

ANKARA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ORTALAMA EĞRİLİK AKIŞINDA ÖTELEME SOLİTONLARI

Buse YALÇIN

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ANKARA
2024

Her hakkı saklıdır

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

ORTALAMA EĞRİLİK AKIŞINDA ÖTELEME SOLİTONLARI

Buse YALÇIN

Ankara Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. İsmail GÖK
Eş Danışman: Prof. Dr. Miguel ORTEGA TITOS

Bu tez altı bölümden oluşmaktadır.

İlk bölüm giriş kısmına ayrılmıştır.

İkinci bölümde, tezin ilerleyen bölümlerinde kullanılacak temel tanım ve kavramlara yer verilmiştir.

Üçüncü bölümde, hiperbolik Einstein'ın statik evrenindeki ortalama eğrilik akışının dejenere olmayan öteleme solitonları verilmiştir. Uzaysı ve zamansı grafikleri olan öteleme solitonları için kısmi diferensiyel denklemler (KDD) elde edilmiştir. Daha sonra, limit küreleri tarafından oluşturulan bu solitonlar sınıflandırılmıştır. KDD nin adi diferensiyel denklemlere (ADD) indirgenmesi gösterilmiştir. ADD nin solitonları üzerine yapılan bir tartışma önceki sınıflandırmayı gerçekleştirmiştir.

Dördüncü bölümde, hem uzaysı hem de zamansı rotasyonel değişmez öteleme solitonları sınıflandırılmıştır. Ardından, bir ADD elde edilip tüm çözümleri üzerinde bir çalışma yapılmıştır.

Beşinci bölümde, uzaysı öteleme solitonları için teklik teoremi gösterilmiş ve bununla birlikte basit koşullar altında, bir alanın sınırının izometrisinin tüm öteleme solitonlarına genişletilmesine dair bir sonuç elde edilmiştir. Bunun bir uygulaması olarak, bowl (kase) bir yuvar ile sınırlandırıldığında ki karakterizasyonu elde edilmiştir. Ayrıca, sınırı bir dikdörtgen olan limit küreleri tarafından oluşan belirli öteleme solitonları karakterize edilmiştir. Son bölüm çalışmanın analizine ve tartışmaya ayrılmıştır.

Haziran 2024, 55 sayfa

Anahtar Kelimeler: Öteleme solitonları, ortalama eğrilik akışı, hiperbolik Einstein'ın statik evreni (HESE), limit küreleri, hiperbolik uzay, uzaysı, zamansı, kısmi diferensiyel denklem (KDD), adi diferensiyel denklem (ADD), rotasyonel değişmezler ve eliptik KDD.

ABSTRACT

Master Thesis

TRANSLATING SOLITONS TO THE MEAN CURVATURE FLOW

Buse YALÇIN

Ankara University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. İsmail GÖK
Co-Supervisor: Prof. Dr. Miguel ORTEGA TITOS

This thesis consist of six chapters.

The first chapter is devoted to the introduction.

In the second chapter, the basic definitions and concepts that will be used in the following chapters of the thesis are contained.

In the third chapter, non-degenerate translating solitons of the mean curvature flow in the hyperbolic Einsteins's static universe are given. The partial differential equations (PDE) for translating solitons which are graphs, both space-like and time-like, are obtained. Afterwards, those foliated by horospheres are classified. Indeed, the PDE is reduced to an ordinary differential equation (ODE). A discussion on the solutions to the ODE provided the previous classification.

In the fourth chapter, rotationally invariant translating solitons, both spacelike and time-like, are classified. Subsequently, an ODE is obtained and a study is conducted on all its solutions.

In the fifth chapter, for spacelike translating solitons, a uniqueness theorem is shown, as well as a result to extend an isometry of the boundary of the domain to the whole translator, under simple conditions. As an application, a characterization of the bowl is obtained when the boundary is a ball. In addition, certain translating solitons foliated by horospheres whose boundary is a rectangle are characterized.

The final chapter is devoted to the discussion and conclusion of the study.

June 2024, 55 pages

Key Words: Translating solitons, mean curvature flow, hyperbolic Einstein's static universe (HESU), horospheres, hyperbolic space, spacelike, timelike, partial differential equation (PDE), ordinary differential equation (ODE), rotationally invariant and elliptic PDE.

TEŞEKKÜR

Akademik eğitimim boyunca bana yol gösteren, güvenini ve desteğini her zaman hissettiğim, anlayışı ve sabrı için minnettar olduğum, bilgi ve tecrübeleriyle yoluma ışık tutan saygıdeğer danışman hocam Prof. Dr. İsmail GÖK'e, İspanya'da bulunduğum süre boyunca tezimin her aşamasında desteğini esirgemeyen, sabrı ve değerli önerileri ile çalışmama katkı sağlayan saygıdeğer eş danışman hocam Prof. Dr. Miguel ORTEGA TITOS'a, Erasmus staj hareketliliği sürecinde desteklerini esirgemeyen Granada Üniversitesi Geometri ve Topoloji Anabilim Dalı'na, öğretim üyelerine ve personeline, lisans eğitimi yıllarımdan beri her daim fikir ve önerileri ile çalışmalarımı ileriye taşıyabilmemi sağlayan saygıdeğer hocalarım Prof. Dr. Yusuf YAYLI ve Prof. Dr. Nejat EKMEKÇİ'ye, değerli zamanımı ayırarak tez savunma jüri üyem olan Prof. Dr. Erdal GÜNER'e sonsuz minnetlerimi ve teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca tez sürecimde yapıcı eleştirileri ile tezimin gelişimine katkı sağlayan saygıdeğer hocam Dr. Öğr. Üyesi Erdem KOCAKUŞAKLI'ya, değerli vaktini ayırarak bana destek olan sevgili arkadaşım Ebru YANIK'a ve teknik süreçte yardımlarını esirgemeyen sevgili arkadaşım Furkan SEÇGİN'e teşekkürlerimi sunarım.

Uzun yıllardır hayatımın her aşamasında sağladığı rehberlik ve destek ile bana kazandırdığı değerler ve öğretiler sayesinde, başarılı ve güçlü bir insan olmamı sağlayan kıymetli hocam Dr. Erdiñç ÖZTEN'e en içten saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

Son olarak, bana olan inançlarını hiç kaybetmeyen, attığım her adımda sevgi ve desteklerini derinlemesine hissettiğim sevgili ailem; babam Aşır YALÇIN, annem Esra YALÇIN, abim Hasan YALÇIN ve en büyük destekçilerimden biri olan halam Nazlı YALÇIN başta olmak üzere tüm aileme ve dostlarıma sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Tez çalışmamı "2210-A Genel Yurt İçi Yüksek Lisans Burs Programı" kapsamında destekleyen TÜBİTAK'a en içten teşekkürlerimi sunarım.

Buse YALÇIN
Ankara, Haziran 2024

İÇİNDEKİLER

TEZ ONAY SAYFASI

ETİK	i
ÖZET	ii
ABSTRACT	iii
TEŞEKKÜR	iv
SİMGELER DİZİNİ	vi
ŞEKİLLER DİZİNİ	vii
1. GİRİŞ	1
2. TEMEL KAVRAMLAR	5
3. LİMİT KÜRELERİ İÇİN ÖTELEME SOLİTONLARI	14
3.1 $w(s) = \pm 1$ durumu	22
3.2 $w(s) = \frac{1}{m}$ durumu	22
3.3 $w(s) \neq \pm 1$ ve $w(s) \neq \frac{1}{m}$ durumu	22
3.3.1 $m = 1$ durumu	22
3.3.2 $m > 1$ durumu	27
4. ROTASYONEL OLARAK DEĞİŞMEZLER	34
4.1 Uzaysı durum	38
4.2 Zamansız durum	42
5. İZOMETRİLER VE YARI DOĞRUSAL ELİPTİK KDD	46
6. TARTIŞMA VE SONUÇ	51
KAYNAKLAR	52
ÖZGEÇMİŞ	55

SİMGELER DİZİNİ

$\mathbb{R}$	Reel uzay
$\mathbb{E}^n$	n -boyutlu Öklid uzayı
$\mathbb{L}^n$	n -boyutlu Lorentz uzayı
$\mathbb{H}^n$	n -boyutlu Hiperbolik uzay
$\mathbb{V}$	Vektör uzayı
$\sum$	Toplam sembolü
∇	Gradyent
N	Normal vektör
g	Lorentz metriği
H^{n-1}	$(n - 1)$ -boyutlu limit küresi
div	Divergens operatörü
S	Şekil operatörü
Γ_{ij}^k	Christoffel sembolleri
M^n	n -boyutlu manifold
$\mathcal{M}$	Yarı-riemann manifoldu
H_t	İkinci temel formun izi
v	Vektör alanı
$\mathbf{H}$	Ortalama eğrilik vektörü
$\nu^\perp$	ν vektörünün ortogonal izdüşüm vektörü
G	Lie grubu
δ_{ij}	Kronecker delta fonksiyonu
Q	Yarı doğrusal operatör
$SO(n)$	$n \times n$ tipinde özel ortogonal matris grubu

Kısaltmalar

$\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$	Hiperbolik Einstein statik evreni (HESE)
KDD	Kısmi diferensiyel denklem
ADD	Adi diferensiyel denklem

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 3.1	P_1 fonksiyonunun grafiği	24
Şekil 3.2	P_2 fonksiyonunun grafiği	25
Şekil 3.3	P_3 fonksiyonunun grafiği	26
Şekil 3.4	Q_1 fonksiyonunun grafiği	29
Şekil 3.5	Q_2 fonksiyonunun grafiği	30
Şekil 3.6	Q_3 fonksiyonunun grafiği	31
Şekil 3.7	Q_4 fonksiyonunun grafiği	32
Şekil 4.1	Spindle yüzeyi örneği	44
Şekil 5.1	Bir hiperdüzleme göre simetrik olan $\bar{\Omega}$ örneği	49

1. GİRİŞ

Ortalama eğrilik akışı, bir hiperyüzeyin eğriliği boyunca gelişimini tanımlayan geometrik bir evrim süreci olup, matematiksel araştırma alanında köklü ve etkili bir alanı temsil eder. Çeşitli bilimsel disiplinlerin bağlantı noktasında konumlanan bu alan, diğer alanların yanı sıra geometrik analiz, geometrik ölçü teorisi, parabolik kısmi diferensiyel denklem teorisi, diferensiyel topoloji, matematiksel fizik, görüntü işleme ve bilgisayar destekli tasarımı kapsar.

Ortalama eğrilik akışının tarihi, 20. yüzyılın ikinci yarısına kadar uzanır. İlk önemli çalışmalar, Brakke'nin 1978 yılında tanımladığı "hareket eden cümlelerin geometrik ölçüm teorisi" ile başlamıştır. Daha sonra, 1980'lerde Gerhard Huisken, ortalama eğrilik akışının birçok temel özelliğini ortaya koyarak bu alana önemli katkılarda bulunmuştur. Huisken'in çalışmalarını takiben, Hamilton ve Grayson gibi araştırmacılar ortalama eğrilik akışının daha geniş ve derinlemesine incelenmesini sağlamışlardır.

Son yıllarda, ortalama eğrilik akışı ile ilgili önemli çalışmalar yapılmıştır. Bu çalışmaların büyük çoğunluğu Riemanniyen yapılar üzerinde ele alınmıştır (Garcia 2016, Alías vd. 2020, Eddygledson 2020, Kocakuşaklı 2020, Batista ve De Lima 2022). Lorentz uzayında ve Riemann manifoldlarında ortalama eğrilik akışının öteleme solitonları elde edilmiş ve özellikleri incelenerek bu çalışma alanı genişletilmiştir (Kocakuşaklı ve Ortega 2017, 2021). Özellikle, öteleme solitonları (translating solitons) bu alanın önemli bir araştırma konusu olmuştur (Ortega ve Yalçın 2024, Yıldırım ve Ortega 2024). Bazı araştırmacılar hiperbolik uzayda döner simetriye sahip çözümleri inceleyerek önemli sonuçlar elde etmişlerdir. Bueno, $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ uzayında öteleme solitonlarını incelerken, Lira ve Martín, bu çalışmayı daha genel Riemanniyen uzayına genişletmiştir (Martín vd. 2015).

Bu konu ile ilgili çalışmalara yapılan yaklaşımlardan biri, öteleme solitonları olarak bilinen ve ortam uzayında bir öteleme alt grubu altında değişmez kalan belirli çözümlerin incelenmesini içerir. Temel amaç, ortalama eğrilik akışını

$$\mathbf{H} = v^\perp$$

denklemine basitleştirmektir. Burada $n \geq 2$, $\mathbf{H}$ daldırmanın ortalama eğrilik vektörünü, v sabit (birim) bir vektör ve $v^\perp$, v vektörüne dik bir vektör ise v vektörünün hiperyüzeyin normal demetine ortogonal izdüşümünü ifade eder. Dahası, M üzerinde bir eşhomojenlik hareketi içeren daha geniş bir yaklaşım benimsemişlerdir (Lawn ve Ortega 2022). Bu hareket bir Lie grubunun izometrilерini içerir ve en fazla iki istisna dışında ortaya çıkan hiperyüzeylerin sabit ortalama eęrilіęe sahip olacağı şekilde yapılandırılmıştır (Aleksievsky 1993). Örneğin, reel hiperbolik düzlem ile $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ olarak gösterilen bir reel doğrunun çarpımında dönmeye karşı değişmez translatrleri ele alınmıştır (Bueno 2018, 2020). Lira ve Martn, Bueno'nun çalışmasını $M \times \mathbb{R}$ Riemann çarpımlarına genelleştirdi (De Lira vd. 2019). Ayrıca, Pipoli çözülebilir grup $\mathbf{Sol}_3$ 'te ve Heisenberg grubunda öteleme solitonlarını incelemiştir (Pipoli 2020, 2021). Kim, uzaysı öteleme solitonları üzerinde bazı izometri gruplarını kullanarak Minkowski uzayına taşındı (Kim 2020). Lorentziyen uzaydaki bu çalışmaları çok daha genel Lorentz uzaylarında incelenmiştir ve bir eşhomojenlik hareketi içeren daha geniş bir yaklaşım benimsemişlerdir. Diğer bazı benzer problemler mevcut literatürde kapsamlı bir şekilde incelenmiştir (Altschuler 1994, Ilmanen 1994, Clutterbuck 2007, Hoffman vd. 2021).

Ortalama eğrilik akışı ile hiperbolik Einstein'ın statik evreninin (HESE) arka planı arasındaki dinamik etkileşim, bu çalışmadaki araştırmamızın temelini oluşturur ve bu alanda yapılan çalışmalara katkıda bulunmayı amaçlamakta olup genel yapısı řu şekildedir:

Bu alışmada, HESE'deki ortalama eğrilik akışındaki öteleme solitonlarını ve HESE'nin hem hiperbolik doğasını hem de statik yapısını içermektedir. Araştırmada 3 farklı teknik kullanılmıştır. Bunlardan birincisi bazı kısmi diferensiyel denklemleri adi diferensiyel denkleme dönüştürmek için izometri Lie gruplarının etkisinin incelenmesi,

ikincisi sınır problemini çözmek için dinamik sistemler kullanımı ve üçüncüsü genel olarak eliptik yarı doğrusal kısmi diferensiyel denklemler teorisinin kullanılmasıdır. Yani bu, bu evrende ortaya çıkan belirli örnekleri sınıflandırmayı amaçlayan HESE bağlamında ortalama eğrilik akışındaki öteleme solitonlarını anlamak için bir çerçeve sağlar.

Tezin üçüncü bölümünde, ilk olarak, $\bar{M} = \mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$, hiperbolik Einstein statik evreni tanımlanacak ve bu uzayda öteleme solitonları araştırılacaktır. Daha sonra, öteleme solitonlarının özelliklerini incelemek için bir tanım verilecek ve bu solitonların ortalama eğrilik akışına nasıl uyum sağladığı araştırılacaktır. Ek olarak, bir örnek üzerinde bu kavram uygulanacak ve $\mathbb{H}^n$ içindeki minimal veya tümüyle geodezik bir hiperyüzeyin $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$ uzayında bir öteleme solitonu (translatör) olup olmadığı incelenecektir. Daha sonra, grafiksel öteleme solitonunun 3.2 kısmi diferensiyel denklemini sağlayan bir fonksiyonla karakterize edildiği vurgulanarak temel araçları gözden geçirilecektir. Ayrıca HESE’de hiperbolik uzayda minimal veya tümüyle geodezik hiperyüzeylerden inşa edilebilen bir zamansız öteleme solitonu ailesi gösterilecektir. Ardından, limit küreleri tarafından oluşan uzaysı ve zamansız öteleme solitonlarının sınıflandırması ve özellikleri Teorem 3.1 ve Teorem 3.2 ile verilecektir.

Tezin dördüncü bölümü, $SO(n)$ tarafından rotasyonel olarak değişmez olan öteleme solitonlarının incelenmesine ayrılmıştır. Bu incelemeyi kolaylaştırmak için, öncelikle Lorentz uzayı $\mathbb{L}^{n+1}$ hatırlatılmaktadır. Hem uzaysı hem de zamansız olmak üzere bu öteleme solitonlarının tam bir sınıflandırması Teorem 3.1 ve Teorem 3.2 ile verilmektedir. Uzaysı öteleme solitonuna *bowl (kase)* olarak bilinen örnek verilmektedir. Bowl haricinde, hepsi bir konik tekilliğe sahiptir. Tek zamansız örnek olarak, Lemma 4.7 ile belirtilen yapıyla tanımlanan ve spindle (Bkz. Şekil 4.1) olarak bilinen bir bi-graf gösterilebilir.

Tezin beşinci bölümünde, bulguların bir uygulaması olarak Şekil 4.1 spindle yüzeyi, Teorem 5.2 ile verilen sınıra bağlı uzaysı öteleme solitonları için bir teklik sonucu gösterilmektedir. Bu bölümde kullanılan yöntemler, yarı doğrusal eliptik kısmi dife-

rensiyel denklemler ve izometrilere alanan araçları içermektedir. Bu alanda yapılan bir diğ er ç alışma da verilebilir (Ros ve Sicbaldi 2013). Bir sonuç olarak, basit koş ullar altında bir kü renin izometrisinin ö teleme solitonuna geniş letilebileceğ i ispatlanmaktadır. Bundan hareketle, sın ırı tam bir kü re olan uzaysı bir ö teleme solitonunun, bir bowl parç ası olmak zorunda olduğ u ispatlanmaktadır. Sonuç olarak, Lemma 5.6 ile verilen sın ırlı bir dikdört gen olan ve limit kü releri tarafından oluşt urulanan belirli ö teleme solitonları karakterize edilmektedir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde, tezin ilerleyen bölümlerinde kullanılacak bazı temel tanım ve kavramlara yer verilmiştir.

Tanım 2.1 $A \neq \emptyset$ ve $\mathbb{R}$ reel sayılar cismi üzerinde bir vektör uzayı $\mathbb{V}$ olmak üzere,

$$\varrho : A \times A \longrightarrow \mathbb{V}$$

fonksiyonu

$$(i) \quad \forall P, Q, R \in A \text{ için } \varrho(P, Q) + \varrho(Q, R) = \varrho(P, R),$$

$$(ii) \quad \forall P \in A \text{ ve herhangi bir } \beta \in \mathbb{V} \text{ için } \varrho(P, Q) = \beta \text{ olacak biçimde bir tek } Q \in A \text{ noktası vardır,}$$

önergelerini doğruluyor ise A cümlesine $\mathbb{V}$ vektör uzayı ile birleştirilmiş bir **afin uzay** denir (Hacısalihoğlu 1998).

Tanım 2.2 Bir reel afin uzay A ve A ile birleşen vektör uzayı da $\mathbb{V}$ olsun.

$\forall x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{V}$ ve $\forall y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{V}$ için,

$$\langle , \rangle : \mathbb{V} \times \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y) \longmapsto \langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

şeklinde tanımlanan iç çarpıma **Öklid iç çarpımı** veya **standart iç çarpım** denir. Bu iç çarpım ile birlikte A afin uzayına da **Öklid uzayı** denir (Hacısalihoğlu 1998).

Tanım 2.3

$$d : \mathbb{E}^n \times \mathbb{E}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(A, B) \longmapsto d(A, B) = \|\overrightarrow{AB}\|$$

biçiminde tanımlanan d fonksiyonuna $\mathbb{E}^n$ Öklid uzayında **Öklid metriği** denir (Hacısalihoğlu 1998).

Tanım 2.4 X boştan farklı bir cümle ve $d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Eğer $\forall x, y, z \in X$ için

- (i) $x \neq y$ için $d(x, y) > 0$,
- (ii) $d(x, y) = 0 \iff x = y$,
- (iii) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

şartları sağlanıyorsa d fonksiyonuna X üzerinde bir **metrik** denir. X bir cümle ve d de bu cümle üzerinde bir metrik ise, d metriği bu cümle üzerinde bir tek topoloji üretir. Böylece bir metrik uzay üzerinde topoloji tanımlamak her zaman mümkündür (Şahin 2012).

Tanım 2.5 $f, \mathbb{R}^n$ uzayının bir U açık cümlesi üzerinde tanımlı reel değerli bir fonksiyon olsun. Eğer f fonksiyonunun k . mertebeden kısmi türevleri var ve $k \leq r$ olmak üzere, sürekli ise f fonksiyonu r . mertebeden diferensiyellenebilirdir denir ve $f \in C^r(U, \mathbb{R})$ ile gösterilir. Eğer $\forall r \in \mathbb{Z}^+$ için $f \in C^r(U)$ ise f fonksiyonuna diferensiyellenebilirdir denir ve $f \in C^\infty(U, \mathbb{R})$ ile gösterilir (Şahin 2012).

Değer uzayının boyutunun 1 den büyük olması durumunda aşağıdaki tanım verilebilir.

Tanım 2.6 $\mathcal{K}$ bir Hausdorff uzay olsun. Eğer $\forall p \in \mathcal{K}$ için, $\mathbb{R}^m$ deki bir açık cümleye homeomorfik olacak şekilde p noktasının bir açık komşuluğu U varsa $\mathcal{K}$ Hausdorff uzayına bir **topolojik manifold** veya kısaca **manifold** denir (Şahin 2012).

Tanım 2.7 M bir manifold ve $T_p M$, bu manifoldun p noktasındaki tanjant uzayı olsun. Bu durumda $p \in M$ noktasına $T_p M$ uzayında bir tanjant vektör karşılık getiren X diferensiyellenebilir dönüşümüne **vektör alanı** denir. Böylece M manifoldu üzerinde bir vektör alanı

$$X : M \longrightarrow \bigcup_{p \in M} T_p M$$

diferensiyellenebilir dönüşümdür. Burada $\forall f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ için, vektör alanının diferensiyellenebilir olması

$$Xf : M \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$p \longmapsto Xf(p) = X_p(f)$$

ile tanımlı fonksiyonun her mertebeden diferensiyellenebilir olmasıdır (Şahin 2012).

Tanım 2.8 $M \neq \emptyset$ bir cümle ve $U_\alpha \subset \mathbb{R}^n$ açık alt cümlesi için $x_\alpha : U_\alpha \rightarrow M$ dönüşümü birebir bir dönüşüm olsun.

- (i) $x_\alpha(U_\alpha)$ cümlelerinin sonlu birleşimleri M cümlesini örter.
- (ii) $x_\alpha(U_\alpha) \cap x_\beta(U_\beta) = W \neq \emptyset$ şartını sağlayan herhangi α, β çifti için $x_\alpha^{-1}(W)$ ve $x_\beta^{-1}(W)$ cümleleri $\mathbb{R}^n$ vektör uzayının açık alt cümleleridir. Bununla birlikte $x_\beta^{-1} \circ x_\alpha$ koordinat değişimi fonksiyonları diferensiyellenebilirdir.
- (iii) (U_α, x_α) ailesi (atlası) (i) ve (ii) şartlarıyla birlikte maksimaldir.

Yukarıdaki üç şart sağlandığında M cümlesine **n-boyutlu diferensiyellenebilir manifold** adı verilir (do Carmo 1976).

Tanım 2.9 $\mathbb{E}^n$, n - boyutlu Öklid uzayında uzaklık fonksiyonu d olmak üzere,

$$\begin{aligned} f : \mathbb{E}^n &\rightarrow \mathbb{E}^n \\ x &\mapsto f(x) \end{aligned}$$

fonksiyonu $\forall P, Q \in \mathbb{E}^n$ için

$$\begin{aligned} d : \mathbb{E}^n \times \mathbb{E}^n &\rightarrow \mathbb{R} \\ f(P), f(Q) &\mapsto d(f(P), f(Q)) = d(P, Q) \end{aligned}$$

koşulunu sağlıyor ise f fonksiyonuna $\mathbb{E}^n$ Öklid uzayında bir **izometri dönüşümü** denir (Hacısalıhoğlu 2000).

Tanım 2.10 $\mathbb{V}$ sonlu boyutlu reel vektör uzayı üzerinde simetrik bilinear form g olsun. $\forall v \in \mathbb{V}$ için

- (i) $v \neq 0$ için $g(v, v) > 0$ ($g(v, v) < 0$) ise g simetrik bilinear formuna **pozitif (negatif) tanımlı**
- (ii) $g(v, v) \geq 0$ ($g(v, v) \leq 0$) ise g simetrik bilinear formuna **pozitif (negatif) yarı tanımlı**
- (iii) $\forall w \in \mathbb{V}$ için $g(v, w) = 0$ iken $v = 0$ ise g simetrik bilinear formuna **dejenere olmayan**

denir (Yüce 2015).

Tanım 2.11 $\mathbb{V}$ bir reel vektör uzayında g simetrik bilineer formunun **indeksi**; $g|_W$ negatif tanımlı olacak şekilde en büyük boyutlu $W \subset \mathbb{V}$ alt uzayının boyutu ile tanımlanır ve genellikle v ile gösterilir (Yüce 2015).

Tanım 2.12 $\mathbb{V}$ vektör uzayında $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ bir baz olmak üzere bu baza göre g nin matrisi için

$$G = [g_{ij}] = [g(e_i, e_j)]$$

yazılabilir. Burada g simetrik olduğundan G matrisi de simetriktir ve

$$g\left(\sum v_i e_i, \sum w_j e_j\right) = \sum g_{ij} v_i w_j$$

yazılabilir (Yüce 2015).

Tanım 2.13 n - boyutlu reel vektör uzayı $\mathbb{V}$ üzerinde $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$, g skaler çarpımının v **indeksi** $\mathbb{V}$ nin indeksi olarak tanımlanır ve $v = ind \mathbb{V}$ yazılır (Yüce 2015).

Tanım 2.14 $\mathbb{R}^n$ üzerinde tanımlı

$$\langle v_p, w_p \rangle = - \sum_{i=1}^v v_i w_i + \sum_{j=v+1}^n v_j w_j, \quad 0 \leq v \leq n$$

metrik tensörü verilsin. Bu v indeksli metrik tensörle beraber $\mathbb{R}^n$ uzayına **yarı Öklid uzayı** denir ve $\mathbb{R}_v^n$ ile gösterilir.

- (i) $v = 0$ ise $\mathbb{R}_v^n$ uzayı $\mathbb{R}^n$ uzayına indirgenir.
- (ii) $n \geq 2$ için $\mathbb{R}_1^n$ uzayına **Minkowski (Lorentz) n-uzay** denir.
- (iii) $n = 2$ için relativistik basit bir uzaysı örneği elde edilir (Yüce 2015).

Tanım 2.15 $v \in \mathbb{R}_v^n$ vektörüne

- (i) $\langle v, v \rangle > 0$ veya $v = 0$ ise **uzaysı vektör**
- (ii) $\langle v, v \rangle = 0$ veya $v \neq 0$ ise **null (ışık) vektör**

(iii) $\langle v, v \rangle > 0$ ise **zamansı vektör**

denir. Ayrıca $\mathbb{R}_v^n$ deki tüm null vektörlerin cümlesine **null koni** adı verilir (Yüce 2015).

Tanım 2.16 M ve N , sırası ile m ve n boyutlu diferensiyellenebilir manifoldlar ve $F : M \rightarrow N$ diferensiyellenebilir bir dönüşüm olsun. Bu durumda F dönüşümünün $p \in M$ noktasındaki rankı F_* dönüşümünün p noktasındaki rankı tanımlanır. Eğer her p noktasındaki F dönüşümünün rankı m ise, yani $\text{rank}(F_*p) = m$, F dönüşümüne **daldırma** veya **immersiyon(immersion)** adı verilir.

Bir F izometrik daldırma ikinci temel formun özdeş olarak sıfır olduğu durumlarda **tümyle geodezik** olarak adlandırılır (Chen 2011, Şahin 2012).

Tanım 2.17 Bir $(\mathcal{M}, g)$ *yarı-Riemann* manifoldu, aşağıdaki özelliklere sahip diferensiyellenebilir n -boyutlu bir $\mathcal{M}$ manifoldu ve $\mathcal{M}$ üzerinde tanımlı, simetrik ve pozitif tanımlı olmayan (indefinite) bir metrik tensörü g olan bir çift olarak tanımlanır. Burada $T_p\mathcal{M}$, $\mathcal{M}$ manifoldu üzerindeki bir p noktasındaki teğet uzayı olmak üzere g metrik tensörü

(i) *Simetriklik*: $\forall X, Y \in T_p\mathcal{M}$ için $g(X, Y) = g(Y, X)$,

(ii) *Pozitif olmayan tanımlılık*: $\forall X \in T_p\mathcal{M}$ için $g(X, X)$ pozitif olmayabilir

özelliklerini sağlar (Lee 1997).

Tanım 2.18 Bir Riemann manifoldu M ve M üzerinde bir Riemann koneksiyonu D olsun. D koneksiyonu

$$D : \chi(M) \times \chi(M) \rightarrow \chi(M)$$

bi-lineer bir dönüşüm olmak üzere $\forall X, Y, Z \in \chi(M)$ ve $\forall f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ için

(i) $D_X(Y + Z) = D_XY + D_XZ$

(ii) $D_{fX}Y = fD_XY$

(iii) $D_X(fY) = fD_XY + X(f)Y$

özelliklerini sağlıyorsa D koneksiyonuna M manifoldu üzerinde tanımlı bir **afin koneksiyon** veya **kovaryant türev** operatörü adı verilir (Hacısalıhoğlu 2003).

Tanım 2.19 (M, g) bir Riemann manifoldu ve M üzerinde tanımlı bir afin koneksiyon D (lineer koneksiyon) olsun. O halde $\forall X, Y, Z \in \chi(M)$ olmak üzere D dönüşümü,

$$(i) \quad D_X Y - D_Y X = [X, Y] \text{ (sıfır torsiyon özelliği)}$$

$$(ii) \quad Zg(X, Y) = g(D_Z X, Y) + g(X, D_Z Y) \text{ (} D \text{ koneksiyonunun metrikle bağdaşılma özelliği)}$$

şartlarını sağlıyorsa D koneksiyonuna M manifoldunun **Levi-Civita koneksiyonu** denir (Hacısalıhoğlu 2003).

Tanım 2.20 $\mathbb{E}^n$ n-boyutlu Öklid uzayında bir koordinat sistemi $(x_1, \dots, x_n)$ olmak üzere,

$$\nabla : C(\mathbb{E}^n, \mathbb{R}) \longrightarrow \chi(\mathbb{E}^n)$$

$$f \longmapsto \nabla f = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_i}$$

şeklinde tanımlanan fonksiyona f fonksiyonunun **gradyent fonksiyonu** denir ve

$$\text{Grad} f = \nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)$$

şeklinde gösterilir (Hacısalıhoğlu 1983).

Tanım 2.21 M bir yarı-Riemann manifoldu ve $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ olsun. ∇f , diferansiyel df diferansiyelinin dual vektör alanıdır ve $\forall X \in \chi(M)$ için

$$\langle \nabla f, X \rangle = df(X) = Xf$$

olur. M manifoldunun koordinat sistemi $(x_1, \dots, x_n)$ cinsinden, df ve ∇f , sırasıyla,

$$df = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j} \partial x_j \quad \text{ve} \quad \nabla f = \sum_{i,j} g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x_i} \partial_j$$

eşitlikleriyle ifade edilir (Chen 2011).

Tanım 2.22 M yarı-Riemann manifoldunun $\mathbb{U}$ komşuluğu üzerinde kurulan bir koordinat sistemi için Christoffel sembolleri

$$\nabla_{\partial_i} \partial_j = \sum_k \Gamma_{ij}^k \partial_k \quad (1 \leq i, j \leq n)$$

şeklinde tanımlanır.

Not: $[\partial_i, \partial_j] = 0$ olduğundan, $\nabla_{\partial_i} \partial_j = \nabla_{\partial_j} \partial_i$ eşitliği gerçekleşir, dolayısıyla $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$ dir. Yani, Christoffel sembolleri alt indislerine göre simetriklerdir.

Önerme 2.1 Bir M manifoldunun $\mathbb{U}$ komşuluğu üzerindeki $(x_1, \dots, x_n)$ bir koordinat sistemi için *Christoffel sembolleri*

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^n g^{km} \left(\frac{\partial g_{jm}}{\partial x_i} + \frac{\partial g_{im}}{\partial x_j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_m} \right)$$

ile verilir. Bu formül literatürde III.tip Christoffel sembolleri olarak adlandırılır

(O'Neill 1983).

Tanım 2.23 $\mathbb{E}^n$ uzayının bir hiperyüzeyi $\mathcal{S}$ ve bu yüzeyinin birim normal vektör alanı N olarak verilsin. $\mathbb{E}^n$ uzayında Riemann koneksiyonu D olmak üzere, her $X \in \chi(\mathcal{S})$ için

$$S(X) = -D_X N$$

şeklinde tanımlı S dönüşümüne $\mathcal{S}$ üzerinde **şekil operatörü** veya $\mathcal{S}$ yüzeyinin **Weingarten dönüşümü** denir (Hacısalihoglu 2000).

Tanım 2.24 $(\mathcal{M}, g)$ bir yarı-Riemann manifoldu, $X \in \chi(M)$ ve $(e_1, \dots, e_n)$ ortonormal baz olmak üzere *divergens* X değeri

$$\operatorname{div} X = \sum_{j=1}^n \epsilon_j \langle \nabla_{e_i} X, e_i \rangle, \quad \epsilon_j = g(e_j, e_j) = \pm 1, \quad g(e_j, e_j) = 0, \quad i \neq j$$

şeklinde veya

$$X = \sum_{j=1}^n X^j \frac{\partial}{\partial x_j} \quad \text{ve} \quad X_i = \sum_{j=1}^n g_{ij} X^j$$

baz vektörleri yardımıyla

$$\operatorname{div} X = \sum_{j=1}^n \left\{ \frac{\partial X_i}{\partial x_i} \right\} + \sum_{k=1}^n \Gamma_{ij}^k X_k$$

olarak ifade edilir (Chen 2011).

Tanım 2.25 n -boyutlu Öklidiyen iç çarpım uzayı standart Öklid iç çarpımı ile $(\mathbb{R}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ biçiminde verilsin. n -boyutlu Hiperbolik uzay modeli

$$\mathbb{H}^n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n | x_1 > 0\}, n \geq 2$$

ve $\mathbb{R}^n$ Öklid uzayının bir alt cümlesi olarak

$$g_{\mathbb{H}^n} = g_p = \frac{1}{x_1^2} \langle \cdot, \cdot \rangle_p, p \in \mathbb{H}^n, n \geq 2$$

hiperbolik metriği ile birlikte ele alınır. Bu metrik, hiperbolik uzayda uzunluk, açı, alan vb. metrik özellikleri ölçmek için kullanılır (O'Neill 1983).

Tanım 2.26 Hiperbolik uzay $\mathbb{H}^n = M$ ve $n \geq 2$ için standart metriği $g_{\mathbb{H}^n}$ ile tanımlanan Öklidiyen uzaydaki Öklid iç çarpımı, standart metrik olarak belirlensin. HESE, $\bar{M} = \mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$ olarak tanımlanan ve Lorentz metriği

$$g = g_{\mathbb{H}^n} - dt^2$$

olan bir yapıdır.

Tanım 2.27 $\mathcal{F} : \mathbb{H}^n \longrightarrow \mathbb{H}^n$ fonksiyonu

- (i) $\mathcal{F}$ fonksiyonu bijektif (birebir ve örten),
- (ii) $\mathcal{F}$ fonksiyonu ve tersi $\mathcal{F}^{-1}$ differensiyellenebilirdir.

koşullarını sağlıyorsa $\mathcal{F}$ dönüşümüne bir **diffeomorfizm** ve g , $\mathbb{H}^n$ hiperbolik uzayının metrik tensörü olmak üzere $\mathcal{F}$ diffeomorfizmi

$$(iii) \quad \forall p \in \mathbb{H}^n \text{ ve } \forall v, w \in T_p \mathbb{H}^n \text{ için } g_{\mathcal{F}(p)}((d\mathcal{F})_p v, (d\mathcal{F})_p w) = g_p(v, w)$$

koşulunu da gerçekleştiriyorsa $\mathcal{F}$ dönüşümüne **izometri** adı verilir (O'Neill 1983).

Tanım 2.28 $\mathbb{R}, n \geq 2$ nin bir Ω açık alt cümle etki alanında yer alır ve aksi belirtilmediği sürece u fonksiyonu $C^2(\Omega)$ uzayındadır.

$$Qu = \sum_{i,j=1}^n a^{ij}(x, u, \nabla u) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + b(x, z, \nabla u), \quad a^{ij} = a^{ji},$$

katsayılarının yani, $a^{ij}(x, z, p)$, $i, j = 1, \dots, n$, $b(x, z, p)$ fonksiyonlarının, $\Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ cümlesinde (x, z, p) üçlüsünün tüm değerleri için tanımlıdır (Gilbarg ve Trudinger 2001).

Tanım 2.29 $\mathcal{U}$, $\Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ cümlesinin bir alt cümlesi olsun. $\mathcal{U}$ için, katsayı matrisi $(a^{ij}(x, z, p))$ ve $\forall (x, z, p) \in \mathcal{U}$ için daima pozitif ise Q operatörü **eliptik operatör** olarak adlandırılır. $(a^{ij}(x, z, p))$ in minimum ve maksimum özdeğerleri, $\lambda(x, z, p)$ ve $\Lambda(x, z, p)$ ile ifade edilir.

Eğer minimum özdeğerlerinin maksimum özdeğerlerine oranı, yani $\frac{\lambda}{\Lambda}$ değeri $\mathcal{U}$ alt cümlesinde sınırlı ise, Ω cümlesine $\mathcal{U}$ üzerinde **düzgün eliptiktir** denir (Gilbarg ve Trudinger 2001).

Not: Eğer Q operatörü, $\Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ cümlesinin tamamında düzgün eliptik ise, Ω da düzgün eliptiktir.

3. LİMİT KÜRELERİ İÇİN ÖTELEME SOLİTONLARI

Bu bölümde, öteleme solitonları kavramı verilecektir ve $\mathbb{H}^n$ hiperbolik uzayı içinde öteleme solitonlarının limit küreleri ile ilişkisi incelenecektir. $(n - 1)$ -boyutlu limit küresi H^{n-1} tanımlanacak ve teğet uzayı hesaplanacaktır. Daha sonra, limit küresinin birim normal vektörü belirlenip şekil operatörü hesaplanacaktır. Ayrıca, bir çözümün öteleme solitonu olması koşulu incelenecek ve bu koşulu içeren bir diferensiyel denklem aranacaktır. Uzaysı ve zamansı durumlar da dahil olmak üzere farklı durumlar ele alınarak, sonuçlar analiz edilecek ve ilgili teoremler verilecektir.

Tanım 3.1 (Ortalama Eğrilik Akışı) I bir açık aralık ve M^n , n -boyutlu düzgün bir manifold ve $(\bar{M}, g)$ ise $n \geq 1$ olmak üzere $(n + 1)$ -boyutlu yarı-Riemann manifoldu olsun.

$$\begin{aligned} F : I \times M &\longrightarrow \bar{M} \\ (t, p) &\longmapsto F(t, p) \end{aligned}$$

düzgün bir harita olmak üzere $\forall t \in I$ için bir $F_t : M \longrightarrow \bar{M}$ haritası vardır. Bu haritanın bir daldırma (immersiyon) olan F_t dönüşümünün düzgün ve $\bar{M}$ manifoldunun her noktasında diferensiyelinin birebir olduğu varsayılır. $\forall t \in I$ için, F_t dönüşümünün ortalama eğrilik vektörü, yani F_t dönüşümünün ikinci temel formunun izi, H_t ile gösterilir.

Eğer $\forall t \in I$ için,

$$H_t(p) = \left(\frac{\partial F}{\partial t}(t, p) \right)^\perp, \quad \forall (t, p) \in I \times M,$$

eşitliği gerçekleşiyorsa F haritası bir ortalama eğrilik akışıdır, burada $(*)^\perp$, F_t dönüşümünün normal cümlesine dik olan izdüşümü anlamına gelir.

Yeterince basit çözümler elde etmek için, $\bar{M}$ manifoldu, M manifoldu ile $\mathbb{R}$ reel sayılar cümlesinin kartezyen çarpımı olarak kabul edilir. Bu durumda, sabit bir $s \in \mathbb{R}$ için

$$\begin{aligned} T_s : M \times \mathbb{R} &\longrightarrow M \times \mathbb{R} \\ (p, t) &\longmapsto T_s(p, t) = (p, t + s) \end{aligned}$$

izometri tanımlanabilir. Aslında, tüm bu izometrilere cümlesi $\bar{M}$ manifoldunun izometri grubudur. Burada

$$T : \mathbb{R} \longrightarrow \text{Iso}(M \times \mathbb{R}, g), \quad T(s) = T_s$$

olur.

İzometrilere gerçekten bir monomorfizm olduğunu kontrol edelim. $\forall (p, t) \in \bar{M}$ için

$$\begin{aligned} T(s + s')(p, t) &= T_{s+s'}(p, t) = (p, t + s + s') = (p, t + s' + s) \\ &= T_s(p, t + s) = T_s \circ T'_s(p, t) \end{aligned}$$

ve $T(s) = id_{M \times \mathbb{R}}$ olduğundan, sırasıyla,

$$T(s + s') = T_s \circ T'_s$$

ve

$$T(s)(p, t) = (p, t)$$

olup

$$(p, t + s) = (p, t) \implies t + s = t \text{ ise } s = 0$$

elde edilir.

Düzgün bir Ω verildiğinde, $f_1 : \Omega \longrightarrow M$ ve $f_2 : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ düzgün haritalar olmak üzere $F_0 : \Omega \longrightarrow M \times \mathbb{R}$, $F_0(p) = (f_1(p), f_2(p))$ bir dardırma olarak verilir. Bununla birlikte öteleme solitonları aracılığıyla

$$F : \Omega \times \mathbb{R} \longrightarrow M \times \mathbb{R}, \quad F(p, t) = (f_1(p), f_2(p) + t) = T_t(F_0(p)).$$

akış tanımlanır. Tanım 3.1'e göre, F dönüşümünü ortalama eğrilik akışının

$$\left(\frac{\partial F}{\partial t}(p, t) \right)^\perp = \mathbf{H}_t(p)$$

bir çözümdür. $F_t = T_t \circ F_0$ olduğundan, öteleme solitonları aracılığıyla hareket edilir ve bu dönüşümler izometrilere dir. İzometrilere ortalama eğrilik vektörünü korur, böylece $\mathbf{H}_t = \mathbf{H}_0$ olur, F_0 dönüşümünün ortalama eğrilik vektörüdür ve

$$\left(\frac{\partial F}{\partial t}(p, t) \right)^\perp \equiv ((0, 1))^\perp \equiv \partial t^\perp$$

eşitliği gerçekleşir.

Tanım 3.2 Eğer $F_t = T_t \circ F_0$ ailesi bir ortalama eğrilik akışı çözümüyse, bir hiperyüzeyin F_0 dönüşümünün bir **öteleme solitonu** veya **translatörü** adını alır. Önceki formülasyona göre, bu

$$\mathbf{H}_0 = \partial t^\perp$$

ile eşdeğerdir (Martín ve Lira 2019, Lawn ve Ortega 2022).

$\Omega \subseteq \mathbb{H}^n$ nin açık bir alt cümlesi olsun ve $u \in C^\infty(\Omega, \mathbb{R})$ grafiği $\Gamma : \Omega \longrightarrow \bar{M}$ olarak inşa edilsin, burada $\Gamma(p) = (p, u(p))$ olur. Metrik $\gamma = \Gamma^* \langle \cdot, \cdot \rangle$, Ω üzerindeki bir ölçü ve $F : (\Omega, \gamma) \longrightarrow (\bar{M}, g)$ indirgenemez bir hiperyüzey olsun. Yaygın tanımlamalar altında, her $X \in TM$ için,

$$dF(X) = (X, du(X)) = (X, \langle \nabla u, X \rangle)$$

şeklinde ifade edilir, burada ∇u , u fonksiyonunun $\langle \cdot, \cdot \rangle$ gradiyentidir. Yukarı yönlü vektör alanı

$$\nu = \frac{1}{W} (\nabla u, 1), \quad W = +\sqrt{\varepsilon(|\nabla u|^2 - 1)} \quad (3.1)$$

şeklindeir. Burada $\varepsilon := \text{sign}(|\nabla u|^2 - 1) = \pm 1$ sabit bir fonksiyondur. ε sabiti tüm Ω üzerinde aynıdır. Yukarıdaki ifadeler göz önüne alındığında, ν vektör alanı elde edilir ve $g(\nu, \nu) = \varepsilon$ olur.

Önerme 3.1 Verilen koşullar altında sadece ve yalnızca, u fonksiyonu için

$$\text{div} \left(\frac{\nabla u}{\sqrt{\varepsilon(|\nabla u|^2 - 1)}} \right) = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon(|\nabla u|^2 - 1)}} \quad (3.2)$$

kısmi diferensiyel denklemi gerçekleştiriyor ise Γ bir grafiksel öteleme solitonudur (Lawn ve Ortega 2022).

Örnek 3.1 $\mathbb{H}^n$ içinde M minimal veya tümüyle geodezik bir hiperyüzey olsun. Bu durumda, $M \times \mathbb{R}$, $\mathbb{H}^n \times_{-1} \mathbb{R}$ içinde de bir zamansı öteleme solitonudur ve grafiksel değildir. Gerçekten de, M , $\mathbb{H}^n$ içinde minimal ve tümüyle geodezik olacaktır, bu da onun ortalama eğrilik vektörünün sıfır olduğu yani, $\mathbf{H} = 0$ eşitliğini gösterir. Ancak şimdi, $\partial_t \in T(M \times \mathbb{R})$ olur. Dolayısıyla, $H = 0 = (\partial t)^\perp$, ∂_t nin $T(M \times \mathbb{R})$ üzerine izdüşümüdür.

$\mathbb{H}^n$ hiperbolik uzayı içinde $(n - 1)$ -boyutlu limit küresi

$$H^{n-1} = \{p = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{H}^n \mid x_1 = \hat{x}_1\}, \hat{x}_1 \in \mathbb{R}$$

şeklinde ifade edilir. Bu, hiperbolik uzayda özel bir alt uzaydır ve x_1 değeri $\hat{x}_1$ ile sabitlenmiştir. Normal vektör

$$N : H^{n-1} \longrightarrow T\mathbb{H}^n$$

$$p \longmapsto \lambda(p) \frac{\partial}{\partial x_1} = \lambda(p) \partial_1$$

şeklinde tanımlanır. H^{n-1} limit küresinin $p \in H^{n-1}$ noktasındaki $T_p H^{n-1}$ teğet uzayı

$$T_p H^{n-1} = \{X \in \mathbb{R}^n \mid X_1 = 0\}, \quad p \in H^{n-1}$$

şeklinde verilir, burada, $X \in T_p H^{n-1}$ için $g(X, N) = 0$ olur. O halde

$$g(N(p), N(p)) = \lambda(p)^2 \frac{1}{x_1^2} \langle \partial_1, \partial_1 \rangle = 1$$

eşitliğinden, $p = (x_1, \dots, x_n) \in H^{n-1}$ için $\lambda(p) = x_1$ ve $N(p) = x_1 \partial_1|_p$ bulunur.

$\mathbb{H}^n$ üzerinde Levi-Civita koneksiyonu ∇ ve N normal vektörünün şekil operatörü S olarak tanımlanır. Burada

$$X = \sum_{i=2}^n X_i \partial_i$$

eşitliği sağlanır. H^{n-1} limit küresinde diferensiyellenebilir bir eğri

$$\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow H^{n-1}, \quad \alpha(t) = (\alpha_1(t), \dots, \alpha_n(t))$$

parametrik denklemi ile verilsin. Bu eğrinin başlangıç noktası

$$\alpha(0) = p = (\alpha_1(0), \dots, \alpha_n(0))$$

ve türevinin $t = 0$ noktasındaki değeri ise

$$\alpha'(0) = v = (\alpha'_1(0), \dots, \alpha'_n(0))$$

şeklindedir. Burada, $\alpha_1(t) = \hat{x}_1$ sabit olduğundan $\alpha'_1(0) = 0$ olur. Bu durumda, $\alpha'(0)$ vektörünün ilk bileşeni sıfır, yani $X \in T H^{n-1}$ olduğunda $X_1 = 0$ olur.

Başka bir deyişle, eğrinin teğet vektörü X , ilk bileşeni sıfır olan bir vektördür.

$(\partial_1, \dots, \partial_n)$ cümlesinin, $(dx_1, \dots, dx_n)$ cümlesinin dual bazı olduğunu hatırlatalım.

O halde,

$$dx_1(X) = \sum_{k=2}^n X_k dx_1(\partial_k) = 0$$

dır. Böylece

$$\begin{aligned} SX &= -\nabla_X N = -\nabla_X (x_1 \partial_1) \\ &= -dx_1(X) \partial_1 - x_1 \nabla_X \partial_1 \\ &= -x_1 \nabla_X \partial_1 \\ &= -x_1 \sum_{i=2}^n X_i \nabla_{\partial_i} \partial_1 \\ &= -x_1 \sum_{i=2}^n X_i \sum_{k=1}^n \Gamma_{i1}^k \partial_k, \quad i \geq 2 \end{aligned}$$

dir.

(2.22) ile verilen Christoffel sembolleri tanımına göre;

$$\begin{aligned} \Gamma_{i1}^k &= \frac{1}{2} \sum_{m=1}^n g^{km} \left(\frac{\partial g_{1m}}{\partial x_i} + \frac{\partial g_{im}}{\partial x_1} - \frac{\partial g_{i1}}{\partial x_m} \right), \quad g_{ij} = \frac{1}{x_1^2} \delta_{ij}; \quad g^{ij} = x_1^2 \delta_{ij} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{m=1}^n x_1^2 \delta_{km} \left(\frac{\partial g_{1m}}{\partial x_i} + \frac{\partial g_{im}}{\partial x_1} - \frac{\partial g_{i1}}{\partial x_m} \right), \quad k = m \\ &= \frac{1}{2} x_1^2 \left(\frac{\partial g_{1k}}{\partial x_i} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial x_1} - \frac{\partial g_{i1}}{\partial x_k} \right), \quad i \geq 2, \quad g_{i1} = 0 \\ &= \frac{1}{2} x_1^2 \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{1}{x_1^2} \delta_{1k} \right) + \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{1}{x_1^2} \delta_{ik} \right) \right) \\ &= \frac{1}{2} x_1^2 \left(\frac{-2}{x_1^3} \delta_{i1} \delta_{1k} + \frac{-2}{x_1^3} \delta_{ik} \right) \\ &= \frac{1}{x_1} (-\delta_{i1} \delta_{1k} - \delta_{ik}) \end{aligned}$$

dır.

Bu durumda bazı basit hesaplamalar yapıldığında

$$\begin{aligned} SX &= -x_1 \sum_{i=2}^n X_i \sum_{k=1}^n \frac{1}{x_1} (-\delta_{i1} \delta_{1k} - \delta_{ik}) \partial_k \\ &= \sum_{i=2}^n \sum_{k=1}^n X_i (\delta_{i1} \delta_{1k} + \delta_{ik}) \partial_k \\ &= \sum_{i=2}^n \sum_{k=1}^n X_i \delta_{ik} \partial_k \\ &= \sum_{j=2}^n X_j \partial_j = X \end{aligned}$$

olarak bulunur.

$p \in H^{n-1}$ için $h(p)$, S şekil operatörü matrisinin izi olsun. Bu durumda

$$h(p) = \text{iz}_g(S) = \text{iz}_g(X \longrightarrow +X) = \text{iz} \begin{pmatrix} +1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & +1 \end{pmatrix}_{(n-1) \times (n-1)}$$

olduğundan,

$$h(p) = (n - 1)$$

eşitliği gerçekleşir.

$\Omega = \overset{\circ}{\Omega} \subset \mathbb{H}^n$ açık bir alt cümle ve $u \in C^\infty(\Omega, \mathbb{R})$ olmak üzere

$$\Gamma : \Omega \longrightarrow M$$

$$p \longmapsto \Gamma(p) = (p, u(p))$$

bir öteleme solitonudur. Üçüncü bölümde tanımlandığı gibi Önerme 3.1 yardımıyla

$$\text{div}_{\mathbb{H}^n} \left(\frac{\nabla u}{W} \right) = \frac{1}{W}$$

eşitliği gerçekleşir. Burada, $W = \sqrt{\varepsilon' (|\nabla u|^2 - 1)}$ ve ε' , Γ öteleme solitonunun normalinin işaretine bağlı olarak hesaplanır. Birim normal vektör alanı

$$\nu_\Gamma : \text{Graph}(u) \longrightarrow \chi(M)$$

olmak üzere Γ öteleme solitonunun dejenere olmadığı, yani Γ^*g nin dejenere olmadığı varsayalım. Bu demektir ki ν birim normal vektörü, $\varepsilon' = -1$ olduğunda uzaysı vektör, $\varepsilon' = +1$ ise zamansı vektör, burada $\varepsilon' = g(\nu, \nu) = \pm 1$ dir. Γ öteleme solitonunun grafiğinin limit küreleri tarafından oluşmasını ve bu nedenle Ω açık alt cümlesinin de limit küreleri tarafından oluşturulmasını istiyoruz. Dolayısıyla, $I \subset \mathbb{R}$ için $\Omega = I \times \mathbb{R}^{n-1}$ olur. u dönüşümünün limit küreleri tarafından değişmez kalmasını bekliyoruz. Böylece, u yalnızca bir değişkene bağlı olur. Burada $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ olmak üzere

$$u : I \times \mathbb{R}^{n-1} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(x_1, \dots, x_n) \longmapsto u(x_1)$$

biçiminde tanımlanır. $\mathbb{H}^n$ hiperbolik uzayı içindeki yörüngelerin yalnızca limit kürelerinin olduğu bir G Lie grubu, yani $G = (\mathbb{R}^{n-1}, +)$ alınacaktır.

Lemma 3.1

$$\Phi : \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{H}^n \longrightarrow \mathbb{H}^n,$$

$$((v_1, \dots, x_{n-1}), (x_1, \dots, v_n)) \longmapsto (x_1, x_2 + v_1, \dots, x_n + v_{n-1})$$

haritası $\mathbb{H}^n$ üzerinde Lie grubu G izometrilerinin düzgün bir hareketidir.

İspat. Burada $v \in \mathbb{R}^{n-1}$ olmak üzere

$$\Phi_v : \mathbb{H}^n \longrightarrow \mathbb{H}^n,$$

$$(x_1, \dots, x_n) \longmapsto (x_1, x_2 + v_1, \dots, x_n + v_{n-1})$$

dönüşümünün bir izometri olduğunun gösterilmesi amaçlanmaktadır. $p \in \mathbb{H}^n$ ve $X \in T_p \mathbb{H}^n$ alındığında, Φ_v düzgün bir haritadır ve $(\Phi_v)^{-1} = \Phi_{-v}$ eşitliği gerçekleşir. Gerçekten,

$$\begin{aligned} \Phi_v \circ \Phi_{-v}(p) &= \Phi_v(x_1, x_2 - v_1, \dots, x_n - v_{n-1}) \\ &= (x_1, x_2 - v_1 + v_1, \dots, x_n - v_{n-1} + v_{n-1}) = p \end{aligned}$$

olur. Diğer yandan

$$\begin{aligned} (d\Phi_v)_p X &= \frac{d}{dt} \Phi_v \circ \alpha(t) \big|_{t=0} \\ &= \frac{d}{dt} \Phi_v(\alpha_1(t), \dots, \alpha_n(t)) \big|_{t=0} \\ &= \frac{d}{dt} (\alpha_1(t), \alpha_2(t) + v_1, \dots, \alpha_n(t) + v_{n-1}) \big|_{t=0} \\ &= (\alpha'_1(t), \alpha'_2(t), \dots, \alpha'_n(t)) \big|_{t=0} = X \end{aligned}$$

gerçeklenir. ■

Önceki hesaplamalarda, Lie grubunun izometrilere göre hareket ettiği gösterildi. Bu nedenle, $p, q \in \mathbb{H}^n$ için, $p \sim q$ eğer $\Phi_v(p) = q$ sağlayan $v \in G$ varsa, bu bir eşdeğerlik ilişkisini sağlar. Sonra, $\Pi : \mathbb{H}^n \longrightarrow \mathbb{H}^n / \Sigma$ bir izdüşüm fonksiyonu elde edilir, burada $\mathbb{H}^n / G \equiv (0, +\infty)$ olur. $p = (x_1, \dots, x_n)$, $q = (y_1, \dots, y_n)$ olmak üzere, $p \sim q$ olması için gerek ve yeter şart $x_1 = y_1 > 0$ olmasıdır. Bu da bölümün $(0, +\infty)$ aralığında tanımlanabileceğini doğrulamaktadır,

$$\Pi : \mathbb{H}^n \longrightarrow (0, +\infty) \subseteq \mathbb{R}$$

doğrusal bir haritadır. Her $p \in \mathbb{H}^n$ için, $(d\Pi)_p = \Pi$ gerçekleşir. Ancak, $\mathbb{H}^n$ hiperbolik uzaydaki $\mathbb{H}^n / G = \mathbb{R}$ uzayına izdüşüm fonksiyonu

$$\rho : \mathbb{H}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

için $\rho(x_1, \dots, x_n) = \ln(x_1)$ dönüşümü kullanılacaktır. O halde,

$\nabla \rho|_p = \frac{1}{x_1} \nabla \Pi|_p = x_1 \partial_1|_p$ olduğundan $|\nabla \rho|^2 = g(x_1 \partial_1, x_1 \partial_1) = x_1^2 \frac{1}{x_1^2} = 1$ olur. $\rho(\Omega) = \mathbb{R}$ eşitliğinden, $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $u = f \circ \rho$ öyle ki $F(p) = (p, f(\rho(p)))$ ve $\text{graph}(f \circ \rho)$ limit küreleri ile oluşur.

$s \in \mathbb{R}$ için $H_s = \rho^{-1}(s)$ limit küresidir. H_s limit küresinin $-\nabla \rho$ ya göre ortalama eğriliğini hesaplayalım. $N(p) = x_1 \partial_1|_p = \nabla \rho(p)$ olduğu bilindiğine göre, normali $N(p) = -x_1 \partial_1|_p$ olarak değiştirerek, $h(p) = 1 - n$ elde edilir. $(\nabla \rho)$ nun divergensi

$$\text{div}(\nabla \rho) = \sum_{i=1}^{n-1} g(\nabla_{e_i} \nabla \rho, e_i)$$

olur. Burada $(e_1, \dots, e_{n-1}, e_n = \nabla \rho)$ $T\mathbb{H}^n$ tanjant uzayı üzerinde yerel ortonormal baz cümlesidir. Gerekli hesaplamalar yapıldığında

$$g(\nabla_{\nabla \rho} \nabla \rho, \nabla \rho) = \frac{1}{2} \nabla \rho(g(\nabla \rho, \nabla \rho)) = 0$$

elde edilir.

ρ fonksiyonunun gradiyenti, ρ fonksiyonunun seviye cümlelerine dik bir birim vektördür, dolayısıyla kendi üzerine olan türevi sıfırdır. S şekil operatörü

$$\nabla_X N = -SX$$

eşitliği ile ifade edilir. Daha sonra,

$$g(\nabla_X N, X) = -g(SX, X)$$

gerçeklenir. Bu, X yönündeki ikinci temel form katsayılarının toplamını verir. Son olarak, h ortalama eğriliğini elde etmek için tüm e_i koordinat yönleri toplanırsa

$$\sum_{i=1}^n g(\nabla_{e_i} N, e_i) = -h$$

bulunur. Ayrıca, $\tilde{\varepsilon} = |\nabla \rho| = +1$ olduğu göz önüne alındığında, $u = f \circ \rho$ olduğu varsayılır ve $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ bir dönüşüm olur. Bu, Γ_u kısmi diferensiyelinin limit küreleri tarafından oluşturulduğu anlamına gelir. Lawn ve Ortega (2022)'nin makalesinde yer alan *Theorem 3.5*'e göre, Γ_u bir öteleme solitonu olması için gerek ve yeter şart

$$f''(s) = (1 - f'(s)^2)(1 - f'(s)(n-1)), \quad n \geq 2 \quad (3.3)$$

olmasıdır. Şimdi, $w = f'$ alalım, böylece $w' = f''$ olur ve $m = n - 1$ parametre değişikliği yapılırsa

$$w'(s) = (1 - w(s)^2)(1 - mw(s)), \text{ burada } m \in \mathbb{R}, m \geq 1 \quad (3.4)$$

elde edilir.

Şimdi, (3.4) ile verilen diferensiyel denklemin çözümünde mümkün olan durumları ayrı ayrı inceleyelim.

3.1 $w(s) = \pm 1$ durumu

Bu durumda, f fonksiyonu $f(s) = \pm s + f_0$ olur, burada f_0 sabit terimdir. Γ dejenere olduğundan bu durum göz ardı edilir.

3.2 $w(s) = \frac{1}{m}$ durumu

Bu durumda, $1 \neq m = n - 1 \geq 1$ olur ve fonksiyon $f_1(s) = \frac{s}{m} + f_0$ biçiminde elde edilir ve f_0 sabit terimdir. Dolayısıyla Γ uzaysı olur.

3.3 $w(s) \neq \pm 1$ ve $w(s) \neq \frac{1}{m}$ durumu

Bu durumun çözümü için bazı hesaplamalar yapılırsa, $s_0 \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$\frac{w'(s)}{(1 - w^2(s))(1 - mw(s))} = 1 \Rightarrow \int \frac{w'(s)}{(1 - w^2(s))(1 - mw(s))} ds = s - s_0$$

olur. Değişken değişikliği $x = w(s) \Rightarrow dx = w'(s)ds$ yapıldığında

$$\int \frac{dx}{(1 - x^2)(1 - mx)} = s - s_0 \quad (3.5)$$

olur.

Buna göre, m değerinin durumlarına göre aşağıdaki sınıflandırma yapılabilir.

3.3.1 $m = 1$ durumu

(3.5) eşitliğindeki integralde $m = 1$ alınır

$$\int \frac{dx}{(1 - x)^2(1 + x)} = s - s_0 \quad (3.6)$$

olur. Burada

$$\frac{1}{(1-x)^2(1+x)} = \frac{A}{1-x} + \frac{B}{(1-x)^2} + \frac{C}{1+x} \quad (3.7)$$

olduğu göz önüne alınırsa

$$\begin{cases} A(1-x)(1+x) + B(1+x) + C(1-x)^2 = 1, \\ A(1-x^2) + B(1+x) + C(x^2 - 2x + 1) = 1, \\ x^2(-A+C) + x(B-2C) + A+B+C = 1, \end{cases}$$

elde edilir.

$$\begin{cases} -A+C=0 \implies A=C, \\ B-2C=0 \implies B=2C, \\ A+B+C=1 \implies C+2C+C=1, \end{cases}$$

eşitliklerinden

$$A = \frac{1}{4}, \quad B = \frac{1}{2} \text{ ve } C = \frac{1}{4}$$

değerleri bulunur.

A, B ve C değerleri (3.7) denkleminde yerine konulup elde edilen denklem (3.6) denkleminde göz önüne alınırsa (3.5) denkleminin çözümü

$$\mathbf{P}(\mathbf{x}) := \int \frac{dx}{(1-x)^2(1+x)} = -\frac{1}{4} \ln|1-x| + \frac{1}{2} \frac{1}{1-x} + \frac{1}{4} \ln|1+x| + D \quad (3.8)$$

şeklinde elde edilir. Aşağıdaki aralıklara ihtiyaç olduğu açıktır:

$$\mathbb{R} - \{-1, +1\} = (-\infty, -1) \cup (-1, +1) \cup (+1, +\infty).$$

$\mathbf{P}$ fonksiyonu farklı aralıklarla sınırlandırarak 3 farklı fonksiyon elde edilir, yani, $P_1 = \mathbf{P}|_{(-\infty, -1)}$, $P_2 = \mathbf{P}|_{(-1, +1)}$, $P_3 = \mathbf{P}|_{(+1, +\infty)}$ fonksiyonları. Bunların özellikleri aşağıdaki önermeler ile verilir.

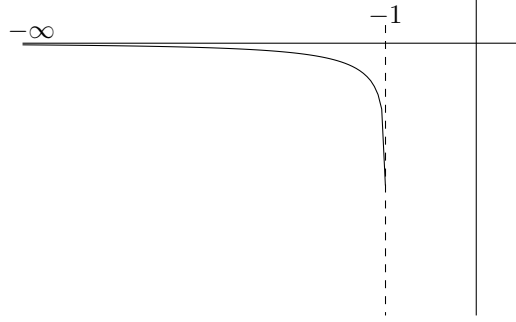
Önerme 3.2 $x < -1$ için, $P_1(x)$ fonksiyonu

$$P_1(x) = -\frac{1}{4} \ln(1-x) + \frac{1}{2(1-x)} + \frac{1}{4} \ln(-1-x) = \frac{1}{4} \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) + \frac{1}{2(1-x)}.$$

biçiminde ifade edilir. Ayrıca, x belirli değerlere yaklaştıkça fonksiyonun sınırları

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} P_1(x) = 0, \quad \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x < -1 \\ x+1 < 0}} P_1(x) = -\infty$$

olur. Bu durumda, P_1 fonksiyonu sürekli azalan ve $\text{Im}(P_1) = (-\infty, 0)$ olur. Şekil 3.1 ile P_1 fonksiyonunun grafiği verilmiştir.



Şekil 3.1 P_1 fonksiyonunun grafiği

İspat. Sınırları belirlemek için (3.8) denklemi $x < -1$ için tanımlanır ve limit değerleri

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -\infty} P_1(x) &= \frac{1}{4} \ln(1) + \frac{1}{2(+\infty)} = 0, \\ \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x < -1}} P_1(x) &= \frac{1}{4} \ln\left(\frac{-0}{-2}\right) + \frac{1}{2(-2)} = -\infty\end{aligned}$$

bulunur. Bu da ispatı tamamlar. ■

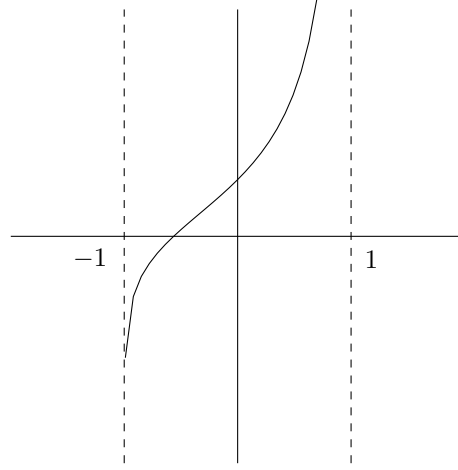
Önerme 3.3 $-1 < x < +1$ için, $P_2(x)$ fonksiyonu

$$P_2(x) = -\frac{1}{4} \ln(1-x) + \frac{1}{2(1-x)} + \frac{1}{4} \ln(1+x) = \frac{1}{4} \ln \frac{(x+1)}{(1-x)} + \frac{1}{2(1-x)}$$

biçiminde ifade edilir. Ayrıca, x belirli değerlere yaklaştıkça fonksiyonun sınırları

$$\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1 \\ x+1 > 0}} P_2(x) = -\infty, \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1 \\ x-1 < 0}} P_2(x) = +\infty$$

şeklindedir. Bu durumda, P_2 fonksiyonu sürekli artan ve $\text{Im}(P_2) = \mathbb{R}$ olur. Şekil 3.2 de P_2 fonksiyonunun grafiği görülmektedir.



Şekil 3.2 P_2 fonksiyonunun grafiği

İspat. Sınırları belirlemek için (3.8) denklemi $-1 < x < +1$ olduğu göz önüne alınır ve limit değerleri

$$\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} P_2(x) = \frac{1}{4} \ln \left(\frac{+0}{2} \right) + \frac{1}{2(+2)} = -\infty,$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} P_2(x) = \frac{1}{4} \ln \left(\frac{2}{+0} \right) + \frac{1}{2(+0)} = +\infty$$

elde edilir. Böylece, ispat tamamlanır. ■

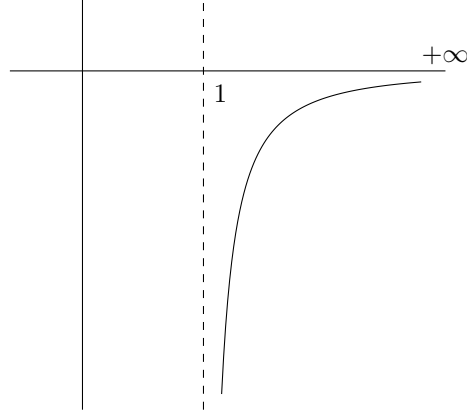
Önerme 3.4 $1 < x < +\infty$ için, $P_3(x)$ fonksiyonu

$$P_3(x) = -\frac{1}{4} \ln(-1+x) + \frac{1}{2(1-x)} + \frac{1}{4} \ln(1+x) = \frac{1}{4} \ln \frac{(x+1)}{(x-1)} + \frac{1}{2(1-x)}$$

olarak elde edilir. Ek olarak, P_1 ve P_2 çözümlerindeki gibi bir yaklaşım izlenerek P_3 fonksiyonunun sınır değerleri

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1 \\ x-1 > 0}} P_3(x) = -\infty, \quad \lim_{+\infty} P_3(x) = 0$$

biçiminde bulunur. Burada, P_3 fonksiyonu sürekli artan ve $\text{Im}(P_3) = (-\infty, 0)$ olur. Şekil 3.3 ile P_3 fonksiyonunun grafiği verilmektedir.



Şekil 3.3 P_3 fonksiyonunun grafiği

İspat. Sınırları belirlemek için aşağıdaki işlemler yapılırsa

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} P_3(x) = \frac{1}{4} \ln \left(\frac{2}{+0} \right) + \frac{2}{2(-0)} = +\infty + (-\infty)$$

belirsizliği ortaya çıkar. Belirsizlikten kurtarmak için L' Hospital kuralı kullanıldığında

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \left(-\frac{1}{4} \ln(x-1) + \frac{1}{2(1-x)} + \frac{1}{4} \ln(1+x) \right) &= \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \left(-\frac{1}{4} \ln(x-1) + \frac{1}{4} \frac{2}{1-x} \right) \\ &\quad + \frac{\ln(2)}{4} \\ &= -\infty \end{aligned}$$

elde edilir ve limit değeri

$$\lim_{+\infty} P_3(x) = \frac{1}{4} \ln(1) + \frac{1}{-\infty} = 0$$

olur. Bu da ispatı tamamlar. ■

Şimdi, $P_1 : (-\infty, -1) \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun ters fonksiyonunu inşaa edelim.

$P_1(w(s)) = s - s_0 \in (-\infty, 0)$ göz önüne alınırsa $s < s_0$ olur. O halde, $s_0 \in \mathbb{R}$ verildiğinde,

$$t_1 : (-\infty, s_0) \rightarrow (-\infty, -1), s \mapsto t_1(s) = P_1^{-1}(s - s_0)$$

dır.

Böylece

$$f_2 : (-\infty, s_0) \rightarrow \mathbb{R}, s \mapsto f_2(s) = \int_{s_0}^s t_1(v) dv + \widehat{f}_2, \widehat{f}_2 \in \mathbb{R}$$

olarak tanımlanır.

Şimdi de $P_2 : (-1, +1) \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun ters fonksiyonunu inşaa edelim.

$P_2(w(s)) = s - s_0 \in (-\infty, +\infty)$ olduğu göz önüne alınırsa, $s_0 \in \mathbb{R}$ verildiğinde, f_3 fonksiyonu

$$f_3 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, s \mapsto f_3(s) = \int_{s_0}^s t_2(r)dr + \widehat{f}_3, \widehat{f}_3 \in \mathbb{R}$$

olur. Burada,

$$t_2 : \mathbb{R} \rightarrow (-1, 1), s \mapsto t_2(s) = P_2^{-1}(s - s_0)$$

olup, benzer şekilde, $s_0 \in \mathbb{R}$ verildiğinde,

$$t_3 : (-\infty, s_0) \longrightarrow (1, +\infty), s \mapsto t_3(s) = P_3^{-1}(s - s_0)$$

olmak üzere f_4 fonksiyonu

$$f_4 : (-\infty, s_0) \longrightarrow \mathbb{R}, s \mapsto f_4(s) = \int_{s_0}^s t_3(k)dk + \widehat{f}_4, \widehat{f}_4 \in \mathbb{R}$$

şeklinde elde edilir.

3.3.2 $m > 1$ durumu

(3.5) eşitliğindeki integralde yer alan $\int \frac{dx}{(1-x^2)(1-mx)}$ ifadesi

$$\frac{1}{(1-x^2)(1-mx)} = \frac{A}{1-x} + \frac{B}{1+x} + \frac{C}{1-mx}, \quad (3.9)$$

eşitliği yardımıyla düzenlenirse

$$\begin{cases} A(1+x)(1-mx) + B(1-x)(1-mx) + C(1-x^2) = 1, \\ x^2(-mA + mB - C) + x(-mA + A - mB - B) + A + B + C = 1, \end{cases}$$

elde edilir. Burada,

$$\begin{cases} -mA + mB - C = 0, \\ (1-m)A - (1+m)B = 0, \\ A + B + C = 1, \end{cases}$$

denklemlerinin bir sonucu olarak

$$A = -\frac{1}{2m-2}, \quad B = \frac{1}{2m+2} \quad \text{ve} \quad C = \frac{m^2}{m^2-1}$$

değerleri bulunur. A , B ve C değerleri (3.9) denkleminde yerine yazıldığında,

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{(1-x^2)(1-mx)} &= -\frac{1}{2m-2} \int \frac{1}{1-x} dx + \frac{1}{2m+2} \int \frac{1}{1+x} dx \\ &\quad + \frac{m^2}{m^2-1} \int \frac{1}{1-mx} dx \\ &= \frac{1}{2m-2} \ln|1-x| + \frac{1}{2m+2} \ln|1+x| \\ &\quad - \frac{m}{m^2-1} \ln|1-mx| + E, \quad E \in \mathbb{R},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{Q}(\mathbf{x}) := \int \frac{dx}{(1-x^2)(1-mx)} &= \frac{1}{2m-2} \ln|1-x| + \frac{1}{2m+2} \ln|1+x| \\ &\quad - \frac{m}{m^2-1} \ln|1-mx| \quad (3.10)\end{aligned}$$

elde edilir.

$m > 1$ için,

$$\mathbb{R} - \{-1, +1, 1/m\} = (-\infty, -1) \cup (-1, 1/m) \cup (1/m, +1) \cup (+1, +\infty),$$

aralıklara ihtiyaç olduğu açıktır. $\mathbf{Q}$ fonksiyonu farklı aralıklarla kısıtlanarak

$Q_1 = \mathbf{Q}|_{(-\infty, -1)}$, $Q_2 = \mathbf{Q}|_{(-1, 1/m)}$, $Q_3 = \mathbf{Q}|_{(1/m, +1)}$, $Q_4 = \mathbf{Q}|_{(+1, +\infty)}$ fonksiyonları elde edilir. Bunların bazı özellikleri aşağıdaki Önerme'ler ile verilebilir.

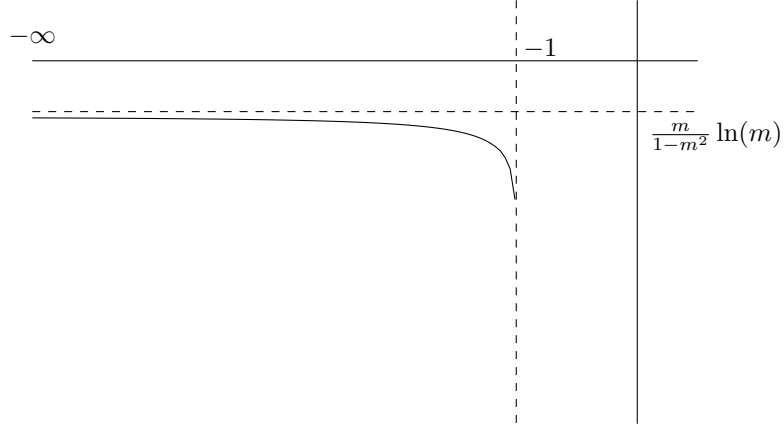
Önerme 3.5 $-\infty < x < -1$ için, $Q_1(x)$ fonksiyonu

$$Q_1(x) = \frac{1}{2m-2} \ln(1-x) + \frac{1}{2m+2} \ln(-1-x) - \frac{m}{m^2-1} \ln(1-mx)$$

eşitliğiyle ifade edilir. Ayrıca, x belirli değerlere yaklaştıkça fonksiyonun sınırları

$$\begin{aligned}\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x < -1 \\ x+1 < 0}} Q_1(x) &= -\infty, \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} Q_1(x) &= -\frac{m}{m^2-1} \ln(m) < 0; \quad m > 1\end{aligned}$$

olur. Burada, Q_1 fonksiyonu azalan ve $\text{Im}(Q_1) = (-\infty, \frac{m}{1-m^2} \ln(m))$ olur. Şekil 3.4 ile Q_1 fonksiyonunun grafiği verilmektedir.



Şekil 3.4 Q_1 fonksiyonunun grafiği

İspat. Limit değerlerini belirleyelim.

$$\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x < -1}} Q_1(x) = \frac{1}{2m-2} \ln(2) + \frac{1}{2m+2} \ln(0) - \frac{m}{m^2-1} \ln(1+m) = -\infty.$$

Diğer limit değeri

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} &= \left(\frac{1}{2m-2} \ln(1-x) + \frac{1}{2m+2} \ln(-1-x) - \frac{m}{m^2-1} \ln(1-mx) \right) \\ &= +\infty + (+\infty) - (+\infty) \end{aligned}$$

dir. Belirsizlik limit kurallarına göre çözüldüğünde,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} = \left(\frac{1}{2m-2} \ln(-x) + \frac{1}{2m+2} \ln(-x) - \frac{m}{m^2-1} \ln(m) - \frac{m}{m^2-1} \ln(-x) \right)$$

olduğundan limit değeri

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} Q_1(x) = -\frac{m}{m^2-1} \ln(m)$$

olur. Bu da ispatı tamamlar. ■

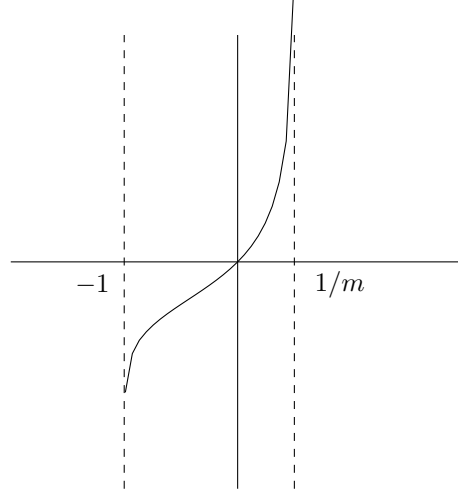
Önerme 3.6 $-1 < x < \frac{1}{m}$ için, $Q_2(x)$ fonksiyonu

$$Q_2(x) = \frac{1}{2m-2} \ln(1-x) + \frac{1}{2m+2} \ln(1+x) - \frac{m}{m^2-1} \ln(1-mx)$$

biçiminde ifade edilir. Ayrıca, x belirli değerlere yaklaştıkça fonksiyonun sınırları

$$\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1 \\ x+1 > 0}} Q_2(x) = -\infty, \quad \lim_{\substack{x \rightarrow \frac{1}{m} \\ x < \frac{1}{m} \\ x - \frac{1}{m} < 0}} Q_2(x) = +\infty$$

olur. Burada, Q_2 fonksiyonu artan ve $\text{Im}(Q_2) = (-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$ olur. Şekil 3.5'de Q_2 fonksiyonunun grafiği verilmektedir.



Şekil 3.5 Q_2 fonksiyonunun grafiği

İspat. Sınırları belirlemek için aşağıdaki adımlar incelenir:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} Q_2(x) = \frac{1}{2m-2} \ln(2) + \frac{1}{2m+2} \ln(0) - \frac{m}{m^2-1} \ln(1+m) = -\infty.$$

Diğer limit değeri

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{x \rightarrow \frac{1}{m} \\ x < \frac{1}{m}}} Q_2(x) &= \frac{1}{2m-2} \ln(1-x) + \frac{1}{2m+2} \ln(1+x) - \frac{m}{m^2-1} \ln(1-mx) \\ &= \frac{1}{2m-2} \ln\left(1 - \frac{1}{m}\right) + \frac{1}{2m+2} \ln\left(1 + \frac{1}{m}\right) - \frac{m}{m^2-1} \ln(0) = +\infty \end{aligned}$$

olarak bulunur ve böylece ispat tamamlanır. ■

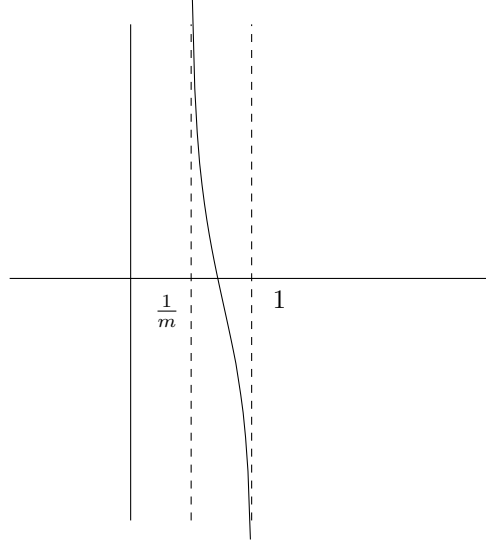
Önerme 3.7 $\frac{1}{m} < x < +1$ için, $Q_3(x)$ fonksiyonu

$$Q_3(x) = \frac{1}{2m-2} \ln(1-x) + \frac{1}{2m+2} \ln(1+x) - \frac{m}{m^2-1} \ln(-1+mx)$$

eşitliği verilir. Ayrıca, x belirli değerlere yaklaştıkça fonksiyonun sınırları

$$\lim_{\substack{x \rightarrow \frac{1}{m} \\ x > \frac{1}{m} \\ x - \frac{1}{m} > 0}} Q_3(x) = +\infty, \quad \lim_{\substack{x \rightarrow +1 \\ x < 1 \\ x - 1 < 0}} Q_3(x) = -\infty$$

olur. Burada, Q_3 fonksiyonu azalan ve $\text{Im}(Q_3) = (-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$ olur. Q_2 fonksiyonunun grafiği Şekil 3.6'da görülmektedir.



Şekil 3.6 Q_3 fonksiyonunun grafiği

İspat. Aşağıdaki adımlar yarımıyla kolaylıkla

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{x \rightarrow \frac{1}{m} \\ x > \frac{1}{m}}} Q_3(x) &= \frac{1}{2m-2} \ln \left(1 - \frac{1}{m} \right) + \frac{1}{2m+2} \ln \left(1 + \frac{1}{m} \right) \frac{m}{m^2-1} \ln(0) = +\infty, \\ \lim_{\substack{x \rightarrow +1 \\ x < 1}} Q_3(x) &= \frac{1}{2m-2} \ln(1-x) + \frac{1}{2m+2} \ln(1+m) - \frac{m}{m^2-1} \ln(-1+mx) \\ &= \frac{1}{2m-2} \ln(0) + \frac{1}{2m+2} \ln(2) - \frac{m}{m^2-1} \ln(-1+m) = -\infty \end{aligned}$$

görülür ve bu da ispatı tamamlar. ■

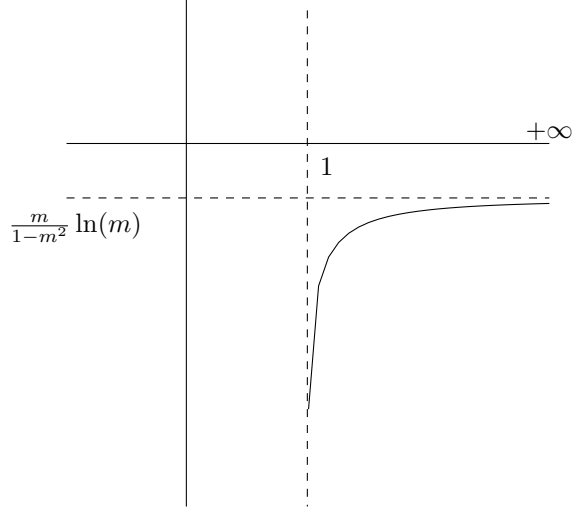
Önerme 3.8 $+1 < x < +\infty$ için, $Q_4(x)$ fonksiyonu

$$Q_4(x) = \frac{1}{2m-2} \ln(-1+x) + \frac{1}{2m+2} \ln(1+x) - \frac{m}{m^2-1} \ln(-1+mx)$$

biçiminde tanımlanır. Ayrıca, önceki fonksiyonlarda olduğu gibi sınırlar

$$\lim_{\substack{x \rightarrow +1 \\ x > 1 \\ x-1 > 0}} Q_4(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} Q_4(x) = \frac{m}{1-m^2} \ln(m) < 0; \quad m > 1$$

elde edilir. Burada, Q_4 fonksiyonu artan ve $\text{Im}(Q_4) = (-\infty, \frac{m}{1-m^2} \ln(m))$ olur. Şekil 3.7 ile Q_2 fonksiyonunun grafiği çizilmiştir.



Şekil 3.7 Q_4 fonksiyonunun grafiği

İspat. Bu sınırların nasıl belirlendiğini detaylı olarak açıklayalım.

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{x \rightarrow +1 \\ x > 1}} Q_4(x) &= \frac{1}{2m-2} \ln(-1+x) + \frac{1}{2m+2} \ln(1+x) - \frac{m}{m^2-1} \ln(-1+m) \\ &= \frac{1}{2m-2} \ln(0) + \frac{1}{2m+2} \ln(2) - \frac{m}{m^2-1} \ln(-1+m) = -\infty. \end{aligned}$$

Diğer limit değeri hesaplanırsa

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} Q_4(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2m-2} \ln(x-1) + \frac{1}{2m+2} \ln(x+1) - \frac{m}{m^2-1} \ln(mx-1) \right) \\ &= +\infty + (+\infty) - (+\infty) \end{aligned}$$

olur. Belirsizlik limit kurallarına göre çözülürse

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} Q_4(x) = \frac{m}{1-m^2} \ln(m) < 0; \quad m > 1$$

olarak hesaplanır. Bu da ispatı tamamlar. ■

Elde edilen fonksiyonları uzaysı ve zamansı özelliklerine göre sınıflandırarak, yukarıdaki lemmalar ışığında kolaylıkla görülen ispatsız olarak yer alan aşağıdaki iki teorem verilebilir.

Teorem 3.1 $\Gamma : \Omega \longrightarrow \mathbb{H}^n \times_{-1} \mathbb{R}$ bir uzaysı öteleme solitonu (translatör) olsun. $\forall p \in \Omega$ için, $\Gamma(p) = (p, u(p))$ olur, burada $u \in C^2(\Omega)$ dir. O halde, Γ limit küreleri tarafından oluşturulur ancak ve ancak $f \in C^2(I)$, $I \subseteq \mathbb{R}$ dir öyle ki $u = f \circ \rho$ ve f aşağıdaki durumları gerçektir.

1. $f_1 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, f_1(s) = \frac{s}{n-1} + f_0, f_0 \in \mathbb{R}.$
2. $n = 2, f_3 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, f_3(s) = \int P_2^{-1}(s)ds + f_0, f_0 \in \mathbb{R}.$
3. $n > 2, f_6 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, f_6(s) = \int Q_2^{-1}(s)ds + f_0, f_0 \in \mathbb{R}.$
4. $n > 2, f_7 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, f_7(s) = \int Q_3^{-1}(s)ds + f_0, f_0 \in \mathbb{R}.$

Teorem 3.2 $\Gamma : \Omega \longrightarrow \mathbb{H}^n \times_{-1} \mathbb{R}$ bir grafiksel zamansı öteleme solitonu (translatör) olsun. $\forall p \in \Omega$ için, $\Gamma(p) = (p, u(p))$ olur, burada $u \in C^2(\Omega)$ dir. O halde, Γ limit küreleri tarafından oluşturulur ancak ve ancak $f \in C^2(I), I \subseteq \mathbb{R}$ dir öyle ki $u = f \circ \rho$ ve f aşağıdaki durumları gerçeker.

1. $n = 2, f_2 : (-\infty, s_0) \longrightarrow \mathbb{R}, f_2(s) = \int P_1^{-1}(s)ds + f_0, f_0 \in \mathbb{R}.$
2. $n = 2, f_4 : (-\infty, s_0) \longrightarrow \mathbb{R}, f_4(s) = \int P_3^{-1}(s)ds + f_0, f_0 \in \mathbb{R}.$
3. $n > 2, f_5 : (-\infty, \frac{1-n}{n^2-2n} \ln(n-1)) \longrightarrow \mathbb{R}, f_5(s) = \int Q_1^{-1}(s)ds + f_0, f_0 \in \mathbb{R}.$
4. $n > 2, f_8 : (-\infty, \frac{n-1}{2n-n^2} \ln(n-1)) \longrightarrow \mathbb{R}, f_8(s) = \int Q_4^{-1}(s)ds + f_0, f_0 \in \mathbb{R}.$

4. ROTASYONEL OLARAK DEĞİŞMEZLER

Bu bölümde, rotasyonel olarak değişmez olan öteleme solitonları incelenecektir. Bir başka deyişle, Lie grubunun, $SO(n)$ izometrilere hiperbolik uzaydaki etkisi gösterilecektir. Bunu yaparken Weierstrass hiperkuadrik modeli kullanılacaktır. Bu şekilde, kısmi diferensiyel denklemdaki değişken sayısını azaltarak bir adi diferensiyel denklem elde edilmesi sağlanacaktır. Daha sonra, bu ADD nin tüm çözümlerini içeren bir çalışma yapılacaktır. Bunu sağlayabilmek için de Öklid düzlemindeki bir vektör alanının tüm ADD çözümleri, bu vektör alanının integral eğrileri yardımıyla oluşturulabilmesini sağlayacaktır. Ayrıca Lawn ve Ortega (2022)'nin "Translating Solitons in a Lorentzian Setting, Submersions and Cohomogeneity One Actions" adlı makalesinden ve S. Wiggins' in "Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos" adlı kitabında bulunan dinamik sistemlerden yararlanılarak bazı sonuçlara yer verilecektir.

$n \geq 2$ olmak üzere Lorentz uzayı,

$$\langle (x_1, \dots, x_{n+1}), (y_1, \dots, y_{n+1}) \rangle_L = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n - x_{n+1} y_{n+1}$$

iç çarpımıyla birlikte

$$\mathbb{L}^{n+1} = \mathbb{R}^{n+1}$$

şeklinde ve hiperbolik model

$$\mathbb{H}^n = \{p \in \mathbb{L}^{n+1} \mid \langle p, p \rangle_L = -1, p_{n+1} > 0\}$$

şeklinde tanımlansın. Basit hesaplamalarla $T_p \mathbb{H}^n = \{V \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \langle V, p \rangle_L = 0\}$ olduğu görülür. Şimdi, $\chi : \mathbb{H}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$, $\chi(p) = p$ pozisyon vektörünü tanımlayalım. Bu vektör $\mathbb{L}^{n+1}$ üzerindeki $\mathbb{H}^n$ uzayına birim zamansı normal vektör alanıdır. Ayrıca, $A_\chi V = +V$ (aynı zamanda denk olarak $A_\chi = +id_{T_p \mathbb{H}^n}$) olduğundan, $\mathbb{H}^n \rightarrow \mathbb{L}^{n+1}$ tümüyle umbilik olur.

$$\rho : \mathbb{H}^{n+1} \rightarrow [1, +\infty)$$

$$(p_1, \dots, p_n) \mapsto p_{n+1} = \rho(p_1, \dots, p_n)$$

dönüşümünü ele alalım. $\rho^{-1}\{s\} = \{p \in \mathbb{H}^n | p_{n+1} = s, s \geq 1\}$ sağlanır ve dolayısıyla bu cümle $\sqrt{s^2 - 1}$ yarıçaplı bir $(n - 1)$ küredir.

$\nabla \rho = -\partial_{n+1} + a\chi \in T_p \mathbb{H}^n$ olduğundan, $\langle \nabla \rho, \chi \rangle_L = 0$ gerçekleşir. Bazı hesaplamalar ile

$$\begin{aligned} 0 &= \langle -\partial_{n+1} + a\chi, \chi \rangle_L \\ &= \langle -\partial_{n+1}, \chi \rangle_L + a\langle \chi, \chi \rangle_L \\ &= -\langle -\partial_{n+1}, \chi \rangle_L - a \implies a = -\langle \partial_{n+1}, \chi \rangle_L \end{aligned}$$

eşitliği bulunur. Buradan

$$\begin{aligned} \langle \nabla \rho, \nabla \rho \rangle_L &= \langle -\partial_{n+1} - \langle \partial_{n+1}, \chi \rangle \chi, -\partial_{n+1} - \langle \partial_{n+1}, \chi \rangle \chi \rangle \\ &= \langle \partial_{n+1} + \langle \partial_{n+1}, \chi \rangle \chi, \partial_{n+1} + \langle \partial_{n+1}, \chi \rangle \chi \rangle \\ &= \langle \partial_{n+1}, \partial_{n+1} \rangle + \langle \partial_{n+1}, \chi \rangle^2 \langle \chi, \chi \rangle + 2\langle \partial_{n+1}, \chi \rangle \langle \chi, \chi \rangle \\ &= -1 + \langle \partial_{n+1}, \chi \rangle^2 (-1) + 2\langle \partial_{n+1}, \chi \rangle^2 \\ &= \langle \partial_{n+1}, \chi \rangle^2 - 1 \neq +1 \end{aligned}$$

elde edilir. Yapılan hesaplamalar neticesinde

$$\nabla \rho = -\partial_{n+1} - \langle \partial_{n+1}, \chi \rangle \chi,$$

$$\langle \nabla \rho, \nabla \rho \rangle_L = \langle -\partial_{n+1} - \langle \partial_{n+1}, \chi \rangle \chi, -\partial_{n+1} - \langle \partial_{n+1}, \chi \rangle \chi \rangle = \langle \partial_{n+1}, \chi \rangle^2 - 1 \neq +1.$$

olduğu görülür.

İzdüşümü yeniden parametrize ederek

$$\tau : \mathbb{H}^n \longrightarrow (0, +\infty), \quad \tau = \ln \left(\sqrt{\rho^2 - 1} + \rho \right)$$

elde edilir.

Açıkça, $\rho = \cosh(\tau)$ ve $\nabla \tau = \frac{1}{\sqrt{\rho^2 - 1}} \nabla \rho$ olur ve her seviye cümlesi için bir birim normaldir. Her seviye cümlesinin ortalama eğriliği hesaplanırsa,

$$h = \operatorname{div}(\nabla \tau) = \operatorname{div} \left(\frac{\nabla \rho}{\sqrt{\rho^2 - 1}} \right) = (n - 1) \coth(\tau)$$

olur. Bazı $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ için $u = f \circ \rho$ olduğunu düşünüldüğünde, Γ_u nun küreler tarafından oluşturulduğu anlamına gelmektedir.

Lawn ve Ortega (2022)'nin makalesinde yer alan *Teorem 3.5* göz önüne alındığında aşağıdaki önerme verilebilir.

Önerme 4.1 Bir $u = f \circ \tau$ fonksiyonunun grafiksel, rotasyonel değişmez ve Γ_u öteleme solitonu olması için gerek ve yeter şart $f : I \subset (0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun

$$f''(s) = (1 - (f'(s))^2) (1 - (n - 1) \coth(s) f'(s)) \quad (4.1)$$

ADD nin bir çözümü olmasıdır (Lawn ve Ortega 2022).

Bir sonraki amacımız (4.1) denkleminin çözümlerini incelemektir. Bunun için (4.1) ifadesinde $w = f'$ alınarak

$$w'(s) = (1 - w^2(s)) (1 - (n - 1) \coth(s) w(s)) \quad (4.2)$$

ADD inceleneyecektir.

Uyarı 4.1 Bir w çözümü bu ADD yi sağladığında, her basit $f = \int w$ için aşağıdaki grafiksel rotasyonel değişmez öteleme solitonu elde edilecektir. Ayrıca grafiği Γ_u olan $u := f \circ \tau$ bileşkesi tanımlanacaktır.

İlk olarak,

$$w_{+1}, w_{-1} : (0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}, \quad w_{+1}(s) = +1, \quad w_{-1}(s) = -1$$

aşık çözümleri elde edilir. $\mathbf{f}_{\pm 1} = \int w_{\pm 1}$, dejenere hiperyüzeyleri sağlayacaktır. Bu bölümün ilerleyen kısımlarında bu çözümlerin de hesaplamalarda kullanımına ihtiyaç olacaktır.

Wiggins (2003)'in makalesi göz önünde bulundurulursa,

$$\begin{aligned} X : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2, \\ s, z &\longmapsto X(s, z) = (\sinh(s), (1 - z^2) (\sinh(s) - (n - 1) \cosh(s)z)) \end{aligned} \quad (4.3)$$

dinamik sistemi tanımlanabilir. X sisteminin çözümleri, yani kritik noktaları,

$$p_0 = (0, 0), \quad p_1 = (0, 1), \quad p_{-1} = (0, -1)$$

olacaktır. Buradan hesaplamalar yapıldığında

$$\begin{aligned} \frac{\partial X}{\partial s} &= (\cosh(s), (1 - z^2) (\cosh(s) - (n - 1) \sinh(s)z)), \\ \frac{\partial X}{\partial z} &= (0, -2z (\sinh(s) - (n - 1) \cosh(s)z) + (1 - z^2) ((1 - n) \coth(s))) \end{aligned}$$

elde edilir.

X 'in p 'deki diferansiyeli $DX(p)$ ile gösterilmek üzere p_0, p_1 ve p_{-1} noktaları $DX(p)$ nin özdeğerlerine göre ($n \geq 2$)

$$DX(p_0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1-n \end{pmatrix}, \quad DX(p_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2(n-1) \end{pmatrix}, \quad DX(p_{-1}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2(n-1) \end{pmatrix}$$

şeklinde sınıflandırılır. Burada görülmektedir ki p_1 ve p_{-1} özdeğerleri pozitiftir ve bundan dolayı birer *kaynak*tırlar. Ancak p_0 noktasının bir özdeğeri pozitif iken, diğerinin negatif olduğu açıktır ve böylece p_0 noktası bir *eyer noktası*dır. Aşağıdaki eşitlikler

$$\xi = \{(s, z) \in \mathbb{R}^2 | s \geq 0\},$$

$$\xi_+ = \{(s, z) \in \mathbb{R}^2 | z > 1\},$$

$$\xi_- = \{(s, z) \in \mathbb{R}^2 | z < -1\},$$

$$\xi_0 = \{(s, z) \in \mathbb{R}^2 | -1 < z < 1\}$$

tanımlanabilir.

Lemma 4.1 (4.2) denkleminin her w çözümü için, X 'in bir integral eğrisi vardır.

İspat. (4.2) denklemini için bir çözüm olarak $w : I \rightarrow \mathbb{R}$ dönüşümü düşünüldüğünde ve $s'(r) = \sinh(s(r))$ eşitliği göz önünde bulundurulduğunda $z(r) = w(s(r))$ olur ve böylece $\gamma(r) = (s(r), z(r)) = (s(r), w(s(r)))$ olacağından, X 'in bir integral eğrisi olur. ■

Lemma 4.2 Her bir integral eğrisi

$$\gamma : K_o \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$r \mapsto \gamma(r) = (s(r), z(r))$$

olmak üzere $s(r)$ bir birebir ve örten fonksiyon olacak şekilde $w := z \circ s^{-1}$ ile verilen eşitlik (4.2) denkleminin bir çözümüdür.

İspat. $\gamma, X(\gamma(r)) = \gamma'(r)$ 'ın bir integral eğrisi olduğuna göre

$$s'(r) = \sinh(s(r)),$$

$$z'(r) = (1 - z(r)^2) (\sinh(s(r)) - (n-1) \cosh(s(r))z(r))$$

ve $s(r)$ birebir ve örten bir fonksiyon olduğundan dolayı her $y \in K_o$ için

$$s'(s^{-1}(y)) = \sinh(y)$$

şeklinde yazılabilir. Bu nedenle

$$w'(y) = \frac{z'(s^{-1}(y))}{s'(s^{-1}(y))} = (1 - w(y)^2) (1 - (n - 1) \coth(y)w(y))$$

eşitliği (4.2) denklemi için bir çözümdür. ■

Lemma 4.3 ADD nin her

$$z'(r) = (1 - n) (1 - z(r)^2) z(r)$$

çözümü için, $\beta(r) = (0, z(r))$ eğrisi X in bir integral eğrisidir.

İspat. Bir $\beta(r) = (0, z(r))$ eğrisi olmak üzere β eğrisinin X in bir integral eğrisi olduğunu gösterilmelidir. O halde,

$$\begin{aligned} \beta'(r) &= (0, z'(r)) \\ &= X(0, z(r)) = (\sinh(0), (1 - z(r)^2)(\sinh(0) - (n - 1) \cosh(0)z(r))) \\ &= (0, (1 - z(r)^2)(1 - n)z(r)) \end{aligned}$$

eşitlikleri elde edilir. Dolayısıyla, $z'(r) = (1 - n)(1 - z(r)^2)z(r)$ olur. ■

4.1 Uzaysı durum

$|f'| < 1$ ya da diğer bir deyişle $|w| < 1$ olduğunda uzaysı öteleme solitonları incelenecektir.

Lemma 4.4 (4.2) denkleminin her w çözümü, başlangıç koşulu $(s_0, z_0) \in \xi_0$ olacak şekilde $w(s_0) = z_0$ için $w : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ şeklinde (bir çözüm olarak) genişletilebilir. Ayrıca, $\lim_{s \rightarrow 0} w(s) \in \{-1, 0, +1\}$ elde edilir.

İspat. $-1 < w(s) < +1$ olmak üzere (4.2) denkleminin yerel bir w çözümü elde edilir ki bu $w_{\pm}(s) = \pm 1$ sabit çözümleri ile sınırlıdır. Bu nedenle $w, w : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ olacak şekilde genişletilir. Lemma 4.1 ile, w dan X in bir $\gamma_w : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ integral eğrisi oluşturulur. Lemma 4.3 gereğince de $X(p) = 0$ olacak şekilde γ_w ve β

yalnızca keyfi p noktasında kesişir. Fakat bu durum yalnızca $\lim_{s \rightarrow 0} w(s) \in \{-1, 0, +1\}$ ya da $p \in \{p_0, p_{+1}, p_{-1}\}$ olduğunda sağlanır. ■

Şimdi,

$$\begin{aligned} \vartheta : \xi &\longrightarrow \mathbb{R} \\ s, z &\longmapsto \vartheta(s, z) = (1 - z^2) (\sinh(s) - (n - 1) \cosh(s)z) \end{aligned} \quad (4.4)$$

fonksiyonunu ve $\alpha = \{(s, z) \in \xi \mid \vartheta(s, z) = 0\} = \{(s, z) \in \xi \mid z = \tanh(s)/(n - 1)\}$ cümlesini ele alalım.

Önerme 4.2 $w : (0, +\infty) \longrightarrow (-1, 1)$ dönüşümü (4.2) denkleminin bir çözümü olsun öyle ki keyfi $s_0 \in (0, +\infty)$ için $|w(s_0)| < 1$ sağlanır. O halde,

- (i) (4.2) denkleminin bir tek $\hat{w} : [0, +\infty) \longrightarrow (-1, +1)$ çözümü vardır ve burada $\hat{w}(0) = 0$ sağlanır. $\forall s \in (0, +\infty)$ için $\hat{w}(s) < \frac{\tanh(s)}{(n - 1)}$ gerçekleşir.
- (ii) Eğer $w(s_0) < \frac{\tanh(s)}{(n - 1)}$ ise herhangi bir $s \geq s_0$ için $w(s) < \frac{\tanh(s)}{(n - 1)}$ olur. Ayrıca, $w(s_0) < \hat{w}(s_0)$ ise $\lim_{s \rightarrow 0} w(s) = -1$ sağlanır.
- (iii) Eğer $w(s_0) > \hat{w}(s_0)$ ise $\lim_{s \rightarrow 0} w(s) = +1$ sağlanır.

Burada her durumda,

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} w(s) = \frac{1}{n - 1}$$

eşitliği göz önünde bulundurularak işlemler gerçekleşir.

İspat.

- (i) İlk olarak

$$w'(s_0) = (1 - w(s)^2) (1 - (n - 1) \cosh(s)w(s)), \quad w(0) = 0$$

sınır probleminin çözülmesi gereklidir. Eğer bir çözüm varsa, X in karşılık gelen integral eğrisi $(0, 0)$ noktasında başlayacaktır. $DX(0, 0)$ ın özdeğerleri $\lambda_1 = 1$ ve $\lambda_2 = 1 - n$ olarak bulunur ve bu özdeğerlere karşılık gelen özvektörler sırasıyla $V_1 = (n, 1)$ ve $V_2 = (0, 1)$ dir. Wiggins'in kitabındaki *Teorem 3.2.1.*

ile $\gamma(0) = (0, 0)$ ve $\gamma'(0) = V_1$ olacak şekilde X vektör alanının bir γ integral eğrisi mevcuttur. O halde, Lemma 4.2 ile birlikte bir sınır problemi için gerekli çözüm elde edilir. İlaveten,

$$\hat{w}(s_0) > \frac{\tanh(s)}{n-1} > 0$$

olacak şekilde $s_0 \in (0, +\infty)$ olduğunu varsayalım.

Buna bağlı olarak $\hat{w}'(s_0) < 0$ ve $\hat{w}(0) = 0$ değerleri kullanılacaktır. Açıktır ki süreklilik gereği, $s_1 \in (0, s_0)$ için bir

$$\hat{w}(s_1) = \frac{\tanh(s_1)}{n-1}$$

ve $s_2 \in (s_1, s_0)$ için $\hat{w}'(s_1) > 0$ olacak şekilde

$$\hat{w}'(s_2) > \frac{\tanh(s_2)}{n-1}$$

varlığı söyleyebilir. Ancak bu durumda

$$0 < \hat{w}'(s_2) = \left(1 - \hat{w}'(s_2)^2\right) (1 - (n-1) \coth(s_0) \hat{w}(s_2)) < 0$$

olduğundan bu bir çelişkidir.

- (ii) (4.4) denkleminde ϑ fonksiyonu vardır. Varsayalım ki $(s_0, w(s_0))$ ifadesi $\vartheta(s_0, w(s_0)) = 0$ eşitliğini sağlasın. O halde,

$$w'(s_0) = \frac{(1 - w(s_0)^2) \vartheta(s_0, w(s_0))}{\tanh(s_0)} = 0$$

yazılabilir. Dahası, yeterince küçük $\delta > 0$ vardır öyle ki $s \in (s_0 - \delta, s_0)$ ise

$$w'(s) = \frac{(1 - w(s_0)^2) \vartheta(s_0, w(s_0))}{\tanh(s_0)} < 0$$

ve $s \in (s_0, s_0 + \delta)$ ise $w'(s) > 0$ olur. Bu demektir ki w grafiği α cümlesine değiyorsa, w yerel bir minimuma sahiptir. Bu nedenle de w grafiği bir noktada α değerinin altındaysa, diğer tüm noktalar için de α değerinin altında kalır.

Ayrıca, $w(s_0) < \hat{w}(s_0)$ ise Lemma 4.4 ile birlikte

$$\lim_{s \rightarrow 0} w(s) \in \{-1, 0, +1\}$$

olur.

$z_0 < \hat{w}(s_0)$ olduğundan ADD çözümlerinin tekliği nedeniyle, her $s \in (0, +\infty)$ için $w(s) < \hat{w}(s)$ olur ve

$$\lim_{s \rightarrow 0} w(s) < \hat{w}(0) = 0$$

olduğundan

$$\lim_{s \rightarrow 0} w(s) = -1$$

elde edilir.

(iii) Eğer $w(s_0) > \hat{w}(s_0)$ ise

$$w'(s_0) = \frac{(1 - w(s_0)^2)\vartheta(s_0, w(s_0))}{\tanh(s_0)} < 0$$

gerçeklenir. Bu sebeple, w grafiği $(0, s_0)$ da $\hat{w}$ grafiğinin üzerinde kalır. Dolayısıyla Lemma 4.2 ile, mümkün olan tek limit

$$\lim_{s \rightarrow 0} w(s) = +1$$

şeklindedir. Son olarak, s büyük olduğunda, w nun grafiği α nın üzerinde ise w kesinlikle azalandır. Ancak, w nun grafiği α nın altında ise w kesinlikle artandır. O halde,

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} w(s) = \lim_{s \rightarrow +\infty} \frac{\tanh(s)}{n-1} = \frac{1}{n-1}$$

bulunur.

■

Tanım 4.1 $\hat{f}(s) = \int \hat{w}(s)ds + f_0$ fonksiyonu için ilişkili olan rotasyonel değişmez öteleme solitonu **bowl** olarak adlandırılır.

Önerme 4.2 ile aşağıdaki sonuç elde edilir.

Teorem 4.1 $\mathbb{H}^n \times_{-1} \mathbb{R}$ uzayında rotasyonel simetrik uzaysı öteleme solitonu Γ verildiğinde, $\forall p \in \mathbb{H}^n$ için $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ vardır, öyle ki f fonksiyonu için ADD (4.2) denkleminde ve $\Gamma(p) = (p, f(\rho(p)))$ fonksiyonundan üç tip $f = \int w$ fonksiyonu yani bowl, $\lim_{s \rightarrow 0} w(s) = 1$ ve $\lim_{s \rightarrow 0} w(s) = -1$ olarak elde edilir.

Uyarı 4.2 Önerme 4.2 de verilen (ii) ve (iii) ifadelerinde

$$\lim_{s \rightarrow 0} w(s) = \pm 1$$

sağlanır. Bu da dönme eksenine yaklaştığında öteleme solitonunun $\pi/4$ lük bir açıyla eksene çarpacağı anlamına gelir. Dolayısıyla, bir konik tekilliği mevcuttur.

4.2 Zamansız durum

Lemma 4.5 $(s_0, z_0) \in \mathbb{R}^2$ verildiğinde, $s_0 > 0$ ve $z_0 > 1$ için ilgili çözüm

$$\lim_{s \rightarrow 0} w(s) = +1$$

olmak üzere $w : [0, s_0 + \varepsilon) \rightarrow [1, +\infty)$ şeklinde genişletilir.

İspat. $w_+(s) = +1$ sabit çözümü alttan bir sınırdır. Çünkü $\vartheta(s, z) > 0, \forall (s, z) \in \xi_+$ için w değerinin arttığı biliniyor. Daha sonra, Önerme 4.2'nin (ii) ifadesine benzer şekilde $[0, s_0 + \varepsilon)$ 'a genişletilir ve böylece

$$\lim_{s \rightarrow 0} w(s) = +1$$

sonucu elde edilir. ■

Lemma 4.6 $(s_0, z_0) \in \mathbb{R}^2$ verildiğinde, $s_0 < 0$ ve $z_0 < 1$ için ilgili çözüm

$$\lim_{s \rightarrow 0} w(s) = -1$$

olmak üzere $w : [0, s_0 + \varepsilon) \rightarrow (-\infty, -1]$ şeklinde genişletilir. Çünkü $\forall (s, z) \in \xi_-$ için $\vartheta(s, z) < 0$ sağlanır.

İspat. İspatı Lemma 4.5'in ispatından açıktır. ■

f fonksiyonunun tersi olan g fonksiyonunu ele alalım. Gerekli hesaplamalar yapıldığında $1 = g'(f(s)) f'(s)$ ve dolayısıyla da $0 = g''(f(s)) f'(s)^2 + g'(f(s)) f''(s)$ olarak bulunur. O halde,

$$g''(f(s)) = -\frac{(1 - f'(s)^2)(1 - \coth(s)f'(s))}{f'(s)^3}$$

elde edilir. $f \circ g(t) = t$ alınırsa

$$0 = f''(g(t)) g'(t)^2 + f'(g(t)) g''(t)$$

anlamına gelir ki

$$g''(t) = (g'(t) - 1) (\coth(g(t)) - g'(t)) \quad (4.5)$$

ADD nin elde edilmesini sağlar.

Lemma 4.7 (4.5) ADD için $g : (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon) \longrightarrow \mathbb{R}$ çözümü verilsin. Böylece, $g''(t_0) = -\coth(g_0) < 0$ olmaz üzere $f_{\pm} : (g_0 - \delta, g_0] \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonları (4.1) denkleminin çözümleridir ve bunlar

$$\lim_{s \rightarrow g_0} f'_{\pm}(s) = \lim_{s \rightarrow g_0} \frac{1}{g'(f_{\pm}(s))} = \pm \infty$$

g fonksiyonunun ters fonksiyonlarıdır. $f_{\pm}$ rotasyonel olarak değişmez iki grafiksel öteleme solitonu inşaa edildiğinde birlikte düzgün bir hiperyüzey oluştururlar.

İspat. $t_0 \in \mathbb{R}$ için

$$g''(t) = (\varepsilon' + \tilde{\varepsilon} g'(t)^2) (\coth(g(t) - g'(t))), \quad g'(t_0) = 0, \quad g(t_0) = s_0 \in I$$

başlangıç değer probleminini ele alalım. Düzgün bir $\alpha : (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon) \longrightarrow \mathbb{R}$ çözümü vardır. Burada, t_0 , α nın kritik bir noktasıdır ve $\alpha''(t_0) = \varepsilon' \coth(s_0)$ sağlanır. $\coth(s_0) \neq 0$ olduğunda t_0 noktası α nın bir ekstremumudur. $g_+ = g|_{(t_0, t_0 + \varepsilon)}$ ve $g_- = g|_{(t_0 - \varepsilon, t_0)}$ kısıtlamaları, gerekirse ε u indirgeyerek, birebir hale getirebiliriz. Ters fonksiyonları f_+ ve f_- (4.1) denklemini sağlayacak şekilde oluşturmak için $f_+(g(t)) = t$ ele alınır ve bu şekilde

$$1 = f'_+(g(t)) g'(t)$$

$$0 = f''_+(g(t)) g'(t)^2 + f'_+(g(t)) g''(t)$$

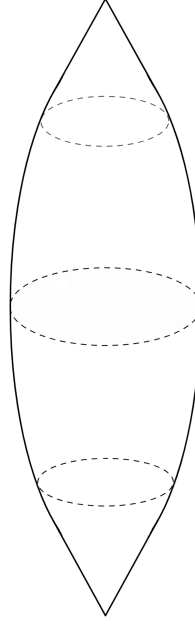
$$f''_+(g(t)) g'(t)^2 = -f'_+(g(t)) (\varepsilon' + \tilde{\varepsilon} \alpha'(t)^2) (\coth(g(t) - g'(t)))$$

elde edilir. Daha sonra, $s = g(t)$ ve ardından $g'(t) = 1/f'_+(s)$ olarak değiştirilir ve böylece

$$\frac{f''_+(s)}{f'_+(s)^2} = \frac{1}{f'_+(s)^2} (\tilde{\varepsilon} + \varepsilon' f'_+(s)^2) (1 - \coth(s) f_+(s))$$

elde edilir. Benzer bir hesaplama da f_- için yapılabilir. Karşılık gelen grafiksel öteleme solitonları birleşimi ve bunların ortak sınırları düzgün bir öteleme solitonunu sağlar. Çünkü, g düzgün bir fonksiyon ve f_+ ve f_- grafiğini yeniden parametrize etmek için birer araçtır. ■

Tanım 4.2 Spindle, Lemma 4.7’de elde edilen rotasyonel olarak değişmez hiperyüzeydir.



Şekil 4.1 Spindle yüzeyi örneği

Uyarı 4.3 Lemma 4.5 ve Lemma 4.6’ya göre, $\lim_{s \rightarrow 0} w(s) = \pm 1$ olduğundan $\pi/4$ açılı bir konik tekilliği vardır.

Teorem 4.2 $\mathbb{H}^n \times_{-1} \mathbb{R}$ uzayındaki herhangi bir rotasyonel olarak değişmez, zamansı öteleme solitonu bir spindle’ın açık bir alt cümlesidir.

İspat. $w : (s_0 - \varepsilon, s_0 + \varepsilon) \rightarrow (1, +\infty)$ fonksiyonunun (4.2) denkleminin bir çözümü olduğunu kabul edelim. Lemma 4.5 yardımıyla, $w : [0, s_0 + \varepsilon) \rightarrow (1, +\infty)$ genişletebiliriz ve $\lim_{s \rightarrow 0} w(s) = 1$ sağlanır. $s_1 > s_0 + \varepsilon$ mevcut olduğunda $\lim_{s \rightarrow s_1} w(s) = +\infty$ (sonlu zamanda sonsuza gider) olduğunu göstereceğiz.

$$w'(s) = (1 - w(s)^2)(1 - (n - 1) \coth(s)w(s)) = \sinh(s)\vartheta(s, w(s))$$

ifadesi bilinmektedir. Dolayısıyla, $F(s, z) = (1 - z^2)(1 - (n - 1) \coth(s)z)$ sağlanır. Bununla birlikte, $w'(s) = F(s, w(s))$ elde edilir. $\Upsilon = (0, +\infty) \times [1, +\infty)$ ve $F, G : \Upsilon \longrightarrow \mathbb{R}$ ifadeleri tanımlandığında $G(s, z) = (z^2 - 1)z$ olur. Açıkça, $\forall (s, z) \in \Upsilon$ için $F(s, z) \geq G(s, z)$ ifadesi sağlanır. Daha sonra, $z : (0, s_0 + A) \rightarrow \mathbb{R}$ ve $z(s_0) = z_0$ olmak üzere $z'(s) = G(s, z(s))$ ifadesinin çözümü

$$z(s) = \frac{1}{\sqrt{1 - e^{2s-2(s_0+A)}}}, \quad A = -\frac{1}{2} \ln \left(1 - \frac{1}{z_0^2} \right), \quad A \in \mathbb{R}$$

şeklindedir. $\lim_{s \rightarrow s_0+A} z(s) = +\infty$ ifadesine dikkat edilmelidir. Bu hesaplamalar yardımıyla, $s_1 \in (s_0, s_0 + A)$ olmak üzere $\lim_{s \rightarrow s_1} w(s) = +\infty$ eşitliği sağlanır. f fonksiyonu ile başlanıp $w = f' > 1$ ile devam edilirse her w sonlu zamanda sonsuza gider ve bunun için Lemma 4.7 kullanılır. O halde, her f fonksiyonu kesinlikle artandır ve $g = f'$ eşitliği sağlanır bu yüzden bir noktada $\lim_{z \rightarrow z_0} g'(z) = 0$ olur. Benzer şekilde $w = f' < -1$ için de yapılabilir. ■

5. İZOMETRİLER VE YARI DOĞRUSAL ELİPTİK KDD

Bu bölümde, KDD nin yerel olarak sınırlı özdeğerlere sahip eliptik yarı doğrusal bir denklem olduğu gösterilecektir. Bu, çözümün Öklidiyen uzayın sınırlı açık aralıktaki değerlerinden, KDD nin çözümlerinin tekliğinin elde edilmesine olanak tanıyacaktır. Buradan, $SO(n)$ tarafından değişmez çözümleri, sınır küresinde sabit değerlere sahip noktalı bir yuvar üzerinde tanımlanan tek çözümler olarak karakterize edilecektir. 2-boyutlu durumda, limit küreleriyle oluşmuş çözümleri, dikdörtgenin kenarında uygun fonksiyonlar seçerek, dikdörtgen içinde tanımlanan tek çözümler olarak da karakterize edilebilir.

Lemma 5.1 $\varepsilon = -1$ olduğunda, (3.2) ifadesindeki KDD yarı doğrusal bir eliptik operatör gibi davranır ve dahası yerel düzgün eliptiktir.

İspat. Bunu göstermek için yarım düzlem modeli

$$\begin{aligned}\mathbb{H}^n &= \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n | x_1 > 0\}, \quad n \geq 2 \\ B_1 &= (\partial_1, \dots, \partial_n), \\ B_2 &= (e_i = x_1 \partial_i : i = 1, \dots, n)\end{aligned}$$

kullanılacaktır. Hiperbolik metrik

$$g = g_{\mathbb{H}^n} = \frac{1}{x_1^2} \langle \cdot, \cdot \rangle; \quad g(e_i, e_j) = x_1^2 g(\partial_i, \partial_j) = \langle \partial_i, \partial_j \rangle = \delta_{ij}$$

şeklindedir. Burada δ_{ij} , standart Kronecker deltayı ifade eder. O halde, $u_i = \partial_i u$ alındığında

$$\nabla u = x_1^2 \sum_{i=1}^n u_i \partial_i$$

elde edilir.

$|\nabla u|^2 = \sum_{i=1}^n x_1^2 u_i^2$ ve $\nabla_{\partial_i} \partial_j = \sum_{k=1}^n \Gamma_{ij}^k \partial_k$ göz önüne alındığında, $|\nabla u|^2 < 1$ elde edilir. Böylece $1 > x_1^2 \sum_{i=1}^n u_i^2$ olur. Gerekli hesaplamalar yapıldığında

$$\begin{aligned}\frac{1}{W} &= \operatorname{div} \left(\frac{\nabla u}{W} \right) = \frac{-(\nabla u)(W)}{W^2} + \frac{1}{W} \operatorname{div}(\nabla u) \\ 1 &= \operatorname{div}(\nabla u) - \frac{(\nabla u)(W)}{W}\end{aligned}\tag{5.1}$$

bulunur. O halde,

$$\begin{aligned}\operatorname{div}(\nabla u) &= \sum_{i=1}^n g(\nabla_{e_i} \nabla u, e_i) = x_1^2 \sum_{i=1}^n u_{ii} + 2u_1 x_1 + \sum_{i,j=1}^n x_1^2 \Gamma_{ij}^i u_j, \\ W &= (1 - |\nabla u|^2)^{1/2} = \left(1 - \sum_{i=1}^n x_1^2 u_i^2\right)^{1/2}, \\ (\nabla u)(W) &= \left(x_1^2 \sum_{i=1}^n u_i \partial_i\right) \left(1 - \sum_{j=1}^n x_1^2 u_j^2\right)^{1/2} = -\frac{x_1^3}{W} u_1 \sum_{j=1}^n u_j^2 - \frac{x_1^4}{W} \sum_{i,j=1}^n u_i u_j u_{ij}\end{aligned}$$

eşitlikleri elde edilir. Tüm bu hesaplamalar (5.1) denkleminde yerine yazılırsa

$$0 = \sum_{i,j=1}^n \left(\delta_{ij} + \frac{x_1^2 u_i u_j}{W^2}\right) u_{ij} + \frac{2u_1}{x_1} + \frac{x_1 u_1}{W^2} \sum_{i=1}^n u_i^2 + \sum_{i,j=1}^n u_i \Gamma_{ji}^j - \frac{1}{x_1^2}$$

eşitliği elde edilir ve bu eşitlik $W^2 x_1^2$ ifadesi ile çarpıldığında

$$\begin{aligned}0 &= \sum_{i,j=1}^n \left(x_1^2 \left(1 - \sum_{k=1}^n x_1^2 u_k^2\right) \delta_{ij} + x_1^4 u_i u_j\right) u_{ij} + 2u_1 x_1 \left(1 - \sum_{k=1}^n x_1^2 u_k^2\right) \\ &\quad + x_1^3 u_1 \sum_{i=1}^n u_i^2 + \sum_{i,j=1}^n x_1^2 \left(1 - \sum_{k=1}^n x_1^2 u_k^2\right) u_i \Gamma_{ji}^i(x) - 1 + \sum_{k=1}^n x_1^2 u_k^2\end{aligned}$$

elde edilir. a^{ij} ve b katsayıları

$$\begin{aligned}a^{ij}, b &: \mathbb{H}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}, \\ a^{ij}(x, p) &= x_1^2 \left(1 - \sum_{k=1}^n x_1^2 p_k^2\right) \delta_{ij} + x_1^4 p_i p_j, \\ b(x, p) &= 2u_1 x_1 \left(1 - \sum_{k=1}^n x_1^2 u_k^2\right) + x_1^3 u_1 \sum_{i=1}^n u_i^2 \\ &\quad + \sum_{i,j=1}^n x_1^2 \left(1 - \sum_{k=1}^n x_1^2 u_k^2\right) u_i \Gamma_{ji}^i(x) - 1 + \sum_{k=1}^n x_1^2 u_k^2\end{aligned}$$

şeklinde elde edilir. Diğer yandan, $A = (a^{ij})$ matrisinin pozitif tanımlı olup olmadığını kontrol edelim. O halde,

$$A = x_1^2 \left(1 - \sum_{k=1}^n x_1^2 p_k^2\right) I_n + x_1^4 B$$

olduğu görülmektedir. $p, q \in \mathbb{R}^n$ alındığında $B = p^t p$ ve $\langle p, q \rangle = p q^t$ sağlandığından $B p^t = p^t p p^t = |p|^2 p^t$ gerçekleşir ve

$$A p^t = \left(x_1^2 \left(1 - \sum_{k=1}^n x_1^2 p_k^2\right) + x_1^4 |p|^2\right) p^t$$

Burada I_n birim matristir. Dolayısıyla, $Bp^t = |p|^2 p^t$ ve $q \perp p$ olduğundan $pq^t = 0$ olur. O halde, $Aq^t = x_1^2 (1 - \sum_{k=1}^n x_1^2 p_k^2) q^t$ olur. Böylece, A katsayısının özdeğerleri

$$\lambda_1 = x_1^2 \left(1 - \sum_{k=1}^n x_1^2 p_k^2 \right) x_1^4 |p|^2 \quad \text{ve} \quad \lambda_2(p) = x_1^2 \left(1 - \sum_{k=1}^n x_1^2 p_k^2 \right)$$

olur.

$$\Lambda = \{(x, p) \in \Omega \times \mathbb{R}^n \mid x_1^2 |p|^2 < 1, x_1 > 0\}, \quad \lambda_1, \lambda_2 : \Lambda \rightarrow \mathbb{R}$$

cümlesini tanımlayalım. Λ için, $\lambda_2 > 0$ ve $\lambda_1 > 0$ olduğundan Q operatörü eliptiktir.

Ayrıca, $\mathbb{U} \subset \Lambda$ alınırsa $\mathbb{U}$ açık ve $\bar{\mathbb{U}}$ kompakt olur. O halde $\mathbb{U}$,

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = 1 + \frac{x_1^2 |p|^2}{1 - \sum_{k=1}^n x_1^2 p_k^2} \geq 1$$

ile üstten ve alttan sınırlanmıştır. Dolayısıyla, Q yerel düzgün sınırlıdır. ■

Gilbarg ve Trudinger (2001) çalışmasındaki *Teorem 10.2* göz önüne alınarak aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 5.1 Ω , $\mathbb{R}^n$ içinde sınırlı bir açık aralık ve $u, v \in C^0(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ olsun. Q bir yarı doğrusal operatör ise

1. Q operatörü, u veya v fonksiyonlarına göre yerel düzgün eliptiktir,
2. a^{ij} katsayısı z fonksiyonuna bağlı değildir,
3. $\forall (x, p) \in \Omega \times \mathbb{R}^n$ için b katsayısı z fonksiyonu içinde artmayandır,
4. a^{ij} ve b katsayıları, $\Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ içindeki p değişkenlerine göre sürekli olarak türevlenebilir.

Ω içinde $Qu = Qv$ ve $\partial\Omega$ üzerinde $u = v$ verilsin. O halde, Ω içinde $u \equiv v$ olur.

Lemma 5.1 ve Teorem 5.1 göz önüne alındığında aşağıdaki teklik sonucu elde edilir.

Teorem 5.2 Ω , $\mathbb{H}^n$ hiperbolik uzayı içinde sınırlı bir açık aralık olsun. Bu durumda $u, v \in C^0(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ verildiğinde, Γ_u ve Γ_v fonksiyonları uzaysı öteleme solitonları olur ve $u = v$, $\partial\Omega$ üzerindedir. Böylece, Ω içinde $u \equiv v$ olur.

İspat. Lemma 5.1'e göre, Q operatörü yarı doğrusal eliptiktir ve yerel düzgün sınırlıdır. Ayrıca, Q operatörü z fonksiyonuna bağlı değildir. $a^{ij}, b \in C^\infty(\Omega \times \mathbb{R}^n)$ olduğunda, Q operatörünün Teorem 5.1'in koşullarına uygun olduğu açıktır. ■

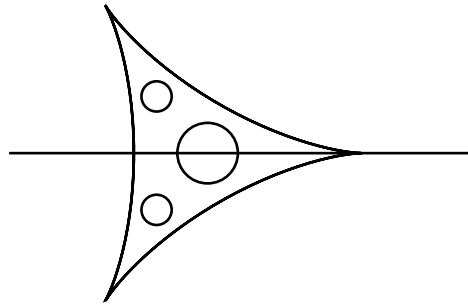
Lemma 5.2 Ω , $\mathbb{H}^n$ hiperbolik uzayının bir alt cümlesi olsun. $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ alındığında Γ_u fonksiyonu $\mathbb{H}^n \times_{-1} \mathbb{R}$ içinde grafiksel bir öteleme solitonu olur. σ , $\mathbb{H}^n$ içinde bir izometridir ve $\hat{u} := u \circ \sigma$ eşitliği sağlanır. O halde, $\Gamma_{\hat{u}}$ fonksiyonu, $\mathbb{H}^n \times_{-1} \mathbb{R}$ içinde grafiksel bir öteleme solitonudur.

İspat. $W = \sqrt{1 - |\nabla u|^2}$ verildiğinde, $\operatorname{div} \left(\frac{\nabla u}{W} \right) = \frac{1}{W}$ olur ve böylece $\hat{W} = \sqrt{1 - |\nabla \hat{u}|^2}$ olduğu açıktır. Yapılan hesaplamalar neticesinde, $\operatorname{div} \left(\frac{\nabla \hat{u}}{\hat{W}} \right) = \frac{1}{\hat{W}}$ ifadesi elde edilir. ■

Lemma 5.3 Ω , $\mathbb{H}^n$ içinde sınırlı bir açık aralık olsun. $\sigma : \mathbb{H}^n \rightarrow \mathbb{H}^n$ izometri ve $\sigma(\bar{\Omega}) = \bar{\Omega}$ olur. $u \in C^0(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ alındığında $\Gamma(p) = (p, u(p))$ uzaysı bir öteleme solitonudur ve $\partial\Omega$ üzerinde $u \circ \sigma = u$ eşitliği gerçekleşir. O halde, u fonksiyonu σ fonksiyonuna göre de değişmezdir. Bir başka deyişle, Γ fonksiyonu, $\sigma \times \operatorname{id}$ ye göre de değişmezdir.

İspat. $\hat{u} := u \circ \sigma \in C^0(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ olarak tanımlansın. Açıkça görülür ki $\hat{u}$ fonksiyonu aynı zamanda uzaysı bir öteleme solitonudur, yani $Q\hat{u} = 0$ dir. Bu nedenle, $Qu = Q\hat{u}$ olur. $x \in \partial\Omega$ verildiğinde, $\hat{u}(x) = u(\sigma(x)) = c = u(x)$ elde edilir. Teorem 5.1 göz önüne alındığında $u = \hat{u}$ olur. ■

Uyarı 5.1 Burada $\partial\Omega$ topolojisine ait hiçbir hipotez bulunmamaktadır.



Şekil 5.1 Bir hiperdüzleme göre simetrik olan $\bar{\Omega}$ örneği

Lemma 5.4 Ω , $\mathbb{H}^n$ hiperbolik uzayı içinde sınırlı açık bir aralık ve $\operatorname{Iso}(\mathbb{H}^n)$ grubunun bir alt grubu olan G tarafından değişmez olsun. $\bar{\Omega}$ üzerinde tanımlı $u : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu alındığında Γ_u fonksiyonu uzaysı bir öteleme solitonudur. $\forall \sigma \in G$ ve $u \circ \sigma = u$ için, $\partial\Omega$

üzerinde geçerlidir. O halde Γ_u fonksiyonu, $\hat{G} := \{\sigma \times \text{id} : \mathbb{H}^n \times_{-1} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{H}^n \times_{-1} \mathbb{R} \mid \sigma \in G\}$ tarafından değişmezdir.

Uyarı 5.2 Merkezi c ve yarıçapı $r > 0$ olan $B(c, r)$ ve $B^*(c, r) = B(c, r) \setminus \{c\}$ ifadelerini ele alalım ve aşağıdaki Lemma 5.5'i verelim.

Lemma 5.5 $\Omega = B^*(c, r) \setminus \{c\} \subset \mathbb{H}^n$ bir yuvar olmak üzere, Γ_u fonksiyonuna karşılık gelen $u : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu c noktasında olası bir tekilliğe sahip uzaysı bir öteleme solitonu ve $u, \partial B(c, r)$ üzerinde bir sabit olsun. Bu durumda, Γ_u dönme açısından bağımsızdır. İlaveten, $u \in C^2(B(c, r))$ ise Γ_u , bowl'un kompakt bir parçasıdır.

İspat. Delinmiş Ω yuvarı, merkezden geçen tümüyle geodezik $\mathbb{H}^{n-1}$ hiperbolik uzayına göre simetriktir. Teorem 5.1 gereğince u, Ω nın merkezinden geçen her tümüyle geodezik olan $\mathbb{H}^{n-1}$ hiperbolik uzayına göre simetriktir. Bu, Γ_u fonksiyonunun dönme açısından simetrik olduğu anlamına gelir. Böylece Teorem 4.2 göz önüne alındığında u, c noktasında düzgün ise Γ_u bir bowl'un parçası olur. Bu da demektir ki Ω nın tamamında tek düzgün örnektir. ■

Lemma 5.6 Teorem 3.1'de verilen çözümlerden biri $f : [a_1, b_1] \rightarrow \mathbb{R}, 0 < a_1 < b_1$ olsun. $a_2 < b_2$ olacak şekilde $a_2, b_2 \in \mathbb{R}$ alındığında $c = f(a_1)$ ve $d = f(b_1)$ elde edilir. O halde, $\Omega = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ üzerinde $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu, bir ve yalnız bir tane vardır ve

(i) Γ_u fonksiyonu uzaysı öteleme solitonudur.

(ii) $\forall t \in [a_1, b_1]$ için $u(t, a_2) = u(t, b_2) = f(t)$ olur ve $\forall s \in [a_2, b_2]$ için $u(a_1, s) = c$ ve $u(b_1, s) = d$ olur.

İspat. Çözümün varlığı Teorem 3.1'deki örneklerden sadece bir tanesidir. *Tekliği* için ise Lemma 5.6 (i) ve (ii) ile verilen $u, v \in C^0(\Omega) \cap C^2(\overset{\circ}{\Omega})$ noktaları alınmaktadır. Teorem 5.1 yardımıyla $u = v$ eşitliği gerçekleşir. ■

Uyarı 5.3 Teorem 3.1 göz önüne alındığında, Γ_u fonksiyonunun limit çemberleri tarafından oluşturulduğu görülür.

6. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu tezde, hiperbolik Einstein'ın statik evreninde ortalama eğrilik akışı öteleme solitonları incelenmiştir. $\mathbb{H}^n$ hiperbolik uzayı içinde $(n - 1)$ boyutlu limit kürelerinin geometrik özellikleri ve teğet uzayları belirlenmiştir. Limit kürelerinin birim normal vektörleri ve şekil operatörleri hesaplanarak, öteleme solitonlarıyla ilişkileri analiz edilmiştir. Öteleme solitonlarının varlık koşullarını yöneten diferensiyel denklemler türetilmiştir. Bu denklemler aracılığıyla, solitonların geometrik ve dinamik özellikleri detaylı bir şekilde anlatılmıştır.

Uzaysı ve zamansı öteleme solitonları ele alınmış ve bu analizler sonucunda, farklı koşullardaki çözümlerin davranışları incelenmiştir ve iki teorem elde edilmiştir. Teorem 3.1 ile uzaysı öteleme solitonlarının, Teorem 3.2 ise grafiksel zamansı öteleme solitonlarının geometrik yapıları ve varlık koşulları belirlenmiştir (Ortega ve Yalçın 2024).

Elde edilen sonuçlar, teorik matematik, matematiksel fizik ve geometrik analiz gibi çeşitli alanlarda kullanılabilir. Bu çalışma, özellikle hiperbolik uzayın geometrik yapısının daha iyi anlaşılmasına ve bu yapıların farklı matematiksel ve fiziksel sistemlerde uygulanmasına olanak tanımaktadır. Gelecekte, bu çalışmanın sonuçlarının daha geniş hiperbolik uzay yapılarına ve diğer geometrik uzaylara uygulanması üzerine araştırmalar yapılabilir. Ayrıca, bu bulgular, öteleme solitonlarının diğer uzaylardaki rolünü incelemek için bir temel oluşturacaktır.

Bütün şekiller *wxMaxima*¹ ve *GeoGebra*² programları kullanılarak çizilmiştir ve bu tez L^AT_EX programında yazılmıştır.

¹wxMaxima, <https://maxima.sourceforge.io/> Last accessed: 2023-July-13

²GeoGebra, <https://www.geogebra.org/>

KAYNAKLAR

- Alekseevsky, A.V. and Alekseevsky, D.V. 1993. Riemannian G-manifold with one-dimensional orbit space. *Annals of global analysis and geometry*, 11, 197-211.
- Alías, L.J., de Lira, J.H. and Rigoli, M. 2020. Mean Curvature Flow Solitons in the Presence of Conformal Vector Fields. *J Geom Anal* 30, 1466–1529.
- Altschuler, S.J. and Wu, L.F. 1994. Translating surfaces of the non-parametric mean curvature flow with prescribed contact angle. *Calc. Var* 2(1);101–111.
- Batista, M. and de Lima, H.F. 2022. Spacelike translating solitons in Lorentzian product spaces: nonexistence, Calabi-Bernstein type results and examples, *Communications in Contemporary Mathematics*. 24(8);2150034.
- Bueno, A. 2018. Translating solitons of the mean curvature flow in the space H^2R . *J. Geom.* 109(42).
- Bueno, A. 2020. Uniqueness of the translating bowl in H^2R . *J. Geom.* 111(43).
- Chen, B.Y. 2011. Pseudo-Riemannian geometry, δ -invariants and applications. World Scientific Publishing Co.Pte. Ltd., s.22, New York.
- Clutterbuck, J., Schnürer, O.C. and Schulze, F. 2007. Stability of translating solutions to mean curvature flow. *Calc. Var.* 29, 281–293.
- De Lira, Jorge H. and Martín, F. 2019. Translating solitons in Riemannian products. *Journal of Differential Equations*, 266(22);7780-7812.
- Do Carmo, M. 1976. *Riemannian Geometry*, Boston, Basel Berlin.
- Eddygledson Souza, G. 2020. Problems about mean curvature in $(\mathbb{R}^{n+1})$. PhD Thesis, Universidad de Granada, Faculty of Sciences, Department of Geometry and Topology, 137, Granada. <https://gigda.ugr.es/digap/uploads/Tesis/TesisSouzaGama2020.pdf>
<https://gigda.ugr.es/digap/phdtfm.php>.
- García Perez, J. 2016. Translating soliton of the mean curvature flow. PhD thesis, Universidad de Granada, Faculty of Sciences, Department of Geometry and Topology, 115, Granada.
- Gilbarg, D. and Trudinger, N.S. 2001. Elliptic partial differential equations of second order. Reprint of the 1998 edition. *Classics in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin. axiv+517 pp. ISBN: 3-540-41160-7.
- Hacısalıoğlu, H.H. 1983. *Diferensiyel Geometri*, İnönü Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Yayınları, No.2.
- Hacısalıoğlu, H.H. 1998. *Diferensiyel Geometri*, 1. Cilt. s.269, Ankara.
- Hacısalıoğlu, H.H. 2000. *Diferensiyel Geometri*, Cilt I, II, Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi, Ankara.

- Hacısalioglu, H.H. 2003. Tensör Geometri, Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Yayınları, Ankara.
- Hoffman, D., Ilmanen, T. and Martín, F. 2021. White, B., Notes on translating solitons for mean curvature flow. In Minimal surface: integrable systems and visualisation. vol 349 of Springer Proc. Math. Stat. s.147-168. Springer, Cham.
- Kocakuşaklı, E. and Ortega, M. 2017. Extending Translating Solitons in Semi-Riemannian Manifolds. Lorentzian Geometry and Related Topics. GELOMA 2016. Springer Proceedings in Mathematics and Statistics, vol 211. Springer, Cham.
- Kocakuşaklı, E. 2020. Yoğunluklu Riemann manifoldlarının geometrisi. Doktora Tezi, Ankara Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, 92, Ankara.
- Kocakuşaklı, E. and Ortega, M. 2021. A zoo of translating solitons on a parallel light-like direction in Minkowski 3-space. Differential Geometry and its Applications, 78;101796.
- Ilmanen, T. 1994. Elliptic regularization and partial regularity for motion by mean curvature. American Mathematical Soc. 108(520);1-94.
- Kim, D. 2020. Rotationally symmetric space-like translating solitons for the mean curvature flow in Minkowski space. J. Math. Anal. Appl. 444(2);124086.
- Lawn, M.A. and Ortega, M. 2022. Translating Solitons in a Lorentzian Setting, Submersions and Cohomogeneity One Actions. Mediterr. J. Math. 19(102).
- Lee, J.M. 1997. Riemannian Manifolds: An Introduction to Curvature. Springer Yayını, s.226, New York.
- Martín, F., Savas-Halilaj, A. and Smoczyk, K. 2015. On the topology of translating solitons of the mean curvature flow. Calc. Var. 54, 2853–2882.
- O'Neill, B. 1983. Semi-Riemannian geometry, With applications to relativity. Pure and Applied Mathematics, 103. Academic Press, Inc. New York.
- Ortega, M. and Yalçın, B. 2024. Translators of the mean curvature flow in hyperbolic Einstein's static universe. International Electronic Journal Geometry, 17(1)1; 157–170.
- Ortega, M. and Yıldırım, H. 2024. Rotationally invariant translators of the mean curvature flow in Einstein's static universe. Differential Geometry and its Applications. 0926-2245, 95; 102153.
- Pipoli, G. 2020. Invariant translators of the solvable group. Annali di Matematica. 199; 1961–1978.
- Pipoli, G. 2021. Invariant Translators of the Heisenberg Group. J Geom Anal, 31;5219–5258.

- Ros, A. and Sicbaldi, P. 2013. Geometry and topology of some overdetermined elliptic problems. *J. Differential Equations*. 255(5);951–977.
- Şahin, B. 2012. Manifoldların diferensiyel geometrisi. I. Baskı, Nobel Akademik Yayıncılık. ISBN:978-605-133-359-5.
- Yüce, S. 2015. Lineer cebir. I. Baskı, Pegem Akademi, Ankara. ISBN:978-605-318-030-2.
- Wiggins, S. 2003. Introduction to applied nonlinear dynamical systems and chaos. Second edition. *Texts in Applied Mathematics*, 2. Springer-Verlag, New York. ISBN:0-387-00177-8