)} &= V_{[0,\infty)}[K_n^*f] + [K_n^*f(0)] \\
&\leq V_{[0,\infty)}[f] + |K_n^*f(0)| \\
&\leq V_{[0,\infty)}[f] + |K_n^*f(0) - f(0)| + |f(0)| \\
&= \|f\|_{BV[0,\infty)} + \left| n \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} (f(s) - f(0)) ds \right| \\
&\leq \|f\|_{BV[0,\infty)} + n \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} |(f(s) - f(0))| ds \\
&\leq \|f\|_{BV[0,\infty)} + V_{[0,\infty)}[f] \\
&\leq 2 \|f\|_{BV[0,\infty)}
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu ise ispatı tamamlar. ■

5.2 TV-Normda Yakınsama Hızı

Bu bölümde, K_n^*g operatörünün g ye yaklaşım hızı varyasyon yarı normu üzerinde incelenmektedir.

Teorem 5.3 $g'' \in AC[0, \infty)$ olsun. $C > 1$ sabit olmak üzere

$$V_{[0,\infty)}[K_n^*g - g] \leq \frac{C}{n} \{V_{[0,\infty)}[g] + V_{[0,\infty)}[g'']\} \quad (5.16)$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat. g fonksiyonu için integral kalan terimli Taylor formülü yardımıyla

$$g(t) = g(x) + (t-x)g'(x) + (t-x)^2 \frac{g''(x)}{2} + \frac{1}{2} \int_x^t (t-v)^2 g'''(v) dv \quad (5.17)$$

yazılabilir. K_n^*g operatörü (5.17) nin her iki tarafına uygulanırsa,

$$(K_n^*g)'(x) = A_{0,n}(x)g(x) + A_{1,n}(x)g'(x) + A_{2,n}(x)g''(x) + (R_n g)(x) \quad (5.18)$$

elde edilir. Burada $A_{j,n}$ ($j = 0, 1, 2$)

$$A_{j,n}(x) = n \frac{e^{-nx}}{A(1)j!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{p_k(nx)}{k!} \int_0^1 \left[\left(\frac{v+k+1}{n} - x \right)^j - \left(\frac{v+k}{n} - x \right)^j \right] dv \quad (5.19)$$

ve kalan terim $(R_n g) = (R_{n,1} g) - (R_{n,2} g)$. Burada,

$$(R_{n,1} g)(x) = n \frac{e^{-nx}}{2A(1)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{p_k(nx)}{k!} \int_0^1 \left[\int_x^{\frac{v+k+1}{n}} \left(\frac{v+k+1}{n} - u \right)^2 g'''(u) du \right] dv \quad (5.20)$$

$$(R_{n,2} g)(x) = n \frac{e^{-nx}}{2A(1)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{p_k(nx)}{k!} \int_0^1 \left[\int_x^{\frac{v+k}{n}} \left(\frac{v+k}{n} - u \right)^2 g'''(u) du \right] dv \quad (5.21)$$

dir. (5.6) ve (5.19) kullanılarak aşağıdaki eşitlikler elde edilir.

$$A_{0,n}(x) = 0$$

$$\begin{aligned} A_{1,n}(x) &= n \frac{e^{-nx}}{A(1)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{p_k(nx)}{k!} \int_0^1 \left[\left(\frac{v+k+1}{n} - x \right) - \left(\frac{v+k}{n} - x \right) \right] dv \\ &= n \frac{e^{-nx}}{A(1)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{p_k(nx)}{k!} \frac{1}{n} \\ &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_{2,n}(x) &= n \frac{e^{-nx}}{2A(1)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{p_k(nx)}{k!} \int_0^1 \left[\left(\frac{v+k+1}{n} - x \right)^2 - \left(\frac{v+k}{n} - x \right)^2 \right] dv \\ &= 2n \frac{e^{-nx}}{2A(1)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{p_k(nx)}{k!} \frac{(k - nx + 1)}{n^2} \\ &= \frac{e^{-nx}}{nA(1)} \sum_{k=0}^{\infty} (k - nx) \frac{p_k(nx)}{k!} + \frac{e^{-nx}}{nA(1)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{p_k(nx)}{k!} \\ &= \frac{e^{-nx}}{nA(1)} [T_{1,n}(x) + T_{2,n}(x)] \\ &= \frac{1}{n} + \frac{A'(1)}{A(1)}. \end{aligned}$$

Bu eşitlikler (5.18) denkleminde yerine yazılırsa

$$(K_n^* g)' = g'(x) + \left[\frac{1}{n} + \frac{A'(1)}{A(1)} \right] g''(x) + (R_n g)(x) \quad (5.22)$$

elde edilir. $(R_n g) = (R_{n,1} g) - (R_{n,2} g)$ kalanını 4 parçaya ayırılım.

$$(R_n g)(x) = [(R_{n,1.1} g)(x) + (R_{n,1.2} g)(x)] - [(R_{n,2.1} g)(x) + (R_{n,2.2} g)(x)] \quad (5.23)$$

Burada

$$(R_{n,1.1}g)(x) = n \frac{e^{-nx}}{2A(1)} \sum_{\left| \frac{v+k+1}{n} - x \right| \leq \delta}^{\infty} \frac{p_k(nx)}{k!} \int_0^1 \left[\int_x^{\frac{v+k+1}{n}} \left(\frac{v+k+1}{n} - u \right)^2 g'''(u) du \right] dv$$

$$(R_{n,1.2}g)(x) = n \frac{e^{-nx}}{2A(1)} \sum_{\left| \frac{v+k+1}{n} - x \right| > \delta}^{\infty} \frac{p_k(nx)}{k!} \int_0^1 \left[\int_x^{\frac{v+k+1}{n}} \left(\frac{v+k+1}{n} - u \right)^2 g'''(u) du \right] dv$$

$$(R_{n,2.1}g)(x) = n \frac{e^{-nx}}{2A(1)} \sum_{\left| \frac{v+k}{n} - x \right| \leq \delta}^{\infty} \frac{p_k(nx)}{k!} \int_0^1 \left[\int_x^{\frac{v+k}{n}} \left(\frac{v+k}{n} - u \right)^2 g'''(u) du \right] dv$$

ve

$$(R_{n,2.2}g)(x) = n \frac{e^{-nx}}{2A(1)} \sum_{\left| \frac{v+k}{n} - x \right| > \delta}^{\infty} \frac{p_k(nx)}{k!} \int_0^1 \left[\int_x^{\frac{v+k}{n}} \left(\frac{v+k}{n} - u \right)^2 g'''(u) du \right] dv$$

dir. $(R_{n,1}g)$ kalamının içindeki integrasyon bölgesini hesaplamak için toplamı farklı parçalara aşağıdaki gibi ayıralım.

$$(R_{n,1.1}g)(x) = M_{2,n}g + M_{5,n}g \quad \text{ve} \quad (R_{n,1.2}g)(x) = M_{1,n}g + M_{3,n}g + M_{4,n}g + M_{6,n}g.$$

$M_{j,n}g$ ($j = 1, 2, \dots, 6$) olmak üzere aşağıdaki şekilde 6 parçaya ayıralım.

$$M_{1,n}g = n \frac{e^{-nx}}{2A(1)} \sum_{\delta < x - \frac{v+k+1}{n} \leq x}^{\infty} \frac{p_k(nx)}{k!} \int_0^1 \left[\int_x^{\frac{v+k+1}{n}} \left(\frac{v+k+1}{n} - u \right)^2 g'''(u) du \right] dv$$

$$M_{2,n}g = n \frac{e^{-nx}}{2A(1)} \sum_{0 < x - \frac{v+k+1}{n} \leq \delta}^{\infty} \frac{p_k(nx)}{k!} \int_{\frac{v+k+1}{n}}^x \left[\int_x^{\frac{v+k+1}{n}} \left(\frac{v+k+1}{n} - u \right)^2 g'''(u) du \right] dv$$

$$M_{3,n}g = n \frac{e^{-nx}}{2A(1)} \sum_{\delta < x - \frac{v+k+1}{n} \leq x}^{\infty} \frac{p_k(nx)}{k!} \int_0^1 \left[\int_x^{\frac{v+k+1}{n}} \left(\frac{v+k+1}{n} - u \right)^2 g'''(u) du \right] dv$$

$$M_{4,n}g = n \frac{e^{-nx}}{2A(1)} \sum_{\delta < \frac{v+k+1}{n} - x \leq 1-x}^{\infty} \frac{p_k(nx)}{k!} \int_0^1 \left[\int_x^{\frac{v+k+1}{n}} \left(\frac{v+k+1}{n} - u \right)^2 g'''(u) du \right] dv$$

$$M_{5,n}g = n \frac{e^{-nx}}{2A(1)} \sum_{0 < \frac{v+k+1}{n} - x \leq \delta}^{\infty} \frac{p_k(nx)}{k!} \int_x^{\frac{v+k+1}{n}} \left[\int_x^{\frac{v+k+1}{n}} \left(\frac{v+k+1}{n} - u \right)^2 g'''(u) du \right] dv$$

$$M_{6,n}g = n \frac{e^{-nx}}{2A(1)} \sum_{\delta < \frac{v+k+1}{n} - x \leq 1-x}^{\infty} \frac{p_k(nx)}{k!} \int_{\frac{v+k+1}{n}}^1 \left[\int_x^{\frac{v+k+1}{n}} \left(\frac{v+k+1}{n} - u \right)^2 g'''(u) du \right] dv$$

Burada $M_{1,n}g + M_{2,n}g = -M_{4,n}g$ ve $M_{5,n}g + M_{6,n}g = -M_{3,n}g$ olduğu görülür.

Böylece

$$|M_{1,n}g + M_{2,n}g| = |-M_{4,n}g| \leq |M_{1,n}g| + |M_{2,n}g|$$

$$|M_{5,n}g + M_{6,n}g| = |-M_{3,n}g| \leq |M_{5,n}g| + |M_{6,n}g|$$

elde edilir. Buradan

$$|(R_{n,1}g)(x)| \leq 2 (|M_{1,n}g| + |M_{2,n}g| + |M_{5,n}g| + |M_{6,n}g|)$$

dir.

Şimdi $M_{j,n}g$ yi sırasıyla $i = 1, 2, 5$ ve 6 için hesaplayalım. $M_{1,n}g$ L_1 -normunda hesaplanırsa

$$\begin{aligned} \|M_{1,n}g\| &\leq \int_0^{\infty} n \frac{e^{-nx}}{2A(1)} \sum_{\delta < x - \frac{v+k+1}{n} \leq x}^{\infty} \frac{p_k(nx)}{k!} \int_0^{\frac{v+k+1}{n}} \left| \int_x^{\frac{v+k+1}{n}} \left(\frac{v+k+1}{n} - u \right)^2 g'''(u) du \right| dv \\ &\leq \int_0^{\infty} n \frac{e^{-nx}}{2A(1)} \sum_{\delta < x - \frac{v+k+1}{n} \leq x}^{\infty} \frac{p_k(nx)}{k!} \int_0^{\frac{v+k+1}{n}} \left(\frac{v+k+1}{n} - x \right)^2 \left[\int_x^{\frac{v+k+1}{n}} |g'''(u)| du \right] dv \\ &\leq \int_0^{\infty} n \frac{e^{-nx}}{2A(1)} \sum_{\delta < x - \frac{v+k+1}{n} \leq x}^{\infty} \frac{p_k(nx)}{k!} \int_0^1 \left(\frac{v+k+1}{n} - x \right)^2 \left[\int_x^{\frac{v+k+1}{n}} |g'''(u)| du \right] dv \\ &\leq \int_0^{\infty} n \frac{e^{-nx}}{2A(1)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{p_k(nx)}{k!} \left[\frac{3(k-nx)^2 + 9(k-nx) + 7}{3n^2} \right] \left[\int_x^{\frac{v+k+1}{n}} |g'''(u)| du \right] \end{aligned}$$

olur. Burada

$$\frac{e^{-nx}}{2A(1)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{p_k(nx)}{k!} [3(k-nx)^2 + 9(k-nx) + 7] = \left[\frac{3A''(1)}{A(1)} + \frac{12A'(1)}{A(1)} + 3nx + 7 \right]$$

olup $\frac{3A''(1)}{A(1)} + \frac{12A'(1)}{A(1)} + 3nx \leq 3nx + K$ ($K > 0$) elde edilir. Böylece

$$\|M_{1,n}g\| \leq \frac{1}{6n} \int_0^{\infty} (3nx + K) dx \int_x^{\frac{v+k+1}{n}} |g'''(u)| du$$

eşitsizliği sağlanır. Totik'in (1983) sunulan yaklaşıma dayanarak S_n^* tipi operatörler için aşağıdaki sonuç elde edilmiştir. $f \in L^1(0, \infty)$, $F(u) = \int_0^u f(u) du$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \|S_n^* f - f\|_{L^1(0, \infty)} &= O(n^{-1}) \quad (n \rightarrow \infty) \\ \iff \left\| x \bar{\Delta}_\delta^2 F \right\|_{(TV+L^\infty)[\delta^2, \infty)} &= O(\delta^2) \quad (\delta \rightarrow 0+) \\ \iff f &\in AC_{[0, \infty)} \text{ olup } xf'(x) = \eta(x) \in TV[0, \infty) \text{ ve } \eta(0) = 0 \end{aligned}$$

dir. Sonuç olarak, $O(1/n)$ mertebesi S_n^* operatörleri için en iyi yaklaşım mertebesi olduğunu göstermektedir. Bu sonuç göz önüne alınırsa

$$\|M_{1,n}g\| \leq \frac{1}{6n} \int_0^\infty (3nx + K) dx \int_x^{\frac{v+k+1}{n}} |g'''(u)| du = O(1/n) \quad (5.24)$$

elde edilir. Benzer şekilde, $M_{2,n}g$ kalanını hesaplayalım. $M_{1,n}g$ in ispatındaki gibi

$$\begin{aligned} \|M_{2,n}g\| &\leq \int_0^\infty n \frac{e^{-nx}}{2A(1)} \sum_{0 < x - \frac{v+k+1}{n} \leq \delta} \frac{p_k(nx)}{k!} \int_{\frac{v+k+1}{n}}^x \left| \int_x^{\frac{v+k+1}{n}} \left(\frac{v+k+1}{n} - u \right)^2 g'''(u) du \right| dv \\ &\leq \int_0^\infty n \frac{e^{-nx}}{2A(1)} \sum_{0 < x - \frac{v+k+1}{n} \leq \delta} \frac{p_k(nx)}{k!} \int_{\frac{v+k+1}{n}}^x \left(\frac{v+k+1}{n} - x \right)^2 \left[\int_x^{\frac{v+k+1}{n}} |g'''(u)| du \right] dv \\ &\leq \int_0^\infty n \frac{e^{-nx}}{2A(1)} \sum_{0 < x - \frac{v+k+1}{n} \leq \delta} \frac{p_k(nx)}{k!} \left(\frac{x+k+1}{n} - x \right)^2 \left[\int_x^{\frac{v+k+1}{n}} |g'''(u)| du \right] \\ &\leq \int_0^\infty n \frac{e^{-nx}}{2A(1)} \sum_{k=0}^\infty \frac{p_k(nx)}{k!} \left[\frac{(k-nx)^2 + 2(1+x)(k-nx) + (1+x)^2}{n^2} \right] \end{aligned}$$

dir. Böylece $\frac{A''(1)}{A(1)} + \frac{A'(1)}{A(1)} + nx + 2(1+x)\frac{A'(1)}{A(1)} + (1+x)^2 \leq x^2 + 4x + nx + 5 \leq nx^2 + nx + nx + na$ olup

$$\|M_{2,n}g\| \leq \frac{n}{2n} \int_0^\infty (x^2 + 2x + a) dx \int_x^{\frac{v+k+1}{n}} |g'''(u)| du$$

elde edilir. Benzer şekilde Totik'in sonucu kullanılırsa

$$\|M_{2,n}g\| = O(1/n) \quad (5.25)$$

sağlanır. Şimdi $M_{5,n}g$ i hesaplayalım.

$$\begin{aligned}
\|M_{5,n}g\| &\leq \int_0^\infty n \frac{e^{-nx}}{2A(1)} \sum_{0 < \frac{v+k+1}{n} - x \leq \delta}^\infty \frac{p_k(nx)}{k!} \int_x^{\frac{v+k+1}{n}} \left| \int_x^{\frac{v+k+1}{n}} \left(\frac{v+k+1}{n} - u \right)^2 g'''(u) du \right| dv \\
&\leq \int_0^\infty n \frac{e^{-nx}}{2A(1)} \sum_{0 < \frac{v+k+1}{n} - x \leq \delta}^\infty \frac{p_k(nx)}{k!} \int_x^{\frac{v+k+1}{n}} \left(\frac{v+k+1}{n} - x \right)^2 \left[\int_x^{\frac{v+k+1}{n}} |g'''(u)| du \right] dv \\
&\leq \int_0^\infty n \frac{e^{-nx}}{2A(1)} \sum_{0 < \frac{v+k+1}{n} - x \leq \delta}^\infty \frac{p_k(nx)}{k!} \left(\frac{x+k+1}{n} - x \right)^2 \left[\int_x^{\frac{v+k+1}{n}} |g'''(u)| du \right] \\
&\leq \int_0^\infty n \frac{e^{-nx}}{2A(1)} \sum_{k=0}^\infty \frac{p_k(nx)}{k!} \left[\frac{(k-nx)^2 + 2(1+x)(k-nx) + (1+x)^2}{n^2} \right] \\
&\quad \times \int_x^{\frac{v+k+1}{n}} |g'''(u)| du
\end{aligned}$$

olup

$$\|M_{5,n}g\| \leq \frac{n}{2n} \int_0^\infty (x^2 + 2x + a) dx \int_x^{\frac{v+k+1}{n}} |g'''(u)| du$$

$M_{2,n}g$ kalanındaki gibi benzer şekilde

$$\|M_{5,n}g\| = O(1/n) \quad (5.26)$$

olduğu görülür. Son olarak $M_{6,n}g$ yı hesaplayalım.

$$\begin{aligned}
\|M_{6,n}g\| &\leq \int_0^\infty n \frac{e^{-nx}}{2A(1)} \sum_{\delta < \frac{v+k+1}{n} - x \leq 1-x}^\infty \frac{p_k(nx)}{k!} \int_{\frac{v+k+1}{n}}^1 \left| \int_x^{\frac{v+k+1}{n}} \left(\frac{v+k+1}{n} - u \right)^2 g'''(u) du \right| dv \\
&\leq \int_0^\infty n \frac{e^{-nx}}{2A(1)} \sum_{\delta < \frac{v+k+1}{n} - x \leq 1-x}^\infty \frac{p_k(nx)}{k!} \int_{\frac{v+k+1}{n}}^1 \left(\frac{v+k+1}{n} - x \right)^2 \left[\int_x^{\frac{v+k+1}{n}} |g'''(u)| du \right] dv \\
&\leq \int_0^\infty n \frac{e^{-nx}}{2A(1)} \sum_{\delta < \frac{v+k+1}{n} - x \leq 1-x}^\infty \frac{p_k(nx)}{k!} \int_0^1 \left(\frac{v+k+1}{n} - x \right)^2 \left[\int_x^{\frac{v+k+1}{n}} |g'''(u)| du \right] dv \\
&\leq \int_0^\infty n \frac{e^{-nx}}{2A(1)} \sum_{k=0}^\infty \frac{P_k(nx)}{k!} \left[\frac{3(k-nx)^2 + 9(k-nx) + 1}{3n^2} \right] \int_x^{\frac{v+k+1}{n}} |g'''(u)| du
\end{aligned}$$

sağlanır.

$$\|M_{6,n}g\| \leq \frac{1}{6n} \int_0^\infty (3nx + K) dx \int_x^{\frac{v+k+1}{n}} |g'''(u)| du$$

$M_{1,n}g$ kalanına benzer şekilde

$$\|M_{6,n}g\| = O(1/n) \quad (5.27)$$

elde edilir. (5.24), (5.25), (5.26) ve (5.27) den

$$\|R_{n,1}g\| = 8O(1/n) \quad (5.28)$$

olur. $R_{n,1}g$ nin ispatına benzer şekilde $R_{n,2}g$ aşağıdaki şekilde yazılabilir.

$$(R_{n,2,1}g)(x) = N_{2,n}g + N_{5,n}g \quad \text{ve} \quad (R_{n,2,2}g)(x) = N_{1,n}g + N_{3,n}g + N_{4,n}g + N_{6,n}g$$

$N_{j,n}g$ ($i = 1, \dots, 6$) olmak üzere aşağıdaki şekilde 6 parçaya ayırılım.

$$\begin{aligned} N_{1,n}g &= n \frac{e^{-nx}}{2A(1)} \sum_{\delta < x - \frac{v+k}{n} \leq x} \frac{P_k(nx)}{k!} \int_0^{\frac{v+k}{n}} \left[\int_x^{\frac{v+k}{n}} \left(\frac{v+k}{n} - u \right)^2 g'''(u) du \right] dv \\ N_{2,n}g &= n \frac{e^{-nx}}{2A(1)} \sum_{0 < x - \frac{v+k}{n} \leq \delta} \frac{P_k(nx)}{k!} \int_{\frac{v+k}{n}}^x \left[\int_x^{\frac{v+k}{n}} \left(\frac{v+k}{n} - u \right)^2 g'''(u) du \right] dv \\ N_{3,n}g &= n \frac{e^{-nx}}{2A(1)} \sum_{\delta < x - \frac{v+k}{n} \leq x} \frac{P_k(nx)}{k!} \int_0^x \left[\int_x^{\frac{v+k}{n}} \left(\frac{v+k}{n} - u \right)^2 g'''(u) du \right] dv \\ N_{4,n}g &= n \frac{e^{-nx}}{2A(1)} \sum_{\delta < \frac{v+k}{n} - x \leq 1-x} \frac{P_k(nx)}{k!} \int_0^x \left[\int_x^{\frac{v+k}{n}} \left(\frac{v+k}{n} - u \right)^2 g'''(u) du \right] dv \\ N_{5,n}g &= n \frac{e^{-nx}}{2A(1)} \sum_{0 < \frac{v+k}{n} - x \leq \delta} \frac{P_k(nx)}{k!} \int_x^{\frac{v+k}{n}} \left[\int_x^{\frac{v+k}{n}} \left(\frac{v+k}{n} - u \right)^2 g'''(u) du \right] dv \\ N_{6,n}g &= n \frac{e^{-nx}}{2A(1)} \sum_{\delta < \frac{v+k}{n} - x \leq 1-x} \frac{P_k(nx)}{k!} \int_{\frac{v+k}{n}}^1 \left[\int_x^{\frac{v+k}{n}} \left(\frac{v+k}{n} - u \right)^2 g'''(u) du \right] dv \end{aligned}$$

dir. Burada

$$|(R_{n,2}g)(x)| \leq 2(|N_{1,n}g| + |N_{2,n}g| + |N_{5,n}g| + |N_{6,n}g|)$$

dir. $N_{j,n}g$ yi $R_{n,1}g$ ispatındaki şekliyle sırasıyla $i = 1, 2, 5$ ve 6 için hesaplayalım. $N_{1,n}g$ yi L_1 -normunda hesaplanırsa

$$\begin{aligned}
\|N_{1,n}g\| &\leq \int_0^\infty n \frac{e^{-nx}}{2A(1)} \sum_{\delta < x - \frac{v+k}{n} \leq x} \frac{p_k(nx)}{k!} \int_0^{\frac{v+k}{n}} \left| \int_x^{\frac{v+k}{n}} \left(\frac{v+k}{n} - u \right)^2 g'''(u) du \right| dv \\
&\leq \int_0^\infty n \frac{e^{-nx}}{2A(1)} \sum_{\delta < x - \frac{v+k}{n} \leq x} \frac{p_k(nx)}{k!} \int_0^{\frac{v+k}{n}} \left(\frac{v+k}{n} - x \right)^2 \left[\int_x^{\frac{v+k}{n}} |g'''(u)| du \right] dv \\
&\leq \int_0^\infty n \frac{e^{-nx}}{2A(1)} \sum_{\delta < x - \frac{v+k}{n} \leq x} \frac{p_k(nx)}{k!} \int_0^1 \left(\frac{v+k}{n} - x \right)^2 \left[\int_x^{\frac{v+k}{n}} |g'''(u)| du \right] dv \\
&\leq \int_0^\infty n \frac{e^{-nx}}{2A(1)} \sum_{k=0}^\infty \frac{p_k(nx)}{k!} \left[\frac{3(k-nx)^2 + 3(k-nx) + 1}{3n^2} \right] \left[\int_x^{\frac{v+k}{n}} |g'''(u)| du \right]
\end{aligned}$$

olup $\frac{3A''(1)}{A(1)} + \frac{6A'(1)}{A(1)} + 3nx + 1 \leq 3nx + T$ ($T > 0$) elde edilir. Böylece

$$\|N_{1,n}g\| \leq \frac{1}{6n} \int_0^\infty (3nx + T) dx \int_x^{\frac{v+k}{n}} |g'''(u)| du$$

eşitsizliği sağlanır. Totik'in sonucu kullanırsa

$$\|N_{1,n}g\| = O(1/n) \quad (5.29)$$

elde edilir. Benzer şekilde, $N_{2,n}g$ kalanını hesaplayalım. $N_{1,n}g$ in ispatındaki gibi

$$\begin{aligned}
\|N_{2,n}g\| &\leq \int_0^\infty n \frac{e^{-nx}}{2A(1)} \sum_{0 < x - \frac{v+k}{n} \leq \delta} \frac{p_k(nx)}{k!} \int_{\frac{v+k}{n}}^x \left| \int_x^{\frac{v+k}{n}} \left(\frac{v+k}{n} - u \right)^2 g'''(u) du \right| dv \\
&\leq \int_0^\infty n \frac{e^{-nx}}{2A(1)} \sum_{0 < x - \frac{v+k}{n} \leq \delta} \frac{p_k(nx)}{k!} \int_{\frac{v+k}{n}}^x \left(\frac{v+k}{n} - x \right)^2 \left[\int_x^{\frac{v+k}{n}} |g'''(u)| du \right] dv \\
&\leq \int_0^\infty n \frac{e^{-nx}}{2A(1)} \sum_{0 < x - \frac{v+k}{n} \leq \delta} \frac{p_k(nx)}{k!} \left(\frac{x+k}{n} - x \right)^2 \left[\int_x^{\frac{v+k}{n}} |g'''(u)| du \right] dv \\
&\leq \int_0^\infty n \frac{e^{-nx}}{2A(1)} \sum_{k=0}^\infty \frac{p_k(nx)}{k!} \left[\frac{(k-nx)^2 + 2x(k-nx) + x^2}{n^2} \right]
\end{aligned}$$

dir. Böylece $\frac{A''(1)}{A(1)} + \frac{A'(1)}{A(1)} + nx + 2x \frac{A'(1)}{A(1)} + x^2 \leq x^2 + 2x + nx + 2 \leq nx^2 + nx + nx + nb$ olup

$$\|N_{2,n}g\| \leq \frac{n}{2n} \int_0^\infty (x^2 + 2x + a) dx \int_x^{\frac{v+k+1}{n}} |g'''(u)| du$$

elde edilir. Benzer şekilde Totik'in sonucu kullanılırsa

$$\|N_{2,n}g\| = O(1/n) \quad (5.30)$$

sağlanır. Şimdi benzer şekilde $N_{5,n}g$ yı hesaplayalım

$$\begin{aligned} \|N_{5,n}g\| &\leq \int_0^\infty n \frac{e^{-nx}}{2A(1)} \sum_{0 < \frac{v+k}{n} - x \leq \delta} \frac{p_k(nx)}{k!} \int_x^{\frac{v+k}{n}} \left| \int_x^{\frac{v+k}{n}} \left(\frac{v+k}{n} - u \right)^2 g'''(u) du \right| dv \\ &\leq \int_0^\infty n \frac{e^{-nx}}{2A(1)} \sum_{0 < \frac{v+k}{n} - x \leq \delta} \frac{p_k(nx)}{k!} \int_x^{\frac{v+k}{n}} \left(\frac{v+k}{n} - x \right)^2 \left[\int_x^{\frac{v+k}{n}} |g'''(u)| du \right] dv \\ &\leq \int_0^\infty n \frac{e^{-nx}}{2A(1)} \sum_{0 < \frac{v+k}{n} - x \leq \delta} \frac{p_k(nx)}{k!} \left(\frac{x+k+1}{n} - x \right)^2 \left[\int_x^{\frac{v+k}{n}} |g'''(u)| du \right] \\ &\leq \int_0^\infty n \frac{e^{-nx}}{2A(1)} \sum_{k=0}^\infty \frac{p_k(nx)}{k!} \left[\frac{(k-nx)^2 + 2x(k-nx) + x^2}{n^2} \right] \int_x^{\frac{v+k}{n}} |g'''(u)| du \end{aligned}$$

dur. Böylece

$$\|N_{5,n}g\| \leq \frac{n}{2n} \int_0^\infty (x^2 + 2x + b) dx \int_x^{\frac{v+k}{n}} |g'''(u)| du$$

elde edilir. $N_{2,n}g$ kalanındaki gibi benzer şekilde

$$\|N_{5,n}g\| = O(1/n) \quad (5.31)$$

olduğu görülmüştür. Son olarak $N_{6,n}g$ kalanını hesaplayalım.

$$\begin{aligned}
\|N_{6,n}g\| &\leq \int_0^\infty n \frac{e^{-nx}}{2A(1)} \sum_{\delta < \frac{v+k}{n} - x \leq 1-x} \frac{p_k(nx)}{k!} \int_{\frac{v+k}{n}}^1 \left| \int_x^{\frac{v+k}{n}} \left(\frac{v+k}{n} - u \right)^2 g'''(u) du \right| dv \\
&\leq \int_0^\infty n \frac{e^{-nx}}{2A(1)} \sum_{\delta < \frac{v+k}{n} - x \leq 1-x} \frac{p_k(nx)}{k!} \int_{\frac{v+k}{n}}^1 \left(\frac{v+k}{n} - x \right)^2 \left[\int_x^{\frac{v+k}{n}} |g'''(u)| du \right] dv \\
&\leq \int_0^\infty n \frac{e^{-nx}}{2A(1)} \sum_{\delta < \frac{v+k}{n} - x \leq 1-x} \frac{p_k(nx)}{k!} \int_0^1 \left(\frac{v+k}{n} - x \right)^2 \left[\int_x^{\frac{v+k}{n}} |g'''(u)| du \right] dv \\
&\leq \int_0^\infty n \frac{e^{-nx}}{2A(1)} \sum_{k=0}^\infty \frac{p_k(nx)}{k!} \left[\frac{3(k-nx)^2 + 3(k-nx) + 1}{3n^2} \right] \int_x^{\frac{v+k}{n}} |g'''(u)| du
\end{aligned}$$

sağlanır.

$$\|N_{6,n}g\| \leq \frac{1}{6n} \int_0^\infty (3nx + T) dx \int_x^{\frac{v+k}{n}} |g'''(u)| du$$

ve Totik'in sonucu kullanılarak

$$\|N_{6,n}g\| = O(1/n) \quad (5.32)$$

elde edilir. (5.29), (5.30), (5.31) ve (5.32) den

$$\|R_{n,2}g\| = 8O(1/n)$$

elde edilir. (5.22) de yerine yazılırsa

$$(K_n^*g)'(x) \leq g'(x) + \left[\frac{1}{n} + \frac{A'(1)}{A(1)} \right] g''(x) + O(1/n)$$

elde edilir. Stein's eşitsizliği yardımıyla (Trigub ve Belinsky 2004),

$$\begin{aligned}
\|g''\|_{L_1[0,\infty)} &\leq C \sqrt{\|g'\|_{L_1[0,\infty)} \|g'''\|_{L_1[0,\infty)}} \\
&\leq C \left(\|g'\|_{L_1[0,\infty)} + \|g'''\|_{L_1[0,\infty)} \right)
\end{aligned}$$

$C > 1$ olmak üzere

$$\|(K_n^*g)' - g'\| \leq \frac{C}{n} (\|g'\| + \|g'''\|).$$

Bu da ispatı tamamlar. ■

Teorem 5.4 $f, \mathbb{R}^+$ üzerinde tanımlı sınırlı bir fonksiyon olsun. Eğer f''' türevi, $x \in \mathbb{R}^+$ noktasında mevcutsa, bu durumda

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n[(K_n^* f)'(x) - f'(x)] = \left(1 + \frac{A'(1)}{A(1)}\right) f''(x) + \frac{x}{2} f'''(x)$$

sağlanır.

İspat. Taylor formülü yardımıyla

$$f(v_k) = f(x) + (v_k - x)f'(x) + (v_k - x)^2 \frac{f''(x)}{2!} + (v_k - x)^3 \frac{f'''(x)}{3!} + (v_k - x)^3 h(v_k - x) \quad (5.33)$$

elde edilir. Burada $h(y) := h_x(y)$ fonksiyonu her y için sınırlı olup $|h(y)| \leq M$ eşitsizliği sağlar ve sıfıra yakınsar. (5.33) denkleminde operatörün türevli halini uygulayalım.

$$(K_n^* f)'(x) = A_{0,n}(x)f(x) + A_{1,n}(x)f'(x) + A_{2,n}(x)f''(x) + A_{3,n}(x)f'''(x) + (R_n f)(x). \quad (5.34)$$

Burada

$$A_{j,n}(x) := n \frac{e^{-nx}}{A(1)j!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{P_k(nx)}{k!} \int_0^1 \left[\left(\frac{v+k+1}{n} - x \right)^j - \left(\frac{v+k}{n} - x \right)^j \right] dv$$

dir. Kalan terimler sırasıyla,

$$(R_1 f)(x) = n \frac{e^{-nx}}{A(1)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{P_k(nx)}{k!} \int_0^1 \left[\left(\frac{v+k+1}{n} - x \right)^3 h \left(\frac{v+k+1}{n} - x \right) \right] dv, \quad (5.35)$$

ve

$$(R_2 f)(x) = n \frac{e^{-nx}}{A(1)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{P_k(nx)}{k!} \int_0^1 \left[\left(\frac{v+k}{n} - x \right)^3 h \left(\frac{v+k}{n} - x \right) \right] dv \quad (5.36)$$

dir. (5.6) ve (5.19) kullanılarak aşağıdaki eşitlikler elde edilir

$$\begin{aligned} A_{0,n}(x) &= 0, \\ A_{1,n}(x) &= 1, \\ A_{2,n}(x) &= \frac{1}{n} + \frac{A'(1)}{nA(1)}, \\ A_{3,n}(x) &= \frac{1}{2n^2} \left[\frac{A''(1)}{A(1)} + \frac{3A'(1)}{A(1)} + nx \right] + \frac{7}{12n^2}. \end{aligned}$$

Bu eşitlikler (5.34) yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned}(K_n^* f)'(x) &= f'(x) + \left[\frac{1}{n} + \frac{A'(1)}{nA(1)} \right] f''(x) \\ &\quad + \left[\frac{1}{2n^2} \left(\frac{A''(1)}{A(1)} + \frac{3A'(1)}{A(1)} + nx \right) + \frac{7}{12n^2} \right] f'''(x) + [R_1(x) - R_2(x)]\end{aligned}$$

olur. Şimdi $R_1(x)$ kalanını iki parçaya ayıralım ve sırasıyla bu kalanları hesaplayalım.

$$\begin{aligned}(R_1 f)(x) &= n \frac{e^{-nx}}{A(1)} \sum_{\left| \frac{v+k+1}{n} - x \right| < \delta} \frac{P_k(nx)}{k!} \int_0^1 \left(\frac{v+k+1}{n} - x \right)^3 h \left(\frac{v+k+1}{n} - x \right) dv \\ &\quad + \sum_{\left| \frac{v+k+1}{n} - x \right| \geq \delta} \frac{P_k(nx)}{k!} \int_0^1 \left(\frac{v+k+1}{n} - x \right)^3 h \left(\frac{v+k+1}{n} - x \right) dv \\ &= \sum_1 + \sum_2.\end{aligned}$$

Her $\varepsilon > 0$ için, $0 \leq y \leq \delta$ olacak şekilde $|h(y)| < \varepsilon$ eşitsizliğini sağlayan bir $\delta > 0$ vardır. Bu ilk toplamda göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned}\sum_1 &= n \frac{e^{-nx}}{A(1)} \sum_{\left| \frac{v+k+1}{n} - x \right| < \delta} \frac{P_k(nx)}{k!} \int_0^1 \left(\frac{v+k+1}{n} - x \right)^3 h \left(\frac{v+k+1}{n} - x \right) dv \\ &\leq n \varepsilon \frac{e^{-nx}}{A(1)} \sum_{\left| \frac{v+k+1}{n} - x \right| < \delta} \frac{P_k(nx)}{k!} \left[\frac{(k-nx)^3}{n^3} + \frac{9(k-nx)^2}{2n^3} + \frac{7(k-nx)}{n^3} + \frac{15}{4n^3} \right] \\ &= \frac{\varepsilon}{n^2} \left[\frac{A'''(1)}{A(1)} + 3 \frac{A''(1)}{A(1)} + (3nx+1) \frac{A'(1)}{A(1)} + nx \right] + \frac{9\varepsilon}{2n^2} \left[\frac{A''(1)}{A(1)} + \frac{A'(1)}{A(1)} + nx \right] + \\ &\quad + \frac{7\varepsilon}{n^2} \frac{A'(1)}{A(1)} \\ &\leq \tilde{\varepsilon}\end{aligned}$$

bulunur. Şimdi $\sum_2$ kalanını benzer şekilde hesaplayalım.

$$\begin{aligned}
\sum_2 &= n \frac{e^{-nx}}{A(1)} \sum_{\left| \frac{v+k+1}{n} - x \right| \geq \delta} \frac{P_k(nx)}{k!} \int_0^1 \left(\frac{v+k+1}{n} - x \right)^3 h \left(\frac{v+k+1}{n} - x \right) dv \\
&\leq \frac{n}{\delta^2} \frac{e^{-nx}}{A(1)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{P_k(nx)}{k!} \int_0^1 \left(\frac{v+k+1}{n} - x \right)^5 h \left(\frac{v+k+1}{n} - x \right) dv \\
&\leq n \frac{M}{\delta^2} \frac{e^{-nx}}{A(1)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{P_k(nx)}{k!} \int_0^1 \left(\frac{v+k+1}{n} - x \right)^5 dv \\
&\leq n \frac{M}{\delta^2} \frac{e^{-nx}}{A(1)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{P_k(nx)}{k!} \left[\frac{(k-nx)^5}{n^5} + \frac{25(k-nx)^4}{2n^5} + \frac{130(k-nx)^3}{3n^5} + \right. \\
&\quad \left. + \frac{135(k-nx)^2}{2n^5} + \frac{51(k-nx)}{n^5} + \frac{93}{n^5} \right]
\end{aligned}$$

Lokalizasyon Teoremi

q sayısı $q \geq 2$ bir tamsayı olsun. $\{L_n\}$ ($n = 1, 2, \dots$), $H^{(q)}(\xi) \rightarrow C[c, d]$ [$c \leq \xi \leq d$] tanımlanmış dizisi olsun. $\{L_n\}$ operatörlerinin $(t-\xi)^{q+1}$ ve $(t-\xi)^{q+2}$ fonksiyonlarına uygulanabilir olduğunu varsayalım ve

$$L_n((t-\xi)^r; \xi) = O\left(\frac{1}{n^{\lfloor (r+1)/2 \rfloor}}\right), \quad (r = 0, 1, \dots, q+2)$$

olsun. Bu durumda, her $f(t) \in H^{(q)}(\xi)$ için

$$L_n(f(t); \xi) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{L_n((t-\xi)^r; \xi)}{r!} f^{(r)}(\xi) + O\left(\frac{1}{n^{q/2}}\right)$$

eşitliği sağlanır.

Lokalizasyon Teoremi dikkate alınıp yukarıdaki son eşitsizlikte göz önüne alınırsa,

$$\sum_2 \leq \tilde{\epsilon}$$

elde edilir. $R_2(x)$ kalanını $R_1(x)$ kalanında olduğu gibi 2 parçaya ayırılım ve sırasıyla kalanları hesaplayalım.

$$\begin{aligned}
(R_2 f)(x) &= n \frac{e^{-nx}}{A(1)} \left\{ \sum_{\left| \frac{v+k}{n} - x \right| < \delta} + \sum_{\left| \frac{v+k}{n} - x \right| \geq \delta} \right\} \frac{P_k(nx)}{k!} \int_0^1 \left(\frac{v+k}{n} - x \right)^3 h \left(\frac{v+k}{n} - x \right) dv \\
&= \sum_3 + \sum_4.
\end{aligned}$$

$\sum_3$ kalamı için

$$\begin{aligned}
\sum_3 &= n \frac{e^{-nx}}{A(1)} \sum_{\left| \frac{v+k}{n} - x \right| < \delta} \frac{P_k(nx)}{k!} \int_0^1 \left(\frac{v+k}{n} - x \right)^3 h \left(\frac{v+k}{n} - x \right) dv \\
&\leq n \varepsilon \frac{e^{-nx}}{A(1)} \sum_{\left| \frac{v+k}{n} - x \right| < \delta} \frac{P_k(nx)}{k!} \left[\frac{(k-nx)^3}{n^3} + \frac{3(k-nx)^2}{2n^3} + \frac{(k-nx)}{n^3} + \frac{1}{4n^3} \right] \\
&= \frac{\varepsilon}{n^2} \left[\frac{A'''(1)}{A(1)} + 3 \frac{A''(1)}{A(1)} + (3nx+1) \frac{A'(1)}{A(1)} + nx \right] + \frac{3\varepsilon}{2n^2} \left[\frac{A''(1)}{A(1)} + \frac{A'(1)}{A(1)} + nx \right] \\
&\quad + \frac{\varepsilon}{n^2} \frac{A'(1)}{A(1)} + \frac{\varepsilon}{4n^2} \\
&\leq \tilde{\varepsilon}
\end{aligned}$$

elde edilir. Son olarak benzer şekilde $\sum_4$ kalamını hesaplayalım

$$\begin{aligned}
\sum_4 &= n \frac{e^{-nx}}{A(1)} \sum_{\left| \frac{v+k}{n} - x \right| \geq \delta} \frac{P_k(nx)}{k!} \int_0^1 \left(\frac{v+k}{n} - x \right)^3 h \left(\frac{v+k}{n} - x \right) dv \\
&\leq \frac{n}{\delta^2} \frac{e^{-nx}}{A(1)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{P_k(nx)}{k!} \int_0^1 \left(\frac{v+k}{n} - x \right)^5 h \left(\frac{v+k}{n} - x \right) dv \\
&\leq n \frac{M}{\delta^2} \frac{e^{-nx}}{A(1)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{P_k(nx)}{k!} \int_0^1 \left(\frac{v+k}{n} - x \right)^5 dv \\
&\leq n \frac{M}{\delta^2} \frac{e^{-nx}}{A(1)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{P_k(nx)}{k!} \left[\frac{(k-nx)^5}{n^5} + \frac{5(k-nx)^4}{2n^5} + \frac{10(k-nx)^3}{3n^5} + \right. \\
&\quad \left. + \frac{5(k-nx)^2}{2n^5} + \frac{(k-nx)}{n^5} + \frac{1}{6n^5} \right]
\end{aligned}$$

Lokalizasyon Teoremi'dan

$$\sum_4 \leq \tilde{\varepsilon}$$

bulunur. Dolayısıyla

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n [(K_n^* f)'(x) - f'(x)] = \left(1 + \frac{A'(1)}{A(1)} \right) f''(x) + \frac{x}{2} f'''(x)$$

elde edilir. Bu ise ispatı tamamlar. ■

6. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu tezde ele alınan temel kavramlardan biri varyasyon azaltıcı özellik olup, bilindiği kadarıyla bu özellik üzerine yapılan ilk çalışma Lorentz'e (1953) dayanmaktadır. Daha sonra Bardaro ve arkadaşları (2003), varyasyon yarı normunda yakınsaklığın elde edilebilmesi için operatörlerin varyasyon azaltıcı nitelik göstermesinin hem gerekli hem de kritik bir koşul olduğunu ortaya koymuşlardır.

Bu çalışma, özellikle Bernstein türü polinomlar ile singüler konvolüsyon integralleri için varyasyon azaltıcı özellik ile varyasyon yarı normunda yakınsama arasındaki ilişkiyi ayrıntılı bir biçimde analiz eden ve geliştiren Bardaro vd. (2003) çalışmasından ilham alınarak hazırlanmıştır. Söz konusu temel çalışmanın ardından varyasyon yarı normundaki yakınsama, yaklaşım teorisi kapsamında yeni bir araştırma yönü olarak önem kazanmıştır.

Tez kapsamında elde edilen dikkat çekici sonuçlardan biri de, uzaklık kavramının tanımlı olmadığı yarı normlu uzaylarda dahi yakınsamanın anlamlı bir biçimde ifade edilebilmesidir. Bu bağlamda en önemli nokta, L_1 - normu ile yarı norm arasında uygun bir ilişki kurularak söz konusu uzayda yakınsamanın sağlanabilmesidir.

Ayrıca bu tezde gerçekleştirilen araştırmalar, Appell polinomları kullanılarak inşa edilen Kantorovich-tipi Szász-Mirakyan lineer pozitif operatörünün varyasyon azaltıcı özelliği, varyasyon yarı normundaki yakınsaklığı ve yakınsama hızı incelemekte olup, literatüre özgün katkılar sunmaktadır. Böylece elde edilen sonuçların, benzer operatörlere uyarlanabilir nitelikte olması ve bu alanda çalışan araştırmacılar için motive edici bir kaynak teşkil etmesi hedeflenmektedir.

KAYNAKLAR

- Albrycht, J., & Radecki, J. (1960). On a generalization of the theorem of Voronovskaya. *Zeszyt Naukowe UAM*, 2, 1–7.
- Altomare, F., & Campiti, M. (1994). *Korovkin-type Approximation Theory and its Applications* (Vol. 17). Walter de Gruyter, Berlin.
- Bardaro, C., Butzer, P. L., Stens, R. L., & Vinti, G. (2003). Convergence in variation and rates of approximation for Bernstein-type polynomials and singular convolution integrals. *Analysis (Munich)*, 23(4), 299–346.
- Bernstein, S. N. (1912–1913). Démonstration du théorème de Weierstrass fondée sur le calcul des probabilités. *Communications de la Société Mathématique de Kharkow*, 1(2), 1–2.
- Bleimann, G., Butzer, P. L., & Hahn, L. A. (1980). Bernstein-type operators approximating continuous functions on the semi-axis. *Indagationes Mathematicae*, 42, 25.
- Bohman, H. (1952). On approximation of continuous and of analytic functions. *Arkiv för Matematik*, 2, 43–56.
- Butzer, P. L., & Nessel, R. J. (1971). *Fourier Analysis and Approximation*. Academic Press, New York & London.
- Demiray, R. (2013). *Convergence in the Variation Seminorm of Bernstein and Bernstein–Chlodovsky Polynomials* (Ph.D. Thesis).
- Ditzian, Z., & Ivanov, K. (1989). Bernstein-type operators and their derivatives. *Journal of Approximation Theory*, 56, 72–90.
- Durrmeyer, J. L. (1967). Une formule d’inversion de la transformée de Laplace: Applications à la théorie des moments. Thèse de 3e Cycle, Faculté des Sciences, Université de Paris.
- Favard, J. (1944). Sur les multiplicateurs d’interpolation. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, 23, 219–247.
- Gonska, H. H., & Zhou, X. (1991). A global inverse theorem on simultaneous approximation by Bernstein–Durrmeyer operators. *Journal of Approximation Theory*, 67, 284–302.
- Grundmann, A. (1978). Inverse theorems for Kantorovic polynomials. In G. Alexits & P. Turán (Eds.), *Fourier Analysis and Approximation Theory, I* (Proc. Colloq., Budapest, Hungary, 1976) (*Colloquia Mathematica Societatis János Bolyai*, Vol. 19, pp. 395–401). North-Holland Publishing Co.
- Kantorovich, L. V. (1930). Sur certains développements suivant les polynomes de la forme de S. Bernstein I, II. *Comptes Rendus de l’Académie des Sciences de l’URSS*, 563–568, 595–600.

- Karşı, H. (2013). On convergence of Chlodovsky and Chlodovsky–Kantorovich polynomials in the variation seminorm. *Mediterranean Journal of Mathematics*, 10, 41–56.
- Karşı, H. (2012). A Voronovskaya-type theorem for the second derivative of the Bernstein–Chlodovsky polynomials. *Proceedings of the Estonian Academy of Sciences*, 61(1), 9–19.
- Karşı, H., Öksüzler Yılık, Ö., & Taşdelen, F. (2017). Convergence of the Bernstein–Durrmeyer operators in variation seminorm. *Results in Mathematics*, 72, 1257.
- Kivinukk, A., & Tamberg, G. (2013). The variation detracting property of some Shannon sampling series and their derivatives. In *Proceedings of the 10th SampTA* (pp. 228–231). Greece.
- Korovkin, P. P. (1953). On convergence of linear operators in the space of continuous functions. *Doklady Akademii Nauk SSSR*, 90, 961–964.
- Kreyszig, E. (1978). *Introductory Functional Analysis with Applications*. Wiley, New York.
- Lorentz, G. G. (1953). *Bernstein Polynomials*. University of Toronto Press.
- Lupaş, A. (1972). *Die Folge der Betaoperatoren* (Dissertation). Universität Stuttgart.
- Mirakjan, G. (1941). Approximation des fonctions continues au moyen de polynomes de la forme $e^{-nx} \sum_{k=0}^m C_{k,n} x^k$. *Doklady Akademii Nauk SSSR*, 31, 201–205.
- Natanson, I. P. (1955–1964). *Theory of Functions of a Real Variable*, Vol. I. Ungar, New York.
- Natanson, I. P. (1955–1964). *Theory of Functions of a Real Variable*, Vol. II. Ungar, New York.
- Öksüzler, Ö., Karşı, H., & Taşdelen, F. (2016). On convergence of Bernstein–Stancu polynomials in the variation seminorm. *Numerical Functional Analysis and Optimization*, 37(4), 1–20.
- Popoviciu, T. (1935). Sur l’approximation des fonctions convexes d’ordre supérieur. *Mathematica (Cluj)*, 10, 49–54.
- Radu, C. (2008). Variation detracting property of the Bézier-type operators. *Series in Mathematics and Informatics*, 23, 23–28.
- Sikkema, P. (1970). On some linear positive operators. *Indagationes Mathematicae (Proceedings)*, 73, 327–337.
- Szász, O. (1950). Generalization of S. Bernstein’s polynomials to the infinite interval. *Journal of Research of the National Bureau of Standards*, 45, 239–245.

- Totik, V. (1983). Problems and solutions concerning Kantorovich operators. *Journal of Approximation Theory*, 37(1), 51–68
- Trigub, R. M., & Belinsky, E. S. (2004). *Fourier Analysis and Approximation of Functions*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.
- Varma, S. (2013). On a generalization of Szász operators by multiple Appell polynomials. *Studia Universitatis Babeş-Bolyai, Mathematica*, 58(3).