

**ANKARA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

PARAMETREYE BAĞLI GENELLEŞTİRİLMİŞ İNTEGRALLER

Gamze ODABAŞI EMANET

MATEMATİK ANABİLİM DALI

**ANKARA
2026**

Her hakkı saklıdır

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

PARAMETREYE BAĞLI GENELLEŞTİRİLMİŞ İNTEGRALLER

Gamze ODABAŞI EMANET

Ankara Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Elgiz BAYRAM

Bu tez altı bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde parametreye bağlı genelleştirilmiş integrallerin genel teorisi verilmiştir.

İkinci bölümde parametreye bağlı genelleştirilmiş integrallerin düzgün yakınsaklığı için Cauchy, Weierstrass, Dedekind testleri detaylı bir şekilde ispatlanmıştır.

Üçüncü bölümde parametreye bağlı Fourier integrallerinin düzgün yakınsaklığı kullanılarak bazı integraller hesaplanmıştır.

Dördüncü bölümde ise parametreye bağlı genelleştirilmiş Euler integrallerinin düzgün yakınsaklık özellikleri öğrenilmiştir.

Beşinci bölümde üstel integraller için düzgün yakınsaklık konusu detaylı olarak incelenmiştir.

Altıncı bölümde ise tezde öğrenilen konularla ilgili gelecek planları ve tartışma konuları verilmiştir.

Ocak 2026, 49 sayfa

Anahtar Kelimeler: Düzgün yakınsak integraller, parametreye bağlı integraller, Fourier integralleri, Euler integralleri, Üstel integral fonksiyonları

ABSTRACT

Master Thesis

IMPROPER INTEGRALS DEPENDENT ON PARAMETER

Gamze ODABAŞI EMANET

Ankara University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Elgiz BAYRAM

This thesis consists of six chapters.

The first chapter presents the general theory of improper integrals depending on a parameter.

In the second chapter, Cauchy, Weierstrass, Dedekind tests for the uniform convergence of such integrals are proved in detail.

In the third chapter, the uniform convergence of Fourier integrals depending on a parameter and the calculation of some integrals using this property are obtained.

In the fourth chapter, the uniform convergence properties of generalized Euler integrals depending on a parameter are learned.

In the fifth chapter, the issue of uniform convergence for exponential integrals is examined in detail.

The sixth chapter is devoted to future plans and discussions regarding the topics covered in the thesis.

January 2026, 49 pages

Keywords: Uniform convergent integrals, integrals depending on a parameter, Fourier integrals, Euler integrals, exponential integral functions

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans öğrenimim boyunca engin bilgi birikimi ve tecrübeleriyle bana her daim yol gösteren, her zaman büyük bir nezaketle ve sabırla yardımcı olan, hiçbir zaman emeğini ve desteğini esirgemeyen, çalışmalarımın her aşamasında emeği olan çok kıymetli danışman hocam Sayın Prof.Dr.Elgiz BAYRAM'a en içten saygılarımı ve minnetlerimi sunarım.

Hayatımın her aşamasında bana destek olan, hiçbir fedakarlıktan kaçınmayıp beni bugünlere getiren, her zaman sevgiyle yanımda olduklarını hissettiren çok kıymetli annem Gülcan ODABAŞI'ya, babam İskender Ata ODABAŞI'ya, ablam Nihan ODABAŞI ŐANSEVER'e en içten teşekkürlerimi sunarım.

Hayatımın her alanında, her kararımda anlayıŐlı tavrıyla desteğini hep hissettiren, yüksek lisans eğitimi sürecimde beni cesaretlendirerek yola devam etmemi sağlayan çok kıymetli eŐim Ahmet Hakan EMANET'e tüm kalbimle teşekkürlerimi sunarım.

Gamze ODABAŞI EMANET

Ankara, Ocak 2026

İÇİNDEKİLER

TEZ ONAY SAYFASI

ETİK.....	i
ÖZET.....	ii
ABSTRACT	iii
TEŞEKKÜR	iv
SİMGELER DİZİNİ	vi
1. GİRİŞ	1
2. PARAMETREYE BAĞLI GENELLEŞTİRİLMİŞ İNTEGRALLER.....	3
2.1 Parametreye Bağlı Genelleştirilmiş İntegral	3
2.2 Düzgün Yakınsaklık	3
2.3 Parametreye Bağlı Genelleştirilmiş İntegrallerin Düzgün Yakınsaması İçin Testler	4
2.3.1 Cauchy testi	4
2.3.2 Weierstrass testi.....	5
2.3.3 Dedekind testi	7
2.4 Parametreye Bağlı Genelleştirilmiş İntegrallerin Düzgün Yakınsaklığı ile İlgili Örnekler	10
3. FOURIER İNTEGRALLERİ	15
3.1 Fourier İntegrallerinin Özellikleri.....	15
3.2 Fourier İntegrali ile İlgili Örnekler	19
4. EULER İNTEGRALLERİ.....	23
4.1 Gamma Fonksiyonunun Özellikleri	23
4.2 Beta Fonksiyonunun Özellikleri	30
5. ÜSTEL İNTEGRAL FONKSİYONLARI	34
6. TARTIŞMA VE SONUÇ	45
KAYNAKLAR.....	46
ÖZGEÇMİŞ.....	49

SİMGELER DİZİNİ

0^+	Sıfıra sağdan yaklaşma
B	Beta Fonksiyonu
\mathbb{N}	Doğal sayılar kümesi
\in	Eleman
\exists	En az bir
$!$	Faktöriyel
$F(f(\lambda))$	f fonksiyonunun Fourier dönüşümü
$f^{(n)}$	f fonksiyonunun n'inci mertebeden türevi
Γ	Gama Fonksiyonu
$G_k(x)$	Genelleştirilmiş üstel integral fonksiyonu
$\frac{\partial g}{\partial x}$	g fonksiyonun x parametresine göre kısmi türevi
\forall	Her
\int	İntegral
lim	Limit
maks	Maksimum
$E_s^j(x)$	Milgram tipi genelleştirilmiş üstel integral fonksiyonu
\mathbb{R}	Reel sayılar kümesi

1. GİRİŞ

Parametreye bağlı genelleştirilmiş integraller kuantum fiziğinde, kuantum istatistik teorisinde, ışınların taşınma süreçleri teorisinde, yüksek geçişkenlik teorisinde, sıvıların akışkanlık özelliklerinin öğrenilmesinde, tek boyutlu ve çok boyutlu ışın saçılımlarında ve düzlemsel saçılımların incelenmesinde önem arz etmektedir (Breig ve Grosbie 1974, 1975; Busbridge 1960; Chandrasekhar 1960; Grosbie ve Dougherty 1981; Grosbie ve Lee 1987, 1989; Drummond 1981; Goody 1964; Guseinov ve Momedov 2001, 2002, 2005; Hunt 1967; Kourganof 1952; Oberoy ve Gallaway 1972; Peroiah 2002; Prabha ve Yadav 1996; Rubicki 1971; Smith 1964; Smith ve Hunt 1967; Yuen ve Ho 1967). Ayrıca uygulamalı matematiğin ve analizin bazı konularının öğrenilmesinde, parametreye bağlı genelleştirilmiş integrallerin incelenmesi gerekmektedir (Nikolsky 1977; Prudnikov, Brychkov ve Marichev 1992; Sobolev 1963). Bu türlü integrallere örnek olarak Fourier integralleri, Laplace integralleri, Euler integralleri, bir boyutlu ve çok boyutlu üstel integraller, Plank integrali, Schwarzschild Milne' in birinci, ikinci, üçüncü integralleri ve Hubbel integrali gösterilebilir.

Parametreye bağlı genelleştirilmiş integrallerin analitik özelliklerinin, seri gösterimlerinin, parametreye göre farklı noktalarda asimptotik eşitliklerinin öğrenilmesi ve yaklaşık değerlerinin hesaplanması bu integrallerin parametreye göre düzgün yakınsaklığı ile ilgilidir. Bu nedenle de çeşitli parametreye bağlı genelleştirilmiş integrallerin incelenmesi önem arz etmektedir.

Aşağıdaki gibi tanımlanan Schwarzschild Milne integralleri göz önünde bulundursun.

$$f_1(\tau) = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} B(t)E_1(|t - \tau|)dt$$

şeklinde tanımlanan 1.tip Schwarzschild Milne İntegrali,

$$f_2(\tau) = 2 \int_{\tau}^{\infty} B(t)E_2(t - \tau)dt - 2 \int_0^{\tau} B(t)E_2(\tau - t)dt$$

şeklinde tanımlanan 2.tip Schwarzschild Milne İntegrali ve

$$f_3(\tau) = 2 \int_0^{\infty} B(t)E_3(|t - \tau|)dt$$

şeklinde tanımlanan 3.tip Schwarzschild Milne İntegralidir. (Chandrasekhav 1960).

İntegrallerin parametreye göre düzgün yakınsaklığı ve düzgün yakınsaklık kullanılarak elde edilen seri gösterimleri, asimptotik eşitlikleri ve integral değerlerinin nümerik olarak hesaplamaları Aygar ve Bairamov (2011), Bairamov ve Özalp (2012), Bairamov ve Yardımcı (2010), Özalp ve Bairamov (2011) tarafından detaylı bir biçimde incelenmiştir. Üstel integrallerin iki boyutlu genelleştirmeleri

$$\varepsilon_n^p(x, \beta) = \int_1^{\infty} f_n^p(t, \beta) \frac{e^{-x(t^2 + \beta^2)^{\frac{1}{2}}}}{(t^2 + \beta^2)^{\frac{p}{2}}} dt, n = 1, 2, \dots$$

şeklinde, burada $x \in (0, \infty)$, $\beta \in \mathbb{R}$, $p = 0, 1$ ve $f_n^p(t, \beta)$ fonksiyonu ise t ve β değişkenlerine göre bir polinomdur. Bu üstel fonksiyonlar için düzgün yakınsaklık, seri gösterimleri, asimptotik eşitlikler ve değerlerinin nümerik olarak hesaplamaları Bairamov ve Özalp tarafından öğrenilmiştir (2012).

Radyasyonun yayılımı ile ilgili Hubbel integrali iki parametreye bağlı

$$H(a, b) = \int_0^a \int_0^b \frac{1}{1 + x^2 + y^2} dx dy$$

şeklinde bir genelleştirilmiş integraldir, burada $0 \leq a \leq b \leq \infty$ (Hubbel, Bach ve Lamkin 1960).

Hubbel integrali için düzgün yakınsaklık detaylı bir biçimde Bairamov ve Özalp tarafından incelenmiştir (2011).

2. PARAMETREYE BAĞLI GENELLEŞTİRİLMİŞ İNTEGRALLER

2.1 Parametreye Bağlı Genelleştirilmiş İntegral

Tanım 2.1 $h(\alpha, \beta)$ fonksiyonu $b \leq \alpha < +\infty$ ve $c \leq \beta \leq d$ aralığında tanımlı olsun.

$\forall \beta \in [c, d]$ için;

$$J(\beta) = \int_b^{\infty} h(\alpha, \beta) d\alpha = \lim_{l \rightarrow +\infty} \int_b^l h(\alpha, \beta) d\alpha$$

şeklinde tanımlanan integrale sınırsız aralıkta tanımlı parametreye bağlı genelleştirilmiş integral denir (Budak ve Fomin 1973).

2.2 Düzgün Yakınsaklık

Sınırsız aralıkta tanımlı parametreye bağlı genelleştirilmiş integralin düzgün yakınsaklığı aşağıdaki gibi tanımlanır.

Tanım 2.2 Keyfi bir $\varepsilon > 0$ verildiğinde, her $l > L(\varepsilon)$ ve her $\beta \in [c, d]$ için

$$\left| J(\beta) - \int_b^l h(\alpha, \beta) d\alpha \right| = \left| \int_l^{+\infty} h(\alpha, \beta) d\alpha \right| < \varepsilon$$

eşitsizliğini sağlayacak şekilde $L=L(\varepsilon)$ varsa,

$$J(\beta) = \int_b^{+\infty} h(\alpha, \beta) d\alpha$$

integrali, $c \leq \beta \leq d$ aralığında β parametresine göre düzgün yakınsaktır denir (Budak ve Fomin 1973).

2.3 Parametreye Bağlı Genelleştirilmiş İntegrallerin Düzgün Yakınsaması İçin Testler

2.3.1 Cauchy testi

$$\int_x^{\infty} h(\alpha, \beta) d\alpha$$

integralinin bir $[c, d]$ aralığında düzgün bir şekilde yakınsaması için, her $\varepsilon > 0$ için en az bir $L = L(\varepsilon)$ vardır öyle ki

$$\left| \int_{l'}^{l''} h(\alpha, \beta) d\alpha \right| < \varepsilon$$

eşitsizliği tüm $l', l'' > L(\varepsilon)$ ve tüm $\beta \in [c, d]$ için geçerli olması gerekli ve yeterlidir (Budak ve Fomin 1973).

İspat. (Gereklilik) Eğer integral düzgün yakınsak ise, her $\varepsilon > 0$ için en az bir $L = L(\varepsilon)$ vardır, öyle ki $l' > L(\varepsilon), l'' > L(\varepsilon)$ ve $\beta \in [c, d]$ için;

$$\left| \int_{l'}^{\infty} h(\alpha, \beta) d\alpha \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

ve

$$\left| \int_{l''}^{\infty} h(\alpha, \beta) d\alpha \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

eşitsizlikleri sağlanır. Bu nedenle, her $l', l'' > L(\varepsilon)$ ve her $\beta \in [c, d]$ için

$$\left| \int_{l'}^{l''} h(\alpha, \beta) d\alpha \right| = \left| \int_{l'}^{+\infty} h(\alpha, \beta) d\alpha - \int_{l''}^{+\infty} h(\alpha, \beta) d\alpha \right|$$

$$\leq \left| \int_{l'}^{+\infty} h(\alpha, \beta) d\alpha \right| + \left| \int_{l''}^{+\infty} h(\alpha, \beta) d\alpha \right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

elde edilir.

(Yeterlilik) Eğer her $l' > L(\varepsilon), l'' > L(\varepsilon)$ ve her $\beta \in [c, d]$ için

$$\left| \int_{l'}^{l''} h(\alpha, \beta) d\alpha \right| < \varepsilon$$

eşitsizliği geçerli ise,

$$\int_x^{\infty} h(\alpha, \beta) d\alpha$$

integrali her $\beta \in [c, d]$ için yakınsaktır. Bu nedenle, $l'' \rightarrow +\infty$ olarak limite geçilirse, her $l' > L(\varepsilon)$ için ve her $\beta \in [c, d]$ için geçerli olan

$$\left| \int_{l'}^{+\infty} h(\alpha, \beta) d\alpha \right| < \varepsilon$$

eşitsizliği elde edilir.

2.3.2 Weierstrass testi

Eğer $b \leq \alpha < +\infty$ için $|h(\alpha, \beta)| \leq g(\alpha)$ ve

$$\int_b^{+\infty} g(\alpha) d\alpha$$

yakınsak ise $c \leq \beta \leq d$ aralığında

$$\int_b^{+\infty} h(\alpha, \beta) d\alpha$$

ve

$$\int_b^{+\infty} |h(\alpha, \beta)| d\alpha$$

integralleri düzgün yakınsaktır (Budak ve Fomin 1973).

İspat. Keyfi bir $\varepsilon > 0$ verilsin.

$$\int_b^{+\infty} g(\alpha) d\alpha$$

integrali yakınsıyorsa, en az bir $L = L(\varepsilon)$ vardır öyle ki

$$\int_{l'}^{l''} g(\alpha) d\alpha < \varepsilon$$

koşulu $l'' > l'$ olacak şekilde her $l', l'' > L(\varepsilon)$ için sağlanır. Bu sonuç $l'' > l'$ olacak şekilde her $l', l'' > L(\varepsilon)$ için

$$\left| \int_{l'}^{l''} h(\alpha, \beta) d\alpha \right| \leq \int_{l'}^{l''} |h(\alpha, \beta)| d\alpha \leq \int_{l'}^{l''} g(\alpha) d\alpha < \varepsilon$$

eşitsizliklerinin her $\beta \in [c, d]$ için sağlandığı anlamına gelir. Sonuç olarak, Cauchy Testi yardımıyla,

$$\int_b^{+\infty} h(\alpha, \beta) d\alpha$$

ve

$$\int_b^{+\infty} |h(\alpha, \beta)| d\alpha$$

integrallerinin $c \leq \beta \leq d$ aralığında β parametresine göre düzgün yakınsak olduğu bulunur.

2.3.3 Dedekind testi

E , reel sayıların sınırlı veya sınırsız bir alt kümesi olsun.

$$\int_0^{\infty} h(\alpha, \beta)g(\alpha, \beta)d\alpha, \quad \beta \in E \quad (2.1)$$

integralini göz önüne alalım.

(2.1) integralinde $h, g, \frac{\partial g}{\partial \alpha}$ fonksiyonları her $\beta \in E$ için α değişkenine göre $[0, \infty)$ aralığında sürekli olsunlar. Eğer

(a) her $\beta \in E$ için düzgün olarak

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} g(\alpha, \beta) = 0,$$

(b) $\frac{\partial g}{\partial \alpha}$ fonksiyonu her $\alpha \in E$ için α değişkenine göre $[0, \infty)$ üzerinde aynı işaretli (işaretini korusun)

ve

(c) her $\beta \in E, \tau \in [0, \infty)$ için

$$\int_0^{\alpha} h(\tau, \beta)d\tau$$

integrali düzgün sınırlı, yani en az bir $M > 0$ sabiti vardır ki

$$\left| \int_0^{\alpha} h(\tau, \beta)d\tau \right| \leq M, \quad \forall \alpha \in [0, \infty), \quad \beta \in E$$

koşulu sağlansın. Bu durumda (2.1) integrali $\beta \in E$ için β değişkenine göre düzgün yakınsaktır (Prudnikov, Brychkov ve Marichev 1992).

İspat. Keyfi $x \in [0, \infty)$ için kısmi integrasyon kullanılarak

$$\begin{aligned}
\int_x^\infty h(\alpha, \beta)g(\alpha, \beta)d\alpha &= - \int_x^\infty g(\alpha, \beta)d \left\{ \int_\alpha^x h(\tau, \beta)d\tau \right\} \\
&= - \left[g(\alpha, \beta) \int_\alpha^x h(\tau, \beta)d\tau \right]_{\alpha=x}^\infty + \int_x^\infty \left[\int_\alpha^x h(\tau, \beta)d\tau \right] \frac{\partial g(\alpha, \beta)}{\partial \alpha} d\alpha \\
&= - \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \left[g(\alpha, \beta) \int_\alpha^x h(\tau, \beta)d\tau \right] + \int_x^\infty \left[\int_\alpha^x h(\tau, \beta)d\tau \right] \frac{\partial g(\alpha, \beta)}{\partial \alpha} d\alpha \quad (2.2)
\end{aligned}$$

elde edilir. Diğer yandan,

$$\int_\alpha^x h(\tau, \beta)d\tau = \int_0^x h(\tau, \beta)d\tau - \int_0^\alpha h(\tau, \beta)d\tau$$

eşitliğinden,

$$\left| \int_\alpha^x h(\tau, \beta)d\tau \right| \leq 2M \quad (2.3)$$

bulunur. Bu durumda,

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \left[g(\alpha, \beta) \int_\alpha^x f(\tau, \beta)d\tau \right] = 0$$

elde edilir. Son eşitlik (2.2) ifadesinde yerine konursa

$$\int_x^\infty h(\alpha, \beta)g(\alpha, \beta)d\alpha = \int_x^\infty \left[\int_\alpha^x h(\tau, \beta)d\tau \right] \frac{\partial g(\alpha, \beta)}{\partial \alpha} d\alpha \quad (2.4)$$

denkleme ulaşılır. (2.3) eşitsizliğinden, her $\varepsilon > 0$ için, öyle bir $\delta_1 = \delta_1(\varepsilon) > 0$ vardır ki, keyfi $\eta \geq \delta_1(\varepsilon)$ ve keyfi $\lambda \in E$ için

$$\left| \int_{\alpha}^{\eta} h(\tau, \beta) d\tau \right| \leq 2M \quad (2.5)$$

gerçeklenir. Ayrıca her $\varepsilon > 0$ için, öyle bir $\delta_2 = \delta_2(\varepsilon) > 0$ vardır ki, her $\eta \geq \delta_2(\varepsilon)$ ve her $\beta \in E$ için

$$|g(\eta, \beta)| \leq \frac{\varepsilon}{2M} \quad (2.6)$$

sağlanır. $\delta(\varepsilon) := \max\{\delta_1(\varepsilon), \delta_2(\varepsilon)\}$ olmak üzere (2.5) ve (2.6) eşitsizliklerinden her $\varepsilon > 0$ için öyle bir $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ vardır ki, her $\eta \geq \delta(\varepsilon)$ ve $\beta \in E$ için

$$\left| \int_{\alpha}^{\eta} h(\tau, \beta) d\tau \right| \leq 2M \quad (2.7)$$

ve

$$|g(\eta, \beta)| \leq \frac{\varepsilon}{2M} \quad (2.8)$$

elde edilir. (2.4), (2.7) ve (2.8) ifadelerinden, her $\varepsilon > 0$ için öyle bir $\delta(\varepsilon) > 0$ vardır ki, her $\eta \geq \delta(\varepsilon)$ ve $\beta \in E$ için

$$\begin{aligned} \left| \int_{\eta}^{\infty} h(\alpha, \beta) g(\alpha, \beta) d\alpha \right| &= \left| \int_{\eta}^{\infty} \left[\int_{\alpha}^{\eta} h(\tau, \beta) d\tau \right] \frac{\partial g(\alpha, \beta)}{\partial \alpha} d\alpha \right| \\ &\leq \int_{\eta}^{\infty} \left| \int_{\alpha}^{\eta} h(\tau, \beta) d\tau \right| \left| \frac{\partial g(\alpha, \beta)}{\partial \alpha} \right| d\alpha \\ &\leq 2M \int_{\eta}^{\infty} \left| \frac{\partial g(\alpha, \beta)}{\partial \alpha} \right| d\alpha \end{aligned} \quad (2.9)$$

gerçeklenir. Her $\beta \in E$ için α değişkenine göre $\frac{\partial g(\alpha, \beta)}{\partial \alpha}$ aynı işaretli olduğundan (2.9) eşitsizliğinden

$$\left| \int_{\eta}^{\infty} h(\alpha, \beta) g(\alpha, \beta) d\alpha \right| \leq 2M \left| \int_{\eta}^{\infty} \frac{\partial g(\alpha, \beta)}{\partial \alpha} d\alpha \right|$$

$$\begin{aligned}
&= 2M \left| \lim_{\alpha \rightarrow \infty} g(\alpha, \beta) - g(\eta, \beta) \right| \\
&= 2M \cdot |g(\eta, \beta)| \leq \varepsilon
\end{aligned}$$

elde edilir, yani (2.1) integrali $\beta \in E$ için β değişkenine göre düzgün yakınsaktır.

2.4 Parametreye Bağlı Genelleştirilmiş İntegrallerin Düzgün Yakınsaklığı ile İlgili Örnekler

Bu bölümde önceki bölümde verdiğimiz bilgiler ışığında çeşitli örneklerin detaylı çözümlerine yer verilecektir.

Örnek 2.1 m ve n pozitif tam sayılar ve $m < n$ olsun.

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{2m}}{1+x^{2n}} dx = \frac{\pi}{2n} \frac{1}{\sin\left(\frac{2m+1}{2n}\pi\right)} \quad (2.10)$$

integralinden faydalanılarak $0 < p < 1$ için

$$\int_0^{\infty} \frac{\tau^{p-1}}{1+\tau} d\tau = \frac{\pi}{\sin(p\pi)} \quad (2.11)$$

olduğu gösterilsin.

(2.10) integralinde $x = \tau^{\frac{1}{2n}}$ ve değişken değiştirmesi yapılırsa

$$\int_0^{\infty} \frac{\tau^{\frac{2m+1}{2n}-1}}{1+\tau} d\tau = \frac{\pi}{\sin\left(\frac{2m+1}{2n}\pi\right)}$$

elde edilir.

(2.11) ifadesinde verilen integral için $0 < \tau < \infty$ aralığı $\begin{cases} 0 \leq \tau \leq 1 \\ 1 \leq \tau < \infty \end{cases}$ olacak şekilde iki aralığa bölünsün.

$$\int_0^1 \frac{\tau^{p-1}}{1+\tau} d\tau + \int_1^{\infty} \frac{\tau^{p-1}}{1+\tau} d\tau$$

Toplamın her iki tarafına da Weierstrass testi uygulanırsa;

$$\frac{\tau^{p-1}}{1+\tau} \leq \frac{1}{1+\tau}, \quad \tau \in [0,1]$$

ve

$$\frac{\tau^{p-1}}{1+\tau} \leq \frac{\tau^{p-1}}{2}, \quad \tau \in [1, \infty)$$

yazılabilir. Dolayısıyla her iki kısım da düzgün yakınsak olduğundan

$$\int_0^{\infty} \frac{\tau^{p-1}}{1+\tau} d\tau$$

integrali düzgün yakınsaktır. Böylece

$$f(\tau, p) = \frac{\tau^{p-1}}{1+\tau}, \quad (0 < \tau < \infty)$$

fonksiyonu süreklidir ve

$$\int_0^{\infty} f(\tau, p) d\tau$$

integrali düzgün yakınsaktır.

$0 < p < 1$, $m < n$, $m, n = 1, 2, \dots$ için $\frac{2m+1}{2n} \xrightarrow{\text{lim}} p$ olur. Buradan

$$\int_0^{\infty} \frac{\tau^{p-1}}{1+\tau} d\tau = \frac{\pi}{\sin(p\pi)}$$

elde edilir.

Örnek 2.2

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin(\beta x)}{x} dx$$

integrali hesaplınsın.

Bu integral β parametresi için integral altında diferensiyellenemez. $e^{-\alpha x}$ faktörüyle

$$\int_0^{\infty} e^{-\alpha x} \frac{\sin(\beta x)}{x} dx \tag{2.12}$$

diferensiyellenebilir.

$$\left| e^{-\alpha x} \frac{\sin(\beta x)}{x} \right| \leq m e^{-\alpha x}, \quad \alpha > 0, \quad x \neq 0, \quad \beta \in \mathbb{R}$$

olduğundan

$$\int_0^{\infty} e^{-\alpha x} \frac{\sin(\beta x)}{x} dx$$

integrali $\beta \in \mathbb{R}$ parametresine göre düzgün yakınsaktır.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \beta} \int_0^{\infty} e^{-\alpha x} \frac{\sin(\beta x)}{x} dx &= \int_0^{\infty} \frac{e^{-\alpha x}}{x} \frac{\partial}{\partial \beta} \sin(\beta x) dx \\ &= \int_0^{\infty} \frac{e^{-\alpha x}}{x} x \cos(\beta x) dx \end{aligned}$$

olup

$$I = \int_0^{\infty} e^{-\alpha x} \cos(\beta x) dx$$

integraline kısmi integrasyon uygulansın. O halde

$$\begin{aligned} u &= e^{-\alpha x}, \\ du &= -\alpha e^{-\alpha x} dx, \\ dv &= \cos(\beta x) dx, \\ v &= \frac{\sin(\beta x)}{\beta} \end{aligned}$$

değişkenleri yerlerine yazıldığında

$$\begin{aligned} I &= e^{-\alpha x} \frac{\sin(\beta x)}{\beta} \Big|_0^{\infty} + \frac{\alpha}{\beta} \int_0^{\infty} e^{-\alpha x} \frac{\sin(\beta x)}{x} dx \\ &= \frac{\alpha}{\beta} \int_0^{\infty} e^{-\alpha x} \frac{\sin(\beta x)}{x} dx \end{aligned}$$

elde edilir. Elde edilen sonuca tekrar kısmi integrasyon uygulansın.

$$\begin{aligned} u &= e^{-\alpha x}, \\ du &= -\alpha e^{-\alpha x} dx, \\ dv &= \sin(\beta x) dx, \\ v &= -\frac{\cos(\beta x)}{\beta} \end{aligned}$$

yerlerine yazıldığında

$$I = \frac{\alpha}{\beta} \left[-e^{-\alpha x} \frac{\cos(\beta x)}{\beta} \Big|_0^{\infty} - \frac{\alpha}{\beta} \underbrace{\int_0^{\infty} e^{-\alpha x} \cos(\beta x) dx}_I \right]$$

$$I = \frac{\alpha}{\beta^2} - \frac{\alpha^2}{\beta^2} I$$

$$I = \frac{\alpha}{\alpha^2 + \beta^2}$$

bulunur. (2.12) integraline dönülürse

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} e^{-\alpha x} \frac{\sin(\beta x)}{x} dx &= \int \frac{\alpha}{\alpha^2 + \beta^2} d\beta \\ &= \int \frac{1}{1 + \frac{\beta^2}{\alpha^2}} d\left(\frac{\beta}{\alpha}\right) \end{aligned}$$

olup burada $\frac{\beta}{\alpha} = u$ dönüşümü yapılırsa

$$= \int \frac{1}{1 + u} du = \arctan u = \arctan \frac{\beta}{\alpha}$$

elde edilir. Sonuç olarak $\alpha > 0$ ve $e^{-\alpha x}, \beta \in \mathbb{R}$ için

$$\int_0^{\infty} e^{-\alpha x} \frac{\sin(\beta x)}{x} dx = \arctan \frac{\beta}{\alpha}$$

bulunur. $\alpha > 0$ ve herhangi sabit β için bu integralin α parametresine göre yakınsak olduğunu biliniyor. Buradan

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \frac{\sin(\beta x)}{x} dx &= \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \int_0^{\infty} e^{-\alpha x} \frac{\sin(\beta x)}{x} dx \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \arctan \left(\frac{\beta}{\alpha} \right) \\ &= \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & \beta > 0 \\ 0, & \beta = 0 \\ -\frac{\pi}{2}, & \beta < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

eşitliğine ulaşılır. Özel olarak

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = 2 \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = 2 \frac{\pi}{2} = \pi$$

elde edilir.

Örnek 2.3 Euler – Poisson integrali ele alınsın.

$$J = \int_0^{\infty} e^{-(x)^2} dx$$

integralinde $x = ut$ ve $dx = u dt$ yerlerine yazılsın.

$$J = \int_0^{\infty} e^{-u^2 t^2} u dt$$

integralinde her iki taraf da e^{-u^2} ile çarpılırsa

$$J e^{-u^2} = \int_0^{\infty} e^{-(1+t^2)u^2} u dt$$

bulunur. Buradan u değişkenine göre integral alınır

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} e^{-u^2} J du &= \int_0^{\infty} \left[\int_0^{\infty} e^{-(1+t^2)u^2} u dt \right] du \\ &= \int_0^{\infty} dt \int_0^{\infty} e^{-(1+t^2)u^2} u du \end{aligned}$$

elde edilir. Son adımda da $u^2 = \alpha$ ve $2udu = d\alpha$ yazılsın. Böylece

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} e^{-u^2} J du &= \frac{1}{2} \int_0^{\infty} dt \int_0^{\infty} e^{-\alpha(1+t^2)} d\alpha \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\infty} - \frac{e^{-\alpha(1+t^2)}}{1+t^2} \Big|_{\alpha=0}^{\alpha=\infty} dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{1}{1+t^2} dt = \frac{1}{2} \arctan t \Big|_0^{\infty} = \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

$$J = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

bulunur.

3. FOURIER İNTEGRALLERİ

Tanım 3.1 $\zeta \in L_1(-\infty, \infty)$ olmak üzere;

$$\psi(\lambda) = F(\zeta(\lambda)) := \int_{-\infty}^{\infty} \zeta(x) e^{-i\lambda x} dx, \quad (\lambda \in \mathbb{R}) \quad (3.1)$$

integraline ζ fonksiyonunun Fourier integrali denir (Knjazev 1969).

3.1 Fourier İntegrallerinin Özellikleri

Teorem 3.1 $\zeta \in L_1(-\infty, \infty)$ ise $\psi(\lambda) = F(\zeta(\lambda))$ fonksiyonu hem sınırlı hem de süreklidir (Knjazev 1969).

İspat.

$$|\zeta(x)e^{-i\lambda x}| \leq |\zeta(x)|$$

olduğundan (3.1) integrali λ parametresine göre \mathbb{R} 'de düzgün yakınsaktır.

$$|\psi(\lambda)| \leq \left| \int_{-\infty}^{\infty} \zeta(x) e^{-i\lambda x} dx \right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |\zeta(x)| dx = M$$

olup her $\lambda \in \mathbb{R}$ için $|\psi(\lambda)| \leq M$ olduğundan ψ fonksiyonu sınırlıdır.

Her $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ için $\psi(\lambda)$ 'nın λ_0 noktasında sürekliliği gösterilsin. ψ fonksiyonu λ değişkenine göre düzgün yakınsak olduğundan

$$\begin{aligned} \lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0} \psi(\lambda) &= \lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0} \int_{-\infty}^{\infty} \zeta(x) e^{-i\lambda x} dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0} \zeta(x) e^{-i\lambda x} dx \end{aligned}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \zeta(x) e^{-i\lambda_0 x} dx = \psi(\lambda_0)$$

elde edelim. Bu ise $\psi(\lambda)$ fonksiyonunun λ_0 noktasında sürekli olduğunu gösterir.

$\lambda_0 \in \mathbb{R}$ keyfi bir nokta olduğundan $\psi(\lambda)$ fonksiyonu \mathbb{R} 'de süreklidir.

Teorem 3.2 $\zeta, \zeta' \in L_1(-\infty, \infty)$ ise $F(\zeta')(\lambda) = i\lambda F(\zeta)(\lambda)$ gerçekenir (Knjazev 1969).

İspat.

$$F(\zeta')(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} \zeta'(x) e^{-i\lambda x} dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda x} dx$$

Son integralde kısmi integrasyon uygulanırsa

$$\begin{aligned} F(\zeta')(\lambda) &= \underbrace{\zeta(x) e^{-i\lambda x} \Big|_{-\infty}^{\infty}}_0 - \int_{-\infty}^{\infty} \zeta(x) d e^{-i\lambda x} \\ &= -(-i\lambda) \int_{-\infty}^{\infty} \zeta(x) e^{-i\lambda x} dx \\ &= i\lambda F(\zeta)(\lambda) \end{aligned}$$

elde edilir. Bu ise ispatı tamamlar.

Teorem 3.3 $\zeta, \zeta', \zeta'', \dots, \zeta^{(\eta)} \in L_1(-\infty, \infty)$ ise

$$F(\zeta^{(\eta)})(\lambda) = (i\lambda)^\eta F(\zeta)(\lambda)$$

sağlanır (Knjazev 1969).

İspat. Tümevarım yöntemi kullanılırsa;

$$\eta = 1 \text{ için } F(\zeta')(\lambda) = i\lambda F(\zeta)(\lambda)$$

$$\eta = 2 \text{ için } F(\zeta'')(\lambda) = i\lambda F(\zeta')(\lambda) = (i\lambda)^2 F(\zeta)(\lambda)$$

·
·
·

$$\eta = \eta - 1 \text{ için } F(\zeta^{\eta-1})(\lambda) = (i\lambda)^{\eta-1}F(\zeta)(\lambda)$$

sağlansın. Buradan

$$F(\zeta^\eta)(\lambda) = F[(\zeta')^{\eta-1}](\lambda) = (i\lambda)^{\eta-1}F(\zeta')(\lambda) = (i\lambda)^\eta F(\zeta)(\lambda)$$

elde edilir.

Teorem 3.4 $\zeta \in L_1(-\infty, \infty)$ ve $x\zeta(x) \in L_1(-\infty, \infty)$ ise $\psi'(\lambda) = F(-ix\zeta(x))(\lambda)$

sağlanır (Knjazev 1969).

İspat.

$$\psi(\lambda) = F(\zeta(\lambda)) = \int_{-\infty}^{\infty} \zeta(x)e^{-i\lambda x} dx$$

olup, buradan

$$\begin{aligned} \psi'(\lambda) &= \frac{d}{d\lambda} \int_{-\infty}^{\infty} \zeta(x)e^{-i\lambda x} dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} -ix\zeta(x)e^{-i\lambda x} dx \\ &= F(-ix\zeta(x))(\lambda) \end{aligned}$$

bulunur. Bu ise ispatı tamamlar.

Tanım 3.2 $\zeta_1, \zeta_2 \in L_1(-\infty, \infty)$ olmak üzere

$$g(x) := (\zeta_1 * \zeta_2)(x) := \int_{-\infty}^{\infty} \zeta_1(\tau)\zeta_2(x - \tau) d\tau$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \zeta_1(x - \tau) \zeta_2(\tau) d\tau$$

tanımlanır. Buna ζ_1 ve ζ_2 fonksiyonlarının konvolüsyonu denir. Bu işleme $L_1(-\infty, \infty)$ uzayında çarpım da denir.

Ayrıca konvolüsyon aşağıdaki özelliklere sahiptir:

$$(a) (\zeta_1 * \zeta_2)(x) = (\zeta_2 * \zeta_1)(x)$$

$$(b) \zeta_1 * (\zeta_2 + \zeta_3) = (\zeta_1 * \zeta_2) + (\zeta_1 * \zeta_3)$$

$$(c) (\zeta_1 * \zeta_2) * \zeta_3 = \zeta_1 * (\zeta_2 * \zeta_3)$$

(d) $\zeta_1, \zeta_2 \in L_1(-\infty, \infty)$ ise $\zeta_1 * \zeta_2 \in L_1(-\infty, \infty)$ olur (Knjazev 1969).

Teorem 3.5 $\zeta_1, \zeta_2 \in L_1(-\infty, \infty)$ olmak üzere

$$F(\zeta_1 * \zeta_2)(\lambda) = F(\zeta_1)(\lambda)F(\zeta_2)(\lambda)$$

sağlanır (Knjazev 1969).

İspat.

$$\begin{aligned} F[(\zeta_1 * \zeta_2)](x) &= \int_{-\infty}^{\infty} (\zeta_1 * \zeta_2)(x) e^{-i\lambda x} dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \zeta_1(\tau) \zeta_2(x - \tau) d\tau \right] e^{-i\lambda x} dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \zeta_1(\tau) \zeta_2(x - \tau) e^{-i\lambda x} dx d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \zeta_1(\tau) \left[\int_{-\infty}^{\infty} \zeta_2(x - \tau) e^{-i\lambda(x - \tau)} dx \right] e^{-i\lambda \tau} d\tau \end{aligned}$$

olup son integralde $x - \tau = u$ olarak yerine yazılırsa;

$$\begin{aligned}
F[(\zeta_1 * \zeta_2)](x) &= \int_{-\infty}^{\infty} \zeta_1(\tau) \left[\int_{-\infty}^{\infty} \zeta_2(u) e^{-i\lambda u} du \right] e^{-i\lambda\tau} d\tau \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \zeta_1(\tau) e^{-i\lambda\tau} d\tau \int_{-\infty}^{\infty} \zeta_2(u) e^{-i\lambda u} du \\
&= F(\zeta_1)(\lambda) F(\zeta_2)(\lambda)
\end{aligned}$$

elde edilir.

3.2 Fourier İntegrali ile İlgili Örnekler

Örnek 3.1 $k: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$k(\tau) = \begin{cases} 1 & \tau \in [-1,1] \\ 0 & \tau \in \mathbb{R} \setminus [-1,1] \end{cases}$$

için $F(k)(\lambda)$ hesaplınsın.

$$\int_{-\infty}^{\infty} |k(\tau)| d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} k(\tau) d\tau = \int_{-1}^1 d\tau = 2$$

olup $k \in L_1(-\infty, \infty)$ bulunur. Buradan

$$\begin{aligned}
F(k)(\lambda) &= \int_{-\infty}^{\infty} k(\tau) e^{-i\lambda\tau} d\tau = \int_{-1}^1 e^{-i\lambda\tau} d\tau = -\frac{1}{i\lambda} e^{i\lambda\tau} \Big|_{-1}^1 \\
&= -\frac{1}{i\lambda} (e^{-i\lambda} - e^{i\lambda}) = \frac{2}{\lambda} \frac{e^{i\lambda} - e^{-i\lambda}}{2i} = \frac{2 \sin \lambda}{\lambda}
\end{aligned}$$

olarak bulunur.

Örnek 3.2 $\zeta: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $\gamma > 0$ ve $\zeta(\rho) = e^{-\gamma|\rho|}$ için $F(\zeta(1))$ hesaplınsın.

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\zeta(\rho)| d\rho = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\gamma|\rho|} d\rho = \int_{-\infty}^0 e^{-\gamma|\rho|} d\rho + \int_0^{\infty} e^{-\gamma|\rho|} d\rho$$

olup, bu integralde $\rho = -t$ ve $d\rho = -dt$ yazılırsa,

$$\begin{aligned} &= -\int_{\infty}^0 e^{-\gamma t} dt + \int_0^{\infty} e^{-\gamma \rho} d\rho = \int_0^{\infty} e^{-\gamma t} dt + \int_0^{\infty} e^{-\gamma \rho} d\rho \\ &= 2 \int_0^{\infty} e^{-\gamma \rho} d\rho = -\frac{2}{\gamma} e^{-\gamma \rho} \Big|_{\rho=0}^{\rho=\infty} = \frac{2}{\gamma} \end{aligned}$$

bulunur ve böylece $\zeta \in L_1(-\infty, \infty)$ elde edilir.

$$\psi(\lambda) = F(\zeta)(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\gamma|\rho|} e^{-i\lambda\rho} d\rho$$

için Euler formülü kullanılırsa

$$\begin{aligned} \psi(\lambda) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\gamma|\rho|} (\cos \lambda\rho - i \sin \lambda\rho) d\rho \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{e^{-\gamma|\rho|}}_{\text{çift}} \underbrace{\cos \lambda\rho}_{\text{çift}} d\rho - i \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{e^{-\gamma|\rho|}}_{\text{çift}} \underbrace{\sin \lambda\rho}_{\text{tek}} d\rho \\ &= 2 \int_0^{\infty} e^{-\gamma|\rho|} \cos \lambda\rho d\rho = 2 \int_0^{\infty} e^{-\gamma\rho} \cos \lambda\rho d\rho \\ &= -\frac{2}{\gamma} \int_0^{\infty} \cos \lambda\rho d e^{-\gamma\rho} \\ &= -\frac{2}{\gamma} \left[\cos \lambda\rho e^{-\gamma\rho} \Big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} e^{-\gamma\rho} d \cos \lambda\rho \right] \\ &= -\frac{2}{\gamma} \left[-1 + \lambda \int_0^{\infty} e^{-\gamma\rho} \sin \lambda\rho d\rho \right] \\ &= -\frac{2}{\gamma} \left[-1 + \frac{\lambda}{-\gamma} \int_0^{\infty} \sin \lambda\rho d e^{-\gamma\rho} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2}{\gamma} + \frac{2\lambda}{\gamma^2} \left[\sin \lambda \rho e^{-\gamma \rho} \Big|_0^\infty - \int_0^\infty e^{-\gamma \rho} d \sin \lambda \rho \right] \\
&= \frac{2}{\gamma} + \frac{2\lambda}{\gamma^2} \left[-\lambda \int_0^\infty e^{-\gamma \rho} d \cos \lambda \rho \right] \\
&= \frac{2}{\gamma} - \frac{\lambda^2}{\gamma^2} \psi(\lambda)
\end{aligned}$$

$$F(\zeta)(\lambda) = \frac{2\gamma}{\gamma^2 + \lambda^2}$$

elde edilir.

Örnek 3.3 $\zeta: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $\alpha > 0$ ve $\zeta(x) = e^{-\alpha x^2}$ olmak üzere $F(\zeta)(\lambda)$ hesaplınsın.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \zeta(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2} dx = 2 \int_0^{\infty} e^{-\alpha x^2} dx = 2 \int_0^1 e^{-\alpha x^2} dx + 2 \int_1^{\infty} e^{-\alpha x^2} dx < \infty$$

olduğundan $\zeta \in L_1(-\infty, \infty)$ bulunur.

$$\begin{aligned}
\psi(\lambda) = F(\zeta)(\lambda) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2} e^{-i\lambda x} dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha \left(x^2 + \frac{i\lambda}{\alpha} x - \frac{\lambda^2}{4\alpha^2} + \frac{\lambda^2}{4\alpha^2} \right)} dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha \left[\left(x + \frac{i\lambda}{2\alpha} \right)^2 + \frac{\lambda^2}{4\alpha^2} \right]} dx \\
&= e^{-\frac{\lambda^2}{4\alpha}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha \left(x + \frac{i\lambda}{2\alpha} \right)^2} dx
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada $t = x + \frac{i\lambda}{2\alpha}$ ve $dt = dx$ yazılırsa

$$= e^{-\frac{\lambda^2}{4\alpha}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha t^2} dt = e^{-\frac{\lambda^2}{4\alpha}} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$$

sağlanır.

4. EULER İNTEGRALLERİ

Euler integrallerinin ilk çeşidi

$$B(\mu, \nu) = \int_0^1 x^{\mu-1} (1-x)^{\nu-1} dx$$

olarak gösterilir ve bu integralin yardımıyla tanımlanan fonksiyona Beta Fonksiyonu adı verilir.

Euler integrallerinin ikinci çeşidi

$$\Gamma(p) = \int_0^{\infty} x^{p-1} e^{-x} dx$$

ile gösterilir ve Gamma Fonksiyonu olarak adlandırılır.

Tezin sonraki kısmında Beta fonksiyonunun Gamma fonksiyonu cinsinden ifade edilişi kullanılacağı için öncelikle Gamma fonksiyonunun özellikleri verilecektir.

4.1 Gamma Fonksiyonunun Özellikleri

Teorem 4.1

$$\Gamma(p) = \int_0^{\infty} x^{p-1} e^{-x} dx$$

integrali $0 < p < \infty$ için yakınsaktır, $p \leq 0$ için ıraksaktır (Budak ve Fomin 1973).

İspat. Bu integral, $p \leq 1$ için genelleştirilmiş bir integraldir. Yalnızca integrasyon aralığı sonsuz olduğu için değil, aynı zamanda $x \rightarrow 0^+$ iken integrand $(x^{p-1}e^{-x})$ sonsuza gittiği için de böyledir. Şimdi

$$\Gamma(p) = \int_0^{\infty} x^{p-1} e^{-x} dx$$

integralinin, parametre p açısından her sonlu aralıkta $0 < p_0 \leq p \leq P_0 < \infty$ için düzgün yakınsak olduğu gösterilsin.

Tıpkı sıradan yakınsaklık testinde olduğu gibi $[0, \infty)$ aralığı iki parçaya ayrılır. Bu durumda düzgün yakınsaklığın incelenmesi için $0 \leq x < l$ ve $l \leq x < \infty$ olacak şekilde

$$\int_0^1 x^{p-1} e^{-x} dx$$

ve

$$\int_1^{\infty} x^{p-1} e^{-x} dx$$

integrallerine bakılsın.

$$\int_0^1 x^{p-1} e^{-x} dx$$

integrali Weierstrass testine göre $0 < p_0 \leq x < \infty$ için düzgün yakınsaktır çünkü

$0 < x < l$ ve $p \geq p_0$ için $e^{-x} x^{p-1} \leq x^{p_0-1}$ sağlanır ve

$$\int_0^1 x^{p_0-1} dx$$

integrali $p_0 > 0$ için yakınsaktır.

Sabit bir $\lambda > 0$ için

$$\int_0^{\lambda} x^{p-1} e^{-x} dx \geq e^{-1} \int_0^{\lambda} x^{p-1} dx$$

$$= \frac{\lambda p}{e p} \rightarrow +\infty$$

olduğundan

$$\int_0^{\infty} x^{p-1} e^{-x} dx$$

integrali $0 < p < \infty$ aralığında düzgün yakınsak değildir.

Weierstrass testi ayrıca şunu da gösterir:

$$\int_1^{\infty} x^{p-1} e^{-x} dx$$

integrali $-\infty < p \leq P_0 < \infty$ aralığında düzgün yakınsaktır çünkü

$x^{p-1} e^{-x} \leq x^{P_0-1} e^{-x}$ sağlanır ve

$$\int_1^{\infty} x^{P_0-1} e^{-x} dx$$

yakınsaktır. Fakat bu integral $-\infty < p < \infty$ aralığında düzgün yakınsak değildir.

Sabit bir $l > 1$ alalım ve $p \rightarrow \infty$ iken

$$\int_1^{\infty} x^{p-1} e^{-x} dx$$

integralini inceleyelim. Herhangi bir $N > 0$ tam sayısı için $p - 1 > N$ olduğunda

$$\begin{aligned} \int_l^{\infty} x^{p-1} e^{-x} dx &> \int_l^{\infty} x^N e^{-x} dx \\ &= [-e^{-x} x^N] \Big|_l^{\infty} + N \int_1^{\infty} x^{N-1} e^{-x} dx \end{aligned}$$

bulunur. Bu ifade açıldığında

$$[l^N + Nl^{N-1} + N(N-1)l^{N-2} + \dots + N!]e^{-l} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \infty$$

elde edilir. Dolayısıyla,

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \int_l^\infty x^{p-1} e^{-x} dx = \infty$$

her sabit $l > 0$ için geçerlidir. Böylece,

$$\int_0^1 x^{p-1} e^{-x} dx$$

integrali $0 < p_0 \leq p < \infty$ aralığında düzgün yakınsaktır, burada p_0 sabit pozitif bir sayıdır. Ayrıca,

$$\int_1^\infty x^{p-1} e^{-x} dx$$

integrali $-\infty < p \leq P_0 < \infty$ aralığında düzgün yakınsaktır, burada P_0 sonlu bir sayıdır.

Dolayısıyla, her iki integral de aynı anda $0 < p_0 \leq p \leq P_0 < \infty$ şeklindeki her aralıkta düzgün olarak yakınsar. Sonuç olarak,

$$\Gamma(p) = \int_0^\infty x^{p-1} e^{-x} dx$$

integrali de p değişkenine göre bu tür tüm aralıklar üzerinde düzgün yakınsama gösterir.

Teorem 4.2

$$\Gamma(p) = \int_0^\infty x^{p-1} e^{-x} dx$$

fonksiyonu $0 < p < \infty$ için süreklidir (Budak ve Fomin 1973).

İspat. $f(x, p) = x^{p-1}e^{-x}$ fonksiyonu $0 < x < \infty$ ve $0 < p < \infty$ aralığında sürekli olduğundan ve $\int_0^\infty x^{p-1}e^{-x}dx$ integrali $0 < p_0 \leq p \leq P_0 < \infty$ aralığında p parametresine göre düzgün yakınsak olduğundan

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \int_\lambda^l x^{p-1} e^{-x} dx = \int_0^\infty x^{p-1} e^{-x} dx$$

sağlanır. Yani Gamma fonksiyonu $0 < p < \infty$ aralığında p parametresine göre süreklidir.

Teorem 4.3 Gamma fonksiyonu

$$\Gamma(p) = \int_0^\infty x^{p-1} e^{-x} dx$$

için

$$\Gamma'(p) = \int_0^\infty x^{p-1} (\ln x) e^{-x} dx$$

eşitliği gerçekleşir (Budak ve Fomin 1973).

İspat. Gamma fonksiyonunu p değişkenine göre biçimsel olarak türevleyip, türevi integral işareti içine alırsak

$$\Gamma'(p) = \int_0^\infty x^{p-1} (\ln x) e^{-x} dx \quad (4.1)$$

bulunur. (4.1) eşitliği gerekçelendirilebilir. Çünkü sağ taraftaki integralin

$0 < p_0 \leq p \leq P_0 < \infty$ olacak şekilde her sonlu aralıkta düzgün yakınsak olduğu kolayca gösterilir.

Ayrıca, kısmi türev

$$f_p(x, p) = x^{p-1} (\ln x) e^{-x}$$

ifadesi $0 < x < \infty$, $0 < p < \infty$ için süreklidir (burada $f(x, p) \equiv x^{p-1}e^{-x}$).

(4.1) eşitliğindeki integralin düzgün yakınsak olduğu Weierstrass testinin şu iki integrale uygulanmasıyla kanıtlanır.

$$\int_0^1 x^{p-1}(\ln x) e^{-x} dx$$

ve

$$\int_1^{\infty} x^{p-1}(\ln x) e^{-x} dx .$$

Bu durumda, sırasıyla şu sınır fonksiyonlarını seçebiliriz:

$$g(x) = x^{p_0-1}|\ln x|$$

ve

$$g(x) = x^{p_0-1}|\ln x|e^{-x} .$$

Aynı şekilde $\Gamma(p)$ fonksiyonunun her mertebeden türevlerinin ($k = 1, 2, 3, \dots$) mevcut olduğunu ve

$$\Gamma^{(k)}(p) = \int_0^{\infty} x^{p-1} (\ln x)^k e^{-x} dx, \quad k = 1, 2, \dots$$

ile ifade edildiğini kanıtlayabiliriz.

Teorem 4.4 $\rho \in \mathbb{N}$ için $\Gamma(\rho) = (\rho - 1)!$ gerçektir (Budak ve Fomin 1973).

İspat.

$$\Gamma(\rho) = \int_0^{\infty} x^{\rho-1} e^{-x} dx$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t x^{\rho-1} e^{-x} dx \\
&= \lim_{t \rightarrow \infty} \left\{ x^{\rho-1} e^{-x} \Big|_0^t + \int_0^t (\rho-1) x^{\rho-2} e^{-x} dx \right\} \\
&= \lim_{t \rightarrow \infty} \left\{ -\frac{t^{\rho-1}}{e^t} + 0 \right\} + \lim_{t \rightarrow \infty} (\rho-1) \int_0^t e^{-x} x^{\rho-2} dx \\
&= (\rho-1) \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t e^{-x} x^{\rho-2} dx \\
&= (\rho-1) \int_0^{\infty} x^{\rho-2} e^{-x} dx = \Gamma(\rho-1)
\end{aligned}$$

bulunur. Yukarıdaki yöntem $\Gamma(\rho-1)$ ifadesine uygulanırsa;

$$\begin{aligned}
\Gamma(\rho-1) &= (\rho-1)(\rho-2) \Gamma(\rho-2) \\
&= (\rho-1)(\rho-2)(\rho-3) \dots \Gamma(1)
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece

$$\Gamma(\rho) = (\rho-1)!$$

gerçeklenir.

Örnek 4.1

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

olduğu biliniyor. Buradan $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$ hesaplınsın.

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{\infty} x^{-\frac{1}{2}} e^{-x} dx = \int_0^{\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} dx$$

olup $x = \tau^2$ değişken değiştirmesi yapıldığında

$$\begin{aligned}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) &= \int_0^{\infty} (\tau^2)^{-\frac{1}{2}} e^{-\tau^2} 2\tau d\tau \\ &= 2 \int_0^{\infty} \tau^{-1} \tau e^{-\tau^2} d\tau \\ &= 2 \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \sqrt{\pi}\end{aligned}$$

4.2 Beta Fonksiyonunun Özellikleri

Özellik 4.1

$$B(\mu, \nu) = \int_0^1 x^{\mu-1} (1-x)^{\nu-1} dx$$

$\mu > 0$ ve $\nu > 0$ için yakınsaktır, diğer durumlarda ıraksaktır (Budak ve Fomin 1973).

Özellik 4.2 Beta fonksiyonunda $x = 1 - t$ yazılırsa bu bize $B(\mu, \nu) \equiv B(\nu, \mu)$ olduğunu gösterir. Yani Beta fonksiyonu simetriktir (Budak ve Fomin 1973).

Özellik 4.3 $\nu > 1$ olsun.

$$\begin{aligned}B(\mu, \nu) &= \int_0^1 (1-x)^{\nu-1} d\left(\frac{x^\mu}{\mu}\right) \\ &= \frac{x^\mu(1-x)^{\nu-1}}{\mu} \Big|_{x=0}^{x=1} + \frac{\nu-1}{\mu} \int_0^1 x^\mu(1-x)^{\nu-2} dx \\ &= \frac{\nu-1}{\mu} \int_0^1 x^{\mu-1}(1-x)^{\nu-2} dx - \frac{\nu-1}{\mu} \int_0^1 x^{\mu-1}(1-x)^{\nu-1} dx\end{aligned}$$

$$= \frac{\nu - 1}{\mu} B(\mu, \nu - 1) - \frac{\nu - 1}{\mu} B(\mu, \nu)$$

gerçeklenir. Beta fonksiyonu simetrik olduğundan $\mu > 1$ için

$$B(\mu, \nu) = \frac{\mu - 1}{\mu + \nu - 1} B(\mu - 1, \nu)$$

sağlanır (Budak ve Fomin 1973).

Özellik 4.4 Beta fonksiyonunda $x = \frac{z}{1+z}$ yazılırsa

$$B(\mu, \nu) = \int_0^{\infty} \frac{z^{\mu-1}}{(1+z)^{\mu+\nu}} dz$$

şeklinde Beta fonksiyonunun analitik gösterimi elde edilir (Budak ve Fomin 1973).

Teorem 4.5 Beta ve Gamma fonksiyonları arasındaki bağlantı

$$B(\mu, \nu) = \frac{\Gamma(\mu)\Gamma(\nu)}{\Gamma(\mu + \nu)}, \quad \mu > 0, \quad \nu > 0$$

ile verilir (Budak ve Fomin 1973).

İspat.

$$\Gamma(\mu) = \int_0^{\infty} x^{\mu-1} e^{-x} dx$$

integralinde $\tau > 0$ için $x = \tau z$, $dx = \tau dz$ dönüşümü yapılırsa

$$\frac{\Gamma(\mu)}{\tau^{\mu}} = \int_0^{\infty} z^{\mu-1} e^{-\tau z} dz$$

elde edilir.

τ yerine $1 + \tau$ ve μ yerine $\mu + \nu$ koyulursa,

$$\frac{\Gamma(\mu + \nu)}{(1 + \tau)^{\mu + \nu}} = \int_0^{\infty} z^{\mu + \nu - 1} e^{-(1 + \tau)z} dz$$

bulunur. Bu eşitliğin her iki tarafı $\tau^{\mu - 1}$ ile çarpılıp sıfırdan sonsuza τ parametresine göre integral alınırsa

$$\Gamma(\mu + \nu) \int_0^{\infty} \frac{\tau^{\mu - 1}}{(1 + \tau)^{\mu + \nu}} d\tau = \int_0^{\infty} d\tau \int_0^{\infty} \tau^{\mu - 1} z^{\mu + \nu - 1} e^{-(1 + \tau)z} dz$$

elde edilir. Teorem 4.8'de verilen analitik gösterimden faydalanılarak üstteki ifade tekrar yazılırsa;

$$\Gamma(\mu + \nu)B(\mu, \nu) = \int_0^{\infty} d\tau \int_0^{\infty} \tau^{\mu - 1} z^{\mu + \nu - 1} e^{-(1 + \tau)z} dz$$

bulunur. Şimdi bu eşitlikte integrallerin sıra değiştirebileceği ispatlansın: ($\mu > 1, \nu > 1$)

(a) $f(z, \tau) = \tau^{\mu - 1} z^{\mu + \nu - 1} e^{-(1 + \tau)z} \geq 0$

fonksiyonu $0 \leq z < \infty, 0 \leq \tau < \infty$ için süreklidir,

(b) $\mu > 1$ ve $\nu > 1$ için yakınsaktır,

(c)

$$\int_0^{\infty} \tau^{\mu - 1} z^{\mu + \nu - 1} e^{-(1 + \tau)z} d\tau = \Gamma(\mu + \nu) \frac{\tau^{\mu - 1}}{(1 + \tau)^{\mu + \nu}}$$

integrali $0 \leq \tau < \infty$ için süreklidir ve

$$\int_0^{\infty} \tau^{\mu - 1} z^{\mu + \nu - 1} e^{-(1 + \tau)z} d\tau = \Gamma(\mu) \frac{\tau^{\mu - 1}}{(1 + \tau)^{\mu + \nu}}$$

integrali $0 \leq z < \infty$ için süreklidir. Sonuç olarak integraller arasında sıra değişikliği yapılabileceği gösterilmiş oldu.

$$\Gamma(\mu + \nu)B(\mu, \nu) = \int_0^{\infty} d\tau \int_0^{\infty} \tau^{\mu-1} z^{\mu+\nu-1} e^{-(1+\tau)z} dz, \quad (4.2)$$

$$\Gamma(\mu + \nu)B(\mu, \nu) = \int_0^{\infty} dz \int_0^{\infty} \tau^{\mu-1} z^{\mu+\nu-1} e^{-(1+\tau)z} dz \quad (4.3)$$

(4.3) integrali yakınsaktır ve (4.2) integraline eşittir. Böylece

$$\begin{aligned} \Gamma(\mu + \nu)B(\mu, \nu) &= \int_0^{\infty} z^{\mu+\nu-1} e^{-z} dz \int_0^{\infty} \tau^{\mu-1} e^{-\tau z} d\tau \\ &= \int_0^{\infty} z^{\mu+\nu-1} e^{-z} \frac{\Gamma(\mu)}{z^{\mu}} dz \\ &= \Gamma(\mu) \int_0^{\infty} z^{\nu-1} e^{-z} dz \\ &= \Gamma(\mu)\Gamma(\nu) \end{aligned}$$

bulunur. Her iki taraf $\Gamma(\mu + \nu)$ ile bölündüğünde;

$$B(\mu, \nu) = \frac{\Gamma(\mu)\Gamma(\nu)}{\Gamma(\mu + \nu)}$$

eşitliği elde edilir.

5. ÜSTEL İNTEGRAL FONKSİYONLARI

Genelleştirilmiş üstel integraller;

$$G_k(x) = \frac{1}{(k-1)!} \int_1^{\infty} e^{-xy} (\ln y)^{k-1} \frac{dy}{y}, \quad (k = 1, 2, \dots) \quad (5.1)$$

şeklinde ve $s \in (-\infty, \infty)$, $j \in (-1, \infty)$ ve $\Gamma(j+1)$ Gamma fonksiyonu olmak üzere

Milgram tipi genelleştirilmiş üstel integraller;

$$E_s^j(x) = \frac{1}{\Gamma(j+1)} \int_1^{\infty} e^{-xy} (\ln y)^j \frac{dy}{y^s} \quad (5.2)$$

şeklinde tanımlanır.

(5.1) ve (5.2) eşitliklerinden $E_1^{k-1}(x) = G_k(x)$ bulunur. $j = 0$ olduğu durumda iyi bilinen genelleştirilmiş üstel integral E_s bulunur. Böylece

$$E_s(x) = \int_1^{\infty} e^{-xy} \frac{dy}{y^s} \quad (5.3)$$

şeklinde elde edilir.

Teorem 5.1

(i) $s \in (-\infty, 1]$ için $x \in [\varepsilon, \infty)$, $\varepsilon > 0$ olacak şekilde (5.3) üstel integrali x parametresine göre düzgün yakınsaktır.

(ii) $s \in (-\infty, 1]$ için $x \in [0, \infty)$ olacak şekilde (5.3) üstel integrali x parametresine göre düzgün olmayan şekilde yakınsaktır.

(iii) $s \in (1, \infty)$ için $x \in [0, \infty)$ olacak şekilde (5.3) üstel integrali x parametresine göre düzgün yakınsaktır (Özalp ve Bairamov 2010).

İspat. (i) $s \in (-\infty, 0]$ ve $s \in (0, 1]$ durumları ayrı ayrı incelenir.

$s \in (-\infty, 0]$ olsun. $x \in [\varepsilon, \infty)$, $\varepsilon > 0$ olacak şekilde

$$f_1(x, y) = e^{-\frac{x}{2}y} y^{-s}$$

ve

$$g_1(x, y) = e^{-\frac{x}{2}y}$$

fonksiyonları ele alalım. Burada,

f_1 , g_1 ve $\frac{\partial g_1}{\partial y}$ fonksiyonları süreklidir.

$\frac{\partial g_1}{\partial y}$ fonksiyonunun işareti korunur.

Ayrıca $\lim_{y \rightarrow \infty} g_1(x, y) = \lim_{y \rightarrow \infty} e^{-\frac{x}{2}y} = 0$ gerçekleşir.

Şimdi $x \in [\varepsilon, \infty)$, $y \in [1, \infty)$ ve $t \in [1, \infty)$ için

$$\Phi(x, t) = \int_1^t f_1(x, y) dy = \int_1^t e^{-\frac{x}{2}y} y^{-s} dy$$

olsun.

$$\Phi(x, t) = \int_1^t e^{-\frac{x}{2}y} y^{-s} dy \leq \int_1^\infty e^{-\frac{x}{2}y} y^{-s} dy$$

olup, Burada $u = \frac{xy}{2}$, $y = \frac{2}{x}u$, $dy = \frac{2}{x}du$ ifadeleri yerlerine yazılırsa

$$\Phi(x, t) = \int_{\frac{x}{2}}^{\infty} e^{-u} \frac{2^{-s}}{x^{-s}} u^{-s} \frac{2}{x} du$$

bulunur ve burada x yerine alabileceği en küçük değer ε yazılsın. Böylece

$$\begin{aligned} \Phi(x, t) &\leq \frac{2^{-s+1}}{x^{-s+1}} \int_{\frac{\varepsilon}{2}}^{\infty} e^{-u} u^{-s} du \\ &\leq \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{s-1} \int_0^{\infty} e^{-u} u^{-s} du \\ &= \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{s-1} \Gamma(1-s) \end{aligned}$$

elde edilir ki bu da $\Phi(x, t)$ fonksiyonunun her $x \in [\varepsilon, \infty)$ ve her $t \in [1, \infty)$ için sınırlı olduğunu gösterir.

Dedekind kriterine göre $s \in (-\infty, 0]$ için $x \in [\varepsilon, \infty)$ ve $\varepsilon > 0$ olmak üzere

$$E_s(x) = \int_1^{\infty} e^{-xy} \frac{dy}{y^s} = \int_1^{\infty} f_1(x, y) g_1(x, y) dy$$

integrali x parametresine göre düzgün yakınsaktır.

$s \in (0, 1]$ için de $x \in [\varepsilon, \infty)$, $\varepsilon > 0$ olacak şekilde

$$f_2(x, y) = e^{-xy}$$

ve

$$g_2(x, y) = \frac{1}{y^s}$$

fonksiyonları ele alınarak benzer adımlarla düzgün yakınsak olduğu görülebilir.

(ii)

$$E_s(x) = \int_1^{\infty} e^{-xy} \frac{dy}{y^s}$$

integralinde $xy = t$ ve $dy = \frac{dt}{x}$ yerlerine yazılırsa

$$\begin{aligned} E_s(x) &= \int_x^{\infty} e^{-t} \frac{1}{\left(\frac{t}{x}\right)^s} \frac{dt}{x} \\ &= \int_x^{\infty} e^{-t} \frac{x^{s-1}}{t^s} dt \\ &= x^{s-1} \int_x^{\infty} e^{-t} t^{-s} dt \xrightarrow{x \rightarrow 0} \infty \end{aligned}$$

elde edilir. Yani $s \in (-\infty, 1]$ için $x \in [0, \infty)$ parametresine göre E_s üstel integrali düzgün yakınsak değildir.

(iii) $x \in [0, \infty)$ için

$$e^{-xy} \frac{1}{y^s} \leq \frac{1}{y^s}$$

yazılabilir, Weierstrass testinden

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{y^s} dy < \infty$$

olduğundan $s \in (1, \infty)$ için (5.3) üstel integrali düzgün yakınsaktır.

Sonuç 5.1

(i) $s \in (-\infty, 1]$ ise $E_s(x)$ fonksiyonu $\varepsilon > 0$ olmak üzere $[\varepsilon, \infty)$ aralığında süreklidir.

(ii) $s \in (1, \infty)$ için $E_s(x)$ fonksiyonu $[0, \infty)$ aralığında süreklidir.

(iii) $s \in (-\infty, \infty)$ ve $\varepsilon > 0$ olacak şekilde $x \in [\varepsilon, \infty)$ için

$$\frac{\partial^k}{\partial x^k} E_s(x) = (-1)^k E_{s-k}(x) , \quad k = 1, 2, \dots$$

gerçeklenir.

(iv)

$$L_1(0, \infty) := \left\{ \varphi : \int_0^\infty |\varphi(x)| dx < \infty \right\}$$

olmak üzere $s \in (1, \infty)$ için $E_s(x) \in L_1(0, \infty)$ sağlanır.

(v) Her $s \in (-\infty, \infty)$ için x eksenine E_s fonksiyonunun asimptotudur (Özalp ve Bairamov 2010).

İspat. (i-ii) $\varepsilon > 0$ olmak üzere $x_0 \in [\varepsilon, \infty)$ için $\lim_{x \rightarrow x_0} E_s(x) = E_s(x_0)$ gerçekleşmelidir.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} E_s(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \int_1^\infty e^{-xy} \frac{1}{y^s} dy$$

eşitliğinde düzgün yakınsaklık yardımıyla integral ve limit yer değiştirir. Böylece

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} E_s(x) &= \int_1^\infty \left[\lim_{x \rightarrow x_0} e^{-xy} \frac{1}{y^s} \right] dy \\ &= \int_1^\infty e^{-x_0 y} \frac{1}{y^s} dy \\ &= E_s(x_0) \end{aligned}$$

elde edilir.

(iii) $s \in (-\infty, \infty)$ ve $\varepsilon > 0$ olacak şekilde $x \in [\varepsilon, \infty)$ için

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^k}{\partial x^k} E_s(x) &= \frac{\partial^k}{\partial x^k} \int_1^\infty e^{-xy} \frac{1}{y^s} dy \\
 &= \int_1^\infty \frac{\partial^k}{\partial x^k} e^{-xy} \frac{1}{y^s} dy \\
 &= \int_1^\infty (-1)^k y^k e^{-xy} \frac{1}{y^s} dy \\
 &= (-1)^k \int_1^\infty e^{-xy} \frac{1}{y^{s-k}} dy \\
 &= (-1)^k E_{s-k}(x)
 \end{aligned}$$

bulunur.

(iv)

$$\int_0^\infty E_s(x) dx = \int_0^\infty \int_1^\infty e^{-xy} \frac{1}{y^s} dy dx$$

olup düzgün yakınsalıktan integraller sıra değişebilir. Böylece

$$\begin{aligned}
 \int_0^\infty E_s(x) dx &= \int_1^\infty \frac{1}{y^s} \int_0^\infty e^{-xy} dx dy \\
 &= - \int_1^\infty \frac{1}{y^{s+1}} \underbrace{e^{-xy} \Big|_0^\infty}_{-1} dy \\
 &= \int_1^\infty y^{-s-1} dy = \frac{1}{s} < \infty
 \end{aligned}$$

elde edilir.

(v) E_s fonksiyonu düzgün yakınsak olduğundan

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} E_s(x) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \int_1^{\infty} e^{-xy} \frac{1}{y^s} dy \\ &= \int_1^{\infty} \frac{1}{y^s} \lim_{x \rightarrow \infty} e^{-xy} dy = 0\end{aligned}$$

x eksenini $E_s(x)$ üstel fonksiyonunun asimptotudur.

Şimdi Milgram tipi genelleştirilmiş üstel integral fonksiyonları ele alınsın.

$s \in (-\infty, \infty)$ ve $j \in (-1, \infty)$ için

$$E_s^j(x) = \frac{1}{\Gamma(j+1)} \int_1^{\infty} e^{-xy} (\ln y)^j \frac{1}{y^s} dy$$

integraline bakılsın.

Teorem 5.2

(i) $-\infty < s - j \leq 1$ için $x \in [\varepsilon, \infty)$, $\varepsilon > 0$ olmak üzere $E_s^j(x)$ fonksiyonu x parametresine göre düzgün yakınsaktır.

(ii) $1 < s - j < \infty$ ve $x \in [0, \infty)$ için $E_s^j(x)$ fonksiyonu x parametresine göre düzgün yakınsaktır (Özalp ve Bairamov 2010).

İspat. (i-ii)

$$e^\tau = 1 + \frac{\tau}{1!} + \frac{\tau^2}{2!} + \frac{\tau^3}{3!} + \dots$$

eşitliğinden

$$e^\tau \geq 1 + \tau,$$

$$\ln(e^\tau) \geq \ln(1 + \tau),$$

$$\tau \geq \ln(1 + \tau)$$

bulunur. Son eşitsizlik kullanılarak

$$\ln(y) = \ln[1 + (y - 1)] \leq y - 1 \leq y, \quad y \in [1, \infty)$$

eşitsizliğine ulaşılır. Bu eşitsizlikten;

$$\begin{aligned} E_s^j(x) &= \frac{1}{\Gamma(j+1)} \int_1^\infty e^{-xy} (\ln y)^j \frac{dy}{y^s} \\ &\leq \frac{1}{\Gamma(j+1)} \int_1^\infty e^{-xy} y^j \frac{dy}{y^s} \\ &= \frac{1}{\Gamma(j+1)} E_{s-j}(x) \end{aligned}$$

elde edilir. Son eşitsizlik ve Teorem 5.1'den (i) ve (ii) sağlanır.

Sonuç 5.2

(i) $-\infty < s - j \leq 1$ için $E_s^j(x)$ fonksiyonu $\varepsilon > 0$ olmak üzere $x \in [\varepsilon, \infty)$ için süreklidir.

(ii) $1 < s - j < \infty$ için $E_s^j(x)$ fonksiyonu $x \in [0, \infty)$ için süreklidir.

(iii) Her $s \in (-\infty, \infty)$, her $j \in (-1, \infty)$ ve $\varepsilon > 0$ olacak şekilde $x \in [\varepsilon, \infty)$ için

$$\frac{\partial^k}{\partial x^k} E_s^j(x) = (-1)^k E_{s-k}^j(x), \quad k = 1, 2, \dots$$

gerçeklenir.

(iv) $1 < s - j < \infty$ ise $E_s^j(x) \in L_1(0, \infty)$ olur.

(v) Her $s \in (-\infty, \infty)$ ve her $j \in (-1, \infty)$ için x eksenini E_s^j fonksiyonunun asimptotudur (Özalp ve Bairamov 2010).

İspat. (i-ii) $\varepsilon > 0$ olmak üzere $x_0 \in [\varepsilon, \infty)$ için $\lim_{x \rightarrow x_0} E_s^j(x) = E_s^j(x_0)$ gerçektir.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} E_s^j(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{\Gamma(j+1)} \int_1^\infty e^{-xy} (\ln y)^j \frac{1}{y^s} dy$$

olup düzgün yakınsaklıktan integral ve limit yer değiştirir. Böylece

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} E_s^j(x) &= \frac{1}{\Gamma(j+1)} \int_1^\infty \left[\lim_{x \rightarrow x_0} e^{-xy} (\ln y)^j \frac{1}{y^s} \right] dy \\ &= \frac{1}{\Gamma(j+1)} \int_1^\infty e^{-x_0 y} (\ln y)^j \frac{1}{y^s} dy \\ &= E_s^j(x_0) \end{aligned}$$

elde edilir.

(iii) $s \in (-\infty, \infty)$, $j \in (-1, \infty)$ ve $\varepsilon > 0$ olacak şekilde $x \in [\varepsilon, \infty)$ için

$$\begin{aligned} \frac{\partial^k}{\partial x^k} E_s^j(x) &= \frac{1}{\Gamma(j+1)} \frac{\partial^k}{\partial x^k} \int_1^\infty e^{-xy} (\ln y)^j \frac{1}{y^s} dy \\ &= \frac{1}{\Gamma(j+1)} \int_1^\infty \frac{\partial^k}{\partial x^k} e^{-xy} (\ln y)^j \frac{1}{y^s} dy \\ &= \frac{1}{\Gamma(j+1)} \int_1^\infty (-1)^k y^k e^{-xy} (\ln y)^j \frac{1}{y^s} dy \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (-1)^k \frac{1}{\Gamma(j+1)} \int_1^{\infty} e^{-xy} (\ln y)^j \frac{1}{y^{s-k}} dy \\
&= (-1)^k E_{s-k}^j(x)
\end{aligned}$$

bulunur.

(iv)

$$\int_0^{\infty} E_s^j(x) dx = \int_0^{\infty} \frac{1}{\Gamma(j+1)} \int_1^{\infty} e^{-xy} (\ln y)^j \frac{1}{y^s} dy dx$$

olup düzgün yakınsaklıktan integraller sıra değişebilir. Böylece

$$\begin{aligned}
\int_0^{\infty} E_s^j(x) dx &= \frac{1}{\Gamma(j+1)} \int_1^{\infty} \left\{ \int_0^{\infty} e^{-xy} dx \right\} (\ln y)^j \frac{1}{y^s} dy \\
&= -\frac{1}{\Gamma(j+1)} \int_1^{\infty} \frac{1}{y} \underbrace{e^{-xy} \Big|_0^{\infty}}_{-1} (\ln y)^j \frac{1}{y^s} dy \\
&= \frac{1}{\Gamma(j+1)} \int_1^{\infty} (\ln y)^j \frac{1}{y^{s+1}} dy < \infty
\end{aligned}$$

elde edilir.

(v) E_s^j fonksiyonu $s \in (-\infty, \infty)$ ve $j \in (-1, \infty)$ için düzgün yakınsak olduğundan

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow \infty} E_s^j(x) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\Gamma(j+1)} \int_1^{\infty} e^{-xy} (\ln y)^j \frac{1}{y^s} dy \\
&= \frac{1}{\Gamma(j+1)} \int_1^{\infty} \frac{(\ln y)^j}{y^s} \lim_{x \rightarrow \infty} e^{-xy} dy = 0
\end{aligned}$$

olup x eksenini $E_s^j(x)$ fonksiyonunun asimptotudur.

Teorem 5.3

$$G_k(x) = E_1^{k-1}(x), \quad k = 1, 2, \dots$$

(i) G_k genelleştirilmiş üstel integral fonksiyonu $\varepsilon > 0$ olmak üzere $x \in [\varepsilon, \infty)$ için düzgün yakınsaktır ve bu aralıkta süreklidir.

(ii) Her $k, m = 1, 2, \dots$ ve $\varepsilon > 0$ olmak üzere $x \in [\varepsilon, \infty)$ için

$$\frac{\partial^m}{\partial x^m} G_k(x) = (-1)^m E_{1-m}^{k-1}(x)$$

gerçeklenir.

(iii) x eksenini $G_k(x)$ fonksiyonunun asimptotudur (Özalp ve Bairamov 2010).

İspat. Bu teorem daha önce ispatlanan Teorem 5.2 ve Sonuç 5.2'ye benzer olarak ispatlanır.

6. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu tez düzgün yakınsaklık kriterlerini, parametreye bağı genelleştirilmiş düzgün yakınsak integrallerin özelliklerini, çözümlü örneklerini ve bazı özel integralleri ele almaktadır. Düzgün yakınsaklık matematiksel analizdeki çok önemli bir konudur ve bu tezde bu alandaki temel kavramlar detaylı bir şekilde incelenmiştir. Sunulan özellikler ve çözümlü örnekler bu integrallerin teorik temellerini somut uygulamalarla destekleyerek konunun daha iyi anlaşılmasını amaçlamaktadır. Ayrıca tezde Fourier integralleri, Euler integralleri ve üstel integrallerin düzgün yakınsaklığı için verilen yöntemlerin kuantum fiziğinde, uygulamalı matematikte, mühendislikte, olasılık teorisinde ve akışkanlık teorisinde karşılaşılan parametreye bağı genelleştirilmiş integrallerin düzgün yakınsaklıklarının incelenmesinde uygulanması düşünülmektedir.

KAYNAKLAR

- Ahues M., D'Almedia F., Largiller A., Titaud O., Vasconcelas P., Albedo problem for finite plane-parallel medium, *J. Quant. Spectrosc. Radiat* V.72, Issue 4, 2002, pp.449-465.
- Aygar, Y., Bairamov, E. Properties of the two-dimensional exponential integral functions, *J. Math. Chem.*, V.49, N.5, 2011, pp.1014-1025.
- Bairamov, E., Ozalp, N. On convergence, asymptotic behaviour and computational algorithm of generalized exponential integral functions arising in a radiative transfer, *J. Quant. Spect. Rad. Trans.*, V.113, N.14, 2012, pp.1818-1825.
- Bairamov, E., Ozalp N. Uniform convergence and numerical computation of the Hubbel radiation rectangular source integral, *Radiation Physics and Chemistry*, V.80, 2011, pp.1312-1315.
- Bairamov, E., Yardimci, S. Uniform convergence and the properties of the exponential and generalized exponential integral functions, *J. Quant. Spect. Rad. Trans.*, V.11, N.16, 2010, pp.2471-2473.
- Breig, W.F., Crosbie, A.L. Numerical computation of a generalized exponential integral function, *Math. Comp.*, V.28, N.126, 1974, pp.575-579.
- Budak, B.M, Fomin, S.V., (1973). Multiple Integrals, Field Theory and Series an Advanced Course in Higher Mathematics. MIR Publishers, Moscow (427-468).
- Chandrasekhar, S. Radiative Transfer, Dover Publications, Inc., New York, 1960, 393 p.
- Cheney W., Kincaid D., Numerical Mathematics and Computing, 2nd edn., Brooks/Cole Publ, Monterey, 1985, 671p.
- Dunster T.M., Error analysis in a uniform asymptotic expansion for the generalised exponential integral, *J. Comput. Appl. Math.* V.80, 1997, pp.127-161.
- Gritsenko O.V., Seipper P.R.T., Baerends E.J., Approximation of the exchange-correlation Kohn–Sham potential with a statistical average of different orbital model potentials, *Chemical Physics Letters*, V.302, Issues 3-4,1999, pp.199-207.
- Guseinov, I.I, Mamedoy, B.A. On the calculation of arbitrary multielectron molecular integrals over Slater- type orbitals using recurrence relations for overlap integrals. II. Two-center expansion method, *Int. J. Quant. Chem.*, V.81, N.2, 2001, pp.117-125.
- Guseinov, I.I., Mamedov, B.A. On the calculation of arbitrary multielectron molecular integrals over Slater- type orbitals using recurrence relations for overlap integrals. III. Auxiliary functions $Q_{nn'}^q$ and $G_{-nn'}^q$, *Int. J. Quant. Chem.*, V.86. N.5. 2002, pp.440-449.

- Guseinov, I.I., Mamedov, B.A. On the calculation of arbitrary multielectron molecular integrals over Slater- type orbitals using recurrence relations for overlap integrals. IV. Use of recurrence relations for basic two-center overlap and hybrid integrals, *Int. J. Quant. Chem.*, V.86, N.5, 2005, pp.450-455.
- Guseinov, I.I., Mamedov, B.A. Use of analytical relations in evaluation of exponential integral functions, *J. Math. Chem*, V.38, N.2, 2005, pp.311-314.
- Humbert L., Valle V., Cottron M., Experimental determination and empirical representation of out-of-plane displacements in a cracked elastic plate loaded in mode I, *International Journal of Solids and Structures*, V.37 Issue 39 ,2000, pp.5493-5504.
- Knjazev P.N., *Integral transforms*, Vyseisaja Skola, 1969, 197 p.
- Kourganoff, V. *Basic Methods in Transfer Problems. Radiative Equilibrium and Neutron Diffusion*, Oxford, Clarendon Press, 1952, 281 p.
- Kudryavtsev L.D., Kutasov A.D., Cheklow B.I., Shabunin M.I., *A Collection of Problems in Mathematical Analysis*, vol. 3, Fizmatlit, Moscow, 2003.
- MacLeod A.J., The efficient computation of some generalised exponential integrals, *J. Comput. Appl. Math.* V.178, Issue 2, 2002, pp.363-374.
- Mamedov B.A., Merdan Z., Askerov I.M., Evaluation of Generalized Exponential Integrals using Multinomial Expansion Theorems, *J. Math. Chem.*, V.38, 2005, pp.695-700.
- Milgram M.S., The generalized integro-exponential function, *Math. Comput.* V.44, 1985, pp.443-458.
- Nikolsky, S.M. *A Course of Mathematical Analysis*, V.2, Mir Publishers, 1977, 460 p.
- Oberoi, R.S., Callaway, J., Seiler, G.J. Analytic evaluation of integrals in variational calculations of scattering theory, *J. Computational Phys.*, V.10, N.3, 1972, pp.466-474.
- Oliveira I., Frejlieh J., Dielectric relaxation time measurement in absorbing photorefractive materials, *Optics Communications*, V.178, Issues 1-3, 2000, pp 251-255.
- Oliver J., An Error Analysis of the Modified Clenshaw Method for Evaluating Chebyshev and Fourier Series, *Journal of Applied Mathematics*, V. 20, Issue 3, 1977, pp.379–391.
- Ozalp N., A computational method for hypersurfaces in terms of gamma function, *Appl. Math. Comput.* V.161, 2005, pp.721- 732.
- Ozalp, N., Bairamov, E. Uniform convergence and computation of the generalized exponential integrals, *J Math. Chem.*, V.49, N.2, 2011, pp.520-530.
- Peraiah, A. *An Introduction to Radiative Transfer*, Cambridge University Press, Cammbridge, 2002, 480 p.

- Prabha, R.H., Yadav, R.D.S. Polynomial expressions for Bickley and exponential integral functions, *Ann. Nuc. Ener.*, V.23, N.12, 1996, pp.1021-1025.
- Prudnikov, A.P., Brychkov, Yu. A., Marichev, O.I. *Integrals and Series*, V.5, Gordon and Breach Science Publishers, New York, 1992, 595 p.
- Sharaf, M.A. On the A-transform of the exponential integrals. *Astrophys Space Sci* 60, 1979, pp.199–212.
- Van de Hulst H.C., *Multiple Light Scattering*, vol. 1, Academic Press, New York, 1980, 235 p.
- Yardimci, S., Olgun, M., Can, Ç. Numerical computation and properties of the two dimensional exponential integrals, *Hacet. J. Math. Stat.*, V.45, N.2, 2016, pp.483-495.