

ANKARA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

DİFERENSİYEL DENKLEMLERİN BAZI ÖZELLİKLERİNİN
ÇARPIMSAL ANALİZDE İNCELENMESİ

İrfan ÖZTÜRK

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ANKARA
2024

Her hakkı saklıdır

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

DİFERENSİYEL DENKLEMLERİN BAZI ÖZELLİKLERİNİN ÇARPIMSAL ANALİZDE İNCELENMESİ

İrfan ÖZTÜRK

Ankara Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç.Dr. Yelda AYGAR KÜÇÜKEVCİLIOĞLU

Bu tezde, Sturm-Liouville denklemi çarpımsal analizde kurulmuş ve bu denklemi içinde bulunduran sınır değer probleminin özdeğerlerinin ve özfonksiyonlarının bazı spektral özellikleri çarpımsal analizde incelenmiştir. Daha sonra ele alınan problem için çarpımsal Green fonksiyonu verilerek bu önemli fonksiyonun temel özellikleri incelenmiştir. Ayrıca elde edilen sonuçlar bazı örnekler üzerinde tartışılmıştır. Tüm bu sonuçlar elde edilmeden önce çarpımsal analizde türev ve integral gibi genel kavramlar ve özellikleri giriş kısmında sunulmuştur.

Şubat 2024, 48 sayfa

Anahtar Kelimeler: Çarpımsal analiz, çarpımsal türev, çarpımsal integral, çarpımsal özdeğer, çarpımsal diferensiyel denklem, çarpımsal Sturm-Liouville problemi

ABSTRACT

Master Thesis

INVESTIGATION OF SOME PROPERTIES OF DIFFERENTIAL EQUATIONS IN MULTIPLICATIVE CALCULUS

İrfan ÖZTÜRK

Ankara University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Assoc.Prof.Dr. Yelda AYGAR KÜÇÜKEVCİLIOĞLU

In this thesis, Sturm-Liouville equation in multiplicative analysis is constructed as well as some spectral properties of eigenvalues and eigenfunctions of the boundary value problem consisting of this equation are investigated in multiplicative analysis. Then, by giving multiplicative Green function of the related problem, the fundamental properties of this important function are investigated. Moreover, obtained results are discussed on some examples. Before getting all these results general concepts like derivative and integral and their properties in multiplicative analysis are presented in introduction part.

February 2024, 48 pages

Key Words: Multiplicative calculus, multiplicative derivative, multiplicative integral, multiplicative eigenvalue, multiplicative differential equation, multiplicative Sturm-Liouville problem

TEŞEKKÜR

Bu yüksek lisans tez çalışmasının, tamamlanmasında katkıda bulunan, beni yönlendiren ve çalışmalarım boyunca bilgilerini esirgemeyen, tez danışmanım Doç. Dr. Yelda AYGAR KÜÇÜKEVCİLIOĞLU'na, bu çalışmanın her aşamasında rehberlik ve değerli önerileriyle yol gösterdiği için derin bir minnettarlık duyarak teşekkür ederim. Ayrıca, bu süreçte beni destekleyen aileme ve arkadaşlarıma içten teşekkürlerimi ve şükranlarımı sunarım.

İrfan ÖZTÜRK
Ankara, Şubat 2024

İÇİNDEKİLER

TEZ ONAY SAYFASI	
ETİK	i
ÖZET	ii
ABSTRACT.....	iii
TEŞEKKÜR.....	iv
SİMGELER DİZİNİ	vi
1. GİRİŞ	1
2. ÇARPIMSAL ANALİZE İLİŞKİN GENEL KAVRAMLAR ...	6
3. ÇARPIMSAL STURM-LIOUVILLE PROBLEMİ VE BAZI SPEK- TRAL ÖZELLİKLERİ	16
4. ÇARPIMSAL STURM-LIOUVILLE PROBLEMİ İÇİN GREEN FONKSİYONU	34
4.1 Çarpımsal Sturm-Liouville Probleminin Green Fonksiyonunun Oluşturulması	34
4.2 Çarpımsal Green Fonksiyonunun Bazı Özellikleri.....	39
4.3 Bazı Örnekler	41
5. TARTIŞMA VE SONUÇ	45
KAYNAKLAR.....	46
ÖZGEÇMİŞ	48

SİMGELER DİZİNİ

$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
$\mathbb{R}^+$	Pozitif Reel sayılar kümesi
$ y ^*$	Çarpımsal mutlak değer
$f^*(x) = \frac{d^*f}{dx}$	f fonksiyonunun birinci mertebeden çarpımsal türevi
$f^{*(n)}(x)$	f fonksiyonunun n. mertebeden çarpımsal türevi
$\int f(x)^{dx}$	f fonksiyonun çarpımsal belirsiz integrali
$\int_a^b f(x)^{dx}$	f fonksiyonun çarpımsal belirli integrali
	$\mathbb{R}_\alpha := \{\alpha(x) : x \in \mathbb{R}\}$
	$\mathbb{R}_{\exp} := \{\exp(x) : x \in \mathbb{R}\}$
W_m	Çarpımsal Wronskian
$\langle, \rangle_*$	Çarpımsal iç çarpım
L_2^*	Karesi çarpımsal integrallenebilir fonksiyonlar uzayı

1. GİRİŞ

Modern bilimin doğduğu 17. yüzyılın sonlarında ortaya çıkan klasik analiz (calculus) günümüzde en yaygın kullanılan analiz çeşididir. Cebir, trigonometri ve analitik geometri konuları üzerine kurulan klasik analiz; limit, türev, integral ve seri gibi temel kavramlardan oluşmaktadır. Bu kavramlar toplama ve çıkarma işlemlerinin basit versiyonları ile kullanıldığından literatürde bu analize toplamsal analiz veya Newton analizi de denilmektedir. Bilimin gelişmesiyle ve artan problemlerin çeşitlenmesiyle klasik analize alternatif olarak çarpımsal analizi de içeren farklı aritmetik işlemlerle yapılan birçok analiz türü ortaya çıkmıştır. Literatürde bu analizler Newtonian olmayan analizler olarak adlandırılır. Bu çalışmalara ilk örnek Vito Volterra tarafından 1887 yılında tanımlanan Volterra tipi analiz olarak verilebilir. Bu analizde çarpma işlemi temel alındığından daha sonraları bu analize çarpımsal analiz (Gürefe 2009) denilmiştir.

Çarpımsal analiz, 1967 yılında Grossman ve Katz tarafından Newtonian (toplamsal) analize alternatif olarak kurulmuştur. Üstel fonksiyon içeren problemler için yararlı bir analiz olan çarpımsal analiz, çıkarma ve toplama işlemlerinin rollerini bölme ve çarpma işlemlerine taşır. Klasik analizin temeli bir fonksiyonun doğrusal olarak temsil edilmesi iken, çarpımsal analizin temeli bir fonksiyonun üstel olarak temsil edilmesidir. Ülke nüfuslarını, depremlerin büyüklüklerini, biyolojik ve ekonomik olaylar gibi doğadaki pek çok olayı içeren problemler üstel olarak değiştiğinden, bu tür problemlerin çözümlerinde veya modellenmesinde klasik analiz yerine çarpımsal analizin kullanılması yarar ve kolaylık sağlar. Başka bir ifadeyle, bu analiz finans, biyoloji, demografi, görüntülerde örüntü tanıma, sinyal işleme, kuantum bilgi teorisi gibi birçok alanın problemlerinin çözümünde klasik analizden daha iyi sonuç verebilmektedir. Bu nedenle birçok alanda çarpımsal durumlara odaklanan çok sayıda çalışma gerçekleştirilmiştir.

Grossman ve Katz 1972 yılında yayınladıkları bir kitapta genel teoriyi ve Newtonian olmayan analizin sekiz türünü tanımlamışlardır (Grossman ve Katz 1972). Ayrıca Grossman 1979 yılında üstel analiz üzerine bir çalışma daha yapmıştır (Gross-

man 1979). 1980 yılında Maginnis, Newtonian olmayan analize ilk uygulama olarak olasılık teorisinde bir çalışma yapmış ve bu çalışmada insan davranışı ve karar verme mekanizmalarına istatistiksel bir yaklaşım olarak Newtonian olmayan analiz kullanmıştır (Maginnis 1980). Ayrıca Hohlfeld, Drueding ve Ebersole 1989 yılında yaptıkları bir çalışmada atmosfer sıcaklığı üzerine kullandıkları teorilerde Newtonian olmayan analizi kullanmışlardır (Hohlfeld vd. 1989).

2009 yılında Cordova ve Lepe, ekonomide önemli bir rol oynayan esneklik teorisini bigeometrik türev ile ele almışlardır (Cordova ve Lepe 2006-2009).

2011 yılında Bashirov vd., çeşitli alanlardaki farklı problemleri modelleme çalışmalarında çarpımsal analizi kullanmışlardır (Bashirov vd. 2011) ve çarpımsal analizin, klasik analize göre daha etkili olduğunu savunmuşlardır. Ayrıca 2013 yılında Bashirov eğrisel ve çift katlı çarpımsal integralleri içeren bir çalışmayı literatüre kazandırarak çarpımsal integralleri biraz daha genişletmiştir (Bashirov 2013). Son yıllarda ise klasik analizde bilinen önemli denklem ve denklem sistemlerinin özelliklerini ve spektral analizini içeren çok çeşitli çalışmalar çarpımsal analizde ele alınmıştır hatta çarpımsal türev ve onun genel özellikleri zaman skalasında da verilmiştir (Kadak ve Gürefe 2016, Göktaş 2021, Yılmaz 2021, Göktaş vd. 2022, Gülşen vd. 2022, Yılmaz vd. 2023, Öznur vd. 2023). 2021 yılında Göktaş, klasik analizde bilinen Sturm-Liouville denklemini çarpımsal analizde ele alıp, bu denklem yardımı ile üretilen çarpımsal Sturm-Liouville probleminin bazı özelliklerini ve özfonksiyonlarının asimptotiklerini incelemiştir (Göktaş 2021). Ayrıca oluşturulan çarpımsal Sturm-Liouville probleminin bazı spektral özelliklerini araştırmıştır. Aynı yıl Yılmaz yaptığı çalışmada çarpımsal Bessel denklemini ve onun bazı temel spektral özelliklerini incelemiştir (Yılmaz 2021).

Gülşen vd. ise literatürde iyi bilinen kuantum fiziğin temel sistemlerinden olan Dirac sistemini bazı cebirsel yapılar kullanarak 2022 yılında çarpımsal olarak tanımlamışlardır. Bu sistemin özfonksiyonları için asimptotik vermişlerdir. Ayrıca tanımlanan çarpımsal Dirac sisteminin temel özellikleri incelenmiştir (Gülşen vd. 2022). Aynı yıl yine Sertaç vd. ise kesirli analizde iyi bilinen Dirac sistemini, çarpımsal kesirli analizde tekrar tanımlamışlardır (Sertaç vd. 2022). Ayrıca bu probleme karşılık

gelen operatörün selfadjointlığı, problemin farklı özdeğerlerine karşılık gelen öz-fonksiyonlarının dikliği gibi spektral özellikleri inceleyerek sistem için Green fonksiyonunu çarpımsal analizde elde etmişlerdir. 2022 yılında yapılan farklı bir çalışmada ise çarpımsal türev ve temel özellikleri zaman skalasında incelenmiştir (Göktaş vd. 2022). Bu çalışmalara ek olarak Öznur vd., genel formda verilen çarpımsal regüler ve periyodik Sturm-Liouville problemlerinin temel özelliklerini inceleyip, daha önce verilen özellikleri genelleştirerek, elde ettikleri sonuçları örneklendirmişlerdir (Öznur vd. 2023). Bu yüksek lisans tezinin amacı ise çarpımsal analizin temel kavramlarını anlamak ve Sturm-Liouville problemini çarpımsal analizde çalışarak çarpımsal Sturm-Liouville probleminin temel spektral özelliklerini incelemektir. Ayrıca matematiksel fizikte büyük öneme sahip olan Green fonksiyonunu çarpımsal Sturm-Liouville problemi için oluşturmak ve bu önemli fonksiyonun ana özelliklerini araştırmak amaçlanmıştır. Genel olarak Green fonksiyonları başlangıç ve sınır değer problemlerini çözmek için etkili bir method oluştururlar. Klasik tekniklerle çözülemeyen adi ve kısmi denklemlerin çözümünde bu methodlar önemli bir rol oynar. Ayrıca kuantum teori, elektrodinamik, uygulamalı matematik, sismoloji gibi birçok alanda uygulamalara sahip olan Green fonksiyonunu ve özelliklerini içeren birçok çalışma klasik analizde bulunabilir. Çarpımsal analizde ise bu tür çalışmalar yakın zamanda ancak sınırlı çalışmalarda ele alınmıştır (Sertaç vd. 2022, Yılmaz vd. 2023). Biz de bu tez çalışmasında, Yılmaz vd. tarafından 2023 yılında yapılan makaleden esinlenerek ve kaynak göstererek oluşturduğumuz çarpımsal Sturm-Liouville problemi için Green fonksiyonu elde edip, onun ana özelliklerini inceleyeceğiz. Beş bölümden oluşan bu yüksek lisans tezinin ikinci bölümü çarpımsal analizde bilinen temel tanım ve teoremleri içermektedir. Üçüncü bölümde çarpımsal Sturm-Liouville problemi verilip onun bazı spektral özellikleri incelenecektir. Dördüncü bölümde ise çarpımsal Sturm-Liouville problemi için Green fonksiyonu oluşturulup, onun bazı temel özellikleri verilecektir. Sonuçlara ait örneklere de bu bölümde yer verilecektir. Son bölüm tartışma ve sonuç kısmına ayrılmıştır. Çarpımsal analizin temel tanım ve teoremlerini vermeden önce, bu analizin temelini oluşturan bazı cebirsel yapıların açıklanması gerekmektedir. Bahsedilen kavramlar arasında aritmetik, üreteç ve bazı matematiksel işlemler de yer almaktadır. Aritmetik, reel sayılar kümesinde tanımlı

tam sıralı bir cisimdir. Üreteç (doğurucu) fonksiyon ise reel sayılar kümesinden, reel sayıların bir alt kümesine tanımlı bire-bir bir fonksiyondur. Üreteç fonksiyonuna I birim fonksiyonu, e^x fonksiyonu ve e^3 fonksiyonu örnek olarak verilebilir (Kadak 2015).

α , tanım kümesi $A \subseteq \mathbb{R}$ ve değer kümesi $\mathbb{R}_\alpha = \{\alpha(x) : x \in \mathbb{R}\}$ olan bir üreteç (doğurucu) olsun. $\mathbb{R}_\alpha$ üzerinde tanımlı $\dot{+}$, $\dot{-}$, $\dot{\times}$ ve $\dot{/}$ işlemleri ve $\dot{<}$ sıralama bağıntısı aşağıdaki gibi olan aritmetiğe bir α -aritmetik denir. Her $x, y \in \mathbb{R}_\alpha$ için;

$$\begin{aligned}\alpha - toplam \ x \dot{+} y &= \alpha\{\alpha^{-1}(x) + \alpha^{-1}(y)\} \\ \alpha - fark \ x \dot{-} y &= \alpha\{\alpha^{-1}(x) - \alpha^{-1}(y)\} \\ \alpha - çarpım \ x \dot{\times} y &= \alpha\{\alpha^{-1}(x) \times \alpha^{-1}(y)\} \\ \alpha - oran \ x \dot{/} y &= \alpha\{\alpha^{-1}(x) \div \alpha^{-1}(y)\} \\ \alpha - sıralama \ x \dot{<} y &\iff \alpha\{\alpha^{-1}(x) \dot{<} \alpha^{-1}(y)\}\end{aligned}$$

Bu işlemler altında $(\mathbb{R}_\alpha, \dot{+}, \dot{-}, \dot{\times}, \dot{/}, \dot{<})$ tam sıralı bir cisimdir yani bir aritmetiktir. Bu aritmetiği α fonksiyonu ürettiği için buna α -aritmetik denir. Her bir üreteç fonksiyonu yalnız bir aritmetik üretir ya da her bir aritmetik yalnız bir üreteç vasıtasıyla üretilir (Kadak 2015). Örneğin birim fonksiyon olan $I(x) = x$ bilinen klasik aritmetiği doğurduğu gibi $\alpha(x) = e^x$ fonksiyonunda geometrik (veya çarpmaya dayanan) aritmetiği üretir (Çakmak 2014). Doğurucu fonksiyon $\alpha = \exp$ olmak üzere

$$\begin{aligned}\alpha &: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{\exp} \subseteq \mathbb{R}^+ \\ x &\rightarrow \alpha(x) = e^x = y\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}\alpha^{-1} &: \mathbb{R}_{\exp} \rightarrow \mathbb{R} \\ y &\rightarrow \alpha^{-1}(y) = \ln y = x\end{aligned}$$

şeklinde verilsin. Her $x, y \in \mathbb{R}^+$ için aşağıdaki cebirsel işlemler geçerlidir.

$$\begin{aligned}
\alpha - toplam \ x \dot{+} y &= \alpha\{\alpha^{-1}(x) + \alpha^{-1}(y)\} = e^{(\ln x + \ln y)} = x.y \\
\alpha - fark \ x \dot{-} y &= \alpha\{\alpha^{-1}(x) - \alpha^{-1}(y)\} = e^{(\ln x - \ln y)} = x \dot{\div} y \\
\alpha - \text{çarpım} \ x \dot{\times} y &= \alpha\{\alpha^{-1}(x) \times \alpha^{-1}(y)\} = e^{(\ln x \times \ln y)} = x^{\ln y} = y^{\ln x} \\
\alpha - oran \ x \dot{/} y &= \alpha\{\alpha^{-1}(x) \div \alpha^{-1}(y)\} = e^{(\ln x \div \ln y)} = x^{\frac{1}{\ln y}}
\end{aligned}$$

şeklindedir (Kadak 2015). Doğurucu fonksiyon değıştikçe yeni Newtonian olmayan analizler ortaya çıkar.

2. ÇARPIMSAL ANALİZE İLİŞKİN GENEL KAVRAMLAR

Bu bölümde tez içerisinde kullanılacak olan çarpımsal analizin temel tanım ve kavramları verilecektir.

Tanım 2.1 x pozitif bir reel sayı olsun. x pozitif reel sayısının çarpımsal mutlak değeri $|x|^*$ simgesi ile gösterilir ve

$$|x|^* = \begin{cases} x, & x \geq 1 \\ \frac{1}{x}, & x < 1 \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır (Özyapıcı 2009).

Örnek olarak

$$|9|^* = 9, \quad \left| \frac{1}{6} \right|^* = 6, \quad |1|^* = 1$$

şeklindedir. Çarpımsal mutlak değer x, y pozitif reel sayıları için aşağıdaki özelliklere sahiptir.

1. $1 \leq |y|^*$
2. $|xy|^* \leq |x|^* |y|^*$
3. Eğer $\beta \geq 1$ için $\beta^{-1} \leq y \leq \beta$ ise $|y|^* \leq \beta$.

Tanım 2.2 $\forall \varepsilon > 1$ iken $\exists \delta(\varepsilon) > 1$ değeri ve $\left| \frac{x}{x_0} \right|^* < \delta(\varepsilon)$ eşitsizliğini sağlayan her x için $\left| \frac{f(x)}{\ell} \right|^* < \varepsilon$ ise ℓ sayısına f fonksiyonunun x_0 noktasındaki çarpımsal limit değeri denir. Ayrıca $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$ şeklinde gösterilir (Gürefe 2013).

Tanım 2.3 $A \subset \mathbb{R}^+$ ve $f : A \rightarrow \mathbb{R}^+$ olsun. Eğer her $\varepsilon > 1$ için

$$x \in A \text{ ve } \left| \frac{x}{a} \right|^* < \delta \text{ iken } \left| \frac{f(x)}{f(a)} \right|^* < \varepsilon$$

olacak şekilde $\delta > 1$ varsa f fonksiyonu $a \in A$ noktasında çarpımsal süreklidir denir (Özyapıcı 2019).

Örnek 2.1 $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ ve $f(x) = x^2$ olsun. f fonksiyonu her $x_0 \in \mathbb{R}^+$ noktasında çarpımsal süreklidir (Özyapıcı 2009).

Gerçekten, $\forall \varepsilon > 1$ için $\left| \frac{x}{x_0} \right|^* < \delta$ koşulunu sağlayan her $x_0, x \in \mathbb{R}^+$ için

$$\left| \frac{f(x)}{f(x_0)} \right|^* = \left| \frac{x^2}{x_0^2} \right| = \left(\left| \frac{x}{x_0} \right|^* \right)^2 < \delta^2 = \varepsilon$$

olduğundan, $\delta = \sqrt{\varepsilon}$ ve $\varepsilon > 1$ seçilirse istenilen sağlanır.

Tanım 2.4 Herhangi bir f fonksiyonunun x değişkenine bağlı çarpımsal türevi $f^*(x)$ sembolü ile gösterilir. $A \subseteq \mathbb{R}$ üzerindeki tüm x değerleri için f^* fonksiyonu $f^* : A \rightarrow \mathbb{R}^+$ olmak üzere pozitif bir f fonksiyonunun çarpımsal türevi

$$f^*(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{f(x+h)}{f(x)} \right)^{1/h} \quad (2.1)$$

şeklinde tanımlanır. Ayrıca çeşitli işlemlerle

$$f^*(x) = e^{(\ln f(x))'}$$

şeklinde klasik türev ile çarpımsal türev arasındaki ilişki verilir (Gürefe 2013). (2.1) eşitliği, x_0 noktasında türevlenebilen bir f fonksiyonunun x_0 noktasındaki klasik türev tanımı olan $f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ eşitliğinde $f(x_0+h) - f(x_0)$ farkı yerine $\frac{f(x+h)}{f(x)}$ oranı ve bölümdeki h değerinin yerine çarpma işlemine göre tersi olan $\frac{1}{h}$ ifadesinin kuvvet olarak yazılması ile elde edilir (Özyapıcı 2009).

Önerme 2.1 Eğer f fonksiyonu x noktasında çarpımsal anlamda diferansiyellenebilir ise f fonksiyonu x noktasında çarpımsal süreklidir. Ancak tersi her zaman doğru değildir.

Örnek 2.2

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 3, & x > 5 \\ 7x - 7, & x \leq 5 \end{cases}$$

fonksiyonunu ele alalım. Bu fonksiyon çarpımsal sürekli fakat çarpımsal diferansiyellenebilir değildir.

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 5^+} f(h) &= \lim_{h \rightarrow 5^+} (h^2 + 3) = 28 \\ \lim_{h \rightarrow 5^-} f(h) &= \lim_{h \rightarrow 5^-} (7h - 7) = 28 \\ f(5) &= 28 \end{aligned}$$

olduğundan fonksiyon $x = 5$ noktasında çarpımsal süreklidir. Fonksiyonun çarpımsal türevlenebilir olup olmadığını söylemek için

$$\begin{aligned}\lim_{h \rightarrow 5^+} \left(\frac{f(5+h)}{f(5)} \right)^{1/h} &= \lim_{h \rightarrow 5^+} e^{\frac{\ln(f(5+h)) - \ln f(5)}{h}} \\ &= \lim_{h \rightarrow 5^+} e^{\frac{\ln((5+h)^2+3) - \ln(28)}{5}} \\ &= e^{\frac{1}{5} \ln\left(\frac{103}{28}\right)} \\ &= \left(\frac{103}{28} \right)^{\frac{1}{5}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{h \rightarrow 5^-} \left(\frac{f(5+h)}{f(5)} \right)^{1/h} &= \lim_{h \rightarrow 5^-} e^{\frac{\ln(f(5+h)) - \ln f(5)}{h}} \\ &= \lim_{h \rightarrow 5^-} e^{\frac{\ln(7(5+h)-7) - \ln(5)}{5}} \\ &= e^{\frac{1}{5} \ln\left(\frac{63}{5}\right)} \\ &= \left(\frac{63}{5} \right)^{\frac{1}{5}}\end{aligned}$$

limitleri dikkate alınırsa f fonksiyonun çarpımsal türevinin $x = 5$ noktasında mevcut olmadığı söylenir.

Teorem 2.1 Klasik anlamda diferensiyellenebilme ile çarpımsal anlamda diferensiyellenebilme arasındaki ilişki

$$\begin{aligned}f^*(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{f(x+h)}{f(x)} \right)^{1/h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} e^{\ln\left(\frac{f(x+h)}{f(x)}\right)^{1/h}} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} e^{\frac{\ln(f(x+h)) - \ln f(x)}{h}} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} e^{\frac{\ln(f(x+h)) - \ln f(x)}{h}} \\ &= e^{\frac{f'(x)}{f(x)}}\end{aligned}$$

eşitliği ile de verilir (Stanley 1999). Örneğin $f(x) = x^5$ fonksiyonunun çarpımsal türevi $f^*(x) = e^{\frac{5}{x}}$ dir.

Lemma 2.1 f , çarpımsal ve klasik anlamda türevlenebilir fonksiyon olmak üzere

$\frac{d^*}{dx}[e^{f(x)}] = [f^*(x)]^{f(x)}$ eşitliği sağlanır (Stanley 1999). Gerçekten,

$$\begin{aligned}\frac{d^*}{dx}[e^{f(x)}] &= e^{\frac{f'(x)e^{f(x)}}{e^{f(x)}}} \\ &= e^{\left(\frac{f'(x)}{f(x)}\right)f(x)} \\ &= f^*(x)^{f(x)}.\end{aligned}$$

Tanım 2.5 Eğer f^* fonksiyonu çarpımsal türevlenebiliyor ise ikinci mertebeden çarpımsal türevi vardır ve f^{**} ile gösterilir. Benzer biçimde f fonksiyonunun n . mertebeden çarpımsal türevi var ise $f^{*(n)}$ olarak gösterilir. Pozitif tanımlı f fonksiyonunun bir x noktasındaki n . mertebeden çarpımsal türevi

$$f^{*(n)}(x) = e^{(\ln f(x))^{(n)}}$$

şeklinde tanımlıdır (Gürefe 2013).

Teorem 2.2 f çarpımsal h ise hem çarpımsal hem klasik türevlenebilir iki fonksiyon ve c herhangi bir sabit olsun. Bu durumda aşağıda verilen eşitlikler sağlanır (Bashirov 2008).

- i. $(cf)^*(x) = f^*(x)$
- ii. $(fh)^*(x) = f^*(x)h^*(x)$
- iii. $(f+h)^*(x) = f^*(x)^{\frac{f(x)}{f(x)+h(x)}} h^*(x)^{\frac{h(x)}{f(x)+h(x)}}$
- iv. $\left(\frac{f}{h}\right)^*(x) = \frac{f^*(x)}{h^*(x)}$
- v. $(f^h)^*(x) = f^*(x)^{h(x)} f(x)^{h'(x)}.$

Önerme 2.2 Üstel bir f fonksiyonun çarpımsal türevi sabittir (Özyapıcı 2009).

Önerme 2.3 Klasik anlamda diferensiyellenebilir bir h fonksiyonu ve çarpımsal anlamda diferensiyellenebilir bir f fonksiyonu ele alalım. Eğer

$$f(t) = (g \circ h)(t)$$

ise f fonksiyonunun çarpımsal türevi

$$f^*(t) = (g^*(h(t)))^{h'(t)}$$

şeklinde yazılır (Bashirov 2008).

Önerme 2.4 C pozitif bir sayı olsun. f ve g çarpımsal anlamda türevlenebilir fonksiyonlar, h ise klasik anlamda türevlenebilir bir fonksiyon olsun. Bu durumda,

1. $f(t) = Ct \Rightarrow f^*(t) = e^{\frac{1}{t}}$
2. $f(t) = Ct^k \Rightarrow f^*(t) = e^{\frac{k}{t}}$
3. $f(t) = C \ln t \Rightarrow f^*(t) = e^{\frac{1}{t \ln t}}$
4. $f(t) = C [\ln g(t)] \Rightarrow f^*(t) = [g^*(t)]^{\frac{1}{\ln g(t)}}$
5. $f(t) = [g(t)]^k \Rightarrow f^*(t) = [g^*(t)]^k$
6. $f(t) = C [g(t)]^{h(t)} \Rightarrow f^*(t) = [g^*(t)]^{h(t)} [g(t)]^{h'(t)}$

özellikleri gerçekleşir (Stanley 1999).

Önerme 2.5 Çarpımsal diferensiyellenebilen $g(t)$ fonksiyonu verilsin. Eğer,

$f(t) = \frac{1}{g(t)}$ ise $f^*(t) = \frac{1}{g^*(t)}$ gerçekleşir (Özyapıcı 2009). Gerçekten çarpımsal türev özellikleri kullanılarak

$$\begin{aligned} f^*(t) &= e^{(\ln \frac{1}{g(t)})'} = e^{\frac{(\frac{1}{g(t)})'}{\frac{1}{g(t)}}} \\ &= e^{\frac{-\frac{g'(t)}{g^2(t)}}{\frac{1}{g(t)}}} = e^{-\frac{g'(t)}{g(t)}} = e^{\left(\frac{g'(t)}{g(t)}\right)^{-1}} \\ &= [g^*(t)]^{-1} = \frac{1}{g^*(t)} \end{aligned}$$

yazılır.

Tanım 2.6 $[a, b]$ aralığını $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ olmak üzere alt aralıklara bölelim. Herhangi bir $t_i < c_i < t_{i+1}$, $i = 0, 1, \dots, n-1$ eşitsizliği için $[a, b]$ aralığında f fonksiyonunun Riemann integral tanımından integral toplamı

$$S_n = \sum_{i=0}^{n-1} f(c_i) \Delta t_i \quad (2.2)$$

şeklindedir. Burada $\Delta t_i = t_{i+1} - t_i$ olarak tanımlanmıştır.

$[a, b]$ aralığında f fonksiyonunun çarpımsal integralini tanımlamak için (2.2) eşitliğindeki toplam çarpım ile değiştirilip, çarpım durumundaki Δt_i , ifadesi ise kuvvet olarak yazılıp düzenlenirse

$$P_n = \prod_{i=0}^{n-1} f(c_i)^{\Delta t_i} \quad (2.3)$$

elde edilir. $\Delta = \max_{i=0, \dots, n-1} \Delta t_i$ ifadesi sıfıra yakınsadığı zaman (2.3) ile tanımlanan P_n çarpımının limiti varsa ve bu limit c_i sayıları ve bölmeler dizisinin özel seçiminden bağımsız ise, f fonksiyonunun $[a, b]$ aralığındaki çarpımsal integrali bu çarpım dizinin limiti olarak tanımlanır. Böylece belirli çarpımsal integral

$$\int_a^b f(t) dt = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \prod_{i=0}^{n-1} f(c_i)^{\Delta t_i}$$

şeklinde verilir (Özyapıcı 2009).

Tanım 2.7 Her $x \in (a, b)$ için $F^*(x) = f(x)$ ise $F : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonuna, $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun bir çarpımsal antitürevi denir ve

$$\int f(x)^{dx} = F(x)$$

şeklinde gösterilir (Stanley 1999).

Önerme 2.6 f fonksiyonu $[a, b]$ aralığında pozitif ve sürekli ise (a, b) aralığında çarpımsal anlamda integrallenebilir ve

$$\int_a^b f(t) dt = e^{\int_a^b \ln(f(t)) dt} \quad (2.4)$$

yazılır (Özyapıcı 2009). Bu önerme, klasik integral ile çarpımsal anlamda integralin arasındaki ilişkiyi de ortaya koymaktadır.

Örnek 2.3 $f(x) = e^{x^3}$ fonksiyonunun çarpımsal antitürevini bulunuz.

Çözüm 2.1 c herhangi bir sabit olmak üzere

$$\begin{aligned}\int \left(e^{x^3}\right)^{dx} &= e^{\int \ln(e^{x^3})dx} = e^{\int x^3 dx} \\ &= e^{\frac{x^4}{4} + c} = e^{\frac{x^4}{4}} e^c\end{aligned}$$

olup $e^c = C$ olmak üzere $\int \left(e^{x^3}\right)^{dx} = C e^{\frac{x^4}{4}}$ yazılır.

Teorem 2.3 f ve g fonksiyonları $[a, b]$ aralığında çarpımsal olarak integrallenebilir ve (a, b) aralığında pozitif ve sürekli olsunlar. Bu durumda $m \in \mathbb{R}$ olmak üzere f^m , fg , f/g fonksiyonları çarpımsal integrallenebilirdir ve aşağıdaki eşitlikler gerçekleşir (Bashirov vd. 2008).

1. $\int_a^b (f(t)^m)^{dt} = \left(\int_a^b f(t)^{dt}\right)^m$
2. $\int_a^b (f(t)g(t))^{dt} = \int_a^b f(t)^{dt} \int_a^b g(t)^{dt}$
3. $\int_a^b \left(\frac{f(t)}{g(t)}\right)^{dt} = \frac{\int_a^b f(t)^{dt}}{\int_a^b g(t)^{dt}}$
4. $\int_a^b f(t)^{dt} = \int_a^c f(t)^{dt} \int_c^b f(t)^{dt}$, $a \leq c \leq b$.

Teorem 2.4 f fonksiyonu $[a, b]$ kapalı aralığında çarpımsal anlamda tersi alınabilen bir fonksiyon olsun. Bu durumda aşağıdaki eşitlikler gerçekleşir (Gürefe 2009).

1. $\int_a^b f(t)^{dt} = \left(\int_b^a f(t)^{dt}\right)^{-1}$
2. $\int_a^a f(t)^{dt} = 1$.

Önerme 2.7 c herhangi bir sabit ve $k > 0$ olmak üzere bazı fonksiyonların çarpımsal integralleri aşağıdaki şekilde verilir (Stanley 1999).

1. $\int 1^{dx} = c$
2. $\int k^{dx} = ck^x$
3. $\int (e^{kx})^{dx} = ce^{\frac{kx^2}{2}}$
4. $\int (e^{kx^n})^{dx} = ce^{\frac{kx^{n+1}}{n+1}}$
5. $\int \left(e^{\frac{k}{x}}\right)^{dx} = cx^k$

$$6. \int (e^{\cos x})^{dx} = ce^{\sin x}$$

$$7. \int (e^{-\sin x})^{dx} = ce^{\cos x}$$

$$8. \int (e^{-\tan x})^{dx} = c \cos x.$$

Teorem 2.5 (Çarpımsal İntegral İçin Ortalama Değer Teoremi) f fonksiyonu $[a, b]$ aralığında pozitif ve sürekli bir fonksiyon olsun. Bu durumda

$$\int_a^b f(t) dt = f(c) (b-a)$$

olacak şekilde bir $c \in [a, b]$ vardır (Özyapıcı 2009).

Teorem 2.6 (Çarpımsal Analizin Birinci Temel Teoremi) f pozitif tanımlı ve $[a, b]$ aralığında sürekli bir fonksiyon olsun. Ayrıca bu aralıktaki her t için

$$g(t) = \int_a^t f(s) ds$$

olsun. Bu durumda $[a, b]$ aralığındaki her t için

$$g^*(t) = f(t)$$

yazılır (Özyapıcı 2009).

Teorem 2.7 (Çarpımsal Analizin İkinci Temel Teoremi) f^* , $[a, b]$ aralığında sürekli bir fonksiyon olsun. Bu takdirde,

$$\int_a^b f^*(s) ds = \frac{f(b)}{f(a)}$$

eşitliği gerçekleşir (Yalçın 2016).

Teorem 2.8 $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^+$ ve $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^+$ çarpımsal diferensiyellenebilir fonksiyonlar olsun. Bu durumda çarpımsal kısmi integrasyon formülü

$$\int_a^b \left(f^*(x)^{g(x)} \right)^{dx} = \frac{f(b)^{g(b)}}{f(a)^{g(a)}} \frac{1}{\int_a^b \left(f(x)^{g'(x)} \right)^{dx}}$$

şeklinde verilir (Özyapıcı 2009).

Tanım 2.8 Bir bağımlı değişkenin, bir veya daha fazla bağımsız değişkene göre çarpımsal türevini içeren bir diferensiyel denkleme çarpımsal diferensiyel denklem denir. Birinci mertebeden

$$y^*(x) = f(x, y(x))$$

denklemini, y fonksiyonun çarpımsal türevini içeren çarpımsal diferensiyel denklemdir (Özyapıcı 2009). Bu çarpımsal diferensiyel denklem

$$y'(x) = y(x) \ln f(x, y(x))$$

klasik diferensiyel denklemine karşılık gelir (Bashirov vd. 2012).

Tanım 2.9 $y(x)$ ve $z(x)$ çarpımsal diferensiyellenebilen fonksiyonlar olmak üzere bu iki fonksiyonun çarpımsal determinanı,

$$\begin{vmatrix} y(x) & z(x) \\ y^*(x) & z^*(x) \end{vmatrix} = (y(x) \odot z^*(x)) \ominus (y^*(x) \odot z(x))$$

olarak yazılır ve $[y, z](x)$ ile gösterilir. Bu determinanın $[a, b]$ üzerindeki çarpımsal belirli integrali

$$[y, z](x) \Big|_a^b = \frac{(y(b))^{\ln z^*(b)} (y^*(a))^{\ln z(a)}}{(y^*(b))^{\ln z(b)} (y(a))^{\ln z^*(a)}}$$

ile verilir.

Tanım 2.10 $y_1, y_2, \dots, y_n$ pozitif tanımlı fonksiyonlar olsun. Her $i = 1, 2, \dots, n$ için $\exists c_i \neq 0$ sabitleri ile birlikte her x için

$$y_1(x)^{c_1} y_2(x)^{c_2} \dots y_n(x)^{c_n} = 1$$

eşitliği sağlanıyorsa $\{y_i\}_{i=1}^n$ fonksiyonlarına çarpımsal anlamda lineer bağımlı aksi halde çarpımsal lineer bağımsızdır denir (Yalçın 2016).

Tanım 2.11 $y_1, y_2, \dots, y_n$ pozitif tanımlı fonksiyonları $(n - 1)$. mertebeden çarpımsal diferensiyellenebilen pozitif fonksiyonlar olsunlar.

$$W_m(y_1, y_2, \dots, y_n) = \begin{vmatrix} \ln y_1 & \ln y_2 & \dots & \ln y_n \\ \ln y_1^* & \ln y_2^* & \dots & \ln y_n^* \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \ln y_1^{*(n-1)} & \ln y_2^{*(n-1)} & \dots & \ln y_n^{*(n-1)} \end{vmatrix}$$

determinantına $\{y_i\}_{i=1}^n$ fonksiyonlarının çarpımsal Wronskianı veya çarpımsal anlamda Wronskian determinantı denir (Yalçın 2016).

Teorem 2.9 $y_1, y_2, \dots, y_n$ fonksiyonları $[a, b]$ aralığı üzerinde çarpımsal diferensiyelenebilen pozitif tanımlı fonksiyonlar olsun. $t_0 \in [a, b]$ için $W_m(y_1, y_2, \dots, y_n)$ çarpımsal Wronskian determinantı sıfırdan farklı ise bu fonksiyonlar $[a, b]$ aralığı üzerinde çarpımsal anlamda lineer bağımsız, $\forall t \in [a, b]$ için çarpımsal Wronskian determinantı sıfıra eşit ise $y_1, y_2, \dots, y_n$ fonksiyonları çarpımsal anlamda lineer bağımlıdır (Yalçın 2016).

Tanım 2.12 Eğer bir λ_0 özdeğerine karşılık gelen iki lineer bağımsız özfonksiyon mevcut ise λ_0 özdeğerine katlı özdeğer, bir tek özfonksiyon mevcutsa basit özdeğer denir (Naimark 1967).

3. ÇARPIMSAL STURM-LIOUVILLE PROBLEMİ VE BAZI SPEKTRAL ÖZELLİKLERİ

Bu bölümde ilk olarak çarpımsal diferensiyel denklem ve çarpımsal lineer diferensiyel denklem kavramları tanıtılıp, çarpımsal Sturm-Liouville problemi kurulacak ve bu probleme karşılık gelen operatörün selfadjointliği, farklı özdeğerlere karşılık gelen özfonksiyonların dikliği, özdeğerlerin reelliği ve basitliği gibi bazı özellikleri incelenecektir. Diferensiyel denklemler, doğa bilimleri, mühendislik, ekonomi ve diğer birçok uygulamalı bilim alanında karşılaşılan modelleme çalışmalarında önemli rol oynarlar. Örneğin; fizikte hareket eden cisimlerin konumunu ve hızını modellemek için, kimyada kimyasal reaksiyonların hızını ve mühendislikte devrelerin davranışını modellemek için diferensiyel denklemler kullanılır. Diferensiyel denklemlerin çözümleri, sistemlerin davranışlarını anlamak ve gelecekteki durumlarını tahmin etmek için kritik öneme sahiptir. Dolayısıyla diferensiyel denklemler ve çözümleri, birçok disiplinde gerçek dünya problemlerini modelleme ve çözme konusunda güçlü bir araçtır ve bu bilimlerde pekçok problemin klasik türeve bağlı diferensiyel denklemlerle ifade edildiği bilinmektedir. Ancak bazı problemleri klasik diferensiyel denklemleri kullanarak ifade ettikten sonra çözmek zor olmasına rağmen bu denklemlerin çarpımsal analizdeki karşılıkları belirlenip çarpımsal türev ve integral ile yorumlamak çözüme gitmek genellikle kolaydır. Bu yüzden çarpımsal diferensiyel denklemler literatürde alternatif olarak kullanılmaya başlanmıştır. Son yıllarda çalışılma yoğunluğu da artmıştır.

Tanım 3.1 Bir bağımlı değişkenin bir veya daha fazla bağımsız değişkene göre çarpımsal türevini içeren diferensiyel denklemlere çarpımsal diferensiyel denklem denir. Örneğin

$$y^*(t) = f(t, y(t))$$

denklemi, y değişkeninin çarpımsal türevini içeren bir diferensiyel denklemdir (Özyapıcı 2009). Bu çarpımsal diferensiyel denklem

$$y^*(t) = y(t) \ln f(t, y(t))$$

klasik diferensiyel denklemi için yazılmıştır (Bashirov vd. 2012).

Tanım 3.2 Bir çarpımsal diferensiyel denklemde en yüksek mertebeden çarpımsal türevin mertebesi diferensiyel denklemin mertebesi olarak adlandırılır (Özyapıcı 2009).

Tanım 3.3 Pozitif bir F fonksiyonu için n . mertebeden bir çarpımsal diferensiyel denklem genel olarak

$$F(t, y, y^*, y^{**}, \dots, y^{*(n-1)}, y^{*(n)}) = 1, \quad (t, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \quad (3.1)$$

şeklinde yazılır (Özyapıcı 2009). f bir I aralığındaki tüm t değerleri için tanımlanmış n kez çarpımsal anlamda diferensiyellebilir pozitif bir fonksiyon olsun. Eğer $F(t, f, f^*, \dots, f^{*(n-1)}, f^{*(n)})$ tanımlanmış ve tüm $t \in I$ değerleri için

$$F(t, f, f^*, \dots, f^{*(n-1)}, f^{*(n)}) = 1$$

ise f , (3.1) çarpımsal diferensiyel denkleminin bir aşıkâr çözümü olarak adlandırılır (Özyapıcı 2009).

Tanım 3.4 f pozitif tanımlı bir fonksiyon olmak üzere

$$(y^{*(n)})^{\alpha_n(t)} (y^{*(n-1)})^{\alpha_{n-1}(t)} \dots (y^{**})^{a_2(t)} (y^*)^{a_1(t)} y^{a_0(t)} = f(t) \quad (3.2)$$

şeklinde tanımlanan çarpımsal diferensiyel denklemlere çarpımsal lineer diferensiyel denklem denir. $a_n(t)$ üslerinin tümü sabit ise (3.2) denklemi sabit üslü çarpımsal lineer diferensiyel denklem aksi taktirde değişken üslü çarpımsal lineer diferensiyel denklem olarak adlandırılır. Eğer $f(t) \equiv 1$ ise (3.2) denklemi çarpımsal homogen lineer diferensiyel denklem, değil ise çarpımsal homogen olmayan lineer diferensiyel denklem olarak adlandırılır (Yalçın ve Çelik 2018). Şimdi çarpımsal Sturm-Liouville problemini kurmadan önce klasik Sturm-Liouville problemini kısaca hatırlatalım. λ spektral parametre, $h \in \mathbb{C}$ ve q kompleks değerli fonksiyon olmak üzere

$$L_2(0, \infty) := \left\{ f : \int_0^\infty |f(x)|^2 dx < \infty \right\}$$

uzayında,

$$y'' + q(x)y = \lambda^2 y, \quad 0 \leq x < \infty \quad (3.3)$$

denklemini ve $y'(0) - hy(0) = 0$ koşulu yardımıyla tanımlanan probleme Sturm-Liouville problemi denir. Literatürde Sturm-Liouville denklemini ve belirlenen herhangi bir sınır koşulu yardımıyla oluşturulan sınır değer problemlerinin spektral analizi geniş yer tutmaktadır (Naimark 1976). Sturm-Liouville denklemini içeren problemler operatör kullanılarak da ifade edilebilirler. H herhangi bir Hilbert uzayı, $L : H \rightarrow H$ bir lineer operatör olsun. Eğer herhangi bir μ skaleri için (Hilbert uzayının cisminden alınmış) $Ly = \mu y$ olacak şekilde $y \neq 0$ olmak üzere $y \in H$ elemanı bulunuyorsa, μ sayısına L operatörünün özdeğeri, y elemanına ise bu özdeğer karşılık gelen özfonksiyon denir. Sık kullanılan lineer diferensiyel operatörlerden birisi $L \equiv -\frac{d}{dx^2} + q(x)$ ile verilen Sturm-Liouville operatörüdür. Bu operatör genellikle $H = L_2[a, b]$ Hilbert uzayında incelenmektedir. (3.3) denklemini $\mu = \lambda^2$ ve $x \in [0, \infty)$ olmak üzere $Ly(x) = \mu y(x)$ olarak yazılır.

Şimdi çarpımsal Sturm-Liouville denklemini oluşturup, tez genelinde ilgileneceğimiz çarpımsal Sturm-Liouville problemini bazı cebirsel yapıları kullanarak kuralım.

$S_n(x), S_{n-1}(x), \dots, S_0(x)$ fonksiyonları $[a, b]$ aralığı üzerinde sürekli üs fonksiyonlar olmak üzere

$$l(y) = (y^{*(n)})^{S_n(x)} (y^{*(n-1)})^{S_{n-1}(x)} \dots y^{S_0(x)}$$

n . mertebeden lineer çarpımsal ifade verilsin. $[a, b]$ aralığının uç noktalarında y değerleri sırasıyla y_a ve y_b olmak üzere

$$m(y) = (y_a^{*(n-1)})^{\alpha_{n-1}} \dots (y^*)^{\alpha_1} y_a^{\alpha_0} \left(y_b^{*(n-1)} \right)^{\beta_{n-1}} \dots (y_b^*)^{\beta_1} y_b^{\beta_0} \quad (3.4)$$

lineer bir form olsun. n . mertebeden çarpımsal türevli ve sürekli fonksiyonlar kümesi $\mathbb{C}^{*(n)}$ olmak üzere, $m_v(y)$ formları $v = 1, 2, \dots, t$ için özelleştirilirse ve $m_v = 1$ koşulları $y \in \mathbb{C}^{*(n)}$ de yerine yazılırsa sınır koşullarını sağlamak zorundadır. $A \subset \mathbb{C}^{*(n)}$ üzerinde $m_v = 1$ koşulunu sağlayan çarpımsal $l(y)$ diferensiyel ifadesini ele alalım. $y \in A$ olmak üzere $m = l(y)$ ifadesinin bir fonksiyon olduğunu kabul edelim. Bu bağıntı tanım kümesi A olan L ile ifade edilir. L operatörüne $l(y)$ diferensiyel ifadesi ve $m_v = 1$ koşulları tarafından üretilen çarpımsal türev operatörü denir. $l(y) = 1$ ve $m_v(y) = 1$ koşullarını sağlayan $y \in \mathbb{C}^{*(n)}$ fonksiyonun belirlenmesi problemine homogen çarpımsal sınır değer problemi denir (Göktaş 2021).

Tanım 3.5 $Ly = y^\lambda$ olsun. $y \neq 1$ koşulunu sağlayan y fonksiyonuna L operatörünün çarpımsal özfonksiyonu (*özfonksiyon), λ değerine ise L operatörünün y çarpımsal özfonksiyonuna karşılık gelen çarpımsal bir özdeğeri (*özdeğer) denir. Bu ise L operatörünün çarpımsal özdeğerinin,

$$l(y) = y^\lambda$$

$$m_v(y) = 1, \quad v = 1, 2, \dots, n$$

çarpımsal sınır değer probleminin aşikar olmayan çözümlerine karşılık gelen λ değerleri olduğunu gösterir (Göktaş 2021).

Çarpımsal Sturm-Liouville denklemini kurarken ve çözerken bazı çarpımsal cebirsel yapılar ile karşılaşacağız, şimdi onları ifade edelim. Üstel fonksiyonlarla oluşturulan aritmetik işlemlere çarpımsal cebirsel işlem denir. Bu işlemlerin bazı özelliklerini f, g pozitif fonksiyonları için aşağıdaki gibi verelim (Bashirov vd. 2008)

$$\begin{aligned} f \oplus g &= fg \\ f \ominus g &= \frac{f}{g} \\ f \odot g &= f^{\ln g} = g^{\ln f}. \end{aligned}$$

Bu işlemler bazı cebirsel yapılar oluşturur. Eğer $\oplus : D \times D \rightarrow D$, $D \neq \emptyset$ ve $D \subset \mathbb{R}^+$ olan bir işlem ise, cebirsel yapıya $(D, \oplus)$ çarpımsal grup denir. Benzer şekilde $(D, \oplus, \odot)$ yapısı da çarpımsal bir halkadır. Bu durum bize bu süreçleri rahatlıkla kullanma ve farklı yapılar tanımlama fırsatı sunmaktadır. $x \in [a, b]$, q reel değerli ve α, β keyfi sabitler olmak üzere

$$L(y) = (e^{-1} \odot y^{**}(x)) \oplus (e^{q(x)} \odot y(x)) = e^\lambda \odot y(x) \quad (3.5)$$

çarpımsal Sturm-Liouville problemini

$$\begin{aligned} L_1(y) &= (e^{\cos \alpha} \odot y(a)) \oplus (e^{\sin \alpha} \odot y^*(a)) = 1 \\ L_2(y) &= (e^{\cos \beta} \odot y(b)) \oplus (e^{\sin \beta} \odot y^*(b)) = 1 \end{aligned} \quad (3.6)$$

sınır koşulları ile birlikte ele alalım. Bu çarpımsal Sturm-Liouville problemini çarpımsal analizin özelliklerini kullanarak daha basit halde yazabiliriz. Gerçekten (3.5)

eşitliği

$$L(y) = (y^{**}(x))^{\ln e^{-1}} \oplus (y(x))^{\ln e^{q(x)}} = (y(x))^{\ln e^{\lambda}}$$

$$(y^{**})^{-1} y^{q(x)} = y^{\lambda}$$

olarak (3.6) koşulları ise sırasıyla

$$(y(a))^{\ln e^{\cos \alpha}} \oplus (y^*(a))^{\ln e^{\sin \alpha}} = 1$$

$$(y(a))^{\cos \alpha} \oplus (y^*(a))^{\sin \alpha} = 1$$

$$(y(a))^{\cos \alpha} (y^*(a))^{\sin \alpha} = 1$$

ve

$$(y(b))^{\ln e^{\cos \beta}} \oplus (y^*(b))^{\ln e^{\sin \beta}} = 1$$

$$(y(b))^{\cos \beta} \oplus (y^*(b))^{\sin \beta} = 1$$

$$(y(b))^{\cos \beta} (y^*(b))^{\sin \beta} = 1$$

olarak bulunur. Klasik analizde, (3.5) denklemi

$$y''y - (y')^2 + [(\lambda - q(x)) \ln y]y^2 = 0$$

lineer olmayan denkleme eşdeğerdir. Dolayısıyla bu lineer olmayan denklemin çözümleri, (3.5) çarpımsal denklemin çözümleriyle örtüşmektedir. Gerçekten

$$y^{**} = e^{(\ln y)''} = e^{y''y^{-1} - (y')^2 y^{-2}}$$

olup bu ifade çarpımsal Sturm-Liouville denkleminde yerine yazılırsa,

$$e^{-y''y^{-1} + (y')^2 y^{-2}} y^{q(x)} = y^{\lambda}$$

elde edilir. Her iki tarafın logaritması alınır

$$-y''y^{-1} + (y')^2 y^{-2} + \ln y^{q(x)} = \ln y^{\lambda}$$

bulunur. Daha sonra iki taraf y^2 ile çarpılıp gerekli işlemler yapılırsa

$$\begin{aligned} -y''y^{-1} + (y')^2 y^{-2} + q(x) \ln y &= \lambda \ln y \\ -y''y + (y')^2 + y^2 q(x) \ln y &= y^2 \lambda \ln y \\ y''y - (y')^2 + \{(\lambda - q(x)) \ln y\} y^2 &= 0 \end{aligned}$$

bulunur. Bu ise klasik analizde daha karmaşık verilen denklemin çarpımsal analizde daha basit şekilde verilebileceğini gösterir. Dolayısıyla çarpımsal analizin önemini burada ortaya çıkarmaktadır. Şimdi çalışmanın ana sonuçlarını vermek için gerekli olacak çarpımsal iç çarpımı tanımlayalım.

Tanım 3.6 $S \subset D \neq \emptyset$ olmak üzere $\langle \cdot, \cdot \rangle_*: D \times D \rightarrow \mathbb{R}^+$ dönüşümü her $f, g, h \in S$ için aşağıdaki koşulları sağlasın

i) $\langle f, f \rangle_* \geq 1$

ii) $f = 1$ ise $\langle f, f \rangle_* = 1$

iii) $\langle f \oplus g, h \rangle_* = \langle f, h \rangle_* \oplus \langle g, h \rangle_*$

iv) $\langle e^\alpha \oplus f, g \rangle_* = e^\alpha \odot \langle f, g \rangle_*, \alpha \in \mathbb{R}$

v) $\langle f, g \rangle_* = \langle g, f \rangle_*$.

Bu dönüşüm S üzerinde çarpımsal iç çarpım olarak adlandırılır ve $\langle, \rangle_*$ ile gösterilir. Ayrıca $(S, \langle, \rangle_*)$ ise çarpımsal iç çarpım uzayı olarak adlandırılır (Göktaş 2021)

Lemma 3.1 f ve g pozitif fonksiyonlar olmak üzere

$$L_2^*[a, b] = \left\{ f : \int_a^b (f(x) \odot f(x))^{dx} < \infty \right\} \text{ uzayı,}$$

$$\langle, \rangle_*: L_2^*[a, b] \times L_2^*[a, b] \rightarrow \mathbb{R}^+, \quad \langle f, g \rangle_* = \int_a^b (f(x) \odot g(x))^{dx}$$

çarpımsal iç çarpım ile bir iç çarpım uzayıdır.

İspat. Çarpımsal iç çarpımın özellikleri verilen uzayın tanımını göz önünde bulundurularak uygulanırsa istenilen elde edilir. Gerçekten

1. Her $f \in L_2^*[a, b]$ için

$$\begin{aligned} \langle f, f \rangle_* &= \int_a^b \{f(x) \odot f(x)\}^{dx} = \int_a^b (f(x)^{\ln f(x)})^{dx} \\ &= e^{\int_a^b (\ln f(x) \ln f(x))^{dx}} = e^{\int_a^b (\ln f(x))^2 dx} \geq 1 \end{aligned}$$

yazılır.

2. Her $f \in L_2^*[a, b]$ için

$$f(x) = 1 \text{ ise } e^{\int_a^b (\ln f(x))^2 dx} = e^0 = 1$$

olur.

3. Her $f, g, h \in L_2^*[a, b]$ için

$$\begin{aligned} < f \oplus g, h >_* &= \int_a^b (f(x) \oplus g(x) \odot h(x))^{dx} = \int_a^b ([f(x)g(x)]^{\ln h(x)})^{dx} \\ &= \int_a^b ([f(x)g(x)]^{\ln h(x)})^{dx} = \int_a^b ((f(x))^{\ln h(x)})^{dx} \int_a^b ((g(x))^{\ln h(x)})^{dx} \\ &= < f, h >_* \oplus < g, h >_* \end{aligned}$$

elde edilir.

4. Her $f, g \in L_2^*[a, b]$ ve $\alpha \in \mathbb{R}$ için

$$\begin{aligned} < e^\alpha \oplus f, g >_* &= \int_a^b \{[e^\alpha \oplus f(x)] \odot g(x)\}^{dx} = \int_a^b \{e^\alpha \oplus [f(x) \odot g(x)]\}^{dx} \\ &= \int_a^b \left((e^\alpha)^{\ln f(x)} \right)^{\ln g(x)}^{dx} = \int_a^b ((\alpha f(x))^{\ln g(x)})^{dx} = \int_a^b ((\alpha f(x))^{\ln g(x)})^{dx} \\ &= \alpha \int_a^b ((f(x))^{\ln g(x)})^{dx} = e^{\alpha \ln \int_a^b (f(x) \odot g(x))^{dx}} = e^\alpha \odot < f, g >_* \end{aligned}$$

bulunur.

5. Her $f, g \in L_2^*[a, b]$ için

$$< f, g >_* = \int_a^b (f(x) \odot g(x))^{dx} = \int_a^b (f(x)^{\ln g(x)})^{dx} = \int_a^b (g(x)^{\ln f(x)})^{dx} = < g, f >_*$$

elde edilir. (1)-(5) maddelerinden çarpımsal iç çarpımın şartlarının sağladığı görülür. Dolayısıyla $L_2^*[a, b]$ uzayı verilen çarpımsal iç çarpım ile bir çarpımsal iç çarpım uzayıdır.

■

Teorem 3.1 L çarpımsal Sturm-Liouville operatörü $L_2^*[a, b]$ üzerinde selfadjointtir (Yılmaz vd. 2023).

İspat. Her $y, z \in L_2^*[a, b]$ olsun. $L_2^*[a, b]$ üzerinde çarpımsal iç çarpım uzayı tanımlandığından,

$$\begin{aligned} \langle L(y), z \rangle_* &= \int_a^b (L(y) \odot z)^{dx} = \int_a^b \left((y^{**})^{-1} y^{q(x)} \right)^{\ln z} dx \\ &= \int_a^b \left((y^{**})^{-\ln z} \right)^{dx} \int_a^b \left((y^{q(x)})^{\ln z} \right)^{dx} \end{aligned} \quad (3.7)$$

elde ederiz. Elde edilen (3.7) eşitliğinin sağ taraftaki ilk çarpımsal integrale çarpımsal kısmi integrasyon metodu uygulanırsa,

$$\int_a^b \left((y^{**})^{-\ln z} \right)^{dx} = \frac{(y^*(b))^{-\ln z(b)}}{(y^*(a))^{-\ln z(a)}} \frac{1}{\int_a^b \left((y^*)^{-\frac{z'(x)}{z(x)}} \right)^{dx}} \quad (3.8)$$

olarak bulunur. (3.8) eşitliğinin sağ tarafındaki çarpımsal integrale tekrar çarpımsal kısmi integrasyon metodu uygulanırsa,

$$\int_a^b \left((y^*)^{-\frac{z'(x)}{z(x)}} \right)^{dx} = \frac{(y(b))^{-\frac{z'(b)}{z(b)}}}{(y(a))^{-\frac{z'(a)}{z(a)}}} \frac{1}{\int_a^b \left([y(x)]^{\left(-\frac{z'(x)}{z(x)}\right)'} \right)^{dx}} \quad (3.9)$$

yazılır. Daha sonra, $z(a)^* = e^{\frac{z'(a)}{z(a)}}$, $\ln z(a)^* = \frac{z'(a)}{z(a)}$ ve $\frac{z'(x)}{z(x)} = \ln z(x)^*$, eşitliklikleri (3.9) denkleminde yerine yazıldığında

$$\int_a^b \left((y^*)^{-\ln z^*} \right)^{dx} = \frac{(y(b))^{-\ln z^*(b)}}{(y(a))^{-\ln z^*(a)}} \frac{1}{\int_a^b \left((y(x))^{-\ln z(x)^*} \right)^{dx}}$$

olur. Şimdi (3.9) eşitliğini (3.8) denkleminde yerine yazacak olursak,

$$\begin{aligned} \int_a^b \left((y^{**})^{-\ln z} \right)^{dx} &= \frac{(y^*(b))^{-\ln z(b)}}{(y^*(a))^{-\ln z(a)}} \frac{(y(a))^{-\ln z^*(a)}}{(y(b))^{-\ln z^*(b)}} \int_a^b \left((y(x))^{-\ln z(x)^*} \right)^{dx} \\ &= \frac{(y(b))^{\ln z^*(b)}}{(y^*(b))^{\ln z(b)}} \frac{(y^*(a))^{\ln z(a)}}{(y(a))^{\ln z^*(a)}} \int_a^b \left((z(x))^{-\ln y^{**}(x)} \right)^{dx} \end{aligned} \quad (3.10)$$

bulunur. Bulunan (3.10) çarpımsal integrali (3.7) denkleminde yerine yazılırsa,

$$\langle L(y), z \rangle_* = \frac{(y(b))^{\ln z^*(b)}}{(y^*(b))^{\ln z(b)}} \frac{(y^*(a))^{\ln z(a)}}{(y(a))^{\ln z^*(a)}} \int_a^b \left((z^{**})^{-\ln y} (z^{q(x)})^{\ln y} \right)^{dx} \quad (3.11)$$

olur. Daha sonra $y(x)$ ve $z(x)$ fonksiyonları (3.6) koşullarını sağlayacağından ve bu koşullar için

$$(e^{\cos \alpha} \odot y(a)) \oplus (e^{\sin \alpha} \odot y^*(a)) = 1$$

$$y(a)^{\cos \alpha} y^*(a)^{\sin \alpha} = 1$$

$$y(a)^{\cot \alpha} y^*(a) = 1$$

ile

$$\begin{aligned} (e^{\cos \beta} \odot y(b)) \oplus (e^{\sin \beta} \odot y^*(b)) &= 1 \\ y(b)^{\cos \beta} y^*(b)^{\sin \beta} &= 1 \\ y(b)^{\cot \beta} y^*(b) &= 1 \end{aligned}$$

yazılacağından $y^*(a) = y(a)^{-\cot \alpha}$, $z^*(a) = z(a)^{-\cot \alpha}$ ve $y^*(b) = y(b)^{-\cot \beta}$, $z^*(b) = z(b)^{-\cot \beta}$ eşitlikleri elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned} \frac{(y(b))^{\ln z^*(b)} (y^*(a))^{\ln z(a)}}{(y^*(b))^{\ln z(b)} (y(a))^{\ln z^*(a)}} &= \frac{(y(b))^{\ln z(b)^{-\cot \beta}} (y(a))^{-\cot \alpha \ln z(a)}}{(y(b))^{-\cot \beta \ln z(b)} (y(a))^{\ln z(a)^{-\cot \alpha}}} \\ &= \frac{(y(b))^{-\cot \beta \ln z(b)} (y(a))^{-\cot \alpha \ln z(a)}}{(y(b))^{-\cot \beta \ln z(b)} (y(a))^{-\cot \alpha \ln z(a)}} \\ &= 1 \end{aligned}$$

olup (3.11) eşitliğinden,

$$\begin{aligned} < L(y), z >_* &= \int_a^b \left((z^{**}(x))^{-\ln y} (z^{q(x)})^{\ln y} \right)^{dx} \\ &= \int_a^b \{ [(z^{**})^{-1} z^{q(x)}] \odot y \}^{dx} \\ &= \int_a^b (y \odot L(z))^{dx} \\ &= < y, L(z) >_* \end{aligned}$$

elde edilir. ■

Teorem 3.2 Çarpımsal Sturm-Liouville probleminin farklı λ_1 ve λ_2 özdeğerlerine karşılık gelen birbirinden farklı $y(x, \lambda_1)$, $z(x, \lambda_2)$ özfonksiyonları çarpımsal olarak diktir (Yılmaz 2023).

İspat. $y(x, \lambda_1)$, $z(x, \lambda_2)$ özfonksiyonlarının birbirine dik olduğunu göstermek demek her $x \in [a, b]$ için bu özfonksiyonların çarpımsal iç çarpımının 1 olduğunu göstermek demektir yani,

$$< y, z >_* = \int_a^b (y \odot z)^{dx} = 1$$

olmalıdır. $y(x, \lambda_1)$, $z(x, \lambda_2)$ problemin özfonksiyonları olduğundan (3.5) çarpımsal Sturm-Liouville denklemini sağlar. Dolayısıyla

$$(y^{**})^{-1} y^{q(x)} = y^{\lambda_1} \text{ ve } (z^{**})^{-1} z^{q(x)} = z^{\lambda_2}$$

yazılır. Buradan

$$\left(\frac{y^{\lambda_1}}{y^{q(x)}}\right)^{-1} = y^{**} \text{ ve } \left(\frac{z^{\lambda_2}}{z^{q(x)}}\right)^{-1} = z^{**} \quad (3.12)$$

olarak bulunur. Diğer yandan problem selfadjoint olduğundan

$$\langle L(y), z \rangle_* = \langle y, L(z) \rangle_*$$

olacağından

$$[y, z](x) = (y(x) \odot z^*(x)) \ominus (y^*(x) \odot z(x)) = \frac{y(x)^{\ln z^*(x)}}{y^*(x)^{\ln z(x)}}$$

elde edilir. Her iki taraftan çarpımsal türev alınırsa,

$$\begin{aligned} ([y, z](x))^* &= \left(\frac{y(x)^{\ln z^*(x)}}{y^*(x)^{\ln z(x)}}\right)^* \\ &= \frac{y^*(x)^{\ln z^*(x)} y(x)^{(\ln z^*(x))'}}{y^{**}(x)^{\ln z(x)} y^*(x)^{(\ln z(x))'}} \\ &= \frac{y^*(x)^{\ln z^*(x)} y(x)^{\frac{(z^*(x))'}{z^*(x)}}}{y^{**}(x)^{\ln z(x)} y^*(x)^{\frac{(z(x))'}{z(x)}}} \\ &= \frac{y^*(x)^{\ln z^*(x)} y(x)^{\ln z^{**}(x)}}{y^{**}(x)^{\ln z(x)} y^*(x)^{\ln z^*(x)}} \\ &= \frac{y(x)^{\ln z^{**}(x)}}{y^{**}(x)^{\ln z(x)}} \end{aligned}$$

bulunur. (3.12) eşitliğini kullanarak son eşitlik

$$\begin{aligned} ([y, z](x))^* &= \frac{y(x)^{\ln\left(\frac{z(x)^{\lambda_2}}{z(x)^{q(x)}}\right)^{-1}}}{\left(\frac{y(x)^{\lambda_1}}{y(x)^{q(x)}}\right)^{-\ln z(x)}} = \frac{\left(\frac{z(x)^{q(x)}}{z(x)^{\lambda_2}}\right)^{\ln y(x)}}{\left(\frac{y(x)^{q(x)}}{y(x)^{\lambda_1}}\right)^{\ln z(x)}} \\ &= \frac{\left(z(x)^{q(x)}\right)^{\ln y(x)}}{\left(z(x)^{\lambda_2}\right)^{\ln y(x)}} \frac{\left(y(x)^{\lambda_1}\right)^{\ln z(x)}}{\left(y(x)^{q(x)}\right)^{\ln z(x)}} \\ &= \frac{\left(z(x)^{q(x)}\right)^{\ln y(x)}}{\left(z(x)^{q(x)}\right)^{\ln y(x)}} \frac{\left(y(x)^{\lambda_1}\right)^{\ln z(x)}}{\left(z(x)^{\lambda_2}\right)^{\ln y(x)}} \\ &= \frac{\left(y(x)^{\lambda_1}\right)^{\ln z(x)}}{\left(z(x)^{\lambda_2}\right)^{\ln y(x)}} \\ &= \frac{(y \odot z)^{\lambda_1}}{(y \odot z)^{\lambda_2}} = (y \odot z)^{\lambda_1 - \lambda_2} \end{aligned}$$

formunda yazılabilir. Son eşitlikten $[a, b]$ aralığı üzerinde çarpımsal integral alınıp çarpımsal integral kuralları kullanarak

$$\int_a^b (\{[y, z](x)\}^*)^{dx} = \int_a^b \left((y \odot z)^{\lambda_1 - \lambda_2} \right)^{dx} = \int_a^b \left((y \odot z)^{dx} \right)^{\lambda_1 - \lambda_2} \quad (3.13)$$

elde edilir. (3.13) eşitliğinde bulunan soldaki integral,

$$\begin{aligned} [y, z](x) \Big|_a^b &= \frac{\frac{y(b)^{\ln z^*(b)}}{y^*(b)^{\ln z(b)}}}{\frac{y(a)^{\ln z^*(a)}}{y^*(a)^{\ln z(a)}}} = \frac{y(b)^{\ln z^*(b)}}{y^*(b)^{\ln z(b)}} \frac{y^*(a)^{\ln z(a)}}{y(a)^{\ln z^*(a)}} \\ &= 1 \end{aligned}$$

olup

$$1 = \int_a^b \left((y \odot z)^{dx} \right)^{\lambda_1 - \lambda_2} = \left[\int_a^b (y \odot z)^{dx} \right]^{\lambda_1 - \lambda_2}$$

yazılır. $\lambda_1 \neq \lambda_2$ olduğundan ve sağ taraftaki çarpımsal integral pozitif olduğundan

$$\int_a^b (y \odot z)^{dx} = 1$$

bulunur. ■

Teorem 3.3 Çarpımsal Sturm-Liouville probleminin tüm özdeğerleri reeldir (Göktaş 2021).

İspat. Kabul edelim ki $c, d \in \mathbb{R}$ olmak üzere $\lambda = c + id$ (3.5)-(3.6) çarpımsal Sturm-Liouville probleminin $y(x, \lambda)$ karşılık gelen çarpımsal özdeğeri olsun. Bu durumda, $\bar{\lambda} = c - id$ de problemin bir özdeğeri olup $y(x, \lambda)$ özfonksiyonuna karşılık gelen çarpımsal özdeğeri olacağından Teorem 3.2 gereğince

$$\int_a^b \left[y(x, \lambda) \odot \overline{y(x, \lambda)} \right]^{dx} = 1$$

yazılır. Buradan,

$$\int_a^b \left(y(x, \lambda)^{\ln \overline{y(x, \lambda)}} \right)^{dx} = 1$$

olup çarpımsal integral tanımı gereği

$$e^{\int_a^b (\ln y(x, \lambda)^{\ln \overline{y(x, \lambda)}}) dx} = 1$$

bulunur. Bu ise

$$e^{\int_a^b \ln \overline{y(x, \lambda)} \ln y(x, \lambda) dx} = 1$$

eşitliğini verir. Eşitliğin her iki yanından $\ln$ alınırsa,

$$\int_a^b \ln \overline{y(x, \lambda)} \ln y(x, \lambda) dx = 0$$

yani

$$\int_a^b |\ln y(x, \lambda)|^2 dx = 0$$

elde edilir. Bu ise, $y(x, \lambda) = 1$ olamayacağından bir çelişkidir. Dolayısıyla verilen problemin tüm çarpımsal özdeğerleri reeldir. ■

Teorem 3.4 Çarpımsal Sturm-Liouville probleminin herhangi iki çözümünün çarpımsal Wronskianı x değişkeninden bağımsızdır (Yılmaz vd. 2023).

İspat. $y(x)$ ve $z(x)$, (3.5)-(3.6) çarpımsal Sturm-Liouville probleminin iki çözümü olsun. Bu durumda,

$$\frac{[y, z](x)}{[y, z](a)} = \frac{(y(x) \odot z^*(x)) \ominus (y^*(x) \odot z(x))}{(y(a) \odot z^*(a)) \ominus (y^*(a) \odot z(a))} = \frac{y(x)^{\ln z^*(x)} y^*(a)^{\ln z(a)}}{y^*(x)^{\ln z(x)} y(a)^{\ln z^*(a)}}$$

olduğundan ve y, z problemin çözümü olduğundan (3.5) denklemini ve (3.6) koşullarını sağlar. Dolayısıyla, $y^*(a) = y(a)^{-\cot \alpha}$, $z^*(a) = z(a)^{-\cot \alpha}$ yazılır. Buradan,

$$\frac{[y, z](x)}{[y, z](a)} = 1$$

ve

$$[y, z](x) = [y, z](a) \tag{3.14}$$

olarak bulunur. Diğer yandan,

$$[y, z](x) = (y(x) \odot z^*(x)) \ominus (y^*(x) \odot z(x))$$

olup

$$[y, z](x) = \frac{y(x)^{\ln z^*(x)}}{y^*(x)^{\ln z(x)}}$$

yazılır. Her iki taraftın logaritması alınırsa,

$$\ln[y, z](x) = \ln \left(\frac{y(x)^{\ln z^*(x)}}{y^*(x)^{\ln z(x)}} \right) = \ln y(x) \ln z^*(x) - \ln y^*(x) \ln z(x)$$

bulunur. Dolayısıyla,

$$\begin{aligned} W_m(y, z)(x) &= \begin{vmatrix} \ln y & \ln z \\ \ln y^* & \ln z^* \end{vmatrix} = \ln y(x) \ln z^*(x) - \ln y^*(x) \ln z(x) \\ &= \ln[y, z](x) = \ln[y, z](a) \end{aligned} \quad (3.15)$$

olur. Buradan (3.14) ve (3.15) kullanılarak

$$[y, z](a) = [y, z](x) = e^{W_m(y, z)(x)}$$

elde edilir. Bu sonuç ise çarpımsal Wronskianın x değişkeninden bağımsız olduğunu verir. ■

Teorem 3.5 Çarpımsal Sturm-Liouville denkleminin çözümlerinin lineer bağımlı olması için gerek ve yeter koşul $W_m = 0$ olmasıdır (Yılmaz vd. 2023).

İspat. $y(x)$ ve $z(x)$, (3.5)-(3.6) probleminin lineer bağımlı iki çözümü olsun. En az bir $c \neq 1$ sabiti vardır öyle ki

$$y(x) = e^c \odot z(x) \quad (3.16)$$

sağlanır.

$$[y, z](x) = (y(x) \odot z^*(x)) \ominus (y^*(x) \odot z(x))$$

olduğundan (3.16) eşitliği kullanılarak

$$\begin{aligned} [y, z](x) &= (e^c \odot z(x) \odot z^*(x)) \ominus (e^c \odot z^*(x) \odot z(x)) \\ &= \frac{z(x)^{\ln e^c} \odot z^*(x)}{z^*(x)^{\ln e^c} \odot z(x)} = \frac{z(x)^c \odot z^*(x)}{z^*(x)^c \odot z(x)} \\ &= \frac{(z^*(x))^{\ln z(x)^c}}{(z^*(x))^{c \ln z(x)}} = 1 \end{aligned}$$

yazılır. Ayrıca $W_m(y, z)(x) = \ln[y, z](x)$ olduğundan son eşitlik dikkate alınarak $W_m(y, z)(x) = \ln 1 = 0$ bulunur. Tersine her $x \in [a, b]$ için $W_m(y, z)(x) = 0$ olsun. Buradan $\ln[y, z](x) = 0$ yada $[y, z](x) = 1$ olur. Bu durumda,

$$[y, z](x) = (y(x) \odot z^*(x)) \ominus (y^*(x) \odot z(x)) = 1$$

yazılır. Buradan

$$\begin{aligned}\frac{y(x)^{\ln z^*(x)}}{y^*(x)^{\ln z(x)}} &= 1 \text{ ve} \\ y(x)^{\ln z^*(x)} &= y^*(x)^{\ln z(x)}\end{aligned}$$

olacağından iki taraftın logaritması alınarak

$$\ln z^*(x) \ln y(x) = \ln z(x) \ln y^*(x)$$

elde edilir. Bu ise $c \neq 1$ sabit olmak üzere $y(x) = e^c \odot z(x)$ verir. ■

Teorem 3.6 Çarpımsal Sturm-Liouville probleminin tüm özdeğerleri basittir (Göktaş 2021).

İspat. $y(x)$ ve $z(x)$, (3.5)-(3.6) probleminin λ özdeğerine karşılık gelen çarpımsal özfonksiyonları olsunlar. Dolayısıyla bu iki fonksiyon denklemi ve sınır koşullarını sağlar. Buradan

$$\begin{aligned}L(y) &= (y^{**})^{-1} y^{q(x)} = y^\lambda \\ L(z) &= (z^{**})^{-1} z^{q(x)} = z^\lambda\end{aligned}$$

yazılır. Bu iki eşitliğin her iki yanında logaritma alınırsa, sırasıyla

$$\begin{aligned}\ln (y^{**}(x))^{-1} &= \ln y(x)^{\lambda-q(x)} \\ \ln y^{**}(x) &= (q(x) - \lambda) \ln y(x)\end{aligned}\tag{3.17}$$

ve

$$\begin{aligned}\ln (z^{**}(x))^{-1} &= \ln z(x)^{\lambda-q(x)} \\ \ln z^{**}(x) &= (q(x) - \lambda) \ln z(x)\end{aligned}\tag{3.18}$$

elde edilir. Şimdi (3.17) ve (3.18) eşitliklerini birbirlerine oranlayacak olursak,

$$\frac{\ln y^{**}(x)}{\ln z^{**}(x)} = \frac{(q(x) - \lambda) \ln y(x)}{(q(x) - \lambda) \ln z(x)}$$

ya da

$$\ln y^{**}(x) \ln z(x) - \ln z^{**}(x) \ln y(x) = 0$$

elde edilir. Bu ise

$$\ln \left(\frac{y^{**}(x)^{\ln z(x)}}{z^{**}(x)^{\ln y(x)}} \right) = 0$$

yani

$$(y^{**}(x))^{\ln z(x)} (z^{**}(x))^{-\ln y(x)} = 1 \quad (3.19)$$

olduğunu verir. (3.19) eşitliğinde her iki taraftan çarpımsal integral alınır,

$$\begin{aligned} \int_a^x \left((y^{**}(x))^{\ln z(x)} (z^{**}(x))^{-\ln y(x)} \right)^{dx} &= 1 \\ \int_a^x \left((y^{**}(x))^{\ln z(x)} \right)^{dx} \int_a^x \left((z^{**}(x))^{-\ln y(x)} \right)^{dx} &= 1 \end{aligned} \quad (3.20)$$

elde edilir. (3.20) eşitliğinin sağ tarafındaki çarpımsal integrale çarpımsal kısmi integrasyon metodu uygulanarak,

$$\int_a^x \left((z^{**}(x))^{-\ln y(x)} \right)^{dx} = \frac{(z(x))^{\ln y^*(x)} (z^*(a))^{\ln y(a)}}{(z^*(x))^{\ln y(x)} (z(a))^{\ln y^*(a)}} \frac{1}{\int_a^x \left((y^{**}(x))^{\ln z(x)} \right)^{dx}} \quad (3.21)$$

yazılır. Bulunan (3.21) eşitliği (3.20) eşitliğinde dikkate alınır

$$\frac{(z(x))^{\ln y^*(x)} (z^*(a))^{\ln y(a)}}{(z^*(x))^{\ln y(x)} (z(a))^{\ln y^*(a)}} = 1$$

bulunur. Elde edilen son eşitlikte $y^*(a) = y(a)^{-\cot \alpha}$, $z^*(a) = z(a)^{-\cot \alpha}$ olduğu kullanılarak

$$\frac{(z(x))^{\ln y^*(x)}}{(z^*(x))^{\ln y(x)}} = 1$$

yada

$$(z(x))^{\ln y^*(x)} \ominus (z^*(x))^{\ln y(x)} = 1$$

elde edilir. Buradan

$$(y(x) \odot z^*(x)) \ominus (y^*(x) \odot z(x)) = 1$$

olup

$$[y, z](x) = 1$$

yani

$$W_m(y, z)(x) = \ln[y, z](x) = 0$$

elde edilir. Dolayısıyla (3.5)-(3.6) probleminin λ çarpımsal özdeğerine karşılık gelen çarpımsal özfonksiyonları lineer bağımlıdır. Bu ise Tanım 2.12 gereğince problemin herhangi çarpımsal özdeğerinin basit olduğunu verir. ■

Şimdi elde edilen bilgiler doğrultusunda, verilen problemin özdeğerlerinin ve özfonksiyonlarının elde edilmesi hakkında bazı açıklamalar yapılabilir. δ_{ij} klasik durumdaki Kronecker delta ve $\phi_1(\cdot, \lambda)$, $\phi_2(\cdot, \lambda)$ (3.5) denkleminin,

$$\phi_1^{*(j-1)}(a, \lambda) = e^{\delta_{ij}}, \quad i, j = 1, 2.,$$

koşulları sağlayan lineer bağımsız çözümleri olsunlar. Bu durumda A_1, A_2 x değişkeninden bağımsız olan sabitler olmak üzere, (3.5) denkleminin her bir çözümü

$$y(x, \lambda) = \phi_1(x, \lambda)^{A_1} \phi_2(x, \lambda)^{A_2}$$

formunda yazılır. Eğer (3.5) denklemi (3.6) koşullarını sağlarsa, bu çözüm ilişkili problemin çarpımsal özfonksiyonu olacaktır. Diğer bir ifadeyle,

$$A_1 \ln L_1(\phi_1) + A_2 \ln L_1(\phi_2) = 0 \quad (3.22)$$

$$A_1 \ln L_2(\phi_1) + A_2 \ln L_2(\phi_2) = 0$$

(3.22) denklemlerinin aşıkâr olmayan çözümleri problemin çarpımsal özfonksiyonları olacaktır. Dolayısıyla, λ özdeğerinin (3.5)-(3.6) probleminin özdeğeri olması için gerek ve yeter koşul (3.22) denklem sisteminin katsayılar determinantının 0 olmasıdır. Bu ise

$$\begin{vmatrix} \ln L_1(\phi_1) & \ln L_1(\phi_2) \\ \ln L_2(\phi_1) & \ln L_2(\phi_2) \end{vmatrix} = 0$$

eşitliğini verir. Bu determinantı $\Delta_m(\lambda)$ ile gösterirsek, $\Delta_m(\lambda)$ (3.5)-(3.6) probleminin karakteristik denklemdir ve problemin çarpımsal özdeğerleri bu karakteristik denklemin kökleridir.

Teorem 3.7 Çarpımsal Sturm-Liouville probleminin tüm özdeğerleri $\Delta_m(\lambda)$ karakteristik denklemin basit sıfırlarıdır (Yılmaz vd. 2023).

İspat. $\theta_1(\cdot, \lambda)$ ve $\theta_2(\cdot, \lambda)$ değerlerinin aşağıdaki eşitliklerle verildiğini varsayalım.

$$\theta_1(x, \lambda) = (L_1(\phi_2) \odot \phi_1(x, \lambda)) \ominus (L_1(\phi_1) \odot \phi_2(x, \lambda)) \quad (3.23)$$

$$\theta_2(x, \lambda) = (L_2(\phi_2) \odot \phi_1(x, \lambda)) \ominus (L_2(\phi_1) \odot \phi_2(x, \lambda))$$

Bu tanıma göre,

$$L_1(\phi_1) = (e^{\cos \alpha} \odot \phi_1(a)) \oplus (e^{\sin \alpha} \odot \phi_1^*(a)) = (\phi_1(a))^{\cos \alpha} (\phi_1^*(a))^{\sin \alpha}$$

$$L_1(\phi_2) = (e^{\cos \alpha} \odot \phi_2(a)) \oplus (e^{\sin \alpha} \odot \phi_2^*(a)) = (\phi_2(a))^{\cos \alpha} (\phi_2^*(a))^{\sin \alpha}$$

ve

$$L_2(\phi_1) = (e^{\cos \beta} \odot \phi_1(b)) \oplus (e^{\sin \beta} \odot \phi_1^*(b)) = (\phi_1(b))^{\cos \beta} (\phi_1^*(b))^{\sin \beta}$$

$$L_2(\phi_2) = (e^{\cos \beta} \odot \phi_2(b)) \oplus (e^{\sin \beta} \odot \phi_2^*(b)) = (\phi_2(b))^{\cos \beta} (\phi_2^*(b))^{\sin \beta}$$

olduğundan bu eşitlikler kullanılarak θ_1 ve θ_2 sırasıyla

$$\theta_1(x, \lambda) = \frac{\left((\phi_2(a))^{\cos \alpha} (\phi_2^*(a))^{\sin \alpha} \right) \odot \ln \phi_1(x, \lambda)}{\left((\phi_1(a))^{\cos \alpha} (\phi_1^*(a))^{\sin \alpha} \right) \odot \ln \phi_2(x, \lambda)} = \frac{\left(\phi_2(a)^{\cos \alpha} \phi_2^*(a)^{\sin \alpha} \right)^{\ln \phi_1(x, \lambda)}}{\left(\phi_1(a)^{\cos \alpha} \phi_1^*(a)^{\sin \alpha} \right)^{\ln \phi_2(x, \lambda)}}$$

ve

$$\theta_2(x, \lambda) = \frac{\left((\phi_2(b))^{\cos \beta} (\phi_2^*(b))^{\sin \beta} \right) \odot \ln \phi_1(x, \lambda)}{\left((\phi_1(b))^{\cos \beta} (\phi_1^*(b))^{\sin \beta} \right) \odot \ln \phi_2(x, \lambda)} = \frac{\left(\phi_2(b)^{\cos \beta} \phi_2^*(b)^{\sin \beta} \right)^{\ln \phi_1(x, \lambda)}}{\left(\phi_1(b)^{\cos \beta} \phi_1^*(b)^{\sin \beta} \right)^{\ln \phi_2(x, \lambda)}}$$

olarak yazılabilir. Buradan ise

$$\begin{aligned} \theta_1(a, \lambda) &= \frac{(1^{\cos \alpha} e^{\sin \alpha})^{\ln e}}{(e^{\cos \alpha} 1^{\sin \alpha})^{\ln 1}} = e^{\sin \alpha}, \quad \theta_1^*(a, \lambda) = \frac{(1^{\cos \alpha} e^{\sin \alpha})^{\ln 1}}{(e^{\cos \alpha} 1^{\sin \alpha})^{\ln e}} = e^{-\cos \alpha} \\ \theta_2(b, \lambda) &= \frac{(1^{\cos \beta} e^{\sin \beta})^{\ln e}}{(e^{\cos \beta} 1^{\sin \beta})^{\ln 1}} = e^{\sin \beta}, \quad \theta_2^*(b, \lambda) = \frac{(1^{\cos \beta} e^{\sin \beta})^{\ln 1}}{(e^{\cos \beta} 1^{\sin \beta})^{\ln e}} = e^{-\cos \beta} \end{aligned} \quad (3.24)$$

değerleri elde edilir. Diğer taraftan, çarpımsal Wronskian tanımı gereğince

$$\begin{aligned} W_m(\theta_1(a, \lambda), \theta_2(b, \lambda)) &= \ln \theta_1(a, \lambda) \ln \theta_2^*(b, \lambda) - \ln \theta_1^*(a, \lambda) \ln \theta_2(b, \lambda) \\ &= \ln e^{\sin \alpha} \ln e^{-\cos \beta} - \ln e^{-\cos \alpha} \ln e^{\sin \beta} \\ &= \cos \alpha \sin \beta - \sin \alpha \cos \beta \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} W_m(\phi_1(a, \lambda), \phi_2(b, \lambda)) &= \ln \phi_1(a, \lambda) \ln \phi_2^*(b, \lambda) - \ln \phi_1^*(a, \lambda) \ln \phi_2(b, \lambda) \\ &= \ln e \ln e - \ln 1 \ln 1 \\ &= 1 \end{aligned}$$

elde edilir. Elde edilen bu eşitlikler kullanılarak karakteristik denklem

$$\begin{aligned}
\Delta_m(\lambda) &= \begin{vmatrix} \ln L_1(\phi_1) & \ln L_1(\phi_2) \\ \ln L_2(\phi_1) & \ln L_2(\phi_2) \end{vmatrix} = \ln L_1(\phi_1) \ln L_2(\phi_2) - \ln L_1(\phi_2) \ln L_2(\phi_1) \\
&= \ln \left(\phi_1(a, \lambda)^{\cos \alpha} \phi_1(a, \lambda)^{\sin \alpha} \right) \ln \left(\phi_2(b, \lambda)^{\cos \beta} \phi_2^*(b, \lambda)^{\sin \beta} \right) \\
&\quad - \ln \left(\phi_2(b, \lambda)^{\cos \alpha} \phi_2(b, \lambda)^{\sin \alpha} \right) \ln \left(\phi_1(a, \lambda)^{\cos \beta} \phi_1^*(a, \lambda)^{\sin \beta} \right) \\
&= \ln \left(e^{\cos \alpha} 1^{\sin \alpha} \right) \ln \left(1^{\cos \beta} e^{\sin \beta} \right) - \ln \left(1^{\cos \alpha} e^{\sin \alpha} \right) \ln \left(e^{\cos \beta} 1^{\sin \beta} \right) \\
&= \cos \alpha \sin \beta - \sin \alpha \cos \beta
\end{aligned}$$

olarak bulunur. Diğer yandan Wronskian kullanılarak,

$$W_m(\theta_1(x, \lambda), \theta_2(x, \lambda)) = W_m((\phi_1(x, \lambda), \phi_2(x, \lambda)) \Delta_m(\lambda) = \Delta_m(\lambda)$$

yazılır. Şimdi λ_0 değerinin (3.5)-(3.6) probleminin bir özdeğeri olduğunu kabul edelim. λ_0 karakteristik denklemin bir köküyse $\Delta_m(\lambda_0) = 0$ olacağından

$$W_m(\theta_1(x, \lambda_0), \theta_2(x, \lambda_0)) = 0$$

olur. Wronskian'ın sıfır olması demek θ_1 ve θ_2 'nin lineer bağımlı olduğu anlamına gelir. Dolayısıyla c_1 reel sabit olmak üzere

$$\theta_1(x, \lambda_0) = \theta_2(x, \lambda_0)^{c_1} \quad (3.25)$$

ve

$$\theta_1(b, \lambda_0) = \theta_2(b, \lambda)^{c_1}, \theta_1^*(b, \lambda_0) = \theta_2^*(b, \lambda)^{c_1}$$

yazılır. $y(x) = \theta_1(x, \lambda)$, $z(x) = \theta_1(x, \lambda_0)$ olarak alındığında,

$$(\lambda - \lambda_0) \int_a^b \ln \theta_1(x, \lambda)^{\ln \theta_1(x, \lambda_0)} dx = c_1 \Delta_m(\lambda)$$

elde edilir. $\Delta_m(\lambda)$ karakteristik fonksiyonu λ değişkenine göre tam olduğundan,

$$\Delta_m^*(\lambda_0) = \left(e^{\lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0} \frac{\Delta_m(\lambda)}{\lambda - \lambda_0}} \right)^{\frac{1}{\Delta_m(\lambda_0)}} = \left(e^{\frac{1}{c_1} \int_a^b \ln^2 \theta_1(x, \lambda_0) dx} \right)^{\frac{1}{\Delta_m(\lambda_0)}} \neq 1. \quad (3.26)$$

Dolayısıyla λ_0 , $\Delta_m(\lambda)$ karakteristik fonksiyonunun basit sıfırıdır. ■

4. ÇARPIMSAL STURM-LIOUVILLE PROBLEMİ İÇİN GREEN FONKSİYONU

Bu bölümde, homogen olmayan çarpımsal Sturm-Liouville problemi için çarpımsal Green fonksiyonu oluşturulacak ve bu fonksiyonun temel özellikleri verilecektir. Belirtilmelidir ki; (3.5) denkleminin homogen olmayan şekli

$$(e^{-1} \odot y^{**}(x)) \oplus (e^{q(x)} \ominus y(x)) \odot y(x) = e^{f(x)} \quad (4.1)$$

ile verilmiştir (Göktaş 2021).

4.1 Çarpımsal Sturm-Liouville Probleminin Green Fonksiyonunun Oluşturulması

Teorem 4.1 λ özdeğerinin (3.5)-(3.6) probleminin bir özdeğeri olmadığını ve $\phi(\cdot, \lambda)$ fonksiyonun (4.1) eşitliğini ve (3.6) koşullarını sağladığını kabul edelim.

$e^{f(t)} \in L_2^*[a, b]$ ve θ_1 ve θ_2 , (3.6) koşullarını sağlayan (3.5) denkleminin lineer bağımsız çözümleri olmak üzere (3.5)-(3.6) probleminin çarpımsal Green fonksiyonu (*Green),

$$G_m(x, t, \lambda) = e^{\frac{-1}{\Delta_m(\lambda)}} \odot \begin{cases} \theta_2(x) \odot \theta_1(t), & a \leq t \leq x \\ \theta_1(x) \odot \theta_2(t), & x < t \leq b \end{cases} \quad (4.2)$$

olarak tanımlanır ve

$$\phi(x, \lambda) = \int_a^b (G_m(x, t, \lambda) \odot e^{f(t)})^{dt}, \quad t \in [a, b] \quad (4.3)$$

olarak verilir. Tersine, (4.3) ile tanımlanan $\phi(\cdot, \lambda)$, (4.1) denklemini ve (3.6) koşullarını sağlar. Ayrıca, $G_m(x, t, \lambda)$ tektir (Yılmaz vd. 2023).

İspat. (4.3) eşitliği kullanılarak

$$\begin{aligned} \phi(x, \lambda) &= \int_a^b (G_m(x, t, \lambda) \odot e^{f(t)})^{dt} \\ &= \int_a^x (G_m(x, t, \lambda) \odot e^{f(t)})^{dt} \oplus \int_x^b (G_m(x, t, \lambda) \odot e^{f(t)})^{dt} \\ &= \int_a^x (G_m(x, t, \lambda)^{f(t)})^{dt} \int_x^b (G_m(x, t, \lambda)^{f(t)})^{dt} \\ &= e^{\int_a^x \ln(G_m(x, t, \lambda)^{f(t)}) dt} e^{\int_x^b \ln(G_m(x, t, \lambda)^{f(t)}) dt} \\ &= e^{\int_a^x f(t) \ln G_m(x, t, \lambda) dt} e^{\int_x^b f(t) \ln G_m(x, t, \lambda) dt} \end{aligned} \quad (4.4)$$

yazılır. Elde edilen bu form *Green fonksiyonunda yazılırsa

$$G_m(x, t, \lambda) = \begin{cases} (\theta_2(x)^{\ln \theta_1(t)})^{\frac{-1}{\Delta_m(\lambda)}}, & a \leq t \leq x \\ (\theta_1(x)^{\ln \theta_2(t)})^{\frac{-1}{\Delta_m(\lambda)}}, & x < t \leq b \end{cases} \quad (4.5)$$

olur. Buradan (4.4) ve (4.5) birlikte düşünülüğünde,

$$\begin{aligned} \phi(x, \lambda) &= e^{\int_a^x f(t) \ln(\theta_2(x)^{\ln \theta_1(t)})^{\frac{-1}{\Delta_m(\lambda)}} dt} e^{\int_x^b f(t) \ln(\theta_1(x)^{\ln \theta_2(t)})^{\frac{-1}{\Delta_m(\lambda)}} dt} \\ &= e^{\int_a^x f(t) (\ln \theta_1(t))^{\frac{-1}{\Delta_m(\lambda)}} \ln \theta_2(x) dt} e^{\int_x^b f(t) \ln \theta_2(t)^{\frac{-1}{\Delta_m(\lambda)}} \ln \theta_1(x) dt} \\ &= e^{-\ln \theta_2(x) \int_a^x \frac{f(t) \ln \theta_1(t)}{\Delta_m(\lambda)} dt} e^{-\ln \theta_1(x) \int_x^b \frac{f(t) \ln \theta_2(t)}{\Delta_m(\lambda)} dt} \\ &= (\theta_2(x))^{-\int_a^x \frac{f(t) \ln \theta_1(t)}{\Delta_m(\lambda)} dt} (\theta_1(x))^{-\int_x^b \frac{f(t) \ln \theta_2(t)}{\Delta_m(\lambda)} dt} \end{aligned} \quad (4.6)$$

elde edilir. $c_1(x)$ ve $c_2(x)$ üsleri x değişkenine bağlı fonksiyonlar olmak üzere, (4.1) eşitliğinin bir özel çözümü çarpımsal parametrelerin değişimi yöntemi gereğince

$$\phi(x, \lambda) = \theta_1(x, \lambda)^{c_1(x)} \theta_2(x, \lambda)^{c_2(x)} \quad (4.7)$$

olarak yazılır. İki taraftan çarpımsal türev alınırsa

$$\phi^*(x, \lambda) = \theta_1^*(x, \lambda)^{c_1(x)} \theta_1(x, \lambda)^{c_1'(x)} \theta_2^*(x, \lambda)^{c_2(x)} \theta_2(x, \lambda)^{c_2'(x)}$$

olup çarpımsal parametrelerin değişim metodu gereğince

$$\theta_1(x, \lambda)^{c_1'(x)} \theta_2(x, \lambda)^{c_2'(x)} = 1 \quad (4.8)$$

olmak üzere

$$\phi^*(x, \lambda) = \theta_1^*(x, \lambda)^{c_1(x)} \theta_2^*(x, \lambda)^{c_2(x)} \quad (4.9)$$

yazılır. Bu durumda (4.9) eşitliğinde tekrar çarpımsal türev alınırsa,

$$\phi^{**}(x, \lambda) = \theta_1^{**}(x, \lambda)^{c_1(x)} \theta_1^*(x, \lambda)^{c_1'(x)} \theta_2^{**}(x, \lambda)^{c_2(x)} \theta_2^*(x, \lambda)^{c_2'(x)} \quad (4.10)$$

olur. Burada θ_1 ve θ_2 problemin çözümü olduğundan denklemleri sağlar. Dolayısıyla (4.10) eşitliğinden

$$\begin{aligned} e^{f(x)} &= \phi^{**}(x, \lambda) \phi(x, \lambda)^{q(x)-\lambda} \\ e^{f(x)} &= \left(\theta_1^{**}(x, \lambda)^{c_1(x)} \theta_1^*(x, \lambda)^{c_1'(x)} \theta_2^{**}(x, \lambda)^{c_2(x)} \theta_2^*(x, \lambda)^{c_2'(x)} \right)^{-1} \\ &\quad \left(\theta_1(x, \lambda)^{c_1(x)} \theta_2(x, \lambda)^{c_2(x)} \right)^{q(x)-\lambda} \end{aligned}$$

ve

$$e^{-f(x)} = \theta_1^*(x, \lambda)^{c_1'(x)} \theta_2^*(x, \lambda)^{c_2'(x)} \quad (4.11)$$

elde edilir. Dolayısıyla (4.9) ve (4.11) eşitliklerinden,

$$\theta_1(x, \lambda)^{c_1'(x)} \theta_2(x, \lambda)^{c_2'(x)} = 1 \quad (4.12)$$

ve

$$\theta_1^*(x, \lambda)^{c_1'(x)} \theta_2^*(x, \lambda)^{c_2'(x)} = e^{-f(x)}$$

eşitliklerinin oluşturduğu denklem sistemi elde edilir. Buradan (4.12) denklem sisteminde her iki denklemden $\ln$ alınırsa denklem sistemi,

$$c_1'(x) \ln \theta_1(x, \lambda) + c_2'(x) \ln \theta_2(x, \lambda) = 0 \quad (4.13)$$

$$c_1'(x) \ln \theta_1^*(x, \lambda) + c_2'(x) \ln \theta_2^*(x, \lambda) = -f(x)$$

şeklinde yazılır. Buradan genelleştirilmiş Cramer kuralından faydalananarak (4.13) denklem sisteminde $c_1'(x)$ ve $c_2'(x)$ yalnız bırakılırsa,

$$c_1'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & \ln \theta_2 \\ -f(x) & \ln \theta_2^* \end{vmatrix}}{\Delta_m(\lambda)} = \frac{f(x) \ln \theta_2(x, \lambda)}{\Delta_m(\lambda)} \quad (4.14)$$

$$c_2'(x) = \frac{\begin{vmatrix} \ln \theta_1 & 0 \\ \ln \theta_1 & -f(x) \end{vmatrix}}{\Delta_m(\lambda)} = -\frac{f(x) \ln \theta_1(x, \lambda)}{\Delta_m(\lambda)} \quad (4.15)$$

elde edilir. c_1 katsayısını elde etmek için (4.14) eşitliğinde her iki taraftan x değişkeninden b 'ye integral alınırsa

$$\int_x^b c_1'(t) dt = \int_x^b \frac{f(t) \ln \theta_2(t)}{\Delta_m(\lambda)} dt$$

olup

$$c_1(x) = c_1(b) - \int_x^b \frac{f(t) \ln \theta_2(t)}{\Delta_m(\lambda)} dt$$

elde edilir. Benzer işlemler (4.15) eşitliği için yapılırsa a değişkeninden x değişkenine integral alınarak c_2 katsayısı,

$$\int_x^a c_2(t) dt = \int_x^a \frac{f(t) \ln \theta_1(t)}{\Delta_m(\lambda)} dt$$

olmak üzere

$$c_2(x) = c_2(a) - \int_x^a \frac{f(t) \ln \theta_1(t)}{\Delta_m(\lambda)} dt$$

olarak bulunur. Böylece (4.1) denkleminin genel çözümü,

$$\phi(x, \lambda) = \theta_1(x, \lambda)^{c_1} \theta_2(x, \lambda)^{c_2} \theta_1(x)^{-\int_x^b \left[\frac{f(t) \ln \theta_2(t)}{\Delta_m(\lambda)} \right] dt} \theta_2(x)^{-\int_a^x \left[\frac{f(t) \ln \theta_1(t)}{\Delta_m(\lambda)} \right] dt} \quad (4.16)$$

olarak yazılır. $\phi(x, \lambda)$ çözümü (3.6) koşullarını sağlayacağından (3.6) koşulları ve (4.16) eşitliklerinden,

$$\begin{aligned} \phi(a, \lambda) &= e^{-\sin \alpha}, \quad \phi^*(a, \lambda) = e^{\cos \alpha} \\ \phi(b, \lambda) &= e^{-\sin \beta}, \quad \phi^*(b, \lambda) = e^{\cos \beta} \end{aligned}$$

elde edilir. Burada koşullar dikkatli bir şekilde ele alınırsa,

$$c_1 = \frac{-1}{\Delta_m(\lambda)} \int_a^b f(t) \ln \theta_2(t) dt, \quad c_2 = \frac{-1}{\Delta_m(\lambda)} \int_a^b f(t) \ln \theta_1(t) dt$$

olarak bulunur. Böylece, (4.5) ve (4.6) sağlanır. Şimdi tersine $\phi(x, \lambda)$ çözümünün (4.3) eşitliği ile verildiğinde, (4.1) denklemini ve (3.6) koşullarını sağladığını göstereyim. (4.6) eşitliğinde çarpımsal türev alınırsa,

$$\begin{aligned} \phi^*(x, \lambda) &= \theta_2^*(x)^{-\int_a^x \left[\frac{f(t) \ln \theta_1(t)}{\Delta_m(\lambda)} \right] dt} \theta_2(x, \lambda)^{-\frac{f(x) \ln \theta_1(x)}{\Delta_m(\lambda)}} \\ &\quad \theta_1^*(x)^{-\int_x^b \left[\frac{f(t) \ln \theta_2(t)}{\Delta_m(\lambda)} \right] dt} \theta_1(x, \lambda)^{-\frac{f(x) \ln \theta_2(x)}{\Delta_m(\lambda)}} \end{aligned} \quad (4.17)$$

yazılır. Yukarıdaki (4.17) eşitliğinde tekrar çarpımsal türev alınırsa

$$\begin{aligned} \phi^{**}(x, \lambda) &= \theta_2^{**}(x)^{-\int_a^x \left[\frac{f(t) \ln \theta_1(t)}{\Delta_m(\lambda)} \right] dt} \left(\theta_2^*(x, \lambda)^{-\frac{f(x) \ln \theta_1(x)}{\Delta_m(\lambda)}} \right)^2 \theta_2(x, \lambda)^{\left(-\frac{f(x) \ln \theta_1(x)}{\Delta_m(\lambda)} \right)'} \\ &\quad \theta_1^{**}(x)^{-\int_x^b \left[\frac{f(t) \ln \theta_2(t)}{\Delta_m(\lambda)} \right] dt} \left(\theta_1^*(x, \lambda)^{-\frac{f(x) \ln \theta_2(x)}{\Delta_m(\lambda)}} \right)^2 \theta_1(x, \lambda)^{\left(-\frac{f(x) \ln \theta_2(x)}{\Delta_m(\lambda)} \right)'} \end{aligned} \quad (4.18)$$

elde edilir. θ_1 ve θ_2 , (3.5) denkleminin çözümleri olduğundan ise

$$\begin{aligned} \theta_1^{**}(x) &= \theta_1(x)^{q(x)-\lambda}, \\ \theta_2^{**}(x) &= \theta_2(x)^{q(x)-\lambda} \end{aligned} \quad (4.19)$$

yazılır. Hatta

$$\left(\theta_2^*(x, \lambda)^{-\frac{f(x) \ln \theta_1(x)}{\Delta_m(\lambda)}} \right)^2 \left(\theta_1^*(x, \lambda)^{-\frac{f(x) \ln \theta_2(x)}{\Delta_m(\lambda)}} \right)^2 = e^{-2f} \quad (4.20)$$

ve

$$\theta_2(x, \lambda)^{\left(-\frac{f(x) \ln \theta_1(x)}{\Delta_m(\lambda)}\right)'} \theta_1(x, \lambda)^{\left(\frac{f(x) \ln \theta_2(x)}{\Delta_m(\lambda)}\right)'} = e^f \quad (4.21)$$

olur. Buradan (4.19), (4.20) ve (4.21) denklemleri, (4.18) eşitliğinde birlikte düşünülürse,

$$\phi^{**}(x, \lambda) = \phi(x, \lambda)^{q(x)-\lambda} e^{-f(x)}$$

olarak elde edilir. Bu ise ϕ çözümünün (4.1) denkleminin sağlandığını gösterir. Son olarak koşulları kullanarak

$$\phi(a, \lambda)^{\cos \alpha} \phi^*(a, \lambda)^{\sin \alpha} = \left(\theta_1(a)^{\cos \alpha} \theta_1^*(a)^{\sin \alpha} \right)^{-\int_a^b \frac{\ln \theta_2 f}{\Delta_m(\lambda)}} = 1 \quad ,$$

ve

$$\phi(b, \lambda)^{\cos \beta} \phi^*(b, \lambda)^{\sin \beta} = \left(\theta_2(b)^{\cos \beta} \theta_2^*(b)^{\sin \beta} \right)^{-\int_a^b \frac{\ln \theta_1 f}{\Delta_m(\lambda)}} = 1$$

yazılır. İspatın kalan kısmında verilen problem için *Green fonksiyonun tekliğini ispatlayalım. Kabul edelim ki, aynı problem için başka bir *Green fonksiyonu olan $\widetilde{G}_m(x, t, \lambda)$ var olsun. Bu durumda,

$$\begin{aligned} \phi(x, \lambda) &= \int_a^b (G_m(x, t, \lambda) \odot e^{f(t)})^{dt} \\ &= e^{\int_a^b f(t) \ln G_m(x, t, \lambda) dt} \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \phi(x, \lambda) &= \int_a^b (\widetilde{G}_m(x, t, \lambda) \odot e^{f(t)})^{dt} \\ &= e^{\int_a^b f(t) \ln \widetilde{G}_m(x, t, \lambda) dt} \end{aligned}$$

olarak yazılabilir. Buradan,

$$\int_a^b f(t) \left[\ln G_m(x, t, \lambda) - \ln \widetilde{G}_m(x, t, \lambda) \right] dt = 0$$

elde edilir. $f(t) = \ln G_m(x, t, \lambda) - \ln \widetilde{G}_m(x, t, \lambda)$ alınırsa,

$$\int_a^b \left| \ln G_m(x, t, \lambda) - \ln \widetilde{G}_m(x, t, \lambda) \right|^2 dt = 0$$

olarak yazılır. Bu ise

$$G_m(x, t, \lambda) = \widetilde{G}_m(x, t, \lambda)$$

olduğunu verir. Dolayısıyla problem için *Green fonksiyonun tektir. ■

4.2 Çarpımsal Green Fonksiyonunun Bazı Özellikleri

Teorem 4.2 $G_m(x, t, \lambda)$, (3.5)-(3.6) probleminin *Green fonksiyonu olsun. Bu durumda bu çarpımsal Green fonksiyonu için aşağıda verilen özellikler sağlanır.

- i. $G_m(x, t, \lambda)$ çarpımsal Green fonksiyonu (a, a) noktasında süreklidir.
- ii. $G_m(x, t, \lambda) = G_m(t, x, \lambda)$ sağlanır.
- iii. $G_m(x, t, \lambda)$ çarpımsal Green fonksiyonu x değişkeninin bir fonksiyonu olduğundan her $t \in \mathbb{R}$ için (3.5) denklemini ve (3.6) koşullarını sağlar.
- iv. $\lambda_0, \Delta_m(\lambda)$ karakteristik denkleminin bir özdeğeri olsun. Bu durumda $\lambda_0, G_m(x, t, \lambda)$ fonksiyonunun basit kutup noktasıdır. Ayrıca $\widetilde{G}_m(x, t, \lambda)$, λ_0 komşuluğunda λ özdeğerinin çarpımsal tipte meromorfik fonksiyonu ve ψ , λ_0 ile ilgili normalleştirilmiş özfonksiyon olmak üzere

$$G_m(x, t, \lambda) = \left[\psi_0(x)^{-\psi_0(t)} \right]^{\frac{1}{\lambda - \lambda_0}} \widetilde{G}_m(x, t, \lambda)$$

şeklinde yazılır (Yılmaz vd. 2023).

İspat.

- i. $\theta_1(., \lambda)$ ve $\theta_2(., \lambda)$ fonksiyonları her $\lambda \in \mathbb{R}$ için sürekli olduğundan $G_m(x, t, \lambda)$ çarpımsal Green fonksiyonu da tanımı gereğince (a, a) noktasında süreklidir.
- ii. Çarpımsal Green fonksiyonu tanımı yardımıyla,

$$G_m(x, t, \lambda) = e^{\frac{-1}{\Delta_m(\lambda)}} \odot \begin{cases} \theta_2(x) \odot \theta_1(t), & a \leq t \leq x \\ \theta_1(x) \odot \theta_2(t), & x < t \leq b \end{cases}$$

ve

$$G_m(t, x, \lambda) = e^{\frac{-1}{\Delta_m(\lambda)}} \odot \begin{cases} \theta_2(t) \odot \theta_1(x), & a \leq x \leq t \\ \theta_1(t) \odot \theta_2(x), & t < x \leq b \end{cases}$$

olarak yazılır. Buradan çarpımsal analizin bazı temel özellikleri kullanılarak,

$$\ln G_m(x, t, \lambda) = \begin{cases} \left(\ln \theta_2(x)^{\ln \theta_1(t)} \right)^{\frac{-1}{\Delta_m(\lambda)}}, & \ln a \leq \ln t \leq \ln x \\ \left(\ln \theta_1(x)^{\ln \theta_2(t)} \right)^{\frac{-1}{\Delta_m(\lambda)}}, & \ln x < \ln t \leq \ln b \end{cases}$$

ve

$$\ln G_m(t, x, \lambda) = \begin{cases} \left(\ln \theta_2(t)^{\ln \theta_1(x)} \right)^{\frac{-1}{\Delta_m(\lambda)}}, & \ln a \leq \ln x \leq \ln t \\ \left(\ln \theta_1(t)^{\ln \theta_2(x)} \right)^{\frac{-1}{\Delta_m(\lambda)}}, & \ln t < \ln x \leq \ln b \end{cases}$$

elde edilir. Böylece,

$$\ln G_m(x, t, \lambda) = \begin{cases} \frac{-\ln \theta_2(x)}{\Delta_m(\lambda)} \ln \theta_1(t), & \ln a \leq \ln t \leq \ln x \\ \frac{-\ln \theta_2(t)}{\Delta_m(\lambda)} \ln \theta_1(x), & \ln x < \ln t \leq \ln b \end{cases}$$

ve

$$\ln G_m(t, x, \lambda) = \begin{cases} \frac{-\ln \theta_1(x)}{\Delta_m(\lambda)} \ln \theta_2(t), & \ln a \leq \ln x \leq \ln t \\ \frac{-\ln \theta_2(x)}{\Delta_m(\lambda)} \ln \theta_1(t), & \ln t < \ln x \leq \ln b \end{cases}$$

olup $G_m(x, t, \lambda) = G_m(t, x, \lambda)$ bulunur.

iii. $x \in [a, t]$ olsun. Bu durumda,

$$G_m(x, t, \lambda) = \theta_2(x)^{\frac{-\ln \theta_1(t)}{\Delta_m(\lambda)}}$$

olup buradan

$$LG_m(x, t, \lambda) = e^\lambda \odot G_m(x, t, \lambda)$$

yazılır. Benzer şekilde $x \in [t, b]$ için,

$$G_m(x, t, \lambda) = \theta_1(x)^{\frac{-\ln \theta_2(t)}{\Delta_m(\lambda)}}$$

ve

$$LG_m(x, t, \lambda) = e^\lambda \odot G_m(x, t, \lambda)$$

yazılır. Dolayısıyla buradan sırasıyla

$$(e^{\cos \alpha} \odot G_m(a, t, \lambda)) \oplus (e^{\sin \alpha} \odot G_m^*(a, t, \lambda)) = \left[(\theta_1(a))^{\cos \alpha} (\theta_1^*(a))^{\sin \alpha} \right]^{\frac{-\ln \theta_2(t)}{\Delta_m(\lambda)}} = 1$$

ve

$$(e^{\cos \beta} \odot G_m(b, t, \lambda)) \oplus (e^{\sin \beta} \odot G_m^*(b, t, \lambda)) = \left[(\theta_2(b))^{\cos \beta} (\theta_2^*(b))^{\sin \beta} \right]^{\frac{-\ln \theta_1(t)}{\Delta_m(\lambda)}} = 1$$

eşitlikleri elde edilir.

iv. Kabul edelim ki λ_0 özdeğeri $G_m(x, t, \lambda)$ fonksiyonun kutup noktası ve $R_m(x, t)$ ise $G_m(x, t, \lambda)$ fonksiyonun $\lambda = \lambda_0$ noktasındaki çarpımsal rezidüsü olsun. Buradan (3.21) ve (3.22) eşitliklerinden faydalanarak,

$$\begin{aligned} R_m(x, t) &= \lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0} [G_m(x, t, \lambda)]^{\lambda - \lambda_0} = \theta_1(x)^{\frac{-\ln \theta_1(t)}{c_1} \frac{1}{\frac{1}{c_1} \int_a^b \ln^2 \theta_1(x, \lambda_0) dx}} \\ &= \psi_0(x, \lambda_0)^{-\psi_0(t, \lambda_0)} \end{aligned}$$

yazılır. Bu ise ispatı tamamlar.

■

4.3 Bazı Örnekler

Örnek 4.1 Çarpımsal Sturm-Liouville sınır değer problemini,

$$e^{-1} \odot y^{**}(x) = e^\lambda \odot y(x) \quad (4.22)$$

denklemini ve

$$L_1(y) = y(0) = 0$$

$$L_2(y) = y(1) = 0$$

Dirichlet koşulları ile ele alalım. (4.22) denkleminin bir temel çözümler kümesi

$$\phi_1(x, \lambda) = e^{\cos \sqrt{\lambda} x}, \quad \phi_2(x, \lambda) = e^{\sin \sqrt{\lambda} x}$$

çözümleri ile verilir.

$$L_1(\phi_1) = e^{\cos \sqrt{\lambda} \cdot 0} = e, \quad L_1(\phi_2) = e^{\sin \sqrt{\lambda} \cdot 0} = 1$$

$$L_2(\phi_1) = e^{\cos \sqrt{\lambda} \cdot 1} = e^{\cos \sqrt{\lambda}}, \quad L_2(\phi_2) = e^{\sin \sqrt{\lambda} \cdot 1} = e^{\sin \sqrt{\lambda}}$$

olduğundan ve (4.22) denkleminin özdeğerlerinin karakteristik fonksiyonun sıfırları olduğu bilindiğinden

$$\Delta_m(\lambda) = \begin{vmatrix} \ln L_1(\phi_1) & \ln L_1(\phi_2) \\ \ln L_2(\phi_1) & \ln L_2(\phi_2) \end{vmatrix} = 0$$

yazılır. Buradan

$$\Delta_m(\lambda) = \begin{vmatrix} \ln(e) & \ln(1) \\ \ln(e^{\cos \sqrt{\lambda}}) & \ln(e^{\sin \sqrt{\lambda}}) \end{vmatrix} = \sin \sqrt{\lambda} = 0$$

olarak bulunur. Dolayısıyla, $\sin \sqrt{\lambda}$ sıfırları özdeğer olup, bu özdeğerler

$\lambda_n = n^2\pi^2$, $n \in \mathbb{N}$ olarak bulunur. Bu durumda,

$$\begin{aligned}\theta_1(x, \lambda) &= e^{-\sin \sqrt{\lambda}x} \\ \theta_2(x, \lambda) &= e^{\cos \sqrt{\lambda}x \sin \sqrt{\lambda} - \sin \sqrt{\lambda}x \sin \sqrt{\lambda}}\end{aligned}$$

olarak elde edilir. O halde ele alınan çarpımsal sınır değer problemi için çarpımsal Green fonksiyonu,

$$G_m(x, t, \lambda) = e^{\frac{-1}{\sin \lambda}} \odot \begin{cases} e^{\cos \sqrt{\lambda}x \sin \sqrt{\lambda} - \sin \sqrt{\lambda}x \sin \sqrt{\lambda}} \odot \sin \sqrt{\lambda}t, & 0 \leq t \leq x \\ \sin \sqrt{\lambda}x \odot e^{\cos \sqrt{\lambda}t \sin \sqrt{\lambda} - \sin \sqrt{\lambda}t \sin \sqrt{\lambda}}, & x < t \leq 1 \end{cases}$$

olarak yazılır (Yılmaz vd. 2023).

Örnek 4.2 Bu örnekte (4.22) ile verilen denklemin aşağıdaki çarpımsal Neumann koşullarıyla ele alıp

$$\begin{aligned}L_1(y) &= y^*(0) = 0 \\ L_2(y) &= y^*(1) = 0\end{aligned}$$

yeni bir problem oluşturalım. Bu problem için de

$$\phi_1(x, \lambda) = e^{\cos \sqrt{\lambda}x}, \quad \phi_2(x, \lambda) = e^{\sin \sqrt{\lambda}x}$$

olacağından

$$\begin{aligned}L_1(\phi_1) &= e^{\sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda} \cdot 0} = 1, \quad L_1(\phi_2) = e^{\sqrt{\lambda} \cos \sqrt{\lambda} \cdot 0} = e^{\sqrt{\lambda}} \text{ ve} \\ L_2(\phi_1) &= e^{-\sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda} \cdot 1} = e^{-\sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda}}, \quad L_2(\phi_2) = e^{\sqrt{\lambda} \cos \sqrt{\lambda} \cdot 1} = e^{\sqrt{\lambda} \cos \sqrt{\lambda}}\end{aligned} \tag{4.23}$$

olarak bulunur. Buradan problemin özdeğerleri karakteristik denklemin kökleri olacaktır

$$\Delta_m(\lambda) = \begin{vmatrix} \ln L_1(\phi_1) & \ln L_1(\phi_2) \\ \ln L_2(\phi_1) & \ln L_2(\phi_2) \end{vmatrix} = 0$$

yazılır. (4.23) kullanılarak

$$\Delta_m(\lambda) = \begin{vmatrix} \ln(1) & \ln(e^{\sqrt{\lambda}}) \\ \ln(e^{-\sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda}}) & \ln(e^{\sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda}}) \end{vmatrix} = \lambda \sin \sqrt{\lambda} = 0$$

olarak bulunur. Dolayısıyla, $\lambda \sin \sqrt{\lambda} = 0$ denklemin kökleri problemin özdeğerleri olacağından ele alınan problemin özdeğerleri $\lambda_n = n^2 \pi^2$, $n \in \mathbb{N}$ olarak bulunur. Problemin çarpımsal Green fonksiyonu ise

$$\begin{aligned}\theta_1(x, \lambda) &= e^{\sqrt{\lambda} \cos \sqrt{\lambda} x - \sin \sqrt{\lambda} x} \\ \theta_2(x, \lambda) &= e^{\sqrt{\lambda} (\cos \sqrt{\lambda} \cos \sqrt{\lambda} x + \sin \sqrt{\lambda} x \sin \sqrt{\lambda})}\end{aligned}$$

için

$$G_m(x, t, \lambda) = \begin{cases} \theta_2(x) e^{-\frac{\ln \theta_1(t)}{\Delta_m(\lambda)}}, & 0 \leq t \leq x \\ \theta_1(x) e^{-\frac{\ln \theta_2(t)}{\Delta_m(\lambda)}}, & x < t \leq 1 \end{cases}$$

olarak elde edilir (Yılmaz vd. 2023).

Örnek 4.3 Şimdi (4.22) denklemini

$$\begin{aligned}L_1(y) &= y(0) = 0 \\ L_2(y) &= y(1) y^*(1) = 0\end{aligned}$$

eşitlikleri ile verilen çarpımsal Robin koşulları ile ele alalım.

$$\phi_1(x, \lambda) = e^{\cos \sqrt{\lambda} x}, \quad \phi_2(x, \lambda) = e^{\sin \sqrt{\lambda} x}$$

(4.22) denklemi için çözüm olduğundan sınır koşulları kullanılarak

$$\begin{aligned}L_1(\phi_1) &= e^{\cos \sqrt{\lambda} \cdot 0} = e, \quad L_1(\phi_2) = e^{\sin \sqrt{\lambda} \cdot 0} = 1 \\ L_2(\phi_1) &= e^{\cos \sqrt{\lambda} \cdot 1} e^{-\sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda} \cdot 1} = e^{\cos \sqrt{\lambda} - \sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda}} \\ L_2(\phi_2) &= e^{\sin \sqrt{\lambda} \cdot 1} e^{\sqrt{\lambda} \cos \sqrt{\lambda} \cdot 1} = e^{\sin \sqrt{\lambda} + \sqrt{\lambda} \cos \sqrt{\lambda}}\end{aligned}$$

yazılır. Buradan, (4.22) denkleminin özdeğerleri

$$\Delta_m(\lambda) = \begin{vmatrix} \ln L_1(\phi_1) & \ln L_1(\phi_2) \\ \ln L_2(\phi_1) & \ln L_2(\phi_2) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \ln(e) & \ln(1) \\ \ln(e^{\cos \sqrt{\lambda} - \sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda}}) & \ln(e^{\sin \sqrt{\lambda} + \sqrt{\lambda} \cos \sqrt{\lambda}}) \end{vmatrix} = 0$$

denkleminin kökleri olup, bulunan değerler kullanılarak

$$\Delta_m(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \cos \sqrt{\lambda} - \sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda} & \sin \sqrt{\lambda} + \sqrt{\lambda} \cos \sqrt{\lambda} \end{vmatrix} = \sin \sqrt{\lambda} + \sqrt{\lambda} \cos \sqrt{\lambda} = 0$$

yazılır. Dolayısıyla, $\sin \sqrt{\lambda} + \sqrt{\lambda} \cos \sqrt{\lambda} = 0$ denkleminin kökleri problemin özdeğerleri olup problemin çarpımsal Green fonksiyonu ise,

$$\begin{aligned}\theta_1(x, \lambda) &= e^{-\sin \sqrt{\lambda} x} \\ \theta_2(x, \lambda) &= e^{(\sin \sqrt{\lambda} \cos \sqrt{\lambda} x - \cos \sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda} x) + (\cos \sqrt{\lambda} x \cos \sqrt{\lambda} + \sin \sqrt{\lambda} x \sin \sqrt{\lambda})}\end{aligned}$$

olmak üzere

$$G_m(x, t, \lambda) = \begin{cases} \theta_2(x) \frac{\sin \sqrt{\lambda} t}{\sin \sqrt{\lambda} + \sqrt{\lambda} \cos \sqrt{\lambda}}, & 0 \leq t \leq x \\ e^{\frac{\sin \sqrt{\lambda} x \ln \theta_2(t)}{\sin \sqrt{\lambda} + \sqrt{\lambda} \cos \sqrt{\lambda}}}, & x < t \leq 1 \end{cases}$$

olarak elde edilir (Yılmaz vd. 2023).

5. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu tez çalışması, Göktaş tarafından 2021 yılında yazılan makale ve Yılmaz vd. tarafından 2023 yılında yazılan makaleler esas alınarak hazırlanmıştır. İlk makalede literatürde geniş yer kaplayan, fizik ve matematik ile beraber birçok alanda uygulamaya sahip Sturm-Liouville problemi çarpımsal olarak tanımlanıp temel özellikleri çarpımsal özfonksiyonları ve spektral özellikleri incelenmiştir. Yılmaz vd. tarafından yapılan çalışmada ise çarpımsal Sturm-Liouville problemi için ilk kez çarpımsal Green fonksiyonu tanımlanmış ve bu fonksiyonun bilinen özellikleri çarpımsal analizde incelenmiştir. Biz de bu makalelerden esinlenerek ve kaynak göstererek çarpımsal Sturm-Liouville denklemi içeren çarpımsal problemi tekrar ayrıntıları ile ele alıp spektral özelliklerini inceledik. Çarpımsal analizde çalışanlar için bu tezin özellikleri spektral analiz çalışanlarına esin kaynağı olabileceğini düşünmekteyiz. Klasik sonuçların çarpımsal analizde elde edilmesi gösterildiğinden, ileriki çalışmalarda da klasik Sturm-Liouville problemi için elde edilmiş diğer spektral özelliklerin çalışılması hedeflenmektedir.

KAYNAKLAR

- Bashirov, A. E., Kurpinar E. M. and Özyapıcı, A. 2008. Multiplicative calculus and its applications, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 337(1); 36–48.
- Bashirov, A., Mısırlı, E., Tandoğdu and Y., Özyapıcı, A. 2011. On Modelling with Multiplicative Differential Equations. *Applied Mathematics-A Journal of Chinese Universities, Series B* 26, no.4, 425-438.
- Bashirov, A. 2013. Online and Double Multiplicative Integrals. *TWMS J. Appl. Eng. Math*, 3(1); 103-107.
- Cordova Lepe, F. 2006. The Multiplicative Derivative As a Measure of Elasticity in Economics. *TheaetetoAtheniensi Mathematica*, 2.
- Cordova Lepe, F. 2009. From Quotient Operation Toward a Proportional Calculus. *Journal of Mathematics, Game Theory and Algebra*.
- Filip, D. and Piatecki, C. 2014. A Non-Newtonian Examination of The Theory of Exogenous Economic Growth. *Mathematica Aeterna*, 4(2), 101–117.
- Filip, D. and Piatecki, C. 2014. In defense of a non-newtonian economic analysis.
- Grossman, M. and Katz,R. 1972. *Non-Newtonian Calculus*, Lee Press, Pigeon Cove.
- Grossman, M. 1979. *The First Nonlinear Systems of Differential and Integral Calculus*. Galileo In. Massachusetts.
- Gürefe, Y. 2009. Çarpımsal Analiz ve Uygulamaları. Yüksek Lisans Tezi, Ege Üniversitesi, Fen Bilimleri.
- Gürefe, Y. 2013. Multiplikatif diferansiyel denklemler ve uygulamaları üzerine. Doktora Tezi, Ege Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü.
- Göktaş, S. 2021. A New Type of Sturm-Liouville Equation in the Non-Newtonian Calculus, *Journal of Function Spaces* 2021(Article ID 5203939), 1–8.
- Göktaş, S.,Yılmaz E. and Yar, A.Ç. 2022. Multiplicative Derivative and Its Basic Properites on time scales. *Math. Methods Appl. Sci.*, 45(4); 2097-2109.
- Göktaş, S., Kemaloglu, H. and Yılmaz, E. 2022. Multiplicative Conformable Fractional Dirac System. *Turkish J. Math.*, 46(3); 973-990.
- Gülşen, T., Yılmaz, E. and Göktaş, S. 2022. Multiplicative Dirac System. *Kuwait J. Sci.*, 49(3); 11pp.
- Hohlfeld, R.G., Drueding, T.W. and Ebersole, J.F. 1989. Application of Optical Measure Theory to Atmospheric Temperature Sounding From Tobs Radiances. U.S. Air F. distribution unlimited, Bedford.
- Kreyszing, E. 1978. *Introductory Functional Analysis with Applications*, New York.

- Kadak, U. 2015. Nwtonyeen Olmayan Analiz ve Çeşitli Uygulamaları. Doktora Tezi, Gazi Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü.
- Kadak, U., and Gürefe, Y. 2016. A Generalization on Weighted Means Convex Functions with respect to the Non-Newtonian Calculus. *Interration J. Analy.*, Article ID 5416751.
- Maginnis, J. 1980. Non-Newtonian Calculus Applied to Probability, Utility and Bayesian Analysis.
- Naimark, M. A. 1967. Linear Differential Operators, Ungar, New York.
- Özyapıcı, A. 2009. Çarpımsal Analiz ve Uygulamaları. Doktora Tezi, Ege Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü.
- Öznur, G.B., Özbey, G.G., Aygar Küçükevcilioğlu, Y. and Aktaş Karaman, R. 2022. Miscellaneous Properties of Sturm-Liouville Problems in Multiplicative Calculus. *Comm. Fac. Sci. Uni. Anka Ser. A1 Math. and Sta.*, 72(4); 1141-1154.
- Stanley, D. 1999. A Multiplicative Calculus. *Problems, Resources and Issues in Mathematics Undergraduate Studies*, 9, 310-26.
- Volterra, V., Hostinsky, B. 1938. Opérations Infinitésimales Linéaires. Herman, Paris.
- Yalçın, N. 2016. Çarpımsal (Multiplikatif) Türev ve Çarpımsal Lineer Diferansiyel Denklemler. Doktora Tezi, Atatürk Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü.
- Yener, G. 2016. Çarpımsal Analizin q-Genişlemesi: q-Çarpımsal Analiz ve Uygulamaları. Doktora Tezi, Yıldız Teknik Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü.
- Yalçın, N. and Çelik, E., 2018. The Solution of Multiplicative Non-Homogeneous Linear Differential Equations, *Journal of Applied Mathematics and Computation*, 2(1): 27-36.
- Yılmaz, E., 2021. Multiplicative Bessel Equation and Its Spectral Properties. *Ricche di Matematica*.
- Yılmaz, E., Gülşen, T. and Göktaş, S. 2023. Reconstruction of Green's Function for Multiplicative Sturm-Liouville Problem. *Filomat* 37(3), 761-773