

ANKARA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DOKTORA TEZİ

KONVEKS SIRALAMA İLE İKİ BOYUTLU DAĞILIMLARIN
BAĞIMLILIK YAPILARININ İNCELENMESİ

Mehmet YILMAZ

İSTATİSTİK ANABİLİM DALI

ANKARA
2004

Her hakkı saklıdır

Prof. Dr. Yalçın TUNCER danışmanlığında, Mehmet YILMAZ tarafından hazırlanan bu çalışma 29/03/2004 tarihinde, aşağıdaki jüri tarafından İstatistik Anabilim Dalı'nda Doktora tezi olarak kabul edilmiştir.

Başkan: Prof. Dr. Ceyhan İNAL

Prof. Dr. Yalçın TUNCER

Prof. Dr. Fikri ÖZTÜRK

Prof. Dr. Ülkü GÜRLER

Doç. Dr. Fahrettin ARSLAN

Yukarıdaki sonucu onaylarım

Prof. Dr. Metin OLGUN
Enstitü Müdürü

ÖZET

Doktora Tezi

KONVEKS SIRALAMA İLE İKİ BOYUTLU DAĞILIMLARIN BAĞIMLILIK YAPILARININ İNCELENMESİ

Mehmet YILMAZ

Ankara Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
İstatistik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Yalçın TUNCER

Aynı marjinallere sahip iki boyutlu dağılımlar ailesinin elemanları için bağımlılığın türünü ve derecesini belirlemek, söz konusu aile üzerinde bir kısmi sıralama elde etmeye yönelmektedir.

Bu çalışmada, marjinalleri verilmiş iki boyutlu sürekli dağılım fonksiyonları $\mathcal{F}_c$ ailesi için, tek boyutlu uzayda tanımlanmış, kısmi sıralama özelliklerini taşıyan konveks sıralama kavramı iki boyutlu uzaya taşınmaya çalışılmıştır. Öyle ki, $\mathcal{F}_c$ ailesinden olan dağılım fonksiyonları için konveks sıralama, koşullu dağılım fonksiyonları yardımı ile belirlenmiştir. Buna bağlı olarak, dağılımların ne tür bir bağımlılık sergilediği araştırılmıştır.

Son olarak, konveks sıralama ilişkisine göre, $\mathcal{F}_c$ ailesi üzerinde bağımlılığın derecesini ölçmek amacıyla bir bağımlılık indeksi tanımlanmıştır.

2004, 84 sayfa

ANAHTAR KELİMELELER: Konveks sıralama, dağılımlarda kısmi sıralama, bağımlılık sıralaması, iki boyutlu bağımlılık sıralamaları, bağımlılık yapıları

ABSTRACT

Ph. D. Thesis

DETECTION OF DEPENDENCE STRUCTURES OF BIVARIATE DISTRIBUTIONS THROUGH CONVEX ORDERING

Mehmet YILMAZ

Ankara University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Statistics

Supervisor: Prof. Dr. Yalçın TUNCER

For a family of bivariate distributions with identical marginals determination of dependence and hence degree of dependence is tantamount to obtaining a partial ordering on such a family. This work considers a family $\mathcal{F}_c$ of continuous distributions with a partial ordering " $\stackrel{c}{\sim}$ " called convex ordering defined on it. Convex ordering is well-known in a univariate setup, but little known in the bivariate case. We therefore attempt to extend bivariate case. The convex ordering here is defined in terms of conditional distributions corresponding to $\mathcal{F}_c$. Through such a convex ordering, inherent dependence structures of distributions are identified. For determination of degree of dependence, a index of dependence is suggested for such a convex ordered family.

2004, 84 pages

Key Words: Convex ordering, partial ordering of distributions,
dependence ordering, bivariate dependence ordering,
dependence structures

TEŞEKKÜR

Yüksek Lisans ve Doktora öğrenimim boyunca, çalışmamın her safhasında, ilgi ve önerileri ile beni yönlendiren, desteğini esirgemeyen sevgili danışman hocam, Sayın Prof. Dr. Yalçın TUNCER (Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi İstatistik Bölümü)' e ve bu tez çalışmasının oluşması aşamasında yardımlarını gördüğüm değerli Tez İzleme Komitesi üyeleri olan Prof. Dr. Ceyhan İNAL (Hacettepe Üniversitesi Fen Fakültesi İstatistik Bölümü) ve Doç. Dr. Fahrettin ARSLAN (Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi İstatistik Bölümü)' a teşekkürlerimi sunarım.

Mehmet YILMAZ
Ankara, Mart 2004

İÇİNDEKİLER

ÖZET	i
ABSTRACT	ii
ÖNSÖZ ve TEŞEKKÜR	iii
SİMGELER DİZİNİ	vi
ŞEKİLLER DİZİNİ	viii
1. GİRİŞ	1
1.1 Ana Çatı	2
2. KURAMLILIK TEMELLERİ	5
2.1 İlişki ve Sıralama	5
2.2 Tek Boyutlu Uzayda Konvekslik ve Konveks Sıralama Kavramları	7
2.3 Tek Değişkenli Dağılımlar için Konveks Temelli Sıralama Türleri	10
2.4 Bağımlılık Sıralaması	13
2.5 İki Boyutlu Dağılımlar Ailesi için Fréchet Sınırları	16
2.6 Bazı Bağımlılık İlişkisi Türleri	17
2.6.1 Pozitif Bağımlılık Sıralaması	17
2.6.2 Pozitif ve Negatif Kadran Bağımlılığı	19
2.6.3 Pozitif ve Negatif Regresyon Bağımlılığı	19
2.6.4 Capéraà ve Genest Türü PRB	20
2.6.5 Pozitif Olabilirlik Oranı ya da TP_2 Bağımlılığı	20
2.6.6 Sol Kuyruktan Azalan Bağımlılık	21
2.6.7 Sağ Kuyruktan Artan Bağımlılık	21
2.6.8 Stokastik Olarak Artan Bağımlılık	22
2.7 İki Değişkenli Dağılımlar için Bazı Sıralama Türleri	22
2.7.1 Uyum (Concordance) Sıralaması	23
2.7.2 Pozitif Regresyon Bağımlılığına dayalı sıralama	24
2.7.3 Olabilirlik Oranı Sıralaması	24
2.7.4 TP_2 Sıralaması	24
2.7.5 Supermodular Sıralama	25
2.7.6 Stokastik Olarak Artan Bağımlılığa dayalı sıralama	26
2.7.7 $SOKAB$ ve $SAKAB$ anlamında bağımlılık sıralamaları	26

3. METERYAL ve YÖNTEM	28
3.1 Tek Boyutlu Dağılım Fonksiyonları için Konveks Sıralama	28
3.2 Konveks Sıralı Aile	39
3.3 İki Boyutlu Dağılımlar için Konveks Sıralama Kavramı	41
4. ARAŞTIRMA BULGULARI	45
4.1 Konvekslik Kavramına Dayalı Bağımlılık Sıralaması	45
4.2 Konveks Sıralamanın Bazı Bağımlılık Türleri ile Olan İlişkileri	46
4.2.1 Pozitif (Negatif) Kadran Bağımlılığı	46
4.2.2 Pozitif ve Negatif Regresyon Bağımlılığı	48
4.2.3 Olabilirlik Oranı Bağımlılığı ya da TP_2 Bağımlılığı	52
4.3 Konveks Sıralamanın Capéraa ve Genest Türü PRB ve TP_2 ile Olan İlişkisi	56
4.3.1 TP_2 ile olan ilişkisi	56
4.4 Konveks Sıralamanın $SOKAB$ Sıralaması ile Olan İlişkisi	60
4.5 İki Rasgele Değişkenin Bağımsızlığı ile İlgili Durumlar	61
4.6 FGM Dağılımı için Konveks Sıralama	62
4.7 Gumbel' in İki Değişkenli Üstel Dağılımı için Konveks Sıralama	69
4.8 İki Boyutlu Keyfi Dağılım için Konveks Sıralama	70
4.9 Konveks Sıralı Aile Üzerinde Bir Bağımlılık Ölçütü	72
5. TARTIŞMA ve SONUÇ	76
5.1 Sonuç 1	76
5.2 Sonuç 2	76
5.3 Sonuç 3	76
5.4 Sonuç 4	77
5.5 Sonuç 5	78
5.6 Sonuç 6	79
5.7 Sonuç 7	79
5.8 Sonuç 8	79
5.9 Sonuç 9	79
5.10 Sonsöz	80
KAYNAKLAR	81
ÖZGEÇMİŞ	84

SİMGELER DİZİNİ

$\mathcal{P}(.,.)$	ikili dağılımlar ailesi
$\times$	kartezyen çarpım
$\langle ., . \rangle$	sıralı ikili
$\mathcal{R}$	ilişki, bağıntı (relation)
$\Re$	reel sayılar
$\mathcal{F}_c(.,.)$	marjinalleri belli sürekli dağılımlar ailesi
$\succsim^{st}$	stokastik büyüklük
$\succsim^c$	dağılımlar için konveks sıralama
$\succsim_{ZV}$	Van Zwet anlamında konveks sıralama
$\leq_{ks}$	rasgele değişkenler için konveks sıralama
$\leq_{lr}$	olabilirlik oran sıralaması
$\preceq_{Lorenz}$	Lorenz sıralaması
$\prec_*$	yıldız biçimli sıralama
$\prec_{su}$	üst toplanabilir sıralama
$\perp$	rasgele değişkenler için bağımsızlık
$\succsim^b$	kısmi sıralı bağımlılık ilişkisi

$\prec^b$	bağımlılık ilişkisi
$\succsim$	pozitif bağımlılık ilişkisi
$F(.,.)$	iki boyutlu Fréchet ailesi
PKB	pozitif kadran bağımlılığı
NKB	negatif kadran bağımlılığı
PRB	pozitif regresyon bağımlılığı
NRB	negatif regresyon bağımlılığı
TP_2	ikinci dereceden toplam pozitif bağımlılık
$SOKAB$	sol kuyruktan azalan bağımlılık
$SAKAB$	sağ kuyruktan artan bağımlılık
$SOAB$	stokastik olarak artan bağımlılık
$\prec\prec$	uyum sıralaması (concordance ordering)
$\underset{sm}{\prec}$	supermodular sıralama
$<<$	mutlak süreklilik
$\equiv$	eşdeğerlik
$hhhy$	hemen hemen her yerde

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 3.1. Tek Boyutlu Dağılımlarda Konveks Sıralamayı gösteren bir örnek	29
Şekil 3.2. Örnek 3.1.2 için verilen dağılımların grafikleri	30
Şekil 3.3. $\phi(t)$ fonksiyonunun grafiği	31
Şekil 4.1. Marjinaleri Düzgün olan FGM dağılımı için konvek sıralama	69
Şekil 4.2. Örnek 4.8.1 için $\phi(t)$ eğrileri	71

1. GİRİŞ

Bilindiği gibi, gerçek hayatta nesneler hakkında yorum yapılabilmesi için birbirlerine göre nitelik ve niceliklerinin karşılaştırılması önem taşımaktadır. Örneğin; şu nesne bu nesneden daha büyüktür ya da şu nesne bu nesneden daha ağırdır biçiminde niceliksel karşılaştırmalar yapılır. Böylece, en elverişlisini seçme olanağı elde edilir. Gerçek hayatta olduğu gibi, İstatistiki alanda da dağılımlar için göreceli üstünlük ve büyüklük gibi karşılaştırmalı ilişkiler büyük önem taşır. Öyle ki, dağılımlar arasında böyle bir sıralamanın yapılabilmesi, bu dağılımları birbirlerine göre stokastik olarak karşılaştırma olanağı vermektedir.

Konvekslik kavramı da ağırlığını uç noktalara vermesinden dolayı iki fonksiyonu birbirinden ayırt etmede oldukça etkili olmaktadır. Öyle ki, Hardy *et al.* (1934)'ün konvekslik kavramını kullanarak iki fonksiyonun birbirlerine göre konvekslik bakımından üstünlüğünü gösteren çalışmaları, konveks sıralama kavramının matematik temeli olarak görmek mümkündür. Dağılım fonksiyonları için de böyle bir ilişkiyi (konveks-konkav sıralama ilişkisini) saptamanın çekici ve yararlı olduğu düşünülebilir.

Çok boyutlu uzayda ise sıralama ilişkisi, genellikle bağımlılığın yapısını ortaya çıkarmak için bir "bağımlılık ilişkisi" olarak tanımlanmaktadır. Özellikle iki boyutlu uzayda, dağılımlar arasında bir sıralamanın tanımlanabilmesi ve aynı zamanda da bu sıralamanın bir bağımlılık sıralaması gösterebilmesi için dağılımların keyfi olmaması gerekir. Bağımlılık ya da bağımsızlık kavramı, ilgili iki boyutlu dağılımların marjinalleri ile belirlendiğine göre, marjinalleri aynı olan dağılımlar arasında bir sıralama ilişkisinin tanımlanabilmesi mümkündür. Keyfi iki boyutlu dağılımları sıralamak pek yararlı bir yöntem olamamaktadır.

Buna göre, aynı marjinallere sahip iki boyutlu dağılımlar $\mathcal{P}(.,.)$ gibi bir ailede bulunsun. Bu aile üzerinde bağımlılığın türünü ve derecesini belirlemek, $\mathcal{P}(.,.)$ ailesi üzerinde tanımlanan ve genellikle gerçel değerli olan dönüşümler aracılığı ile bir kısmi sıralama elde etmeye yönelmektedir. Söz konusu dönüşümlerin en tipik örneği rasgele değişkenlerdir. Dolayısı

ile $\mathcal{P}(.,.)$ dağılımlar ailesi üzerinde bir sıralama yapma ile $\mathcal{F}(.,.)$ dağılım fonksiyonları ailesi üzerinde bir sıralama yapmak aynı sonucu vermektedir yani bağımlılık sıralaması bozulmamaktadır.

Bu çalışmada, konvekslik kavramına dayalı olarak “ $\overset{c}{\succsim}$ ” gibi bir kısmi sıralama ilişkisi önerilmiştir. Bu kısmi sıralama konveks fonksiyonunun tanımı gereği, $\mathcal{F}(.,.)$ ailesi daraltılarak, $\mathcal{F}_c(.,.)$ iki boyutlu sürekli dağılım fonksiyonları ailesi üzerinde tanımlanmıştır. Böylelikle, $\left(\mathcal{F}_c(.,.), \overset{c}{\succsim}\right)$ kısmi sıralı ailesi oluşturulur ki, artık bu aileden olan her bir dağılım fonksiyonu için bazı konveks dönüşümler yardımıyla $\mathcal{F}_c$ ailesi üzerinde bağımlılık türünü saptamak mümkün olmaktadır.

Literatüre bakıldığında, tek boyutlu uzayda iyice bilinen konveks sıralamanın iki boyutlu uzayda kullanımına ilişkin çalışmaya rastlanamamıştır. İki boyutlu uzayda bu düşüncelere ışık tutabilmesi amacı ile, “ $\overset{c}{\succsim}$ ” ilişkisine dayalı olarak $\left(\mathcal{F}_c(.,.), \overset{c}{\succsim}\right)$ kısmi sıralı ailesinin oluşturulması önerisine gidilmiş ve bu aile üzerinde ne tür bağımlılıkları saptayabildiği araştırılmıştır. Bu araştırmanın sonucunda, konveks dönüşümler yardımı ile bağımlılık türlerinin hemen hemen tamamına (en azından İkinci Dereceden Toplam Pozitif Bağımlılığa, TP_2' ye) ulaşılabilirdiği ayrı ayrı gösterilmiştir. Dolayısı ile $\left(\mathcal{F}_c(.,.), \overset{c}{\succsim}\right)$ kısmi sıralısını oluşturabilmek demek, $\mathcal{F}_c$ ailesi üzerinde birçok bağımlılık türünün belirlenmesi anlamına gelmektedir. Bu bağımlılığın derecesini belirlemek için de $\left(\mathcal{F}_c(.,.), \overset{c}{\succsim}\right)$ kısmi sıralı ailesi üzerinde bir bağımlılık ölçütü tanımlamak yerinde olacaktır.

1.1 Ana Çatı

Çalışma, içerik bakımından beş bölüme ayrılmıştır. Bölüm 1, çalışmanın amacını ve bu amaca yönelik temel çerçeveyi belirlemektedir. Çalışmanın amacına ulaşabilmesi için ilişki, sıralama ve konvekslikle ilgili bir takım temel kavramlar Bölüm 2’ de verilmiştir. Konvekslik kavramının

tek boyutlu uzayda teorik gelişimi tanıtıldıktan sonra, Alt Bölüm 2.3’ te bazı konveks temelli sıralama tanımları ve bu sıralamaların birbirleri ile olan gerektirmelerinden bahsedilmiştir. Alt Bölüm 2.4’ te, iki boyutlu uzayda bir bağımlılık sıralaması tanımlamanın ne anlam ifade ettiği vurgulanmış, bazı bağımlılık türleri ve bunlara ilişkin önerilmiş sıralama kavramlarına değinilmiştir. Son yıllarda, Capéraà ve Genest (1990)’ nin Pozitif Regresyon Bağımlılığı (*PRB*) ve İkinci Dereceden Toplam Pozitif Bağımlılık (*TP₂*) kavramları için önerilmiş çalışmaları, Averous ve Bernadet (2000)’ nin Sol Kuyruktan Azalan Bağımlılık (*SOKAB*) ve Sağ Kuyruktan Artan Bağımlılık (*SAKAB*) türlerine yönelik bağımlılık sıralamaları tamamen konvekslik kavramına dayalı olmasa da çalışmanın sonuçlarını karşılaştırma bakımından dikkati çekmiştir. Bu kavramlar iki boyutlu uzayda bağımlılık sıralamasının teorik gelişimi olarak görülmüş Alt Bölümler halinde verilmiştir.

Bölüm 3’ te, Chan *et al.* (1985)’ in tek boyutlu uzayda önerdikleri konveks sıralama kavramının, iki boyutlu uzayda bu sıralamayı tanımlayabilmek için meteryal olarak kullanılmasından ve elde edilen bazı ek analitik özelliklerden bahsedilmiştir. Konvekslik kavramına dayalı olarak tek boyutlu uzayda, parametrik testler yapabilmek amacı ile önerilmiş olan konveks sıralı aile kavramı sunulmuştur. Alt Bölüm 3.3’ te, tek boyutlu uzayda tanımlanan konveks sıralamanın iki boyutlu uzayda kullanılabilmesi için ilk kez bu çalışmada önerilen yöntemden bahsedilmiştir.

Bölüm 4’ te ise $\left(\mathcal{F}_c(.,.), \overset{c}{\mathcal{L}}\right)$ konveks sıralı ikilisi üzerinde, bağımlılık ve bağımsızlık kavramları ele alınmış, bağımlılığın ne türde olabileceği hakkında tartışmalara yer verilmiştir. Buna ilişkin Alt Bölüm 4.6, 4.7 ve 4.8’ de bazı iki boyutlu dağılımlar için konveks sıralamaya dayalı olarak, dağılımların bağımlılık yapılarını ortaya çıkarmada nasıl yardımcı olabileceğini gösteren örnekler verilmiştir. Alt Bölüm 4.9’ da, $\left(\mathcal{F}_c(.,.), \overset{c}{\mathcal{L}}\right)$ kon-

veks sıralı ikilisi için “ $\overset{c}{\mathcal{L}}$ ” ilişkisinin $\mathcal{F}_c$ ’ yi oluşturan marjinallere göre derecesini gösteren bir ölçüt geliştirilmiştir. Bu ölçütün aynı zamanda bir bağımlılık ölçütü olabileceği tartışılmıştır. Araştırmanın hem tek boyutlu

uzayda hem de iki boyutlu uzayda elde edilen sonuçlarına Bölüm 5’ te yer verilmiştir.

Temel çerçeve içerisinde bu çalışma, konu hakkındaki yeni yaklaşımları işaret eden bir tartışma metni olarak görülebilir.

2. KURAMLILIK TEMELLERİ

Bu Bölümde, çalışmanın esasına dayalı olarak ilişki ve sıralama, konvekslik, bağımlılık ve bağımsızlık kavramları ve buna bağlı olarak bazı bağımlılık sıralaması türlerine yer verilmiştir. Çalışma, tek boyutlu uzayda önerilen sıralamanın iki boyutlu uzayda kullanılmasına dayalı olduğundan, öncelikle tek boyutlu uzayda bilinen bazı sıralamalar özellikle konveks temelli sıralamalar tanım şeklinde verilmiştir.

Aşağıda ilişki ve sıralama kavramlarına dayalı bazı temel tanımlar verilmiştir. Bu tanımları herhangi bir Genel Matematik ve Reel Analiz kitaplarında bulmak mümkündür. Örneğin, Dudley (1989)' a bakılabilir.

2.1 İlişki ve Sıralama

Tanım 2.1.1 A ve B iki küme olmak üzere, $A \times B = \{ (a, b) : a \in A, b \in B \}$ kümesine, A ile B kümelerinin kartezyen çarpımı denir.

Tanım 2.1.2 $A \times B$ kümesinin boş olmayan her bir $\mathcal{R} \subset A \times B$ alt kümesine ilişki (bağıntı) denir.

Tanım 2.1.3 $A \times B$ kartezyen çarpım kümesinde (a, b) sıralı ikilisi ele alınsın. $(a, b) \in \mathcal{R} \subset A \times B$ ise, $a \in A$ elemanı $b \in B$ elemanı ile “ $\mathcal{R}$ ” bakımından ilişkilidir denir ve bu ilişki, $a\mathcal{R}b$ ile gösterilir.

Tanım 2.1.4 E bir küme ve $\mathcal{R} \subset E \times E$ de E kümesi üzerinde bir ilişki olsun. Eğer $\mathcal{R}$ ilişkisi aşağıdaki koşulları sağlarsa, $\mathcal{R}$ ilişkisine denklik ilişkisi denir:

- a) $\forall x \in E$ için $x\mathcal{R}x$, (yansıma özelliği),
- b) $\forall x, y \in E$ için $x\mathcal{R}y \iff y\mathcal{R}x$, (simetri özelliği),
- c) $\forall x, y, z \in E$ için $x\mathcal{R}y, y\mathcal{R}z \implies x\mathcal{R}z$ (geçişme özelliği)

bu tür kümeler $\langle E, \mathcal{R} \rangle$ ile gösterilir.

Tanım 2.1.5 Eğer E kümesi üzerinde tanımlanan $\mathcal{R}$ ilişkisi aşağıdaki koşulları sağlarsa, E kümesine kısmi sıralı küme, $\mathcal{R}$ ilişkisine de kısmi sıralama ilişkisi adı verilir:

- a) $\forall x \in E$ için $x\mathcal{R}x$ (yansıma özelliği),
- b) $\forall x, y \in E$ için $x\mathcal{R}y, y\mathcal{R}x \iff x = y$ (ters simetri özelliği),
- c) $\forall x, y, z \in E$ için $x\mathcal{R}y, y\mathcal{R}z \implies x\mathcal{R}z$ (geçişme özelliği).

Yukarıda tanımlar doğrultusunda, gerçel sayılar üzerinde tanımlı, “ $\leq$ ” ya da “ $\geq$ ” ilişkileri tipik ilişki örnekleridir. Bunlara benzer birçok ilişki türü tanımlamak mümkündür.

Tanım 2.1.6 İki kısmi sıralı küme $\langle E, \mathcal{R} \rangle$ ve $\langle A, \mathcal{T} \rangle$ verilsin. $\forall u, v \in E$ için, $u\mathcal{R}v \iff f(u)\mathcal{T}f(v)$ olacak şekilde E ’ den A ’ ya bire-bir ve örten bir f fonksiyonu varsa, $\langle E, \mathcal{R} \rangle$ ve $\langle A, \mathcal{T} \rangle$ kümeleri izomorftir denir ve f fonksiyonuna sıra izomorfizmi adı verilir.

Tanım 2.1.7 Bilindiği gibi, Tanım 2.1.5’ teki gibi bir sıralama söz konusu olduğunda, sıralamada kullanılan ilişkinin aşağıdaki aksiyomları sağlaması gerekir:

- A1)** $x\mathcal{R}y$ ve $y\mathcal{R}x \implies x = y, \quad \forall x, y \in E$;
- A2)** $x\mathcal{R}y$ ve $y\mathcal{R}z \implies x\mathcal{R}z, \quad \forall x, y, z \in E$;
- A3)** $\forall x, y \in E$ için ya $x\mathcal{R}y$ ’ dir ya da $y\mathcal{R}x$ ’ dir;
- A4)** E kümesinin boş olmayan her A gibi bir alt kümesi için $\exists a \in A$ vardır ki, $\forall y \in A$ için $a\mathcal{R}y$ olur.

Kısmi sıralama, **A1** ve **A2** aksiyomlarını, basit (lineer) sıralama, **A1**, **A2** ve **A3** aksiyomlarını, ve tam (iyi) sıralama da **A1**, **A2**, **A3** ve **A4** aksiyomlarını sağlar.

Tek boyutlu uzayda fonksiyonlar arasında bir sıralamanın yapılabilmesi için genelde bu fonksiyonların destek kümesinin aynı olması gibi bir koşul

gerekmektedir. Söz konusu bu sıralamalara, ileriki bölümlerde bahsedileceği gibi, tek boyutlu uzayda yeterince örnekleri vardır. Yukarıdaki kavramlara dayalı olarak, istatistiki sahada bilinen sıralama türüne örnek olarak aşağıdaki tanım verilebilir.

Tanım 2.1.8 X ve Y tek değişkenli rasgele değişkenler olsun. F ve G sırası ile ilgili dağılım fonksiyonları ve $\overline{F} = 1 - F$, $\overline{G} = 1 - G$ olmak üzere, $\forall u \in \mathfrak{R}$ için eğer,

$$\overline{F}(u) \leq \overline{G}(u)$$

ise, X rasgele değişkeni Y rasgele değişkeninden stokastik anlamda daha küçüktür denilir ve $X \preceq^{st} Y$ ile gösterilir.

Söz konusu rasgele değişkenlerin aldığı değerler pozitif ise yani $x, y \in \mathfrak{R}^+ = [0, \infty)$ ise,

$$E[X] = \int_0^{\infty} (1 - F(x)) dx < \infty,$$

$$E[Y] = \int_0^{\infty} (1 - G(y)) dy < \infty$$

beklenen değerlerinin sonlu olmaları koşulu altında,

$$X \preceq^{st} Y \implies E[X] \leq E[Y]$$

yazılabilir.

2.2 Tek Boyutlu Uzayda Konvekslik ve Konveks Sıralama Kavramları

Konuyla hazırlık olması amacı ile konvekslik kavramı ile ilgili bazı temel tanımlar verilecektir. Bu tanımlar analiz kitaplarının çoğunda olmakla beraber yararlanılan kaynaklar tanımların sonunda yer almaktadır.

Tanım 2.2.1 V bir vektör uzayı olsun. V vektör uzayı içinde C gibi bir küme ele alınsın. C kümesinin konveks bir küme olabilmesi için gerek ve yeter koşul, $\forall x, y \in C$ ve $\forall \lambda \in [0, 1]$ için $\lambda x + (1 - \lambda)y \in C$ olmasıdır. Burada $\lambda x + (1 - \lambda)y$, x ve y 'nin konveks bileşimidir (Dudley 1989).

Tanım 2.2.2 V bir gerçel vektör uzayı ve C , V içinde bir konveks küme olsun. Gerçel değerli bir f fonksiyonu C üzerinde konveks olabilmesi için gerek ve yeter koşul $\forall x, y \in C$ ve $\forall \lambda \in [0, 1]$ için,

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$$

olmasıdır. Eşitsizlik tersine ise f konkav bir fonksiyondur denir (Dudley 1989). Analitik bir yordam olarak, f eğrisine çizilebilen teğetler eğrinin altında ise, f konveks bir fonksiyon, teğetler eğrinin üstünde ise konkav bir fonksiyondur.

Tanım 2.2.3 Tanım 2.2.2' de $x = x + h$, $y = x - h$ ve $\lambda = \frac{1}{2}$ alınırsa,

$$2f(x) \leq f(x + h) + f(x - h)$$

olduğunda, f fonksiyonu konvektir (Courant 1964). Hemen görüleceği gibi, Tanım 2.2.2' den daha zayıf koşullu bir tanımdır.

Önerme 2.2.1 f , $J \subset \mathbb{R}$ gibi bir aralık üzerinde konveks bir fonksiyon olsun. $t < u < v$ ve $t, u, v \in J$ olmak üzere,

$$\frac{f(u) - f(t)}{u - t} \leq \frac{f(v) - f(t)}{v - t} \leq \frac{f(v) - f(u)}{v - u}$$

eşitsizliği sağlanır (Dudley 1989).

Önerme 2.2.2 $f(x)$ fonksiyonu, $J = (a, b)$ gibi bir aralıkta konveks bir fonksiyon olsun. Eğer $f(x)$, J üzerinde sürekli ise sağ ve sol taraftan türevleri vardır ve bu türevlerin herbiri J üzerinde azalmayandır. Ayrıca sağ

tarafından türevi, sol tarafından türevinden küçük değildir. Bu sonuç Tanım 2.2.3' den kolaylıkla görülebilir. Ayrıca, Silverman (1985)' e bakılabilir.

Önerme 2.2.3 $f(x)$ fonksiyonu, $J = (a, b)$ gibi açık bir aralık üzerinde ikinci türeve sahip olsun. O zaman $f(x)$ fonksiyonunun konveks olması için gerek ve yeter koşul, J aralığı içindeki her x için, $\frac{d^2 f(x)}{dx^2} \geq 0$ olmasıdır. (Hardy *et al.* 1934, Silverman 1985).

Konvekslik kavramı, matematiksel temel bakımından ele alınırsa, Hardy *et al.* (1934)' ün çalışmaları dikkati çekmektedir. Bu yazarlar, bir fonksiyonun başka bir fonksiyona göre konveks olması kavramını ileri sürmüş ve bazı eşitsizlikler geliştirmişlerdir. Ona göre, İstatistiki alanda konvekslik kavramının gelişmesinde yardımcı oldukları söylenebilir. Öyleki, Van Zwet (1964) ve Chan *et al.* (1985) gibi yazarların konvekslik kavramına dayalı sıralama önerileri istatistiki sahada oldukça önemlidir. Burada şunu belirtmek gerekir; yukarıda adı geçen Chan *et al.* (1985) gibi yazarların konvekslik kavramına dayalı olarak önerdikleri sıralama tanımı, bu çalışmaya ışık tutan bir meteryal olmuştur. Bu nedenle, söz konusu yazarların önerdikleri sıralama Bölüm 3' te ayrıntıları ile verilmiştir.

Tanım 2.2.4 F ve G herhangi iki fonksiyon ve $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$ olmak üzere,

$$F^{-1} \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i F(x_i) \right) \geq G^{-1} \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i G(x_i) \right)$$

eşitsizliğinin tüm x_i ve $\lambda_i \geq 0$ $i = 1, 2, \dots, n$ için geçerli olması durumunda F , G ' ye göre konveks sıralama bakımından daha üstündür denir (Hardy *et al.* 1934).

Tanım 2.2.5 G dağılım fonksiyonu sürekli ve F dağılımı da G ' ye göre mutlak sürekli olsun. Eğer $FG^{-1}(t)$, $t \in (0, 1)$ aralığı üzerinde konveks bir fonksiyon ise, F dağılımı G dağılımına göre konveks sıralıdır denir ve $F \stackrel{c}{\succsim} G$ biçiminde gösterilir. Kısaca,

$$\phi(t) = FG^{-1}(t) : (0, 1) \rightarrow (0, 1)$$

biçiminde tanımlanan ϕ fonksiyonu konveks ise F dağılımı G dağılımına göre daha konveks sıralıdır denir (Chan *et al.* 1985). Burada $G^{-1}(t)$, G dağılım fonksiyonunun tersini (kuantil fonksiyonunu) ifade etmektedir ve $G^{-1}(t) = \inf \{x : G(x) \geq t\}$ biçiminde tanımlıdır.

Tanım 2.2.6 G herhangi bir sürekli dağılım fonksiyonu ve F , G dağılımına göre mutlak sürekli bir dağılım fonksiyonu olsun. F fonksiyonunun destek kümesinde tanımlı $G^{-1}(F(x))$ fonksiyonu konveks ise, F dağılımı G dağılımına göre Van Zwet anlamında konveks sıralıdır denilir ve $F \preceq_{ZV} G$ ile gösterilir (Van Zwet 1964).

Aşağıdaki Alt Bölümde, konvekslik kavramının teorik gelişimi açısından Tanım 2.2.5 ve Tanım 2.2.6'ya dayalı olarak, tek değişkenli dağılımlar için bazı sıralama türleri verilmiştir.

2.3 Tek Değişkenli Dağılımlar için Konveks Temelli Sıralama Türleri

Tanım 2.3.1 X ve Y iki rasgele değişken olsun. $\Upsilon = \{\tau : \Re \rightarrow \Re\}$ tüm konveks fonksiyonlar kümesini göstermek üzere, beklenen değerlerin varlığı koşulu altında,

$$E[\tau(X)] \leq E[\tau(Y)], \quad \tau \in \Upsilon$$

ise, X konveks sıralama bakımından Y 'den küçüktür denilir ve $X \leq_{ks} Y$ ile gösterilir.

Tanım 2.3.2 Olasılık yoğunluk fonksiyonları sırası ile f ve g olan X ve Y rasgele değişkenleri gözönüne alınsın. $\frac{f(t)}{g(t)}$ oranı X ve Y 'nin destek kümelerinin birleşimi üzerinde azalmayan ise ya da $\forall u \leq v$ için,

$$f(u)g(v) \geq f(v)g(u)$$

ise, X değişkeni olabilirlik oran sıralaması (likelihood ratio order) bakımından Y rasgele değişkeninden küçüktür denilir ve $X \leq_{lr} Y$ ile gösterilir.

Not: X ve Y 'nin destek kümeleri aynı olmak üzere,

$$X \leq_{lr} Y \implies FG^{-1} \text{ konveks}$$

olur. Burada, F ve G sırası ile X ve Y rasgele değişkenlerinin dağılım fonksiyonlarıdır.

Eğer F ve G sürekli iseler, tersi de doğrudur yani,

$$FG^{-1} \text{ konveks} \implies X \leq_{lr} Y$$

olur (Shaked ve Shanthikumar 1994).

Tanım 2.3.3 Negatif olmayan ve sonlu bir beklenen değere sahip X rasgele değişkeninin dağılım fonksiyonu F olsun. X rasgele değişkeninin Lorenz eğrisi,

$$L_X(u) = \frac{\int_0^u F^{-1}(z) dz}{\int_0^1 F^{-1}(z) dz}, \quad u \in [0, 1]$$

şeklinde tanımlıdır. Lorenz eğrisi ekonomide gelir eşitsizliğinin ölçütü olarak kullanılır. Son yıllarda, İstatistik bilimine katkısı olmakla birlikte, esasının Neymann-Pearson hipotez testi sürecine dayandığı söylenebilir.

Yukarıdaki tanıma göre, Y negatif olmayan ve sonlu beklenen değere sahip bir başka rasgele değişken ve dağılım fonksiyonu da G olsun. Buna göre, $E(X) = E(Y) < \infty$ koşulu altında, $\forall u \in [0, 1]$ için,

$$L_X(u) \geq L_Y(u)$$

olması demek, X rasgele değişkeninin (ya da dağılımının) Y rasgele değişkenine göre, Lorenz sıralaması bakımından daha küçük olduğu anlamına

gelmektedir ve $X \preceq_{Lorenz} Y$ ile gösterilmektedir (Shaked ve Shanthikumar 1994).

Tanım 2.3.4 $\mathfrak{R}^+ = [0, \infty)$ üzerinde tanımlı gerçel değerli bir φ fonksiyonu için,

$$\varphi(\alpha x) \leq \alpha \varphi(x), \quad \forall \alpha \in [0, 1]$$

ise, φ fonksiyonuna yıldız-biçimli (star-shaped) fonksiyon denir. Yukarıdaki tanıma eşdeğer olarak, eğer $x > 0$ için $\frac{\varphi(x)}{x}$ fonksiyonu azalmayan fonksiyon ise, $\varphi(\cdot)$ fonksiyonuna yıldız-biçimli fonksiyon denir ($0 < y < x$ olmak üzere, $\alpha = \frac{y}{x}$ seçilirse kolaylıkla iki tanımın eşdeğer olduğu görülebilir).

Yukarıdaki bilgiler ışığında, yıldız-biçimli sıralama kavramı tanımlanabilir.

F ve G fonksiyonları $\mathfrak{R}^+ = [0, \infty)$ üzerinde tanımlı tam anlamıyla artan fonksiyonlar olsunlar. Öyle ki, $F(0) = G(0) = 0$ olsun. Eğer $G^{-1}(F(x))$ yıldız-biçimli bir fonksiyon ise yani $\frac{G^{-1}(F(x))}{x}$ azalmayan bir fonksiyon ise, F fonksiyonunun G fonksiyonuna göre daha yıldız-biçimli olduğu söylenir ve $F \prec_* G$ ile gösterilir (Barlow ve Proschan 1975).

Tanım 2.3.5 $\mathfrak{R}^+ = [0, \infty)$ üzerinde tanımlı gerçel değerli φ fonksiyonu $\forall x, y \geq 0$ için,

$$\varphi(x + y) \geq \varphi(x) + \varphi(y)$$

eşitsizliği sağlandığında, φ ye üst toplanabilir (superadditive) fonksiyon denir (Tchen 1980).

Yukarıdaki tanıma göre, F ve G fonksiyonları $\mathfrak{R}^+$ üzerinde tanımlı fonksiyonlar olmak üzere, öyle ki, $F(0) = G(0) = 0$ ve

$$G^{-1}F(x + y) \geq G^{-1}F(x) + G^{-1}F(y), \quad \forall x, y \geq 0$$

ise, F fonksiyonu G fonksiyonuna göre üst toplanabilirdir denir ve $F \prec_{su} G$ ile gösterilir. (Barlow ve Proschan 1975).

Yukarıdaki tanımlara göre,

$$F \prec_{ZV} G \Rightarrow F \prec_* G \Rightarrow F \prec_{su} G$$

konveks sıralamanın, yıldız-biçimli sıralama ve üst toplanabilir sıralamalarını gerektirdiği söylenebilir. Ayrıca, Tanım 2.3.1' de verilen rasgele değişken bakımından konveks sıralamanın Lorenz sıralaması ve olabilirlik oranı sıralamasını gerektirdiği söylenebilir:

$$\begin{array}{ccc} & \Rightarrow & X \leq_{lr} Y \\ X \leq_{ks} Y & \Leftarrow & \\ & \Rightarrow & X \preceq_{Lorenz} Y \end{array}$$

İki boyutlu uzaya geçildiğinde ise, ilişki kavramının tanımı dağılımlar ya da dağılım fonksiyonları ailesi üzerinde yapılmaktadır. Bu ilişkiler genelde bağımlılık ilişkisi olarak bilinmektedir. Aşağıda, dağılımlar ailesi üzerinde bir bağımlılık ilişkisinin ve sıralamasının nasıl tanımlanabileceği bahsedilecektir. Burada tekrar niteliğinde de olsa bazı tanımların verilmesinden yarar umulmaktadır.

2.4 Bağımlılık Sıralaması

İki boyutlu uzayda, bağımlılık sıralamasının tanımının yapılabilmesi için, öncelikle bağımlılık ve bağımsızlık kavramlarını açıklamak gerekir.

$(\Omega, \mathcal{U}, P)$ olasılık uzayında A ve B gibi iki olay tanımlansın. Bu iki olay için eğer,

$$P(A \cap B) = P(A)P(B), \quad A, B \in \mathcal{U} \quad (2.4.1)$$

ise, A ve B olayları birbirinden bağımsızdır denilir. Eşitsizlik halinde, A ve B olayları bağımlıdır denilir.

Bağımsızlığı ya da bağımlılığı ölçülebilir fonksiyonlar aracı ile de tanımlamak mümkündür.

Tanım 2.4.1 $(\Omega, \mathcal{U}, \mu)$ gibi bir olasılık uzayı ile,

$$T = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} : \Omega \times \Omega \longrightarrow \mathfrak{R}^2$$

gibi bir dönüşüm verilsin. Böylece, $(\mathfrak{R}^2, \mathfrak{B}(\mathfrak{R}^2))$ türetilmiş Borel ölçülebilir uzayı ortaya çıkar. Bu uzay üzerinde,

$$A_x = \{X \leq x\} = \{X \leq x\} \cap \{Y \leq \infty\},$$

$$B_y = \{Y \leq y\} = \{X \leq \infty\} \cap \{Y \leq y\},$$

$$A_x \cap B_y = \{X \leq x\} \cap \{Y \leq y\} = \{X \leq x, Y \leq y\}$$

kümeleri tanımlansın. Buna göre, X ve Y ölçülebilir fonksiyonlarının (rasgele değişkenlerinin) ters görüntüleri,

$$X^{-1}(A_x) = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in A_x\} \in \mathcal{U},$$

$$Y^{-1}(B_y) = \{\omega \in \Omega : Y(\omega) \in B_y\} \in \mathcal{U},$$

$$X^{-1}(A_x) \cap Y^{-1}(B_y) = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in A_x \text{ ve } Y(\omega) \in B_y\} \in \mathcal{U}$$

biçiminde tanımlanmaktadır. Burada,

$$\mu : \mathcal{U} \rightarrow [0, 1] \quad \text{ve} \quad P_{XY} : \mathfrak{B}(\mathfrak{R}^2) \rightarrow [0, 1]$$

olmak üzere,

$$\mu(X^{-1}(A_x) \cap Y^{-1}(B_y)) = P_{XY}(A_x \cap B_y)$$

şeklinde tanımlanan $P_{XY}(.,.)$ olasılık dağılımına karşın dağılım fonksiyonu özelliklerini sağlayan $F(x, y)$ gerçel fonksiyonu bulunsun: $P_{XY}(A_x \cap B_y) = F(x, y)$ Benzer biçimde,

$$\mu(X^{-1}(A_x) \cap Y^{-1}(\mathfrak{R})) = P_{XY}(X \leq x, Y \leq \infty) = P_X(A_x) = F_X(x),$$

$$\mu(X^{-1}(\mathfrak{R}) \cap Y^{-1}(B_y)) = P_{XY}(X \leq \infty, Y \leq y) = P_Y(B_y) = F_Y(y)$$

fonksiyonları bulunsun. Buna göre, $\forall (x, y) \in \mathfrak{R}^2$ için,

$$F(x, y) = F_X(x)F_Y(y) \quad (2.4.2)$$

eşitliği sağlanıyorsa, X ve Y rasgele değişkenleri stokastik anlamda bağımsızdır denir ve $X \perp Y$ ile gösterilir. Bu tanım (2.4.1) eşitliği ile denktir. Aksine, öyle bir $(x, y) \in \mathfrak{R}^2$ bulunsun ki,

$$F(x, y) \neq F_X(x)F_Y(y) \quad (2.4.3)$$

olsun. Bu durumda, X ve Y rasgele değişkenleri arasında stokastik anlamda bir bağımlılık var demektir.

Burada şunu belirtmek gerekir ki, çalışmada $(\Omega, \mathcal{U})$ ölçülebilir uzayı üzerinde değil de $(\mathfrak{R}^2, \mathfrak{B}(\mathfrak{R}^2))$ uzayı üzerinde durulacaktır yani daha çok dağılım fonksiyonlarının işin içine sokularak araştırmanın bulguları elde edilmeye çalışılacaktır.

Yukarıdaki tanımlar doğrultusunda, dağılım fonksiyonları ailesi üzerinde bir sıralama yapmanın anlamı şudur: İki boyutlu uzayda sıralama ilişkisi, marjinalleri belli dağılımlar ailesi üzerinde tanımlanabildiğinden tek boyutluda olduğu gibi, dağılımların destek kümeleri aynı olmaktadır. Bu tür sıralamalar arasında bağımlılık sıralaması ön plana çıkmaktadır. Bağımlılık sıralaması, $(\Omega, \mathcal{U})$ ölçülebilir uzayı üzerinde tanımlı bütün olasılık dağılımları kümesi üzerinde tanımlanan ve $\preceq^b$ ile gösterilen “bağımlılık ilişkisi” ne göre bir sıralamadır. Örneğin, $\mathcal{P}(P_X, P_Y)$ böyle bir olasılık

kümesi ve $\lesssim^b$ bu küme üzerinde bir sıralama ilişkisi ise, $\mathcal{P}(P_X, P_Y)$ kümesi $\lesssim^b$ ilişkisine göre sıralı bir küme oluşturmaktadır. Bu sıralama $(\mathcal{P}(P_X, P_Y), \lesssim^b)$ ikilisi ile gösterilir. Ona göre, $P_1, P_2 \in \mathcal{P}(P_X, P_Y)$ olmak üzere, $P_1 \lesssim^b P_2$ gibi bir karşılaştırma yapılabiliyorsa, ikinci dağılımın birinci dağılımdan daha fazla bir bağımlılık sergilediği anlamı çıkmaktadır. $\lesssim^b$ gibi bir sıralamayı, türetilmiş $(\mathbb{R}^2, \mathfrak{B}(\mathbb{R}^2))$ ölçülebilir uzayı üzerinde tanımlı bütün dağılım fonksiyonları kümesi $\mathcal{F}(F_X, F_Y)$ için de tanımlamak mümkün olmaktadır. Dikkat edilirse, özellikle dağılım fonksiyonlarının tek olması nedeni ile, dağılımlar arasında bulunan bağımlılık aslında X ve Y rasgele değişkenleri arasındaki bağımlılığa dönüşmektedir. $\mathcal{F}(F_X, F_Y)$ ailesi üzerinde $\lesssim^b$ gibi bir bağımlılık sıralamasının yapılabildiği kadar, bu bağımlılığın türü ve yönü önem kazanmaktadır. Bu nedenle, çalışmanın ilerleyen aşamalarında birbirleri ile karşılaştırma amacı ile bilinen bazı bağımlılık türlerinin tanımlanmasında yarar vardır.

İki boyutlu dağılımlar ailesi için bağımlılığın sınırlarını teşkil eden, Fréchet alt ve üst sınırları olarak bilinen sınırlar, şu şekilde ifade edilebilir:

2.5 İki Boyutlu Dağılımlar Ailesi için Fréchet Sınırları

Marjinaleri $F_X(x)$ ve $F_Y(y)$ olan ikili dağılım fonksiyonları ailesi $F(F_X, F_Y)$ ile gösterilsin. Bu aileden olan her F dağılımı için,

$$F^+(x, y) = \min \{F_X(x), F_Y(y)\}, \quad \forall x, y$$

$$F^-(x, y) = \max \{F_X(x) + F_Y(y) - 1, 0\}, \quad \forall x, y$$

olmak üzere,

$$F^-(x, y) \leq F(x, y) \leq F^+(x, y), \quad \forall x, y \quad (2.5.1)$$

eşitsizliği sağlar (Fréchet 1951). Yukarıdaki eşitliklerden ilki Fréchet üst sınırı, ikincisi ise Fréchet alt sınırı olarak adlandırılır. F^+ ve F^- dağılımları sırası ile pozitif ve negatif bağımlılığın aşırı uçları (sınırları) olarak bilinmektedir (Kimeldorf ve Sampson 1987).

2.6 Bazı Bağımlılık İlişkisi Türleri

$\mathcal{P}(P_X, P_Y)$ ya da $\mathcal{F}(F_X, F_Y)$ ailesi üzerinde tanımlanan bir ilişkinin pozitif bağımlılık sıralaması gösterebilmesi için Kimeldorf ve Sampson (1987) tarafından önerilen aksiyomları sağlaması gerekir. Aşağıda bu aksiyomlar verilmiştir.

2.6.1 Pozitif Bağımlılık Sıralaması

Pozitif bağımlılık kavramı, iki rasgele değişken çifti arasındaki pozitif bağımlılığın derecesi ile bu dereceyi ölçmeyi içeren birçok kavrama öncülük etmiştir: Aynı marjinallere sahip iki boyutlu iki dağılımı karşılaştırmak için temel fikir, bir dağılımın diğerinden daha pozitif anlamda bağımlı olduğunun saptanmasıdır. Böylece dağılımlar üzerinde pozitif bağımlılığın derecesine bağlı olarak bir kısmi sıralama yapılır. Aynı zamanda bu ilişki, (X, Y) ve (U, V) gibi rasgele değişkenler çifti için de söz konusudur.

Tanım 2.6.1 $\mathcal{F}(F_X, F_Y)$ gibi ikili dağılım fonksiyonları ailesi ya da bu dağılım fonksiyonlarına sahip rasgele değişkenlerin kümesi üzerinde tanımlanmış olan “ $\prec^b$ ” ilişkisi, eğer aşağıdaki özellikleri sağlarsa pozitif bağımlılık sıralamasını gösterir (Kimeldorf ve Sampson 1987):

O1) $F \prec^b G \implies F(x, +\infty) = G(x, +\infty)$ ve $F(+\infty, y) = G(+\infty, y)$, (F ve G aynı marjinallere sahiptir);

O2) $F \prec^b G \implies \forall x, y$ için $F(x, y) \leq G(x, y)$;

O3) $F \prec^b G$ ve $G \prec^b H \implies F \prec^b H$ (geçişlilik özelliği);

O4) $F \prec^b F$ (yansıma özelliği);

O5) $F \prec^b G$ ve $G \prec^b F \implies F = G$ (ters simetri özelliği);

O6) $F^- \prec^b F \prec^b F^+$;

O7) $(X, Y) \prec^b (U, V) \implies$ tüm artan g fonksiyonları için, $(g(X), Y) \prec^b (g(U), V)$;

O8) $(X, Y) \prec^b (U, V) \implies (-U, V) \prec^b (-X, Y)$;

O9) $(X, Y) \prec^b (U, V) \implies (Y, X) \prec^b (V, U)$ (simetri, rasgelelik);

O10) $n \rightarrow \infty$ için $F_n \xrightarrow{L} F$ ve $G_n \xrightarrow{L} G$ olmak üzere, $F_n \prec^b G_n \implies F \prec^b G$. Burada, F_n, F, G_n ve G aynı marjinallere sahip dağılımlardır ve " $\xrightarrow{L}$ " ile dağılımda yakınsama (olasılık yasasına göre yakınsama) ifade edilmektedir.

" $\prec^b$ " için, yukarıdaki koşullar sağlamıyorsa, " $\preceq$ " ile gösterilecektir. Bu durumda, $F \preceq G$ gibi bir sıralama söz konusu ise " F dağılımı G dağılımından daha az pozitif bağımlıdır" denir. O1) özelliği, pozitif bağımlılık ilişkisi bakımından sadece aynı marjinallere sahip olan ikili dağılımların karşılaştırılabilmesi gerekliliğini ifade etmektedir. O2) özelliği, G' nin F ' den stokastik olarak daha büyük olması gerektiğini vurgulamaktadır. O3), O4) ve O5) özellikleri, uygun olarak kısmi sıralamanın karakteristikleri olan geçişlilik, yansıma ve ters simetri özelliklerini ifade etmektedir. O6) özelliği, Fréchet üst sınırının mümkün olan en pozitif bağımlı bir dağılım ve Fréchet alt sınırının en az pozitif bağımlı bir dağılım olduğunu ifade etmektedir. Buradan şöyle bir sonuç çıkarılabilir: Fréchet üst (alt) sınırı, bu iki sınır arasındaki her dağılım için daha çok (az) pozitif bağımlı olduğunu ifade etmektedir. O7) özelliği, zayıf monoton değişmezlik gerekçesidir. Öyle ki, sıralı dağılımlarda değişkenlerden birisinin üzerinde monoton bir dönüşüm yapıldıktan sonra bile sıralama bozulmamaktadır. O8) özelliği, (U, V) çifti (X, Y) çiftinden daha pozitif bağımlı ise $(-U, V)$ çiftinin $(-X, Y)$ çiftinden daha negatif bağımlı olduğunu (ya da daha az pozitif bağımlı olduğunu) ifade etmektedir. O9) özelliği rasgele değişkenlerinin sırasının rasgele (simetrik) olduğunu belirtir. O10) özelliği ise zayıf yakınsamaya göre sürekliliği talep etmektedir. O7), O8) ve O9) özelliklerinin sonucu olarak;

$$(X, Y) \preceq (U, V) \implies (f(X), g(Y)) \preceq (f(U), g(V))$$

yazılabilir. Burada, f ve g ya her ikisi de artan ya da azalan fonksiyonlardır.

Bu açıdan bakıldığında, bazı pozitif bağımlılık sıralaması türlerini ayırt etmek mümkündür. Örnek olarak Tanım 2.6.2 verilebilir.

2.6.2 Pozitif ve Negatif Kadran Bağımlılığı

(2.4.3) ifadesi bağımlılığı gösterdiğine göre, bu bağımlılığın türü ve yönü (pozitif bağımlılık ya da negatif bağımlılık) önem taşımaktadır. Öyle ki, X ve Y gibi iki rasgele değişken için,

$$P_{XY}(X \leq x, Y \leq y) \geq P_X(X \leq x)P_Y(Y \leq y), \quad \forall x, y \in \mathfrak{R} \quad (2.6.1)$$

eşitsizliği sağlamıyor ise, X ve Y rasgele değişkenleri pozitif kadran bağımlıdır denilir ve $PKB(X, Y)$ ile gösterilir. Eğer eşitsizlik tersine ise, X ve Y rasgele değişkenleri negatif kadran bağımlıdır denilir ve $NKB(X, Y)$ ile gösterilir.

Tanım 2.6.2 Aynı marjinallere sahip iki boyutlu F ve G dağılımları için,

$$G(x, y) \geq F(x, y) \geq F_X(x)F_Y(y) \quad \forall (x, y) \in \mathfrak{R}^2 \quad (2.6.2)$$

gibi bir eşitsizlik geçerli ise, G dağılımının F dağılımından daha pozitif kadran bağımlı olduğu söylenebilir (Lehmann 1966, Tchen 1980). Bu anlamda, $F \prec_{PKB} G$ gibi bir pozitif bağımlılık sıralamasının yapılabildiği söylenebilir. (İspat için, Lehmann (1966)'a bakılabilir).

2.6.3 Pozitif ve Negatif Regresyon Bağımlılığı

Eğer,

$$P_{Y|X}(Y \leq y \mid X = x) \geq P_{Y|X}(Y \leq y \mid X = x') \quad (2.6.3)$$

$\forall y$ ve $\forall x < x'$ için sağlanıyorsa, X ve Y pozitif regresyon bağımlıdır denilir. Yani, $\forall y$ için $P_{Y|X}(Y \leq y | X = x)$ olasılığı x üzerinde artmayan bir fonksiyon ise buna pozitif regresyon bağımlılığı denilir ve $PRB(Y | X)$ ile gösterilir. Eğer $P_{Y|X}(Y \leq y | X = x)$ olasılığı x 'in azalmayan bir fonksiyonu ise buna negatif regresyon bağımlılığı denilir ve $NRB(Y | X)$ ile gösterilir.

Bu çalışmada kullanılan yöntemle benzerlik taşıyan, Capéraà ve Genest (1990)' in PRB ' ye dayalı olarak yaptıkları tanım aşağıda sunulmuştur.

2.6.4 Capéraà ve Genest Türü PRB

Marjinaleri F_X ve F_Y olan sürekli dağılım fonksiyonları ailesi $\mathcal{F}_c(F_X, F_Y)$ ile gösterilsin. $F \in \mathcal{F}_c$ ise, $Y = y$ verilmişken X rasgele değişkeninin koşullu dağılım fonksiyonu $F_y = F_{X|Y=y}$, tam anlamı ile artan bir fonksiyon olduğu durumda, $u \in [0, 1]$ olmak üzere, $F_{X|Y=y}^{-1}(u)$ tek bir şekilde tanımlı olmaktadır. Buna göre, $y < y' \in \mathcal{R}$ için,

$$F_{y'y}(u) = F_{y'}F_y^{-1}(u) : [0, 1] \rightarrow [0, 1] \quad (2.6.4)$$

biçiminde tanımlı olan fonksiyon $\forall u \in [0, 1]$ için

$$F_{y'y}(u) \leq u$$

olduğunda, ilgili rasgele değişkenler (X, Y) arasında $PRB(X | Y)$ biçiminde bir bağımlılık olduğu söylenmektedir (Capéraà ve Genest 1990).

2.6.5 Pozitif Olabilirlik Oranı Bağımlılığı ya da TP_2 Bağımlılığı

Bu bağımlılık kavramı, sürekli rasgele değişkenlerin her sonlu setinde tanımlanabilir (Karlin 1968). Tanım basit olsun diye olasılık yoğunluk fonksiyonları mevcut olan iki boyutlu sınıfta verilecektir.

X ve Y rasgele değişkenlerinin ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu $f(x, y)$ olmak üzere, $\forall x_1 < x_2$ ve $\forall y_1 < y_2$ için,

$$f(x_1, y_2)f(x_2, y_1) \leq f(x_1, y_1)f(x_2, y_2) \quad (2.6.5)$$

ise $f(x, y)$ ikinci dereceden toplam pozitif bağımlıdır ya da X ve Y rasgele değişkenleri pozitif olabilirlik oranı bağımlılığına sahiptir denilir ve $TP_2(X, Y)$ ile gösterilir.

TP_2 bağımlılığının, pozitif regresyon bağımlılığından ve pozitif kadrans bağımlılığından daha güçlü olduğunu Esary ve Proschan (1972), Yanagimoto (1990) çalışmalarında göstermişlerdir.

Teorem 2.6.1 Alt Bölüm 2.6.4' de (2.6.4) eşitliği ile verilen $F_{y'y}(u)$ fonksiyonu $\forall y < y' \in \mathfrak{R}$ ve $\forall u \in [0, 1]$ için konveks ise, ilgili ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu f' nin TP_2 anlamında bağımlılığı gösterdiği söylenmektedir (Capéraa ve Genest 1990).

Bu teorem Alt Bölüm 4.3.1' de, tartışma amacıyla ayrıntılı olarak açıklanacaktır. Söz konusu açıklamayı yeni bir ispat şekli olarak da görmek mümkündür.

2.6.6 Sol Kuyruktan Azalan Bağımlılık

X ve Y iki rasgele değişken ve bunların ortak olasılık dağılımı da $P_{XY}(., .)$ olmak üzere,

$$P_{X|Y}(X \leq x \mid Y \leq y)$$

olasılığı, y artarken $\forall x$ için artmıyorsa X ile Y arasında sol kuyruktan azalan bağımlılık vardır denilir ve $SOKAB(X \mid Y)$ ile gösterilir.

2.6.7 Sağ Kuyruktan Artan Bağımlılık

X ve Y iki rasgele değişken ve bunların ortak dağılımı da $P_{XY}(., .)$ olmak üzere,

$$P_{X|Y}(X > x \mid Y > y)$$

olasılığı, y artarken $\forall x$ için azalmıyorsa X ile Y arasında sağ kuyruktan artan bağımlılık vardır denilir ve $SAKAB(X | Y)$ ile gösterilir.

2.6.8 Stokastik Olarak Artan Bağımlılık

X ve Y iki rasgele değişken ve bunların ortak dağılımı da $P_{XY}(\cdot, \cdot)$ olmak üzere,

$$P_{X|Y}(X > x | Y = y)$$

olasılığı y ' nin artan bir fonksiyonu ise X stokastik olarak Y ' de artan bir bağımlılık sergiler denilir ve $SOAB(X | Y)$ ile gösterilir.

Bağımlılık kavramları arasındaki gerektirmeler aşağıdaki gibi verilebilir (Barlow ve Proschan 1975):

$$TP_2 \longrightarrow SOAB (PRB) \begin{matrix} \nearrow SOKAB \\ \searrow SAKAB \end{matrix} \nearrow PKB \quad (2.6.6)$$

Giriş niteliğinde hatırlama amacı ile de olsa, tanımlar verildi. Bundan sonraki Alt Bölümde iki boyutlu dağılımların, bahsedilen bağımlılık türlerine göre, tanımlanan sıralamalara ve özellikle de konvekslik yapısını içeren sıralamalara değinilecektir.

2.7 İki Değişkenli Dağılımlar için Bazı Sıralama Türleri

İki rasgele değişken için bağımlılığın saptanabilmesi, bağımsızlık hipotezi altında elde edilen $F_0 = F_X F_Y$ dağılımı ile, ilgili rasgele değişkenlerin ortak dağılımı olan F dağılımını karşılaştırma yolu ile yapılabilir. Daha genel olarak, marjinaleri aynı olan iki F ve G dağılımı için birinin diğerine göre daha pozitif bağımlı olup olmadığı karşılaştırılmak istenebilir. Bu amaçla birçok sıralama türleri önerilmiştir; Yanagimoto ve Okamoto (1969)' nun stokastik olarak artan bağımlılık sıralaması $\preceq_{SOAB}$, Yanagimoto (1990)' nun TP_2 anlamında bağımlılık sıralaması, Capéraà ve Genest

(1990)'nın $SOAB$, PRB ve TP_2 anlamında sıralama tanımları, Kimeldorf ve Sampson (1987)'nin Pozitif Bağımlılık Sıralaması için önerdikleri aksiyomlar ve TP_2 anlamında bağımlılık sıralaması, Rinott ve Pollack (1980)'nin pozitif bağımlı fonksiyonlar aracılığı ile önerdikleri sıralamalar, Schriever (1987), Shaked ve Shanthikumar (1994) gibi yazarların kuantil fonksiyonlarına dayalı sıralamalar, Averous ve Bernadet (2000)'nin $SOKAB$ ve $SAKAB$ anlamında bağımlılık sıralamaları dikkati çekmektedir. Bunun yanı sıra, Shaked ve Shanthikumar (1994); Scarsini (1998) gibi yazarlar tarafından, çok değişkenli dağılımlar için geliştirilmiş sıralamalar da önemli olmaktadır. Ancak bu çalışmanın amacı gereğince, çok boyutlu uzayda yapılan bu sıralamaların üzerinde fazla durulmayacaktır.

İki boyutlu uzayda tanımlanmış çeşitli bağımlılık sıralamalarına rastlamak mümkündür. Fakat tek boyutluda olduğu gibi konvekslik kavramına dayalı bir sıralama literatürde gözükmemektedir. Özellikle, Capéraà ve Genest (1990)'nın TP_2 anlamında sıralama tanımı, konveksliği sadece araç olarak kullanmaktan öteye geçmemiştir.

2.7.1 Uyum (Concordance) Sıralaması

İki boyutlu F ve G dağılımları $\forall x, y$ için $F(x, y) \geq G(x, y)$ eşitsizliğinin sağlanması F ile G dağılımları arasında bir uyum sıralamasına yol açmaktadır ve böyle bir sıralama $G \prec\prec F$ ile gösterilir. Söz konusu G dağılımı F 'nin marjinalleri çarpımı ise $F_X(x)F_Y(y) \leq F(x, y)$ şeklindeki eşitsizlik pozitif kadrans bağımlılığı vermektedir. Öyle ki, marjinalleri $F_X(x)$ ve $F_Y(y)$ olan başka bir $H(x, y)$ dağılımı için,

$$F_X(x)F_Y(y) \leq G(x, y) \leq H(x, y), \quad \forall x, y \in \mathfrak{R}$$

ise, $G \prec_{PKB} H$ biçiminde bir sıralama yapılabilmesi söz konusudur (Tchen 1980). Uyum sıralaması sadece " $\leq$ " ilişkisine dayandığından bilinen en zayıf sıralama türüdür. (Görülebileceği üzere, diğer sıralama türlerinin varlığı için bazı ek koşullar gerekmektedir. Zayıflıktan kasıt bu anlama gelmektedir).

2.7.2 Pozitif Regresyon Bağımlılığına dayalı sıralama

F ve G iki boyutlu dağılım fonksiyonları olmak üzere, verilmiş bir y için, $F_{X|Y=y}(x)$ ve $G_{X|Y=y}(x)$ y 'nin artmayan fonksiyonu olsunlar. Bu durumda, $\forall x \in \mathfrak{R}$ ve bazı y 'ler için,

$$G_{X|Y=y}(x) \leq F_{X|Y=y}(x)$$

ise, G dağılımının F dağılımına göre daha pozitif regresyon bağımlı olduğu söylenir ve $F \prec_{PRB} G$ ile gösterilir (Yanagimoto 1990).

2.7.3 Olabilirlik Oranı Sıralaması

$\mathbf{X} = (X_1, Y_1)$ ve $\mathbf{Y} = (X_2, Y_2)$ sürekli (kesikli) dağılım fonksiyonlarına sahip iki boyutlu rasgele vektörler olsun. f ve g de bunlara uygun olarak ortak olasılık yoğunluk fonksiyonları olsun. $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathfrak{R}^2$ için,

$$f(\mathbf{x})g(\mathbf{y}) \leq f(\mathbf{x} \wedge \mathbf{y})g(\mathbf{x} \vee \mathbf{y})$$

eşitsizliği sağlamıyorsa, $\mathbf{X}$ rasgele vektörü olabilirlik oranı sıralaması bakımından $\mathbf{Y}$ rasgele vektöründen küçüktür denilir ve $\mathbf{X} \underset{lr}{\prec} \mathbf{Y}$ ile gösterilir.

Burada $\mathbf{x} = (x_1, y_1)$ ve $\mathbf{y} = (x_2, y_2)$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} \mathbf{x} \vee \mathbf{y} &= \max \{ \mathbf{x}, \mathbf{y} \}, & \mathbf{x} \wedge \mathbf{y} &= \min \{ \mathbf{x}, \mathbf{y} \} \\ &= (x_1 \vee x_2, y_1 \vee y_2) & &= (x_1 \wedge x_2, y_1 \wedge y_2) \end{aligned}$$

biçiminde ifade edilmektedir.

2.7.4 TP_2 Sıralaması

F ve G dağılım fonksiyonları ya da ilgili P_F ve P_G olasılık dağılımları için gerçel $I_1 \subset I_2$ ve $J_1 \subset J_2$ aralıklarında,

$$\frac{P_F(I_1 \times J_1) P_G(I_1 \times J_2)}{P_F(I_2 \times J_1) P_G(I_2 \times J_2)} \leq \frac{P_F(I_1 \times J_2) P_G(I_1 \times J_1)}{P_F(I_2 \times J_2) P_G(I_2 \times J_1)} \quad (2.7.1)$$

eşitsizliği sağlanırsa, TP_2 anlamında G dağılımı F dağılımından daha bağımlıdır denilir ve $F \prec_{TP_2} G$ ile gösterilir. Eğer F dağılımı, G dağılımının marjinalleri çarpımına eşit olarak alındığında, yani $F = G_0 = F_X F_Y$ olduğunda, $G_0 \prec_{TP_2} G$ yazılabilmesi için gerek ve yeter koşul,

$$P_G(I_1 \times J_2) P_G(I_2 \times J_1) \leq P_G(I_1 \times J_1) P_G(I_2 \times J_2) \quad (2.7.2)$$

eşitsizliğinin sağlanmasıdır (Kimeldorf ve Sampson 1987, Yanagimoto 1990).

2.7.5 Supermodular Sıralama

Tanım 2.7.1 $\varphi : \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}$ gibi tanımlı φ fonksiyonu, $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathfrak{R}^n$ için eğer,

$$\varphi(\mathbf{x}) + \varphi(\mathbf{y}) \leq \varphi(\mathbf{x} \vee \mathbf{y}) + \varphi(\mathbf{x} \wedge \mathbf{y})$$

ise, supermodular fonksiyondur denilir.

$(\mathfrak{R}^n, \mathcal{B}^n)$ üzerinde μ ve ϑ gibi iki olasılık ölçüsü tanımlı olsun. μ ve ϑ ölçülerinin supermodular sıralı olması için gerek ve yeter koşul, integrallerin mevcut olması koşulu altında, bütün φ supermodular fonksiyonları için,

$$\int_{\mathfrak{R}^n} \varphi d\mu \leq \int_{\mathfrak{R}^n} \varphi d\vartheta$$

eşitsizliğinin yazılabilmesidir. Bu durumda, $\mu \underset{sm}{\lesssim} \vartheta$ gibi bir sıralama yapılabileceği söylenebilir. $\mathfrak{R}^n$ üzerinde değerler alan $\mathbf{X}$ ve $\mathbf{Y}$ rasgele vektörleri bakımından benzer bir tanım, şu biçimdedir: Beklenen değerler tüm φ supermodular fonksiyonları için mevcut olması koşulu altında

$$E[\varphi(\mathbf{X})] \leq E[\varphi(\mathbf{Y})]$$

ise, $\mathbf{X}$ ve $\mathbf{Y}$ rasgele vektörleri supermodular bakımından sıralıdır denilir ve $\mathbf{X} \lesssim_{sm} \mathbf{Y}$ ile gösterilir (Mari ve Kotz 2001).

2.7.6 Stokastik Olarak Artan Bağımlılığa dayalı sıralama

Tanım 2.7.2 $F \in \mathcal{F}(F_X, F_Y)$ için $Y = y$ koşuluna bağlı olarak X rasgele değişkeninin $F_{X|Y=y}(x)$ koşullu dağılım fonksiyonu $F_y(x)$ ile gösterilmek üzere,

$$\forall y < y' \Rightarrow F_{y'}(x) \leq F_y(x),$$

eşitsizliğinin geçerli olması durumunda X rasgele değişkeni Y rasgele değişkeninde stokastik olarak artar denilir (Yanagimoto ve Okamoto 1969). Görüldüğü gibi bu tanım, Alt Bölüm 2.6.8’ de verilen tanıma karşı bir seçenek olmaktadır.

Yukarıdaki tanıma bağlı olarak Yanagimoto ve Okamoto (1969) çalışmalarında “ $\lesssim_{SOAB}$ ” sıralamasını önermişlerdir. Bu öneriye göre, $F \lesssim_{SOAB} G$ gibi bir sıralamanın olabilmesi için gerek ve yeter koşul, tüm $u, v \in [0, 1]$ ve $y < y'$ için,

$$F_y^{-1}(u) \leq F_{y'}^{-1}(v) \Rightarrow G_y^{-1}(u) \leq G_{y'}^{-1}(v)$$

gerektirmesinin yazılabilmesidir. Burada $F_y^{-1}, F_y(x)$ ’ in kuantil fonksiyonunu göstermektedir.

Tanım 2.7.3 Capéraà ve Genest (1990) çalışmalarında (2.6.4)’ te tanımlı fonksiyon aracılığı ile $\lesssim_{SOAB}$ tanımını şu şekilde yapmışlardır: $F \lesssim_{SOAB} G$ olması için gerek ve yeter koşul, $\forall u \in [0, 1]$ için, $\forall y < y' \in \mathfrak{R} \Rightarrow G_{y'y} \leq F_{y'y}$ olmasıdır.

2.7.7 SOKAB ve SAKAB anlamında bağımlılık sıralamaları

Averous ve Bernadet (2000) çalışmalarında, Yanagimoto ve Okamoto (1969), Capéraà ve Genest (1990)’ nm “ $\lesssim_{SOAB}$ ” tanımlarına dayalı olarak, *SOKAB*

ve *SAKAB* sıralamalarını önermişlerdir. Bu öneri için, $F \in \mathcal{F}_c(F_X, F_Y)$ için $Y \leq y$ verilmişken X rasgele değişkeninin koşullu dağılım fonksiyonu $\underline{F}_y(x)$ ile $Y > y$ verilmişken $\overline{F}_y(x)$ ile gösterilmiş; Capéraà ve Genest (1990)'nın (2.6.4)'teki tanımına dayalı olarak,

$$\begin{aligned}\underline{F}_{y'y}(u) &= \underline{F}_{y'}\underline{F}_y^{-1}(u), \\ \overline{F}_{y'y}(u) &= \overline{F}_{y'}\overline{F}_y^{-1}(u)\end{aligned}$$

fonksiyonları tanımlanmış ve bu durumda,

$$\begin{aligned}F \text{ SOKAB} &\iff \forall y < y' \text{ ve } \forall x \text{ için } \underline{F}_{y'}(x) \leq \underline{F}_y(x) \\ &\iff \forall y < y' \text{ ve } \forall u \in [0, 1] \text{ için } \underline{F}_{y'y}(u) \leq u, \\ F \text{ SAKAB} &\iff \forall y < y' \text{ ve } \forall x \text{ için } \overline{F}_{y'}(x) \leq \overline{F}_y(x) \\ &\iff \forall y < y' \text{ ve } \forall u \in [0, 1] \text{ için } \overline{F}_{y'y}(u) \leq u\end{aligned}$$

olduğu gösterilmiştir. Buna bağlı olarak, Averous ve Bernadet (2000)'e göre, aşağıdaki sıralama tanımını vermek mümkündür.

Tanım 2.7.4 $F, G \in \mathcal{F}(F_X, F_Y)$ olmak üzere,

$$F \prec_{\text{SOKAB}} G \iff \forall y < y' \text{ ve } \forall u \in [0, 1] \text{ için } \underline{G}_{y'y}(u) \leq \underline{F}_{y'y}(u)$$

ve

$$F \prec_{\text{SAKAB}} G \iff \forall y < y' \text{ ve } \forall u \in [0, 1] \text{ için } \overline{G}_{y'y}(u) \leq \overline{F}_{y'y}(u)$$

gibi bir eşdeğerliliği yazmak mümkündür (Averous ve Bernadet 2000).

Yukarıda verilen bu tanım, tez çalışmasının bulguları ile karşılaştırma amacıyla Alt Bölüm 4.4' te tartışılacaktır.

3. METARYAL ve YÖNTEM

Kuşkusuz, dağılımlar arasında konveks (konkav) ilişkisine dayalı bir sıralamanın yapılabilmesi, tahmin kuramı, hipotez testleri, yaşam analizi, risk teorisi ve özellikle karar kuramı süreçlerinde önemli yer tutmaktadır. Ayrıca, sıralamayı hiç olmazsa iki boyutlu uzaya taşımak ve burada kullanabilmek önemli olmaktadır. Özellikle, marjinalleri belirli dağılım fonksiyonları ailesinin elemanları için yukarıdaki gibi bir sıralamaya sahip olduklarında, buna bağlı olarak, ilgili rasgele değişkenlerin ne tür bir bağımlılık sergilediğinin saptanabilmesi önemlidir. İki boyutlu dağılımlar için kurulan modelin bağımsızlıktan ne derece uzak olduğu ve bu bağımlılığın yönünün pozitif ya da negatif olup olmadığı sorularına yanıt verebilen ve aynı zamanda, eğer bağımsızlık gibi bir durum söz konusu ise, bu yapıyı da ortaya çıkarabilen güçlü bir sıralama ilişkisinin varlığı için gerekli koşulları ve bunların sonuçlarının irdelenmesi bu çalışmanın esasını oluşturmaktadır. Böyle bir sıralamayı iki boyutlu uzaya taşımak için, $\mathcal{F}_c(F_X, F_Y)$ sürekli dağılım fonksiyonları ailesinde, koşullu dağılımların tanımlanması ile tek boyutluda olduğu gibi tanımın verilmesi, çalışmada önerilen yöntem olarak benimsenmiştir. Bu nedenle, tek boyutluda verilen bu kavramın iyice irdelenmesinin yararlı olabileceği düşünülmektedir.

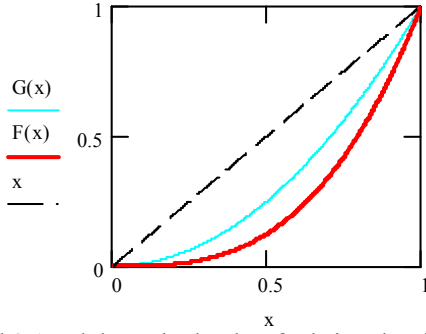
Tek boyutlu uzayda konveks sıralamanın bilinen analitik özelliklerinin yanı sıra, çalışma sırasında elde edilen bazı ek özelliklerden de bahsedilmiştir. Alt Bölüm 3.3' te, bu sıralamanın iki boyutlu uzayda kullanılması işlenmiş ve ifade ettiği anlam ele alınmıştır.

3.1 Tek Boyutlu Dağılım Fonksiyonları için Konveks Sıralama

Tanım 2.2.5' te tek boyutlu dağılım fonksiyonları için Chan *et al.* (1985) tarafından önerilen konveks sıralama bir kısmi sıralamadır (bkz. Teorem 3.1.1). Bu özelliği ile konveks sıralama güvenilirlik kuramında, bir sistemin yapısını belirlemek için kullanılmaktadır. (Ayrıntılar için Barlow ve Proschan (1975)' e bakılabilir). Ayrıca, aynı konveks sıralama aile üzerinde, dağılımın parametresi için hipotez testleri süreçlerinde karar verme aşamasında da kullanılmaktadır (Chan *et al.* 1985). Ayrıca Alt Bölüm 5.4' e bakılabilir.

Hemen görüleceği üzere, F ile G sürekli dağılım fonksiyonları olmak üzere, Tanım 2.2.4' te $n = 2$ için $G(x_1) = t_1$, $G(x_2) = t_2$ ve $t = \lambda_1 t_1 + \lambda_2 t_2$ eşitlikleri alınırsa, Tanım 2.2.5 ile benzerliği dikkati çekmektedir. Tanım 2.2.5' i konvekslik kavramına dayalı olarak yorumunu yapmak mümkündür: Önerme 2.2.1' e göre konveks (konkav) bir fonksiyonun ağırlığını uç noktalara verdiği söylenebilir. Buna göre, ϕ fonksiyonunun konveks ya da konkav olması, F ve G gibi iki fonksiyonu (ya da dağılım fonksiyonu) birbirinden ayırt etmeye ya da birbirleri ile karşılaştırma yapmaya olanak vermektedir. Bu nedenle, " $\stackrel{c}{\sim}$ " ilişkisine "konveks sıralama" denilmesi ile karşılaştırılan dağılımların konvekslik ya da konkavlık özelliklerini sergileme zorunluluğu yoktur. Bunun için ϕ nin, " $\stackrel{c}{\sim}$ " sıralamasını nasıl belirlediğine dair iki değişik örnek verilebilir.

Örnek 3.1.1 $F(x) = x^3$, $0 \leq x \leq 1$ ve $G(x) = x^2$, $0 \leq x \leq 1$ dağılım fonksiyonları göz önüne alınsın. $\phi(t) = FG^{-1}(t) = t^{\frac{3}{2}}$ fonksiyonu Önerme 2.2.3' e göre $(0, 1)$ üzerinde konveks bir fonksiyondur. Buna göre, F fonksiyonunun G fonksiyonuna göre daha konveks sıralı olduğu söylenebilir, yani $x^3 \stackrel{c}{\sim} x^2$ gibi bir sıralamanın yapılabileceği kolaylıkla görülebilir. Söz konusu özel dağılımlar için, bunu Şekil 3.1' de görmek mümkündür.



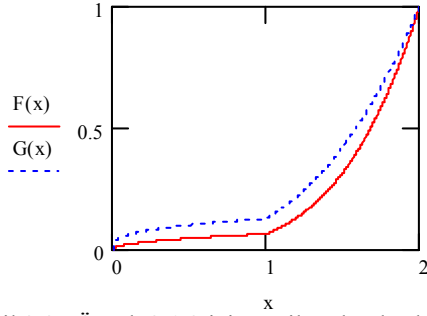
Şekil 3.1 Tek boyutlu dağılım fonksiyonları için konveks sıralamayı gösteren bir örnek

Örnek 3.1.2 F ve G dağılım fonksiyonları aşağıdaki gibi tanımlansın:

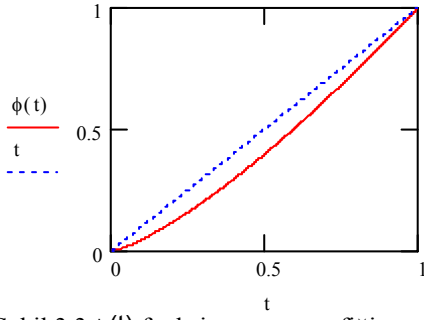
$$F(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x}}{16}, & 0 \leq x < 1 \\ \frac{x^4}{16}, & 1 \leq x < 2 \end{cases} \quad \text{ve} \quad G(x) = \begin{cases} \frac{x^{\frac{1}{3}}}{8}, & 0 \leq x < 1 \\ \frac{x^3}{8}, & 1 \leq x < 2 \end{cases}$$

$$\phi(t) = \begin{cases} \frac{(8t)^{\frac{3}{2}}}{16}, & 0 \leq t < \frac{1}{8} \\ \frac{(8t)^{\frac{4}{3}}}{16}, & \frac{1}{8} \leq t < 1 \end{cases}$$

Görüldüğü gibi, F ve G ne konveks ne de konkavdır. Ancak $\phi(t)$ fonksiyonu, Önerme 2.2.3' e göre konveks olmaktadır (Şekil 3.3). Tanım 2.2.5' e göre, tek boyutlu uzayda, $\phi(t) = FG^{-1}(t)$ fonksiyonu konveks olduğundan, F dağılımının G dağılımından daha konveks sıralı, yani $F \stackrel{c}{\succ} G$ gibi bir sıralamanın olduğunu söylemek mümkündür. Söz konusu durum, Şekil 3.2' den hemen görülebilir.



Şekil 3.2. Örnek 3.1.2 için verilen dağılımların grafikleri



Şekil 3.3. $\phi(t)$ fonksiyonunun grafiği

$\phi(t)$ fonksiyonunun analitik özelliklerini ifade eden, aşağıdaki lemma önemli ve ilerideki tartışma için yararlıdır.

Lemma 3.1.1 G herhangi bir sürekli dağılım ve $F \ll G$ olmak üzere, aşağıdaki analitik özellikler geçerlidir:

- (i) $FF^{-1}(t) = t$, $0 < t < 1$ ve $F^{-1}(F(x)) \leq x$, $x \geq 0$;
- (ii) $FG^{-1}(G(x)) = F(x)$, $x \geq 0$;
- (iii) $(FG^{-1})^{-1}(t) = GF^{-1}(t)$;
- (iv) $\phi(t) = FG^{-1}(t)$ azalmayan ve sürekli bir fonksiyondur; bunun yanısıra, $\phi(0) = 0$ ve $\phi(1) = 1$ ' dir;
- (v) Eğer G fonksiyonu da F fonksiyonuna göre mutlak sürekli ise $\phi(t)$ tam anlamı ile artan (strictly increasing) bir fonksiyondur,
- (vi) $F \stackrel{c}{\succsim} G$ ise $GF^{-1}(t) = \phi^{-1}(t)$ konkav bir fonksiyondur;
- (vii) $\phi(t) = FG^{-1}(t)$ fonksiyonu, $(0, 1)$ açık aralığı üzerinde konveks bir fonksiyon ise $\phi(t) \leq t$ olmak zorundadır; ancak tersi her zaman doğru olmayabilir;
- (viii) Rasgele değişkenlerin pozitif kalması koşulu ile, X üzerinde yapılan transformasyonlardan FG^{-1} ve dolayısı ile " $\stackrel{c}{\succsim}$ " sıralaması etkilenmemektedir.

İspat: (i) $F^{-1}(t) = \inf \{x : F(x) \geq t\}$ ve $P_F(\cdot)$ de F dağılımına göre olasılığı temsil etmek üzere,

$$P_F(X \leq F^{-1}(t)) = P_F(X < F^{-1}(t)) + P_F(X = F^{-1}(t)) = FF^{-1}(t)$$

yazılabilir. $P_F(X = F^{-1}(t)) = 0$ olduğundan, yukarıdaki ifade aynı zamanda, $\{x : X < F^{-1}(t)\}$ kümesinin ölçüsüdür. $F^{-1}(t)$ ' nin tanımına göre çelişkiye yol açtığından $FF^{-1}(t) = t$ olması gerekir. (i)' nin ikinci kesimi için F^{-1} fonksiyonunun tanımından, $F^{-1}(t) = \inf \{x : F(x) \geq t\}$,

$$F^{-1}(F(x)) = \inf \{z : F(z) \geq F(x)\} \leq x$$

olacağı açıktır.

(ii) Özellik (i)' den dolayı $G^{-1}(G(x)) \leq x$ yazılabilir. Buna göre, F azalmayan bir fonksiyon olduğundan dolayı $FG^{-1}(G(x)) \leq F(x)$ yazılabilir, yani $F(x) - FG^{-1}(G(x)) \geq 0$ dır. Şimdi, $F(x) \neq FG^{-1}(G(x))$ olduğu kabul edilsin (Eşit olan durumlarda zaten Özellik (ii) sağlanmış olacaktır). O halde, $(G^{-1}(G(x)), x)$ gibi bir gerçel aralıktan söz etmek mümkündür. Özellik (i)' den $GG^{-1}(G(x)) = G(x)$ ' dir. Dolayısı ile $(G^{-1}(G(x)), x)$ aralığında G ' nin integrali,

$$\int_{G^{-1}(G(x))}^x dG = G(x) - GG^{-1}(G(x)) = 0$$

olacaktır. $F < G$ olduğuna göre, $(G^{-1}(G(x)), x)$ aralığında F ' nin integralinin de

$$\int_{G^{-1}(G(x))}^x dF = F(x) - FG^{-1}(G(x)) = 0$$

olması gerekir. İstenilen eşitlik bu son integralden elde edilir: $FG^{-1}(G(x)) = F(x)$.

(iii) Yine, özellik (i)' den dolayı,

$$\begin{aligned} GG^{-1}(t) &= t, \\ FF^{-1}(t) &= t, \\ GF^{-1} (GF^{-1})^{-1}(t) &= t \end{aligned} \tag{3.1.1}$$

eşitlikleri yazılabilir. (3.1.1)' in sonucu olarak aşağıdaki iki eşitliği de elde etmek mümkündür:

$$\begin{aligned} GG^{-1}(FF^{-1}(t)) &= t, \\ GG^{-1}(FF^{-1}(t)) &= t = GF^{-1} (GF^{-1})^{-1}(t) \end{aligned} \tag{3.1.2}$$

Buna göre,

$$\int_{F^{-1}(GF^{-1})^{-1}(t)}^{G^{-1}(FF^{-1})(t)} dG = 0 \tag{3.1.3}$$

dir. $F \ll G$ olduğundan,

$$\int_{F^{-1}(GF^{-1})^{-1}(t)}^{G^{-1}(FF^{-1})(t)} dF = 0 \tag{3.1.4}$$

olacaktır. (3.1.4) eşitliğinden dolayı,

$$FG^{-1} (FF^{-1}) (t) = FF^{-1} (GF^{-1})^{-1} (t)$$

yazılabilir. (3.1.1) eşitliği yukarıdaki eşitlikte kullanılırsa,

$$FG^{-1}(t) = (GF^{-1})^{-1}(t) \tag{3.1.5}$$

eşitliği elde edilir.

(iv) ϕ 'nin azalmayan olması ve süreklilik özelliği için ve ayrıca (v) özelliğinin ispatı için Chan *et al.* (1985)'e bakılabilir. $F \ll G$ olduğundan $G = 0 \Rightarrow F = 0$ 'dır. Dolayısıyla, $\phi(0) = FG^{-1}(0) = 0$ 'dır. F ve G 'nin destek kümeleri aynı olduğundan $G = 1 \Rightarrow F = 1$ 'dir. Buradan $\phi(1) = FG^{-1}(1) = 1$ olacaktır.

(vi) özelliğinin ispatı, ϕ 'nin konveks fonksiyon olması ve azalmayan bir fonksiyon olması özelliklerinden kolaylıkla ortaya çıkmaktadır (Chan *et al.* 1985).

(vii) $\phi(t)$ konveks ise Tanım 2.2.2' den,

$$\phi(\lambda t_1 + (1 - \lambda)t_2) \leq \lambda\phi(t_1) + (1 - \lambda)\phi(t_2) \quad (3.1.6)$$

eşitsizliği, $\forall t_1 < t_2$, ve $\forall \lambda \in (0, 1)$ için yazılabilir. Buna göre, $t_1 = 0$ ve $t_2 = 1$ alınırsa (3.1.6) eşitsizliği, özellik (iv)'ten $\phi(0) = 0$ ve $\phi(1) = 1$ olmak üzere,

$$\phi((1 - \lambda)) \leq (1 - \lambda) \quad (3.1.7)$$

$\forall \lambda \in (0, 1)$ için sağlanır. $t \in (0, 1)$ olduğundan $1 - \lambda = t$ olarak alındığında (3.1.7) eşitsizliği,

$$\phi(t) \leq t \quad (3.1.8)$$

olur.

(viii) $Y = h(X)$ gibi negatif olmayan bir dönüşümün yapıldığı varsayalım. $H = F, G$ olmak üzere Y 'nin dağılımı,

$$P_H(Y \leq y) = P_H(h(X) \leq y) = P_H(X \leq h^{-1}(y))$$

biçiminde ya da

$$P_H(X \leq h^{-1}(y)) = \begin{cases} F(h^{-1}(y)) & , X \sim F \\ G(h^{-1}(y)) & , X \sim G \end{cases}$$

biçiminde tanımlansın. $u \in [0, 1]$ olmak üzere $H = G(h^{-1}(y)) = u$ denilirse, $y = h(G^{-1}(u))$ olur. Buna göre,

$$F(h^{-1}(hG^{-1}(u))) = FG^{-1}(u), \quad u \in [0, 1]$$

eşitliği elde edilir ki, ϕ fonksiyonunun ya da $F \stackrel{c}{\succsim} G$ sıralamasının, negatif olmayan transformasyonlardan etkilenmediği sonucu söylenebilir.

Teorem 3.1.1 Konveks sıralama, kısmi sıralama özelliklerini sağlar.

İspat a) $F \stackrel{c}{\succsim} F$ (yansıma özelliği)

F' nin sürekli olmasından ve özellik (i)' den dolayı, $\phi(t) = FF^{-1}(t) = t$ olur ki, $\phi(t)$ hem konveks hem de konkav bir fonksiyondur. Tanım 2.2.2' ye göre konveks alınabilir.

b) $F \stackrel{c}{\succsim} G$ ve $G \stackrel{c}{\succsim} H \implies F \stackrel{c}{\succsim} H$ (geçişme özelliği)

$FG^{-1}(t)$ ve $GH^{-1}(t)$ her ikisi de konveks fonksiyonlardır. G sürekli bir dağılım fonksiyonu olduğundan, $FH^{-1}(t) = FG^{-1}(GH^{-1}(t))$ eşitliği yazılabilir. $F(G^{-1}) = \phi$ ve $G(H^{-1}) = \psi$ olarak alınsın. Buna göre, $\phi(\psi(t))$ fonksiyonunun konveks olduğunu göstermek yeterli olacaktır; ψ konveks olduğundan Tanım 2.2.2' ye göre,

$$\psi(\lambda t_1 + (1 - \lambda)t_2) \leq \lambda\psi(t_1) + (1 - \lambda)\psi(t_2) \quad (3.1.9)$$

eşitsizliği yazılabilir. Lemma 3.1.1 (iv) özelliğinden, ϕ' nin azalmayan bir fonksiyon olduğu kullanılırsa, (3.1.9) eşitsizliği yardımı ile,

$$\phi(\psi(\lambda t_1 + (1 - \lambda)t_2)) \leq \phi(\lambda\psi(t_1) + (1 - \lambda)\psi(t_2)) \quad (3.1.10)$$

eşitsizliği elde edilir. Şimdi ϕ' nin konveks olmasından dolayı, (3.1.10) eşitsizliğinin sağ yanı için,

$$\phi(\lambda\psi(t_1) + (1-\lambda)\psi(t_2)) \leq \lambda\phi(\psi(t_1)) + (1-\lambda)\phi(\psi(t_2)) \quad (3.1.11)$$

eşitsizliğini yazmak mümkündür. (3.1.10) ve (3.1.11) eşitsizliklerinin sonucu olarak,

$$\phi\psi(\lambda t_1 + (1-\lambda)t_2) \leq \lambda\phi\psi(t_1) + (1-\lambda)\phi\psi(t_2) \quad (3.1.12)$$

eşitsizliği elde edilir ki, bu $\phi\psi$ fonksiyonunun konveks bir fonksiyon olduğunu göstermektedir.

c) $F \stackrel{c}{\succsim} G$ ve $G \stackrel{c}{\succsim} F \implies F = G$ (ters simetri özelliği)

$F \stackrel{c}{\succsim} G$ ve $G \stackrel{c}{\succsim} F$ ise, hem FG^{-1} konveks hem de GF^{-1} konveks bir fonksiyondur. Bunun yanı sıra hem $F << G$ hem de $G << F$ dir. Bu durumda, F ve G nin destek kümeleri aynı olmak zorundadır. Ancak Lemma 3.1.1 (vi) özelliğine göre, FG^{-1} konveks ise $(FG^{-1})^{-1} = GF^{-1}$ konkav olmakta idi. Halbuki, ters simetri özelliğine göre, $G \stackrel{c}{\succsim} F$ gibi bir sıralamanın olması GF^{-1} fonksiyonunun konveks olması ile mümkün olmaktadır. Bu bir çelişkiye yol açmaktadır; GF^{-1} , in hem konkav hem de konveks olabilmesi için $GF^{-1}(t)$ ' nin doğrusal olması yeterlidir. Ancak, F ve G nin destek kümeleri aynı olduğundan $GF^{-1}(t) = t$ biçiminde bir doğrusallığın olması gereklidir. Bu durumda $(G(F^{-1}))^{-1}(t) = FG^{-1}(t) = t$ olacaktır. Buna göre, $F \stackrel{c}{\succsim} G$ sıralamasının geçerli olduğu kabul edilsin. G sürekli ve $F << G$ olduğundan, $t = G(x)$ alınır,

$$FG^{-1}(t) = t = G(x), \quad (3.1.13)$$

$$FG^{-1}(G(x)) = G(x) \quad (3.1.14)$$

yazılabilir. G sürekli bir dağılım olduğundan, $G^{-1}(G(x)) = x$ eşitliği kullanılarak (3.1.13)' ten,

$$F(x) = G(x) \quad (3.1.15)$$

elde edilir. Ters simetri özelliğine göre $G \stackrel{c}{\sim} F$ sıralamasının da geçerli olduğu düşünülürse, F sürekli ve $G \ll F'$ dir. Bu durumda $t = F(x)$ alınırsa,

$$G(F^{-1}(t)) = t = F(x) \quad (3.1.16)$$

eşitliği yazılabilir. Bu son eşitlikten,

$$G(x) = F(x) \quad (3.1.17)$$

yazılabilir. (3.1.15) ve (3.1.17) ifadelerinden, $F = G$ sonucu elde edilir.

F ve G' nin destek kümelerinin neden aynı olması gerektiğini bir örnek üzerinde göstermek mümkündür. X gibi bir rasgele değişken için iki farklı F ve G dağılımından geldiği varsayalım:

$$X \sim U(0, 2) \quad , \quad X \sim F = \frac{x}{2}$$

$$X \sim U(0, 3) \quad , \quad X \sim G = \frac{x}{3}.$$

$F \ll G$ ve $G \ll F$ olmak üzere $FG^{-1}(t) = \frac{3}{2}t$ ve $GF^{-1}(t) = \frac{2}{3}t$ dir. Görüldüğü gibi, her ikisi de konveks ya da konkav bir fonksiyondur. Bu durumda, $F \stackrel{c}{\sim} G$ ve $G \stackrel{c}{\sim} F$ sıralamaları sağlanır. Ters simetri özelliğine göre, $F = G$ olmalı idi. Ancak, görüldüğü gibi $F \neq G'$ dir. Çünkü destek kümeleri aynı değildir.

Konveks sıralamayı belirlemek için kullanışlı bir yol, Radon-Nikodym türevinin kullanılmasıdır. Bununla ilgili, aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 3.1.2 $F \stackrel{c}{\sim} G$ yazılabilmesi için gerek ve yeter koşul $\ell = \frac{dF}{dG}$ türevi, G' ye göre hemen hemen her yerde azalmayan olmasıdır.

İspat: Burada,

$$FG^{-1}(t) = \int_0^{G^{-1}(t)} \ell dG = \int_0^t \ell(G^{-1}(u)) du$$

eşitliği yazılabilir. G sürekli olduğu için, $G(x) = u$ değişken değişmesi yapılabilir. Bu durumda, $\frac{dF}{dG}$ oranı, $\frac{dFG^{-1}(u)}{du}$ oranına eşit olur, yani

$$\ell = \frac{dF}{dG} = \frac{dFG^{-1}(t)}{dt} = \frac{d\phi(t)}{dt} \quad (3.1.18)$$

eşitliği yazılabilir. Önerme 2.2.2 kullanılarak sonuca ulaşılır. Buna göre, $\phi(t)$ konveks, sürekli ve azalmayan bir fonksiyon olduğundan,

$$2\phi(t) \leq \phi(t-h) + \phi(t+h)$$

ya da

$$\phi(t) - \phi(t-h) \leq \phi(t+h) - \phi(t)$$

eşitsizliği yazılabilir. Yukarıdaki eşitsizliğin her iki yanını h ' ye bölüp limiti alınırsa,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\phi(t) - \phi(t-h)}{h} \leq \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\phi(t+h) - \phi(t)}{h}$$

eşitsizliği elde edilir ki,

$$\phi'(t-h) \leq \phi'(t)$$

eşitsizliğine denktir. $t-h \leq t$ için $\phi'(t)$ fonksiyonunun azalmayan olduğunu göstermektedir. Bu ise (3.1.18) eşitliğinden dolayı, ℓ oranının G ' ye göre azalmayan olmasına denktir.

Yukarıdaki teoremin sonucu olarak, $F \stackrel{c}{\succ} G$ gibi bir sıralamanın yazılabilmesi, F' nin G' ye göre monoton artan olabilirlik oranına sahip olduğu söylenebilir.

3.2 Konveks Sıralı Aile

Hipotez testleri sürecinde önemli bir özellik olan konvekslik kavramı şu şekilde tanımlıdır: $\{F_\theta, \theta \in \Theta\}$ dağılımlar ailesinin θ parametresine göre konveks sıralı aile olabilmesi için, $\theta_2 > \theta_1$ iken $F_{\theta_2} \stackrel{c}{\succ} F_{\theta_1}$ olması gerekmektedir. Konveks sıralı ailelere aşağıdaki dağılımlar ailesini örnek olarak vermek mümkündür.

a) Üstel Dağılım Ailesi: $F_\theta(x) = 1 - e^{-\frac{x}{\theta}}$, $x > 0$ ve $\theta > 0$.

b) Gamma Dağılım Ailesi: $F_\theta(x) = \frac{1}{\Gamma(\theta)} \int_0^x t^{\theta-1} e^{-t} dt$, $x > 0$ ve $\theta > 0$, $\beta = 1$.

c) Weibull Dağılım Ailesi: $F_\theta(x) = 1 - e^{-(\frac{x}{\theta})^\beta}$, $x > 0$, $\theta > 0$ ve $\beta > 0$ (sabit).

Aşağıda verilen teoremler, konveks sıralama ile toplam pozitiflik arasındaki ilişkiyi vermektedir.

Teorem 3.2.1 Lebesgue (λ) ölçüsü tarafından domine edildiği durumda $\{F_\theta, \theta \in \Theta\}$ ailesinin θ' ya göre konveks sıralı aile olması bu aileye ait f_θ olasılık yoğunluk fonksiyonlarının (θ, x) bakımından TP_2 olmasını gerektirir.

İspat $\{F_\theta, \theta \in \Theta\}$ ailesi θ ya göre konveks sıralı aile ise, $\theta_2 > \theta_1$ iken $F_{\theta_2} \stackrel{c}{\succ} F_{\theta_1}$ sıralaması tanım gereği yazılabilir. Bu durumda $F_{\theta_2} << F_{\theta_1}$ dir. Ayrıca, $F_{\theta_2} << \lambda$ ve $F_{\theta_1} << \lambda'$ dir. Buna göre,

$$\frac{dF_{\theta_2}/d\lambda}{dF_{\theta_1}/d\lambda} = \frac{f_{\theta_2}}{f_{\theta_1}} = \ell$$

olur. Teorem 3.1.2 gereği, ℓ azalmayan bir fonksiyondur. O zaman $\forall x_1 < x_2$ için,

$$\frac{f_{\theta_2}(x_1)}{f_{\theta_1}(x_1)} \leq \frac{f_{\theta_2}(x_2)}{f_{\theta_1}(x_2)}$$

yazılabilmektedir. Yukarıdaki eşitsizliği determinant cinsinden

$$\begin{vmatrix} f_{\theta_1}(x_1) & f_{\theta_1}(x_2) \\ f_{\theta_2}(x_1) & f_{\theta_2}(x_2) \end{vmatrix} \geq 0$$

biçiminde yazmak mümkündür. Bu ise Alt Bölüm 2.6.5' te verilen TP_2 tanımına göre, $f_{\theta}(x)$ ' in (θ, x) bakımından ikinci dereceden toplam pozitiflik sergilediği anlamına gelmektedir.

Teorem 3.2.2 $\{F_{\theta}, \theta \in \Theta\}$ ailesi θ' ya göre bir konveks sıralı aile ise $F_{\theta}(x)$, (θ, x) bakımından TP_2 ' dir.

İspat $\frac{\phi(t)}{t}$ ifadesinin azalmayan olduğunu göstermek yeterli olacaktır.

Konveks sıralı aile tanımı gereği, $\theta_2 > \theta_1$ için $F_{\theta_2} \stackrel{c}{\succsim} F_{\theta_1}$ sıralaması yazılabilmektedir. Buna göre, $\phi(t) = F_{\theta_2} F_{\theta_1}^{-1}(t)$ fonksiyonu konvektir. Önerme 2.2.1' den $u < t < v \in [0, 1]$ için,

$$\frac{\phi(t) - \phi(u)}{t - u} \leq \frac{\phi(v) - \phi(u)}{v - u}$$

eşitsizliği geçerli olmaktadır. $u = 0$ alınırsa, $\phi(0) = 0$ olduğundan yukarıdaki eşitsizlik $t < v$ için,

$$\frac{\phi(t)}{t} \leq \frac{\phi(v)}{v} \quad (3.2.1)$$

biçimini alır ki, bu $\frac{\phi(t)}{t}$ ifadesinin azalmayan olduğunu göstermektedir. $F_{\theta_1}(x)$ sürekli olduğundan dolayı $F_{\theta_1} F_{\theta_1}^{-1}(t) = t$ yazılabilir. Buna göre,

$\frac{\phi(t)}{t} = \frac{F_{\theta_2} F_{\theta_1}^{-1}(t)}{F_{\theta_1} F_{\theta_1}^{-1}(t)}$ eşitliği yazılabilir. (3.2.1)' den $t_1 < t_2$ için,

$$\frac{F_{\theta_2} F_{\theta_1}^{-1}(t_1)}{F_{\theta_1} F_{\theta_1}^{-1}(t_1)} \leq \frac{F_{\theta_2} F_{\theta_1}^{-1}(t_2)}{F_{\theta_1} F_{\theta_1}^{-1}(t_2)} \quad (3.2.2)$$

eşitsizliği elde edilir. F_{θ_1} ' in sürekli ve $t_1 \leq t_2$ için $F_{\theta_1}^{-1}(t_1) \leq F_{\theta_1}^{-1}(t_2)$ olduğu göz önüne alınırsa, $F_{\theta_1}^{-1}(t_1) = x_1$ ve $F_{\theta_1}^{-1}(t_2) = x_2$ yazmak mümkündür. Buna göre (3.2.2) eşitsizliği,

$$\frac{F_{\theta_2}(x_1)}{F_{\theta_1}(x_1)} \leq \frac{F_{\theta_2}(x_2)}{F_{\theta_1}(x_2)}, \quad x_1 \leq x_2$$

biçimini alacaktır. Bu da determinant cinsinden

$$\begin{vmatrix} F_{\theta_1}(x_1) & F_{\theta_1}(x_2) \\ F_{\theta_2}(x_1) & F_{\theta_2}(x_2) \end{vmatrix} \geq 0$$

yazılabilir ki, F_{θ} ' nin (θ, x) bakımından TP_2 olduğunu gösterir.

Aşağıda, tek boyutlu uzayda verilen konveks sıralama tanımından yararlanılarak iki boyutlu uzayda konveks sıralamanın tanımı için bir yöntem önerilmiş, konvekslik ilişkisine göre $\left(\mathcal{F}_c(F_X, F_Y), \overset{c}{\sim} \right)$ konveks sıralı dağılım fonksiyonları ailesi oluşturulmuştur. Bölüm 4' te bu aile üzerinde ne tür bir bağımlılığın saptanabildiği tartışılacaktır.

3.3 İki Boyutlu Dağılımlar için Konveks Sıralama Kavramı

İki boyutlu dağılımların bağımlılık yapılarını ortaya çıkarmak için, daha önce de bahsedildiği gibi, bu çalışmada kullanılan meteryal, Tanım 2.2.4, Tanım 2.2.5 ve Alt Bölüm 3.1' de ayrıntıları ile verilen konveks sıralama kavramına dayanmaktadır. Tek boyutlu uzayda verilen bu sıralamayı, en azından iki boyutlu uzaya taşımak için önerilen yöntemden kısaca bahsetmekte yarar vardır: (X, Y) gibi iki boyutlu bir rasgele vektörün elemanlarından birini diğerine koşullandırma yolu ile boyutun biri, değerleri bilinen bir vektör halini almaktadır. Bu ise, tek boyutludaki gibi

bir ϕ dönüşümünün tanımlanmasına yardımcı olmaktadır. Buna göre, $Y \leq y$ verilmişken X rasgele değişkeninin koşullu dağılım fonksiyonunun göz önüne alınması ile Tanım 2.2.5' deki gibi bir sıralama ilişkisi yöntem olarak önerilmiştir.

Bu bölümde, ilk olarak " $\stackrel{c}{\sim}$ " sıralamasının iki boyutlu uzayda nasıl tanımlanabileceği açıklanmıştır. Yukarıda önerilen yöntemeye göre, (3.3.1) ve (3.3.2) ifadelerinde verilen koşullu dağılım fonksiyonları yardımı ile Tanım 3.3.1 verilmiştir. Hemen arkasından, " $\stackrel{c}{\sim}$ " sıralamasının iki boyutlu uzayda da kısmi sıralamayı koruduğunu gösteren Lemma 3.3.1 verilmiştir.

Dolayısı ile " $\stackrel{c}{\sim}$ " sıralaması ile iki boyutlu uzayda bir bağımlılık sıralaması da yapılabilmektedir. Ancak bunun için iki boyutlu dağılım fonksiyonları ailesi daraltılarak marjinalleri verilmiş olan sürekli dağılımlar ailesi $\mathcal{F}_c$ ele alınmıştır. Marjinalleri belli olan bir ailenin ele alınmasının nedenini şu şekilde açıklayabiliriz: İki boyutlu bir dağılımın marjinali belli olduğuna göre, $F_0 = F_X F_Y$ ifadesini bir referans noktası olarak görmek mümkündür. Bu aile üzerinde çeşitli ilişkilerin (relations) tanımlanması ile o aileden olan F gibi bir dağılımı, referans noktası F_0 ' a göre sıralamak ya da yerini belirlemek mümkün olmaktadır. Dolayısı ile bu aile üzerinde ister istemez bir bağımlılık sıralaması yapılmış olmaktadır. O nedenle, " $\stackrel{c}{\sim}$ " sıralaması ile bilinen bazı bağımlılık türlerini de ortaya çıkarmanın mümkün olabileceği düşünülmektedir (Alt Bölüm 4.2' de ayrıntılı olarak verilmiştir).

Marjinalleri, F_X ve F_Y olan $\mathcal{F}_c(F_X, F_Y)$ gibi bir sürekli dağılımlar ailesi göz önüne alınsın. Buna göre, marjinalleri F_X ve F_Y olan sürekli dağılım fonksiyonlarına sahip (X, Y) çiftinin ortak dağılım fonksiyonu $F(x, y)$ ile gösterilsin. $F \in \mathcal{F}_c(F_X, F_Y)$ olmak üzere, ve $D_F = \{y : F_Y(y) > 0\}$ biçiminde tanımlanan küme ile $\mathcal{K} = \{D_F \cap \mathcal{R}\}$ üzerinde, $Y \leq y$ verilmişken X rasgele değişkeninin Y rasgele değişkenine göre koşullu dağılımının,

$$\frac{F(x, y)}{F_Y(y)} = F_{X|y}(x) \quad (3.3.1)$$

şeklinde tanımlı olduğu açıktır. Öte yandan, $G \in \mathcal{F}_c(F_X, F_Y)$ olmak üzere herhangi bir G dağılımı için de

$$\frac{G(x, y)}{F_Y(y)} = G_{X|y}(x) \quad (3.3.2)$$

tanımlı olacaktır. Ayrıca, $y \notin D_F$ için, $F_{X|y}(x) = 0$ ve $G_{X|y}(x) = 0$ kabul edilmektedir. Bu anlamda, $F_{X|y}(x) = 0 \iff G_{X|y}(x) = 0$ olmaktadır. Üstelik, $F_X(x) = 0 \implies F_{X|y}(x) = 0$ ve $G_{X|y}(x) = 0$ olduğu ortadadır, yani $F_{X|Y} << F_X$ ve $G_{X|Y} << F_X$ ’ dir: $F(x, +\infty) = F_X(x) = 0 \Rightarrow F(x, y) = 0$. Ayrıca, Lemma 4.1.1’ e bakılabilir.

Tanım 3.3.1 $F_{X|Y} << G_{X|Y}$ olsun. Verilmiş bir $y \in D_F$ için, $G_{X|y}^{-1}(t) = \inf \{x : G_{X|y}(x) \geq t\}$ şeklinde tanımlansın. Buna göre, her bir $y \in D_F$ için,

$$\phi_y(t) = F_{X|y} G_{X|y}^{-1}(t) : (0, 1) \longrightarrow (0, 1)$$

biçiminde tanımlı $\phi_y(t)$ fonksiyonu, eğer her bir $y \in D_F$ için $(0, 1)$ üzerinde konveks ise, $F_{X|Y}$ dağılımı, $G_{X|Y}$ dağılımına göre daha konveks sıralıdır denilir ve $F_{X|Y} \overset{c}{\sim} G_{X|Y}$ ile gösterilir. Bu tanım, her bir $y \in D_F$ için geçerlidir. Bu nedenle yukarıda tanımlanan ϕ fonksiyonu konveks ise indeks olarak gösterilen y kaldırılabilir. Burada şu noktayı gözden kaçırmamak gerekir: Eğer $\phi_y(t) = F_{X|y} G_{X|y}^{-1}(t)$ fonksiyonu herhangi bir $y \in D_F$ için konveks ise, $F_{X|y} \overset{c}{\sim} G_{X|y}$ dir. Ancak genel halde bu son sıralamanın varlığı $F_{X|Y} \overset{c}{\sim} G_{X|Y}$ sıralamasını gerektirmez. $F_{X|Y} \overset{c}{\sim} G_{X|Y}$ sıralamasını yazabilmek için $\forall y \in D_F$ için $\phi_y(t)$ nin konveks olması gerekir.

Mantık Sonucu 3.3.1 $F, G \in \mathcal{F}_c(F_X, F_Y)$ olmak üzere, $\forall y \in D_F$ için $F_{X|y} \overset{c}{\sim} G_{X|y}$ gibi bir sıralamanın olması, $F_{Y|x} \overset{c}{\sim} G_{Y|x}$ sıralamasının olmasını gerektirmez. Böyle olabilmesi için, (X, Y) çiftinin kendi aralarında değişebilir olması, ayrıca (3.3.1) ve (3.3.2) ifadelerine dikkat edilirse, $\frac{F(x, y)}{F_Y(y)}$

$= \frac{F(y,x)}{F_X(x)}$ eşitliğinin sağlanması gerekir ki, bu ise hem $F_X(x) = F_Y(y)$ olması, hem de $F(x,y) = F(y,x)$ (rasgelelik) durumlarında geçerlidir.

Lemma 3.3.1 $\mathcal{F}_c(F_X, F_Y)$ ailesi üzerinde tanımlanan “ $\stackrel{c}{\sim}$ ” sıralaması, Teorem 3.1.1’ de verilen kısmi sıralamanın özelliklerini sağlar.

a) Yansıma : $F \in \mathcal{F}_c(F_X, F_Y)$ olmak üzere, herhangi bir $y \in D_F$ için, $F_{X|y} \stackrel{c}{\sim} F_{X|y}$ ’ dir. Herhangi bir y için $F_{X|y}^{-1}(t) = \inf \{x : F_{X|y}(x) \geq t\}$ şeklinde tanımlı olmak üzere $F_{X|y} F_{X|y}^{-1}(t) = t$, $\forall y \in D_F$ için sağlanır ki, $\phi(t) = t$ konveks bir fonksiyondur. Eğer $F_{X|y} F_{X|y}^{-1}(t) = t$ eşitliği her bir $y \in D_F$ için sağlamıyor ise, $F_{X|Y} \stackrel{c}{\sim} F_{X|Y}$ sıralaması da geçerlidir.

b) Geçişlilik : $F, G, H \in \mathcal{F}_c(F_X, F_Y)$ dağılım fonksiyonları ve $y \in D_F$ için $F << G$ ve $G << H$ olmak üzere, $F_{X|y} \stackrel{c}{\sim} G_{X|y}$ ve $G_{X|y} \stackrel{c}{\sim} H_{X|y} \implies F_{X|y} \stackrel{c}{\sim} H_{X|y}$ geçerlidir.

c) Ters-Simetri : $F, G \in \mathcal{F}_c(F_X, F_Y)$ olmak üzere, $y \in D_F$ için $F << G$ ve $G << F$ olsun. Yani $G \equiv F$ eşdeğerliliği sağlansın. Bu durumda, herhangi bir $y \in D_F$ için, $F_{X|y} \stackrel{c}{\sim} G_{X|y}$ ve $G_{X|y} \stackrel{c}{\sim} F_{X|y} \implies F_{X|y} = G_{X|y}$ geçerlidir.

Lemma 3.3.2 $\phi_y(t) = F_{X|y}(G_{X|y}^{-1}(t))$ fonksiyonu, Lemma 3.1.1’ de verilen analitik özellikleri herbir $y \in D_F$ için sağlar.

Lemma 3.3.1’ e göre, “ $\stackrel{c}{\sim}$ ” sıralaması, $\mathcal{F}_c(F_X, F_Y)$ ailesi üzerinde bir kısmi sıralama olması nedeniyle $(\mathcal{F}_c(F_X, F_Y), \stackrel{c}{\sim})$ ikilisi bir kısmi sıralı aile oluşturmaktadır. O halde, $F_{X|Y}(x) \neq F_X(x)$ eşitsizliğinin X ve Y rasgele değişkenleri arasında bir kadran bağımlılığı gösterdiği dikkate alınrsa, bu kısmi sıralı aile üzerinde bazı bağımlılık türlerini belirlemede “ $\stackrel{c}{\sim}$ ” ilişkisinin önemli bir rolü olduğu düşünülmektedir.

4. ARAŞTIRMA BULGULARI

$\left(\mathcal{F}_c(F_X, F_Y), \overset{c}{\sim}\right)$ kısmi sıralı ailesi üzerinde tanımlanan bazı dönüşümler yardımı ile, Alt Bölüm 2.6 (2.6.6) ifadesine göre, PKB den TP_2 bağımlılık türlerine kadar ayrı ayrı nasıl ortaya çıkarıldığı, ilgili bağımlılık türünün adı kullanılarak bölümler halinde verilmiştir. Burada şunu belirtmek gerekir, literatürde benzer çalışmalar olarak Capéraà ve Genest (1990)'nın TP_2 anlamında bağımlılık tanımı, Averous ve Bernadet (2000)'nin $SOKAB$ sıralaması dikkati çekmektedir. Ancak söz konusu yazarlar, konvekslik kavramını sadece bir araç olarak kullanmışlardır. Dağılımlar arasında konvekslik kavramına dayalı bir sıralamaya değinmemişlerdir. Bu nedenle, çalışmanın elde edilen sonuçları ile söz konusu yazarların sonuçlarını karşılaştırmanın yararlı olabileceği düşüncesi ile Alt Bölüm 4.3 ve Alt Bölüm 4.4' te bu tartışmalara yer verilmiştir.

4.1 Konvekslik Kavramına Dayalı Bağımlılık Sıralaması

Daha önce de bahsedildiği gibi, dağılımlar arasında bir bağımlılık sıralaması yapabilmek için ilgili dağılım ailesi $\mathcal{F}_c(F_X, F_Y)$ 'nin kısmi sıralı bir aile olması gerekir. Lemma 3.3.1' in sonucu olarak, " $\overset{c}{\sim}$ " ilişkisi ile bağımlılık sıralamasının arasındaki ilişkinin araştırılması yararlı olabilir.

Lemma 4.1.1 $F \in \mathcal{F}_c(F_X, F_Y)$ için $F_{X|y}$ koşullu dağılım fonksiyonu, F_X marjinal dağılım fonksiyonuna göre mutlak süreklidir: $F_{X|y} << F_X$.

İspat: $y \in D_F$ için $F_{X|y}(x) = \frac{P_{XY}(X \leq x, Y \leq y)}{P_Y(Y \leq y)}$ biçiminde tanımlamak mümkündür. Öte yandan, $F_X(x) = P_X(X \leq x)$ olduğu da dikkate alınırsa,

$$P_{XY}(X \leq x, Y \leq y) \leq P_X(X \leq x)$$

eşitsizliğini her zaman yazmak mümkündür. O halde $P_X(X \leq x) = 0$ olduğu yerlerde $P_{XY}(X \leq x, Y \leq y) = 0$ dır. Bu ise, $F_{X|y} << F_X$ olduğunu göstermektedir.

Tanım 4.1.1 $F, G \in \mathcal{F}_c(F_X, F_Y)$ olmak üzere Tanım 3.3.1’ de, $G = F_0 = F_X F_Y$ almırsa, (3.3.2) ifadesine göre $G_{X|Y} = F_X$ olmaktadır. Tanım gereği F_X sürekli bir dağılım fonksiyonu olduğundan F_X^{-1} bire-birdir. O halde, $F_X = t$ gibi bir dönüşüm yapılırsa, $\phi_y(t) = F_{X|Y} F_X^{-1}(t)$ biçimini alır. Yine Tanım 3.3.1’ e göre, $\phi_y(t)$ fonksiyonu $\forall y \in D_F$ için $(0, 1)$ üzerinde konveks ise, $F_{X|Y}$ koşullu dağılım fonksiyonu F_X marjinal dağılım fonksiyonuna göre daha konveks sıralı olduğunu ve $F_{X|Y} \stackrel{c}{\succsim} F_X$ şeklinde bir sıralamanın yapılabildiği söylenebilir.

Böyle bir sıralamanın anlamı şu olabilir: İki boyutlu uzayda, sürekli dağılımlara sahip $(X, Y) \in \mathbb{R}^2$ rasgele değişkenleri için, bağımlılık gibi bir durum söz konusu ise, bunun ne türde olduğunu çıkarmak mümkün olacaktır. $\phi_y(t)$ ’ nin konveks veya konkav olması, $\mathcal{F}_c(F_X, F_Y)$ ailesinde (veya X ile Y arasında) en azından kadran bağımlılığın varlığını açıkça göstermektedir. Söz konusu rasgele değişkenler için bağımlılık durumu yok ise, “ $\stackrel{c}{\sim}$ ” sıralama ilişkisinin bir kısmı sıralama olma özelliklerini yerine getirmesinden dolayı (Bkz. Lemma 3.3.1, ters-simetri özelliği) bağımsızlık durumunu da ortaya çıkarabileceği kolaylıkla söylenebilir. Buradaki bağımsızlık ile, $F(x, y) = F_X(x)F_Y(y) \forall x \in \mathbb{R}$ ve $\forall y \in D_F$ kastedilmektedir. “ $\stackrel{c}{\sim}$ ” ilişkisinin bağımsızlık halini ortaya çıkardığı durumlara Alt Bölüm 4.5’ te daha geniş olarak yer verilmiştir.

4.2 Konveks Sıralamanın Bazı Bağımlılık Türleri ile Olan İlişkileri

İki boyutlu dağılımlar için önerilen konveks sıralamanın, bilinen bazı bağımlılık türleri ve bağımlılık sıralamaları ile olan ilişkileri şöyle sıralanabilir:

4.2.1 Pozitif (Negatif) Kadran Bağımlılığı

Bilindiği gibi, (2.6.1) eşitsizliğini $\forall x, y$ için,

$$F(x, y) \geq \left(\leq \right) F_X(x)F_Y(y), \quad PKB(NKB) \quad (4.2.1)$$

şeklinde yazmak da mümkündür. Buna göre, (4.2.1) eşitsizliği pozitif (negatif) kadran bağımlılığını vermektedir. $\forall x \in \mathfrak{R}$ ve $\forall y \in D_F$ için bu eşitsizlik,

$$F_{X|y}(x) \geq \left(\leq \right) F_X(x) \quad (4.2.2)$$

eşitsizliğine dönüşür (Lehmann 1966).

$F \in \mathcal{F}_c(F_X, F_Y)$ için $F_X(x) = t$ dönüşümü yapılırsa, $\forall t \in (0, 1)$ ve $\forall y \in D_F$ için Tanım 4.1.1' e göre (4.2.2) eşitsizliğini,

$$\phi_y(t) = F_{X|y}(F_X^{-1}(t)) \geq \left(\leq \right) t \quad (4.2.3)$$

biçiminde yazmak mümkündür.

Lemma 3.1.1'de (3.1.8) eşitsizliğine göre (vii nolu özellik), $\forall y \in D_F$ için $\phi_y(t)$, $(0, 1)$ üzerinde konveks ise, $\phi_y(t) \leq t$ olacaktır. Bu ise, (4.2.3) eşitsizliğine göre, NKB' yi vermektedir. Eğer $\phi_y(t)$ konkav ise, $\phi_y(t) \geq t$ olacaktır. Bu ise, PKB' yi vermektedir. Yani, $F_{X|Y} \overset{c}{\succsim} F_X$ gibi bir ilişkinin olması, X ve Y rasgele değişkenlerinin negatif anlamda kadran bağımlı olduğunu; benzer bir şekilde de, $F_X \overset{c}{\succsim} F_{X|Y}$ gibi bir ilişkinin bulunması, X ve Y rasgele değişkenlerinin pozitif anlamda kadran bağımlı olduğunu ortaya çıkarmaktadır. Buna göre, sürekli dağılımlar için, aşağıdaki gibi bir eşdeğerliliğe ulaşmak mümkündür:

$$F_{X|Y} \overset{c}{\succsim} F_X \implies X \text{ ve } Y \text{ } NKB' \text{ dır.} \quad (4.2.4)$$

Eğer, $\left(\mathcal{F}_c(F_X, F_Y), \overset{c}{\succsim} \right)$ ikilisi mevcut ise bu aile üzerinde,

$$\phi(t) \text{ konveks (konkav)} \iff X \text{ ve } Y, \quad NKB(PKB) \quad (4.2.5)$$

gerektirmesi yazılabilir.

Sonuç 4.2.1 $\left(\mathcal{F}_c(F_X, F_Y), \overset{c}{\sim}\right)$ kısmi sıralı ailesi için $F, G \in \mathcal{F}_c(F_X, F_Y)$ olmak üzere,

$$F_{X|Y} \overset{c}{\sim} G_{X|Y} \implies F_{X|Y} \leq G_{X|Y} \quad (4.2.6)$$

gibi bir sıralamayı ortaya çıkarmaktadır (Bkz. Lemma 3.1.1' de (vii) özelliği). Bu ise, $\forall x \in \mathfrak{R}$ ve $\forall y \in D_F$ için,

$$F(x, y) \leq G(x, y) \quad (4.2.7)$$

eşitsizliğine denk olur ki, Tanım 2.6.2' ye göre, F dağılımının G dağılımına göre daha NKB olduğu söylenebilir ve $G \prec_{NKB} F$ ile gösterilir ya da G dağılımının F dağılımına göre daha PKB olduğu, $F \prec_{PKB} G$ anlamına da gelmektedir. O halde, (4.2.6) ifadesinden,

$$F_{X|Y} \overset{c}{\sim} G_{X|Y} \implies G \prec_{NKB} F \text{ ya da } F \prec_{PKB} G \quad (4.2.8)$$

gerektirmesini yazmakta bir sakınca olmamaktadır.

4.2.2 Pozitif ve Negatif Regresyon Bağımlılığı

(2.6.3) eşitsizliği ile verilen PRB tanımından daha zayıf olan bir tanım da, $\forall x$ için $P(X \leq x \mid Y \leq y)$ olasılığının y 'nin artmayan bir fonksiyonu olması şeklindedir. Benzer biçimde, yukarıdaki olasılık y 'nin azalmayan bir fonksiyonu ise X ve Y rasgele değişkenleri NRB olacaktır. Zayıf anlamda tanımlanan bu bağımlılık türünün, konveks sıralama ile olan ilişkisi üzerinde durulacaktır.

$F \in \mathcal{F}_c(F_X, F_Y)$ için $F_{X|Y} \overset{c}{\sim} F_X$ olduğu varsayalım. " $\overset{c}{\sim}$ " ilişkisinin tanımına göre, $\phi_y(t) = F_{X|y}(F_X^{-1}(t))$ fonksiyonunun $\forall y \in D_F$ için $(0, 1)$ üzerinde konveks bir fonksiyon olduğu bilinmektedir. Buna göre, $(0, 1) \times (0, 1)$ birim karesi üzerinde en basit konvekslik $\phi(t) = t$ eğrisi olacaktır. Bu son durum, $\forall y \in D_F$ için $F_{X|y} = F_X$ olması ya da $y \rightarrow \infty$ olması

durumlarında geçerlidir. Eğer bağımsızlık durumu göz ardı edilirse, yani $F_{X|Y} \neq F_X$ olduğu kabul edilirse, sadece $y \rightarrow \infty$ iken $\phi_y(t) = t$ eşitliği olacaktır. $y \rightarrow -\infty$ durumunda ise, $\phi_y(t) = 0$ olacaktır ki, $(0, 1)$ üzerinde en konveks eğri olmaktadır. O halde $y < y'$ için, $\phi_y(t) \leq \phi_{y'}(t)$ dır yani $\phi_y(t)$ y 'nin azalmayan bir fonksiyonudur. Analitik olarak ispatı aşağıda Lemma 4.2.1 ' de verilmiştir.

Lemma 4.2.1 $\phi_y(t)$ fonksiyonu $(0, 1)$ üzerinde $\forall y \in D_F$ için konveks ise, y 'nin azalmayan bir fonksiyonudur.

İspat: $y < y'$ için,

$P_{XY}(X \leq x, Y \leq y') = P_{XY}(X \leq x, Y \leq y) + P_{XY}(X \leq x, y < Y \leq y')$ eşitliğini yazmak mümkündür. Eşitliğin her iki yanını $P_Y(Y \leq y')$ ile bölündüğünde,

$$\frac{P_{XY}(X \leq x, Y \leq y')}{P_Y(Y \leq y')} = \frac{P_{XY}(X \leq x, Y \leq y)}{P_Y(Y \leq y')} + \frac{P_{XY}(X \leq x, y < Y \leq y')}{P_Y(Y \leq y')}$$

elde edilir. $\alpha = \frac{P_Y(Y \leq y)}{P_Y(Y \leq y')}$ olmak üzere, $\alpha \in (0, 1)$,

$$P(X \leq x | Y \leq y') = \alpha P(X \leq x | Y \leq y) + (1 - \alpha) P(X \leq x | y < Y \leq y')$$

yazılabilir. $0 \leq P(\cdot | \cdot) \leq 1$ olduğundan, yukarıdaki eşitliğin solundaki ifade $u \in [0, 1]$ gibi bir değere eşitlendiğinde,

$$u = \alpha P(X \leq x | Y \leq y) + (1 - \alpha) P(X \leq x | y < Y \leq y') \quad (4.2.9)$$

bulunur. $x = F_X^{-1}(u)$ noktası seçilirse, ϕ fonksiyonu $u \in [0, 1]$ için tanımlı olduğundan,

$$\phi_y(u) = \phi_y(\alpha p_{11} + (1 - \alpha)p_{12}) \quad (4.2.10)$$

eşitliğini yazmak mümkündür. Burada,

$$\begin{aligned} p_{11} &= P(X \leq F_X^{-1}(u) \mid Y \leq y), \\ p_{12} &= P(X \leq F_X^{-1}(u) \mid y < Y \leq y') \end{aligned}$$

biçimindedir. $\phi_y(t)$, $\forall y$ için konveks olduğundan, (4.2.10) ifadesi,

$$\phi_y(\alpha p_{11} + (1 - \alpha)p_{12}) \leq \alpha \phi_y(p_{11}) + (1 - \alpha)\phi_y(p_{12}) \quad (4.2.11)$$

eşitsizliği haline dönüştür, Lemma 3.1.1' de (vii) özelliğinden, eşitsizliğin sağ yanı için,

$$\alpha \phi_y(p_{11}) + (1 - \alpha)\phi_y(p_{12}) \leq \alpha p_{11} + (1 - \alpha)p_{12} \quad (4.2.12)$$

eşitsizliğini yazmak mümkündür. Bu son eşitsizliğin sağındaki ifadenin, (4.2.9) ve (4.2.10) ifadelerinin yardımı ile

$$\alpha p_{11} + (1 - \alpha)p_{12} = P(X \leq F_X^{-1}(u) \mid Y \leq y') = \phi_{y'}(u)$$

biçiminde yazılabildiği kolaylıkla görülebilir. Buna göre, yukarıdaki eşitlik ile (4.2.10) - (4.2.12) ifadeleri birleştirildiğinde,

$$\phi_y(u) \leq \phi_{y'}(u) \quad (4.2.13)$$

eşitsizliği geçerli olmaktadır. Böylece, ϕ_y fonksiyonunun y' ye göre azalmayan bir özelliğe sahiptir.

Bu Lemmanın sonucu olarak, (4.2.13) ifadesi, $\forall y < y' \in D_F$ için,

$$F_{X|y}(F_X^{-1}(u)) \leq F_{X|y'}(F_X^{-1}(u)) \quad (4.2.14)$$

eşitsizliğine denk olup $F_X^{-1}(u) = x$ alınırsa, zayıf anlamda NRB tanımını vermektedir.

Aşağıdaki önerme, konvekslik kavramı ile NRB arasındaki ilişkiyi ortaya çıkarmaktadır.

Önerme 4.2.1 $\forall y$ için $\phi_y(t)$ konveks bir fonksiyon olsun. Bu durumda, Lemma 4.2.1' den, $\phi_y(t)$ aynı zamanda y 'nin artan bir fonksiyonu olmaktadır. O halde $\forall y < y'$ için, $\phi_y(t)$ fonksiyonunun, $\phi_{y'}(t)$ fonksiyonundan daha konveks olması gerekmektedir. Bu ise konveks sıralama tanımına göre, $\phi_{yy'}(t) = \phi_y \phi_{y'}^{-1}(t)$ fonksiyonunun $(0, 1)$ üzerinde konveks olmasını gerektirir. Bu durumda şöyle bir ilişkiyi yazmak mümkündür:

$$\begin{aligned}\phi_{yy'}(t) \text{ konveks} &\Rightarrow NRB(X | Y), \\ \phi_{yy'}(t) \text{ konkav} &\Rightarrow PRB(X | Y).\end{aligned}$$

İspat: Lemma 3.1.1' in (vii) özelliğinden,

$$\phi_{yy'}(t) = \phi_y \phi_{y'}^{-1}(t) \leq t \quad (4.2.15)$$

eşitsizliğini yazmak mümkün olmaktadır. $\phi_{y'}^{-1}(t) = (F_{X|y'} F_X^{-1}(t))^{-1} = F_X F_{X|y'}^{-1}(t)$, eşitliği yerine yazıldığında, (4.2.15) ifadesi,

$$F_{X|y} F_X^{-1} (F_X F_{X|y'}^{-1}(t)) \leq t, \quad (4.2.16)$$

$$F_{X|y} F_{X|y'}^{-1}(t) \leq t \quad (4.2.17)$$

olur. Bu son eşitsizlik,

$$F_{X|y}(x) \leq F_{X|y'}(x) \quad (4.2.18)$$

biçimini alır. (4.2.18) ifadesi her bir $y \in D_F$ için geçerli olduğundan, $F \in \mathcal{F}_c(F_X, F_Y)$ için $F_{X|Y} \stackrel{c}{\sim} F_X$ gibi bir ilişkinin varlığının, X ile Y arasında NRB ya da $NRB(X | Y)$ türde bir bağımlılığı gösterdiği söylenebilir.

Burada gözden kaçırılmaması gereken husus, $\phi_{yy'}$ fonksiyonunun konveks (konkav) olmasının, $\phi_{xx'}$ fonksiyonunun konveks (konkav) olmasını gerektirmediğidir. Dolayısı ile, $NRB(PRB)(X | Y)$ gibi bir bağımlılık durumunun varlığı, $NRB(PRB)(Y | X)$ olmasını gerektirmemektedir.

4.2.3 Olabilirlik Oranı Bağımlılığı ya da TP_2 Bağımlılığı

Önerme 4.2.1' de, $\phi_{yy'}(t) = F_{X|y}F_{X|y'}^{-1}(t)$ biçiminde tanımlanan fonksiyon, eğer $(0, 1)$ üzerinde konveks ise, NRB ve NKB tipinde bağımlılıklara işaret ettiği bir önceki Alt Bölümde bahsedilmişti. TP_2 ile ilişkisini gösterebilmek amacıyla, $\phi_{yy'}(t)$ fonksiyonunun konkav olduğu kabul edilsin. $\phi_{yy'}(t)$ fonksiyonunun analitik özelliğinden dolayı, $\phi_{yy'}^{-1}(t) = \phi_{y'y}(t)$ sürekli, konveks ve t ' nin azalmayan bir fonksiyonu olmaktadır. $\phi_{yy'}^{-1}(t)$ fonksiyonu göz önüne alınırsa,

$$\phi_{yy'}^{-1} = \left(F_{X|y}F_{X|y'}^{-1} \right)^{-1}(t) = F_{X|y'}F_{X|y}^{-1}(t) = \phi_{y'y}(t) \quad (4.2.19)$$

eşitliği elde edilir. (4.2.19) eşitliği ile verilen fonksiyon konveks bir fonksiyon olduğundan dolayı, Önerme 2.2.2' ye göre, $\frac{\partial \phi_{y'y}(t)}{\partial t}$ ifadesi t ' nin azalmayan bir fonksiyonu olmaktadır. Buna göre, $0 \leq t < v \leq 1$ için,

$$\frac{\partial \phi_{y'y}(t)}{\partial t} \leq \frac{\partial \phi_{y'y}(v)}{\partial v} \quad (4.2.20)$$

yazılabilmektedir. (4.2.19) eşitliği kullanılarak yukarıdaki türev ifadesi aşağıdaki gibi bulunur:

$$\frac{\partial \phi_{y'y}(t)}{\partial t} = \frac{\partial F_{X|y'}(F_{X|y}^{-1}(t))}{\partial t} = \frac{\partial F_{X|y'}(F_{X|y}^{-1}(t))}{\partial F_{X|y}^{-1}(t)} \frac{\partial F_{X|y}^{-1}(t)}{\partial t} \quad (4.2.21)$$

$F_{X|y}^{-1}(t) = x$ denilirse, buradan $t = F_{X|y}(x)$,

$$\frac{\partial t}{\partial x} = \frac{\partial F_{X|y}(x)}{\partial x} \implies \frac{\partial x}{\partial t} = \frac{1}{\frac{\partial F_{X|y}(x)}{\partial x}}$$

türevini elde etmek mümkündür. Bu (4.2.21) ifadesinde yerine yazılırsa,

$$\frac{\partial F_{X|y'}(F_{X|y}^{-1}(t))}{\partial t} = \frac{\partial F_{X|y'}(x)}{\partial x} \frac{1}{\frac{\partial F_{X|y}(x)}{\partial x}} \quad (4.2.22)$$

biçiminde elde edilir. Benzer olarak, $F_{X|y}^{-1}(v) = x'$ denilirse, $t < v$ için $x < x'$ olacağı açıktır. Bu iki türev eşitliği, (4.2.20) ifadesinde yerine yazılır ise,

$$\frac{\partial F_{X|y'}(x)}{\partial x} \frac{1}{\frac{\partial F_{X|y}(x)}{\partial x}} \leq \frac{\partial F_{X|y'}(x')}{\partial x'} \frac{1}{\frac{\partial F_{X|y}(x')}{\partial x'}} \quad (4.2.23)$$

elde edilir. Yukarıdaki eşitsizlik düzenlenir ise,

$$\frac{\partial F(x, y')}{\partial x} \frac{\partial F(x', y)}{\partial x'} \leq \frac{\partial F(x', y')}{\partial x'} \frac{\partial F(x, y)}{\partial x} \quad (4.2.24)$$

bulunur.

Yukarıdaki eşitsizlik, Alt Bölüm 2.7.4' te verilen TP_2 bağımlılığı ile eşdeğerdir. Bu sonucu aşağıdaki gibi göstermek de mümkündür.

$I_1 = (x, x + \varepsilon)$, $I_2 = (x', x' + \delta)$ ve $J_1 = (-\infty, y)$, $J_2 = (y, y')$ gerçel aralıkları için,

$$P_{XY}(I_1 \times J_1) P_{XY}(I_2 \times J_2) \geq P_{XY}(I_1 \times J_2) P_{XY}(I_2 \times J_1) \quad (4.2.25)$$

eşitsizliği geçerli olsun (bkz. (2.7.2) eşitsizliği). Yukarıdaki olasılıklar göz önüne alınırsa,

$$\begin{aligned} P_{XY}(I_1 \times J_1) &= P_{XY}(X < x + \varepsilon, Y < y) - P_{XY}(X < x, Y < y) \\ &= F(x + \varepsilon, y) - F(x, y), \end{aligned}$$

$$P_{XY}(I_2 \times J_1) = F(x' + \delta, y) - F(x', y),$$

$$\begin{aligned} P_{XY}(I_1 \times J_2) &= P_{XY}(X < x + \varepsilon, Y < y') - P_{XY}(X < x, Y < y') \\ &\quad - P_{XY}(X < x + \varepsilon, Y < y) + P_{XY}(X < x, Y < y) \\ &= F(x + \varepsilon, y') - F(x, y') - F(x + \varepsilon, y) + F(x, y), \end{aligned}$$

$$P_{XY}(I_2 \times J_2) = F(x' + \delta, y') - F(x', y') - F(x' + \delta, y) + F(x', y)$$

eşitlikleri elde edilir. Buna göre,

$$\begin{aligned} F(x + \varepsilon, y) - F(x, y) &= A, \\ F(x' + \delta, y) - F(x', y) &= C, \\ F(x + \varepsilon, y') - F(x, y') &= B, \\ F(x' + \delta, y') - F(x', y') &= D \end{aligned}$$

olmak üzere, (4.2.25) eşitsizliği,

$$A[D - C] \geq [B - A]C \implies AD \geq BC \quad (4.2.26)$$

haline döndürür. $\varepsilon, \delta > 0$ olmak üzere (4.2.26) ifadesinde sağdaki eşitsizliğin her iki yanını $\frac{1}{\varepsilon\delta}$ ile çarpıp limit işlemine geçilirse,

$$\begin{aligned} & \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{F(x + \varepsilon, y) - F(x, y)}{\varepsilon} \frac{F(x' + \delta, y') - F(x', y')}{\delta} \\ & \geq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{F(x + \varepsilon, y') - F(x, y')}{\varepsilon} \frac{F(x' + \delta, y) - F(x', y)}{\delta} \end{aligned}$$

elde edilir. Limit alma süreci gereğince, limit operatörü limit içindeki ifadelerin ayrı ayrı limitleri çarpımı olarak yazılabileceğinden ($f(x, y)$ olasılık yoğunluk fonksiyonunun varlığı altında),

$$\begin{aligned} & \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{F(x + \varepsilon, y) - F(x, y)}{\varepsilon} \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{F(x' + \delta, y') - F(x', y')}{\delta} \\ & \geq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{F(x + \varepsilon, y') - F(x, y')}{\varepsilon} \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{F(x' + \delta, y) - F(x', y)}{\delta} \end{aligned}$$

eşitsizliğine döndürür ki, bu ise türev tanımı gereği,

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial x} \frac{\partial F(x', y')}{\partial x'} \geq \frac{\partial F(x, y')}{\partial x} \frac{\partial F(x', y)}{\partial x'}$$

biçimindedir. Bu son eşitsizlik (4.2.24) eşitsizliğinden başka birşey değildir. Bu sonuca göre, $\phi_{y'y}(t)$ fonksiyonu konveks ise, TP_2 anlamında bir bağımlılığa işaret ettiği söylenebilmektedir.

Bundan sonraki aşama, $F(x, y)$ 'nin TP_2 özelliği ile $f(x, y)$ 'nin TP_2 özelliğinin birbirine denk olduğunun gösterilmesidir (bkz. Önerme 4.3.1). Ancak daha önce Capéraà ve Genest (1990)'in (2.6.4) ifadesi ile verilen fonksiyon ile elde ettikleri sonuçları, $\phi_{y'y}(t)$ fonksiyonu ile elde edilen sonuçlar ile karşılaştırma yararlı olacağından yeni bir Alt Bölümde, bu sonuçlar tartışılacaktır.

4.3 Konveks Sıralamanın Capéraà ve Genest Türü PRB ve TP_2 ile İlişkisi

Capéraà ve Genest (1990)'nın Alt Bölüm 2.6.4' te verilen PRB tanımı ile Lemma 4.2.1 ve Önerme 4.2.1' de $\phi_{y'y}(t)$ fonksiyonu ile elde edilen sonuçları karşılaştırmak mümkündür: Buna göre, $\forall y < y'$ ve $\forall t \in [0, 1]$ için,

$$F_{y'y}(t) \leq t \equiv \phi_{y'y}(t), \quad (0, 1) \text{ üzerinde konveks ya da } \phi_{y'y}(t) \leq t \quad (4.3.1)$$

$$F_{y'y}(t) \geq t \equiv \phi_{yy'}(t), \quad (0, 1) \text{ üzerinde konveks ya da } \phi_{yy'}(t) \leq t \quad (4.3.2)$$

denklikleri yazılabilir. Görüldüğü gibi (4.3.1) ifadesinde, $F_{y'y}$ ve $\phi_{y'y}$ fonksiyonlarının her ikisi ile PRB anlamında bağımlılığa (4.3.2)' de ise, NRB anlamında bağımlılığa ulaşmak mümkün olmaktadır. Ancak şu noktayı gözden kaçırmamak gerekir: $F_{y'y}$ fonksiyonunun tanımı $F_{X|Y=y}$ koşullu dağılımı ile verilmiş, $\phi_{y'y}$ ise $F_{X|Y \leq y}$ koşullu dağılımı ile verilmiş olmasıdır. Dolayısı ile Capéraà ve Genest (1990)'in tanımlamış oldukları $F_{y'y}$ fonksiyonu (4.3.1) ve (4.3.2) ifadelerine göre, (2.6.3)' te verilen PRB ve NRB tanımlarını sağlamaktadır. $\phi_{y'y}$ ise, zayıf anlamda tanımlı olan PRB ve NRB ' yi vermektedir. Bu nedenle, (4.3.1) ve (4.3.2) ifadelerinde denklik bağıntısı kullanılmıştır.

Aşağıdaki Alt Bölümde, Capéraà ve Genest (1990)'in önermiş oldukları TP_2 bağımlılığını içeren Teorem 2.6.1' in gösterimi verildikten sonra, $F(x, y)$ ya da $f(x, y)$ ' nin TP_2 özelliklerinin birbirine denk olduğunu gösteren Önerme 4.3.1 verilecektir.

4.3.1 TP_2 ile olan ilişki

Karlin (1968) tarafından, Alt Bölüm 2.6.5' de (2.6.5) ifadesi ile olasılık yoğunluk fonksiyonları $f(x, y)$ için verilen TP_2 tanımına dayalı olarak Teorem 2.6.1 hatırlanacak olunursa, $\forall y < y'$ ve $\forall u \in [0, 1]$ için,

$F_{y'y}(u)$ konveks $\Rightarrow TP_2$ ya da (LRD)

yazılabilir. Buna göre, $F_{y'y}(u) = F_{y'}F_y^{-1}(u)$ fonksiyonu azalmayan bir fonksiyon olduğundan dolayı, $0 \leq u < v \leq 1$ için,

$$F_{y'y}(u) \leq F_{y'y}(v) \quad (4.3.3)$$

yazılabilir. Ayrıca, $F_{y'y}(u) \forall u \in (0, 1)$ ve için sürekli bir fonksiyon olması nedeni ile türevlenebilir bir fonksiyondur. Buna göre,

$$\frac{dF_{y'y}(u)}{du} = \frac{f_{y'}(F_y^{-1}(u))}{f_y(F_y^{-1}(u))} \quad (4.3.4)$$

biçiminde tanımlıdır. Önerme 2.2.2' ye göre, $u < v$ için (4.3.4) ifadesi azalmayan bir fonksiyondur. Bu nedenle,

$$\frac{dF_{y'y}(u)}{du} \leq \frac{dF_{y'y}(v)}{dv} \quad (4.3.5)$$

eşitsizliği yazılabilir. (4.3.4) ifadesi yardımı ile (4.3.5) eşitsizliğini,

$$\frac{f_{y'}(F_y^{-1}(u))}{f_y(F_y^{-1}(u))} \leq \frac{f_{y'}(F_y^{-1}(v))}{f_y(F_y^{-1}(v))} \quad (4.3.6)$$

biçiminde yazmak mümkündür. $F_y^{-1}(u) = x$ ve $F_y^{-1}(v) = x'$ olarak alın-sın. F^{-1} , in kendisi azalmayan olduğundan, $u < v$ için $x < x'$ olacaktır. (4.3.6) eşitsizliğinde yerine yazılırsa, f_y ' nin de tanımı kullanılarak,

$$\frac{f(x, y')/f(y')}{f(x, y)/f(y)} \leq \frac{f(x', y')/f(y')}{f(x', y)/f(y)}$$

eşitsizliği elde edilir ki, gerekli düzenlemeler yapıldıktan sonra,

$$f(x', y')f(x, y) \geq f(x, y')f(x', y)$$

biçiminde yazılabilir. Bu son eşitsizlik, (2.6.5) ile ifade edilen TP_2 özelliğini vermektedir.

Tartışma bakımından $\phi_{y'y}(t)$ 'nin TP_2 anlamında bir bağımlılığa işaret etmesi ile, (2.6.4)'te verilen $F_{y'y}(t)$ fonksiyonunun TP_2 'yi göstermesinin birbirine denk olduğunu gösteren önermeyi vermek mümkündür. Aynı zamanda bu önerme, $F \in TP_2$ ile $f \in TP_2$ özelliklerinin birbirine denk olduğunu da göstermektedir.

Önerme 4.3.1 $\phi_{y'y}(t)$ fonksiyonu konveks ise, (2.6.5) ifadesini sağlamaktadır. Ayrıca, $y < y'$ ve $\forall t \in [0, 1]$ için,

$$\phi_{y'y}(t) \text{ konveks ise, } F \text{ ve } f \in TP_2 \equiv F_{y'y}(t) \text{ konveks ise, } f \in TP_2 \quad (4.3.7)$$

denkliği geçerli olmaktadır. Alt Bölüm 4.3' e başlamadan önce de belirtildiği gibi, önermenin gösterimi için $F(x, y)$, TP_2 ise, $f(x, y)$ 'nin de TP_2 olduğunu göstermek yeterli olacaktır. Çünkü, Alt Bölüm 4.2.3' te $\phi_{y'y}(t)$ 'nin TP_2 anlamında bağımlılığı, dağılım fonksiyonu F bakımından ortaya çıktığı yani $F \in TP_2$ olduğu söylenmişti.

İspat: Alt Bölüm 2.7.4' te verilen tanıma göre, $F(x, y)$ 'nin TP_2 özelliğine sahip olması; Tanım 2.4.1' e göre, I_1 , I_2 ve J_1 , J_2 aralıkları için, olasılık bakımından

$$\left| \begin{array}{cc} P_{XY}(I_1 \times J_1) & P_{XY}(I_1 \times J_2) \\ P_{XY}(I_2 \times J_1) & P_{XY}(I_2 \times J_2) \end{array} \right| \geq 0 \quad (4.3.8)$$

olarak ifade edilebilmesini mümkün kılmaktadır. $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$, $x_1 < x_2$ ve $y_1 < y_2$ olmak üzere, $I_1 = [x_1, x_1 + \varepsilon)$, $I_2 = [x_2, x_2 + \varepsilon)$ ve $J_1 = [y_1, y_1 + \delta)$, $J_2 = [y_2, y_2 + \delta)$ olarak seçilirse, (4.3.8) ifadesi,

$$\left| \begin{array}{cc} \int_{x_1}^{x_1+\varepsilon} \int_{y_1}^{y_1+\delta} f(\xi, \eta) d\eta d\xi & \int_{x_1}^{x_1+\varepsilon} \int_{y_2}^{y_2+\delta} f(\xi, \eta) d\eta d\xi \\ \int_{x_2}^{x_2+\varepsilon} \int_{y_1}^{y_1+\delta} f(\xi, \eta) d\eta d\xi & \int_{x_2}^{x_2+\varepsilon} \int_{y_2}^{y_2+\delta} f(\xi, \eta) d\eta d\xi \end{array} \right| \geq 0 \quad (4.3.9)$$

biçimini alır. (4.3.9) ifadesi $\left[\frac{1}{\varepsilon\delta}\right]^2$ ile çarpıldığında, determinanın işareti değişmeyeceğinden,

$$\left| \begin{array}{cc} \frac{1}{\varepsilon\delta} \int_{x_1}^{x_1+\varepsilon} \int_{y_1}^{y_1+\delta} f(\xi, \eta) d\eta d\xi & \frac{1}{\varepsilon\delta} \int_{x_1}^{x_1+\varepsilon} \int_{y_2}^{y_2+\delta} f(\xi, \eta) d\eta d\xi \\ \frac{1}{\varepsilon\delta} \int_{x_2}^{x_2+\varepsilon} \int_{y_1}^{y_1+\delta} f(\xi, \eta) d\eta d\xi & \frac{1}{\varepsilon\delta} \int_{x_2}^{x_2+\varepsilon} \int_{y_2}^{y_2+\delta} f(\xi, \eta) d\eta d\xi \end{array} \right| \geq 0$$

biçiminde yazılabilir. Limit operatörü işletilecek olursa, matrislerde limit, matrisin elemanlarının herbirine ayrı ayrı uygulanabileceğinden, $\varepsilon, \delta \rightarrow 0$ durumu göz önüne alındığında,

$$\left| \begin{array}{cc} \lim_{\varepsilon, \delta \rightarrow 0} \int_{x_1}^{x_1+\varepsilon} \int_{y_1}^{y_1+\delta} \frac{f(\xi, \eta)}{\varepsilon\delta} d\eta d\xi & \lim_{\varepsilon, \delta \rightarrow 0} \int_{x_1}^{x_1+\varepsilon} \int_{y_2}^{y_2+\delta} \frac{f(\xi, \eta)}{\varepsilon\delta} d\eta d\xi \\ \lim_{\varepsilon, \delta \rightarrow 0} \int_{x_2}^{x_2+\varepsilon} \int_{y_1}^{y_1+\delta} \frac{f(\xi, \eta)}{\varepsilon\delta} d\eta d\xi & \lim_{\varepsilon, \delta \rightarrow 0} \int_{x_2}^{x_2+\varepsilon} \int_{y_2}^{y_2+\delta} \frac{f(\xi, \eta)}{\varepsilon\delta} d\eta d\xi \end{array} \right| \geq 0$$

biçimini alır. $i, j = 1, 2$ olmak üzere, türevin tanımı gereğince, yukardaki limitler,

$$\lim_{\varepsilon, \delta \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon \delta} \int_{x_i}^{x_i + \varepsilon} \int_{y_j}^{y_j + \delta} f(\xi, \eta) d\eta d\xi = \lim_{\varepsilon, \delta \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon \delta} \begin{bmatrix} F(x_i + \varepsilon, y_j + \delta) - F(x_i + \varepsilon, y_j) \\ -F(x_i, y_j + \delta) + F(x_i, y_j) \end{bmatrix} \\ = f(x_i, y_j)$$

değerine eşit olmaktadır. $f(x_i, y_j)$ ' nin varlığı altında, yukarıdaki determinant,

$$\begin{vmatrix} f(x_1, y_1) & f(x_1, y_2) \\ f(x_2, y_1) & f(x_2, y_2) \end{vmatrix} \geq 0$$

biçimini almaktadır. Bu ise (2.6.5)' te verilen TP_2 tanımı ile aynı olmaktadır. Dolayısı ile $F \in TP_2 \implies f \in TP_2$ önermesi gösterilmiş oldu. Buna göre, Capr  a ve Genest (1990)' in $F_{y'y}$ ile belirledikleri TP_2 tanımı, tez çalışmasında   erilen $\phi_{y'y}$ fonksiyonunun belirlediği TP_2 tanımı birbirine denk olmaktadır. Dolayısı ile, (4.3.7) denkliği sağlanmış olmaktadır.

Tanım 2.7.4' te, Averous ve Bernadet (2000)' in   ermi   olduğu *SOKAB* sıralaması ile çalışmada   erilen konveks sıralama arasındaki ilişkiden bahsetmekte yarar vardır.

4.4 Konveks Sıralamanın SOKAB Sıralaması ile Olan İlişkisi

$F, G \in \mathcal{F}_c(F_X, F_Y)$ olmak üzere, $\phi_{y'y}(t) = F_{X|y'} F_{X|y}^{-1}(t)$ ve $\psi_{y'y}(t) = G_{X|y'} G_{X|y}^{-1}(t)$ d  n    mleri tanımlı olsunlar. Buna göre, aşağıdaki   erme *SOKAB* sıralaması için önemli olmaktadır.

Çerme 4.4.1 $\psi_{y'y} \phi_{y'y}^{-1}(u)$ biçiminde tanımlanan d  n    m eğer $\forall y < y' \in \mathfrak{R}$ ve $\forall u \in [0, 1]$ için konveks ise, $F \prec_{SOKAB} G$ ' dir.

İspat: $\psi_{y'y}\phi_{y'y}^{-1}(u)$ dönüşümü $[0, 1]$ üzerinde konveks olduğundan, Önerme 2.2.1' e göre z, u ve $v \in [0, 1]$ olmak üzere, $z < u < v$ için,

$$\frac{\psi_{y'y}(\phi_{y'y}^{-1}(u)) - \psi_{y'y}(\phi_{y'y}^{-1}(z))}{u - z} \leq \frac{\psi_{y'y}(\phi_{y'y}^{-1}(v)) - \psi_{y'y}(\phi_{y'y}^{-1}(z))}{v - z} \quad (4.4.1)$$

eşitsizliğini yazmak mümkündür. $\phi_{y'y}$ sürekli ve azalmayan olduğundan, $u_1 < u_2 < u_3$ için $z = \phi_{y'y}(u_1)$, $u = \phi_{y'y}(u_2)$ ve $v = \phi_{y'y}(u_3)$ eşitlikleri yazılabilir. Buna göre, (4.4.1) ifadesinde yerine yazılırsa,

$$\frac{\psi_{y'y}(u_2) - \psi_{y'y}(u_1)}{\phi_{y'y}(u_2) - \phi_{y'y}(u_1)} \leq \frac{\psi_{y'y}(u_3) - \psi_{y'y}(u_1)}{\phi_{y'y}(u_3) - \phi_{y'y}(u_1)} \quad (4.4.2)$$

eşitsizliği elde edilir. $u_1 = 0$ ve $u_3 = 1$ alınırsa, $\psi_{y'y}(0) = \phi_{y'y}(0) = 0$ ve $\psi_{y'y}(1) = \phi_{y'y}(1) = 1$ eşitlikleri yardımı ile (4.4.2),

$$\psi_{y'y}(u_2) \leq \phi_{y'y}(u_2) \quad (4.4.3)$$

biçiminde yazılabilir. (4.4.3) eşitsizliği Tanım 2.7.4' te, $SOKAB$ sıralaması için verilen gerekli ve yeterli koşulu içermektedir. Bu önermenin sonucunda, $\stackrel{c}{\sim}$ sıralamasının, $\prec_{SOKAB}$ sıralamasını gerektirdiği söylenebilir.

4.5. İki Rasgele Değişkenin Bağımsızlığı ile İlgili Durumlar

" $\stackrel{c}{\sim}$ " sıralaması, bir kısmi sıralama özelliğini taşımasından dolayı, bağımlılık durumunu ortaya çıkarabildiği gibi bağımsızlık durumunu da ortaya çıkarmaktadır. Buna göre, $F \in \mathcal{F}_c(F_X, F_Y)$ olmak üzere, Lemma 4.1.1' in sonucu olarak $y \in D_F$ için $F_{X|y} << F_X$ ' dir. Aynı zamanda, ortak dağılım fonksiyonunun varlığı koşuluna bağlı olarak $F_X << F_{X|y}$ olduğu da söylenebilir. Dolayısı ile $y \in D_F$ için ϕ_y ve ϕ_y^{-1} tanımlıdır. Eğer $\forall y \in D_F$ için,

$$\phi_y(t) = F_{X|y}F_X^{-1}(t) = t$$

ve

$$\phi_y^{-1}(t) = F_X F_{X|y}^{-1}(t) = t$$

ise, $F_X F_{X|y}^{-1}(t) = F_{X|y} F_X^{-1}(t) = t$ eşitliği elde edilir. Dolayısı ile $F_{X|Y} \stackrel{c}{\sim} F_X$ ve $F_X \stackrel{c}{\sim} F_{X|Y}$ sıralamalarını yazmak mümkün olmaktadır. “ $\stackrel{c}{\sim}$ ” sıralamasının ters-simetri özelliğinden,

$$F_{X|Y} \stackrel{c}{\sim} F_X \text{ ve } F_X \stackrel{c}{\sim} F_{X|Y} \implies F_{X|Y} = F_X \quad (4.5.1)$$

gerektirmesi yazılabilir. (4.5.1)’in sonucu olarak, $\forall y \in D_F$ ve $\forall x \in \mathfrak{R}$ için, $F(x, y) = F_X(x)F_Y(y)$ eşitliği elde edilir. $y \in D_F^c$ için bu eşitlik her zaman geçerli olmaktadır. Dolayısı ile bu eşitliği, $\forall y \in \mathfrak{R}$ ve $\forall x \in \mathfrak{R}$ için yazmak mümkündür. Bu ise, X ve Y rasgele değişkenlerinin stokastik anlamda bağımsızlığını vermektedir.

Çalışmanın buraya kadarki kısmında, $\stackrel{c}{\sim}$ sıralamasının iki boyutlu uzayda kullanılmasından ve bu uzayda bilinen bazı bağımlılık türleri ile olan ilişkilerinden bahsedilmiştir. Görüldüğü gibi, $\left(\mathcal{F}_c(F_X, F_Y), \stackrel{c}{\sim}\right)$ kısmi sıralı ailesi üzerinde (2.6.6) daki bağımlılık yapılarını ortaya çıkarmak mümkün olmaktadır. Bu aile için en azından TP_2 türünde bir bağımlılığa ulaşılabilir ise diğerlerini incelemeye gerek kalmamaktadır. Bundan sonraki Alt Bölümlerde, $\stackrel{c}{\sim}$ sıralamasının iki boyutlu uzayda kullanımına dair tartışma amaçlı örnekler verilmiştir. Buna göre, Alt Bölüm 4.6 ve Alt Bölüm 4.7’ de literatürde bilinen iki özel dağılım ele alınmıştır. Alt Bölüm 4.8’ de ise herhangi iki boyutlu dağılım örnek olarak verilmiştir. Dolayısı ile takip eden bu üç alt bölüm uygulama olarak görülebilir.

4.6 Farlie-Gumbel-Morgenstern Dağılımı için Konveks Sıralama

$F_\alpha(x, y) = F_X(x)F_Y(y)[1 + \alpha(1 - F_X(x))(1 - F_Y(y))]$, $\alpha \in [-1, 1]$ biçiminde tanımlı dağılım fonksiyonlarının sınıfı literatürde, *Farlie-Gumbel-Morgenstern* (FGM) dağılımlar sınıfı olarak adlandırılır (Morgenstern 1956,

Farlie 1960). FGM ailesinden olan dağılım fonksiyonları için koşullu dağılım fonksiyonu $F_{X|y}$, $\forall y \in D_F$ için tanımlı olmaktadır. Buna göre aşağıdaki iki önerme geçerlidir.

Önerme 4.6.1 $F, G \in FGM(F_X, F_Y)$ olmak üzere, $F_{\alpha_1} = G_{X|y}(x)$ ve $F_{\alpha_2} = F_{X|y}(x)$ biçiminde tanımlansın. Bu durumda, $\alpha_1 > \alpha_2$ için $F_{\alpha_2} \stackrel{c}{\sim} F_{\alpha_1}$ dir.

İspat: Tanım 3.3.1' e göre, $F_{\alpha_2} F_{\alpha_1}^{-1}(t)$ ' nin konveks olduğunu göstermek yeterli olacaktır. Buna göre,

$$F_{\alpha_1} = F_X(x) [1 + \alpha_1 (1 - F_X(x)) (1 - F_Y(y))], \quad (4.6.1)$$

$$F_{\alpha_2} = F_X(x) [1 + \alpha_2 (1 - F_X(x)) (1 - F_Y(y))] \quad (4.6.2)$$

biçiminde tanımlıdır. F_{α_1} sürekli olduğundan dolayı $F_{\alpha_1} = G_{X|y} = t$ dönüşümünü yapmak mümkündür. Buna göre, yukarıdaki eşitlikte yerine yazılırsa,

$$\alpha_1 (1 - F_Y(y)) \left(F_X(x) \right)^2 - \left[1 + \alpha_1 (1 - F_Y(y)) \right] F_X(x) + t = 0 \quad (4.6.3)$$

denklemini elde edilmektedir. Bu denklemin x ' e göre çözümü $G_{X|y}^{-1}(t)$ fonksiyonunu vermektedir. (4.6.3) denklemini görüldüğü gibi ikinci dereceden bir polinomu göstermektedir. $ax^2 - bx + c = 0$ gibi bir denklemin gerçel çözümü, $\Delta = b^2 - 4ac \geq 0$ için, $x_{1,2} = \frac{b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$ olmaktadır. Buna göre, (4.6.3) denklemini için,

$$\Delta = [1 + \alpha_1 (1 - F_Y(y))]^2 - 4\alpha_1 (1 - F_Y(y)) t \quad (4.6.4)$$

$\alpha_1 \leq 0$ için $\forall t \in [0, 1]$ ve $\forall y \in D_F$ için $\Delta \geq 0$ olmaktadır. (4.6.3) denkleminin gerçel anlamda çözümü vardır. $\alpha_1 > 0$ için (4.6.4) ifadesine baktığımızda, $4\alpha_1 (1 - F_Y(y)) t$ terimi t ' nin artan bir fonksiyonudur.

Dolayısı ile Δ ifadesi t 'nin azalan bir fonksiyonudur. O halde $t = 1$ için $\Delta = (1 - \alpha_1 (1 - F_Y(y)))^2$ ifadesine bakıldığı zaman her y için pozitif olduğu kolaylıkla görülebilir. Dolayısı ile (4.6.3) denkleminin çözümü $\alpha_1 \in [-1, 1]$ için vardır. Buna göre, (4.6.3) ifadesinde $F_X(x) = u$ alınırsa, $\alpha_1 \neq 0$ için denklemin kökleri,

$$u_1 = \frac{1 + \alpha_1 (1 - F_Y(y)) - \sqrt{\Delta}}{2\alpha_1 (1 - F_Y(y))} \quad \text{ve} \quad u_2 = \frac{1 + \alpha_1 (1 - F_Y(y)) + \sqrt{\Delta}}{2\alpha_1 (1 - F_Y(y))}$$

bulunur. Bundan sonra karar verilmesi gereken, bu köklerden hangisinin $G_{X|Y}^{-1}(t)$ 'i verdiğidir. Buna göre $\alpha_1 > 0$ için, $0 \leq u_1 \leq 1$ ve $0 \leq u_2 \leq 1$ olmaları gerektiği göz önüne alınırsa,

$$0 \leq \frac{1 + \alpha_1 (1 - F_Y(y)) - \sqrt{\Delta}}{2\alpha_1 (1 - F_Y(y))} \leq 1,$$

$$- [1 + \alpha_1 (1 - F_Y(y))] \leq -\sqrt{\Delta} \leq \alpha_1 (1 - F_Y(y)) - 1$$

eşitsizliğin her iki yanı $(-)$ ile çarpıldığında, terimler pozitif olur:

$$[1 - \alpha_1 (1 - F_Y(y))]^2 \leq \Delta \leq [1 + \alpha_1 (1 - F_Y(y))]^2$$

yukarıdaki eşitsizlikte Δ ifadesinin (4.6.4)'teki değerini yerine koyup gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$-4\alpha_1 (1 - F_Y(y)) \leq -4\alpha_1 (1 - F_Y(y)) t \leq 0$$

eşitsizliği elde edilir ki, $t \in [0, 1]$ için bu eşitsizlik doğru olmakta yani, $\alpha_1 > 0$ için $u_1 \in [0, 1]$ olmaktadır. Benzer olarak u_2 kökü için de kontrol edilirse,

$$0 \leq \frac{1 + \alpha_1 (1 - F_Y(y)) + \sqrt{\Delta}}{2\alpha_1 (1 - F_Y(y))} \leq 1,$$

$$0 \leq -4\alpha_1 (1 - F_Y(y)) t \leq -4\alpha_1 (1 - F_Y(y))$$

eşitsizliğine ulaşılır ki, $t \in [0, 1]$ için bu eşitsizlik doğru değildir yani, $\alpha_1 > 0$ için $u_2 \notin [0, 1]$ ' dir.

$\alpha_1 < 0$ için de kökleri kontrol etmek gerekir. Kolaylık olması amacı ile şöyle bir yol izlenebilir: Δ ifadesi, $\alpha_1 < 0$ için t 'nin artan bir fonksiyonu olup enküçük değerini $t = 0$ noktasında, enbüyük değerini de $t = 1$ noktasında almaktadır. Buna göre, aynı zamanda $\alpha_1 < 0$ için u_1 kökü de t 'nin artan bir fonksiyonu olmaktadır. u_1 kökü,

$$u_1 = \frac{1 + \alpha_1(1 - F_Y(y)) - \sqrt{(1 + \alpha_1(1 - F_Y(y)))^2 - 4\alpha_1(1 - F_Y(y))t}}{2\alpha_1(1 - F_Y(y))}$$

elde edilir. $t = 0$ için $u_1 = 0$ ve $t = 1$ için $u_1 = 1$ olmaktadır, $u_1 \in [0, 1]$ ' dir.

u_2 kökü için, hemen görüleceği üzere, t 'nin azalan bir fonksiyonu olmaktadır. Buna göre,

$$u_2 = \frac{1 + \alpha_1(1 - F_Y(y)) + \sqrt{(1 + \alpha_1(1 - F_Y(y)))^2 - 4\alpha_1(1 - F_Y(y))t}}{2\alpha_1(1 - F_Y(y))}$$

elde edilir, $t = 0$ için $u_2 = 1 + \frac{1}{\alpha_1(1 - F_Y(y))} \leq 1$ olup, $t = 1$ için $u_2 = \frac{1}{\alpha_1(1 - F_Y(y))} \leq 0$ olmaktadır. $\alpha_1 < 0$ için de $u_2 \notin [0, 1]$ ' dir.

Sonuç olarak, $\alpha_1 \neq 0$ iken kök u_1 olmaktadır. $\alpha_1 = 0$ durumunda ise, (4.6.3) denklemi yardımı ile kökün t 'nin kendisine eşit olduğu görülmektedir. Buna göre,

$$F_X(x) = u_1 = \frac{1 + \alpha_1 (1 - F_Y(y)) - \sqrt{\Delta}}{2\alpha_1 (1 - F_Y(y))}$$

eşitliği ile $F_{\alpha_1}^{-1} = G_{X|y}^{-1}(t)$ fonksiyonu aşağıdaki gibi elde edilir:

$$G_{X|y}^{-1}(t) = x = F_X^{-1} \left(\frac{1 + \alpha_1 (1 - F_Y(y)) - \sqrt{\Delta}}{2\alpha_1 (1 - F_Y(y))} \right). \quad (4.6.5)$$

(4.6.5) ifadesi, F_{α_2} eşitliğinde yerine yazılırsa, $k_1 = \alpha_1(1 - F_Y(y))$ ve $k_2 = \alpha_2(1 - F_Y(y))$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} F_{\alpha_2} F_{\alpha_1}^{-1}(t) &= F_X F_X^{-1}(u_1) [1 + k_2(1 - F_X F_X^{-1}(u_1))] \\ &= \frac{1 + k_1 - \sqrt{\Delta}}{2k_1} \left[1 + \frac{k_2}{2k_1} (k_1 - 1 + \sqrt{\Delta}) \right] \\ &= \frac{1 + k_1 - \sqrt{\Delta}}{2k_1} + \frac{k_2}{4k_1^2} [k_1^2 - 1 + 2\sqrt{\Delta} - \Delta] \end{aligned}$$

elde edilir. Yukarıdaki eşitlikte t 'ye bağlı sadece Δ terimi bulunmaktadır diğer terimler ise sabit olmaktadır. Buna göre yeniden düzenlemeler yapılırsa,

$$\begin{aligned} F_{\alpha_2} F_{\alpha_1}^{-1}(t) &= \frac{1 + k_1}{2k_1} + \frac{k_2(k_1^2 - 1)}{4k_1^2} + ((1 + k_1)^2 - 4k_1 t)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{k_2 - k_1}{2k_1^2} \right) \\ &\quad - \frac{k_2}{4k_1^2} ((1 + k_1)^2 - 4k_1 t) \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Bu fonksiyon, $\lim_{y \rightarrow \infty} (1 - F_Y(y)) = 0$ olmasından dolayı $y \rightarrow \infty$ durumu dışında $\forall y \in D_F$ için, $[0, 1]$ üzerinde tanımlı olmaktadır. Aynı zamanda $(0, 1)$ aralığı üzerinde t 'nin sürekli bir fonksiyonudur. Bu nedenle, konveks olup olmadığını, Önerme 2.2.3' e göre karar vermek mümkün olmaktadır:

$$\frac{dF_{\alpha_2} F_{\alpha_1}^{-1}(t)}{dt} = \frac{1}{2} ((1 + k_1)^2 - 4k_1 t)^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{k_2 - k_1}{2k_1^2} \right) (-4k_1) - \frac{k_2}{4k_1^2} (-4k_1),$$

$$\frac{d^2 F_{\alpha_2} F_{\alpha_1}^{-1}(t)}{dt^2} = -\frac{1}{4} ((1 + k_1)^2 - 4k_1 t)^{-\frac{3}{2}} \left(\frac{k_2 - k_1}{2k_1^2} \right) (-4k_1)^2.$$

$k_2 - k_1 = (\alpha_2 - \alpha_1)(1 - F_Y(y))$ olmak üzere, $\alpha_1 > \alpha_2$ olduğundan bu ifade $\forall y \in D_F$ için negatif olmaktadır. Dolayısı ile, ikinci türev her y değeri için tüm t ' lerde pozitif olmaktadır. Bu ise $F_{\alpha_2} F_{\alpha_1}^{-1}(t)$ fonksiyonunun $(0, 1)$ üzerinde konveks olduğunu gösterir. O halde FGM ailesi için, $\alpha_1 > \alpha_2$ olmak üzere $F_{\alpha_2} \stackrel{c}{\succ} F_{\alpha_1}$ gibi bir konvekslik sıralamasının yapılabildiği söylenebilir.

Önerme 4.6.2 FGM ailesinden olan herhangi bir F dağılım fonksiyonu için $\alpha < 0$ ise, $F_{X|Y} \stackrel{c}{\succ} F_X$ dir.

İspat: F_X sürekli olduğundan, $F_X(x) = t$ dönüşümü yapıldığında, $x = F_X^{-1}(t)$ tanımlıdır. Buna göre, $\phi_y(t)$ fonksiyonu,

$$\begin{aligned}\phi_y(t) &= F_X F_X^{-1}(t) [1 + \alpha(1 - F_Y(y))(1 - F_X F_X^{-1}(t))] \\ &= t[1 + \alpha(1 - F_Y(y))(1 - t)]\end{aligned}$$

biçiminde tanımlı olup, $\forall y \in D_F$ için $(0, 1)$ üzerinde t ' nin sürekli bir fonksiyonudur. Buna göre, birinci ve ikinci türevleri,

$$\begin{aligned}\frac{d\phi_y(t)}{dt} &= 1 + \alpha(1 - F_Y(y))(1 - t) - t\alpha(1 - F_Y(y)), \\ \frac{d^2\phi_y(t)}{dt^2} &= -2\alpha(1 - F_Y(y))\end{aligned}\tag{4.6.6}$$

biçiminde bulunur. Yine Önerme 2.2.3' e göre, $\alpha < 0$ olmak üzere $\forall y \in D_F$ için, $-2\alpha(1 - F_Y(y)) \geq 0$ olmaktadır. Dolayısı ile $\phi_y(t)$ konveks bir fonksiyon olup $F_{X|Y} \stackrel{c}{\succ} F_X$ gibi bir sıralamanın yapılabildiği açıktır. Bunun sonucu olarak, $\alpha < 0$ için FGM dağılımının ve dolayısı ile ilgili rasgele değişkenlerin X ve Y 'nin $NRB(X | Y)$ sergilediği söylenebilir.

Benzer olarak, $\alpha > 0$ için (4.6.6) ifadesinden görüleceği gibi, $\forall y \in D_F$ için $\frac{d^2\phi_y(t)}{dt^2} < 0$ olacağından $\phi_y(t)$ konkav bir fonksiyon olmaktadır. O halde, $\psi_y(t) = \phi_y^{-1}(t) = F_X F_{X|y}^{-1}(t)$ biçiminde tanımlanan fonksiyonun konveks bir fonksiyon olması gerekmektedir. Önerme 4.6.1' de (4.6.5) eşitliğinden,

$$\psi_y(t) = \frac{1 + \alpha(1 - F_Y(y)) - \sqrt{(1 + \alpha(1 - F_Y(y)))^2 - 4\alpha(1 - F_Y(y))t}}{2\alpha(1 - F_Y(y))}$$

biçiminde olduğu kolayca görülebilir. Bu ifadenin ikinci türevi,

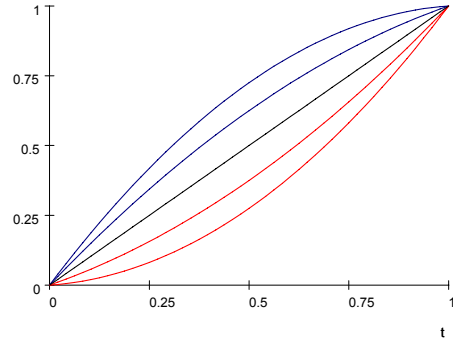
$$\frac{d^2\psi_y(t)}{dt^2} = 2\alpha(1 - F_Y(y)) \left[(1 + \alpha(1 - F_Y(y)))^2 - 4\alpha(1 - F_Y(y))t \right]^{-\frac{3}{2}}$$

biçiminde olmaktadır. $\alpha > 0$ için $\frac{d^2\psi_y(t)}{dt^2} > 0$ olup, Önerme 2.2.3' e göre, $\psi_y(t)$ konveks olduğu sonucuna varmak mümkündür. Bunun sonucu olarak, $F_X \stackrel{c}{\sim} F_{X|y}$ olduğu söylenebilir. Böyle bir sıralamanın varlığı, FGM dağılımının $\alpha > 0$ için $PRB(X | Y)$ anlamında bir bağımlılığı gösterdiğini söylemektedir.

Bunu analitik olarak görebilmek amacı ile söz konusu FGM dağılımı için, kolaylık olması bakımından, marjinaleri $U(0, 1)$ olan dağılım alınmıştır:

$$F(x, y) = xy [1 + \alpha(1 - x)(1 - y)] \quad 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$$

$\alpha \in [-1, 1]$ olmak üzere, $\phi_y(t) = t [1 + \alpha(1 - t)(1 - y)]$ biçiminde tanımlanır. Şekil 4.1' de, y ' nin bazı değerlerinde ϕ_y eğrileri elde edilmiştir: $\alpha = 1$ için ϕ_y eğrileri, diagonalin üstünde konkav olup, $\alpha = -1$ alındığında ise ϕ_y eğrileri diagonalin altında konveks olmaktadır.



Şekil 4.1. Marjinalleri Düzgün olan FGM dağılımı için konveks sıralama

4.7 Gumbel' in İki Değişkenli Üstel Dağılımı için Konveks Sıralama

Ortak dağılım fonksiyonu,

$$F(x, y) = 1 - e^{-x} - e^{-y} + e^{-(x+y+\theta xy)}, \quad x, y > 0, \quad 0 \leq \theta \leq 1$$

biçiminde olup, marjinal dağılımları ise,

$$F(x) = 1 - e^{-x}, \quad x > 0 \quad \text{ve} \quad F(y) = 1 - e^{-y}, \quad y > 0$$

biçiminde olmaktadır (Kotz *et al.* 2000).

$t \in [0, 1]$ olmak üzere, $F_X^{-1}(t) = -\ln(1-t)$ mevcuttur. Söz konusu dağılım için koşullu dağılım fonksiyonu ise,

$$F_{X|y}(x) = \frac{1 - e^{-x} - e^{-y} + e^{-(x+y+\theta xy)}}{1 - e^{-y}} \quad (4.7.1)$$

olarak tanımlanmaktadır. (4.7.1) ifadesine göre, $\phi_y(t)$ fonksiyonu aşağıdaki gibi olmaktadır:

$$\phi_y(t) = \frac{t - e^{-y} + e^{-y}(1-t)^{1+\theta y}}{1 - e^{-y}} \quad (4.7.2)$$

$(0, 1)$ üzerinde $\forall y \in D_F$ için sürekli. $(4.7.2)'$ nin ikinci türevi,

$$\frac{d^2\phi_y(t)}{dt^2} = \frac{(1 + \theta y)\theta y(1-t)^{\theta y-1}e^{-y}}{1 - e^{-y}} \quad (4.7.3)$$

biçimindedir. $\forall y \in D_F$ için $(4.7.3)$ ifadesi pozitif olmaktadır. Önerme 2.2.3' ten $\phi_y(t)$ 'nin konveks olduğu söylenebilir. O halde, bu aile için de $F_{X|Y} \stackrel{c}{\succ} F_X$ sıralamasını yazmakta bir sakınca yoktur. Buna göre, X ile Y rasgele değişkenleri NRB sergilemektedirler.

4.8 İki Boyutlu Keyfi Dağılım için Konveks Sıralama

Aşağıda, FGM dağılım ailesi gibi özel dağılımların dışında, keyfi olarak belirlenen iki boyutlu sürekli dağılımlar için, konveks sıralama yolu ile bağımlılık yapısının ortaya çıkarılmasına ilişkin iki tane örnek verilmiştir. Bu örneklerden birincisi, bağımlılığı çıkarabildiği duruma ikincisi ise çıkaramadığı duruma örnektir.

Örnek 4.8.1 Marjinalleri $U(-1, 1)$ olan (X, Y) rasgele değişken çifti için ortak dağılım fonksiyonu,

$$F(x, y) = \frac{y\pi^2x + \sin(\pi x)\sin(\pi y) + \pi^2x}{4\pi^2} + \frac{y+1}{4}, \quad -1 \leq x, y \leq 1 \quad (4.8.1)$$

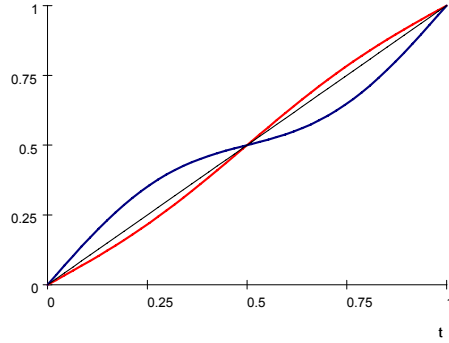
biçiminde verilsin. Marjinal dağılımları ise, $F_X(x) = \frac{x+1}{2}$ ve $F_Y(y) = \frac{y+1}{2}$ biçiminde tanımlıdır. Buna göre, $Y \leq y$ verilmişken, X rasgele değişkeninin koşullu dağılım fonksiyonu,

$$F_{X|y}(x) = \frac{1}{2} \frac{y\pi^2x + \sin(\pi x)\sin(\pi y) + \pi^2x}{\pi^2(y+1)} + \frac{1}{2}$$

biçiminde olacaktır. $t \in [0, 1]$ için, $F_X^{-1}(t) = 2t - 1$ yardımı ile,

$$\phi_y(t) = \frac{1}{2} \frac{y\pi^2(2t-1) + \sin(\pi(2t-1))\sin(\pi y) + \pi^2(2t-1)}{\pi^2(y+1)} + \frac{1}{2} \quad (4.8.2)$$

eşitliğini bulmak mümkündür. $\phi_y(t)$ fonksiyonu ne konvek ne de konkavdır. Bunu Şekil 4.2' den de görmek mümkündür: $y = \frac{1}{2}$ için $\phi_y(t)$ kırmızı renkli eğri ile, $y = \frac{-1}{2}$ için $\phi_y(t)$ için mavi renkli eğri ile, $\phi_y(t) = t$ ise kesikli çizgilerle gösterilmiştir.



Şekil 4.2. $\phi(t)$ eğrileri

Buna göre, $F_{X|y}$ ile F_X arasında global bir " $\stackrel{c}{\sim}$ " sıralaması geçerli olmaktadır. Dolayısı ile, global bir bağımlılık yapısının ortaya çıkarılması mümkün değildir. Gerçekten de, (4.8.1)' de verilen dağılım için bağımlılık türünün belirlenmesi zor olmaktadır.

Örnek 4.8.2 (X, Y) rasgele değişken çifti için ortak dağılım fonksiyonu,

$$F(x, y) = \frac{y\pi^2x + \sin(\pi x)\sin(\pi y)}{\pi^2}, \quad 0 \leq x, y \leq 1 \quad (4.8.3)$$

biçiminde verilsin. Buna göre, marjinal dağılım fonksiyonları $F_X(x) = x$ ve $F_Y(y) = y$ gibi elde edilir. $Y \leq y$ verilmişken, X rasgele değişkeninin koşullu dağılım fonksiyonu,

$$F_{X|Y}(x) = \frac{y\pi^2x + \sin(\pi x)\sin(\pi y)}{\pi^2y}$$

olup, $F_X(x) = x = t$ dönüşümü ile,

$$\phi_y(t) = \frac{y\pi^2t + \sin(\pi t)\sin(\pi y)}{\pi^2y} \quad (4.8.4)$$

elde edilebilir. Görüldüğü gibi bu fonksiyon her bir $y \in (0, 1)$ için t 'nin tüm noktalarında süreklidir. Dolayısı ile türevlenebilir olduğundan, (4.8.4) ifadesinin ikinci türevinin mevcut olması koşulu ile bu türev,

$$\frac{d^2\phi_y(t)}{dt^2} = -\frac{\sin(\pi t)\sin(\pi y)}{y} \quad (4.8.5)$$

biçiminde bulunur. $y \in (0, 1)$ ve $t \in [0, 1]$ için, $\sin(\pi y)$ ve $\sin(\pi t)$ ifadeleri pozitif olduğundan $\frac{d^2\phi_y(t)}{dt^2} \leq 0$ olacaktır. Önerme 2.2.3' ten, $\phi_y(t)$ konkav olduğu söylenebilir, yani $F_X \stackrel{c}{\succsim} F_{X|Y}$ sıralaması geçerlidir. Bu durumda, X ile Y arasında TP_2 anlamında bir bağımlılık olduğu sonucu ortaya çıkmaktadır.

4.9 Konveks Sıralı Aile Üzerinde Bir Bağımlılık Ölçütü

$\stackrel{c}{\succsim}$ sıralamasının, bir bağımlılık sıralaması sergilediği gibi, bağımsızlığı da ortaya çıkardığı daha önce işaret edilmişti. $(\mathcal{F}_c(F_X, F_Y), \stackrel{c}{\succsim})$ konveks sıralı ailesi üzerinde, bağımlılığın derecesinin de ne olduğunu ölçmek önemli olmaktadır. Söz konusu $\mathcal{F}_c$ ailesi, marjinalleri belli sürekli dağılımlar ailesini gösterdiğine göre, bu aile üzerinde tanımlanan ölçüt ister istemez yerel (local) bağımlılık ölçütü olmaktadır.

Tek boyutlu uzaylara dönülecek olunursa, $[0, 1] \times [0, 1]$ birim karesi üzerinde, birinci diagonalin altında kalan alan ile, $\phi(t)$ eğrisi altında kalan

alanın büyüklüğü ile ilgilenmek yararlı olabilir. Buna göre, $\phi(t) = FG^{-1}(t)$ konveks fonksiyonunun $(0, 1)$ üzerinde integrali, sıfıra ne kadar yakınsa F dağılımı G dağılımından stokastik anlamda o kadar küçük olmaktadır. Aksine, bu alan $\frac{1}{2}$ ' ye ne kadar yakın ise, F dağılımı G dağılımına o kadar yakın olmaktadır. Dağılımların birbirine eşit olduğunu ancak, $\phi(t) = FG^{-1}(t) = t$ durumunda söylemek mümkündür. Şekil 3.1' e bakılırsa, dağılımların stokastik olarak bir birine yakınlığının ölçütünü,

$$\int_0^1 (t - \phi(t)) dt \quad (4.9.1)$$

biçiminde tanımlamak mümkün olmaktadır. (4.9.1) ifadesi ile verilecek olan ölçütün normalizasyonu yapıldığında,

$$\Pi_{(F,G)} = \frac{\int_0^1 (t - \phi(t)) dt}{\int_0^1 t dt} = 1 - 2 \int_0^1 \phi(t) dt \quad (4.9.2)$$

gibi bir ölçüt elde edilebilir. $\phi(t)$ konveks ve pozitif tanımlı olduğundan dolayı $0 \leq \phi(t) \leq t$ arasında değerler alacaktır. O halde, $\Pi_{(F,G)}$ pozitif tanımlı olup değerlerini $[0, 1]$ arasında almaktadır:

$$\Pi_{(F,G)} = 0 \iff F = G \text{ hemen hemen her yerde } (hhhy),$$

$$\Pi_{(F,G)} = 1 \iff F \text{ } hhhy \text{ } 0.$$

(4.9.2) ifadesinin başka türlü de yorumu yapılabilir: X değişkeni G gibi bir dağılıma, Y değişkeni de F gibi bir dağılıma sahip olsun. Bu durumda,

$$1 - 2 \int_0^1 \phi(t) dt = 1 - 2 \int_0^1 FG^{-1}(t) dt = 1 - 2 \int_{-\infty}^{\infty} F(x) dG(x)$$

$$= 1 - 2E_G(F(X)) = 1 - 2P(Y < X)$$

eşitliği sağlanmaktadır. Buna göre, $F = G$ ise, $P(Y < X)$ ve $P(X < Y)$ olasılıkları eşit olacaktır. Bu ise X ve Y 'nin stokastik anlamda eşit olduğu anlamına gelmektedir.

Bu düşüncenin iki boyutlu uzaya taşınarak, bağımlılığın derecesinin ölçülebilmesi için aşağıdaki gibi bir yöntemi önermek mümkündür:

$\phi_y(t) = F_{X|y}F_X^{-1}(t)$ fonksiyonu $\forall y \in D_F$ için $(0, 1)$ üzerinde konveks olduğu varsayalım. Böylece, Şekil 4.2' deki gibi bir durum söz konusu olmayacaktır. Çünkü $\phi_y(t)$ eğrileri hem F_X 'in hem de F_Y 'nin destek kümelerine bağlı olarak, $\phi_y(t) = t$ doğrusunun üzerine çıkamayacaktır; en fazla $\phi_y(t) = t$ olabilir, üstelik diagonalin altında $(0, 1)$ üzerinde her bir $y \in D_F$ için konveks olmak zorundadır. Bunun yanısıra, Lemma 4.2.1' e göre, $\phi_y(t)$ y 'nin azalmayan bir fonksiyonu idi. Bağımlılık halinde $y \rightarrow -\infty, (\infty)$ durumları konveksliğin uç noktaları idi. $\phi_y(t)$ 'nin konvekslik bakımından en üstün olduğu durum $y \rightarrow -\infty$ iken, konveksliğin artık lineerlik olacağı $\phi_y(t) = t$ durumu $y \rightarrow \infty$ olduğundadır yani en konvekslik bakımından en küçük konvekslik olmaktadır. $\phi_y(t) = t$ eğrisinin üzerinde, konvekslik bozulmaya başlayacaktır. Verilen her y için, $\phi_y(t)$ eğrileri bu uç noktaların arasında kalmaktadır. Yine Lemma 4.2.1' nin bir sonucu olarak, $\forall y \in \mathcal{R}$ için,

$$\int_0^1 (t - \phi_y(t)) dt \tag{4.9.3}$$

ifadesi y 'nin azalan bir fonksiyonu olmaktadır. Buna göre (4.9.3) ifadesi $y \rightarrow -\infty$ iken en büyük değerine $y \rightarrow \infty$ iken en küçük değerine ulaşacaktır. Bağımlılık ölçütü tanımlanmaya çalışıldığına göre, doğrusallıktan

ayrılmanın bir cezası olmalı, bu nedenle en büyük alana en küçük ağırlık, en küçük alana ise en büyük ağırlık, Y' nin marjinal olarak dağılışıma göre verilmelidir. Buna göre,

$$0 \leq \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_0^1 (t - \phi_y(t)) dt \right] dF_Y(y) \leq \int_0^1 \left[\int_{-\infty}^{\infty} t dt \right] dF_Y(y) \quad (4.9.4)$$

eşitsizliği her zaman geçerli olmaktadır. (4.9.4) eşitsizliğine dayalı olarak ölçüt şu şekilde tanımlanabilir:

$$\Pi^c = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_0^1 (t - \phi_y(t)) dt \right] dF_Y(y)}{\int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_0^1 t dt \right] dF_Y(y)} = 1 - 2 \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^1 \phi_y(t) dt dF_Y(y) \quad (4.9.5)$$

Π^c ölçütü, $\phi_y(t) = F_{X|Y} F_X^{-1}(t)$ ' nin konveksliğinin bir derecesini göstermektedir, yani koşullu dağılım ile marjinal dağılım arasında konveks sıralama ilişkisine göre lineerlikten ne kadar ayrı olduğunun bir ölçüsüdür denilebilir. İşin içine marjinal dağılımlar girdiğine göre, aynı zamanda, $\left(\mathcal{F}_c, \overset{c}{\sim} \right)$ sıralı ikilisi üzerinde bir bağımlılık ölçütü olarak da görülmesi mümkündür. Buna göre,

$$\Pi^c = 0 \iff F_{X|Y} = F_X,$$

$$\Pi^c = 1 \iff \forall y \in D_F \text{ için } \phi_y(t) = 0$$

gibi yorum yapılabilir. (4.9.5) eşitliğini aşağıdaki gibi ifade etmek de mümkündür:

$$\Pi^c = 2E_T \left[E_{F_Y} \{ (T - \phi_y(T)) \} \right] \quad (4.9.6)$$

Burada $T \sim U(0, 1)$ ve F_Y ' den bağımsızdır.

5. TARTIŞMA ve SONUÇ

5.1 Sonuç 1 $\mathcal{F}_c$ üzerinde “ $\overset{c}{\sim}$ ” ve “ $\leq$ ” kısmi sıralamalarının her ikisi birden tanımlı olsunlar. Ayrıca $\phi_{y'y}(t)$ konveks bir fonksiyon olsun. Bu durumda, Tanım 2.1.6’ ya göre, $(\mathcal{F}_c, \overset{c}{\sim})$ ve $(\mathcal{F}_c, \leq)$ sıralı ikilileri izomorfiktir. Buna göre,

$$\forall y \in D_F \text{ için } F_{X|y} \overset{c}{\sim} G_{X|y} \iff F(x, y) \leq G(x, y)$$

gibi bir sonuç ortaya çıkmaktadır. $F, G \in \mathcal{F}_c$ olmak üzere, her bir $y \in D_F$ için $F_{X|y} \overset{c}{\sim} G_{X|y}$ geçerli olsun. Buna göre, Lemma 3.1.1 (vii) özelliğinden $F_{X|y} G_{X|y}^{-1}(t) \leq t$ sağlanır. $G_{X|y}(x) = t$ alınırsa, $F_{X|y}(x) \leq G_{X|y}(x)$ elde edilir. Dolayısı ile $F_{X|y} \overset{c}{\sim} G_{X|y} \implies F(x, y) \leq G(x, y)$ sağlanır. Tersine $F(x, y) \leq G(x, y)$ geçerli olsun, “ $\overset{c}{\sim}$ ” ve “ $\leq$ ” nin her ikisinin de tanımlı olması, “ $\leq$ ” ilişkisine göre yapılan sıralamanın aynı zamanda “ $\overset{c}{\sim}$ ” ilişkisine göre yapılan sıralamayı gerektirdiği açıktır. Öyle ki, $F_{X|y}(x) \leq G_{X|y}(x)$ ve $G_{X|y}^{-1}(t) = x$ alınırsa, $F_{X|y} G_{X|y}^{-1}(t) \leq t$ elde edilir. Bu ise $F_{X|y} \overset{c}{\sim} G_{X|y}$ sıralamasının yapılabileceğini gösterir.

5.2 Sonuç 2 $(\mathcal{F}_c, \overset{c}{\sim})$ konveks sıralı ailesi için, $F, G \in \mathcal{F}_c$ olmak üzere,

Sonuç 1 göz önüne alınır ise, her bir $y \in D_F$ için $F_{X|y} \overset{c}{\sim} G_{X|y} \implies F \prec\prec G$ dir. Dolayısı ile Alt Bölüm 4.9’ da verilen Π^c ölçütü aynı zamanda F ve G arasındaki uyum ölçütünü göstermektedir.

5.3 Sonuç 3 $(\mathcal{F}_c, \overset{c}{\sim})$ konveks sıralı ailesi için, $F, G \in \mathcal{F}_c$ olmak üzere,

ϕ_y ya konvektir ya da konkavdır. Dolayısı ile ya $F_{X|y} \overset{c}{\sim} G_{X|y}$ sıralaması ya da $G_{X|y} \overset{c}{\sim} F_{X|y}$ sıralaması geçerlidir. Bu durumda “ $\overset{c}{\sim}$ ” ilişkisi, Tanım

2.1.7' deki A3 aksiyomunu sağlaması nedeni ile basit sıralama özelliğini de taşımaktadır.

İkinci durum ise, “ $\overset{c}{\sim}$ ” sıralamasının tam sıralama özelliklerini taşıması durumudur; $\mathcal{F}_c \subset F(F_X, F_Y)$ olsun, öyle bir $F_{X|Y} \in F(F_X, F_Y)$ vardır ki, $\mathcal{F}_c$ ailesinden olan her bir $G_{X|Y}$ dağılımı için $F_{X|Y} \overset{c}{\sim} G_{X|Y}$ geçerli ise, $F_{X|Y} = F_{X|Y}^-$ (Fréchet alt sınırı ile tanımlanan koşullu dağılım) dir. Bu durumda, “ $\overset{c}{\sim}$ ” sıralaması tam (iyi) sıralama olmaktadır.

5.4 Sonuç 4 F ve G sürekli d.f.’ ları olduğunda, tek boyutta verilen “ $\overset{c}{\sim}$ ” sıralaması, negatif olmayan rasgele değişkenler için, Tanım 2.1.8’ de verilen stokastik sıralamayı gerektiren bir yapıya sahiptir. Öyle ki, $F \overset{c}{\sim} G$ olması, $\overline{F} \geq \overline{G}$ olmasını gerektirmektedir. Buna göre,

$$E[Y] = \int_0^{\infty} (1 - G(y)) dy,$$

$$E[X] = \int_0^{\infty} (1 - F(x)) dx$$

integrallerinin varlığı altında, $G(y) = u$ dönüşümü yapılırsa, destek kümeleri aynı olduğundan,

$$E[Y] = \int_0^1 (1 - u) dG^{-1}(u),$$

$$E[X] = \int_0^1 (1 - FG^{-1}(u)) dG^{-1}(u)$$

biçiminde yazılabilir. Lemma 3.1.1 gereği, $FG^{-1}(u)$ konveks ise, $\forall u \in [0, 1]$ için $FG^{-1}(u) \leq u$ olacağından,

$$E[Y] \leq E[X] \implies Y \preceq^{st} X$$

gerektirmesi yazılabilir buradan da,

$$F \stackrel{c}{\preceq} G \implies Y \preceq^{st} X$$

gerektirmesi elde edilmiş olur. Bu sonucu Alt Bölüm 2.3' te verilen tek boyutlu sıralamalar için verilen gerektirmelere eklemek mümkün olabilir.

5.5 Sonuç 5 $\{F_\theta, \theta \in \Theta\}$ ailesi θ parametresine göre konveks sıralı aile olsun. Alt Bölüm 3.2' de verilen konveks sıralı aileler için aşağıdaki gibi bir durum söz konusudur;

$$\begin{array}{ll} H_0 : X \sim F_{\theta_2} & H_0 : \theta = \theta_2 \\ & \text{ya da} \\ H_a : X \sim F_{\theta_1} & H_a : \theta = \theta_1 \end{array}$$

$\theta_2 > \theta_1$ için testi sınanmak istensin. Neymann-Pearson Test Prosedürüne göre, test istatistiği,

$$\Upsilon(x) = \begin{cases} 1, & x < c \\ 0, & x > c \end{cases}$$

olmaktadır. c sabiti, birinci tür hata denilen α değerine göre belirlenmek istensin. Buna göre,

$$P(H_0 | H_0) = \alpha = P_{\theta_2}(x < c) = F_{\theta_2}(c)$$

eşitliği yazılabilir. c sabiti, yukarıdaki eşitlikten çekilirse $c = F_{\theta_2}^{-1}(\alpha)$ olarak bulunur. Testin gücü için,

$$P(H_0 | H_1) = \gamma = P_{\theta_1}(x < c) = F_{\theta_1}(F_{\theta_2}^{-1}(\alpha)) = \phi^{-1}(\alpha)$$

eşitliğine ulaşılmaktadır. tanımından dolayı, $\phi(\alpha)$ konveks bir fonksiyondur. Dolayısı ile, $\phi^{-1}(\alpha)$ konkav bir fonksiyon olmaktadır. Verilmiş bir α değeri için, gücü enbüyükleyen değer $\phi^{-1}(\alpha)$ olmaktadır. Literatürde bu eğriye konsantrasyon fonksiyonu denilmektedir (Lehmann 1986).

5.6 Sonuç 6 “ $\overset{c}{\succsim}$ ” sıralamasının, Alt Bölüm 2.7’ de verilen, “ $\prec_{TP_2}$ ”, “ $\prec_{PRB}$ ” ve literatürde tanımlı olan daha birçok bağımlılık sıralaması türleri ile olan ilişkilerini de vermek mümkün olabilir. Ancak “ $\prec_{PKB}$ ” ve son yıllarda önerilen “ $\prec_{SOBAB}$ ” sıralamaları dikkati çektiğinden bu sıralamalar arasında karşılaştırma yapılmıştır. Burada asıl amacın, $\left(\mathcal{F}_c, \overset{c}{\succsim}\right)$ ikilisi üzerinde konveks sıralamanın bağımlılık yapılarını ortaya çıkarıp çıkarmadığını tartışmak olduğunu gözden kaçırmamak gerekir.

5.7 Sonuç 7 $\left(\mathcal{F}_c, \overset{c}{\succsim}\right)$ sıralı ikilisi üzerinde, “ $\overset{c}{\succsim}$ ” sıralamasının, TP_2 anlamında bağımlılığı da gösterdiği, Alt Bölüm 4.2.3 ve Önerme 4.3.1 nedeni ile söylenebilir. Hiç kuşkusuz, bazı yazarlar $[0, 1] \times [0, 1]$ birim karesi üzerinde, birinci köşegenin üst kısmında konveksliği kullanarak TP_2 bağımlılığını elde etmişlerdir. Bu çalışmada konvekslik kavramı kullanılarak marjinalleri belli sürekli dağılımlar ailesi için ilk kez bir sıralama tanımı yapılmıştır. Buna göre, $\phi_{y'y}(t)$ ’nin konveks olması TP_2 anlamında bağımlılığı göstermektedir. Bu durum literatürde karışıklığa yol açmaması için (4.3.7) denkliği ile verilmiştir.

5.8 Sonuç 8 Tanım 2.7.4’ te, Averous ve Bernadet (2000) tarafından önerilen $\prec_{SOBAB}$ sıralaması, Önerme 4.4.1’ in sonucu olarak, $\left(\mathcal{F}_c, \overset{c}{\succsim}\right)$ ailesi üzerinde “ $\overset{c}{\succsim}$ ” ilişkisine göre, gerektirme bakımından zayıf kalmaktadır.

5.9 Sonuç 9 Önerme 4.2.1’ de verilen $\phi_{yy'}$ fonksiyonu, eğer konkav ise, TP_2 ve PRB anlamında bağımlılıkları, konveks ise, zayıf anlamda NRB ’yi gösterdiği söylenebilir. $\left(\mathcal{F}_c, \overset{c}{\succsim}\right)$ kısmi sıralı ailesi için (2.6.6) da verilen

TP_2 ve PRB yi bağımlılık türlerini $\phi_{yy'}$ dönüşümü ortaya çıkmaktadır denilebilir. (Hatırlanacağı gibi $PKB(NKB)$ türündeki bağımlılık ϕ_y nin konkav (konveks) olması durumunda ortaya çıkmakta idi).

5.10 Sonsöz $\mathcal{F}_c$ sürekli dağılımlar ailesi üzerinde tanımlanan “ $\overset{c}{\sim}$ ” sıralamasının, kesikli dağılımlar ailesi için de kullanılabilmesi için şöyle bir yolu önermek mümkündür; λ Lebesgue ölçüsüne göre ya da bu dağılım ailesindeki dağılımlara hakim olan (domine eden) başka bir atomsuz ölçüye göre, söz konusu kesikli dağılımların regülarizasyonu yapılarak, konveks sıralamanın regülarize edilmiş uzayda tanımlanıp tanımlanamayacağını araştırmaktır. Kendi başına apayrı bir çalışma ve tartışma konusu gerektirmektedir.

Bu nedenle, iki boyutlu dağılımlar için konveks sıralamanın sadece $\mathcal{F}_c$ ailesi üzerinde bir bağımlılık sıralaması gösterdiği ve aynı zamanda da $\left(\mathcal{F}_c, \overset{c}{\sim}\right)$ konveks sıralı ailesi üzerinde bazı bağımlılık türlerini saptayabilen bir yapıya sahip olduğu, çalışmada tartışılmış, buna bağlı olarak sonuçları da gösterilmiştir. $\mathcal{F}_c$ ailesi için tanımlanan “ $\overset{c}{\sim}$ ” sıralamasının, bağımlılık yapılarının belirlenmesinde kullanılması amacıyla, literatürde yerini alması umulmaktadır.

KAYNAKLAR

- Averous, J. and Dortet-Bernadet, J.L. 2000. *LTD* and *RTI* dependence orderings. The Canadian Journal of Statistics. Vol: 28, No: 1, 151-157.
- Barlow, R. and Proschan, F. 1975. Statistical Theory of Reliability and Life Testing. Holt, Rinehart and Winston, New York.
- Capéraà, P. and Genest, C. 1990. Concepts de dépendence et ordres stochastiques pour des lois bidimensionnelles. The Canadian Journal of Statistics. Vol: 18, No: 40; 315-326.
- Chan, W., Proschan, F. and Sethuraman, J. 1985. Convex ordering among functions, with applications to reliability and mathematical statistics. Topics in Statistical dependence (Somerset, PA, 1987), 121-134. IMS Lecture Notes Monogr. Ser., 16 Inst. Math. Statistics, Hayward, CA, 1990.
- Courant, R. 1964. Differential and Integral Calculus. Interscience Publishers (John Wiley and Sons), New York.
- Dudley, R.M. 1989. Real Analysis and Probability. Wadsworth. Inc., 436s., Belmont, California.
- Eggleston, H.G. 1958. Convexity. Cambridge Univ. Press, New York.
- Esary, J.D. and Proschan, F. 1972. Relationships among some concepts of bivariate dependence. The Annals of Mathematical Statistics, 43 (2); 651-655.
- Fréchet, M. 1951. Sur les tableaux de corrélation dont les marges sont donnés. Ann. Univ. de Lyon, 14, 53-77.
- Hardy, G.H., Littlewood, J.E. and Pólya, G. 1934. Inequalities. Cambridge at The University Press.
- Karlin, S. 1968. Total Positivity I. Academic Press, San Diego, California.
- Kimeldorf, G. and Sampson, A.R. 1987. Positive dependence orderings. Ann. Inst. Stat. Math. 39 (A); 113-128.

- Kotz, S., Balakrishnan, N. and Johnson, N.L. 2000. Multivariate Continuous Distributions. Second edition, Wiley, New York.
- Lehmann, E.L. 1955. Ordered families of distributions. The Annals of Mathematical Statistics, 26; 399-419.
- Lehmann, E.L. 1966. Some Concept of Dependence. Annals of Mathematical Statistics, 37; 1137-1153.
- Lehmann, E.L. 1986. Testing Statistical Hypotheses. 2nd edition. Wiley, New York.
- Mari, D.D. and Kotz, S. 2001. Correlation and Dependence. Imperial College Press, London.
- Marshall, A.W., Olkin, I. and Proschan, F. 1967. Monotonicity of ratios of means and other applications of majorization. Inequalities, ed. Oved Shisha. New York: Academic Press, 177-190.
- Marshall, A.W. and Olkin, I. 1979. Inequalities: Theory of Majorization and its Applications. Academic Press, New York.
- Rinott, Y. and Pollack, M. 1980. A stochastic ordering induced by a concept of positive dependence and monotonicity of asymptotic test sizes. Ann. Statist. Vol 8; 190-198.
- Rényi, A. 1959. On measures of dependence. Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae, 10; 441-451.
- Scarsini, M. 1998. Multivariate convex orderings, dependence and stochastic equality. J. Appl. Prob., 35; 93-103.
- Schriever, B.F. 1987. An ordering for positive dependence. Ann. Statist., 15; 108-1214.
- Shaked, M. and Shanthikumar, J. 1994. Stochastic Orders and Their Applications. Boston: Academic Press.
- Silverman, A. 1985. Calculus with Analytic Geometry. Prentice-Hall, Inc., London.
- Tchen, A. 1980. Inequalities for distributions with given marginals. Ann. Probab., 8; 814-827.

- Van Zwet, W.R. 1964. Convex Transformations of Random Variables. Mathematical Centre Tracts 7, Amsterdam: Mathematisch Centrum.
- Yanagimoto, T. and Okamoto, M. 1969. Partial orderings of permutations and monotonicity of a rank correlation statistic. Ann. Inst. Statist., 21; 489-506.
- Yanagimoto, T. 1990. Dependence ordering in statistical models and other notions. Topics in Statistical Dependence, IMS Lecture Notes Monograph Series, Vol: 16, Ed. H.W. Block et al.

ÖZGEÇMİŞ

1975 yılında Ankara’ da doğdu. İlk, orta ve lise öğrenimini Ankara’ da tamamladı. 1993 yılında girdiği, Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi İstatistik Bölümü’ nden, 1997 yılında İstatistikçi ünvanı ile mezun oldu. Aynı yıl, A.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü İstatistik Anabilim Dalı’ nda Yüksek Lisans öğrenimine başladı. 2000 yılında İstatistik Uzmanı olarak derecesini aldı. Aynı Enstitüye bağlı olarak, 2000 yılında doktora öğrenimine başladı.

İlgi alanları, yoğunlaşma ve seyrelme fonksiyonları, bağımlılık yapıları, bağımlılık sıralamaları gibi konulardır.

Kasım 1999 tarihinden bu yana, A.Ü.F.F. İstatistik Bölümü’ nde Araştırma Görevlisi olarak görev yapmaktadır.