

**ANKARA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

KUANTUM KORELASYONLAR VE KLASİK KORELASYONLAR

Adem TÜRKMEN

FİZİK ANABİLİM DALI

**ANKARA
2012**

Her hakkı saklıdır

TEZ ONAYI

Adem

TÜRKMEN tarafından hazırlanan “**Kuantum Korelasyonlar ve Klasik Korelasyonlar**” adlı tez çalışması 12.09.2012 tarihinde aşağıdaki juri tarafından oy birliği ile Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Fizik Anabilim Dalında **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Danışman: Prof. Dr. Abdullah VERÇİN

Juri Üyeleri:

Başkan: Prof. Dr. Satılmış ATAĞ
Ankara Üniversitesi, Fizik Anabilim Dalı

Üye: Prof. Dr. Metin ÖNDER
Hacettepe Üniversitesi Fizik Mühendisliği Anabilim Dalı

Üye: Prof. Dr. Abdullah VERÇİN
Ankara Üniversitesi, Fizik Anabilim Dalı

Yukarıdaki sonuca onaylarım

Prof. Dr. Özer KOLSARICI
Enstitü Müdürü

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

KUANTUM KORELASYONLAR VE KLASİK KORELASYONLAR

Adem TÜRKMEN

Ankara Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Fizik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Abdullah VERÇİN

Bileşik sistemlerin sahip olabileceği; klasik korelasyonlar, kuantum dolanıklık, kuantum diskort ve dissonans gibi korelasyonların nicelendirilmesi ve sınıflandırılması son on yılda yoğun çalışmaların konusudur. Bir kısmı ancak son yıllarda fark edilmiş olan bu korelasyonlar, kuantum bilişim ve kuantum bilgisayar kuramlarındaki uygulamalar için; nicelendirilebilir, kontrol edilebilir, işlenebilir, iletilebilir ve tüketilebilir başlıca kuantum kaynaklarıdır. Bu çalışmada ilk olarak korelasyonlar açısından kuantum sistemlerin durumlar uzayının genel yapısı tanıtılmıştır. Sistemlerin ölçüm süreçlerinden etkilenme derecelerine göre korelasyonların klasik ve kuantum korelasyonlar olarak karşılıklı bilişim aracılığıyla sınıflandırılması ele alınmıştır. Tüm bu korelasyonların bağıl entropi yoluyla nicelendirilmeleri de incelenmiştir. Saf ve saf olmayan durumlardan seçilen karakteristik örnekler belli ayrıntılarla tanıtılmış ve sözü edilen nicelendirme yöntemleriyle korelasyon analizleri yapılmıştır.

Eylül2012, 76sayfa

Anahtar Kelimeler: Korelasyon, klasik korelasyon, dolanıklık, ayrılabilirlik, diskort, dissonans, bağıl entropi, von Neumann entropisi, karşılıklı bilişim.

ABSTRACT

Master Thesis

QUANTUM CORRELATIONS AND CLASSICAL CORRELATIONS

Adem TÜRKMEN

Ankara University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Physics

Supervisor: Prof.Dr. Abdullah VERÇİN

The quantification and classification of the correlations that compound system may have; such as, classical correlations, quantum entanglement, quantum discord and dissonance, are subject of intense studies in the last decade. These correlations, some of which are recognized only recently, constitute the major quantum resources that can be quantified, controlled, processed, transmitted and exploited in many applications of quantum information and quantum computation theories. In this study the general structure of the state space of quantum systems is first introduced from the perspective of correlations. By the degree of measurement induced-disturbance, classification of correlations by means of mutual information as classical and quantum correlations is then taken up. The quantification of all of these correlations via relative entropy is studied as well. As application, selected characteristic pure and non-pure state examples are presented in some details and their correlation analysis are carried out with the mentioned quantification methods.

September 2012, 76 pages

Key Words: Correlation, classical correlation, entanglement, separability, discord, dissonance, relative entropy, von Neumann entropy, mutual information.

TEŐEKKÖR

Çalıőmalarımı yönlendiren, araőtırmalarımın her aőamasında bilgi, öneri ve desteklerini esirgemeyen danışman hocam sayın Prof. Dr. Abdullah VERÇİN'e (Ankara Üniversitesi Fizik Anabilim Dalı), çalıőmalarım süresince maddi manevi desteklerini esirgemeyen değerli arkadaşlarım Erdem AKYÜZ, Solmaz YILMAZ ve Durgun DURAN'a ve her türlü maddi ve manevi destekleri için eőim Kübra TÖRKMEN' e ve aileme en derin duygularla teşekkür ederim.

Adem TÖRKMEN

Ankara, Eylül 2012

İÇİNDEKİLER

ÖZET	i
ABSTRACT	ii
TEŞEKKÜR.....	iii
SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ	vi
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	ix
1.GİRİŞ.....	1
2.KORELASYONLAR AÇISINDAN DURUMLAR UZAYI.....	5
2.1 Saf Durumlarda Ayrılabilirlik ve Dolanıklık.....	9
2.1.1 Schmidt ayrışımı.....	12
2.2Saf - Olmayan Durumlarda Ayrılabilirlik ve Dolanıklık.....	14
2.2.1 Çarpım durumları.....	14
2.2.2 Klasik durumlar	15
2.2.3 Ayrılabilir durumlar	16
2.2.4 Saf olmayan dolanık durumlar.....	17
2.2.5 Peres kriteri.....	18
3.KUANTUM MEKANİĞİNDE ÖLÇÜM.....	20
3.1İzdüşümsel Ölçümler (von Neumann Ölçümleri)	21
3.2POVM (Pozitif İşlemci Değerli Ölçü).....	22
4.KORELASYONLAR VE ENTROPİLER.....	24
4.1Klasik Shannon Entropisi	25
4.1.1 Klasik koşullu entropi	28
4.1.2 Klasik bağıl entropi.....	29
4.1.3 Klasik karşılıklı bilişim.....	31
4.2 von Neumann Entropisi.....	31
4.2.1 Kuantum bağıl entropi.....	33
4.2.2 Kuantum koşullu entropi.....	33
4.2.3 Kuantum karşılıklı bilişim	34
5.KORELASYONLARIN SINIFLANDIRILMASI VE NİCELENDİRİLMESİ...36	
5.1Korelasyonların Ölçüm Etkisiyle Sınıflandırılması.....	36

5.1.1 Toplam kuantum korelasyon.....	37
5.1.2 Klasik durumlarla ilgili temel teoremler.....	38
5.2 Bağıl Entropiyle Korelasyonların Sınıflandırılmasına Bütüncül Bir Yaklaşım	38
5.3KlasikKorelasyonlar.....	40
5.3.1 Temel teoremler.....	41
5.3.2İki parçalı sistemler için klasik korelasyonların özellikleri.....	45
5.4 Kuantum Korelasyonlar	45
5.4.1 Kuantum dolanıklık.....	46
5.4.2 Kuantum diskort	48
5.4.3 Kuantum diskortun özellikleri.....	51
5.4.4 Kuantum Dissonance.....	52
6. UYGULAMALAR	55
6.1 Saf Durumlar	55
6.1.1 W durumları.....	55
6.1.2 Dallenma durumları	58
6.2 Saf Olmayan Durumlar	60
6.2.1 Werner durumları.....	60
6.2.2 İzotropik durumlar	63
6.2.3 DQC1 durumları	65
6.2.4 Köşegen Bell durumları.....	67
7. SONUÇ	69
KAYNAKLAR.....	71
EK TEOREM 5.1 VE TEOREM 5.2' NİN İSPATLARI.....	73
ÖZGEÇMİŞ.....	76

SİMGELER DİZİNİ ve KISALTMALAR

\mathcal{H}	Hilbert Uzayı
$ 0\rangle$	Spin-yukarı durum
$ 1\rangle$	Spin-aşağı durum
I	Birim matris ve birim işlemci
$ \Phi^\pm\rangle, \psi^\pm\rangle$	Bell (veya EPR) durumları
$ \psi^-\rangle$	Spin-singlet durum
U	Üniter işlemci veya üniter matris
V	Trampa işlemcisi
$ \psi_{AB}\rangle$	Altsistemleri A ve B olan iki-parçalı bir sistemin saf durum vektörü
ρ	Yoğunluk işlemcisi
ρ_c	Klasik durum yoğunluk işlemcisi
ρ_p	Çarpım durumu yoğunluk işlemcisi
ρ_{AB}	Altsistemleri A ve B olan iki-parçalı bir sistemin yoğunluk işlemcisi
ρ_A, ρ_B	İki-parçalı bir sistemin indirgenmiş yoğunluk işlemcileri
ρ_D	DQC1 durumları
ρ_W	Werner durumu
ρ_I	İzotropik durum
ρ_K	Köşegen Bell durumları
$r(\psi)$	İki parçalı bir $ \psi\rangle$ saf durumunun Schmidt rankı
$S(\rho)$	ρ yoğunluk işlemcisinin von Neumann entropisi
Tr	İz işlemi
EPR	Einstein-Podolsky-Rosen
GHZ	Greenberger-Horne-Zeilinger
\mathcal{E}	Dolanık durumlar uzayı
E	Kuantum dolanıklık niceliği
σ	Ayrılabilir durum işlemcisi

\mathcal{S}	Ayrılabilir durumlar uzayı
POVM	Pozitif operatör değerli ölçü (<i>positive operator-valued measure</i>)
P_i	Tam von Neumann ölçüm işlemcisi
\mathcal{P}	Çarpım durumları uzayı
\mathcal{C}	Klasik durumlar uzayı
C	Klasik korelasyon niceliği
M_m	Ölçüm işlemcileri
E_m	POVM elemanları olan pozitif işlemciler
$H(P)$	P olasılık dağılımının Shannon entropisi
$p(x y)$	Koşullu olasılık
$p(x,y)$	Birleşik olasılık
$H(X Y)$	Klasik koşullu entropi
$H(X,Y)$	Klasik birleşik entropi
$H(p(x) q(x))$	Klasik bağıl entropi
$I(X,Y)$	Klasik karşılıklı bilişim
$S(A,B)$	AB bileşik sisteminin birleşik von Neumann entropisi
$S(\rho \sigma)$	Kuantum bağıl entropi
$S(A B)$	Kuantum koşullu entropi
$I(A:B)$	Kuantum karşılıklı bilişim
D	Kuantum diskort
Q	Kuantum dissonans
$Q(\rho)$	ρ durumunun toplam kuantum korelasyon niceliği
T	Bir durumun kendi indirgenmiş durumlarının çarpımı olan duruma uzaklığı
L	Korelasyonlarla ilgili ek terim
W	W durumu

$|c\rangle$ Dallanma durumları

DQC1 *Deterministic quantum computation with one qubit*

H Hadamard geçidi



Ölçüm işlemi

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 2.1 Poincaré-Bloch yuvarı.....	7
Şekil 2.2 İki-kübit durumları.....	8
Şekil 5.1 Sistemin olası durumları ve ilgili korelasyonlar.....	39
Şekil 6.1 DQC1 devresi.....	66

1.GİRİŞ

Bileşik sistemler, birbirinden uzaysal olarak ayrılabilen veya kinematik olarak ayırt edilebilen altsistemlerden (bileşenlerden, parçalardan) oluşan sistemlerdir. Bu çalışmada yapılacak incelemelerde bileşenleri uzaysal olarak ayrılabilen bileşik sistemler incelenecektir. Sistemin bileşenleri arasındaki karşılıklı ilişkileri betimleyen korelasyon kavramı, bileşenlerin bağımsız olma durumlarından ne kadar uzak olduğunu gösterir.

Bileşik sistemlerdeki korelasyonların karakterize edilmesi ve nicelendirilmesi önemli problemlerdir. Bunların anlaşılmasında kuantum fiziğinin iki karakteristik özelliği; üstüste gelme (*superposition*) ve sıradeğişmeme (*noncommutativity*) özellikleri öne çıkmaktadır. Bilindiği gibi üstüste gelme özelliği klasik fizikte sadece klasik dalga teorisinde vardır. Kuantum mekaniğinde ise üstüste gelmeyle her yerde karşılaşılabilir. Ayrıca kuantum mekaniğinde üstüste gelen,klasikte hiç karşılaşılmayan olasılık genliklerinin üstüste gelimidir. Bileşik kuantum sistemlerdeki klasik karşılığı olmayan korelasyonlar bu iki özellikten kaynaklanmaktadır. Bu nedenle korelasyonlarla ilgili çalışmalar bu iki özellik etrafında yoğunlaşmaktadır. Bu çalışmalarda verilen bir durumun ayrılabilir (*separable*) ya da dolanık (*entangled*) olduğunun belirlenmesi amaçlanmıştır. Ayrılabilir durumların tanımı yapılmış (Werner 1989), dolanık durumlar ise ayrılabilir olmayan durumlar olarak tanımlanmıştır.

Bu tanım dolanık ve ayrılabilir durumları tanımlama imkânı sağlamasından dolayı önemlidir. Tanımın kavramsal gücünü inkâr etmemekle birlikte, uygulamada çoğu durumda zorluklarla karşılaşılır. Verilen bir duruma yukarıdaki tanımı uygulamak çoğu durumda kolay değildir. Bunun önemli sebebi, ayrılabilir durumların gösteriminin tek (*unique*) olmamasıdır. Bu zorluklardan dolayı verilen bir durumun ayrılabilir yahut dolanık olduğunu belirlemeye yönelik birçok kriter de ortaya koymak gerekmiştir (Peres-Horodecki kriteri, İndirgeme kriteri vb.).

Bu sınıflandırmada dolanıklık, genellikle kuantum korelasyon olarak anlaşılmıştır. Bu tanım bazı özel saf durumlar için uygun olsa da saf olmayan durumlarda oldukça problemlidir. Çünkü ayrılabilir durumlarda da kuantum korelasyonların olabileceği son

on yılda yapılan çalışmalarla gösterilmiştir (Zurek 2002, Henderson 2001). Bu çalışmalarda kuantum korelasyonlar dolanıklığıda içeren daha genel bir kuantum korelasyon: kuantum diskort olarak incelenmektedir. Yani kuantum korelasyon sadece dolanıklık değildir, dolanıklık dışında da kuantum korelasyonlar vardır. Dolanıklık kuantum korelasyonun özel ve önemli bir türüdür.

Kuantum diskort ilk olarak Ollivier ve Zurek tarafından 2001 yılında geliştirilmiş bir kavramdır (Zurek 2002). Aynı yıl içerisinde Henderson ve Vedral' de bağımsız olarak bileşik sistemlerde dolanıklık dışında da kuantum korelasyonlar olduğunu göstermişlerdir (Henderson 2001). Doksanlı yılların sonlarına doğru yapılan birçok çalışmada dolanıklık hiç yokken ya da çok azken dahi bazı bileşik sistemlerde klasik korelasyonlarla elde edilemeyecek kuantum avantajların olabildiği gösterilmiştir. Örnek olarak; kuantum kriptolojide dolanık olmayan kuantum durumları kullanılmakta ve bu durumlar klasik kriptolojiyle elde edilemeyecek üstünlükler getirmektedir. Diğer önemli bir örnek de DQC1 durumlarıdır (kesim 6.2.3' de bu durumlar incelenmiştir). Bu durumlarda sistem çok az dolanıklık içermesine rağmen kuantum bilgisayarlı hızlanmalar olabilmektedir.

Bileşik sistemlerde farklı korelasyonların da olduğunu anlaşılması ve korelasyonların anlaşılmasının başta kuantum bilişim(*quantum information*) ve kuantum bilgisayar(*quantum computation*) kuramı olmak üzere birçok disiplin için önemli hale gelmesinden dolayı bu konularda farklı yaklaşımlara ihtiyaç duyulmuştur. Çünkü korelasyonlar; kuantum bilgisayarlı modeller ve uygulamalar için işlenebilir, kontrol edilebilir, aktarılabilir, nicelendirilebilir ve tüketilebilir kaynaklardır. Bu nedenle korelasyonların sınıflandırılması ve varolan korelasyonların nicelendirilmesi önem kazanmaktadır. Korelasyonların nasıl nicelendirileceği de henüz üzerinde uzlaşılmamış bir konudur. Bu nedenle nicelendirmeye ilgili de farklı yaklaşımlar vardır.

Bu çalışmanın ikinci bölümünde korelasyonlar açısından durumlar uzayının; birbirlerinden ayırık iki küme olan dolanık durumlar ve ayrılabilir durumlar kümesi ve ayrılabilir durumların alt kümeleri olan çarpım durumları ve klasik durumlar olarak temel özellikleri incelenmiştir. Bu incelemede durumlar uzayının tüm alt kümelerinde tanımlı yoğunluk işlemcilerinin genel yapısı tanıtılmış ve bu yapının korelasyonlar

açısından anlamına değinilmiştir. Durumlar uzayı en iyi bilinen durumlar olan tek-kübit durumları ve iki-kübit durumları ele alınarak saf iki parçalı durumların dolanık ya da ayrılabilir olduğunun belirlenmesinde gerek yeter koşul olan Schmidt ayrışımı tanıtılmıştır.

Üçüncü ve dördüncü bölümlerde korelasyonların nicelendirilmesinde kullanılacak olan - kuantum ölçümlerin ve entropilerin tanıtımı yapılmıştır. Üçüncü bölümde kuantum ölçümün tanımı ve en çok kullanılan iki kuantum ölçüm türü olan izdüşümsel (*projective*) ölçüm ve POVM (*positive operator-valued measure*) olarak kısaltılan ölçüm türünün özellikleri incelenmiştir. Dördüncü bölümde ise bilişim kuramında entropinin anlamı tartışılarak klasik ve kuantum bilişim kuramında tanımlanabilecek entropi türlerinin temel özellikleri korelasyonlar açısından ele alınmıştır.

Beşinci bölümün ilk kesiminde ölçüm etkisi ile iki parçalı sistemlerdeki korelasyonların klasik ve kuantum korelasyonlar olarak ayrımı ve her iki korelasyon türünün karşılıklı bilişim (*mutual information*) yoluyla nicelendirimi yapılmıştır. Burada ölçüm uygulanmış durumların klasik olması özelliği kullanılarak sistemdeki toplam klasik korelasyon ölçüm uygulanmış durumda var olan toplam korelasyon olarak hesaplanmıştır. Sistemin toplam korelasyonundan klasik korelasyon miktarı çıkarılarak toplam kuantum korelasyon miktarı belirlenmiştir. Sonraki kesimlerde ise korelasyonların bütüncül bir yaklaşımla basit tek bir toplamsal denklemde yazımı ve tüm korelasyonların bir diyagram üzerinde gösterimi yapılmıştır. Bu yaklaşım korelasyonlarla ilgili karşılaştırma imkânı sağlamasından dolayı önemlidir. Burada bileşik sistemlerde var olabilecek tüm korelasyon türleri; klasik korelasyonlar, kuantum diskort, kuantum dissonans ve kuantum dolanıklık olarak incelenmiştir. Bu incelemede korelasyonların temel özelliklerinin yanı sıra korelasyonları nicelendirmede kullanılacak yöntemlerin sağlaması gereken koşullaradeginilmiş ve bu koşullar göz önüne alınarak nicelendirme için bağıl entropi (*relative entropy*) tercih edilerek bu yöntemle korelasyon türlerinin hesaplanma bağıntıları verilmiştir.

Son bölümde ise saf ve saf-olmayan durumlardan seçilen karakteristik örneklerin genel özellikleri ve beşinci bölümde önerilen korelasyon analizlerinin bu örneklere uygulamaları yapılmıştır.

Bu tezde sıkça kullanılan birbirlerine dik $|0\rangle$ ve $|1\rangle$ hesaplama bazlarının matris temsilleri:

$$|0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (1.1)$$

şeklindedir. Ayrıca bilişim içerikleri bit olarak nicelendirime uygun olması için entropi ile ilgili tüm hesaplamalarda logaritma fonksiyonu iki tabanında alınmıştır.

2. KORELASYONLAR AÇISINDAN DURUMLAR UZAYI

Kuantum mekaniğinde sistemlerin saf durumları, üzerinde pozitif tanımlı Hermitesel bir iç çarpımın tanımlı olduğu ve Hilbert uzayı olarak tanımlanan kompleks bir vektör uzayı oluşturur. Sistemlerin saf olmayan kuantum durumları da bu Hilbert uzayında tanımlı ve ρ ile gösterilen yoğunluk işlemcileri (*density operators*) veya yoğunluk matrisleriyle (*density matrices*) temsil edilir. Yoğunluk işlemcileri sistemlerin saf ve saf-olmayan durumlarında geçerli genel bir formalizmdir. Burada saf durumlar, tanımlı olduğu durum uzayında bir vektörle temsil edilebilen durumlardır. Yoğunluk işlemcileri açısından bir bileşik sistemin yoğunluk işlemcisi ρ olmak üzere, sistemin saf durumda olması için gerek ve yeter koşul $\rho^2 = \rho$ olmasıdır. Saf-olmayan durumlar ise bu şekilde bir vektörle temsil edilemeyen durumlardır. Yoğunluk işlemcileri; özvektörlerin gerdiği Hilbert uzayının bir alt uzayından seçilen saf durumlara karşılık gelen izdüşüm işlemcilerinin konveks bir bileşimi olarak yazılabilir. Bu işlemciler birim izli, pozitif işlemcilerin oluşturduğu bir konveks küme oluşturur (Sakurai 1994). Pozitif işlemciler kümesi konveks bir küme olduğu için yoğunluk işlemcilerinin her türlü konveks bileşimleri de olası bir yoğunluk işlemcisidir. Bu işlemcilerin matris temsillerine yoğunluk matrisleri denir. N saf duruma sahip bir sistemin yoğunluk matrisleri de N^2-1 gerçel boyutlu bir konveks küme oluştururlar (Bengtsson 2006).

Yoğunluk işlemcileri; birbirlerinden bağımsız olarak her biri $|\psi_i\rangle$ saf durumlarında hazırlanmış sistemlerin, bu saf durumlarına karşılık gelen $|\psi_i\rangle\langle\psi_i|$ izdüşüm işlemcilerinin

$$\rho = \sum_i p_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i| , \quad p_i \geq 0 , \quad p_i \in [0,1] , \quad \sum_i p_i = 1 , \quad \forall i \text{ için} \quad (2.1)$$

şeklinde bir istatistiksel karışımı olarak yazılır. Burada p_i 'ler sistemin bileşenlerinin $|\psi_i\rangle$ durumunda bulunan miktarının kesirsel oranlarını veren olasılıklardır. $|\psi_i\rangle$ durum vektörleri bire boylandırılmış olan fakat dik olma zorunluluğu olmayan saf durum vektörleridir. Yoğunluk işlemcileri ifadelerinde olasılık genlikleri yer almaz sadece olasılıklar yer alır. Bu nedenle burada eşyumlu olmayan (*incoherent*) bir karışım (*convex mixture*) söz konusudur.

Bileşik sistemlerde sistemin durumlar uzayı, sistemi oluşturan altsistemlerin durum uzaylarının tensörel çarpımı olarak yazılır. İlk bileşenin Hilbert uzayı \mathcal{H}_1 ikincisinin \mathcal{H}_2 ve n.'sinin \mathcal{H}_n olan n-parçalı bir bileşik sistemin \mathcal{H} Hilbert uzayı; $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2 \otimes \dots \otimes \mathcal{H}_n$ tensör çarpımıyla belirlenir. \mathcal{H}_i 'lerin tümü sonlu ve d_i boyutlu ise \mathcal{H} de sonlu ve $d = d_1 d_2 \dots d_n$ boyutludur. Böyle sistemlere $d_1 \otimes d_2 \otimes \dots \otimes d_n$ tipindedir denir ve $\mathcal{H}_i \cong \mathbb{C}^{d_i}$ yazılabilir (\mathbb{C} kompleks sayılar kümesidir). \mathcal{H}_i 'lerden en az birisi sonsuz boyutlu ise \mathcal{H} ' de sonsuz boyutludur (Bu çalışmada sonlu boyutlu bileşik sistemler ele alınacaktır).

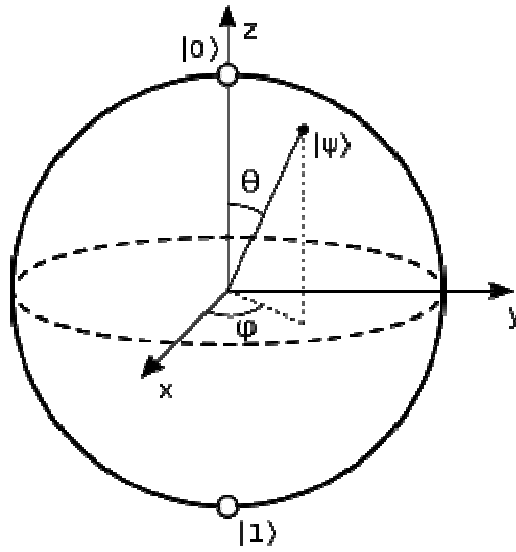
Kuantum mekaniğinde bileşik sistemlerin durumlar uzayı tensörel genişler ve buna bağlı olarak da durumlar uzayının boyutu çarpımsal artar. Klasik mekanikte ise sistemin durumlar uzayı sistemi oluşturan bileşenlerin durum uzaylarının kartezyen çarpımı şeklinde yazılır ve boyut toplamsal artar. Durumlar uzayındaki bu farklılık kuantum mekaniğinde bileşik sistemlerin, klasik karşılığı olmayan korelasyonlara sahip olabileceklerini vurgular.

Hilbert uzayı iki boyutlu olan; yani iki girilebilir durumlu herhangi bir sisteme ve böyle bir sistemin sahip olabileceği herhangi bir (saf ya da saf olmayan) kuantum durumuna kübit (*qubit=quantum bit*) sistemi ve kübit durumu denir (Schumacher 1995). Herhangi bir *spin* – 1/2 parçacık, kutuplanma durumu açısından bir foton ve sadece iki enerji seviyesiyle ele alınan bir çekirdek, atom ya da molekül birer kübit sistemidirler. Kübit terimi hem sistemi hem de onun durumunu belirtmek için kullanılır. Bileşenleri de birer kübit olan iki parçalı bir sisteme iki-kübit, üç parçalı bir sisteme üç-kübit ve çok parçalı olanlarına da çok-kübit sistemleri denir. Üç girilebilir durumlu bir sistem ve bunun herhangi bir durumuna da kütrit (*qutrit*) denir. Benzer şekilde, d girilebilir durumlu bir sistem ve bunun herhangi bir durumu için küdit ve çoklu küdit terimleri de tanımlanabilir.

Durumlar uzayının yapısı en iyi bilinenler tek-kübit sistemleridir. Bu sistemlerin yoğunluk matrisleri: $\mathbf{a} = (x, y, z)$ gerçel bir vektör olan kutuplanma vektörünü, $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$ Pauli spin matrislerini göstermek üzere

şeklindedir. matrisinin özdeğerleri $\lambda = \pm |a|$ cinsinden,

olarak bulunur. Yoğunluk matrislerinin pozitifliğinden dolayı tüm özdeğerlerin pozitif olması bunun için de $\text{tr}(\rho) = 1$ olması gerekir. ρ durumu her iki özdeğerinde sıfırdan farklı ve pozitif olduğu bir saf-olmayan durumu, $\rho = |a\rangle\langle a|$ durumu ise özdeğerlerden birinin bir diğeri sıfır olduğu rank 1 bir olan saf izdüşüm işlemcilerini göstermektedir. Sonuç olarak tek-kübit durumlarının saf ve saf-olmayan tüm durumları, üç boyutlu ve birim yarıçaplı aşağıdaki gibi Poincaré-Bloch yuvarıdır.

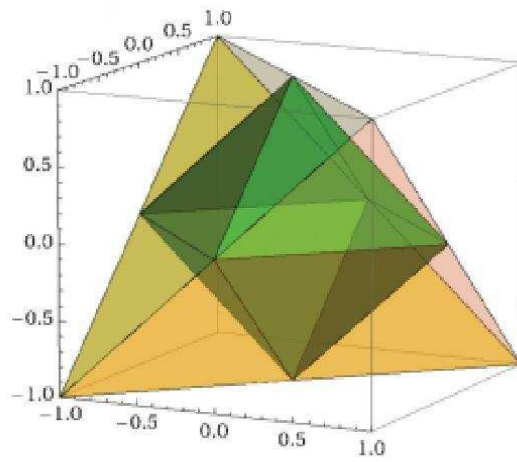


Şekil 2.1 Poincaré-Bloch yuvarı

Bu yuvarın yüzeyi saf kübit durumlarını, iç noktaları saf-olmayan kübit durumlarını, yuvarın merkezi ise en saf olmayan (*maximally-mixed*) durumu gösterir. Burada en saf olmayan durum, d boyutlu bir sistemin yoğunluk işlemcisinin;

şeklinde tüm özdeğerlerin eşit ve $1/d$ olduğu durum olarak tanımlanır. Bu tanıma göre en saf olmayan tek kübit durum $\rho = I/2$ olur.

Son yıllarda yapılan çalışmalarla tek-kübit sistemlerini izleyen en basit sistemler olan iki-kübit sistemlerinin durum uzaylarının genel yapısı da kısmen anlaşılabilmiş ve köşegen Bell durumlarının üç boyutlu temsilleri, köşeleri iki birim boyutlu bir küpün dört köşesinde olan düzgün bir dört yüzlü oluşturacak şekilde, şekil 2.2' deki gibi olduğu belirlenmiştir.



Şekil 2.2 İki-kübit durumları (Lang 2010)

Burada düzgün dört yüzlünün köşeleri dört Bell durumlarını, köşeleri düzgün dörtyüzlünün kenarlarının ortasında bulunan ve yeşil renkle gösterilen içerideki düzgün sekiz yüzlü ise ayrılabilir durumları göstermektedir. Düzgün sekiz yüzlünün yüzeyleri de ayrılabilir durumlara dahildir. Düzgün sekiz yüzlü dışında kalan düzgün dört yüzlünün dört parçası ise dolanık durumları göstermektedir (Lang 2010).

Bunların dışındaki durumların durum uzaylarının yapısı henüz ayrıntılı bilinmemektedir. Bu konudaki genel bilgiler; saf durumların durumlar uzayının sınırında yer aldığı fakat sınırda saf-olmayan durumların da olabileceği (tek-kübit durumlarında sınırda yalnızca saf durumlar yer alır) ve saf durumlara en uzak noktada en saf olmayan durumun yer aldığıdır.

Korelasyonlar açısından bileşik sistemlerin kuantum durumları: ayrılabilir durumlar kümesi \mathcal{S} ve dolanık durumlar kümesi \mathcal{E} olmak üzere kesişimleri boş küme (\emptyset) olan iki büyük sınıfa ayrılabilir.

\mathcal{E} = Dolanık durumlar uzayı ve \mathcal{S} = Ayrılabilir durumlar uzayı ise,

$$\{\text{Tüm durumlar uzayı}\} = \mathcal{E} \cup \mathcal{S}, \mathcal{E} \cap \mathcal{S} = \emptyset. \quad (2.5)$$

Bundan sonraki kesimde tanıtılacak olan ayrılabilir durumlar çarpım durumları ve klasik durumları da içeren bir kümedir. Ancak dolanık ve ayrılabilir durumların tanımları saf ve saf-olmayan durumlarda farklı olduğu için ayrı ayrı incelenmeleri gerekir. Aşağıdaki ilk kesimde önce saf durumlardaki ayrılabilirlik ve dolanıklık kavramları tanıtılacaktır.

2.1 Saf Durumlarda Ayrılabilirlik ve Dolanıklık

Bileşik bir sistemin verilen bir durum vektörü, sistemi oluşturan bileşenlerin durum vektörlerinin tensör çarpımı olarak yazılabiliyorsa buna ayrılabilir durum vektörü ve betimlediği duruma da ayrılabilir durum denir. N parçalı bir bileşik sistemin:

$$|a\rangle = |a_1\rangle \otimes |a_2\rangle \otimes \dots \otimes |a_N\rangle \quad (2.6)$$

şeklinde yazılabilen $|a\rangle$ durum vektörüne ayrılabilir (veya ayrıştırılabilir) durum vektörü ve böyle bir vektörle temsil edilen duruma da ayrılabilir (veya ayrıştırılabilir) durum denir. Saf ayrılabilir durumlar, çarpım durumları da denilen ve sistemi oluşturan bileşenler arasında hiçbir korelasyon bulunmayan durumlardır. Bunlar birbirlerinden bağımsız olarak bileşenlerin belirli saf durumlarda hazırlanmasıyla oluşturulmuş durumlardır.

(2.6) ifadesindeki gibi yazılamayan saf durumlara dolanık saf durumlar denir. Bunlar ayrılabilir durum vektörlerinin özel çizgisel birleşimleri, yani özel eşyumlu üstüste gelimlerini temsil eden durumlardır.

Saf durumlardaki dolanıklık ve ayrılabilirlikle ilgili iki spin $-1/2$ ($s_1 = 1/2 = s_2$) parçacığın bileşik spin durumları öğretici bir örnektir. Bilindiği gibi böyle bir sistemin olası spin durumları $s = 1$ 'e karşılık gelen üçlü (triplet) durumları;

$$|11\rangle = |+\rangle \otimes |+\rangle$$

$$|10\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle \otimes |-\rangle + |-\rangle \otimes |+\rangle)$$

$$|1, -1\rangle = |-\rangle \otimes |-\rangle \quad (2.7)$$

ve $s = 0$ 'a karşılık gelen

$$|00\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle \otimes |-\rangle - |-\rangle \otimes |+\rangle) \quad (2.8)$$

tekli (singlet) durumlarıdır. Bu dört durumun her biri bire boylandırılmış ve birbirlerine diktirler. Burada boylandırılmış $|\pm\rangle$ durumları, alışılmış gösterime uygun olarak spin yukarı ve spin aşağı durumlarını göstermektedir. Üçlü durumlardan $|11\rangle$ ve $|1, -1\rangle$ durumları ayrılabilirken, $|10\rangle$ ve tekli $|00\rangle$ durumu dolanık durumlardır. Ayrılabilir $|11\rangle$ ve $|1, -1\rangle$ durumların çizgisel bileşimleri alınarak da dolanık durumlar oluşturulabilir. Bu şekilde oluşturulan

$$|\Phi^\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|1\rangle \otimes |1\rangle \pm |0\rangle \otimes |0\rangle)$$

$$|\psi^\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|1\rangle \otimes |0\rangle \pm |0\rangle \otimes |1\rangle)^1 \quad (2.9)$$

dört dik dolanık duruma Bell durumları (veya EPR durumları) denir.

¹ $|\psi^\pm\rangle$ ve $|\Phi^\pm\rangle$ durumları sırasıyla $|\psi^\pm\rangle = (1/\sqrt{2})(|10\rangle \pm |01\rangle)$ ve $|\Phi^\pm\rangle = (1/\sqrt{2})(|00\rangle \pm |11\rangle)$ şeklinde de yazılabilirler.

Üçlü (triplet) $|11\rangle$ durumu gibi ayrılabilir bir durumda sistem, $s = 1 = m$ durumundadır ve her iki bileşeni de kesinlikle $m_1 = 1/2 = m_2$ durumundadır. Bunlar hem sistem hem de alt sistemler ile ilgili bilinebilecek en iyi bilgilerdir. Diğer taraftan, dolanık durumlarda sistemle ilgili en iyi bilgiye sahip olunmasına karşın, bileşenlerle ilgili bilgiler sistemle ilgili bilgiler kadar kesin değildir. Örneğin spin-singlet durumunda; sistemle ilgili bilgimiz, $s = 0 = m$ şeklinde kesindir. Alt sistemlerle ilgili ise sadece spinini $|+\rangle$ ya da $|-\rangle$ durumunda bulma olasılığının % 50 olduğu bilgisi vardır.

Dolanık durumda bulunan bir sistemin kendisi ile ilgili bilgi, her kuantum sayısının (yukarıdaki sistem için s ve m sayılarının) kesin değerlerini bilme imkânı tanımayabilir. Örneğin, ayrılabilir üçlü durumların (2.9) denklemindeki $|\Phi^\pm\rangle$ çizgisel bileşimlerini göz önüne alalım. Bunlar en basit bir koherent üst-üste gelimi de gösterir: Terimlerdeki durum vektörleri ve katsayıları bir kere açıkça yazılınca, terimler arasında artık iyi belirlenmiş bir faz ilişkisi vardır. $|\Phi^\pm\rangle$ 'lerin her ikisi de dolanık durumlardır. Sistem $|\Phi^+\rangle$ (ya da $|\Phi^-\rangle$) durumunda iken yine sistemle ilgili en iyi bilgi mevcuttur: Her şeyden önce sistem kesin olarak bilinen (açıkça $|\Phi^+\rangle$) bir kuantum durumundadır. Fakat bu sefer $s = 1$ olduğunu kesin olarak bilmemize karşılık, m sayısı % 50 olasılıkla 1 ve aynı olasılıkla -1 olabilir. Dolanık durumlarda, bir alt-sisteme iyi belirlenmiş bir kuantum durumu karşılık getirilemeyebilir.

Bell durumlarının diğer önemli bir özelliği de en dolanık (*maximally entangled*) durumlar olmalarıdır. En dolanık durum iki parçalı sistemlerde, indirgenmiş yoğunluk işlemcilerinin en saf olmayan durumda olması olarak tanımlanır. Örneğin her bir parçası A ve B olan bir Bell durumunun yoğunluk işlemcisi:

$$\rho_{AB} = |\Phi^+\rangle\langle\Phi^+| \quad (2.10)$$

olsun. Bu durumda indirgenmiş yoğunluk işlemcileri:

$$\rho_A = Tr_B(\rho_{AB}) = \frac{I_A}{2} \text{ ve } \rho_B = Tr_A(\rho_{AB}) = \frac{I_B}{2} \quad (2.11)$$

şeklinde olur. Burada I_A birinci parçaya, I_B ise ikinci parçaya ait birim matrisleri göstermektedir. Her bir parçanın indirgenmiş yoğunluk işlemcileri diğer parçalar üzerinden kısmi iz (*partial trace*) alınarak hesaplanır. Diğer parçalar üzerinden kısmi iz almak; diğer parçaların ele alınan parça üzerine ortalama etkilerini de hesaba katmak demektir. İndirgenmiş yoğunluk işlemcileri, parçaların bileşik sistem içerisindeki durumlarını temsil ederler.

Verilen bir saf durumun ayrılabilir ya da dolanık durumlardan hangisinde olduğu çoğu durumda aşikâr değildir. Bu nedenle verilen durumların hangi kümeye ait olduğunu belirlenmesine yönelik farklı yetkinliklerde birçok kriter de geliştirmek gerekmiştir. Saf durumlarla ilgili incelemelerde iki-parçalı durumların özel bir yeri vardır. Çünkü bu durumlarda çok-parçalı sistemlerde olmayan Schmidt ayrışımı vardır. Bu ayrışım iki-parçalı sistemlerde dolanıklık için gerek ve yeter koşul işlevi gören oldukça güçlü bir kriterdir. Bu nedenle sonraki kesimde bu ayrışım incelenecektir.

2.1.1 Schmidt ayrışımı

İki-parçalı bir saf durum vektörü;

$$|\Psi_{AB}\rangle \in \mathcal{H}_{AB} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B \quad (2.12)$$

olmak üzere, $\{|a_i\rangle \otimes |b_j\rangle\}$ gibi herhangi bir ortonormal çarpım (tensör) bazında:

$$|\Psi_{AB}\rangle = \sum_{i=1}^{d_A} \sum_{j=1}^{d_B} c_{ij} |a_i\rangle \otimes |b_j\rangle \quad (2.13)$$

biçiminde yazılabilir. $|\Psi_{AB}\rangle$ vektörü bire boylandırılmış ise boylandırma koşulu olarak;

$$\sum_{i=1}^{d_A} \sum_{j=1}^{d_B} |c_{ij}|^2 = 1 \quad (2.14)$$

ifadesi de yazılabilir. Burada $\{|a_i\rangle\}$ ve $\{|b_j\rangle\}$ ortonormal bazları, sırasıyla d_A boyutlu \mathcal{H}_A ve d_B boyutlu \mathcal{H}_B altuzaylarını gererler.

$|\Psi_{AB}\rangle$ rankı iki olan bir tensör olarak düşünülebilir ve kompleks c_{ij} katsayıları da bu tensörün kullanılan bazlardaki tensör bileşenleridirler. $|\Psi_{AB}\rangle$ 'ye bileşik sistemin Hilbert uzayındaki bir durum vektörü ve c_{ij} katsayılarına da olasılık genlikleri olarak bakılırsa; bu durumda $|c_{ij}|^2$, bileşik sistem $|\Psi_{AB}\rangle$ durumundayken birinci altbileşeni $|a_i\rangle$ ve ikincisini $|b_j\rangle$ durumunda bulma olasılığıdır.

Rankı iki olan bir tensörolan $|\Psi_{AB}\rangle$ vektörü bir matrisle temsil edilebilir. $|\Psi_{AB}\rangle$ 'nin temel özellikleri ona karşılık getirilen ve elemanları c_{ij} katsayıları olan C matrisinin özellikleriyle ifade edilir. $d_A \times d_B$ 'li dikdörtgen C matrisinin matris rankı² 1 ise bu bir çarpım durumudur yani ayrılabilir bir durumdur. Genel olarak, bu matrisin $r(\psi)$ ile gösterilen rankı d_A ve d_B 'nin küçük olanından daha büyük olamaz:

$$\begin{aligned} r(\psi) &\leq k \\ &\equiv \min \{d_A, d_B\}. \end{aligned} \quad (2.15)$$

$r(\psi)$ 'ye $|\Psi_{AB}\rangle$ vektörünün Schmidt rankı denir. Schmidt rankı; $\rho = |\Psi_{AB}\rangle\langle\Psi_{AB}|$ olmak üzere, $\rho_A = \text{Tr}_B(|\Psi_{AB}\rangle\langle\Psi_{AB}|)$ ve $\rho_B = \text{Tr}_A(|\Psi_{AB}\rangle\langle\Psi_{AB}|)$ indirgenmiş yoğunluk işlemcilerinin ranklarına da eşittir.

Schmidt ayrışımı $|\Psi_{AB}\rangle$ şeklinde verilen bir durum vektörünün her zaman

$$|\Psi_{AB}\rangle = \sum_{n=0}^{r(\psi)} c_n |\Phi_n\rangle \otimes |\psi_n\rangle \quad (2.16)$$

olacak şekilde yazılabildiği, $\{|\Phi_n\rangle \otimes |\psi_n\rangle\}$ iki-ortonormal (*biortonormal*) bazının olduğunu vurgular. Burada $c_n = \{\sqrt{p_n}\}$ pozitif sayıları, c_{ij} katsayılarının sıfırdan farklı

²Bir tensörün rankıyla bir matrisin rankı farklı şeylerdir. Bir tensörün rankı onun kaç parçalı bir sisteme ait olduğunu belirtirken bir matrisin rankı determinantı sıfırdan farklı olan en büyük kare altmatrisin derecesidir.

özdeğerlerine karşılık gelir ve p_n değerleri indirgenmiş yoğunluk matrislerinden her birisinin spektrumunun sıfırdan farklı özdeğerleridir.

Kuantum dolanıklık genel olarak, $U_A \otimes U_B$ üniter işlemleri altında değişmez bir özelliktir. Saf bir $|\Psi_{AB}\rangle$ durumunda ve karşılık gelen $|\Psi_{AB}\rangle\langle\Psi_{AB}|$ saf durum izdüşüm işlemcilerinde, $\{c_n\}$ katsayıları böyle üniter işlemler altında değişmez olan nicelikler olduğundan iki-parçalı saf durumların dolanıklığını tam olarak belirleme imkânı sağlar (Barnet 2009).

2.2 Saf-Olmayan Durumlarda Ayrılabilirlik ve Dolanıklık

Saf-olmayan durumlarda durumlar uzayı daha zengin bir yapı göstermektedir. Bu bölümün bundan sonraki kısımlarında saf olmayan durumların durumlar uzayı incelenecektir.

2.2.1 Çarpım durumları

Çarpım durumlarında bileşik sistemin durumu, alt sistemlerin durumlarının tensörel çarpımı olarak yazılır. N parçalı bir bileşik sistemin durumu aşağıdaki gibi yazılabiliyorsa incelenen durum bir çarpım durumudur.

$$\rho_p = \rho_1 \otimes \rho_2 \dots \otimes \rho_N \quad (2.17)$$

Burada ρ_j 'ler sistemin j. bileşeninin olası yoğunluk işlemcisini, ρ_p ise bileşik sistemin yoğunluk işlemcisini göstermektedir. Çarpım durumlarında sistemi oluşturan parçalar arasında ne klasik ne de kuantum mekaniksel hiçbir korelasyon bulunmaz. Bu durumlar, alt-sistemlerin her birinin diğerlerinden bağımsız olarak hazırlanmış olduğu bileşik sistem durumlarıdır. \mathcal{P} çarpım durumları kümesi olmak üzere, \mathcal{P} kümesi konveks bir küme değildir. Yani çarpım durumlarının konveks bileşimleri, bir çarpım durumu olmak zorunda değildir.

Yukarıdaki çarpım durumundaki her bir yoğunluk işlemcisinin

$$\rho_j = \sum_{k_j} \lambda_{k_j} |k_j\rangle\langle k_j| \quad (2.18)$$

şeklinde spektral ayrışımı yapılır ve

$$|k_1 \dots k_N\rangle = |k_1\rangle \otimes |k_2\rangle \otimes \dots \otimes |k_N\rangle \quad (2.19)$$

kısa yazımı kullanılırsa, (2.17) ifadesi aşağıdaki gibi yeniden yazılabilir.

$$\rho_p = \sum_{k_1 \dots k_N} \lambda_{k_1} \dots \lambda_{k_N} |k_1 \dots k_N\rangle\langle k_1 \dots k_N|. \quad (2.20)$$

Buradaki $P_{k_1 \dots k_N} = \lambda_{k_1} \dots \lambda_{k_N}$ açılım katsayıları birer olasılık ifadesi olup; birinci alt-sistemi $|k_1\rangle$, ikinci alt sistemi $|k_2\rangle$ vs. durumunda bulma olasılıklarını gösterirler. Olasılıkların bu basit çarpım yapısı çarpım durumlarına özgüdür ve alt-sistemlerin birbirinden bağımsız hazırlanmalarını vurgular. Aşağıda tanımlanan klasik durumlar çarpım durumlarını da içeren daha genel bir kümedir. Bu kümede bileşik olasılıkların hiçbir çarpım yapısı olmayabilir.

2.2.2 Klasik durumlar

N parçalı bileşik sistemin dik ve bire boylandırılmış $\{|k_1 \dots k_N\rangle\}$ durumlarının bir kümesini göz önüne alalım; bu durumları bundan sonra

$$|\vec{k}\rangle = |k_1 \dots k_N\rangle \quad (2.21)$$

sembolik vektör notasyonu ile göstererek ortogonaliteleri aşağıdaki gibi yazılacaktır.

$$\langle k_1 \dots k_N | k'_1 \dots k'_N \rangle = \langle \vec{k} | \vec{k}' \rangle = \delta_{\vec{k}, \vec{k}'} \quad (2.22)$$

Buradaki bileşik sistemin ortonormal $|\vec{k}\rangle$ durumlarına karşılık gelen $|\vec{k}\rangle\langle \vec{k}|$ izdüşüm işlemcilerinin (bu işlemciler rankı bir olan saf durum yoğunluk işlemcileridir.)

$$\rho_c = \sum_{k_n} P_{k_1, \dots, k_n} |k_1 \dots k_n\rangle \langle k_1 \dots k_n| = \sum_{\vec{k}} p_{\vec{k}} |\vec{k}\rangle \langle \vec{k}| \quad (2.23)$$

şeklindeki herhangi bir konveks bileşimine bir klasik durum denir. Burada $P_{\vec{k}}$ lar alt sistemlerin hepsiyle ilgili birleşik olasılıklar olup, her biri $[0,1]$ aralığında değer alır ve toplamları birdir. $\{|k_i\rangle\}$ 'ler ise yerel olarak tanımladıkları bileşenin bazlarını geren vektörlerdir.

\mathcal{A} kümesi bir sistemle ilgili klasik durumlar kümesi olmak üzere; bu küme konveks değildir ve \mathcal{P} çarpım durumlar kümesini bir alt küme olarak içerir.

Klasik durumlarda sadece klasik korelasyonlar vardır. Klasik korelasyonlarla ilgili bilgiler, klasik yollarla sistemi etkilemeden elde edilebilir bilgilerdir.

Bu durumlara klasik durumlar denilmesinin önemli bir nedeni vardır. Bunu görmek için birinci alt sistemin saf durumlar uzayını geren rankı bir olan birbirine dik ve tam işlemci kümesini $\{P_{k_1} = |k_1\rangle \langle k_1|\}$ ile ve sistem için geçerli olan bu kümeyi de $\{P_k = |\vec{k}\rangle \langle \vec{k}|\}$ ile gösterelim. Bu durumda herhangi bir ρ klasik durumu,

$$\sum_{\vec{k}} P_k \rho_c P_k = \rho_c \quad (2.24)$$

bağıntısını sağlar. Bu durum klasik fizikteki gibi klasik durumların, bir tam von Neumann ölçümlerinden etkilenmediğini gösterir.

2.2.3 Ayrılabilir durumlar

Ayrılabilir saf-olmayan durumlar (1989) yılında Werner tarafından tanımlanmıştır. N parçalı bir sistemin σ ile gösterilen bir yoğunluk işlemcisi;

$$\sigma = \sum_i p_i \rho_1^{(i)} \otimes \dots \otimes \rho_N^{(i)} p_i \geq 0, \quad p_i \in [0,1], \quad \sum_i p_i = 1, \quad \forall i \quad (2.25)$$

şeklinde çarpım durumlarının konveks bir toplamı olarak yazılabiliyorsa bu duruma ayrılabilir durum denir. Burada $\rho_j^{(i)}$, j ile numaralanmış alt sistemin olası bir yoğunluk işlemcisini gösterir ve ortak p_i olasılıkları da tüm sisteme aittir.

Bu küme çarpım durumlarını ve dolayısıyla klasik durumları bir alt küme olarak içerir ve bu içerme ilişkisi aşağıdaki gibi gösterilebilir:

$$\mathcal{P} \subset \mathcal{C} \subset \mathcal{S}. \quad (2.26)$$

Ayrılabilir durumlar kümesi \mathcal{S} ; konveks bir kümedir yani ayrılabilir durumların konveks bileşimleri de yine bir ayrılabilir durumdur.

Üniter işlemler altında değişmez kalan bu durumlar, sadece yerel işlemler ve klasik haberleşme kanalları (LOCC, *Local operation and classical communication*) ile hazırlanabilir.

Ayrılabilir durumlar klasik olmayan korelasyonlar da içerebilirler. Bu durumlarda dolanıklık dışındaki her türlü klasik ve kuantum korelasyon olabilir. Son on yıla kadar ayrılabilir durumlardaki korelasyonların tamamen klasik korelasyonlar olduğu düşünülüyordu fakat kuantum diskord ve kuantum dissonans'la ilgili çalışmalar ayrılabilir durumlarda da kuantum korelasyonların olabileceğini göstermiştir. Böylece kuantum korelasyonların sadece dolanıklık olmadığı anlaşılmış, dolanıklık dışındaki kuantum korelasyonların araştırılmasına yol açmıştır. Bu çalışmada da; ayrılabilir durumlarda var olan dolanıklık dışındaki kuantum korelasyonların incelemesi yapılacaktır.

2.2.4 Saf-Olmayan Dolanık Durumlar

Bileşik sistemlerin bütünlükçü bir özelliği olan dolanık durumların yukarıdaki durumlar gibi standart bir gösterimi yoktur. (2.25) ifadesindeki gibi yazılamayan durumlar ayrılabilir olmayan, dolanık durumlar kümesini oluşturur. Bu durumlar, ayrılabilir durum vektörlerinin özel çizgisel birleşimleri, yani özel eşyumlu üstüste gelimleriyle temsil edilebilen ayrılamaz durumlardır. Bu yüzden yerel etkileşmeler ile

oluşturulamazlar. Dolanık durumlar, bileşenler bir aradayken ki karşılıklı etkileşmeler ile veya her iki bileşenin henüz ortada olmadıkları bir bozunum veya yayma süreci sonucunda oluşurlar. Ayrıca; daha önce hiç etkileşmemiş olan, ancak başka iki parçacıkla dolanık halde olan iki parçacık dolanıklık trampası (Bennett vd. 1996) denilen bir süreçte dolanık hale getirilebilir.

Dolanık durumlarda sistemin bir bileşeni üzerinde yapılacak bir ölçümün olası sonucu, diğer bileşen üzerinde henüz ölçüm yapıp yapılmadığına ve ölçüm yapılmışsa bunun ne tür bir ölçüm olduğuna sıkıca bağlıdır.

\mathcal{E} dolanık durumlar kümesi olmak üzere, \mathcal{E} kümesi konveks bir küme değildir. Dolanık durumların konveks bileşimlerinin dolanık bir durum olma zorunluluğu yoktur.

Dolanık durumlar kuantum korelasyonların özel bir türü olan dolanıklılık korelasyonları içeren durumlardır. Bu durumlar kuantum bilişim kuramının birçok uygulamasında önemli rol oynarlar. En bilinen uygulamalar olan kuantum uzaktarım (*teleportation*) ve kuantum yoğun kodlama (*super-dense coding*) da sistemin parçaları arasında paylaşılan bir dolanık durum vardır. Bu uygulamalardaki üstünlük ve avantajlar paylaşılan bu dolanık durumlardan kaynaklanmaktadır.

Bu bölümde son olarak verilen bir durumun ayrılabilir yada dolanık olduğunu belirlemede güçlü kriterlerden biri olan Peres kriteri incelenecektir.

2.2.5 Peres kriteri

Peres kriteri, bir yoğunluk işlemcisinin transpozunda olası bir yoğunluk işlemcisi olması gerçeğine dayanır. Çünkü transpoz alma işlemi yoğunluk matrislerinin pozitifliğini, özdeğerlerini ve izini değiştirmez. Bu kriteri parçalı bir bileşik sistemin yoğunluk işlemcisinin ayrılabilir olması durumunda bir gereklilik koşulu, bu koşulun sonucu olarak da verilen bir yoğunluk işlemcisinin dolanık olması için kısmen güçlü bir yeterlilik koşuludur.

$\rho = \sum_i p_i \rho_{1i} \otimes \rho_{2i}$ ifadesiyle verilen ayrılabilir durumların ikinci bileşene göre parçalı transpozu:

$$\rho^{T_2} = \sum_i p_i \rho_{1i} \otimes \rho_{2i}^{(T)} \quad (2.27)$$

olup, bu durumda olası bir ayrılabilir durumdur. Burada ρ^{T_2} , ikinci bileşene göre transpozu alınmış yoğunluk işlemcisini göstermektedir. Peres kriteri özlü olarak:

$$\rho \text{ ayrılabilir} \Rightarrow \rho^{T_2} \text{ bir yoğunluk işlemcisidir} \quad (2.28)$$

önermesiyle özetlenebilir. İki parçalı sistemler için parçalı transpozun hangi parça üzerinden alındığının önemi yoktur. (2.28) önermesinin mantıksal değillesi,

$$\rho^{T_2} \text{ bir yoğunluk işlemcisi değildir} \Rightarrow \rho \text{ dolanıktır} \quad (2.29)$$

olur. İki parçalı sistemlerin dolanıklığı için ρ^{T_2} 'nin en az bir özdeğerinin negatif olmasını yeterli gören bu önerme Peres kriteri olarak bilinir (Peres 1996). Buna göre verilen bir yoğunluk işlemcisinin alt sistemlerden birine göre parçalı transpozuyla elde edilen işlemcinin özdeğerlerinden en az birinin negatif olması (böyle bir durumda ρ^{T_2} artık bir yoğunluk işlemcisi değildir) onun dolanıklığı için yeterli bir kriterdir.

Peres kriteri, $2 \otimes 2$ ve $2 \otimes 3$ şeklindeki durumlar için sadece gerek koşul değil aynı zamanda yeter bir koşuldur (Horodecki 1996). Bu durumlarda Peres kriteri durumların ayrılabilir yada dolanık olmasıyla ilgili tam bir sınıflandırma imkânı sağlar.

3. KUANTUM MEKANIĞİNDE ÖLÇÜM

Bir kuantum durumundan bilgi çıkarsamak kaçınılmaz olarak ölçüm uygulamayı gerektirdiği için ölçüm bilişim teorisinde ve korelasyonların anlaşılmasında önemli rol oynar. Kuantum mekaniğinde ölçümler de gözlenebilirler ve durumlar gibi işlemcilerle temsil edilir. Kuantum ölçümler:

$$\sum_m M_m M_m^\dagger = I \quad (3.1)$$

tamlık bağıntısını sağlayan $\{M_m\}$ ölçüm işlemcilerinin bir koleksiyonu ile tanımlanır. Tamlık bağıntısının fiziksel anlamı olası ölçüm sonuçlarına karşılık gelen durumların, sistemin durumlar uzayını gemesidir. Diğer bir ifadeyle sistemle ilgili bütün olası sonuçlar ölçüm koleksiyonu içerisinde yer almaktadır veya ölçüm sonuçlarıyla ilgili olasılıklar toplamı bire eşit olmaktadır. M_m ölçüm işlemcilerinin genel olarak Hermitesel olma zorunluluğu yoktur fakat ölçümün olası sonuçlarıyla ilgili olasılıkların hesaplandığı $M_m M_m^\dagger$ işlemcileri Hermiteseldir. m indisi ise olası ölçüm sonuçlarını göstermektedir.

Kapalı bir sistem üniter olarak evrilir, fakat sistem dışarıdan başka bir sistemle üniter olmayan bir etkileşime girebilir. Kuantum mekaniğinde ölçümler üniter olmayan tersinmez işlemlerdir. Sisteme ölçüm uygulamak demek var olan duruma ölçüm işlemcisi uygulamak demektir. Ölçüm işlemcileri ölçüm uygulanacak sistemin durumlar uzayına etkirler. Ölçümden önce sistemin durumu ρ ise ölçüm sonucunu m gelme olasılığı $p(m)$ aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$p(m) = \text{Tr}(M_m M_m^\dagger \rho), \quad \sum_m p(m) = 1. \quad (3.2)$$

Sıfırdan farklı $p(m)$ için, M_m ölçümünden hemen sonra sistemin durumu

$$\rho_m = \frac{M_m \rho M_m^\dagger}{p(m)} \quad (3.3)$$

ile verilir. Bir tam ölçüm işlemi uygulanmış durum işlemcisi:

$$\rho' = \sum_m M_m \rho M_m^\dagger \quad (3.4)$$

olur. Bu ifade yazılırken tek tek M_m ölçümlerinin sonuçlarına bakılmadığı ölçüm uygulanmış durumların bir koleksiyonu alındığı varsayılır.

Kuantum ölçümlerin iki işlevi vardır. Birincisi, olası ölçüm sonuçlarının olasılıklarını belirlemek yani ölçümün istatistiğini oluşturmaktır. İkincisi ise sistemin ölçüm sonrası durumunu belirlemektir. Sistemlere ölçüm sonucuyla ilgili beklentilere bağlı olarak farklı ölçümler uygulanabilir. Burada en çok kullanılan iki ölçüm türü ele alınacaktır. Bunlar izdüşümsel ölçümler (*projective*, von Neumann ölçümleri) ve POVM (*Positive operator-valued measurement*, Pozitif işlemci değerli ölçüm) olarak kısaltılan ölçümlerdir.

3.1 İzdüşümsel ölçümler (von Neumann ölçümleri)

İzdüşümsel ölçüm işlemcileri sistemin durum uzayında tanımlı Hermiteles bir M işlemcisiyle tanımlanan kuantum ölçümlerin özel bir türüdür. M işlemcisi Hermiteles olduğu için spektral ayrışımına sahiptir. M 'nin spektral ayrışımı;

$$M = \sum_m m P_m \quad (3.5)$$

şeklindedir. Burada P_m , M 'nin m özdeğerli öz uzayı üzerine izdüşüm yapan dik izdüşüm işlemcisidir. Diklik:

$$P_m P_n = P_m \delta_{mn} \quad (3.6)$$

şeklinde ifade edilir. $m \neq n$ için $P_m P_n = 0$ diklik bağıntısı, bir P_m ölçümünde hemen sonram' den farklı diğer ölçüm sonuçlarının bulunma olasılığının sıfır olduğunu söyler. $P_m^2 = P_m$ bağıntısı da izdüşümsel ölçümlerin tekrarlanabilirliğini; yani izdüşümsel ölçümden sonra sistemin bulunduğu durumda kalmaya devam edeceğini söyler.

Ölçümün olası sonuçları, ölçüm işlemcisinin özdeğerleri olan m 'lerdir. Sistem ρ durumundayken ölçüm sonucunun m gelme olasılığı da:

$$p(m) = \text{Tr}(P_m \rho) \quad (3.7)$$

ifadesinden hesaplanır. ρ durumunun bir tam izdüşümsel ölçüm uygulandıktan sonra yeni durumu;

$$\rho' = \sum_m P_m \rho P_m \quad (3.8)$$

olur. İzdüşümsel ya da von Neumann tipi ölçümler tekrarlanabilir ölçümlerdir oysa kuantum mekaniğinde çoğu ölçüm tekrarlanabilir değildir. Bu nedenle izdüşümsel ölçümler oldukça özel bir ölçüm türüdür ve kuantum mekaniğinde çoğu ölçüm izdüşümsel değildir.

3.2 POVM (Pozitif işlemci değerli ölçü)

Bazı durumlarda sistemin ölçüm sonrası durumuyla fazla ilgilenilmiyordur. Ölçümün uygulanma amacı ölçüm sonuçlarının olasılıklarının belirlenmesi yani ölçümün istatistiğinin çıkarılması olabilir. Bu durumda seçilen ölçüm işlemcileri kümesinin sadece pozitiflik ve tamlık özelliklerini sağlaması istenir, diklik özelliği aranmaz. Bu şekilde seçilen ölçüm işlemcileri kümesi farklı ölçüm sonuçlarının olasılıklarını belirlemede yeterli olacaktır. Seçilen işlemci kümesinin elemanlarına POVM elemanları, kümenin kendisine de POVM denir. Bu kümenin elemanları olan işlemciler, kuantum durumlarının ayırt edilmesine imkân sağlar.

Sistem ρ durumunda ve ölçüm işlemcileri olarak M_m işlemcileri seçilmiş olsun, bu durumda ölçüm sonucu ile ilgili olasılıkların hesaplandığı $M_m^\dagger M_m$ işlemcileri pozitif işlemcilerdir. Bu işlemcilere E_m denilirse:

$$E_m = M_m^\dagger M_m, \quad E_m \geq 0 \quad (3.9)$$

yazılabilir. Ölçüm sonucunun m gelme olasılığı ise:

$$p(m) = \text{Tr}(\rho E_m) \quad (3.10)$$

ifadesinden hesaplanır. Burada E_m pozitif işlemcilerinin oluşturduğu $\{E_m\}$ kümesine POVM, bu kümenin elemanlarına da POVM elemanları denir. Bu kümenin elemanları pozitifliğin yanı sıra aşağıdaki gibi tamlık özelliğine de sahip olmalıdırlar.

$$\sum_m E_m = I \quad (3.11)$$

POVM özellikleri dikkate alındığında izdüşümsel işlemcilerinin de özel bir POVM türü olduğu görülür (Nielsen ve Chuang 2000).

4. KORELASYONLAR VE ENTROPİLER

Korelasyonların sınıflandırılmasında ve nicelendirilmesinde entropiler önemli rol oynamaktadır. Bu nedenle bu bölümde kısaca entropilerin tanıtımı yapılacak, korelasyonları nicelendirmede kullanılacak olan entropilerin temel özellikleri incelenecektir.

Fizikte özel bir yeri olan entropi kavramı, ilk olarak 19. yüzyılın ortalarında Rudolf Clasius tarafından klasik istatistik teorisinde kullanılmıştır. Kavramın fiziksel içeriğinin anlaşılmasında ve zenginleştirilmesinde termodinamik kapsamında Ludwig Boltzmann'ın çalışmaları önemli yer tutar. Boltzmann termodinamik olasılık kavramını geliştirerek, doğal fiziksel süreçlerin termodinamik olasılıkları yüksek olan durumları tercih ettiğini söyleyerek entropi ile olasılıklar arasında ilişki kurmuştur (Wehrl 1978).

Olasılık kuramlarının temel kavramlarından biri rasgele değişkenlerdir: bunlar belirli çıktıları belirli önsel olasılıklarla gerçekleşen değişkenlerdir. Bu tez çalışmasında sadece sonlu sayıda çıktısı olan rasgele değişkenler söz konusu olacaktır. Klasik bilişim kuramında Claude E. Shannon ve kuantum bilişim kuramında ise von Neumann bilgiyi olasılığın bir fonksiyonu olarak ele almıştır. Bunu somutlaştırmak için rasgele değişkenler içeren klasik veya kuantum mekaniksel sistemlerde değişkenlerin olası sonuçlarının önsel olasılıklarının verildiğini veya bilindiğini varsayalım. Sistemlerin bilgi içerikleri ya da bilinmezlikleri rasgele değişkenlerin önsel olasılıklarına bağlıdır. Olasılıkları yüksek olan durumların meydana gelmesi fazla bilgi içermezken, düşük olasılıklı durumların meydana gelmesi daha fazla bilgi içermektedir.

Bilişim kuramlarında sistemlerin bilişim içerikleri bilişim entropisi de denilen entropi kavramıyla nicelendirilir. Bu kavramın birbirine eşdeğer üç yorumu vardır:

1. Bir sistemdeki rasgele değişkenlerin olası sonuçlarıyla ilgili belirsizliğin; yani ölçümden önceki bilgisizliğin bir ölçüsüdür,
2. Sistemden elde edilebilecek bilginin, bilgi içeriğinin miktarının bir ölçüsüdür,

3.Sistemin bilgi içeriğini belirlemek yada depolamak için kullanılacak minimum fiziksel kaynak miktarının bir ölçüsüdür.

Bu bölümde klasik ve kuantum bilişim kuramında tanımlanan entropilerin temel özellikleri, bu iki bilişim kuramındaki entropiler arasındaki farklılıklar ve korelasyonlar açısından entropilerin anlamları incelenecektir.

4.1 Klasik Shannon Entropileri

N tane olası sonucu olan bir rasgele X değişkeniyle ilgili önsel olasılık dağılımı aşağıdaki gibi verilsin:

$$P = (p_1, p_2, \dots, p_N), p_i \in [0,1], \sum_i p_i = 1, \quad \forall i \quad (4.1)$$

Burada p_i i. sonucun gerçekleşme olasılığını göstermektedir. Böyle bir olasılık dağılımının Shannon entropisi:

$$H(P) = - \sum_{i=1}^N p_i \log p_i \quad (4.2)$$

şeklinde tanımlanır. Burada p_i olasılıklarında biri bir ve diğerleri sıfırsa sistem kesin olarak bilinen bir saf durumda demektir. Bu durumda sistemle ilgili belirsizlik sıfırdır ve ölçüm sonucu sistemden elde edilebilecek ek bir bilgi yoktur. Bu nedenle saf durumların Shannon entropisi sıfırdır.

p_i 'lerin hepsinin eşit ve $1/N$ olduğu olasılık dağılımlarına tekdüze (*uniform*) dağılımlar denir. Bu durum sistemle ilgili bilgisizliğin maksimum olduğu tek durumdur. Bunun sonucu olarak tekdüze dağılımlarda Shannon entropisi (4.2) bağıntısından da görüleceği gibi en yüksek değeri olan $\log N$ değerini alır. Klasik entropi hesaplarında

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \log x = 0 \quad (4.3)$$

bağıntısı, kesinlikle gerçekleşmeyecek seçeneklerin sistemle ilgili ölçümden önceki bilinmezliği değiştirmeyeceğini; yani bunların entropiye katkılarının olmayacağını ifade eder.

Shannon entropisi yukarıda bahsedilen özel durumlardaki özelliklerinin yanı sıra aşağıdaki özelliklere de sahip bir fonksiyondur.

1.Tanım olarak Shannon entropisi olasılıkların pozitif bir fonksiyondur:

$$H(P) \geq 0, \quad (4.4)$$

2.Olasılık dağılımlarının sürekli bir fonksiyondur,

3.Olasılık dağılımlarının konkav bir fonksiyondur;

$$H\left(\sum \alpha_i P_{(i)}\right) \geq \sum \alpha_i H(P_{(i)}) \alpha_i \in [0,1], \quad \sum_i \alpha_i = 1 \quad (4.5)$$

Burada $P_{(1)}=(p_1, p_2, \dots, p_N)$, $P_{(2)}=(q_1, q_2, \dots, q_N)$, vs. aynı rasgele değişkenle ilgili farklı olasılık dağılımlarıdır.

Konkavlık özelliğinin fiziksel anlamı şudur: olasılık dağılımlarının karışımı (*mixing*) sistemle ilgili bilgisizliği yani entropiyi artırır.

İki ve daha fazla sayıda rasgele değişkenli sistemler

İki rasgele X ve Y değişkenleri içeren bir sistem için olasılık dağılımları $p(x)$ ve $p(y)$ ile gösterilsin. Bu tür sistemlerle ilgili $p(x,y)$ bileşik olasılıkları ve $p(x|y)$ koşullu olasılıkları da tanımlıdır. Bileşik $p(x,y)$ olasılığı; X değişkeninin x ve Y değişkeninin de y değerinin birlikte gerçekleşmesi olasılığını gösterirken, Y'nin y olduğu (veya y olarak verilmesi) durumunda X'in x sonucunun gerçekleşmesi olasılığı $p(x|y)$ koşullu olasılığı ile verilir. Bileşik olasılık simetri özelliğine sahiptir. Hepsi pozitif olan bu olasılıklar arasındaki ilişkiler aşağıdaki gibidir:

$$\sum_{x,y} p(x,y) = 1 = \sum_x p(x) = \sum_y p(y)$$

$$p(y) = \sum_x p(x,y) \quad , \quad p(x) = \sum_y p(x,y) \quad (4.6)$$

$$p(x|y)p(y) = p(x,y) = p(y|x)p(x).$$

Buradaki son bağıntılar Bayes kuralları olarak bilinirler. Yukarıdaki toplamlar sonlu ve kesikli değerler üzerindedir. Her x ve y için $p(x,y) = p(x)p(y)$ koşulları sağlanıyorsa X ve Y ye bağımsız değişkenler denir. Bu durumda $p(x|y) = p(x)$ ve $p(y|x) = p(y)$ bağıntıları sağlanır.

İki rasgele değişken içeren sistemler için; bileşik entropi $H(X,Y)$, bağıl entropi $S(p(x)||q(x))$ ve koşullu entropi $H(X|Y)$ gibi entropiler tanımlanabilir. Bileşik entropi

$$H(X,Y) = - \sum_{x,y} p(x,y) \log p(x,y) \quad (4.7)$$

olup, bileşik olasılığın simetri özelliğinin sonucu olarak değişkenlerin simetrik bir fonksiyonudur: $H(X,Y) = H(Y,X)$. Bağımsız değişkenler için de $H(X,Y) = H(X) + H(Y)$ bağıntısı sağlanır. Rasgele değişkenler bağımsız değilse, sistemin entropisi:

$$H(X,Y) \leq H(X) + H(Y) \quad (4.8)$$

ile gösterilen toplam-altı (*subadditivity*) özelliğine sahiptir. Yani sistemin entropisi bileşenlerin entropileri toplamından daha küçüktür. Bu özellik bileşik sistemlerde bileşenler arasında korelasyonların bulunması durumunda (bileşenlerin birbirlerinden bağımsız olmama durumunda), bu korelasyonların sistemle ilgili ek bilgiler getirdiğini ve buna bağlı olarak da sistemin entropisinin azalacağını vurgular. Aşağıda $H(X,Y)$ 'nin ayrı ayrı $H(X)$ ve $H(Y)$ ' den daha büyük olduğu gösterilmektedir.

4.1.1 Klasik koşullu entropi

İki X, Y rasgele değişkeni için; Y 'nin bilinmesi durumunda X 'in bilgi içeriğinin nasıl olacağı koşullu entropi ile belirlenir. $H(X|y) = -\sum_x p(x|y) \log p(x|y)$ olmak üzere $H(X|Y)$ ile gösterilen koşullu entropi:

$$H(X|Y) = \sum_y p(y) H(X|y) \quad (4.9)$$

ortalama değeri olarak tanımlanır. $p(x, y) = p(x|y)p(y)$ bağıntısı kullanılırsa (4.9) bağıntısı:

$$H(X|Y) = -\sum_{x,y} p(x, y) \log p(x|y) \quad (4.10)$$

şeklinde de yazılabilir. Burada $\log p(x|y) = \log \frac{p(x,y)}{p(y)}$ ve $p(y) = \sum_x p(x, y)$ özellikleri kullanılırsa:

$$\begin{aligned} H(X|Y) &= -\sum_{x,y} p(x, y) \log p(x, y) + \sum_{x,y} p(x, y) \log p(y) \\ &= -\sum_{x,y} p(x, y) \log p(x, y) + \sum_y p(y) \log p(y) \\ &= H(X, Y) - H(Y) \end{aligned} \quad (4.11)$$

yazılabilir. Burada $H(X, Y)$ birleşik entropisi sistemin toplam belirsizliğini göstermektedir. Koşullu entropi niceliği herhangi sayıdaki rasgele değişken içinde benzer şekilde genellenebilir.

(4.10) ifadesindeki $p(x, y)$ ve $p(x|y)$ 'nin birer pozitif olasılık ifadesi olmasından ve logaritma fonksiyonunun özelliğinden dolayı klasik koşullu entropi pozitif bir niceliktir.

$$H(X|Y) \geq 0 \quad (4.12)$$

Eşitlik için gerek ve yeter koşul: Y'nin X'i tam olarak belirleyebiliyor olması; yani X' in Y'nin bir fonksiyonu olmasıdır. (4.12) bağıntısının diğer bir sonucu da birleşik entropinin bileşenlerin entropilerinde ayrı ayrı büyük olmasıdır:

$$H(X|Y) = H(X, Y) - H(Y) \geq 0 ,$$

$$H(Y|X) = H(X, Y) - H(X) \geq 0.$$

$$H(X, Y) \geq H(Y)$$

$$H(X, Y) \geq H(X) \quad (4.13)$$

(4.13) eşitsizliği klasik sistemlerde; sistemle ilgili belirsizliğin alt sistemlerdeki belirsizliklerden az olamayacağını vurgular. Kuantum entropiler için bu eşitsizliklerin geçerli olmadığı bu bölümün sonraki kısımlarında gösterilecektir.

Koşullu entropiyle ilgili önemli bir başka özellik, koşulun artmasının entropiyi azaltmasıdır: Her bir koşul sistemin bilinmezliğini azaltacağı için entropiyi de azaltır:

$$H(X|Y, Z) \leq H(X|Y) . \quad (4.14)$$

(4.14) eşitsizliğinin aşikâr bir sonucu da hiç koşulun olmadığı durumda entropinin koşul olan durumdan;

$$H(X|Y) \leq H(X) \quad (4.15)$$

şeklinde daha fazla olmasıdır.

4.1.2 Klasik bağıl entropi

Bağıl entropi aynı indeks kümesi üzerinde tanımlanan iki olasılık dağılımının yakınlığının ölçüsü olan uzaklık benzeri bir ölçüdür. $p(x)$ ve $q(x)$ aynı indeks kümesi

üzerinde tanımlanmış iki olasılık dağılımı olmak üzere, $p(x)$ dağılımının $q(x)$ dağılımına göre bağıl entropisi:

$$H(p(x)||q(x)) = \sum_x p(x) \log \frac{p(x)}{q(x)} \quad (4.16)$$

ifadesiyle tanımlanır. Klasik bağıl entropi $p(x) \neq 0$ iken $q(x)=0$ olduğu durumlarda sonsuz olurken diğer durumlarda sonlu değer alır.

Bağıl entropi uzaklık benzeri bir nicelik olsa da, simetri ve üçgen eşitsizliği özelliklerine sahip olmamasından dolayı bir metrik fonksiyonu değildir. Buna karşın ancak ve ancak iki olasılık dağılımının aynı olması durumunda sıfır, diğer durumlarda pozitif olmasından dolayı uzaklık benzeri bir fonksiyon işlevi görebilmektedir:

$$H(p(x)||q(x)) \geq 0 \text{ ve } H(p(x)||q(x)) = 0 \Leftrightarrow p(x) = q(x) \quad (4.17)$$

Bu ifadelerin ispatı için

$$\ln x \leq x - 1, \quad x \in \mathbb{R}^+$$

$$\log x \ln 2 \leq x - 1 \quad (4.18)$$

eşitsizliklerinden yararlanılabilir: Buradaki eşitlik için $x=1$ gerek ve yeter koşuldur. Bunlardan yararlanarak

$$\begin{aligned} H(p(x)||q(x)) &= \sum_x p(x) \log \frac{p(x)}{q(x)} = - \sum_x p(x) \log \frac{q(x)}{p(x)} \\ &\geq \frac{1}{\ln 2} \sum_x p(x) \left(1 - \frac{q(x)}{p(x)} \right) \end{aligned}$$

yazılabilir. Olasılıkların boylandırılmasından dolayı yukarıdaki ifadenin sağ tarafı sıfır olur. Böylece (4.17)'deki her iki özellik de ispatlanmış olur. Bu özelliklerinden dolayı

bağıl entropi korelasyonları nicelendirmede kullanışlı bir yöntemdir. Bu çalışmada da korelasyonları nicelendirmede bu entropi ifadesi kullanılacaktır.

4.1.3 Karşılıklı bilişim

Karşılıklı bilişim, iki rasgele değişken (olasılık dağılımı) için:

$$I(X:Y) = H(X) + H(Y) - H(X,Y) \quad (4.19)$$

ile tanımlanan karşılıklı bilişim, bu değişkenlerin ortak bilgi içeriğini nicelendiren bir kavramdır. Karşılıklı bilişim koşullu entropi ifadeleri yoluyla;

$$I(X:Y) = H(X) - H(X|Y) = H(Y) - H(Y|X) \quad (4.20)$$

şeklinde de tanımlanabilir. Bu nicelik bileşik olasılıkların simetri özelliğinden dolayı simetrik olup, (4.15) ve (4.7) eşitsizliklerinden dolayı da pozitifdir. Klasik koşullu entropinin pozitif olması (4.20) bağıntısında kullanılırsa, karşılıklı bilişimin bileşenlerin herhangi birinin dolayısıyla en küçüğünün entropisiyle;

$$I(X:Y) \leq H(X) \quad , \quad I(X:Y) \leq H(Y) \quad (4.21)$$

üstten sınırlı olduğu görülür.

4.2 Von Neumann Entropisi

Saf veya saf olmayan bir kuantum durumu verildiğinde tüm gözlenebilirlerle ilgili önsel olasılık dağılımları da bilinebileceği için, verilen kuantum durumu olasılık dağılımlarıyla aynı işlevi görmektedir. Bu açıdan kuantum durumları klasik rasgele değişkenlerin klasik karşılıklarıdır. Böylece klasik Shannon entropilerinin kuantum durumlarına genellemesi yapılarak bu entropiye von Neumann entropisi denir. Bu entropi verilen bir ρ durumu için,

$$S(\rho) = -Tr(\rho \log \rho) \quad (4.22)$$

şeklinde tanımlanır. Yoğunluk işlemcileri Hermitelesel işlemciler olduğu için

$$\rho = \sum_x \lambda_x |\lambda_x\rangle\langle\lambda_x| \quad (4.23)$$

spektral ayrışımına sahiptir. Burada λ_x 'ler ρ 'nun $|\lambda_x\rangle$ öz durumlarındaki özdeğerlerini göstermektedir. (4.23) bağıntısında (4.22) kullanılarak

$$S(\rho) = -\sum_x \lambda_x \log \lambda_x \quad (4.24)$$

yazılabilir. Logaritma fonksiyonunun konveks olmasından dolayı von Neumann entropisi özdeğerlerin konkav bir fonksiyonudur. Görüldüğü gibi von Neumann entropisi yoğunluk işlemcisinin özdeğerleriyle belirlenen Shannon entropisine eşittir. Yoğunluk işlemcisinin özdeğerlerinin

$$\lambda_x \in [0,1] , \quad \sum_i \lambda_x = 1 \quad (4.25)$$

olmasından ve logaritma fonksiyonunun özelliğinden dolayı; von Neumann entropisi de Shannon entropisi gibi daima pozitifdir. Ayrıca von Neumann entropisi de; özdeğerlerden biri bir diğerlerinin sıfır olduğu saf durumlarda sıfır ve bütün özdeğerlerin eşit ve $1/N$ olduğu en saf olmayan durumlarda ise maksimum değeri olan $\log N$ değerini alır (N sistemin olası durumlarının sayısıdır).

Klasik Shannon entropisinde olduğu gibi bileşik sistemler için kuantum birleşik entropi, kuantum koşullu entropi ve kuantum karşılıklı bilişim de tanımlanabilir. A ve B alt sistemlerinden oluşan iki parçalı bir sistem için birleşik entropi:

$$S(A, B) = -Tr(\rho_{AB} \log \rho_{AB}) \quad (4.26)$$

şeklinde tanımlanır. Burada ρ_{AB} bileşik sistemin yoğunluk işlemcisini göstermektedir. İki parçalı sistemlerin saf durumları için Schmidt ayrışımının sonucu olarak indirgenmiş yoğunluk işlemcilerinin sıfırdan farklı özdeğerleri aynı çıkar. Bu yüzden iki parçalı sistemlerin saf durumları için alt sistemlerin entropileri birbirine eşittir:

$$S(\rho_A) = S(\rho_B). \quad (4.27)$$

Burada ρ_A ve ρ_B , $\rho_{AB} = |\psi_{AB}\rangle\langle\psi_{AB}|$ saf durumunun indirgenmiş yoğunluk işlemcileridir.

4.2.1 Kuantum bağıl entropi

Korelasyonların nicelendirilmesinde önemli yer tutan kuantum bağıl entropi yoğunluk işlemcileri ile verilen iki olasılık dağılımının birbirlerine olan uzaklığını ya da farklılığını gösterir. Varsayalım ki ρ ve σ iki yoğunluk işlemcisi olsun. ρ ' nun σ ' ya göre bağıl entropisi;

$$S(\rho||\sigma) = Tr(\rho \log \rho) - Tr(\rho \log \sigma) \quad (4.28)$$

şeklinde tanımlanır. Bu nicelik her iki argümana göre birleşik konveks bir fonksiyondur (Nielsen 2000). Klein eşitsizliğinin bir sonucu olarak kuantum bağıl entropi de pozitif bir niceliktir.

$$S(\rho||\sigma) \geq 0 \quad (4.29)$$

(4.29) ifadesinde eşitlik için gerek ve yeter koşul $\rho=\sigma$ olmasıdır.

Kuantum bağıl entropi de klasik bağıl entropi gibi bazı durumlarda sonsuz çıkabilir. σ 'nın çekirdeği ile ρ 'nun desteğinin aşikâr olmayan bir kesişiminin olduğu durumlarda sonsuz, diğer durumlarda sonlu değerler alır.

4.2.2 Kuantum koşullu entropi

Klasik Shannon entropisinde olduğu gibi kuantum koşullu entropi de benzer olarak tanımlanır ve iki parçalı bir bileşik sistem için

$$S(A|B) = S(A, B) - S(B) \quad (4.30)$$

biçiminde yazılır. Bu ifadede $S(A, B)$ birleşik entropiyi göstermektedir. Kuantum koşullu entropinin klasik koşullu entropiden önemli bir farkı vardır. Klasik koşullu entropi her durumda pozitifken, kuantum koşullu entropi negatif de olabilmektedir. Bunun fiziksel anlamı, bileşik kuantum durumlarının parçalarından daha az belirsizlik içerebilmesidir. Bileşik sistemin bilgi içeriğindeki (entropi) bu azalmanın sebebi ise sistemin bileşenleri arasında var olan klasik karşılıkları olmayan kuantum korelasyonlardır. Bu korelasyonlar içerdikleri bilgilerle bileşik sistemdeki belirsizliği, bilgisizliği azaltmaktadırlar.

4.2.3 Kuantum karşılıklı bilişim

İki olasılık dağılımının ortak bilgi içeriği için tanımlanan karşılıklı bilişim ifadesi kuantum mekaniğinde de aynı şekilde tanımlanabilir.

$$I(A: B) = S(A) + S(B) - S(A, B) \quad (4.31)$$

$$\begin{aligned} I(A: B) &= S(A) - S(A|B) \\ &= S(B) - S(B|A) \end{aligned} \quad (4.32)$$

Klasik olarak eşdeğer olan (4.31) ve (4.32) ifadeleri, koşul olarak verilen durum ölçümle belirlenmiş ise, kuantumda eşdeğer değildir. Çünkü (4.32) ifadesindeki koşullu entropi ifadesinde koşulların bilinmesi için koşul durumlarına ölçüm uygulanması gerekir. Oysa ölçümler kuantum durumlarının yapısını ve korelasyonlarını bozarlar. Sadece klasik durumlar ölçümden etkilenmezler.

Klasik olarak eşdeğer bu ifadelerin kuantumdaki farklılığı sistemdeki kuantum korelasyonların bir ölçüsü olarak alınarak, toplam kuantum korelasyonu nicelendiren kuantum diskort kavramı tanımlanır.

Kuantum entropilerin kuantum bilişim kuramındaki önemli uygulamaları olan önemli bir özelliği de güçlü toplam-altı (*strong subadditivity*) özelliğidir. Bu özellik herhangi üç parçalı bir kuantum sistemi için

$$S(A) + S(B) \leq S(A, C) + S(B, C) \quad (4.33)$$

$$S(A, B, C) + S(B) \leq S(A, B) + S(B, C) \quad (4.34)$$

şeklinde yazılır. Bu iki ifadenin eşdeğerliğini göstermek; yani birinin diğeri için gerek ve yeter koşul olduğunu göstermek zor değildir (Nielsen ve Chuang 2000).

5.KORELASYONLARIN SINIFLANDIRILMASI VE NİCELENDİRİLMESİ

Bu bölümde bileşik sistemlerde var olan tüm korelasyon türlerinin sınıflandırılması ve nicelendirilmesiyle ilgili son yıllarda geliştirilen yaklaşımlar ele alınacaktır. Kesim 5.1’ de kuantum durumlarının ölçümden etkilenme durumlarına göre korelasyonların; klasik korelasyonlar ve kuantum korelasyonlar olarak genel sınıflandırılmaları konusunda S. Luo’nun çalışmaları tartışılmaktadır. Kesim 5.2’ de ise; çok parçalı sistemlerdeki toplam korelasyon kuantum dolanıklık, kuantum diskort, kuantum dissonans ve klasik korelasyonlar olarak bütüncül bir yaklaşımla ele alınmaktadır. V. Vedral ve çalışma arkadaşları tarafından geliştirilen bu yaklaşımda korelasyonlar, bağıl entropinin uygun kümelerdeki minimumlarıyla nicelendirilmektedir.

5.1 Korelasyonların Ölçüm Etkisiyle Sınıflandırılması

Kuantum mekaniğinin iki karakteristik özelliği, üstüste gelme ve sıradeğişmeme özellikleridir. Kuantum korelasyonların temelinde üstüste gelme özelliği olsa da korelasyonların nicelendirilmesinde sıradeğişmeme özelliği de önemli rol oynar.

Sıradeğişmeme özelliğinden dolayı ölçümler genellikle sistemin yapısını bozar ve sistemin kuantum karakterini yok eder. Buna bağlı olarak da sistemde var olan kuantum korelasyonlar kaybolur. Klasik fizikte ise sistemi etkilemeyecek ölçüm ilke olarak her zaman mümkündür. Ölçüm etkisiyle kaybolan korelasyonlar ya da sistemin ölçümden etkilenme miktarı, toplam korelasyonlar içinde kuantum korelasyonları nicelendirir. Burada iki parçalı bir sistemdeki korelasyonların, kuantum korelasyonlar ve klasik korelasyonlar olarak ayrımı yapılacaktır (Luo 2008).

İki parçalı bir sistemde parçalar arasındaki toplam korelasyon karşılıklı bilişim ile nicelendirilir. Karşılıklı bilişim, parçaların ortak bilgi içeriğini, yani parçalardan birini bilmekle diğer parça hakkında ne kadarlık bilgiye sahip olduğunu gösterir. Alt sistemleri A ve B olarak adlandırılan iki parçalı bir sistem için karşılıklı bilişim:

$$I(A:B) = S(\rho_A) + S(\rho_B) - S(\rho_{AB}) \quad (5.1)$$

bağıntısıyla hesaplanır. Burada ρ sistemin yoğunluk işlemcisini $\rho_A = Tr_B \rho$ ve $\rho_B = Tr_A \rho$ ise sırasıyla birinci ve ikinci parçaların indirgenmiş yoğunluk işlemcilerini göstermektedir.

5.1.1 Toplam kuantum korelasyon

Sistem bir ρ durumunda olsun ve sisteme bir tam von Neumann ölçümü (projeksiyon ölçümü) uygulansın. Sistemin ölçüm uygulanmış durumu ρ_{AB}' :

$$\rho_{AB}' = \sum_{ij} P_i^{(A)} \otimes P_j^{(B)} \rho_{AB} P_i^{(A)} \otimes P_j^{(B)} \quad (5.2)$$

olarak yazılır. Bu durum yazılırken sisteme tam ölçüm bazlarının hepsinde ölçüm işlemcisi uygulanır ve bu durumlar bir araya getirilir, fakat kesinlikle ölçüm sonucuna bakılmaz. Burada $\{P_j^{(A)}\}$ birinci parçanın, $\{P_j^{(B)}\}$ ikinci parçanın ve $\{P_i^{(A)} \otimes P_j^{(B)}\}$ ise bileşik sistemin tam von Neumann ölçüm işlemcileridir. Eğer $\rho_{AB}' = \rho_{AB}$ oluyorsa sistem ölçümde etkilenmiyor demektir ve böyle durumlara klasik durumlar denir. Klasik bir durumun tüm pozitif tam sayı kuvvetleri de klasik durumlardır. Verilen bir ρ_{AB} yoğunluk işlemcisi klasik değilse bile (5.2)'deki gibi onun bir tam ölçüm uygulandıktan sonraki hali bir klasik durumdur.

Ölçüm uygulanmış durum olan ρ_{AB}' bir klasik durumdur ve sistemdeki toplam klasik korelasyon ρ_{AB}' durumunun karşılıklı bilişimi ile nicelendirilir. $I(A:B)$, sistemin toplam korelasyonu ve $I(A':B')$ toplam klasik korelasyon olmak üzere $Q_M(\rho_{AB})$ ile gösterilen toplam kuantum korelasyonunu:

$$Q_M(\rho_{AB}) = I(A:B) - I(A':B') \quad (5.3)$$

ifadesinden belirlenir. Burada:

$$I(A':B') = S(\rho_A') + S(\rho_B') - S(\rho_{AB}') \quad (5.4)$$

tanımı yapılmıştır.

5.1.2 Klasik durumlarla ilgili temel teoremler

Bu kesimde klasik durumlarla ilgili olarak iki temel teoremin ifadesi verilmiştir. Teoremlerin açık ispatları Ek 1’de yapılmıştır.

Teorem 5.1 (Luo 2008)

Eğer ρ_{AB} , $\{P_i^{(A)} \otimes P_j^{(B)}\}$ yerel ölçümlerine göre klasik bir durum ise $\{P_i^{(A)} \otimes P_j^{(B)}\}$, $\{P_j^{(A)}\}$ ve $\{P_j^{(B)}\}$ sırası ile ρ_{AB} , $\rho_A = Tr_B \rho_{AB}$ ve $\rho_B = Tr_A \rho_{AB}$ durumlarının öz-izdüşümleridir.

Teorem 5.2 (Luo 2008)

İki parçalı sistemin indirgenmiş yoğunluk işlemcileri

$$\rho^A = Tr_B \rho = \sum_i p_i^A P_i^{(A)}, \quad \rho^B = Tr_A \rho = \sum_j p_j^B P_j^{(B)}$$

şeklinde spektral ayrışımaya sahip olsunlar. Bu durumda aşağıdaki ifadeler eşdeğerdir.

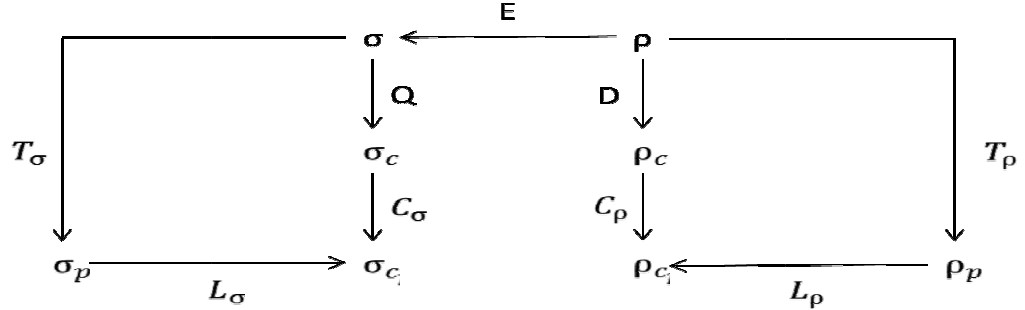
- (i) ρ bir klasik durundur.
- (ii) ρ , $\{P_i^{(A)} \otimes P_j^{(B)}\}$ işlemcilerinin her biriyle sıradışıdır.
- (iii) ρ aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\rho = \sum_{i,j} p_{ij} P_i^{(A)} \otimes P_j^{(B)}$$

5.2 Bağlı Entropiyle Korelasyonların Sınıflandırılmasına Bütüncül Bir Yaklaşım

Burada korelasyonları nicelendirmede kuantum durumlarının birbirlerine uzaklığının bir ölçüsü olan bağlı entropi kullanılacaktır. Korelasyonların nicelendirilmeleri açısından sistemin bulunabileceği tüm durumlar göz önüne alınır. Bu durumlar; dolanık, ayrılabilir, klasik ve çarpım durumlarıdır. Verilen bir durumdaki olası tüm

korelasyonlar bağıl entropilerin bir uzaklık fonksiyonu gibi kullanılmasıyla şekil (5.1)'deki gibi görselleştirilebilir (Vedral 2010).



Şekil 5.1 Sistemin olası durumları ve ilgili korelasyonlar

Burada okların anlamı şudur: x' den y' ye y şeklinde bir ok varsa, bağıl entropi ölçüsüne göre x' e en yakın durum y demektir. Ayrıca dolanıklık dahil her türlü korelasyona sahip olabilen sistemin en genel bir yoğunluk işlemcisini; σ , ' ya en yakın ayrılabilir durumu, c alt indisiyle işaretlenen ortadaki durumlar klasik durumları ve en altta p alt indisiyle işaretlenenlerde çarpım durumlarını göstermektedir.

Bu bütüncül yaklaşımda verilen bir durumunun içerdiği E dolanıklık, D kuantum diskort, Q kuantum dissonans ve C klasik korelasyon miktarı aşağıdaki tanımlarla nicelendirilir:

$$(5.5)$$

$$(5.6)$$

$$(5.7)$$

$$(5.8)$$

İkinci bölümde de belirtildiği gibi; ilk bağıntıdaki tüm ayrılabilir durumlar kümesini, tüm klasik durumlar kümesini ve tüm çarpım durumları kümesini göstermektedir. Buradaki minimumlar her bir bağıntıda işaret edilen kümeler üzerinden alınır. Örnek

olarak (5.5) bağıntısında σ , tüm \mathcal{S} ayrılabilir durumlar uzayı taranarak araştırılan ρ' ya en yakın ayrılabilir durumdur.

Aşağıda açıkça gösterileceği gibi;

(i). Verilen bir duruma en yakın çarpım durumu, verilen durumun indirgenmiş yoğunluk işlemcileri ile oluşturulan çarpım durumudur,

(ii) Verilen bir duruma en yakın klasik durum ise yukarıda tanıtılan duruma bir tam von Neumann ölçümü uygulanmış durumdur,

(iii) Tüm bu yapılanlar bir arada düşünülürse, korelasyonlar arasında aşağıdaki bağıntılara ulaşılır:

$$T_\rho = D + C_\rho - L_\rho \quad , \quad T_\sigma = D + C_\sigma - L_\sigma . \quad (5.9)$$

Korelasyonlara bütüncül yaklaşım, sistemlerde var olabilecek tüm korelasyonları yukarıdaki gibi basit toplamsal bağıntılarla ifade etme imkânı sağlamaktadır. Bu bölümün diğer kesimlerinde burada ifade edilen önermeler ve (5.9) bağıntısı ispatlanmaktadır.

5.3 Klasik Korelasyonlar

Klasik durumların tanıtımında da belirtildiği gibi bu durumlar ölçümden etkilenmeyen durumlardır. Bu nedenle sistemin tamamına ya da herhangi bir parçasına uygulanan bir tam ölçüm sistemin durumunu değiştirmez.

Klasik durumlarda var olan klasik korelasyonlar, bir bileşik sistemden klasik yollarla elde edilebilecek bilgilerin kaynağını oluştururlar. Sistemin geri kalanını rahatsız etmeden yani korelasyonlarını bozmadan sistemin herhangi bir bileşeni ile ilgili yerel olarak ulaşılabilen bilgiler sistemle ilgili klasik bilgilerdir.

Klasik korelasyonların nicelendirilmesi ile ilgili bir yöntem bölüm 5.1' de tanıtılmıştı. Orada, sistemdeki toplam klasik korelasyonlar, sistemin ölçüm uygulanmış durumunda var olan korelasyon miktarı olarak nicelendirildi. Bu yöntemden farklı olarak bağıl entropi üzerinden de klasik korelasyonların nicelendirimi yapılabilir. Bahsedildiği gibi bağıl entropi korelasyonların nicelendirilmesinde uzaklık fonksiyonu gibi kullanılmaktadır.

5.3.1 Temel teoremler

Verilen bir durumdaki klasik korelasyonların hesabı için ilk olarak verilen duruma en yakın klasik durum belirlenir. Bu durumun belirlenmesi aşağıdaki teoreme göre yapılır.

Teorem 5.3 (Vedral 2010)

Verilen bir ρ durumuna en yakın klasik durum:

$$\rho'_c = \sum_{\vec{k}} |\vec{k}\rangle \langle \vec{k}| \rho |\vec{k}\rangle \langle \vec{k}| (5.10)$$

biçimindedir. Burada $\{|\vec{k}\rangle\}$ vektörleri ρ'_c durumunun özbazlarıdır.

İspat: Verilen bir ρ durumuna en yakın klasik durum ρ'_c ise, başka herhangi bir klasik ρ_c durumunun ρ ' ya göre bağıl entropisi için:

$$S(\rho || \rho_c) - S(\rho || \rho'_c) \geq 0. (5.11)$$

yazılabilir. Eşitlik için gerek ve yeter koşul $\rho'_c = \rho_c$ olmasıdır. ρ'_c durumunun özbazları $\{|\vec{k}\rangle\}$ olmak üzere, aşağıdaki gibi kurulan

$$\rho_c = \sum_{\vec{k}} |\vec{k}\rangle \langle \vec{k}| \rho |\vec{k}\rangle \langle \vec{k}| (5.12)$$

klasik durumu göz önüne alınsın. (5.11)' in sol tarafındaki ilk terim için

$$S(\rho || \rho_c) = -Tr[\rho \log \rho_c] - S(\rho)$$

$$\begin{aligned}
&= -Tr\left[\sum_{\vec{k}} |\vec{k}\rangle\langle\vec{k}|\rho\log\rho_c\right] - S(\rho) \\
&= -Tr\left[\sum_{\vec{k}} |\vec{k}\rangle\langle\vec{k}|\rho|\vec{k}\rangle\langle\vec{k}|\log\rho_c\right] - S(\rho) \\
&= S(\rho_c) - S(\rho) \quad (5.13)
\end{aligned}$$

yazılabilir. Burada ikinci eşitlikte $\sum_{\vec{k}} |\vec{k}\rangle\langle\vec{k}| = I$ tamlık bağıntısı kullanıldı. (5.13)' de son eşitlik yazılırken $|\vec{k}\rangle\langle\vec{k}|$ izdüşüm işlemcilerinin $(|\vec{k}\rangle\langle\vec{k}|)^2 = |\vec{k}\rangle\langle\vec{k}|$ idempotent özelliği, $Tr(A^2B) = Tr(ABA)$ iz özelliği ve $|\vec{k}\rangle\langle\vec{k}|$ işlemcileri ρ_c ' nin öz-izdüşüm işlemcileri olduklarından $\log\rho_c$ ile (daha genel olarak ρ_c ' nin herhangi bir fonksiyonuyla) sıradegişme özelliği kullanıldı.

(5.11) bağıntısının sol tarafındaki ikinci terimde benzer şekilde değerlendirilirse:

$$\begin{aligned}
S(\rho || \rho'_c) &= -Tr\left[\sum_{\vec{k}} |\vec{k}\rangle\langle\vec{k}|\rho|\vec{k}\rangle\langle\vec{k}|\log\rho'_c\right] - S(\rho) \\
&= -Tr(\rho_c\log\rho'_c) - S(\rho) \quad (5.14)
\end{aligned}$$

ifadesine ulaşılır. Bulunan (5.13) ve (5.14) ifadeleri (5.11)' de yerlerine konulduğunda

$$S(\rho || \rho_c) - S(\rho || \rho'_c) = -S(\rho_c || \rho'_c) \geq 0 \quad (5.15)$$

elde edilir. Bağıl entropinin negatif olmama özelliğinden dolayı (5.15) ifadesinin doğru olabilmesi için gerek ve yeter koşul $S(\rho_c || \rho'_c) = 0$ olmasıdır: bunun için de $\rho_c = \rho'_c$ gerek ve yeter koşuldur.

Çarpım durumları hiçbir korelasyon içermeyen durumlardır. Klasik korelasyonların hesabında bağıl entropilerin kullanımı durumunda, yukarıdaki teoreme göre belirlenen en yakın klasik durumun sisteme en yakın çarpım durumuna olan uzaklığı, klasik

korelasyonları nicelendirir. Burada sisteme en yakın çarpım durumu da aşağıdaki önerme yoluyla belirlenir.

Önerme 5.1 (Vedral 2010)

Bağıl entropi ölçüsüne göre N parçalı bir bileşik sistemin verilen bir ρ durumuna en yakın çarpım durumu, ρ durumunun indirgenmiş yoğunluk işlemcilerinin tensörel çarpımıyla oluşturulan

$$\rho'_p = \rho_1 \otimes \dots \otimes \rho_N \quad (5.16)$$

çarpım durumudur. Burada ρ'_i 'ler, i. parçanın (ρ' nun i dışındaki bileşenleri üzerinden kısmi iz alınarak bulunan) indirgenmiş yoğunluk işlemcileridir.

İspat: Varsayalım ki $\alpha = \alpha_1 \otimes \alpha_2 \dots \otimes \alpha_N$, ρ' ya en yakın çarpım durumu olsun. Bu durumda

$$S(\rho || \rho'_p) - S(\rho || \alpha) \geq 0$$

olacağından, $-Tr(\rho \log \rho'_p) + Tr(\rho \log \alpha) \geq 0$ ve daha açık olarak

$$-Tr[\rho \log(\rho_1 \otimes \dots \otimes \rho_N)] + Tr[\rho \log(\alpha_1 \otimes \alpha_2 \dots \otimes \alpha_N)] \geq 0 \quad (5.17)$$

yazılabilir. (5.17) ifadesinde iz işlemcisinin çizgisellik özelliği ve tensörel çarpımların logaritma fonksiyonundaki toplam kuralları kullanılırsa aşağıdaki ifadeye ulaşılır:

$$-\sum_{i=1}^N Tr(\rho_i \log \rho_i) + \sum_{i=1}^N Tr(\rho_i \log \alpha_i) = -S(\rho'_p || \alpha) \geq 0.$$

Bağıl entropinin negatif olmama özelliği tekrar kullanılırsa tek çözüm $S(\rho'_p || \alpha) = 0$ durumudur. Bunun için gerek ve yeter koşul $\rho'_p = \alpha$ olmasıdır. Sonuç olarak ρ' ya en yakın çarpım durumu (5.16) ile verilen ρ'_p durumudur.

Teorem 5.4(Vedral 2010)

Verilen bir ρ durumunun, (5.16) ile verilen ρ'_p indirgenmiş durumlarının çarpım durumu ile bağlı entropisi; aralarındaki toplam $I(\rho: \rho'_p)$ karşılıklı bilişime eşittir ve bu karşılıklı bilişim ifadesi de entropileri arasındaki farktır:

$$\begin{aligned} S(\rho||\rho'_p) &= I(\rho: \rho'_p) \\ &= S(\rho'_p) - S(\rho) \\ &= \sum_i S(\rho_i) - S(\rho). \end{aligned} \quad (5.18)$$

İspat: İz işlemcisinin çizgisellik özelliği ve logaritma fonksiyonunun toplama özellikleri kullanılırsa;

$$\begin{aligned} S(\rho||\rho'_p) &= -Tr(\rho \log \rho'_p) + Tr(\rho \log \rho) \\ &= -\sum_i Tr(\rho_i \log \rho_i) + Tr(\rho \log \rho) \\ &= \sum_i S(\rho_i) - S(\rho) \\ &= S(\rho'_p) - S(\rho) \end{aligned} \quad (5.19)$$

biçiminde yazılır. Burada $\rho'_p = \rho_1 \otimes \dots \otimes \rho_N$, ρ' nun indirgenmiş yoğunluk işlemcilerinin tensör çarpımlarıyla oluşturulmuş çarpım durumudur.

Sonuç olarak C ile gösterilen klasik korelasyon niceliği:

$$\begin{aligned}
 C &= \min_{\rho_p \in P} S(\rho'_c || \rho_p) \\
 &= S(\rho'_c || \rho'_p) \\
 &= S(\rho'_p) - S(\rho'_c) \qquad (5.20)
 \end{aligned}$$

ifadesinden hesaplanır. Burada ρ'_c , ρ' ya en yakın klasik durumu, ρ_p çarpım durumlarını, ρ'_p ise ρ durumuna en yakın çarpım durumunu göstermektedir.

5.3.2 İki parçalı sistemler için klasik korelasyonların özellikleri

İki parçalı sistemlerdeki klasik korelasyon niceliği C aşağıdaki özellikleri sağlar.

1. Çarpım durumları hiçbir korelasyon içermediği için bu durumlarda C=0 olur.
2. C yerel üniter dönüşümler altında değişmez kalır. Herhangi bir baz dönüşümü alt sistemlerdeki korelasyonları değiştirmez.
3. C, yerel işlemler altında artmaz.
4. A ve B parçalarından oluşmuş iki parçalı saf durumlar için $C=S(\rho_A)=S(\rho_B)$ bağıntıları sağlanır. Klasik korelasyonlar alt sistemlere göre simetriktir. Bu özellik iki parçalı saf durumlardaki Schmidt ayrışımının ve bağıl entropinin özdeğerlere bağlı olmasının doğal bir sonucudur (Henderson ve Vedral 2001).

5.4 Kuantum Korelasyonlar

Bileşik sistemlerde sistemin bileşenleri arasında, klasik yollarla elde edilemeyecek bilgiler de vardır. Bu bilgilerin kökeninde kuantum korelasyonlar bulunur. Bu kısımda bileşik sistemlerde ki kuantum korelasyonların tanıtımı ve nicelendirilmesi yapılacaktır.

5.4.1 Kuantum dolanıklık

Sistemlerin bütünlükçü bir özelliği olan kuantum dolanıklık, bileşik sistemlerde klasik karşılığı olmayan önemli bir korelasyon türüdür. İlk olarak 1935 yılında, EPR makalesi (Einstein 1935) etrafındaki tartışmalarla fark edilen ancak son yirmi yıldaki çalışmalarla ortaya çıkan kuantum bilişim ve kuantum bilgisayar alanlarındaki gelişmelerle yoğun araştırmaların konusu olan dolanıklık kavramı, kuantum mekaniğinin yerel olmayan özelliklerini de içeren (Yerellik ilkesi kuantum mekaniğinde dolanık durumlar dışında geçerli olan bir ilkedir.) bileşik sistemlerin bileşenleri arasında var olan özel kuantum korelasyonları vurgular. Kuantum bilişim kuramının çoğu uygulaması için (kuantum anahtar dağılımı, kuantum yoğun kodlama, kuantum uzaktarım vb.) kuantum dolanıklık: işlenebilir, aktarılabilir ve tüketilebilir başlıca kaynaklardan biridir.

Bir bileşik sistemin bileşenleri arasında kuantum dolanıklık bulunup bulunmadığı ile ilgili birçok kriter geliştirilmiştir. Bu kriterler farklı yetkinliklerde olup, her durumda gerek ve yeter koşul olabilecek bir kriter mevcut değildir. Ayrıca var olan kuantum dolanıklığın nicelendirilmesinin bu kriterlerle yapılması çoğu durumda mümkün olmamaktadır. Bu nedenle bu kısımda kuantum dolanıklıktan kaynaklanan korelasyonların nicelendirilmesine yoğunlaşılacaktır. Son yirmi yıl içerisinde bu korelasyonların nicelendirilmelerine yönelik de çeşitli yöntemler önerilmiştir. Tüm bu yöntemlerin değerlendirilebilmeleri için ilk olarak kuantum dolanıklık nicelendirmelerinde kullanılacak yöntemlerin sağlaması gereken koşulları belirlemek uygun olacaktır. Kuantum dolanıklık niceliği E ile gösterilecek olursa, E aşağıdaki koşulları sağlaması gerekir.

1. E ancak ve ancak verilen durum ayrılabilirse sıfır olmalıdır.

2. Yerel üniter dönüşümler altında E değişmez kalmalıdır.

3.Yerel ölçümler ve klasik haberleşmeler E değerini artırmamalıdır (Vedral 1997).

Bu koşullar altında dolanıklığın nicelendirilmesi ile ilgili aday yöntemler değerlendirilecek olursa; bağıl entropi tüm bu koşulları sağlaması nedeniyle tercih edilen yöntemdir. Bağıl entropiler yoluyla dolanıklık nicelendirilmesine dolanıklığın bağıl entropisi (*relative entropy of entanglement*) denir. Bu yöntemin tercih edilmesinin diğer bir nedeni ise bu yöntemin alt sistemlerin sayısından ve boyutundan bağımsız olmasıdır.

Dolanıklık içeren farklı saf durumlar için bağıl entropinin sonsuz çıkması nedeniyle bu durumlardaki korelasyonların bu yöntemle nicelendirilme imkânı yoktur. Fakat aşağıdaki teorem saf durumlar içinde dolanıklığın bağıl entropisini hesaplama imkânı tanır.

Teorem 5.4(Vedral 1998)

ρ bir saf durum olsun, bu saf durum iki parçalı olarak düşünülebilir ve Schmidt bazlarında aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\rho = \sum_{n_1 n_2} \sqrt{p_{n_1} p_{n_2}} |e_{n_1} f_{n_2}\rangle \langle e_{n_1} f_{n_2}| \quad (5.21)$$

Bu durumda dolanıklığın bağıl entropisi:

$$E = - \sum_n p_n \log p_n \quad (5.22)$$

olacak şekilde indirgenmiş von Neumann entropisine eşittir.

Saf olmayan durumlarda dolanıklığın bağıl entropisinin hesaplanmasında verilen bir duruma en yakın ayrılabilir durumun belirlenmesi önemli bir problemdir ve bu konuda nümerik hesaplarda dahil birçok yöntem önerilmiştir (Vedral 1998). Bu çalışmada bu yöntemlere değinilmeyecektir.

ρ durumunun durumlar uzayından var olan ayrılabilir durumlar σ olmak üzere; ρ' nun içerdiği kuantum dolanıklık miktarı E , (5.5)'de verilen $E = \min_{\sigma \in S} S(\rho || \sigma)$ ifadesinden hesaplanır. Verilen duruma ρ durumuna en yakın ayrılabilir durum σ'_ρ ise kuantum dolanıklık miktarı:

$$E = S(\rho || \sigma'_\rho) \quad (5.23)$$

bağıntısından belirlenir.

5.4.2 Kuantum diskort

İlk olarak H. Ollivier ve W.H. Zurek tarafından 2001 yılında farkına varılan kuantum diskort (Zurek 2002), bileşik sistemlerde dolanıklıktan farklı bir tür kuantum korelasyonu betimler. Aynı kavram aynı yıl içerisinde L. Henderson ve V. Vedral tarafından da öngörülmüştür (Henderson 2001). Diskort kavramının ortaya çıkışına kadar bileşik sistemlerde var olan tek kuantum korelasyon türü kuantum dolanıklık olarak anlaşılmaktaydı. Doksanlı yılların sonlarına doğru yapılan birçok çalışmada dolanıklık hiç yokken yada çok azken dahi bazı bileşik sistemlerde klasik korelasyonlarla elde edilemeyecek kuantum avantajların olabildiği gösterilmiştir. Örnek olarak; kuantum kriptolojide dolanık olmayan kuantum durumları kullanılmakta ve bu durumlar klasik kriptolojiyle elde edilemeyecek üstünlükler getirmektedir. Diğer önemli bir örnek de bölüm 6' da incelenecek olan DQC1 durumlarıdır. Bu durumlarda sistem çok az dolanıklık içermesine rağmen kuantum bilgisaymsal hızlanmalar olabilmektedir.

Özetle kuantum korelasyonlar sadece dolanıklığa indirgenemez, bileşik sistemlerde korelasyonlardan kaynaklanan kuantum üstünlüklerin kaynağı yalnızca dolanıklık değildir. Kuantum diskort bileşik sistemlerdeki tüm kuantum korelasyonları nicelendiren dolanıklıktan daha genel bir kavramdır. Sistemdeki tüm klasik olmayan korelasyonların ifadesidir.

Karşılıklı bilişim ifadesi iki parçalı sistemler için bileşenler arasındaki toplam korelasyonun bir ifadesi olarak kullanılabilir. Her bir parçası sırasıyla A ve B olarak

gösterilen iki parçalı bir sistem için karşılıklı bilişimin klasik olarak eşdeğer iki ifadesi Bayes kuralları kullanılarak:

$$I(A: B) = H(A) + H(B) - H(A, B) \quad (5.24)$$

$$J(A: B) = H(A) - H(A|B) \quad (5.25)$$

olarak yazılabilir. Burada $S(A)$, $S(B)$ ve $S(A,B)$ Shannon entropi fonksiyonlarını, $S(A|B)$ ise koşullu entropi fonksiyonunu göstermektedir. (5.24) ifadesinde Shannon entropileri yerine von Neumann entropileri kullanılarak herhangi bir kuantum durumuna genellemesi yapılabilir. (5.25) ifadesinin ise kuantum durumlarına genellemesi yapılamaz. Bunun sebebi koşullu entropinin kuantum mekaniksel anlamının farklı olmasıdır. Klasik koşullu entropi her zaman pozitif bir niceliktir, fakat kuantum koşullu entropi negatif değerlerde olabilir. Çünkü kuantum mekaniksel olarak sistemler bileşik durumdayken parçalarından daha fazla kesinlik içerebilirler. $S(A|B)$ ifadesinin belirlenebilmesi için B'yi bilmek gerekir. Bunun içinde B üzerinde ölçüm yapmak gerekir. Eğer sistemde kuantum korelasyonlar varsa sistemin herhangi bir parçası üzerinde yerel olarak yapılan bir ölçüm sistemdeki korelasyonların yapısını bozabilir. Ancak sistemde yalnızca klasik korelasyonlar olması durumunda yerel olarak yapılan ölçümler sistemin yapısını bozmaz. B'yi bilmek için B üzerine uygulanan ölçüm işlemcisi kümesi $\{ M_j^{(B)} \}$ olsun. Bu ölçüm işlemcilerinin uygulanması durumunda: $S(A|B)$ yerine;

$$S(A|\{M_j^{(B)}\}) \quad (5.26)$$

niceliği (ölçüm koşullu entropi) tanımlanmaktadır. Bu durumda (5.25) ifadesinin kuantum mekaniksel genellemesi:

$$J(A: B) = S(A) - S(A|\{M_j^{(B)}\}) \quad (5.27)$$

şeklinde olur. Klasik olarak eşdeğer bu iki karşılıklı bilişim ifadesi sistemde kuantum korelasyonların olması durumunda farklılaşır. Bu farkta sistemdeki toplam kuantum

korelasyonların bir ölçüsü olarak kuantum diskort denir ve $D(A,B)$ ile gösterilir. Karşılıklı bilişim ifadelerindeki bu farklılık;

$$D(A,B) = S(B) - S(A,B) + S(A|\pi_j^{(B)}) \quad (5.28)$$

olur (Zurek 2002).

Kuantum diskort, korelasyonların kuantum karakterini gösterir. Sistemin bir parçası üzerinde yapılan ölçümlerle elde edilemeyecek bilgilerin bir ölçüsüdür. Ölçümün sistemdeki bozucu etkisi nedeniyle kuantum diskort üstüste gelimin bir sonucudur.

Kuantum diskortun yukarıdaki hesabı iki parçalı sistemler için tanımlandı. Diskort hesabında kullanılan karşılıklı bilişimin çok parçalı sistemlere genellenmesi zordur. Çok parçalı sistemler için diskort hesabı da bağıl entropi kullanılarak yapılabilir. Bağıl entropiler yoluyla diskort hesabı için verilen durumun en yakın klasik duruma olan uzaklığına bakılır. En yakın klasik durum yine teorem 5.1' e göre belirlenir. Verilen bir ρ durumunda var olabilecek kuantum diskort miktarı D ; (5.6)'daki gibi C klasik durumlar kümesi taranarak bulunan bir minimumla hesaplanır. ρ ' ya en yakın klasik durum ρ'_c ile gösterilirse (5.6) bağıntısı:

$$D = S(\rho||\rho'_c) \quad (5.29)$$

şeklinde yazılabilir.

(5.29) ifadesi en yakın klasik durumla verilen durumun entropileri farkı olarak hesaplanır.

$$D = S(\rho_{c'}) - S(\rho) \quad (5.30)$$

Son ifade teorem 5.2' ye göre yazılmıştır. Bu yaklaşım klasik durumlar kümesi üzerinden bağıl entropinin minimumunu belirleme problemlerinde her zaman kullanılabilir bir yaklaşımdır.

Bağıl entropiler yoluyla diskort hesabı, optimizasyon problemlerinden kurtulma imkânı sağlamakta ve çok parçalı sistemlerde de diskort hesabı yapmaya imkân sağlamaktadır.

5.4.3 Kuantum diskortun özellikleri

1. Kuantum diskort negatif olmayan bir fonksiyondur.

$$D(A, B) \geq 0 \quad (5.31)$$

2. $D(A, B) = 0$ olması için gerek ve yeter koşul ρ_{AB} durumunun klasik olmasıdır. Yani ρ_{AB} 'nin kendi özbazlarında blok köşegen olacak şekilde:

$$\rho_{AB} = \sum_j P_j \rho_{AB} P_j \quad (5.32)$$

şeklinde yazılabilmektedir. Burada P_j' ler tamlik bağıntısını sağlayan ölçüm işlemcileridir.

3. Kuantum diskort yapılan ölçüme göre asimetric bir fonksiyondur.

$$D(A, B) \neq D(B, A)$$

4. Kuantum diskort ölçüm yapılan alt sistemin von Neumann entropisi ile üstten sınırlıdır.

$$D(A, B) \leq S(B) \quad (5.33)$$

5. $D(A, B)$, POVM'lar üzerinde konkav bir fonksiyondur.

6. $D(A, B)$ minimum değerini rankı bir olan POVM'lar uygulanması durumunda alır. Bu özellik diskortun optimizasyon problemiyle ilgili olup, diskortun ölçümden bağımsız bir nicelik olmasını sağlamaktadır.

7. Kuantum diskort yerel üniter dönüşümler altında değişmeden kalır.

8.Saf iki parçalı durumlarda kuantum diskort dolanıklığa eşittir (Datta 2008).

5.4.4Kuantum dissonans

Bileşik sistemlerdeki dolanıklık harici kuantum korelasyonlara kuantum dissonans denir. Diğer bir ifadeyle kuantum dissonans ayrılabilir durumlardaki kuantum korelasyonları yada ayrılabilir durumlarda var olan toplam korelasyonlardan klasik olmayan korelasyonları gösterir (Vedral 2010). Bu korelasyonları hesaplamak için verilen bir ρ durumunun durumlar uzayında bulunan ayrılabilir durumlar σ ile gösterilmek üzere; bu durumların ρ ' ya en yakın olanı belirlenir (Vedral 1998) ve bu durumun en yakın klasik duruma olan uzaklığı bağıl entropiler yoluyla hesaplanır. Q kuantum dissonans niceliği (5.7)' deki $Q = \min_{\sigma_c \in \mathcal{C}} S(\sigma || \sigma_c)$ ifadesiyle belirlenir.

ρ durumuna en yakın ayrılabilir durum σ' ve σ' 'e en yakın klasik durum da σ'_c olmak üzere (5.7) bağıntısı,

$$Q = S(\sigma' || \sigma'_c)(5.34)$$

olarak yazılır. Teorem 5.2 kullanılarak (5.34) bağıntısının,

$$Q = S(\sigma') - S(\sigma'_c) \quad (5.35)$$

biçiminde daha basit bir ifadesi de yazılabilir.

Böylece bileşik sistemlerde var olabilecek tüm korelasyonların bağıl entropiler yoluyla nasıl belirleneceği gösterildi. (5.9) ifadesine ulaşabilmek için T_ρ ve T_σ toplam karşılıklı bilişim ifadeleri ve henüz bir fiziksel açıklama yapılamamış olan korelasyonlarla ilgili L_ρ ve L_σ ek terimlerinin de türetilmesi gerekir. T_ρ ve T_σ ifadeleri verilen durumun kendi indirgenmiş durumlarıyla oluşturulan çarpım durumuna göre toplam karşılıklı bilişimi olduğundan, teorem 5.3'ün bir sonucu olarak:

$$T_\rho = S(\rho_p) - S(\rho), \quad T_\sigma = S(\sigma_p) - S(\sigma)(5.36)$$

ifadelerine eşittir. L_ρ ve L_σ terimlerinin türetimi ise aşağıdaki teoreme göre yapılır.

Teorem 5.4 (Vedral 2010)

L_ρ ve L_σ için:

$$L_\rho = S(\rho_{p_c}) - S(\rho_p) , L_\sigma = S(\sigma_{p_c}) - S(\sigma_p) \quad (5.37)$$

eşitlikleri geçerlidir.

İspat:

$$L_\rho = S(\rho|\rho_{p_c}) = -\text{Tr}(\rho \log \rho_{p_c}) - S(\rho) \quad (5.38)$$

ρ_{p_c} ile ρ_c aynı bazlara sahip oldukları için (5.37) eşitliğinin sağ tarafına iz işleminin içine bu bazların bir tam kümesi yazılabilir. Burada bazların diklik bağıntısından dolayı bazları yerine kareleri de yazılabilir. İz işlemcisinin çevrimsellik özelliği kullanılarak:

$$\begin{aligned} -\text{Tr}(\rho \log \rho_{p_c}) &= -\text{Tr}\left(\sum_{\vec{k}} |\vec{k}\rangle \langle \vec{k}| \rho |\vec{k}\rangle \langle \vec{k}| \log \rho_{p_c}\right) \\ &= -\text{Tr}(\rho_c \log \rho_{p_c}) \end{aligned} \quad (5.39)$$

$$= S(\rho_{p_c}) \quad (5.40)$$

sonucuna ulaşılır.(5.38)' den (5.39) ifadesine logaritmanın toplam ve iz işlemcisinin çizgisellik özelliği kullanılarak geçilmiştir.

Diğer yandan iz işlemcisinin çizgisellik özelliği:

$$\begin{aligned} -\text{Tr}(\rho \log \rho_{p_c}) &= -\text{Tr}(\rho_p \log \rho_{p_c}) \\ &= S(\rho_{p_c}) \end{aligned} \quad (5.41)$$

sonucunu sağlar. Böylece $L_\rho = S(\rho_{pc}) - S(\rho_p)$ ifadesi ispatlanmış olur. L_σ içinde benzer süreçlerle ispat yapılabilir.

Sonuç olarak şekil 5.1' deki korelasyonlarla ilgili tüm terimler belirlenmiş oldu. Buna göre (5.9)' daki birinci $T_\rho = D + C_\rho - L_\rho$ eşitliğinde: $D = S(\rho_c) - S(\rho)$, $C_\rho = S(\rho_{pc}) - S(\rho_c)$, $L_\rho = S(\rho_c) - S(\rho_p)$ ve $T_\rho = S(\rho_p) - S(\rho)$ terimleri yerlerine konulursa eşitliğin sağlandığı görülür. Benzer işlemler (5.9)' daki ikinci eşitlik içinde yapılabilir.

6.UYGULAMALAR

Bu bölümde seçilen özelsaf ve saf olmayan kuantum durumlarının korelasyon analizi yapılacaktır. Bölüm 5’de tanıtılan iki yöntemle bu durumlardaki korelasyonların nicelendirilmeleriyle ilgili hesaplar yapılacaktır. Saf W durumları, saf dallanma durumları (*cluster states*) ve saf olmayan köşegen Bell durumlarının nicelendirimi bağıl entropiler yoluyla yapılacaktır. Saf olmayan Werner, İzotropik ve DQC1 durumlarının korelasyon analizi ise ölçümden etkilenme miktarları belirlenerek yapılacaktır.

6.1 Saf Durumlar

Saf durumlardaki korelasyonlar gerek korelasyonların genel yapısını anlamada gerekse de kuantum bilişim kuramındaki kuantum anahtar dağılımı, kuantum yoğun kodlama ve kuantum uz-aktarım gibi birçok öncü ve önemli uygulamada da vazgeçilmez önemdedir. Bu nedenle burada ilk olarak seçilen saf durumların korelasyonlar açısından tanıtımı ve korelasyonların bağıl entropiler yoluyla hesabı yapılacaktır.

6.1.1 W durumu

Üç parçalı saf dolanık durumların eşdeğer olmayan iki sınıfı vardır. Herhangi bir üç parçalı saf dolanık durum stokastik yerel işlemler ve klasik haberleşmelerle (SLOCC) eşdeğer olmayan bu iki sınıftan birine dönüştürülebilir. Bu durumlar GHZ durumları ve W durumlarıdır (Greenberger 1989).

Bu iki durum:

$$|GHZ\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|000\rangle + |111\rangle), \quad |W\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(|001\rangle + |010\rangle + |100\rangle) \quad (6.1)$$

şeklinde yazılır. Her iki durumda yerel işlemlerle birbirlerine dönüştürülemezler, kendilerine özgü özellikleri vardır.

GHZ durumları üç kubitler için en dolanık durum olarak düşünülebilir. Bu durumlarda üç kubitlerden herhangi biri üzerinden kısmi iz alınırsa ayrılabilir durumlar elde edilir. Yani GHZ durumlarındaki dolanıklık parçacık kayıplarına karşı oldukça dayanıksızdır.

W durumlarında ise dolanık üç kubitte herhangi biri üzerinden kısmi iz alınırsa geriye en dolanık iki kubit durumları olan Bell durumları kalır. İndirgenmiş yoğunluk işlemcileri olan iki kubit en dolanık durumları bazı kriterlere göre üç kubit saf ve saf olmayan durumlarla karşılaştırıldığında en fazla dolanıklık içeren durumlardır.

Burada bu iki eşdeğer olmayan sınıftan W durumlarının korelasyonlarının hesabı bağlı entropiler üzerinden yapılacaktır.

Dolanık bir durum olan W durumuna en yakın ayrılabilir durum:

$$\sigma = \frac{8}{27} |000\rangle\langle 000| + \frac{12}{27} |W\rangle\langle W| + \frac{6}{27} |W'\rangle\langle W'| + \frac{1}{27} |111\rangle\langle 111| \quad (6.2)$$

şeklinde yazılabilir (Vedral 2010). Burada;

$$|W'\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} (|011\rangle + |101\rangle + |110\rangle) \quad (6.3)$$

olarak alınmıştır. Verilen duruma en yakın ayrılabilir durum ifadesi kullanılarak W durumunda var olan kuantum dolanıklık hesaplanabilir. En yakın ayrılabilir durum σ klasik bir durum olmadığı için, tüm kuantum korelasyon miktarı kuantum dolanıklığa eşit değildir. Var olan E dolanıklık miktarı, (5.5) bağıntısından:

$$E = \min_{\sigma \in S} S(\rho \parallel \sigma) = S(\rho \parallel \sigma) = -Tr(\rho \log \sigma) - S(\rho) \quad (6.4)$$

olur. Burada $\rho = |W\rangle\langle W|$ saf W durumu olduğu için entropisi sıfırdır. Böylece E kuantum dolanıklık niceliği:

$$E = -Tr(\rho \log \sigma) \quad (6.5)$$

olur. (6.5) denklemindekiiz fonksiyonelinin değeri, üç kübit durumları için $\{|000\rangle, |001\rangle, |010\rangle, |100\rangle, |110\rangle, |011\rangle, |101\rangle, |111\rangle\}$ bazlarında hesaplanırsa: $E \approx 1.17$ olarak bulunur.

Kuantum diskort hesabıda (5.6) ifadesindeki gibi bağıl entropiler üzerinde yapılarak kuantum diskort miktarı D:

$$D = \min_{\rho_c \in C} S(\rho || \rho_c) = S(\rho || \rho'_c)$$

$$= S(\rho'_c) - S(\rho) = S(\rho'_c) = -Tr(\rho'_c \log \rho'_c) \quad (6.6)$$

olur. Burada ρ'_c :

$$\rho'_c = \frac{1}{3}(|001\rangle\langle 001| + |010\rangle\langle 010| + |100\rangle\langle 100|) \quad (6.7)$$

durumu ρ durumuna tam izdüşümsel ölçüm uygulanmış durum olan en yakın klasik durumu göstermektedir. (6.6) ifadesi (6.7) durumu kullanılarak hesaplanırsa: $D \approx 1.58$ bulunur.

W durumunda var olan klasik korelasyonların hesabında en yakın klasik durum bulunurken ρ ya en yakın durum ile σ en yakın durum aynı olmamaktadır. Bunun sebebi ayrılabilir durumlarda da kuantum korelasyonların olmasıdır. Bu nedenle her iki en yakın klasik durum için korelasyonlar ayrı ayrı hesaplanacaktır. İlk olarak ρ ya en yakın klasik durum olan ρ'_c daki klasik korelasyonlar (5.8) ifadesinden:

$$C_\rho = \min_{\rho_{p_c} \in P} S(\rho'_c || \rho_{p_c}) = S(\rho_{p_c}) - S(\rho'_c)$$

hesaplanacaktır. ρ'_c (6.7)' da belirlenmişti, en yakın çarpım durumu ρ'_{p_c} ise (6.7) ifadesinin indirgenmiş durumlarını tensör çarpımıyla oluşturulan çarpım durumudur. Bu durumlar için (5.8) bağıntısından klasik korelasyon miktarı: $C_\rho \approx 1.17$ olur.

Benzer şekilde σ ya en yakın klasik durum olan σ'_c klasik durumunda var olan klasik korelasyon miktarı da $C \sigma \approx 0.36$ olur.

Son olarak da W durumunda var olan kuantum dissonans miktarı (5.7) bağıntısından: $Q = \min_{\sigma_c \in C} S(\sigma || \sigma_c) = S(\sigma || \sigma'_c)$ hesaplanır ve $Q \approx 0.94$ olarak bulunur. Burada σ verilen duruma en yakın ayrılabilir durumu, σ'_c da bu ayrılabilir duruma en yakın klasik durumu göstermektedir.

6.1.2 Dallanma durumları

Dallanma durumları, ölçüm temelli kuantum bilgisayım sal modeller için kullanışlı bir kaynak olan dolanık saf durumlardır. Tek yönlü kuantum bilgisayar (*one-way quantum computer*) olarak bilinen kuantum bilgisayımın dallanma durumu modeli ilk defa Raussendorf ve Briegel tarafından tasarlanıyor (Raussendorf ve Briegel 2001). Bu modelde başlangıç durumu; basit bir örgünün (bir, iki veya üç boyutlu) bağlantılı bir alt kümesi olan, sonlu bir alt örgünün köşelerinde yerleşmiş, dolanık çok kübit saf durumları olan dallanma durumlarıdır. Örgünün köşelerini birleştiren herhangi bir çizgeye (*graph*) bir dallanma durumu karşılık getirilerek bu durumlar farklı şekillerde oluşturulabilir. İlk olarak çizgenin köşelerindeki kübitler arasında gerçekleştirilecek bilgisayım a uygun olarak (yakın veya uzak komşularla) dolanıklıklar oluşturulur. Bunun için her örgü köşelerindeki kübit $|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$ durumuna getirildikten sonra, bu kübitle bağlantılı her köşe ile arasında kontrollü-faz geçidi uygulanarak istenen başlangıç durumu oluşturulur. Uygulamada böyle bir süreç; köşelerinde iki durumlu atomlar bulunan uygun bir örgüdeki Ising tipi (en yakın komşularla) etkileşmelerden yararlanır.

Kuantum bilgisayım aşaması dallanma durumunun işlenmesine karşılık gelen ve belirli bir algoritmaya göre gerçekleştirilen bir dizi tek kübit ölçümleriyle yürütülür. Örgü köşelerindeki indirgenmiş durumlar saf olmayan (çoğunlukla en saf olmayan) durumlar olduğundan, ölçüm sonuçları gelişigüzel olsada aralarında korelasyonlar vardır. Bilgisayımın gerçekleşebilmesi bu korelasyonlar sayesinde olur. Bu aşamada, önceki ölçümün sonucuna bağlı olarak sonraki ölçümler her ölçümden sonra yeniden planlanır.

Sonuçta kalan çoklu kübit durumu, bilgisayarın sonucudur. İstendiğinde kalan durumun okunmasıyla bilgisayarın sonucu klasik bit dizileriyle verilebilir. Bu modelin uygulanmasında asıl kritik sorun; bir dallanma durumunun gerçek bir fiziksel sistemin taban durumu olarak gerçekleşmesinin mümkün olup olmadığıdır. Genel bir dallanma durumu için bunun mümkün olmadığı yönünde bulgular olsada uygun taban durumuna sahip sistem arayışları sürmektedir. Bir boyutlu örgüler üzerinde kurulan dallanma durumlarıyla gerçekleştirilen kuantum bilgisayar etkinliklerinin, klasik bilgisayarlarla da gerçekleştirilebileceği anlaşılmıştır. Bu nedenle iki veya üç boyutlu dallanma durumları kuantum bilişim ve kuantum bilgisayar için önem kazanmıştır.

Dallanma durumlarının kuantum bilgisayar modelleri açısından önemine kısaca değindikten sonra; dört parçalı dallanma durumları olan:

$$|C4\rangle = |0 + 0+\rangle + |1 + 1+\rangle + |0 - 1-\rangle + |1 - 0-\rangle \quad (6.8)$$

durumlarının korelasyon analizleri bağıl entropi kullanılarak yapılacaktır. Burada $|+\rangle$ durumu: $|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$, $|-\rangle$ durumu ise, $|-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle)$ olarak ifade edilmiştir. Kuantum dolanıklık niceliği (5.5) için gerekli olan en yakın ayrılabilir durum (Wei 2004):

$$\sigma_{C4} = \frac{1}{4} (|0 + 0+\rangle\langle 0 + 0 + | + |1 + 1+\rangle\langle 1 + 1 + | + |0 - 1-\rangle\langle 0 - 1 - | + |1 - 0-\rangle\langle 1 - 0 - |) \quad (6.9)$$

olur. (6.9) durumu bir klasik durum olduğu için kuantum dolanıklık, kuantum diskorta eşit ve kuantum dissonans: $Q=0$ olur. (5.5) yada (5.6) ifadelerinden hesaplanacak korelasyon niceliği: $E=D=2$ olur. Klasik korelasyon miktarı da (5.8) bağıntısından $C_p = 2$ olarak bulunur. Sistemin toplam korelasyonu $T_p = 4$ olduğundan; bu durumda $T_p = E + C_p$ eşitliği sağlanır. Dört parçalı saf dallanma durumları ilginç bir şekilde iki parçalı saf durumlar gibi; toplam kuantum korelasyonun dolanıklığa eşit olduğu durumlardır.

6.2 Saf Olmayan Durumlar

Saf durumlar, sistemin çevreyle etkileşmesinden dolayı çoğu durumda hazırlanmaları ve buldukları durumu korumaları zor özel durumlardır. Çevremizdeki sistemlerin kuantum durumlarıysa çoğu zaman saf olmayan durumdadır. Son yıllarda kuantum bilişimde ve kuantum bilgisayırda saf olmayan durumların kullanılmasına yönelik çalışmalar artmaktadır (Datta 2008). Bu nedenle bu durumların korelasyonlar açısından sahip oldukları olanakların anlaşılması önemlidir. Bu kesimde özel olarak seçilen saf olmayan; Werner, izotropik, DQC1 ve köşegen Bell durumları tanıtılacak ve bölüm 5’ de incelenen ikiyöntemle durumların korelasyon analizleri yapılacaktır.

6.2.1 Werner durumları

U bir üniter işlemci olmak üzere, $U \otimes U$ işlemi altında değişmez kalan her bir parçasının d boyutlu Hilbert uzayında tanımlandığı iki parçalı $d \otimes d$ durumlarıdır ve

$$\rho_W(x) = \frac{d-x}{d^3-d}I + \frac{xd-1}{d^3-d}V, \quad x \in [-1,1], \quad C^d \otimes C^d \quad (6.10)$$

şeklinde tanımlanır (Werner 1989). Burada $I = I_1 \otimes I_2$ şeklinde tanımlanan tüm sisteme ait birim işlemciyi, $V = \sum_{ij} |ij\rangle\langle ji|$ trampa işlemcisini (*swap operator*, *flip operator*) ve $\{|ij\rangle\}$ ise bileşik sistemin ortonormal bazlarını göstermektedir.

Werner durumunun özdeğerleri:

$$\lambda_{1,2} = \begin{cases} \frac{1+x}{d^2+d} \frac{1}{2} d(d+1) \text{ kere dejenere} \\ \frac{1-x}{d^2-d} \frac{1}{2} d(d-1) \text{ kere dejenere} \end{cases} \quad (6.11)$$

şeklinde bulunur. (6.10) durumu bir yoğunluk işlemcisi olduğundan izi birdir. A ve B ile gösterilen altsistemlerin indirgenmiş yoğunluk işlemcileri ise kısmi izler alınarak,

$$Tr_A[\rho_W(x)] = \frac{I_B}{d}, \quad Tr_B[\rho_W(x)] = \frac{I_A}{d}. \quad (6.12)$$

şeklinde en saf olmayan durumlara karşılık gelir. Trampa işlemcisinin izi ve kısmi izleriyse:

$$Tr V = d, \quad Tr_1 V = I_2, \quad Tr_2 V = I_1 \quad (6.13)$$

olur. Trampa işlemcisinin karesi birim olduğundan dolayı bir invölüsyon işlemcisidir ve özdeğerleri ± 1 'dir. İzdüşüm işlemcilerinin de izleri hesaplanabilir. Trampa işlemcisinin +1 özdeğerine karşılık gelen izdüşüm işlemcisinin izi:

$$Tr P^{(+)} = \frac{1}{2}(d^2 + d) \quad (6.14)$$

ve -1 özdeğerine karşılık gelen izdüşüm işlemcisinin izi de

$$Tr P^{(-)} = \frac{1}{2}(d^2 - d) \quad (6.15)$$

olarak bulunur. Trampa işlemcisinin karesi 1 olduğundan $V = P^{(+)} - P^{(-)}$ izdüşüm işlemcileri cinsinden de spektral ayrışımı yazılabilir. Buradan,

$$P^{(+)} = \frac{1}{2}(I + V), \quad P^{(-)} = \frac{1}{2}(I - V); \quad P^{(+)}, P^{(-)} \in \mathbb{C}^d \otimes \mathbb{C}^d \quad (6.16)$$

olarak izdüşüm işlemcileride trampa işlemcisi türünden yazılabilir. Werner durumuna Peres kriteri uygulanacak olursax'in $0 \leq x \leq 1/2$ aralığındaki değerlerine karşılık gelen durumlarda dolanıktır. Bu değerler arasında Werner durumunun altsistemlerinden herhangi birisi üzerinden parçalı transpoz alınarak elde edilen işlemcinin en az bir negatif özdeğeri vardır yani bu durumlarda dolanık, diğer durumlarda ise ayrılabilir.

Bu durumların korelasyon analizleri, kesim 5.1'de tanıtılan ölçüm temelli bir yaklaşımla yapılacaktır. Sistemdeki toplam korelasyon:

$$I(A: B) = S(\rho_A) + S(\rho_B) - S(\rho_{AB}) \quad (6.17)$$

karşılıklı bilişim ifadesinden hesaplanır. ρ_A ve ρ_B en saf olmayan durumda oldukları için $S(\rho_A) = S(\rho_B) = \log d$ olur. $S(\rho_{AB})$ ifadesinde de bulunan özdeğerler kullanılırsa:

$$S(\rho_{AB}) = - \left(\frac{1-x}{2} \log \frac{1-x}{d^2-d} + \frac{1+x}{2} \log \frac{1+x}{d^2+d} \right)$$

olur. Böylece toplam korelasyon niceliği olan karşılıklı bilişim:

$$I(A: B) = 2 \log d + \frac{1-x}{2} \log \frac{1-x}{d^2-d} + \frac{1+x}{2} \log \frac{1+x}{d^2+d} \quad (6.18)$$

olarak hesaplanmış olur. Sistemdeki toplam klasik korelasyon; ölçüm uygulanmış durum olan:

$$\rho_{AB}' = \sum_{i \neq j} \frac{d-x}{d^3-d} P_A^i \otimes P_B^j + \sum_i \frac{1+x}{d^2+d} P_A^i \otimes P_B^i \quad (6.19)$$

durumunun (5.4)' deki gibi karşılıklı bilişimi ifadesiyle hesaplanır. Burada $P_A^i = |i\rangle\langle i|$ ve $P_B^j = |j\rangle\langle j|$ sistemin bileşenlerinin tam von Neumann ölçüm işlemcileridir. (6.19) klasik korelasyonları nicelendiren toplam korelasyon miktarı:

$$I(A': B') = 2 \log d + \frac{d-x}{d+1} \log \frac{d-x}{d^3-d} + \frac{1+x}{2} \log \frac{1+x}{d^2+d} \quad (6.20)$$

şeklinde olur. Toplam kuantum korelasyon miktarı (5.3) bağıntısından:

$$Q_M(\rho_W) = I(A: B) - I(A': B')$$

$$Q_M(\rho_W) = \frac{1-x}{2} \log \frac{1-x}{d^2-d} + \frac{(1+x)(d-1)}{2(d+1)} \log \frac{1+x}{d^2+d} - \frac{d-x}{d+1} \log \frac{d-x}{d^3-d} \quad (6.21)$$

olur. $x = 1$ için Werner durumlarının ayrılabilir olduğu biliniyor. Fakat burada tanıtılan yöntem kullanılırsa sistemde $x=1$ durumunda da kuantum korelasyon vardır. Kuantum korelasyon miktarı ise:

$$Q_M(\rho_W) = \frac{d-1}{d+1} \quad (6.22)$$

olarak belirlenir.

Böylece sistem ayrılabilir durumda olsa da kuantum korelasyonun var olduğu ortaya çıkmaktadır.

6.2.2 İzotropik durumlar

İzotropik durumlar da her bir parçası d boyutlu Hilbert uzayında tanımlı $U \otimes U^*$ altında değişmez kalan iki parçalı $d \otimes d$ tipindeki durumlardır. Bu durumlar:

$$\rho_I = \frac{1-x}{d^2-1} \mathbb{I} + \frac{xd^2-1}{d^2-1} P, \quad x \in [0,1] \quad P = |\psi\rangle\langle\psi|, \quad C^d \otimes C^d \quad (6.23)$$

şeklinde tanımlanırlar (Horodecki 1999). Burada $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{d}} \sum_{i=0}^{d-1} |i\rangle \otimes |i\rangle$, $d = \dim \mathcal{H}_A$ ifadesiyle verilen en dolanık bir saf durumdur ve $\{|i\rangle\}$, C^d 'nin ortonormal bazlarıdır. $P = |\psi\rangle\langle\psi|$ olarak tanımlanmış durum da bir saf durum yoğunluk işlemcisidir. Birim işlemci açıkça $U \otimes U^*$ altında değişmez olduğundan sadece P durumunun $U \otimes U^*$ altında değişmez olduğunu göstermek yeterlidir:

$$\begin{aligned} (U \otimes U^*) P (U \otimes U^*)^\dagger &= (U \otimes U^*) P (U^\dagger \otimes U^{\dagger*}) \\ &= \mathbb{I} \otimes (U U^* U^T) P \mathbb{I} \otimes (U^* U^{\dagger T})^\dagger \\ &= P \end{aligned} \quad (6.24)$$

Burada $(A \otimes \mathbb{I}) \psi^\dagger = (\mathbb{I} \otimes A^T) \psi^\dagger$ özelliği kullanılmıştır.

İzotropik durumlar için özdeğerler

$$\lambda_{1,2} = \begin{cases} x & \text{dejenere değil} \\ \frac{1-x}{d^2-1} d^2 - 1 & \text{1 kere dejenere} \end{cases} \quad (6.25)$$

şeklinde bulunur. İzotropik durumlar yoğunluk işlemcisi olduğundan izleri birdir. İndirgenmiş yoğunluk işlemcileri de kısmi iz alınarak:

$$(\rho_I)_A = Tr_B(\rho_I) = \frac{1-x}{d^2-1} d + \frac{xd^2-1}{d^3-1} \frac{1}{d} \sum_{i,j=1}^d Tr_B(|ii\rangle\langle jj|) = \frac{I_A}{d} \quad (6.26)$$

şeklinde elde edilir. Benzer şekilde $(\rho_I)_B = I_B/d$ olarak bulunur. İzotropik bir duruma Peres kriteri uygulanırsax'in $0 \leq x \leq 1/d$ aralığındaki değerlerine karşılık gelen durumlarda

$$I(A:B) = 2\log d + (1-x)\log \frac{1-x}{d^2-1} + x\log x \quad (6.27)$$

şeklinde hesaplanır. Toplam klasik korelasyon ise;

$$I(A':B') = 2\log d + \frac{d-xd}{d+1} \log \frac{1-x}{d^2-1} + \frac{1+xd}{d+1} \log \frac{1+xd}{d^2+d} \quad (6.28)$$

olur. Buradan toplam kuantum korelasyon niceliği de

$$Q_M(\rho_I) = \frac{1-x}{d^2+1} \log \frac{1-x}{d^2-1} + x\log x - \frac{1+xd}{d+1} \log \frac{1+xd}{d^2+d} \quad (6.29)$$

olarak hesaplanır.

$x=0$ iken izotropik durumlar ayrılabilir fakat yukarıdaki veriler kullanılırsa bu durumdaki kuantum korelasyon miktarı,

$$Q(\rho_I) = \frac{1}{d+1} \log \frac{1}{d-1} \quad (6.30)$$

olur. Bu durumda için de ayrılabilir bir durumda da kuantum korelasyonların olduğu görülmektedir.

6.2.3 DQC1 durumları

DQC1 durumları (*Deterministic Quantum Computation with One Qubit*) ilk olarak (Knill ve Laflamme 1998) yılında Knill ve Laflamme tarafından tanıtılmış durumlardır. Knill ve Laflamme bu durumların klasik algoritmalarla elde edilemeyen bilgisayarlı hızlanmalar sağladığını gösterdiler. Buradaki hızlanmadaki saf bir kübitin rolünü vurgulamak için, bu durumlar bir kübitin gücü olarak adlandırıldı (*power of one qubit*) (Datta 2005). Çünkü DQC1 durumları saf durumda bir kübit ve tamamen saf olmayan durumda n kübitten oluşmaktadır. Kuantum hesaplamasal bir model olarak düşünülen bu durumlar saf durumlarla tasarlanan modellerden daha güçlü olmasa da klasik algoritmalarla gerçekleştirilen bazı yükümlülüklerin yerine getirilmesinde hızlanmalar sağlamıştır.

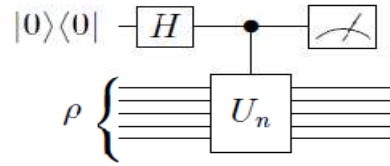
DQC1 durumları az miktarda dolanıklık içeren durumlar olmasına rağmen sağlanan hızlanma, kuantum hesaplamalardaki hızlanmanın kaynağının dolanıklık olmayabileceğini vurgular. Çünkü bu modelin başarısının temelinde dolanıklık bulunmaz. Bu çalışmada da gösterilecektir ki bu hızlanmanın temelinde, kuantum korelasyonların dolanıklığıda kapsayan fakat dolanıklık harici kuantum korelasyonlarıda içeren daha genel bir korelasyon türü olan kuantum diskort vardır.

DQC1 durumları n+1 kübit içeren bileşik sistem durumlarıdır. Bu sisteme birinci parçası 1 saf kübit, ikinci parçası tamamen saf olmayan n kübit içeren bir bileşik sistem olarak bakılırsa sistem ayrılabilir.

Sistemin başlangıçtaki durumu:

$$\rho_0 = |0\rangle\langle 0| \otimes \frac{\mathbb{I}}{2^n} \quad (6.31)$$

şeklinindedir. Bu başlangıç durumunun aşağıdaki gibi bir kuantum devresinden geçirilsin.



Şekil 6.1 DQC1 devresi

Devrenin çıkış durumu:

$$\rho_D = \frac{\mathbb{I}}{2^{n+1}} \begin{bmatrix} \mathbb{I} & U_n^+ \\ U_n & \mathbb{I} \end{bmatrix} \quad (6.32)$$

olarak elde edilir. Burada H üstüste getirici Hadamard geçitini göstermektedir. Hadamard geçidinin matris formu:

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

şeklindedir. U_n genel bir üniter dönüşümü ve \square sembolü ise ölçümü göstermektedir. DQC1 durumlarının özdeğerleri:

$$\lambda_{1,2} = \begin{cases} 0 & 2^n \text{ kere dejenere} \\ \frac{1}{2^n} & 2^n \text{ kere dejenere} \end{cases} \quad (6.33)$$

olarak bulunur. İndirgenmiş yoğunluk işlemcileriye:

$$(\rho_D)_A = Tr_B(\rho_D) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & t^* \\ t & 1 \end{pmatrix}$$

$$(\rho_D)_B = Tr_A(\rho_D) = \frac{I}{2^n} \quad (6.34)$$

şeklindedir. Burada $t = Tr U_n / 2^n$ olarak alınmıştır. Toplam korelasyon ifadesi özdeğerler ve indirgenmiş yoğunluk işlemcileri kullanılarak:

$$I(A: B) = H\left(\frac{1 - |t|}{2}\right) \quad (6.35)$$

olarak hesaplanır. Burada $H(p) = -p \log p - (1 - p) \log (1 - p)$ şeklinde tanımlanan ikili(*binary*) Shannon entropi fonksiyonunu göstermektedir. $t = 0$ iken toplam klasik korelasyon:

$$I(A': B') = 0 \quad (6.36)$$

olur. Toplam kuantum korelasyon ise,

$$Q_M(\rho_D) = S\left(\frac{1}{2}\right) = 1 \quad (6.37)$$

olarak hesaplanır. Burada elde edilen sonuç, verilen ayrılabilir durumdaki tüm korelasyonların kuantum korelasyonlar olabileceğini göstermektedir. Bu sonuç kuantum korelasyonların dolanıklıktan çok daha genel bir korelasyon türü olduğunu göstermesinden dolayı oldukça çarpıcıdır.

DQC1 durumları korelasyonlarla ilgili ilginç bir durumu da içerir. Eğer $n+1$ kübitli bu sisteme birinci bileşen 1 kübit, ikinci bileşen n kübit olarak bakılırsa, sistem ayrılabilir. Fakat sisteme birinci bileşen 2 kübit, ikinci bileşen $n-1$ kübit olarak bakılırsa, sistem artık ayrılabilir değildir. Yani bir sistemin dolanık yada ayrılabilir olması sisteme nasıl bakıldığına bağlı olarak değişebilmektedir. Bu durum korelasyonların doğasının anlaşılması açısından önemlidir.

6.2.4 Köşegen Bell durumları

En genel iki kübit durumlarında, indirgenmiş durumların Bloch vektörlerinin sıfırlanmalarıyla elde edilen durumlar üniter dönüşümler altında köşegen Bell durumlarına eşdeğerdir. Bu durumların genel ifadesi: $\rho = \sum_i p_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i|$

$$\rho_K = \sum_{i=1}^4 \lambda_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i| \quad (6.38)$$

şeklindedir. Burada $|\psi_i\rangle$ durumları dört Bell durumunu göstermektedir. λ_i ' ler artmayacak şekilde sıralanırsa ρ_K durumunun dolanık olması için $\lambda_1 > \frac{1}{2}$ olması gerekir (Peres kriteri). Bu duruma en yakın ayrılabilir durum:

$$\sigma_K = \sum_{i=1}^4 p_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i| \quad (6.39)$$

olur. (6.39) ifadesinde $p_1 = \frac{1}{2}$, diğer olasılık terimleri ise $p_i = \frac{\lambda_i}{2(1-\lambda_1)}$ şeklinde değerler alır (Vedral 1998). ρ_K ve σ_K durumlarına en yakın klasik durumlar:

$$\rho_c = \frac{q}{2} [|\psi_1\rangle\langle\psi_1| + |\psi_2\rangle\langle\psi_2|] + \frac{1-q}{2} [|\psi_3\rangle\langle\psi_3| + |\psi_4\rangle\langle\psi_4|] \quad (6.40)$$

biçiminde olup; ρ_K ' ya en yakın klasik durum için $q = \lambda_1 + \lambda_2$, σ_K ' ya en yakın klasik durum için ise $q = p_1 + p_2$ alınmalıdır. Bu iki duruma en yakın çarpım durumları aynı olup:

$$\rho_p = \frac{I}{4} \quad (6.41)$$

şeklindedir. Tüm bu durumlar için korelasyonlar bağıl entropiler yoluyla: (5.5) bağıntısından dolanıklık, (5.6) bağıntısından diskort, (5.7) bağıntısından dissonans ve (5.8) bağıntısından da klasik korelasyonlar hesaplanacak olursa;

$$T_\rho \geq E + Q + C_\rho \quad (6.42)$$

eşitsizliğiyle ifade edilen toplam- altı özelliğinin sağlandığı görülür.

7. SONUÇ

Bileşik sistemlerin bileşenleri arasında var olan korelasyonların sınıflandırılması ve nicelendirilmesi son yıllarda yoğun olarak çalışılan konulardır. Bazıları son yıllarda fark edilen (kuantum diskort, kuantum dissonans) korelasyonlar, kuantum bilişim ve kuantum bilgisayar kuramlarındaki uygulamalar için temel oluşturan nicelendirilebilir, işlenebilir, kontrol edilebilir, aktarılabilir ve tüketilebilir başlıca kaynaklardır. Bu korelasyonlardan özellikle de klasik karşılığı olmayan kuantum korelasyonların anlaşılması, uygulamalarda klasik yollarla elde edilemeyecek üstünlükler sağlamaktadır.

Korelasyonlar açısından durumlar uzayının sınıflandırılması iki ayrık küme olan: dolanık durumlar ve ayrılabilir durumlar olarak yapılmaktadır. Durumların bu iki ayrık kümeden hangisinde olduğunu belirlemeye yönelik farklı yetkinliklerde birçok kriter geliştirilse de her durumda gerek ve yeter koşul olabilecek bir kriter yoktur. Bu çalışmada iki parçalı saf durumların sınıflandırılması için gerek ve yeter koşul olan Schmidt ayrışımı ve iki parçalı sistemler için birçok durumda oldukça yetkin bir kriter olan Peres kriteri incelenmiştir.

Durumlar uzayının yapısının anlaşılması korelasyonların anlaşılması için de önemlidir. Bu çalışmada saf ve saf olmayan durumlar için durumlar uzayının genel yapısı incelenmiş ve korelasyonlar açısından temel bazı özelliklerine değinilmiştir. Yapısı en iyi bilinen durumlar olan tek kübit durumları ve son yıllardaki araştırmalarla olgunlaşan iki kübit durumlarının durum uzaylarının üç boyutta temsilleri yapılmaktadır. Fakat daha fazla bileşen içeren bileşik sistemler için bu yöndeki çalışmalar devam etmektedir.

Korelasyonların nicelendirilmesinde de henüz genel kabul görmüş bir yöntem yoktur. Bu konudaki arayışlar da yoğun olarak sürmektedir. Bu çalışmada korelasyonların nicelendirimi: ölçüm etkisiyle ve bağıl entropiyle yapılmıştır. İlk yöntem; korelasyonların klasik ve kuantum korelasyonlar olarak sınıflandırımına ve nicelendirimine imkân sağlamaktadır. Bu yöntemde toplam klasik korelasyonların taşıyıcısı olan ölçüm uygulanmış durumun: sistemin ilkece sonsuz kopyasına tam ölçüm işlemcilerinin uygulanıp, ölçüm bazlarındaki durumların bir araya getirilmesiyle elde edilen durum olduğunun ve kesinlikle ölçüm sonuçlarına bakılmadığının tekrar

vurgulanması gerekir. Ayrıca burada uygulanan ölçüm işlemcilerinin rankı bir olan tam izdüşüm işlemcileri olması optimizasyon açısından önemlidir.

Bağıl entropi yoluyla korelasyonların nicelendirimi: sistemlerin boyutundan ve kaç bileşenli olduğundan bağımsız olarak her durumda, her tür korelasyonun hesabı için uygulanabilmesinden dolayı genellik açısından önemlidir. Bu yöntemin de iki sıkıntılı yönü vardır. İlk olarak burada durumların birbirlerine uzaklıklarının bir ölçüsü olarak kullanılan bağıl entropinin pozitif bir nicelik olsa da bir metrik olmamasıdır. İkinci olarak dolanıklığın nicelendiriminde en yakın ayrılabilir durumun belirlenmesinin çoğu durumda pek kolay olmamasıdır. Bunun temel nedeni ayrık iki küme olan dolanık durumlar ve ayrılabilir durumlar kümeleri aralarında tanımlanan minimumum belirlenmesindeki zorluklardır.

KAYNAKLAR

- Bennett, C. H., Bernstein, H. J., Popescu, S. and Schumacher, B. 1996. Concentrating Partial Entanglement by Local Operations. *Physical Review A*, 53 (4); pp. 2046-2052.
- Barnett, S. M. 2009. *Quantum Information*. Oxford University Press, 300 p., Great Britain.
- Bengtsson, I. and Życzkowski, K. 2006. *Geometry of Quantum States*. Cambridge University Press, 466 p., New York.
- Datta, A., Flammia, S. T. and Caves, C. M. 2005. Entanglement and the Power of One Qubit. *Physics Letters A*, Vol. 72, pp. 042316.
- Datta, A. 2008. *Studies on the Role of Entanglement in Mixed-state Quantum Computation*. Ph.D. thesis (unpublished), The University of New Mexico at New Mexico, USA.
- Einstein, A., Podolsky, B. and Rosen, N. 1935. Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality Be Considered Complete?. *Physical Review*, Vol. 47, pp. 777-780.
- Greenberger, D. M., Horne, M. and Zeilinger, A. 1989. Bell's Theorem, Quantum Theory and Conceptions of the Universe, Edited by Kafatos, M. Kluwer Academic Publishers, 348 p., Dordrecht.
- Henderson, L. and Vedral, V. 2001. Classical, Quantum and Total Correlations. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, Vol. 34, pp. 6899-6905.
- Horodecki, M., Horodecki, P. and Horodecki, R. 1996. Separability of Mixed States: Necessary and Sufficient Conditions. *Physics Letters A*, Vol. 223(1-2), pp. 1-8.
- Horodecki, M. and Horodecki, P. 1999. Reduction Criterion of Separability and Limits for a Class of Distillation Protocols. *Physical Review A*, Vol. 59 (6), pp. 4206-4216.
- Knill E. and Laflamme R. 1998. Power of one bit of quantum information. *Physical Review Letters*, Vol. 81, pp. 5672
- Lang, M. D. and Caves, C. M. 2010. Quantum Discord and the Geometry of Bell-Diagonal States. *Physical Review Letters*, Vol. 105(15), pp. 150501.
- Luo, S. 2008. Using Measurement-induced Disturbance to Characterize Correlations as Classical or Quantum. *Physics Letters A*, Vol. 77, pp. 022301.
- Nielsen, M. A. and Chuang, I. L. 2000. *Quantum Computation and Quantum Information*. Cambridge University Press, 704 p., Cambridge.
- Peres, A. 1996. Separability Criterion for Density Matrices. *Physical Review Letters*, Vol. 77(8), pp. 1413-1415.

- Raussendorf, R. and Briegel, H.J. 2001. A one-way quantum computer. *Physical Review Letters*, Vol. 86, p. 5188.
- Sakurai, J.J. 1994. *Modern Quantum Mechanics*. Addison-Wesley Publishing, 500 p., USA.
- Schumacher, B. 1995. Quantum Coding. *Physical Review A*, Vol. 51(4), pp. 2738–2747.
- Vedral, V., Modi, K., Paterek, T., Son, W. and Williamson, M. 2010. Unified View of Quantum and Classical Correlations. *Physical Review Letters*, Vol. 104, p. 080501.
- Wehrl, A. 1978. General Properties of Entropy. *Review Modern Physics*, Vol.50, p.221.
- Werner, R. F. 1989. Quantum States with Einstein-Podolsky-Rosen Correlations Admitting a Hidden-Variable Model. *Physical Review A*, Vol. 40 (8), pp. 4277-4281.
- Zurek, W. H. and Ollivier, H. 2002. Quantum Discord: A Measure of the Quantumness of Correlations. *Physical Review Letters*, Vol. 88, p. 017901.

EK

Teorem 5.1 ve Teorem 5.2'nin İspatları

Burada 5. Bölümde ifade edilen iki teoremin ispatları yapılmaktadır. Tartışmaların rahat anlaşılması için teoremlerin açık ifadeleri burada tekrar yazılmıştır.

Teorem 5.1 (Luo 2008)

Eğer ρ_{AB} , $\{P_i^{(A)} \otimes P_j^{(B)}\}$ yerel ölçümlerine göre klasik bir durum ise $\{P_i^{(A)} \otimes P_j^{(B)}\}$, $\{P_j^{(A)}\}$ ve $\{P_j^{(B)}\}$ sırası ile ρ_{AB} , $\rho_A = \text{Tr}_B \rho_{AB}$ ve $\rho_B = \text{Tr}_A \rho_{AB}$ durumlarının öz-izdüşümleridir.

İspat

Bu teoremin ispatı için ilk olarak $\rho_{AB} = \rho_{AB}'$ klasik durumlarının $\{P_i^{(A)} \otimes P_j^{(B)}\}$ ölçüm işlemcilerinin her biriyle sıradеğiştіđi gösterilecektir. Bunun için $P_k = P_i^{(A)} \otimes P_j^{(B)}$ alınıp; $P_k P_{k'} = P_k \delta_{\square_{k,k'}}$ ve $\sum_k P_k = I$ özellikleri kullanılarak bir klasik durumun karesine ölçüm uygulanırsa:

$$\begin{aligned} (\rho^2)' &= (\rho\rho')' \\ &= \sum_k P_k \rho \rho' P_k = \sum_{k,k'} P_k \rho P_{k'} \rho P_{k'} \\ &= \sum_k P_k \rho P_k \rho P_k \end{aligned} \quad (1.1)$$

ifadesi elde edilir. Burada $(\rho^2)'$, ρ^2 durumuna bir tam ölçüm uygulanmış durumdur.

Bir klasik durumun karesi için de:

$$\begin{aligned} \rho^2 &= \rho'^2 = \left(\sum_k P_k \rho P_k \right)^2 \\ &= \sum_k P_k \rho P_k \rho P_k \end{aligned} \quad (1.2)$$

ifadesi yazılabilir. (5.4) ve (5.5) ifadeleri $\rho^2 = (\rho^2)'$ sonucunu verir. Klasik durumların karelerinin de bir klasik durum olduğunu söyleyen bu sonuç $[\rho, P_k][\rho, P_k]^+$ pozitif işlemcileri için yazılabilecek:

$$\sum_k [\rho, P_k][\rho, P_k]^+ \geq 0 \quad (1.3)$$

bağıntısında kullanılırsa (5.6) ifadesi;

$$\sum_k [\rho, P_k][\rho, P_k]^+ = \rho^2 - \rho\rho' - \rho'\rho + (\rho^2)' = 0 \quad (1.4)$$

olur. (5.7) ifadesi ρ durumunun her bir P_k ile sıradeğiştiğini; yani $[\rho, P_k] = 0$ olduğunu söyler. Bu da P_k durumlarının ρ' nun öz-izdüşümleri olmasıyla mümkündür. P_k 'lar ρ' nun öz-izdüşümleri ise $P_i^{(A)}$ ve $P_j^{(B)}$, de sırasıyla ρ^A ve ρ^B indirgenmiş durumlarının öz-izdüşümleridir.

Teorem 5.2 (Luo 2008)

İki parçalı sistemin indirgenmiş yoğunluk işlemcileri

$$\rho^A = Tr_B \rho = \sum_i p_i^A P_i^{(A)}, \quad \rho^B = Tr_A \rho = \sum_j p_j^B P_j^{(B)}$$

şeklinde spektral ayrışımaya sahip olsunlar. Bu durumda aşağıdaki ifadeler eşdeğerdir.

- (iv) ρ bir klasik durundur.
- (v) $\rho, \{P_i^{(A)} \otimes P_j^{(B)}\}$ işlemcilerinin her biriyle sıradeğişir.
- (vi) ρ aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\rho = \sum_{i,j} p_{ij} P_i^{(A)} \otimes P_j^{(B)}$$

İspat

(i) \Rightarrow (ii) önermesi teorem 5.1' in sonucudur. (iii) \Rightarrow (i) önermesi gösterilirse (iii) \Rightarrow (ii) önermesi de gösterilmiş olur. (iii) \Rightarrow (i) önermesi için verilen duruma teorem 5.1' deki kısa yazımları kullanarak bir tam von Neumann ölçümü uygulansın. Ölçüm uygulanmış durum:

$$\begin{aligned}
\rho' &= \sum_k P_k \rho P_k = \sum_k P_k \left(\sum_{i,j} p_{ij} P_i^{(A)} \otimes P_j^{(B)} \right) P_k \\
&= \sum_{i,j,k_1,k_2} p_{ij} P_{k_1}^{(A)} \otimes P_{k_2}^{(B)} (P_i^{(A)} \otimes P_j^{(B)}) P_{k_1}^{(A)} \otimes P_{k_2}^{(B)} \\
&= \sum_{i,j,k_1,k_2} p_{ij} (P_{k_1}^{(A)} P_i^{(A)}) \otimes (P_{k_2}^{(B)} P_j^{(B)}) (P_{k_1}^{(A)} \otimes P_{k_2}^{(B)}) \tag{1.5}
\end{aligned}$$

olur. (5.8) ifadesinde izdüşüm işlemcilerinin diklik özelliği $P_{k_1}^{(A)} P_i^{(A)} = \delta_{\square_{k_1,i}} P_i^{(A)}$ kullanılırsa:

$$\begin{aligned}
\rho' &= \sum_{i,j,k_1,k_2} p_{ij} (P_{k_1}^{(A)} P_i^{(A)}) \otimes (P_{k_2}^{(B)} P_j^{(B)}) (P_{k_1}^{(A)} \otimes P_{k_2}^{(B)}) \\
&= \sum_{i,j} p_{ij} P_i^{(A)} \otimes P_j^{(B)} (P_i^{(A)} \otimes P_j^{(B)})
\end{aligned}$$

$$= \sum_{i,j} p_{ij} P_i^{(A)} P_i^{(A)} \otimes P_j^{(B)} P_j^{(B)} \tag{1.6}$$

olur. (5.9) ifadesinde izdüşüm işlemcilerinin idempotent özelliği kullanılırsa,

$$= \sum_{i,j} p_{ij} P_i^{(A)} \otimes P_j^{(B)}$$

sonucu elde edilerek ispat tamamlanmış olur.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Adem TÜRKMEN

Doğum Yeri : GİRESUN

Doğum Tarihi : 08.12.1980

Medeni Hali : Evli

Yabancı Dili : İngilizce

Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl)

Lise : Giresun İmam Hatip Lisesi –GİRESUN (Haziran 1997)

Lisans : Muğla Üniversitesi Fen Fakültesi Fizik Bölümü (Haziran 2009)

Yüksek Lisans : Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Fizik A.B D. (Eylül 2009-Ağustos 2012)

Çalıştığı Kurum/Kurumlar ve Yıl:

Ordu Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Fizik Bölümü (Şubat 2011-Şubat 2012),

Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Fizik A.B D. (Şubat 2012-...)