

**ANKARA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

**DÜŞÜK DUYARLIKLİ İŞLEMCİLERDE ANS/KKBS ENTEGRASYONU
BAŞARIM ANALİZİ**

Hüseyin BAYDAR

ELEKTRİK - ELEKTRONİK MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI

**ANKARA
2025**

Her hakkı saklıdır

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

DÜŞÜK DUYARLIKLİ İŞLEMCİLERDE ANS/KKBS ENTEGRASYONU BAŞARIM ANALİZİ

Hüseyin BAYDAR

Ankara Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Elektrik - Elektronik Mühendisliği Anabilim Dalı

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Gökhan SOYSAL

Günümüzde stratejik öneme sahip navigasyon uygulamalarında kesintisiz pozisyon, hız ve yönelim bilgisi sağlamak amacıyla Ataletsel Navigasyon Sistemi (ANS) ve Küresel Konum Belirleme Sistemi (KKBS) entegrasyonu standart bir yaklaşım haline gelmiştir. Bu entegrasyon sürecinde Kalman filtresi; sistem ve ölçüm modellerini kullanarak verileri ardışık biçimde işlemesi, sistemin anlık durumunu optimal şekilde tahmin etmesi ve ölçüm gürültülerini istatistiksel olarak modelleyebilmesi sayesinde en güvenilir yöntem olarak öne çıkmaktadır. Ancak bu karmaşık algoritmaların sınırlı kaynaklara sahip gömülü sistemlerde koşturulması, sayısal hassasiyet problemlerini beraberinde getirmektedir. Bu tez çalışması, sonlu hassasiyetli aritmetikten kaynaklanan nicemleme hatalarını teorik altyapıya uygun olarak sisteme eklenen sıfır ortalamalı beyaz gürültü şeklinde modellemiş ve bu hataların filtre kararlılığı üzerindeki etkilerini analiz etmiştir. Çalışmada, Kalman filtresi kovaryans matrislerinde metre ve radyan gibi farklı fiziksel birimlerin bir arada kullanılmasının matrisin durum numarasını artırarak sistemi kötü koşullu hale getirdiği ve bu durumun nümerik kararsızlığa yol açtığı detaylandırılmıştır. Ayrıca, özellikle tek duyarlıklı (32-bit) hesaplamalarda nanoradyan mertebesindeki kritik pozisyon güncellemelerinin çözünürlük sınırları nedeniyle kaybolmasını önlemek amacıyla Kahan toplama algoritmasının kullanımı değerlendirilmiştir. MATLAB ortamında gerçekleştirilen kapsamlı simülasyonlarda, tek ve çift duyarlıklı veri tipleriyle elde edilen sonuçlar Ortalama Karesel Hatanın Karekökü (RMSE) değerleri üzerinden karşılaştırılarak önerilen yaklaşımın navigasyon doğruluğunu korumadaki hayati önemi ortaya konmuştur. Böylelikle bu araştırma, kaynak kısıtlı gömülü sistemlerde donanım verimliliği ile yüksek navigasyon hassasiyeti arasındaki kritik dengeyi analiz ederek literatürdeki ANS/KKBS entegrasyonunda sayısal kararlılık analizi boşluğunu doldurmaktadır.

Aralık 2025, 111 sayfa

Anahtar Kelimeler: Kalman filtresi, ANS/KKBS entegrasyonu, nicemleme hatası, durum numarası, sayısal çözünürlük, Kahan

ABSTRACT

Master Thesis

PERFORMANCE ANALYSIS OF INS/GNSS INTEGRATION ON LOW PRECISION PROCESSORS

Hüseyin BAYDAR

Ankara University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Electrical and Electronics Engineering

Supervisor: Asst. Prof. Gökhan SOYSAL

In contemporary strategic navigation applications, the integration of Inertial Navigation Systems (INS) and Global Navigation Satellite Systems (GNSS) has become a standard approach for providing uninterrupted position, velocity, and orientation data. Within this integration process, the Kalman filter stands out as the most reliable method due to its ability to process data sequentially, optimally estimate the instantaneous state, and statistically model measurement noises; however, executing these complex algorithms on resource-constrained embedded systems introduces significant numerical precision challenges. This thesis models quantization errors arising from finite-precision arithmetic as zero-mean white noise added to the system and analyzes their impact on filter stability, detailing how the coexistence of disparate physical units like meters and radians in covariance matrices increases the condition number and leads to numerical instability. Furthermore, the use of the Kahan summation algorithm is evaluated to prevent the loss of critical nanoradian-level position updates due to resolution limits in single-precision (32-bit) computations. Through comprehensive MATLAB simulations, results from single and double-precision data types are compared using Root Mean Square Error (RMSE) values, demonstrating the vital importance of the proposed approach and filling a critical gap in the literature regarding numerical stability analysis for INS/GNSS integration in hardware-efficient embedded systems.

December 2025, 111 pages

Key Words: Kalman filter, INS/GNSS integration, quantization error, condition number, numerical precision, Kahan

TEŞEKKÜR

Bu tez çalışmasının yürütülmesi sürecinde akademik bilgi, birikim ve deneyimleriyle bana yol gösteren değerli danışmanım Dr. Öğr. Üyesi Gökhan SOYSAL'a; tez savunma jürimde yer alarak değerli görüş ve önerileriyle çalışmamın son haline gelmesine katkı sağlayan hocalarım Sayın Doç. Dr. Ahmet Güngör PAKFİLİZ ve Sayın Prof. Dr. Asım Egemen YILMAZ'a teşekkürlerimi sunarım.

Teknik bilgi birikimi ve tecrübeleriyle çalışmanın gelişimine önemli katkılar sağlayan, değerli görüşleri ve yönlendirmeleriyle her zaman destek olan Sayın Yetkin ERSOY'a teşekkür ederim.

Bu süreçte gösterdiği anlayış, sabır ve yüksek motivasyon desteğiyle her zaman yanımda olan değerli eşim Ayşenur FİZAN BAYDAR'a teşekkür ederim. Ayrıca, eğitim hayatım boyunca verdikleri maddi ve manevi destek, sağladıkları imkanlar ve üzerimdeki emekleriyle bugünlere gelmemi mümkün kılan kıymetli aileme de içtenlikle teşekkür ederim.

Son olarak, çalışmalarım boyunca sağladıkları imkanlar ve kurumsal destekleri için ASELSAN ailesine; çalışma süresi boyunca desteklerini esirgemeyen ekip liderlerime ve sıralı amirlerime şükranlarımı sunarım.

Hüseyin BAYDAR
Ankara, Aralık 2025

İÇİNDEKİLER

TEZ ONAYI

ETİK	i
ÖZET	ii
ABSTRACT	iii
TEŞEKKÜR	iv
SİMGELER DİZİNİ	vii
ŞEKİLLER DİZİNİ	viii
ÇİZELGELER DİZİNİ	xi
1. GİRİŞ	1
1.1 Motivasyon ve Problem Tanımı.....	1
1.2 Literatür Özeti.....	4
1.3 Tezin Akışı	10
2. KAVRAMSAL TEMELLER.....	12
2.1 Referans Koordinat Çerçeveleri	12
2.1.1 Dünya merkezli eylemsiz koordinat çerçevesi.....	12
2.1.2 Dünya merkezli, Dünya'ya sabit koordinat çerçevesi (ECEF)	13
2.1.3 Coğrafi koordinat çerçevesi	13
2.1.4 Geosentrik koordinat çerçevesi.....	14
2.1.5 Yerel navigasyon koordinat çerçevesi	15
2.1.6 Gövde çerçevesi	15
2.2 Koordinat Dönüşümleri.....	17
2.3 Küresel Konum Belirleme Sistemi (KKBS).....	19
2.3.1 KKBS sistemleri	19
2.3.2 KKBS ölçümleri	22
2.3.3 KKBS hata kaynakları	23
2.4 Ataletsel Ölçüm Birimi (AÖB).....	27
2.4.1 İvmeölçer.....	28
2.4.2 Dönüölçer	30
2.4.3 Ataletsel ölçüm birimi hataları	32
2.5 ANS Mekanizasyon Denklemleri.....	38
2.6 Kestirim Teorisi ve Kalman Filtresi.....	41
2.6.1 Kalman filtresi algoritma adımları.....	43

2.7 Sayısal Yöntemler ve Sayısal Hassasiyet.....	48
2.7.1 Sayısal kararlılık ve matris durum numarası	48
2.7.2 Kayan nokta aritmetiği ve Kahan toplama algoritması	50
2.7.3 Sayısal çözünürlük sınırları ve nicemleme gürültüsü.....	54
3. MATERYAL VE YÖNTEM.....	56
3.1 ANS.....	56
3.1.1 Sensör verilerinde yansılık, ölçek faktörü ve gürültü düzeltmeleri.....	56
3.1.2 ANS mekanizasyon	57
3.1.3 Kahan toplama algoritmasının mekanizasyon sürecine uygulanması	58
3.1.4 Yönelim hesaplama	63
3.2 ANS/KKBS Entegrasyonu.....	63
3.2.1 Hata kestirimi: sistem modeli	66
3.2.2 Hata kestirimi: ölçüm modeli.....	74
3.3 Kalman Ölçeklendirme Algoritması	75
3.4 Hata Geri Besleme Mekanizması.....	75
4. SİMÜLASYON VE SONUÇLAR.....	77
4.1 Veri Seti ve Senaryolar	77
4.2 Tek ve Çift Duyarlılık Aritmetik ile Elde Edilen Sonuçlar	85
4.3 Önerilen Metot ile Tek/Çift Duyarlılık Sonuçların Karşılaştırılması	92
4.4 Kahan Toplama Algoritmasının Rastgele Süreç Analizi.....	100
5. SONUÇ VE DEĞERLENDİRME	105
KAYNAKLAR	107
ÖZGEÇMİŞ.....	111

SİMGELER DİZİNİ

g	: Yerçekimi İvmesi
h	: Saat (Hour)
Hz	: Hertz
m	: Metre
rad	: Radyan
sn	: Saniye
T _c	: Zaman Sabiti
°	: Derece
%	: Yüzde

Kısaltmalar

ANS	Ataletsel Navigasyon Sistemi
AÖB	Ataletsel Ölçüm Birimi
ARW	Angular Random Walk
DME	Distance Measuring Equipment
ECEF	Earth Centered Earth Fix
ECI	Earth Centered Inertial
EKF	Extended Kalman Filter
FOG	Fiber Optic Gyro
GNSS	Global Navigation Satellite Systems
GPS	Global Positioning System
IEEE	Institute of Electrical and Electronics Engineers
IMU	Inertial Measurement Unit
KKBS	Küresel Konum Belirleme Sistemi
MEMS	Mikro Elektro Mekanik Sistem
NED	North–East–Down
PPM	Pulse per Minute
RLG	Ring Laser Gyro
RMSE	Ortalama Karesel Hatanın Karekökü
RNAV	Area Navigation
TACAN	Tactical Air Navigation
UKF	Unscented Kalman Filter
VOR	Very High Frequency Omnidirectional Range
WGS	World Geodetic System

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 2.1 Dünya merkezli sabit (ECEF) koordinat çerçevesinin, Dünya merkezli eylemsiz (ECI) koordinat çerçevesine göre dönüşü (Farrell 2008).....	13
Şekil 2.2 Sol — Jeodezik ve geosentrik enlem arasındaki farkı gösteren abartılmış elips. Sağ — Yerel bir referans çerçevesinin tasviri (Farrell'den (2008) Türkçeleştirilerek alınmıştır)	14
Şekil 2.3 ECEF koordinat çerçevesine göre yerel jeodezik ya da teğet düzlem referans koordinat çerçevesi (Farrell 2008'den Türkçeleştirilerek alınmıştır)	15
Şekil 2.4 Gövde koordinat çerçevesi (Groves 2013'ten Türkçeleştirilerek alınmıştır) ..	16
Şekil 2.5 GPS alıcısının, dört mesafe ölçümüne dayanarak konumunu (x, y, z) hesaplamasını sağlayan üçgenleme (trilaterasyon) kavramı (Noureldin vd. 2013).....	19
Şekil 2.6 Ataletsel Ölçüm Birimi (AÖB) bileşenleri (Noureldin vd. 2013'ten Türkçeleştirilerek alınmıştır)	28
Şekil 2.7 a) Hiçbir kuvvet etkisi altında olmayan, sıfır konumundaki ivmeölçer, b) Aracın sağa doğru (pozitif yönde) doğrusal ivmesini ölçen ivmeölçer (Noureldin vd. 2013)	29
Şekil 2.8 Ataletsel sensörler için yanlışlık hatası görseli (Noureldin vd. 2013'ten Türkçeleştirilerek alınmıştır)	34
Şekil 2.9 Ataletsel sensörler için ölçek faktörü hatası görseli (Noureldin vd. 2013'ten Türkçeleştirilerek alınmıştır)	35
Şekil 2.10 Ataletsel sensörler için eksen kaçıklığı hatası görseli (Noureldin vd. 2013'ten Türkçeleştirilerek alınmıştır)	36
Şekil 2.11 Kalman filtresi adımları (Welch ve Bishop 1995'ten Türkçeleştirilerek alınmıştır).....	42
Şekil 3.1 Mekanizasyon sürecinde uygulanan Kahan toplama algoritmasına ait akış şeması.....	60
Şekil 3.2 Kapalı döngü ve gevşek bağlı ANS/KKBS entegrasyonu bloğu.....	65
Şekil 3.3 Hata kestiriminde kullanılan durum geçiş matrisi (F)	67
Şekil 4.1 Algoritma test senaryosunda kullanılan zamana bağlı pozisyon grafiği	82
Şekil 4.2 Algoritma test senaryosunda kullanılan zamana bağlı Kuzey hız grafiği.....	82
Şekil 4.3 Algoritma test senaryosunda kullanılan zamana bağlı Doğu hız grafiği	83
Şekil 4.4 Algoritma test senaryosunda kullanılan zamana bağlı sapma açısı grafiği	83
Şekil 4.5 Algoritma test senaryosunda kullanılan zamana bağlı ivme grafiği.....	84
Şekil 4.6 Algoritma test senaryosunda kullanılan zamana bağlı açısal hız grafiği.....	84
Şekil 4.7 Enlem için farklı sayısal çözünürlüklerde elde edilen zamana bağlı RMSE değerleri.....	86

Şekil 4.8 Boylam için farklı sayısal çözünürlüklerde elde edilen zamana bağlı RMSE değerleri	87
Şekil 4.9 Yükseklik için farklı sayısal çözünürlüklerde elde edilen zamana bağlı RMSE değerleri.....	87
Şekil 4.10 Metre cinsine dönüştürülmüş enlem verisi için farklı sayısal çözünürlüklerde elde edilen zamana bağlı RMSE değerleri	88
Şekil 4.11 Metre cinsine dönüştürülmüş boylam verisi için farklı sayısal çözünürlüklerde elde edilen zamana bağlı RMSE değerleri.....	88
Şekil 4.12 Kuzey hız verisi için farklı sayısal çözünürlüklerde elde edilen zamana bağlı RMSE değerleri.....	89
Şekil 4.13 Doğu hız verisi için farklı sayısal çözünürlüklerde elde edilen zamana bağlı RMSE değerleri.....	89
Şekil 4.14 Aşağı hız verisi için farklı sayısal çözünürlüklerde elde edilen zamana bağlı RMSE değerleri.....	90
Şekil 4.15 Yuvarlanma için farklı sayısal çözünürlüklerde elde edilen zamana bağlı RMSE değerleri	91
Şekil 4.16 Yunuslama için farklı sayısal çözünürlüklerde elde edilen zamana bağlı RMSE değerleri	91
Şekil 4.17 Sapma için farklı sayısal çözünürlüklerde elde edilen zamana bağlı RMSE değerleri	92
Şekil 4.18 Enlem için farklı sayısal çözünürlüklerde zamana bağlı RMSE değerleri	93
Şekil 4.19 Boylam için farklı sayısal çözünürlüklerde zamana bağlı RMSE değerleri ..	94
Şekil 4.20 Yükseklik için farklı sayısal çözünürlüklerde zamana bağlı RMSE değerleri	94
Şekil 4.21 Metre cinsine dönüştürülmüş enlem için farklı sayısal çözünürlüklerde zamana bağlı RMSE değerleri.....	95
Şekil 4.22 Metre cinsine dönüştürülmüş boylam için farklı sayısal çözünürlüklerde zamana bağlı RMSE değerleri	96
Şekil 4.23 Kuzey hızı için farklı sayısal çözünürlüklerde zamana bağlı RMSE değerleri	97
Şekil 4.24 Doğu hız için farklı sayısal çözünürlüklerde zamana bağlı RMSE değerleri	97
Şekil 4.25 Aşağı hız için farklı sayısal çözünürlüklerde zamana bağlı RMSE değerleri	98
Şekil 4.26 Yuvarlanma için farklı sayısal çözünürlüklerde zamana bağlı RMSE değerleri	99
Şekil 4.27 Yunuslama için farklı sayısal çözünürlüklerde zamana bağlı RMSE değerleri	99
Şekil 4.28 Sapma için farklı sayısal çözünürlüklerde zamana bağlı RMSE değerleri..	100
Şekil 4.29 Çift duyarlıklı aritmetik ile Kahan algoritması ile enlem güncellemesi için gerekli adım sayısına ait istatistiksel dağılım grafiği	101

Şekil 4.30 Tek duyarlılık aritmetik ile Kahan algoritması ile enlem güncellemesi için gerekli adım sayısına ait istatistiksel dağılım grafiği	102
Şekil 4.31 Farklı platform hızları için, tek (üst) ve çift (alt) duyarlılık veri tiplerinde Kahan algoritması ile enlem güncelleme sıklığının karşılaştırılması.....	104

ÇİZELGELER DİZİNİ

Çizelge 2.1 IEEE 754 standardına göre tek ve çift duyarlıklı veri tiplerine ait bit sayıları	50
Çizelge 2.2 Kahan toplama algoritması sözde kodu	54
Çizelge 4.1 Sentetik olarak oluşturulan KKBS verileri için eklenen gürültü değerleri ..	78
Çizelge 4.2 Sentetik olarak oluşturulan AÖB verileri için eklenen gürültü değerleri	81
Çizelge 4.3 Platform Kuzey hızına bağlı olarak Kahan algoritması enlem güncelleme sıklığının karşılaştırılması.....	103

1. GİRİŞ

1.1 Motivasyon ve Problem Tanımı

Navigasyon bilimi, tarih boyunca insanlığın gelişimi açısından stratejik bir öneme sahip olmuştur. Uzak bölgeler arasında güvenli seyahat gerçekleştirebilme kabiliyeti, geçmişte askeri ve ticari üstünlüklerin sağlanmasında belirleyici bir unsur olmuştur (Farrell, 2008). Navigasyon uygulamaları, günümüzde kara ve hava taşımacılığının yanı sıra konum tabanlı hizmetler, arama-kurtarma, trafik yönetimi ve otonom sistemler gibi çok çeşitli mühendislik alanlarına yayılmıştır (Noureldin vd. 2013). Bu yaygınlaşmanın temelinde, mikroelektronik ve sensör teknolojilerindeki ilerlemelerle birlikte düşük maliyetli ataletsel ölçüm birimlerinin (AÖB), Küresel Konum Belirleme Sistemi (KKBS) alıcılarının ve yüksek performanslı işlemcilerin üretilebilir hale gelmesi yer almaktadır (Noureldin vd. 2013). Böylece navigasyon sistemleri artık yalnızca yüksek maliyetli platformlara özgü olmaktan çıkmış, hem sivil hem de askeri uygulamalarda geniş bir kullanım alanı bulmuştur (Farrell 2008, Groves 2013).

Günümüzde navigasyon sistemlerinin merkezinde ataletsel ölçüm birimi yer almaktadır. Ataletsel ölçüm birimleri, üzerinde bulunduğu platformların doğrusal ivmelerini ve açısal hızlarını ölçen sensörlerdir. Bu sensörler, bünyesinde üç ivmeölçer ve üç dönüölçer barındırır; ivmeölçerler doğrusal ivmeyi, dönüölçerler ise açısal hızı ölçmektedir (Ünsal ve Demirbaş 2012). Ataletsel ölçüm biriminden elde edilen ivme ve açısal hız verileri, AÖB'nin bulunduğu platforma ait başlangıç konumu, hızı ve yönelimi referans alınarak işlenmekte ve bu işlemler sonucunda Ataletsel Navigasyon Sistemi (ANS) çözümü oluşturulmaktadır. Bu süreçte, dönüölçerlerden elde edilen açısal hızların zamana göre integrali alınarak platformun yönelimi; ivmeölçerlerden elde edilen ivme değerlerinin integraliyle hız, hızın bir kez daha integraliyle ise pozisyon bilgisi elde edilmektedir. Böylece ardışık integral adımları sayesinde ANS, platformun anlık pozisyon, hız ve yönelimini sürekli olarak güncelleyen bir çözüm üretmektedir. (Noureldin vd. 2013).

Ataletsel navigasyon sistemlerinin bir parçası olan ataletsel ölçüm birimleri, performans düzeylerine bağlı olarak stratejik, navigasyon, taktik, endüstriyel ve otomotiv sınıfı gibi

farklı kategorilerde üretilmektedir. Bu sınıflandırma, sensörlerin doğruluk, kararlılık ve uzun dönem hata davranışlarına göre yapılır. Performansı yüksek olan navigasyon sınıfı AÖB'ler; gemiler, uçaklar ve balistik sistemler gibi hassas uygulamalarda kullanılırken, daha düşük maliyetli MEMS (Mikro-Elektro-Mekanik Sistemler) tabanlı AÖB'ler ise endüstriyel ve otomotiv uygulamalarında yaygın olarak kullanılmaktadır. Sensör performans gereksinimleri arttıkça üretim süreçlerinin daha hassas hale gelmesi ve kullanılabilir sensör oranının düşmesi nedeniyle AÖB maliyetleri de artış göstermektedir (Ünsal 2012). Bu nedenle düşük maliyetli sensörlerde ortaya çıkan sistematik ve rastgele hata bileşenlerinin belirlenmesi, modellenmesi ve giderilmesi büyük önem taşımaktadır (Ünsal ve Demirbaş 2012, Sirikonda ve Parayitam 2021). Dış bir referansa ihtiyaç duymadan çalışan bu sensörler, kısa vadede yüksek doğrulukta ve kararlı sonuçlar üretebilmektedir. Ancak yapısal özellikleri gereği ölçüm hataları zamanla birikmekte ve bu birikim pozisyon, hız ve yönelim bileşenlerinde sapmalara yol açmaktadır (Fakharian vd. 2011).

Ataletsel sensörlerin kısa vadede sunduğu yüksek doğruluğa karşın, uzun süreli ve güvenilir bir navigasyon çözümü elde edebilmek ve biriken hataları telafi edebilmek için, söz konusu sensörlerin; harici konumlama sistemleri ile birlikte kullanılması gerekmektedir (Noureldin vd. 2013, Groves 2013). Fried'e (1977) göre; VHF Çok Yönlü Menzil (VOR), Mesafe Ölçüm Ekipmanı (DME), Saha Seyrüseferi (RNAV) ve Taktiksel Hava Seyrüseferi (TACAN) gibi geleneksel yer konuşlu konumlama sistemlerinin, istasyondan uzaklaştıkça artan yanal konum hatalarına sahip olduğu ve dünyanın eğriliğinden kaynaklanan "görüş hattı" (line-of-sight) kısıtlamaları nedeniyle alçak irtifalarda hacimsel kapsama alanı sorunu yaşadığı belirtilmektedir. Bu sınırlamalara karşın; menzilden bağımsız sürekli küresel kapsama alanı sunan, yüksek sinyal güvenilirliğine sahip ve üç boyutlu konum ile hız verisi sağlayabilen Küresel Konum Belirleme Sistemleri (KKBS); ataletsel sistemlerin desteklenmesi ve entegrasyonu için en yetkin çözüm olarak değerlendirilmektedir.

Küresel konum belirleme sistemleri, dünya genelinde araçların konum, hız ve zaman bilgilerinin belirlenmesini sağlayan sistemlerdir (Sirikonda ve Parayitam 2021). KKBS, uydulardan alınan sinyalleri işleyerek kullanıcıya mutlak konum bilgisi sunar ve uzun

vadede yüksek doğrulukta sonuçlar üretir. Bununla birlikte, sistemin temel sınırlaması, tamamen uydu sinyallerine bağımlı olmasıdır (Ünsal ve Demirbaş 2012). Uydu sinyallerinin zayıflaması, parazitlenmesi veya engellenmesi durumunda ölçümlerin doğruluğu ve sürekliliği bozulur. Binalar, ağaçlar veya tüneller gibi fiziksel engellerin bulunduğu ortamlarda sinyal kalitesi düşer ve sistem güvenilirliğini kaybeder. Bu nedenle KKBS, açık gökyüzü koşullarında yüksek doğruluk sağlasa da kesintilerin yaşandığı ortamlarda tek başına sürekli ve güvenilir bir navigasyon çözümü sunamaz (Sirikonda ve Parayitam 2021).

Navigasyon sistemlerinde yaygın olarak kullanılan ataletsel ölçüm birimleri (AÖB) ve küresel konum belirleme sistemleri, sahip oldukları farklı avantaj ve sınırlamalara rağmen doğruluk, bütünlük ve süreklilik açısından birbirini tamamlayan iki temel sensör teknolojisidir. Bu iki sistemden elde edilen verilerin birleştirilmesi, navigasyon çıktıları olan pozisyon, hız ve yönelim bilgilerinin doğruluk, bütünlük ve sürekliliğinin artırılmasına yönelik temel bir yaklaşımdır (Fakharian vd. 2011). ANS/KKBS entegrasyonu, her bir sensörün tek başına sağlayamadığı güvenilirlik düzeyini elde etmeyi mümkün kılar. KKBS ölçümleri, ANS’de zamanla oluşan hataların düzeltilmesini sağlarken, ANS de KKBS sinyalinin kesildiği durumlarda hareket bilgisinin sürekliliğini korur. Böylece her iki sistemin entegrasyonu, pozisyon, hız ve yönelim bilgilerinin farklı çevresel koşullarda dahi kesintisiz biçimde elde edilmesine olanak tanır (Sirikonda ve Parayitam 2021).

ANS ve KKBS verilerinin birleştirilmesinde en yaygın ve güvenilir yöntem ise Kalman filtresidir. Kalman filtresi, sistem ve ölçüm modellerini kullanarak tüm mevcut verileri yinelemeli biçimde işler, sistemin o anki durumunu en iyi (optimal) şekilde tahmin eder ve bu tahmine ait belirsizliği de hesaplar. Bu özellikleri sayesinde Kalman filtresi, ANS/KKBS entegrasyonunda uzun süredir temel yaklaşım olarak kullanılmaktadır (Noureldin vd. 2013).

ANS/KKBS entegrasyon algoritmaları, pozisyon, hız ve yönelim bilgilerinin zaman içerisinde ardışık olarak güncellenmesine dayanan bir hesaplama sürecine sahiptir. Özellikle enlem ve boylam gibi pozisyon bileşenlerinin radyan cinsinden ifade edildiği

uygulamalarda, hareket süresince gerçekleşen pozisyon güncellemeleri çoğunlukla 10^{-6} – 10^{-9} radyan aralığındaki sayısal büyüklüklerde gerçekleşmektedir. Bu nedenle, söz konusu küçük artımların sayısal işlem sürecinde IEEE 754 (2019) kayan nokta gösterim standartlarının getirdiği çözünürlük ve yuvarlama sınırları nedeniyle kayba uğramadan temsil edilebilmesi kritik önem taşımaktadır. Sayısal çözünürlüğün yetersiz olduğu durumlarda bu küçük artımlar, ardışık entegrasyon adımları boyunca doğru biçimde işlenemediğinden birikerek zamanla pozisyon, hız ve yönelim kestirimlerinde belirgin sapmalara yol açmakta ve ANS/KKBS entegrasyonunun genel doğruluğunu olumsuz yönde etkilemektedir. Bu nedenle çoğu sistemde çift duyarlıklılı kayan nokta (double precision floating-point) veri tipi ile hesaplama tercih edilmektedir. Ancak bu tür yüksek çözünürlüklü işlemler, bellek kullanımı açısından ve enerji tüketimi ile işlem maliyeti bakımından gömülü sistemlerde önemli kısıtlamalar yaratmaktadır (Fornaciari vd. 2023, Dongarra vd. 2024). Özellikle gerçek zamanlı gömülü sistemlerde, işlem gücü ve bellek kapasitesinin sınırlı olması, yüksek çözünürlüklü hesaplamaların kesintisiz biçimde yürütülmesini güçleştirmektedir (Fornaciari vd. 2023). Dongarra vd. (2024) ise, azaltılmış sayısal hassasiyetle çalışan sistemlerde yüksek doğruluk gerektiren uygulamalarda çeşitli doğruluk kayıpları ve performans sorunlarının kaçınılmaz hale geldiğini belirtmektedir. Bu durum, kaynak kısıtlı sistemlerde yüksek doğruluğu koruma zorunluluğunu, hem donanım mimarisi hem de algoritmik kararlılık açısından önemli bir araştırma problemi haline getirmektedir (Kashi vd. 2025).

1.2 Literatür Özeti

ANS/KKBS entegrasyonu, navigasyon sistemlerinde doğruluk ve sürekliliği artırmak amacıyla yapılan çalışmalarda önemli bir yer tutmaktadır. Bu entegrasyonun temel bileşenlerinden biri olan KKBS, hareketli ve hareketsiz cisimlerin dünya üzerindeki konum ve hız bilgilerini elde etmek için kullanılan uydu tabanlı bir sistemdir. KKBS, metre seviyesinde hata ile üç boyutlu pozisyon ve zamansal bilgi sağlayabildiğinden, birçok sistemde hata düzeltme ve referans üretiminde kullanılmaktadır. Ancak özellikle askeri uygulamalarda, KKBS sinyallerinin aldatılması ve karıştırılması nedeniyle erişimin engellenmesi veya sistemin devre dışı kalması, yalnızca KKBS verisini referans olarak kullanarak navigasyon çözümü üretmeyi zorlaştırmaktadır. Bu nedenle kara

araçlarında pozisyon, hız ve yönelim gibi verilerin güvenilir biçimde üretilmesi için KKBS'nin referans olarak kullanılmasının yanı sıra, ataletsel sensörlerin çıktılarının da bütünleşik olarak değerlendirilmesi gerekliliği ortaya çıkmıştır (Noureldin vd. 2013).

AÖB, ataletsel uzaya göre KKBS'den daha yüksek frekansta dönüölçer ve ivme çıktısı sağlayabilen bir sensördür. Bu özellik, pozisyon, hız ve yönelim gibi navigasyon parametrelerinin yüksek çözünürlükte ve kısa vadede elde edilmesini mümkün kılar (Ahmed vd. 2019). Bununla birlikte, AÖB'ler yapıları gereği çeşitli hata bileşenlerine sahiptir. Sensörlere özgü ölçek katsayısı hatası ve yanlılık (bias) gibi doğrusal hata parametrelerinin yanı sıra, açısal rastgele yürüyüş (random walk) ve yanlılık dengesizliği gibi doğrusal olmayan hata bileşenleri de ölçüm doğruluğunu olumsuz etkiler. Bu hatalar sensör kalitesiyle ters orantılıdır; yüksek maliyetli AÖB'lerde bu etkiler azaltılabilirken, düşük maliyetli sistemlerde doğruluk kayıpları daha belirgindir (A. D. Kulakrni vd. 2022). Dolayısıyla, düşük bütçeli sistemlerde güvenilir bir navigasyon çözümü elde edebilmek için, AÖB hata parametrelerinin dikkatle modellenmesi ve uygun filtreleme teknikleriyle bu hataların etkisinin azaltılması gerekmektedir (Fakharian vd. 2011).

ANS/KKBS entegrasyonunda kullanılan mimariler, sistemler arasında paylaşılan veri türüne ve entegrasyon derinliğine göre sınıflandırılmaktadır. En yaygın üç temel yaklaşım gevşek bağlı (loosely coupled), sıkı bağlı (tightly coupled) ve derin bağlı (deeply coupled) yapılarıdır (Güreş, 2019). Gevşek bağlı mimaride ANS ve KKBS, birbirinden bağımsız olarak konum ve hız çözümleri üretir; bu çözümler Kalman filtresi gibi bir kestirim algoritması aracılığıyla birleştirilerek sistemdeki hatalar düzeltilir (Noureldin vd., 2013). Yapısal olarak ardışık bir düzen gösteren bu mimari, uygulama kolaylığı ve sağlamlık açısından avantajlıdır; ancak uydu sayısının azaldığı durumlarda doğruluk önemli ölçüde düşmektedir. Sıkı bağlı mimaride ise KKBS'nin sözde mesafe (pseudo-range) ve mesafe hızı (pseudo-range rate) ölçümleri, ANS tarafından öngörülen değerlerle birlikte tek bir merkezi filtreye doğrudan entegre edilir. Bu yaklaşım, özellikle zorlu çevresel koşullarda veya dörtten az uydu görülebilen senaryolarda dahi güncelleme yapılabilmesi sayesinde önemli bir avantaj sunar (Noureldin vd. 2013, Cossaboom vd. 2012). Derin bağlı (deeply coupled) entegrasyon ise ANS ve KKBS arasındaki etkileşimi en üst düzeye çıkarır; çünkü entegrasyon süreci alıcının izleme döngüsü (tracking loop) seviyesinde

gerçekleştirilir. Bu yapıda, platform dinamikleri ANS verileri kullanılarak kestirilir ve KKBS izleme döngülerinde bu etkiler telafi edilir. Böylece sinyal izleme kararlılığı artarken, özellikle düşük sinyal-gürültü oranına sahip ortamlarda konum kestiriminin doğruluğu ve kararlılığı geliştirilir (Noureldin vd. 2013).

ANS/KKBS entegrasyonunda, bir kestirim algoritması olan Kalman filtresi kullanılarak ölçüm gürültüsü ve sistem belirsizlikleri istatistiksel olarak değerlendirilir ve böylece konum, hız ve yönelim gibi durum değişkenlerinin en olası değerleri kestirilir. Noureldin vd. (2013) ve Farrell'a (2008) göre bu veri füzyonunda doğrusal Kalman filtresiyle kestirim yapılabilirse de, literatürde doğrusal olmayan sistem dinamiklerini daha hassas biçimde modelleyebilmek amacıyla Genişletilmiş Kalman filtresi (EKF) ve Koksuz Kalman filtresi (UKF) gibi gelişmiş Kalman filtrelerinin kullanıldığı çalışmalar da bulunmaktadır (Güreş 2019, Sayan 2024). Bununla birlikte, doğrusal olmayan filtrelerle entegrasyon algoritması oluşturulsa dahi, AÖB hata karakteristiklerinin zamanla değişmesi, ortam sıcaklığı, ve aracın neden olduğu titreşim gibi etkiler zamanla hatalı veri üretme olasılığını artırmaktadır. Literatürde bu problemin çözümüne yönelik "Sage-Husa" ve Güçlü Takip Filtresi (Strong Tracking Filter) gibi adaptif filtreleme yaklaşımları yer almaktadır (Ahmed vd. 2019).

ANS/KKBS entegrasyon algoritmasının temelini oluşturan Kalman filtresinin donanım üzerinde uygulanmasında kullanılan veri tipinin çözünürlük seviyesi, filtrenin hem kestirim doğruluğunu hem de sayısal kararlılığını doğrudan etkileyen kritik bir unsurdur. Tek duyarlıklı (32-bit) işlemler, doğası gereği yuvarlama ve nicemleme hatalarına daha yatkın olup, uzun süreli operasyonlarda hata kovaryans matrisinin pozitif tanımlı olma durumunu bozma potansiyeline sahiptir. Bu durum, Kalman kazanç matrisinin dengesizleşmesine ve nihayetinde kestirim performansının düşmesine neden olmaktadır. Buna karşın, çift duyarlıklı (64-bit) hesaplamalar bu etkileri önemli ölçüde azaltmaktadır (Groves 2013).

Bu hassasiyetin temel kaynağı, Kalman durum vektörü ve kovaryans matrislerinin, yatay/dikey pozisyonlar için metre ve radyan gibi farklı fiziksel birimlere karşılık gelen ve dolayısıyla sayısal büyüklük (magnitude) açısından farklı mertebelerde bulunan

değişkenleri birlikte içermesidir. Groves (2013), bu nümerik kararsızlık problemini bertaraf etmek amacıyla, özellikle sabit nokta veri tipiyle yapılan çalışmalarda, tüm durum değişkenlerinin aynı ölçek seviyesine getirilmesi yönteminin bu durumu çözebileceğini ileri sürmektedir.

Literatür incelendiğinde, Groves'un (2013) argümanlarını destekler nitelikte başka bir çalışmanın bulunduğu görülmektedir. Liu ve Chang (2015) çalışmasında, ANS/KKBS veri füzyonunda Kalman durum vektörü ve kovaryans matrislerinde pozisyonun farklı metriklerde (birimlerde) ifade edilmesinin, inovasyon kovaryans matrisinin durum numarasının (condition number) artmasına ve matrisin kötü koşullu (ill-conditioned) hale gelmesine neden olduğu ifade edilmektedir. Bu durum, algoritmanın nümerik kararsızlığına yol açarak filtre performansını olumsuz etkilemektedir. Söz konusu çalışma, bu problemi gidermek amacıyla bir ölçeklendirme algoritması önermekte ve bu algoritmanın temel hedefinin inovasyon kovaryans matrisinin durum numarasını düşürmek olduğunu ortaya koymaktadır.

Farklı veri tiplerinin kullanımı yalnızca Kalman filtresi algoritmasında değil, aynı zamanda ANS'nin pozisyon, hız ve yönelim hesaplama süreçlerinde de önemli etkilere sahiptir. Özellikle tek duyarlıklı (32-bit) veri tipiyle gerçekleştirilen hesaplamalarda, tek duyarlıklı veri tipi için çok küçük büyüklükteki sayısal değerlerin (örneğin enlem ve boylam güncellemelerinde 10^{-9} mertebesindeki artışların) toplanması sırasında, temsil edilebilir çözünürlük sınırının altına düşülmesi, bilgi kaybına (sayısal hassasiyet kaybına) yol açabilmektedir. IEEE 754 (2019) kayan nokta standardına göre tek duyarlıklı sayılar yaklaşık yedi basamaklık bir hassasiyet sunmakta olup, bu sınırın altındaki artışlar bellekte ayrı bir değer olarak tutulamamakta ve toplama işlemlerinde yutulmaktadır. Bu tür sayısal hataları azaltmak amacıyla literatürde çeşitli toplama algoritmaları geliştirilmiştir (Goldberg 1991, Klein 2006, Higham 1993). Kaynaklar incelendiğinde, bu çalışmaların büyük ölçüde Kahan toplama algoritması temel alınarak geliştirildiği görülmektedir. Kahan toplama algoritması, her toplama adımında bir önceki işlemde kalan yuvarlama hatasını izleyip bu hatayı bir sonraki toplamada telafi eden bir yapı sunarak, küçük büyüklükteki artışların toplama sırasında kaybolmasını engellemektedir.

İşlemcilerde uygulanan yinelemeli toplama işlemleri için Kahan toplama algoritması kullanılsa bile, kullanılan veri tipinin sahip olduğu sınırlı bit uzunluğu ve çözünürlük kısıtlamaları nedeniyle nicemleme (kuantizasyon) hataları tamamen ortadan kaldırılamamaktadır. Donanım üzerinde gerçekleştirilen ANS/KKBS algoritmalarında kullanılan sayısal gösterim biçimleri (örneğin tek veya çift duyarlıklılı), sahip oldukları farklı çözünürlük seviyeleri nedeniyle kaçınılmaz olarak nicemleme hatasına yol açmaktadır. Wong (1990) çalışmasında, nicemleme hatasını, sürekli değer alan bir sinyalin ya da hesaplama sonucunda elde edilen bir sayının, sınırlı bit uzunluğunda temsil edilmesi sonucu ortaya çıkan fark olarak tanımlanmaktadır. Bu hata türü genellikle sıfır ortalamalı ve düzgün (uniform) dağılıma sahip beyaz gürültü olarak modellenmektedir (Wong, 1990, Han ve Wang, 2011). Bunun nedeni, bit çözünürlüğünün sınırlı olması nedeniyle oluşan temsil farklarının rastgele yönlerde ve ortalaması sıfır olacak biçimde dağılmasıdır.

Literatürde, Han ve Wang (2011) tarafından yapılan çalışmada, ANS sistemlerinin hata dinamikleri, nicemleme gürültüsünü ek bir rastgele gürültü terimi olarak modele dahil edilmesi önerilmiştir. Bhaskara vd. (2024) ise bu tür hataların durum kestirim performansına olumsuz etkisini azaltmak amacıyla, Kalman filtresi gibi durum kestirim algoritmalarının yapısal olarak yeniden düzenlenmesi gerektiğini belirtmiştir. Ayrıca, nicemleme hatasının güç spektral yoğunluğunun (PSD) teorik olarak sabit bir değerle tanımlanması ve bu nedenle bant içi beyaz gürültü davranışı göstermesi, Kalman filtresi gibi durum kestirim algoritmalarında sürecin gürültü kovaryanslarının doğru modellenmesi açısından önemli bir etkindir (Han ve Wang, 2011, Wong, 1990). Bu doğrultuda, literatürde genel eğilim, nicemleme hatalarının beyaz gürültü varsayımıyla modellenmesi ve bu etkinin Kalman filtresi gibi durum kestirim algoritmalarında istatistiksel olarak telafi edilmesi yönündedir.

Düşük duyarlıklılı veri tipleriyle gerçekleştirilen literatürdeki çalışmalar incelendiğinde, son yıllarda yapay zeka (AI) uygulamalarının getirdiği yoğun hesaplama gereksinimlerine ve özellikle gerçek zamanlı çalışan, güç kısıtlamalı gömülü sistemlerdeki donanım verimliliği ihtiyacına yanıt olarak, düşük duyarlıklılı (reduced-precision) ve karma hassasiyetli (mixed-precision) aritmetik algoritmalarının

geliştirilmesi konusunda önemli bir eğilim gözlenmektedir. Bu yaklaşımlar, temel olarak derin öğrenme modelleri gibi yüksek hesaplama yoğunluğuna sahip iş yüklerini, nümerik doğruluktan ödün vermeden daha verimli sayısal formatlarla hızlandırmayı hedeflemektedir (Junaid vd. 2024, Gupta vd. 2015, Carson ve Chen 2025). Buna karşın, ANS/KKBS entegrasyonu bağlamında sayısal çözünürlük farklarının sistematik olarak incelendiği ve farklı veri tiplerinin filtreleme performansı üzerindeki etkilerinin karşılaştırıldığı kapsamlı çalışmalar literatürde yer almamaktadır. Bu durum, yüksek doğruluk gerektiren navigasyon algoritmalarında kullanılan sayısal temsil biçimlerinin (örneğin tek ve çift duyarlıklı aritmetik) kestirim doğruluğu, sayısal kararlılık ve hata yayılımı üzerindeki etkilerinin hala açık bir araştırma alanı olarak önemini koruduğunu göstermektedir.

Literatürdeki bu önemli boşluk ve yüksek doğruluk gerektiren navigasyon uygulamalarının doğası dikkate alındığında, bu tez çalışmasının temel amacı; ANS/KKBS entegrasyon algoritmalarında sonlu hassasiyetli aritmetikten kaynaklanan sayısal hata bileşenlerini (nicemleme) modellemek ve bu hata kaynaklarının hem ANS'nin pozisyon, hız ve yönelim güncellemeleri üzerinde hem de Kalman filtresi tabanlı durum kestirim performansı üzerindeki etkilerini sistematik olarak ortaya koymaktır. Bu amaç doğrultusunda, nicemleme hataları matematiksel ve istatistiksel temellerle modellenmiş ve bu hataların filtreleme sürecine olan etkileri teorik analizlerle incelenmiştir. Bu kapsamda, tek ve çift duyarlıklı hesaplamaların sonuçları karşılaştırılmış; veri tipindeki çözünürlük farklılığının, hata kovaryans matrisinin değerlerini, Kalman filtresinin kestirim doğruluğunu ve varyans tahminlerinin kararlılığını nasıl etkilediği ayrıntılı biçimde incelenmiştir. Nihayetinde, çalışmanın sonuçları; sistem çıktılarına (pozisyon, hız ve yönelim) ait Ortalama Karese Hatanın Karekökü (RMSE) değerleri üzerinden değerlendirilmiştir.

Bu çalışma kapsamında analizler, yalnızca MATLAB ortamında yürütülmüş; bir simülasyon aracılığıyla sentetik AÖB ve KKBS verileri üretilmiştir. Bu verilere farklı seviyelerde gürültü ve nicemleme etkileri uygulanarak, hem ANS'nin pozisyon, hız ve yönelim hesaplama algoritmalarının hem de Kalman filtresi tabanlı durum kestirim

süreçlerinin performansını değerlendirmeye yönelik kapsamlı bir test altyapısı oluşturulmuştur.

1.3 Tezin Akışı

Tez içeriği şu şekildedir. İkinci bölümde, ANS/KKBS entegrasyonuna temel oluşturan kavramsal çerçeve sunulmaktadır. Bu kapsamda farklı referans ve gövde koordinat çerçeveleri tanımlanmakta ve aralarındaki koordinat dönüşümleri açıklanmaktadır. Ayrıca KKBS sistemleri, KKBS ölçüm türleri ve başlıca hata kaynakları özetlenmektedir. Bölümün devamında, ataletsel ölçüm biriminin (AÖB) bileşenleri ve hata modelleri, ANS mekanizasyon denklemleri ile Kalman filtresi algoritma adımları ele alınmakta; sayısal yöntemler bağlamında matris durum numarası, sayısal çözünürlük sınırları, nicemleme gürültüsü ve Kahan toplama algoritmasına kısaca değinilmektedir.

Üçüncü bölümde, tez kapsamında kullanılan ANS ve ANS/KKBS entegrasyon yapısına ilişkin uygulanan metotlar sunulmaktadır. Bu kapsamda, sensör verilerine uygulanan yanlılık, ölçek faktörü ve gürültü düzeltmeleri, ANS mekanizasyon adımları ve Kahan toplama algoritmasının mekanizasyon sürecine entegrasyonu açıklanmaktadır. Ardından ANS/KKBS entegrasyon yapısı tanımlanmakta; sistem modeli çerçevesinde sistem geçiş matrisi ve süreç gürültü kovaryans matrislerinin oluşturulması, ölçüm modeli, Kalman ölçeklendirme algoritmasının kullanımı ve kestirilen hataların sisteme geri beslenmesi (feedback) mekanizması ele alınmaktadır.

Dördüncü bölümde, geliştirilen entegrasyon algoritmasının performansını incelemek için kullanılan veri seti ve simülasyon senaryoları tanımlanmakta; tek ve çift duyarlıklı aritmetik ile elde edilen pozisyon, hız ve yönelim sonuçları sunulmaktadır. Devamında, önerilen metot kullanılarak tek ve çift duyarlıklı aritmetikte elde edilen çıktılar karşılaştırılmakta ve sayısal çözünürlük farklarının ANS/KKBS entegrasyon performansı üzerindeki etkileri nicel olarak değerlendirilmektedir. Son olarak, Kahan toplama algoritmasının rastgele süreçler üzerindeki istatistiksel analiz sonuçları açıklanmaktadır.

Beşinci bölümde ise, tez kapsamında elde edilen bulgular özetlenmekte; ANS/KKBS entegrasyonunda sayısal hassasiyet, nicemleme etkileri ve Kalman filtresi ölçeklendirme yaklaşımına ilişkin genel değerlendirmeler yapılmakta ve ileride gerçekleştirilebilecek çalışmalar için öneriler sunulmaktadır.

2. KAVRAMSAL TEMELLER

Bu bölümde, sistem tasarımı ve analiz sürecinde esas alınan temel teorik kavramlar ve çerçeveler ele alınmaktadır.

2.1 Referans Koordinat Çerçeveleri

Koordinat çerçeveleri, bir noktaya ait pozisyon, hız ve yönelim gibi navigasyon bilgilerinin belirli bir referans çerçevesine göre ifade edilmesini sağlar. Birden fazla koordinat çerçevesi bulunmakta olup, bu çerçevelerin detaylı açıklamaları ilgili alt başlıklarda sunulmuştur (Noureldin vd. 2013).

2.1.1 Dünya merkezli eylemsiz koordinat çerçevesi

Ataletsel koordinat çerçevesi, ivmesiz olduğu varsayılan, yani durağan kalan veya sabit hızla doğrusal hareket eden bir referans çerçevesidir. Ataletsel sensörler (örneğin dönüölçer ve ivmeölçer) ölçümlerini bu koordinat çerçevesine göre verir. Ayrıca, uyduların konum ve hız bilgileri de bu referans çerçevesine göre hesaplanmaktadır. Dünya üzerinde veya çevresinde gerçekleştirilen navigasyon uygulamalarında ise, başlangıç noktası (orijini) Dünya'nın kütle merkezi olarak tanımlanan Dünya Merkezli Eylemsiz Koordinat Çerçevesi (ECI) kullanılmaktadır (Noureldin vd. 2013).

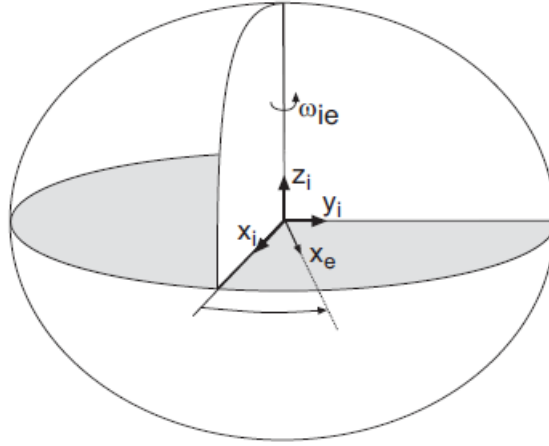
ECI koordinat çerçevesinde, X eksen, Dünya'nın ekvator düzlemi ile tutulum (ekliptik) düzleminin kesişim yönüne (ilkbahar noktası – vernal equinox) yöneltilmiştir. Z eksen ise Dünya'nın dönme eksen boyuncası tanımlanır. Üçüncü eksen olan Y eksen ise sağ el kuralına uygun olacak şekilde belirlenmektedir. Birbirine dik olan bu üç eksen, birbirine dik bir koordinat çerçevesi oluşturmaktadır (Noureldin vd. 2013).

Bu koordinat çerçevesinde eksenler X_i , Y_i ve Z_i olarak ifade edilmektedir (Şekil 2.1).

2.1.2 Dünya merkezli, Dünya'ya sabit koordinat çerçevesi (ECEF)

ECEF, ataletsel koordinat çerçevesi ile aynı orijine sahiptir, ataletsel koordinat çerçevesine göre sabit olmadığından, belirli bir açısal hızla (w_{ie}) dönmektedir. Bu dönme hızı, Dünya'nın yılda yaklaşık 365.25 kez kendi eksenini etrafında dönmesi ve Güneş etrafındaki bir yıllık yörüngesel hareketi dikkate alındığında yaklaşık $w_{ie} \approx 7.292115 \times 10^{-5} \frac{rad}{sn}$ olarak ifade edilmektedir (Farrell 2008).

Bu koordinat sisteminde eksenler X_e , Y_e ve Z_e olarak ifade edilmektedir.



Şekil 2.1 Dünya merkezli sabit (ECEF) koordinat çerçevesinin, Dünya merkezli eylemsiz (ECI) koordinat çerçevesine göre dönüşü (Farrell 2008)

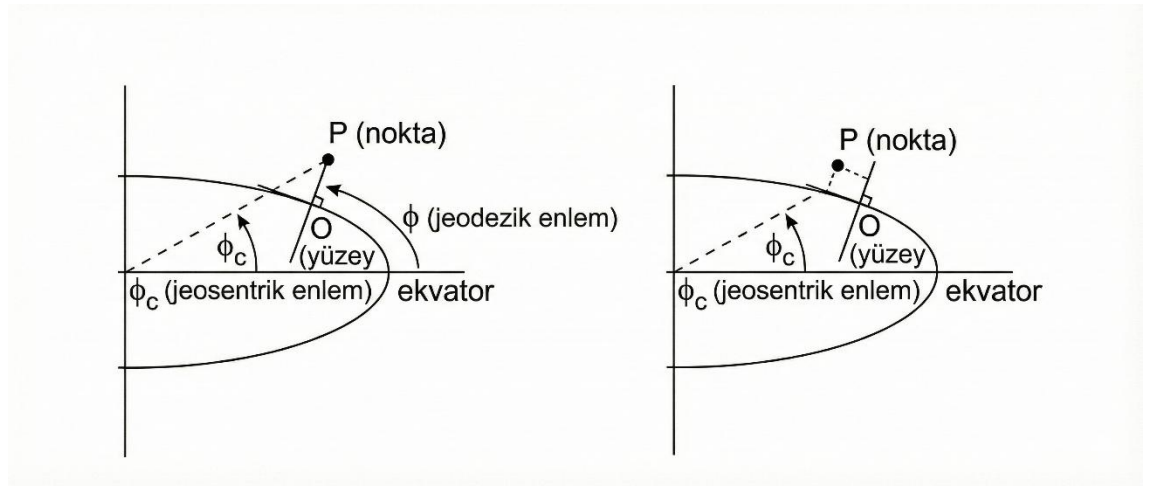
Tezin devamında gövde eksen takımı e indisi kullanılarak ifade edilecektir.

2.1.3 Coğrafi koordinat çerçevesi

Coğrafi koordinat çerçevesi, Dünya geoidi referans alınarak oluşturulan yerel bir çerçevedir. Çerçevenin orijini, Dünya üzerinde hareket eden platformun referans elipsoit üzerindeki izdüşümü noktası (P) olarak tanımlanır (Şekil 2-2) ve platform ile birlikte hareket eder. Coğrafi koordinat çerçevesinde, Z eksenini, referans elipsoide dik olacak şekilde elipsoidin iç kısmına, yani yerin merkezine doğru yöneltilmiştir. X eksenini, gerçek

kuzey yönünü gösterirken; Y eksenini, sağ el kuralına uygun olarak doğu yönüne yerleştirilir ve böylece çerçeve, eksenleri birbirine dik bir koordinat çerçevesi olarak tamamlanmış olur (Farrell 2008).

Taşan'a (2019) göre, elipsoit yüzey normali ile ekvator düzlemi arasındaki açı, jeodezik enlem olarak tanımlanmaktadır. Şekil 2.22'de görüldüğü üzere, jeodezik enlem kuzey, jeodezik boylam doğu yönünde artmaktadır. Üçüncü eksen ise jeodezik normali doğrultusunda, yere doğru (aşağı yönde) tanımlanmıştır.



Şekil 2.2 Sol — Jeodezik ve geosentrik enlem arasındaki farkı gösteren abartılmış elips.
Sağ — Yerel bir referans çerçevesinin tasviri (Farrell'den (2008) Türkçeleştirilerek alınmıştır)

Tezin devamında coğrafi eksen takımı n indisi kullanılarak ifade edilecektir.

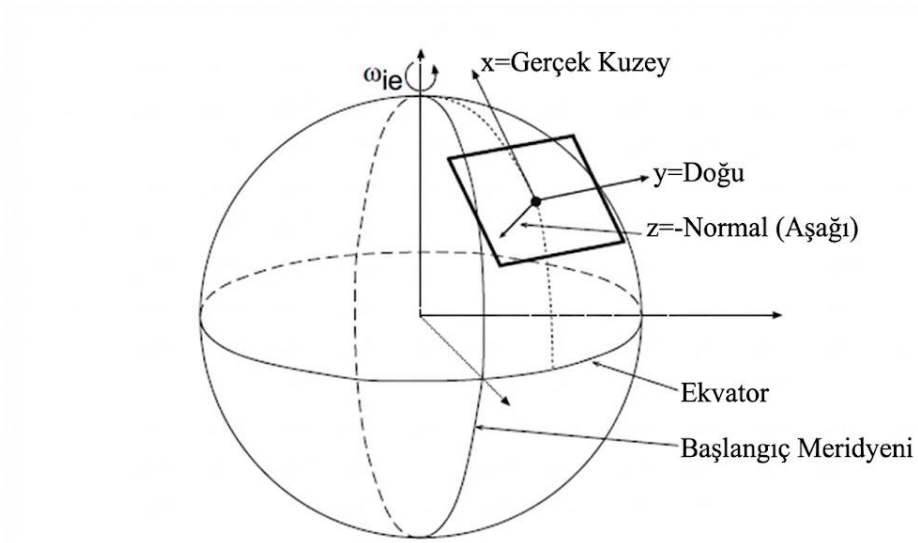
2.1.4 Geosentrik koordinat çerçevesi

Geosentrik koordinat çerçevesi, yapısal olarak coğrafi koordinat çerçevesi ile büyük benzerlikler gösterir; ancak bu iki referans çerçevesini birbirinden ayıran temel fark, dikey eksenin yönelimindedir. Geosentrik sistemde Z, sistemin (aracın) bulunduğu konumdan doğrudan Dünya'nın merkezine doğru uzanır. Bu eksene dik bir düzlem üzerinde bulunan X eksenini gerçek kuzeyi gösterirken, Y eksenini doğu yönüne bakarak sağ el kuralına uygun dik koordinat çerçevesini tamamlar.

2.1.5 Yerel navigasyon koordinat çerçevesi

Yerel navigasyon koordinat çerçevesi, günlük uygulamalarda yaygın olarak kullanılan kuzey–doğu–aşağı (North–East–Down, NED) eksenlerinden oluşmaktadır. Bu koordinat çerçevesi, ilgi duyulan noktada referans jeodezik elipsoide (WGS-84) teğet bir düzlemin tanımlanmasıyla elde edilir. Tanımlanan bu teğet düzlem, Dünya yüzeyinde seçilen sabit bir noktaya yerleştirilir ve koordinat çerçevesinin orijini olarak kabul edilir (Farrell 2008). Bu tez çalışması kapsamında oluşturulacak pozisyon, hız ve yönelim verileri de verileri de NED (Kuzey-Doğu-Aşağı) koordinat sisteminde tanımlanacaktır.

Bu çerçevede X eksen jeodezik kuzeye, Z eksen referans elipsoide dik olacak şekilde Dünya'nın merkezine doğru (aşağı yönüne), Y eksen ise sağ el kuralına uygun olarak doğuya yöneltilmiştir. Bu üç eksen birbirine dik olup sağ el kuralına uygun birbirine dik bir koordinat çerçevesi oluşturur (Farrell 2008).



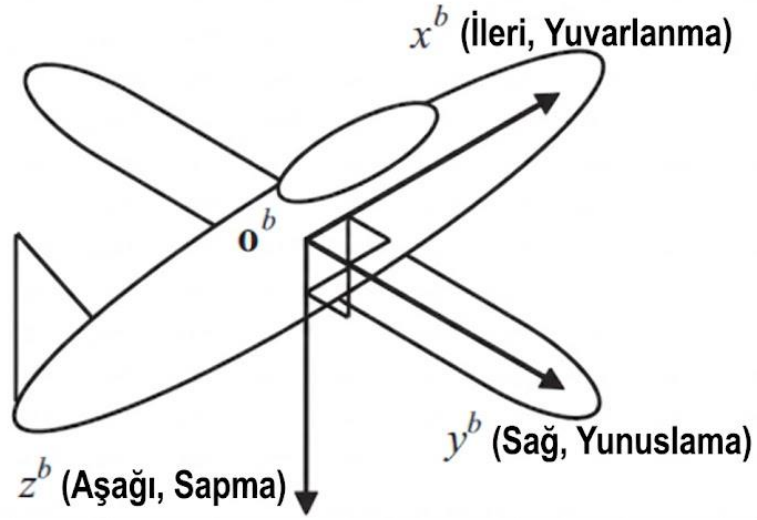
Şekil 2.3 ECEF koordinat çerçevesine göre yerel jeodezik ya da teğet düzlem referans koordinat çerçevesi (Farrell 2008'den Türkçeleştirilerek alınmıştır)

2.1.6 Gövde çerçevesi

Gövde çerçevesi, platformla çakışık kabul edilen ve platformun tüm hareketlerini birlikte izleyen yerel bir koordinat çerçevesidir. Bu çerçevesinin orijini çoğunlukla platformun

ağırlık merkezi olarak alınır ve yerel navigasyon koordinat çerçevesi başlangıç noktasıyla ortaktır. Ataletsel sensörler ölçümlerini bu çerçeveye göre ürettikleri için, sensör çıktıları gövde çerçevesinin ECI referans sistemine göre gerçekleştirdiği dönme ve ivmelenmeleri temsil etmektedir (Taşan 2019).

Bu çerçevede, X eksenini aracın ileri yönüne, Z eksenini aşağı yöne doğru tanımlanırken, Y eksenini ise sağ el kuralına uygun biçimde aracın sağ tarafına doğru yönlendirilerek koordinat çerçevesi tanımlanmaktadır (Groves 2013).



Şekil 2.4 Gövde koordinat çerçevesi (Groves 2013'ten Türkçeleştirilerek alınmıştır)

Gövde çerçevesi görselinde (Şekil 2.4) gösterildiği üzere, gövde çerçevesinin eylemsiz (ataletsel) uzaya göre açısal hız vektörünün gövde eksenleri üzerindeki bileşenlerinin hangi eksene karşılık geldiği gösterilmektedir. Ayrıca, eksenler etrafındaki pozitif dönme yönü saat yönünde tanımlanmıştır.

Tezin devamında gövde eksen takımı b indisi kullanılarak ifade edilecektir.

2.2 Koordinat Dönüşümleri

Bir vektörün bir koordinat çerçevesinden diğerine dönüştürülmesinde genellikle üç temel yöntem kullanılır: yön kosinüs matrisleri (DCM), Euler açıları ve kuaterniyonlar. Her üç yöntemde de, dönüşüm işlemini gerçekleştirmek amacıyla bir dönme matrisi kullanılır. Bu matris literatürde dönüşüm matrisi veya yön kosinüs matrisi (DCM) olarak isimlendirilir ve genellikle R_k^l notasyonu ile gösterilir. Buradaki alt indis k, dönüşüme tabi tutulan vektörün tanımlandığı koordinat sistemini, üst indis l ise dönüştürülen vektörün ifade edileceği hedef koordinat sistemini belirtir. Başka bir deyişle, k koordinat sisteminde tanımlı herhangi bir r_k vektörü, l koordinat sisteminde tanımlanacak vektöre (r_l) eşitlik (2.1)'deki dönüşüm matrisi yardımıyla dönüştürülür (Titterton ve Weston 2004, Noureldin vd. 2013).

$$r_l = R_k^l r_k \quad (2.1)$$

İki farklı referans koordinat çerçevesi arasındaki dönüşümü ifade etmek için Euler açıları kullanılarak yön kosinüs matrisi (DCM) oluşturulabilir. Euler açıları, genel olarak sırasıyla sapma(ψ), yunuslama (θ) ve yuvarlanma (ϕ) şeklinde adlandırılan ve her biri belirli bir koordinat eksenini etrafındaki dönüşümleri ifade eden üç ardışık dönmeden meydana gelir. Sapma açısı, z eksenini etrafındaki dönüşü tanımlarken, yunuslama açısı y eksenini etrafındaki, yuvarlanma açısı ise x eksenini etrafındaki dönüşü tanımlar. Bu dönüşümlerin pozitif yönleri, sağ el kuralı esasına göre belirlenir. Euler açıları yardımıyla yapılan bu ardışık dönüşümlerin her biri için ayrı ayrı oluşturulan temel dönüşüm matrislerinin çarpımıyla 3×3 boyutunda nihai yön kosinüs matrisi elde edilir. Bu matris aracılığıyla, başlangıç koordinat çerçevesindeki vektörler hedef koordinat çerçevesinde kolaylıkla ifade edilebilir (Titterton ve Weston 2004).

$$Z = \begin{bmatrix} \cos\psi & \sin\psi & 0 \\ -\sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

$$Y = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi & \sin\phi \\ 0 & -\sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

$$R_b^n = Z^T * Y^T * X^T \quad (2.5)$$

$$\begin{aligned} R_b^n &= \begin{bmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi & -\sin\phi \\ 0 & \sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos\theta\cos\psi & -\cos\phi\sin\psi + \sin\phi\sin\theta\cos\psi & \sin\phi\sin\psi + \cos\phi\sin\theta\cos\psi \\ \cos\theta\sin\psi & \cos\phi\cos\psi + \sin\phi\sin\theta\sin\psi & -\sin\phi\cos\psi + \cos\phi\sin\theta\sin\psi \\ -\sin\theta & \sin\phi\cos\theta & \cos\phi\cos\theta \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.6)$$

$$R_b^n = R_n^{b^T} \quad (2.7)$$

Bu tez çalışması kapsamında, eşitlik (2.6)'da verilen yön kosinüs matrisi (DCM), platform eksenlerinden navigasyon eksenlerine olan dönüşümde kullanılmaktadır. Ters yöndeki dönüşüm işlemi, yani navigasyon eksenlerinden platform eksenlerine geçiş ise, bu matrisin transpozunu alınarak gerçekleştirilmektedir.

Platforma ait yuvarlanma, yunuslama ve sapma gibi Euler açılarının elde edilmesi işlemi ise DCM matrisi parametreleri ile gerçekleştirilmektedir. Platforma ait Euler açıları hesaplama işlemleri eşitlik (2.8), (2.9) ve (2.10)'deki gibi gerçekleştirilmektedir (Titterton ve Weston 2004).

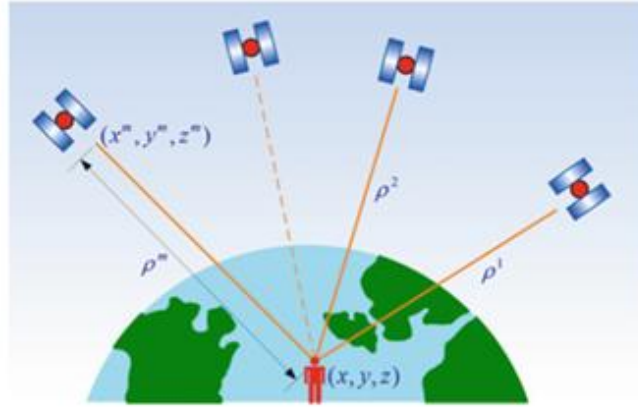
$$Roll = \tan^{-1} \left(\frac{R_b^n(3,2)}{R_b^n(3,3)} \right) \quad (2.8)$$

$$Pitch = \sin^{-1}(-R_b^n(3,1)) \quad (2.9)$$

$$Yaw = \tan^{-1} \left(\frac{R_b^n(2,1)}{R_b^n(1,1)} \right) \quad (2.10)$$

2.3 Küresel Konum Belirleme Sistemi (KKBS)

Küresel Konum Belirleme Sistemleri (KKBS), uydu tabanlı radyo sinyallerini kullanarak kullanıcılara dünya üzerinde herhangi bir yerde sürekli ve güvenilir pozisyon, hız ve zaman bilgisi sağlayan navigasyon sistemleridir (Groves 2013). KKBS, birden fazla uydu takımının gönderdiği sinyallerin seyahat süresini ölçerek alıcının konumunu belirler. Her bir uydu, içerisinde hem sözde rastgele gürültü kodu (Pseudo-Random Noise, PRN) hem de bir navigasyon mesajı barındıran radyo sinyalleri yayar; alıcı, PRN kodunu kullanarak sinyalin seyahat süresini hesaplar. KKBS, uydu sinyallerinin yeterli olduğu açık alanlarda yüksek doğrulukta navigasyon sağlamaktadır, ancak kapalı ortamlarda performansı sınırlıdır (Noureldin vd. 2013). En yaygın kullanılan örneği Amerikan GPS sistemi olmakla birlikte, Rusya'nın GLONASS'ı, Avrupa'nın Galileo'su ve Çin'in BeiDou sistemi gibi farklı uydu sistemlerini de kapsamaktadır (Groves 2013).



Şekil 2.5 GPS alıcısının, dört mesafe ölçümüne dayanarak konumunu (x, y, z) hesaplamasını sağlayan üçgenleme (trilaterasyon) kavramı (Noureldin vd. 2013)

2.3.1 KKBS sistemleri

Bu bölümde KKBS'ye ait örnek sistemlerden bahsedilecektir.

2.3.1.1 GPS

Küresel Konumlandırma Sistemi (GPS), başlangıçta askeri amaçlarla Amerika Birleşik Devletleri Savunma Bakanlığı tarafından geliştirilen, ancak günümüzde hem askeri hem de sivil kullanımda yaygın olarak kullanılan bir uydu tabanlı navigasyon sistemidir (Groves 2013, Noureldin vd. 2013). En az 24 uydudan oluşan bu sistem, Dünya yörüngesinde yaklaşık 26.560 km yarıçaplı dairesel yörüngelerde dönen uydular aracılığıyla konum, hız ve zaman bilgisi sağlamaktadır (Noureldin vd. 2013). GPS, iki tür hizmet sunar: sivil kullanıcılar için Standart Konumlandırma Hizmeti (SPS) ve yalnızca yetkili kullanıcıların erişebildiği, şifreli sinyallere dayanan Hassas Konumlandırma Hizmeti (PPS) (Groves 2013). Konum tespiti, uydulardan gönderilen radyo sinyallerinin seyahat süresinin ölçülmesiyle, yani üç veya daha fazla uydudan alınan sinyallerle trilaterasyon yöntemi kullanılarak yapılmaktadır. Dördüncü bir uydu sinyali kullanılarak ise, alıcının saat hatası telafi edilmektedir (Noureldin vd. 2013, Cossaboom vd. 2012). Sistemin doğruluğu ve güvenilirliği, dünya genelindeki izleme istasyonları ve kontrol merkezleri tarafından sürekli olarak denetlenmekte ve iyileştirilmektedir (Noureldin vd. 2013). 1990'ların sonlarından itibaren başlatılan modernizasyon süreci ile hem uydu altyapısı geliştirilmiş hem de sinyal yapısı güçlendirilerek daha hassas ve güvenli hizmet sunumu hedeflenmiştir (Groves 2013).

2.3.1.2 GLONASS

GLONASS (Globalnaya Navigatsionnaya Sputnikovaya Sistema), Sovyetler Birliği tarafından 1970'li yılların ortalarında geliştirilmeye başlanmış, daha sonra Rusya Federasyonu tarafından sürdürülen ve hem askeri hem sivil kullanım amaçlı bir küresel uydu navigasyon sistemidir. GPS ile benzer şekilde, bu sistem de iki hizmet düzeyi sunacak biçimde tasarlanmıştır. İlk GLONASS uydusu 1982 yılında yörüngeye yerleştirilmiş, ancak tam uydu takımı yıldızı 1995 yılında kısa süreliğine elde edilebilmiş; sonrasında sistem zayıflamış ve 2001 yılında sadece altı uydu aktif kalmıştır. Bu durumun ardından başlatılan modernizasyon süreci kapsamında, yeni sinyallerin tanıtılması, takımı yıldızın yeniden inşası ve kontrol segmentinin güncellenmesi gibi adımlar atılmıştır. Yenilenen yapısıyla birlikte 2010 yılında 18 uydulu operasyonel kapasiteye ulaşılmış,

2011 itibarıyla ise tam 24 uyduya sahip bir takım yıldızı kurulmuştu. Mevcut GLONASS-M uyduları, frekans bölmeli çoklu erişim (FDMA) tekniğiyle çalışmakta ve tüm uydular aynı PRN kodunu farklı taşıyıcı frekanslarla iletmektedir. Geliştirilmiş GLONASS-K uyduları ise ek olarak CDMA sinyalleri yaymakta ve arama-kurtarma (SAR) hizmeti sağlamaktadır. Tam anlamıyla modernize edildiğinde, GLONASS'ın GPS ile benzer düzeyde konumlama doğruluğu sunması hedeflenmektedir (Groves 2013).

2.3.1.3 GALILEO

Galileo uydu navigasyon sistemi, 1999 yılında Avrupa Birliği (AB) ve Avrupa Uzay Ajansı (ESA) tarafından sivil kullanım amacıyla geliştirilmeye başlanmıştır. İlk test uydusu 2005'te fırlatılmış, sistemin ilk operasyonel yetkinliği 2015 yılı için 18 uydulla planlanmış, tam kapasiteye ise 2016 yılında 26 uydu ile ulaşılması hedeflenmiştir. GPS ve GLONASS'ın aksine, Galileo sistemi başından beri sivil kullanıcıları esas alacak şekilde tasarlanmıştır ve Avrupa Uzay Programı Ajansı (EUSPA) tarafından yönetilmektedir. Finansmanı büyük ölçüde AB tarafından sağlanmakta olup bazı Avrupa dışı ülkeler projeye katılsa da, karar verici rollerde yer almamaktadır. Sistem başlangıçta iki hizmet sunmaktadır: herkesin erişimine açık olan Açık Servis (OS) ile sadece yetkili kullanıcıların erişebileceği Düzenlemeye Tabi Servis (PRS); bunlara ek olarak bir de arama-kurtarma (SAR) servisi bulunmaktadır. Açık servis, iki farklı frekans bandında yayın yapar ve tam operasyonel kapasiteye ulaştığında, yatayda yaklaşık 2 m, düşeyde ise 4 m mertebesinde konum doğruluğu sağlaması beklenmektedir. PRS ise daha yüksek bütünlük ve süreklilik sağlayacak şekilde, özellikle AB ülkelerinin güvenlik ve acil servisleri için tasarlanmış sınırlı erişimli bir hizmettir. Ancak bu hizmetin konum doğruluğu, yatayda 3 m ve düşeyde 6 m ile açık servise göre bir miktar daha düşüktür (Groves 2013).

2.3.1.4 BEIDOU

Beidou Uydu Navigasyon Sistemi, Çin tarafından geliştirilen ve zamanla bölgesel bir sistemden küresel bir kapsama dönüşen çok aşamalı bir KKBS projesidir (Groves, 2013, Han vd. 2021). 2007 ile 2012 yılları arasında "Compass" adıyla bilinen sistemin ilk

aşaması deneysel olup, çift yönlü mesafe ölçümüne dayalıydı. 2012’de tamamlanan ikinci aşamayla birlikte, Çin ve çevresine 12 uyduyla bölgesel hizmet verilmeye başlandı (Groves 2013). Üçüncü faz olan Beidou-3 (BDS-3), 2020 yılında tamamlanarak sistemin küresel kapsama ulaşmasını sağlamıştır. Şu anda 35 aktif uyduyla çalışan BDS-3, küresel konumlama, zamanlama ve kısa mesaj hizmetlerinin yanı sıra, arama-kurtarma (SAR), kesin nokta konumlandırma (PPP) ve uydu tabanlı düzeltme (SBAS) servislerini desteklemektedir. Beidou, zaman senkronizasyonunda GPS ve Galileo’dan farklı olarak çift yönlü zaman transferi (TWTT) tekniğini kullanmaktadır, böylece uydularla yer istasyonları arasındaki saat sapmalarını nanosaniye düzeyinde dengeleme yeteneği göstermektedir. Sistem, BDS Time (BDT) adı verilen kendi zaman sistemini kullanır ve bu sistem, Uluslararası Atomik Zaman (TAI) ile yüksek uyum içindedir. Ayrıca, Beidou sisteminin zaman ve konum bilgileri, yalnızca kendi iç referans sistemiyle sınırlı kalmaz; aksine, uluslararası standart olarak kabul edilen referans çerçeveleriyle de uyumlu olacak şekilde tasarlanmıştır. Bu sistemler arasında, yeryüzü merkezli ve gök cisimlerine göre tanımlanan GCRS (Geocentric Celestial Reference System), Güneş Sistemi’nin kütle merkezi esas alınarak tanımlanan BCRS (Barycentric Celestial Reference System) ve yeryüzündeki konumların zamanla değişimini de dikkate alan ITRF (International Terrestrial Reference Frame) gibi küresel referans sistemleri yer almaktadır. Beidou’nun ölçümleri bu sistemlerle dönüşüm ilişkisi kurularak ifade edilir; böylece Beidou verileri, diğer KKBS sistemleriyle karşılaştırmalı olarak kullanılabilir ve bilimsel hesaplamalarda güvenle entegre edilebilir. (Han vd. 2021).

2.3.2 KKBS ölçümleri

2.3.2.1 Sözde mesafe (pseudo-range)

KKBS sistemlerinde sözde mesafe (pseudo-range), bir uydu ile alıcı arasındaki yaklaşık mesafenin zaman farkına dayalı olarak hesaplandığı temel bir ölçümdür. Uydu ile alıcı arasındaki mesafe, sinyalin iletilme ve alınma zamanları arasındaki farkın ışık hızıyla (c) çarpılmasıyla belirlenir. (Noureldin vd. 2013). Elde edilen bu zaman farkı (Δt) eşitlik (2.11) ile mesafeye çevrilir. Groves (2013), bu ölçümün “code tracking” döngüsüyle elde edildiğini ve ölçüm sonucunda elde edilen büyüklüğün gözlenebilir (observable) bir

parametre olduğunu belirtir. Ayrıca, sözde mesafe ölçümünde, eşitlik (2.12)'de de belirtildiği üzere alıcının saat hatası, atmosferik gecikmeler ve yansıma (multipath) gibi çeşitli hata kaynakları da sonucu etkileyebilir. Bu nedenlerle, "pseudo-range", mutlak bir mesafeden ziyade, belirli hata bileşenleri içeren yaklaşık bir uzaklık ölçümüdür (Noureldin vd. 2013).

$$\rho = c \times \Delta t \quad (2.11)$$

$$\rho^m = r^m + c\delta t_r - c\delta t_s + I^m + T^m + \varepsilon_p^m \quad (2.12)$$

ρ^m : m'inci uydu ile alıcı arasındaki ölçülen sözde mesafedir (metre)

r^m : Gerçek geometrik mesafedir (metre)

δt_r : Alıcı saat hatası (saniye)

δt_s : Uydu saat hatası (saniye)

I^m : İyonosfer kaynaklı gecikme (saniye)

T^m : Troposfer kaynaklı gecikme (saniye)

ε_p^m : Ölçüm hatası (metre)

2.3.3 KKBS hata kaynakları

Küresel Konum Belirleme Sistemleri (KKBS) aracılığıyla elde edilen pozisyon ve hız bilgilerinin doğruluğu, erişilebilen uydu sayısına ve mevcut hata kaynaklarının ne ölçüde giderilebildiğine bağlı olarak değişkenlik gösterir. Başlıca hata kaynakları; uydu saat hataları (Satellite Clock Errors), iyonosfer ve troposfer gecikmeleri (Ionosphere and Troposphere Propagation Errors), izleme hataları (Tracking Errors) ile çok yol etkisi, görüş hattı dışı alım ve kırınım gibi çevresel etkilerden (Multipath, Non-Line-of-Sight, and Diffraction) oluşmaktadır. Aşağıda, söz konusu hata türlerine ilişkin detaylı açıklamalara yer verilecektir.

2.3.3.1 Uydu saat hatası

KKBS kapsamında kullanılan uyduların saatleri oldukça hassas olsa da, zamanla sistem zamanından sapmalar gösterebilir (Noureldin vd. 2013). Bu sapmalar, uydu saatlerinde biriken osilatör gürültüsünün bir sonucudur ve sinyal yayımı sırasında oluşan zaman hatalarına yol açar (Groves 2013). Uydu kontrol birimi, yer istasyonları aracılığıyla bu sapmaları izler ve düzeltme katsayılarını belirleyerek uydulara gönderir. Bu katsayılar navigasyon mesajı içinde alıcıya ulaştırılır ve alıcı bu verileri kullanarak ölçüm sırasında oluşan uydu saat hatasını düzeltebilir (Noureldin vd. 2013). Bununla birlikte, uydunun yörüngesindeki görelî hız ve yerçekimi potansiyel farkları nedeniyle oluşan izafiyet kaynaklı sapmalar da dikkate alınmalı ve uygun düzeltmeler uygulanmalıdır (Groves 2013).

2.3.3.2 İyonosfer kaynaklı hatalar

İyonosfer, Dünya'nın 50 ila 1000 km yukarısında konumlanan ve iyonlaşmış gazlardan oluşan bir atmosfer katmanıdır. Güneş radyasyonunun etkisiyle bu bölgede serbest elektronlar ve iyonlar oluşur; bu da KKBS sinyallerinin yayılımını doğrudan etkiler (Sayan 2024, Noureldin vd. 2013). Sinyal, iyonosfer boyunca ilerlerken kırılma indisi zamana ve mekana bağılı olarak değiştiği için sinyalin iletim süresinde gecikme meydana gelir. Bu gecikmenin büyüklüğü, sinyal yolundaki toplam elektron içeriği (TEC) ile doğru; taşıyıcı frekansın karesiyle ters orantılıdır. Özellikle düşük frekanslı sinyaller ve ufka yakın konumdaki uydulardan gelen sinyaller bu etkiden daha fazla etkilenmektedir. İyonosfer kaynaklı gecikme, kod ve taşıyıcı faz ölçümlerinde ters işaretli fakat eşit büyüklükte ortaya çıkar. Bu tür hataların azaltılması veya giderilmesi için çift frekanslı alıcılar, iki farklı frekanstaki ölçümleri karşılaştırarak iyonosfer kaynaklı etkiyi doğrudan hesaplayabilir. Tek frekanslı sistemlerde ise genellikle Klobuchar modeli gibi, uydular tarafından yayınlanan tahmin parametrelerine dayalı modeller kullanılır (Noureldin vd. 2013).

2.3.3.3 Troposfer kaynaklı hatalar

Troposfer, yeryüzünden yaklaşık 8–40 km yüksekliğe kadar uzanan ve büyük oranda kuru gazlar (N_2 ve O_2) ile su buharından oluşan atmosferin alt katmanıdır. Elektriksel olarak nötr yapısından dolayı, iyonosfer katmanının aksine troposfer, KKBS frekansları için dağıtıcı olmayan bir ortamdır. Ancak kırılma indeksi nedeniyle sinyallerin yayılma hızı serbest uzaya kıyasla azalır ve bu durum, uydu sinyallerinin olduğundan daha uzun bir mesafeden geliyormuş gibi algılanmasına yol açar. Bu etki, uydunun yükselme açısına bağlı olarak 2,5 ila 25 metre arasında değişebilir (Noureldin vd. 2013). Troposferik gecikmeler genellikle iki bileşene ayrılır: kuru ve nemli. Toplam gecikmenin yaklaşık %90'ı kuru bileşenden kaynaklanırken, %10'u değişkenlik gösteren nemli bileşenden kaynaklanır. Kuru bileşen daha iyi modellenenebilirken, nemli bileşenin modellenmesi, su buharı içeriğinin lokal ölçekte değişkenlik göstermesi nedeniyle daha zordur. Fakat nemli bileşenin katkısı düşük olduğundan, bu kısım bazı durumlarda ihmal edilebilir. Günümüzde diferansiyel KKBS yöntemleri kullanılarak 5 cm'nin altındaki troposferik gecikmeler dahi düzeltilebilmektedir (Sayan 2024).

2.3.3.4 Çoklu yol hatası

KKBS sinyallerinin farklı yollardan alıcıya ulaşması anlamına gelen çoklu yol etkisi, özellikle yüksek yapılar, dar sokaklar ve yoğun bitki örtüsünün bulunduğu kentsel ortamlarda karşılaşılan temel hata kaynaklarından biridir (Güreş 2019). Bu etki, sinyalin alıcıya hem doğrudan görüş hattı üzerinden hem de çevredeki yüzeylerden yansarak ulaşmasından kaynaklanır (Sayan 2024). Yansarak gelen sinyaller, doğrudan sinyallere göre daha uzun bir yol kat ettiğinden gecikmeli ulaşır ve daha düşük bir sinyal-gürültü oranına sahiptir (Noureldin vd. 2013). Bu durum, alıcıda doğrudan ve yansıyan sinyallerin üst üste binmesine neden olarak, sinyalin orijinal formunu bozar ve konum hatalarını artırır (Sayan 2024). Nitekim, söz konusu hata 10 metreyi aşabilen doğruluk sapmalarına yol açabilir (Noureldin vd. 2013). Çoklu yol, taşıyıcı faz ölçümlerinde daha az etki gösterse de, kod ölçümlerinde daha belirgin olup, genellikle modellenmesi oldukça zordur. Bu durumun temel nedeni, yansıyan sinyallerin oluşumunun antenin bulunduğu çevresel

koşullara doğrudan bağlı olması ve bu koşulların zamana ve mekana göre büyük değişkenlik göstermesidir (Güreş 2019).

2.3.3.5 Uydu yörünge hatası

Uydu yörünge hataları, uydunun gerçek konumu ile kullanıcıya gönderilen efemeris verilerine dayanarak hesaplanan konumu arasındaki farktan kaynaklanmaktadır (Noureldin vd. 2013). Bu hatalar genellikle uydunun hareketi sırasında yapılan konum hesaplamalarındaki belirsizliklerden kaynaklanmaktadır. Yeryüzündeki kontrol istasyonu, uydunun gerçek ve hesaplanan konumlarını karşılaştırarak bu farkı düzeltmek amacıyla her gün en az bir kez düzeltme mesajı gönderir. Uydular bu düzeltme mesajlarını alarak efemeris verilerini günceller ve alıcılara daha doğru bilgiler iletir (Güreş 2019). Efemeris modeli ölçülen yörüngeye eğri uydurma yöntemiyle oluşturulduğundan, zamanla değişen artık hataları içerebilir ve bu hatalar genellikle 2 ila 5 metre arasında değişir (Noureldin vd. 2013). Ancak diferansiyel KKBS yöntemleri kullanıldığında, yörünge kaynaklı konumlama hatalarının büyüklüğü birkaç santimetreye kadar düşürülebilmektedir (Güreş 2019).

2.3.3.6 Almaç hatası

KKBS alıcısında ortaya çıkan alıcı gürültüsü, sistemin elektronik bileşenlerine özgü rastlantısal bir ölçüm hatasıdır. Bu hata, anten devreleri, bağlantı kabloları, termal gürültü, radyo frekansı parazitleri, sinyalin sayısallaştırılması ve örnekleme gibi çeşitli fiziksel ve elektriksel etmenlerin birikimli etkisiyle oluşur. Sinyal-gürültü oranına bağlı olan bu gürültü, uydunun yükselme açısına göre değişkenlik gösterir ve sinyalin yeryüzüne ulaşma süresinin yanlış tahmin edilmesine neden olabilir. Çoklu yol etkisinde olduğu gibi, alıcı gürültüsü de taşıyıcı faz ölçümlerinde, kod temelli ölçümlere göre yaklaşık iki merteye daha düşük seviyededir (Noureldin vd. 2013).

2.3.3.7 Kullanıcı eşdeğer menzil hatası

Uygun modeller ve navigasyon mesajındaki verilerle bazı hatalar azaltıldıktan sonra, geriye kalan artık hataların sözde mesafe (pseudo-range) ölçümleri üzerindeki toplam etkisi Kullanıcı Eşdeğer Menzil Hatası (UERE) olarak adlandırılır. Bu kavram, her bir hata kaynağının uyduya ait sözde mesafe ölçümüne ayrı ayrı etki ettiği ve tüm ölçümleri benzer şekilde etkilediği varsayımıyla kullanılır. Eğer bu hata bileşenlerinin birbiriyle ilişkili olmadığı kabul edilirse, toplam UERE değeri ortalaması sıfır olan bir Gauss değişkeni olarak modellenebilir. Bu durumda toplam hata varyansı, eşitlik (2.13)'deki gibi bileşen varyanslarının karelerinin toplamının kareköküne eşit olmaktadır (Noureldin vd. 2013).

$$\sigma_{UERE} = \sqrt{\sigma_{eph}^2 + \sigma_{clk}^2 + \sigma_{ion}^2 + \sigma_{tro}^2 + \sigma_{mlt}^2 + \sigma_{rcv}^2} \quad (2.13)$$

σ_{eph} : Ephemeris verisi kaynaklı menzil hata varyansı

σ_{clk} : Uydu saat hatası kaynaklı menzil hata varyansı

σ_{ion} : İyonosfer hatası kaynaklı menzil hata varyansı

σ_{tro} : Troposfer hatası kaynaklı menzil hata varyansı

σ_{mlt} : Çokyol hatası kaynaklı menzil hata varyansı

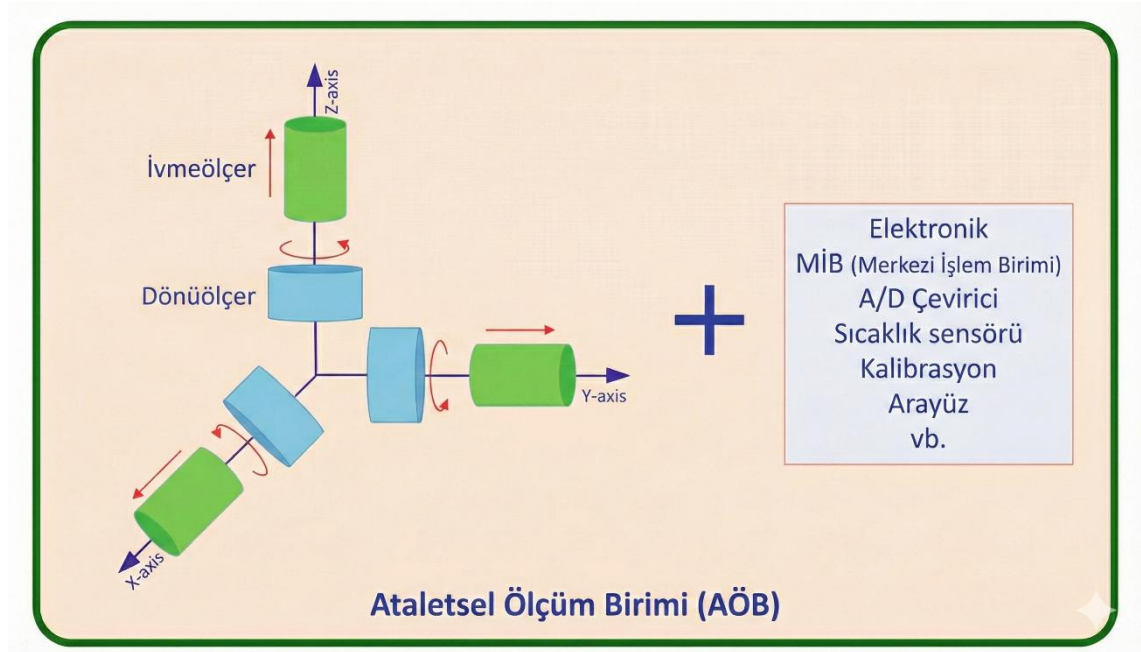
σ_{mlt} : Almac hatası kaynaklı menzil hata varyansı

2.4 Ataletsel Ölçüm Birimi (AÖB)

Ataletsel Ölçüm Birimi (AÖB), harici bir referans sistemine ihtiyaç duymadan, üzerine monte edildiği platformun ivme ve açısal hız bilgilerini ölçen bir sensördür. AÖB'ler, temel olarak ivmeölçerler ve dönüölçerlerden oluşmaktadır. İvmeölçerler cismin maruz kaldığı özgül kuvveti ölçerken, dönüölçerler ise açısal hızını ölçmektedir; her iki sensör tipi de bu ölçümleri yalnızca kendi hassas eksenlerinde gerçekleştirmektedirler. Bu nedenle, üç boyutlu hareketin tam olarak algılanabilmesi için genellikle üç eksenli, yani üç ortogonal ivmeölçer ve üç ortogonal dönüölçerden oluşan bir yapı kullanılmaktadır (Noureldin vd. 2013, Groves 2013). İvmeölçer ve dönüölçer üçlülerinin sensör eksenleri,

nominal olarak birbirine dik olacak şekilde yerleştirilir ve her iki sensör üçlüsü, ortak bir orijine sahip olacak biçimde hizalanır (Noureldin vd. 2013).

Modern AÖB'ler, yalnızca sensör elemanlarını değil, aynı zamanda bu sensörlerin kendi kendine kalibrasyonunu gerçekleştiren, ölçümleri örnekleyen ve navigasyon sistemleri için gerekli veri biçimlendirmesini yapan elektronik devreleri de içerir. Bu bütünleşik yapı, seyrüsefer ve kontrol sistemleri için gerekli olan doğrusal ivme ve açısal hız bilgilerini üç eksen ve gerçek zamanlı olarak sağlayarak, hareketli platformların konum ve yönelim kestiriminde kritik bir rol oynar (Noureldin vd. 2013).

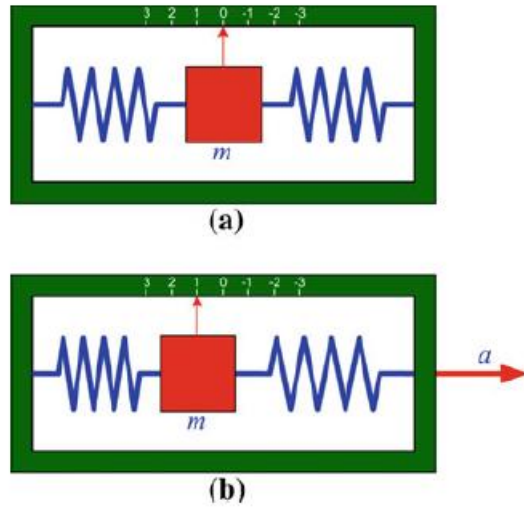


Şekil 2.6 Ataletsel Ölçüm Birimi (AÖB) bileşenleri (Noureldin vd. 2013'ten Türkçeleştirilerek alınmıştır)

2.4.1 İvmeölçer

İvmeölçerler, genellikle yaylarla gövdeye bağlanmış serbest hareket edebilen bir test kütlesi (proof mass) aracılığıyla, üzerine monte edildikleri sistemin ivmesini ölçen ataletsel sensörlerdir (Noureldin vd. 2013, Groves 2013). Sisteme ivme uygulandığında, test kütlesi ataleti nedeniyle denge konumuna göre yer değiştirir. Bu yer değiştirme, yayların gerilmesi ve sıkışmasıyla oluşan kuvvet dengesine bağlı olarak, uygulanan

ivmeyle orantılıdır. Kütlenin konumu bir algılayıcı aracılığıyla tespit edilir ve bu ölçüm uygun bir ölçekleme ile ivme büyüklüğüne dönüştürülür. Şekil 2.7’de görüldüğü gibi, sabit durumda test kütlesi yaylar arasında merkezde dengededir; ivme uygulandığında ise gövde kütleye göre hareket eder ve biri sıkışırken diğeri gerilir (Şekil 2.7 (b)). Ancak burada önemli bir istisna, yerçekimi kaynaklı ivmedir. Yerçekimi kuvveti test kütesine doğrudan etki eder ve ivmeölçerin tüm bileşenlerine aynı anda etki ettiğinden, gövde ile test kütlesi arasında bağıl bir hareket oluşmaz. Bu nedenle, ivmeölçerler yerçekimini doğrudan algılayamaz ve yalnızca dış kuvvetlere bağlı olarak oluşan ivmeyi ölçer (Noureldin vd. 2013).



Şekil 2.7 a) Hiçbir kuvvet etkisi altında olmayan, sıfır konumundaki ivmeölçer, b) Aracın sağa doğru (pozitif yönde) doğrusal ivmesini ölçen ivmeölçer (Noureldin vd. 2013)

Bu durum, özgül kuvvet (specific force) kavramıyla açıklanır. Özgül kuvvet, bir cismin ataletsel referans çerçevesine göre ifade edilen ivmesinden, yerçekimi ivmesinin çıkarılmasıyla tanımlanmaktadır:

$$f = a - g \quad (2.14)$$

İvmeölçer bu farkı ölçer ve çıktısı her zaman özgül kuvveti temsil eder (Noureldin vd. 2013, Groves 2013). Bu bağlamda, navigasyon sistemlerinde cismin gerçek ivmesini elde etmek için ivmeölçer çıktısına yerçekimi ivmesi eklenmelidir:

$$a = f + g \quad (2.15)$$

İvmeölçerler, temel olarak sarkaç tipi (pendulous) ve titreşim kirişli (vibrating-beam) yapılar gibi farklı tasarım prensiplerine göre sınıflandırılabilir. Bu yapılar yalnızca konvansiyonel mekanik yöntemlerle değil, aynı zamanda mikro-elektro-mekanik sistemler (MEMS) teknolojisiyle de üretilbilmektedir. MEMS üretim teknikleri, her iki tip ivmeölçerin de mikro ölçekte üretilmesini mümkün kılar; ayrıca hassas eksenlerin cihaz düzlemine paralel veya bu düzleme dik olacak şekilde yerleştirilmesine olanak tanır. Bu sayede, üç eksenli bir ivmeölçer ile ilgili elektronik bileşenler tek bir silikon çip üzerine oyularak entegre edilebilir (Groves 2013).

MEMS sensörlerin performansları, son yıllarda önemli ölçüde gelişmiştir. Bu gelişim yalnızca ölçüm doğruluğu değil, aynı zamanda çevresel dayanım, kararlılık ve entegrasyon yeteneklerini de kapsamaktadır. MEMS ivmeölçerlerin düşük hacimli, az güç tüketen ve maliyet açısından avantajlı yapısı, onları geniş bir uygulama yelpazesinde tercih edilen bir çözüm haline getirmiştir (Titterton ve Weston 2004). Artık sadece düşük performanslı sistemlerde değil, belirli taktik ve seyrüsefer düzeyindeki uygulamalarda da MEMS tabanlı çözümler kullanılabilmektedir (Groves 2013, Titterton ve Weston 2004). Bu sayede MEMS ivmeölçerler, hem üretim kolaylığı hem de fonksiyonellik açısından geleneksel sistemlere güçlü bir alternatif oluşturur (Titterton ve Weston 2004).

2.4.2 Dönüölçer

Üç boyutlu uzayda bir cismin hareketini eksiksiz şekilde tanımlayabilmek için, doğrusal hareket bilgisine ek olarak açısal hareketin de ölçülmesi gerekir. Sabit bir ataletsel referans çerçevesine göre açısal hızı algılayan sensörler, dönüölçer olarak adlandırılmaktadır. Dönüölçer tarafından ölçülen açısal hızların zamana göre integrali

alındığında, cismin başlangıç konumuna göre yönelimdeki değişim elde edilmektedir. Dönüölçerler farklı türde çıktılar verebilmektedir, kullanılan dönüölçerin türüne bağlı olarak, sensör doğrudan açısal hızı ya da zamana göre birikimli olarak yönelim bilgisini verebilir (Noureldin vd. 2013).

Farklı uygulama ihtiyaçlarına ve performans gereksinimlerine göre çeşitli yapı prensiplerine dayanan dönüölçer türleri geliştirilmiştir (Groves 2013, Titterton ve Weston 2004). Yaygın olarak kullanılan dönüölçer türleri arasında optik dönüölçerler, titreşim temelli dönüölçerler, ve dönen kütleli sistemler yer almaktadır. Optik dönüölçerler, ışığın kapalı bir yolda iki farklı yönde hareket etmesiyle oluşan faz farkına dayanarak açısal hız bilgisini elde eder; bu teknoloji genellikle fiber optik (FOG) ya da halka lazer (RLG) yapılarla gerçekleştirilir. Titreşimli dönüölçerler ise, Coriolis etkisini temel alarak çalışan ve belirli bir elemanın salınım hareketiyle yönelim değişimini algılayan yapılardır. “Spinning-mass” türü dönüölçerler, açısal momentumun korunumu prensibine göre çalışan klasik mekanik yapılardır (Groves 2013). Ancak, Altınöz (2015) tarafından belirtildiği üzere, geleneksel mekanik dönüölçerin geliştirme süreci büyük ölçüde sona ermiş olup, teknolojik olgunluk düzeyine ulaşmaları nedeniyle yerlerini daha yenilikçi ve geliştirilmeye devam edilen optik ve MEMS tabanlı yapılara bırakmışlardır. Bu bağlamda, modern sistemlerde daha çok titreşim esaslı MEMS dönüölçerler ve fiber optik dönüölçerler gibi alternatif yapılar tercih edilmektedir.

MEMS dönüölçerin tamamı, temel olarak titreşim esasına dayalı olarak çalışır. Bununla birlikte, yalnızca mikro ölçekli cihazlarla sınırlı kalmayıp daha büyük yapılar için de aynı prensip kullanılmakta ve bu teknoloji, farklı hassasiyet ve uygulama düzeylerine karşılık gelecek şekilde geniş bir performans aralığını kapsamaktadır (Groves 2013). MEMS dönüölçerler, kompakt boyutları ve düşük üretim maliyetleri sayesinde özellikle navigasyon uygulamalarında tercih edilen bir sensör teknolojisidir. Küçük boyutları sayesinde entegre sistemlerde kolayca yer bulabilen bu dönüölçerler, aynı zamanda ekonomik olmalarıyla da öne çıkmaktadırlar. Ancak bu avantajlarının yanında bazı sınırlamaları da mevcuttur. Özellikle performans aralığının kısıtlı oluşu ve yanlışlık tekrarlanabilirliği (bias repeatability) bakımından düşük hassasiyet göstermeleri, bu

sensörlerin hassasiyet gerektiren görevlerde kullanımını sınırlandırmaktadır (Altınöz 2015).

2.4.3 Ataletsel ölçüm birimi hataları

Ataletsel ölçüm birimleri, yapıları gereği çeşitli hata kaynaklarından etkilenmektedir. Özellikle sensör maliyetinin düşmesiyle hata kaynakları daha karmaşık ve belirgin hale gelmekte ve sensör ölçümlerinin doğruluğunu sınırlamaktadır (Noureldin vd. 2013). Bu hatalar temel olarak deterministik (sistemik) ve rastgele olmak üzere iki ana kategoride incelenir. Deterministik hatalar, sensörlerde meydana gelen yanlışlık (bias), ölçek faktörü (scale factor) ve eksen hizalama hataları (misalignment) gibi sistemik kaynaklardan oluşmaktadır. Bu tür hatalar, kontrollü ortamlarda yapılan statik ve dinamik kalibrasyon testleri aracılığıyla giderilebilir veya önemli ölçüde azaltılabilir. Buna karşılık, rastgele hatalar; yanlışlık kararsızlığı (bias instability), ölçek faktörü kararsızlığı (scale factor instability) ve rastgele gürültü gibi bileşenlerden oluşur ve rastgele yapıları nedeniyle doğrudan giderilemez; bu nedenle çeşitli istatistiksel kestirim yöntemleriyle modellenmeleri gerekir. (Ünsal 2012). Bu rastgele hatalar zamanla birikerek konum, hız ve yönelim kestirimlerinin doğruluğunu azaltmakta ve seyrüsefer sisteminin performansını olumsuz yönde etkilemektedir (Narasimhappa vd. 2018, Narasimhappa vd. 2020).

Ünsal ve Demirbaş (2012), AÖB'lerde gözlemlenen yanlışlık (bias), ölçek faktörü (scale factor) ve eksen kaçıklığı (misalignment) gibi deterministik hataların yanı sıra, ölçek faktörü ve yanlışlık kararsızlığı (bias instability) gibi rastgele hataların matematiksel olarak nasıl modellendiğini detaylı bir şekilde açıklamıştır. Bu kapsamda, ivme ve açısal hız ölçümleri, eşitlik (2.16) ve (2.17)'de verilen modeller doğrultusunda oluşturulmuştur.

$$\begin{bmatrix} \tilde{a}_x \\ \tilde{a}_y \\ \tilde{a}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + S_x + \delta S_x & M_{xy} & M_{xz} \\ M_{yx} & 1 + S_y + \delta S_y & M_{yz} \\ M_{zx} & M_{zy} & 1 + S_z + \delta S_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_x + \delta B_x \\ B_y + \delta B_y \\ B_z + \delta B_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \tilde{\omega}_x \\ \tilde{\omega}_y \\ \tilde{\omega}_z \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 + S_x + \delta S_x & M_{xy} & M_{xz} \\ M_{yx} & 1 + S_y + \delta S_y & M_{yz} \\ M_{zx} & M_{zy} & 1 + S_z + \delta S_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_x + \delta B_x \\ B_y + \delta B_y \\ B_z + \delta B_z \end{bmatrix} \\
&+ \begin{bmatrix} B_{gx} & 0 & 0 \\ 0 & B_{gy} & 0 \\ 0 & 0 & B_{gz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{2.17}$$

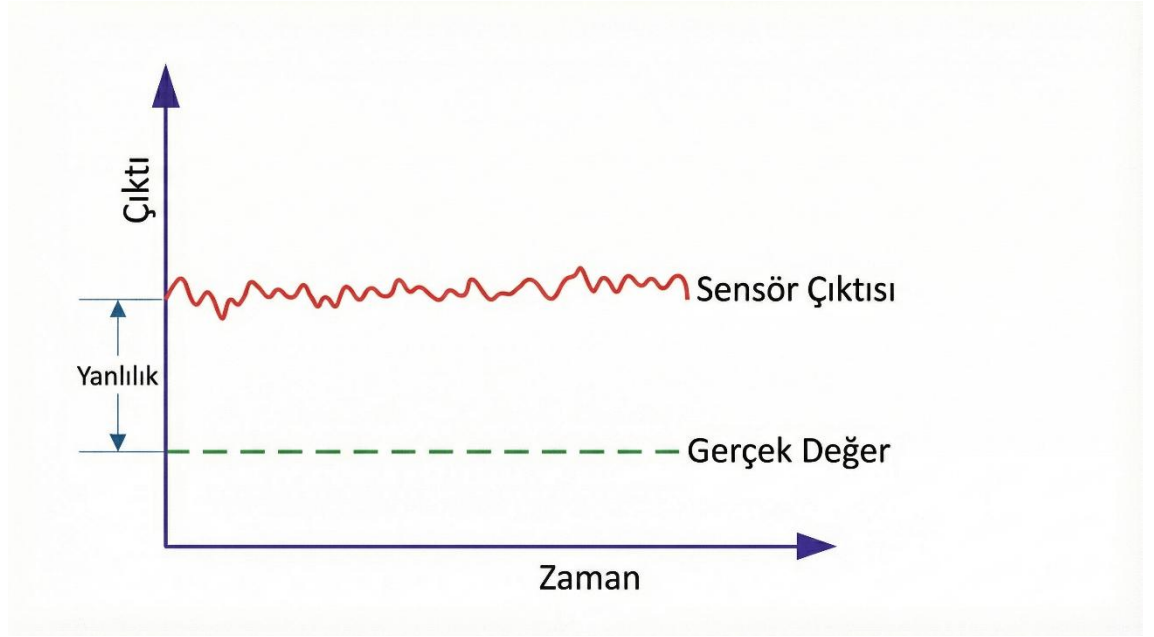
İlgili eşitliklerde, $\tilde{a}_x$, $\tilde{a}_y$ ve $\tilde{a}_z$, sensörlerden elde edilen hatalı ivme ölçümlerini; a_x , a_y ve a_z ise gerçek ivme değerlerini ifade etmektedir. Ölçek faktörü hataları S_x , S_y ve S_z ile; eksenler arası çapraz hizalama (misalignment) etkileri ise M_{xy} , M_{xz} , M_{yx} , M_{yz} , M_{zx} ve M_{zy} ile modellenmektedir. Sabit yanlışlık (bias) bileşenleri B_x , B_y ve B_z terimleriyle temsil edilirken; δS_x , δS_y , δS_z , δB_x , δB_y ve δB_z rastgele ölçek faktörü ve yanlışlık değişkenlerini göstermektedir. Son olarak, n_x , n_y ve n_z terimleri sensörlerin beyaz gürültü bileşenlerini ifade etmektedir.

Aynı yapı açısal hızlar ($\tilde{\omega}_x$, $\tilde{\omega}_y$ ve $\tilde{\omega}_z$) için de geçerlidir; bu ifadelerde gerçek açısal hız ω_x , ω_y ve ω_z , eksenler arası çapraz etkileşim matrisleri ve yanlışlık terimleri ivme eşitliklerine benzer şekilde modele dahil edilmiştir. Ayrıca, en alttaki matris formunda B_{gx} , B_{gy} ve B_{gz} , dönüölçerlere özgü yerçekimi kaynaklı yanlışlık katsayılarını ifade etmektedir.

2.4.3.1 Yanlılık

İvmeölçer ve dönüölçer sensörlerinde sıkça karşılaşılan yanlışlık (bias), sensör girişine herhangi bir ivme veya açısal hız uygulanmadığı durumda ölçülen sabit hata bileşenidir (Ünsal 2012). Bu hata, ölçülen spesifik kuvvet veya açısal hızdan bağımsız bir değere sahip olduğundan, literatürde bazen g-bağımsız yanlışlık (g-independent bias) olarak da adlandırılmaktadır. Sensör kalibrasyon süreçleriyle azaltılsa bile, yanlışlık genellikle ataletsel sensörlerin toplam hata bütçesinde en önemli ve belirleyici faktörlerden biri olmaya devam eder. İvmeölçer ve dönüölçer sensörlerinin yanlışlık değerleri sensör gövdesine bağlı referans çerçevesinde tanımlanmakta olup, genellikle üç eksen (x, y, z) vektör formunda gösterilir (Groves 2013). Yanlılık hata bileşenleri, laboratuvar

ortamında yapılan kalibrasyon testleriyle modellenebilmekte ve hata düzeltme algoritmalarında düzeltme girdisi olarak kullanılabilir. Yanlılık kaynaklı hataların telafi edilmemesi durumunda ise, sistemin pozisyon, hız ve yönelim kestirimlerindeki hata miktarı zamanla artarak, navigasyon doğruluğunda önemli bozulmalara yol açar (Ünsal 2012).



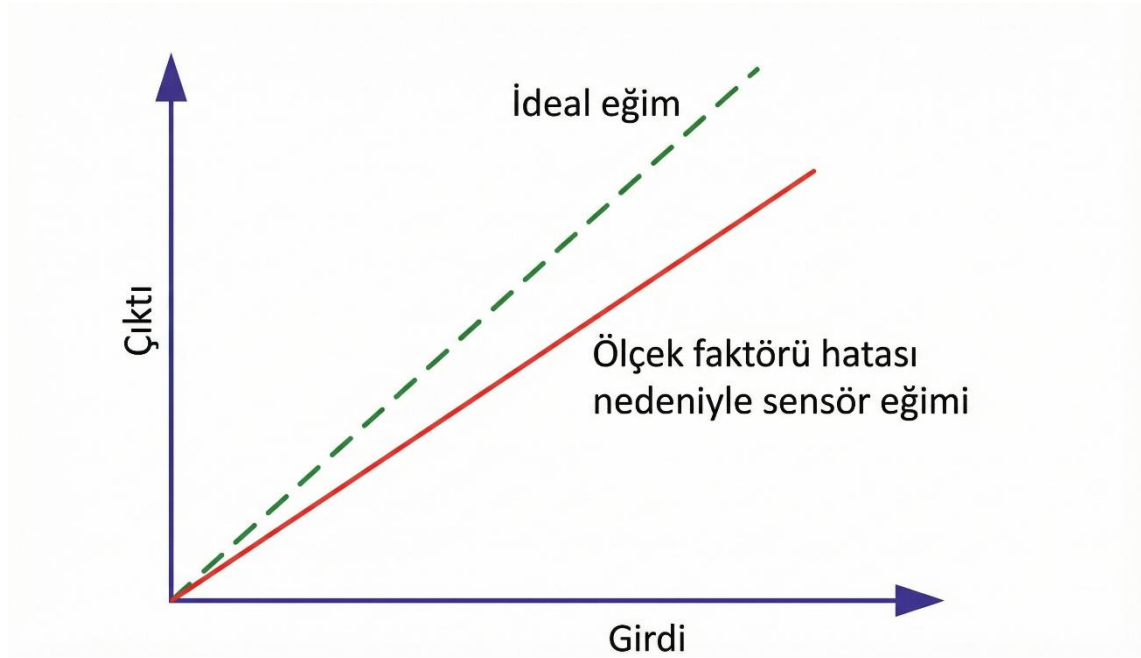
Şekil 2.8 Ataletsel sensörler için yanlılık hatası görseli (Noureldin vd. 2013'ten Türkçeleştirilerek alınmıştır)

2.4.3.2 Yer çekimine bağlı yanlılık (g-dependent bias)

MEMS dönüölçerler, dönme hareketini algılayabilmek için genellikle katı malzemeler, kütleler ve yaylar gibi mekanik bileşenler içerir. Bu tür sistemlerde ivmelenme, bu bileşenler üzerinde ek hareketlere neden olur. Oluşan bu ek hareket, uygulanan ivmeye doğrudan orantılıdır ve bu nedenle kalibrasyon testleriyle belirlenebilir. g'ye bağlı yanlılık yalnızca dönüölçer ölçümlerinde gözlemlenir ve ilgili hata teriminin birimi derece/saat/g (deg/h/g) cinsinden dir (Altınöz 2015).

2.4.3.3 Ölçek faktörü (scale factor)

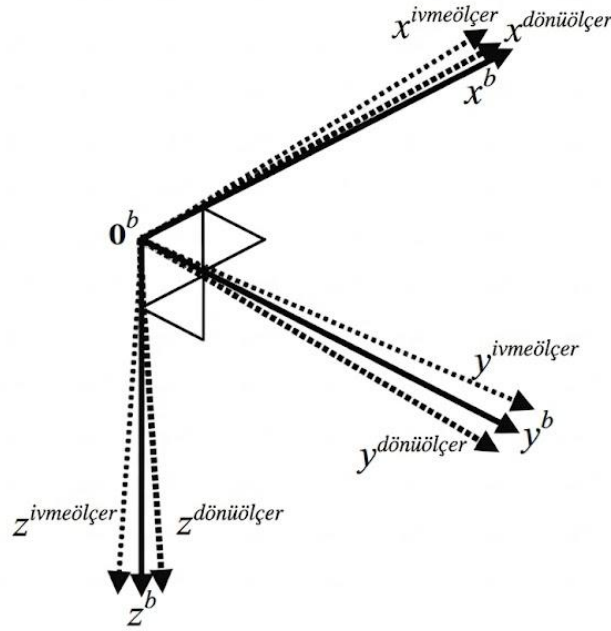
Ölçek faktörü (scale factor) hatası, sensör çıkışındaki ölçümün, girişteki gerçek fiziksel değişime doğru orantılı olarak yansımaması sonucu ortaya çıkar (Ünsal 2012). Teorik olarak bu oran 1'e eşit olmalıdır, ancak pratikte çoğunlukla bu ideal değer elde edilemez (Altınöz 2015). Bu hata, ivmeölçerlerde ölçülen spesifik kuvvete, dönüölçerlerde ise gerçek açısal hıza doğrudan orantılıdır ve sensörlerin hassas eksen boyuncası ölçülen değerlerde sapmaya neden olur (Noureldin vd. 2013). Ölçek faktörü hatasının büyüklüğü genellikle yüzde (%) ya da milyonda bir (ppm) birimleriyle ifade edilir (Ünsal 2012, Altınöz 2015). Bu hata türü sabit terimlerden, sıcaklık değişimlerinden, sensörlerin doğrusal olmayan davranışlarından ve asimetric hatalardan kaynaklanabilir (Ünsal 2012). İvmeölçerlerdeki ölçek faktörü hatası, zamanın karesiyle orantılı olarak artan konum hatasına neden olmaktadır (Altınöz 2015). Ölçek faktöründen kaynaklı hatalar laboratuvar ortamında yapılan kalibrasyon testleri ile belirlenebilir ve elde edilen parametreler hata telafi algoritmalarına girdi olarak sağlanır (Ünsal 2012).



Şekil 2.9 Ataletsel sensörler için ölçek faktörü hatası görseli (Noureldin vd. 2013'ten Türkçeleştirilerek alınmıştır)

2.4.3.4 Eksen hizalama hatası

Eksen hizalama (misalignment) hatası, iki temel kaynaktan ortaya çıkmaktadır: Birincisi, AÖB'nin araç eksenine hatalı yerleştirilmesi; ikincisi ise sensör eksenlerinin üretimden kaynaklı hatalı hizalanmasıdır (Altınöz 2015). Eksenler arası yanlış hizalanma, bir ekseninde meydana gelen hareketin diğer eksenlerde de ölçüm hatasına neden olmasına yol açar ve bu etkinin büyüklüğü hatalı hizalanmanın derecesine bağlıdır (Noureldin vd. 2013). Eksen hizalama hatasının birimi genellikle miliradyan (mrad) cinsinden ifade edilir ve bu hata, laboratuvar ortamında yapılan kalibrasyon testleriyle belirlenip hata telafi algoritmalarında düzeltme parametresi olarak kullanılabilir (Ünsal 2012).



Şekil 2.10 Ataletsel sensörler için eksen kaçıklığı hatası görseli (Noureldin vd. 2013'ten Türkçeleştirilerek alınmıştır)

2.4.3.5 Yanlılık kararsızlığı (bias instability)

Yanlılık kararsızlığı (bias instability), sensörün ölçüm yaptığı süre boyunca yanlılık değerindeki zamanla gerçekleşen rastgele değişimleri ifade eden bir hata türüdür (Ünsal 2012). Bu hata türü, sensör ölçümlerinde sabit olmayan, düşük frekanslı dalgalanmalar olarak ortaya çıkar (Altınöz 2015). Yanlılık kararsızlığı, Allan varyansı ve otokorelasyon

analizleri gibi istatistiksel yöntemlerle nicel olarak tanımlanabilmekte ve bu analizlerden elde edilen veriler yardımıyla modellenebilmektedir (Ünsal 2012, Flenniken vd. 2005). Yanlılık kararsızlığı ve benzeri rastgele hataların modellenmesinde genellikle Rastgele Yürüyüş (Random Walk), Gauss-Markov, Rastgele Sabit (Random Constant) ve Otoregresif modeller gibi çeşitli rastgele süreç modelleri kullanılmaktadır. Literatürde yaygın olarak tercih edilen ve yanlılık kararsızlığını modellemek için en uygun yöntem olarak kabul edilen model, birinci mertebeden Gauss-Markov rastgele süreç modelidir (Ünsal 2012).

Gauss-Markov, eşitlik (2.18)'de gösterildiği şekilde ifade edilmektedir. Yanlılık kararsızlığının varyansı $\sigma_{x_k}^2$ terimi ile temsil edilirken; sistemi süren beyaz gürültü sürecinin varyansı ise $\sigma_{w_k}^2$ terimi ile ifade edilmektedir. Burada T_c zaman sabiti olarak sistemin hafıza süresini belirlerken, dt örnekleme zaman aralığını ifade etmektedir (Ünsal ve Demirbaş 2012).

$$x_k = e^{-dt/T_c} x_{k-1} + w_k \quad (2.18)$$

$$\sigma_{x_k}^2 = \frac{\sigma_{w_k}^2}{1 - e^{-2dt/T_c}} \quad (2.19)$$

$$\sigma_{w_k}^2 = \sigma_{x_k}^2 [1 - e^{-2dt/T_c}] \quad (2.20)$$

2.4.3.6 Ölçek faktörü kararsızlığı (scale factor instability)

Ölçek faktörü kararsızlığı (scale factor instability), ölçek faktörü değerinin zaman içinde gösterdiği rastgele değişimleri ifade eder. Bu hata türünün belirlenmesi için uygulanan testler, yanlılık kararsızlığına yönelik kullanılan yöntemlerden farklıdır. Ölçek faktörü kararsızlığını değerlendirebilmek için uzun süreli dinamik dönü testlerine ihtiyaç duyulur. Ancak bu hata türünün etkisi, pratikte genellikle çok düşük seviyededir, çoğu durumda gözle fark edilemeyecek kadar küçüktür ve ihmal edilebilir (Ünsal 2012).

2.4.3.7 Rastgele gürültü

Rastgele sensör gürültüsü genellikle sıfır ortalamalı beyaz gürültü olarak modellenir ve bu tür gürültü, hata telafi algoritmalarında kullanılan alçak geçiren filtrelerle azaltılabilir (Ünsal 2012). Gürültü beyaz olduğundan tüm frekanslarda eşit şekilde dağılmış ve birbirinden bağımsızdır. Bu gürültü, güç kaynaklarından kaynaklanabileceği gibi, yarı iletken bileşenlerin doğasında da bulunabilir (Noureldin vd. 2013).

Rastgele sensör gürültüsü yoğunluğunun birimi, genellikle açısal rastgele yürüyüş (Angular Random Walk, ARW) için $deg/h/\sqrt{Hz}$ ve hız rastgele yürüyüşü (Velocity Random Walk, VRW) için $\mu g/\sqrt{Hz}$ cinsindendir (Noureldin vd. 2013). Bu yoğunluk, sensör çıkışındaki rastgele gürültünün büyüklüğünü gösteren 1σ değeri ile ifade edilir (Ünsal 2012).

2.5 ANS Mekanizasyon Denklemleri

Mekanizasyon, ataletsel ölçüm birimi çıktıları kullanılarak pozisyon, hız ve yönelim bilgilerinin elde edilme sürecidir. Bahsi geçen AÖB çıktıları, üç eksenli dönüölçer tarafından gövde eksenleri etrafında ölçülen açısal hız bileşeni ($\tilde{\omega}_{ib}^b$) ile ivmeölçer tarafından gövde eksenleri doğrultusunda ölçülen ivme bileşeninden ($\tilde{f}^b$) oluşmaktadır. Hem dönüölçer hem de ivmeölçer çıktıları, ataletsel referans çerçevesine göre tanımlanmakta ve bu çerçevede işlenmektedir (Noureldin vd. 2013).

Eşitlik (2.21) ve (2.22) ile mekanizasyon denklemlerinde kullanılan dönüölçer ve ivmeölçer çıktılarının nasıl modellendiği gösterilmektedir. Eşitliklerdeki $\Delta\omega_{ib}^b$ ve Δf^b ifadeleri, sensör ölçümlerinde bulunan rastgele ve kalibrasyona bağlı hatalardan kaynaklanan gürültü bileşenlerini temsil etmektedir (Farrell 2008). Söz konusu sensör gürültüleri kestirilebilir niteliktedir ve uygun yöntemlerle etkileri azaltılabilmektedir (Ünsal ve Demirbaş 2012). Ek olarak, mekanizasyon sürecinde kullanılacak olan sensör ölçümleri, gürültü kaynaklı etkilerin azaltılmış halleriyle eşitlik (2.23) ve (2.24)'daki biçimde ifade edilmektedir (Farrell 2008).

$$\tilde{\omega}_{ib}^b = \omega_{ib}^b + \Delta\omega_{ib}^b \quad (2.21)$$

$$\tilde{f}^b = f^b + \Delta f^b \quad (2.22)$$

$$\hat{\omega}_{ib}^b = \tilde{\omega}_{ib}^b - \Delta\hat{\omega}_{ib}^b \quad (2.23)$$

$$\hat{f}^b = \tilde{f}^b + \Delta\hat{f}^b \quad (2.24)$$

Mekanizasyon süreci, farklı referans çerçeveleri dikkate alınarak gerçekleştirilebilmektedir. Bu tez kapsamında, mekanizasyon işlemleri coğrafi referans çerçevesine göre ele alınacaktır. Mekanizasyon süreci sonucunda elde edilen pozisyon bilgileri; enlem (ϕ), boylam (λ) ve yükseklik (h) bileşenleriyle tanımlanmaktadır. Buna karşılık, hız vektörü üç ortogonal bileşenden oluşmakta olup, bunlar sırasıyla kuzey yönündeki hız bileşeni ($\hat{v}_n$), doğu yönündeki hız bileşeni ($\hat{v}_e$) ve aşağı yönündeki hız bileşeni ($\hat{v}_d$) şeklinde ifade edilmektedir. Yönelim bilgisi ise, gövde referans çerçevesi ile navigasyon referans çerçevesi arasındaki dönüşümü tanımlayan yön kosinüs matrisi (Direction Cosine Matrix, DCM) R_b^n aracılığıyla temsil edilir. Bu matris, gövde eksenleri etrafındaki yuvarlanma (roll), yunuslama (pitch) ve sapma (yaw) açılarından oluşan üçlü dönüşümün matematiksel karşılığını ifade etmektedir (Farrell 2008, Groves 2013).

Coğrafi referans çerçevesine göre enlem (ϕ), boylam (λ) ve yükseklik (h) gibi pozisyon bilgileri eşitlik (2.25)'deki gibi ifade edilmektedir. Eşitlikte yer alan R_M , meridyen yarıçapı olup, elipsoidin kuzey-güney doğrultusundaki (meridyen düzlemindeki) eğriliğini tanımlar. Ayrıca, R_N ifadesi ise asal düşey yarıçap olarak adlandırılır ve elipsoidin doğu-batı doğrultusunda, yüzeye dik yönde tanımlanan eğrilik yarıçapını ifade eder. İlgili yarıçapların hesaplamaları eşitlik (2.26) ve (2.27)'de verilmekte olup, bu hesaplamalarda WGS-84 Dünya modeli esas alınmakta; söz konusu modelde kullanılan parametreler ise büyük yarıçap $a = 6378137$ m ve ilk eksantriklik $e^2 = 0.08181919^2$ olarak tanımlanmaktadır (Farrell 2008).

$$\begin{bmatrix} \phi \\ \lambda \\ h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\hat{v}_n}{R_M + \hat{h}} \\ \frac{\hat{v}_e}{(R_N + \hat{h}) \cos(\hat{\phi})} \\ -\hat{v}_d \end{bmatrix} \quad (2.25)$$

$$R_n = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2(\phi)}} \quad (2.26)$$

$$R_m = \frac{a(1 - e^2)}{(1 - e^2 \sin^2(\phi))^{3/2}} \quad (2.27)$$

Dünya'ya göre hız vektörlerinin değişimi ise coğrafi referans çerçevesinde eşitlik (2.28)'deki gibi hesaplanmaktadır. Denklemin ilk terimi olan $R_b^n f^b$, gövde referans çerçevesinde ölçülen ivme değerlerinin navigasyon (coğrafi) referans çerçevesine dönüştürülmüş halidir. İkinci terim olan g^n , yerçekimi ivmesini temsil etmektedir ve Dünya'nın şekli ile yerel konuma bağlı olarak modellenmektedir. Son terimde yer alan $(\Omega_{en}^n + 2\Omega_{ie}^n)v$ ifadesi ise, Coriolis ve merkezkaç kuvvetlerinden kaynaklanan sahte ivmeleri içermektedir. Bu terim, dönel bir referans çerçevesi olan coğrafi sistemde çalışıldığında ortaya çıkan ivme etkilerinden kurtulmak amacıyla kullanılmaktadır (Farrell 2008). Son terimde yer alan Ω ifadeleri, ilgili açısal hız vektörlerinin (ω_{en}^n ve ω_{ie}^n) çarpık simetrik (skew-symmetric) matris biçimlerini temsil etmektedir.

$$\dot{v} = R_b^n f^b + g^n + (\Omega_{en}^n + 2\Omega_{ie}^n)v \quad (2.28)$$

$$f^b = \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix} \quad (2.29)$$

$$g^n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ g \end{bmatrix}, \quad g = 9.80665 \text{ m/sn}^2 \quad (2.30)$$

$$\omega_{en}^n = \begin{bmatrix} \dot{\lambda} \cos(\phi) \\ -\dot{\phi} \\ -\dot{\lambda} \sin(\phi) \end{bmatrix}, \quad \omega_{ie}^n = \begin{bmatrix} \omega_{ei} \cos(\phi) \\ 0 \\ -\omega_{ei} \sin(\phi) \end{bmatrix} \quad (2.31)$$

Yönelimi tanımlamakta kullanılan yön kosinüs matrisinin (R_b^n) zamana göre türevini ifade eden mekanizasyon denklemi, Eşitlik (2.32)'de gösterildiği gibi tanımlanır. Bu eşitlikteki Ω_{ib}^b , gövde koordinat sisteminde dönüölçer ile ölçülen açısal hız vektörünün (ω_{ib}^b) çarpık simetrik matris formunu temsil ederken; Ω_{in}^b terimi ise navigasyon koordinat sisteminin ataletsel referans çerçevesine göre açısal hızının, gövde koordinat sisteminde ifade edilmiş çarpık simetrik matris biçimini göstermektedir. Bu matris gösterimler, açısal

hız vektörlerinin yönelim üzerindeki etkilerinin matris çarpımı formunda açık ve kompakt biçimde hesaplanmasına imkan sağlamaktadır (Farrell 2008).

$$\dot{R}_b^n = R_b^n \Omega_{nb}^b = R_b^n (\Omega_{ib}^b - \Omega_{in}^b) \quad (2.32)$$

$$\omega_{ib}^b = \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} \quad (2.33)$$

$$\omega_{in}^b = R_b^n \omega_{in}^n \quad (2.34)$$

$$\omega_{in}^n = \omega_{en}^n + \omega_{ie}^n \quad (2.35)$$

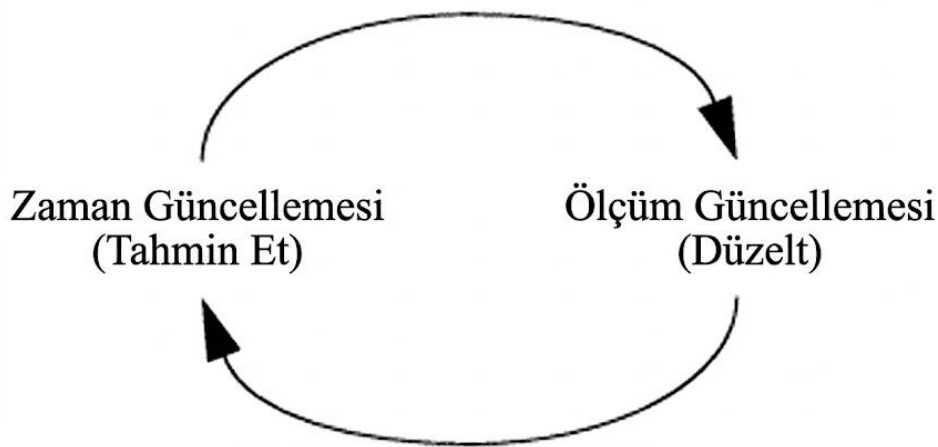
2.6 Kestirim Teorisi ve Kalman Filtresi

Kalman filtresi, bir filtreden ziyade bir kestirim algoritmasıdır. 1960 yılında R. E. Kalman tarafından ortaya konmuş ve zamanla pek çok araştırmacı tarafından geliştirilmiştir. ANS/KKBS entegrasyonu kapsamında temel amacı, pozisyon, hız ve yönelim gibi sürekli değişen sistem parametrelerinin gerçek zamanlı tahminlerini yapmaktır. Ölçümler gürültü içerdiğinden, bu kestirimler her yeni ölçüm geldiğinde güncellenir. Ancak, her ölçüm anı, parametrelerin tümünü kesin olarak belirlemeye yetmeyebilir; bu yüzden Kalman filtresi, sistem ve ölçümlerin istatistiksel ve deterministik özelliklerinden yararlanarak en iyi kestirimi sağlamaya çalışır. Bayesçi bir yaklaşım izleyen filtre, ilk tahminlerle başlar ve her yeni ölçümle birlikte bu tahminlerini günceller (Groves 2013). Kalman filtresinin en önemli avantajlarından biri, yalnızca mevcut durumu değil, geçmiş ve hatta gelecekteki durumları dahi tahmin edebilmesi ve bunu, sistemin tam yapısı bilinmese dahi başarabilmesidir (Welch ve Bishop 1995). Bu güncelleme süreci, önceki tahminlerin ve güncel ölçümlerin ağırlıklı birleştirilmesiyle gerçekleştirilir. Özellikle navigasyon gibi gerçek zamanlı uygulamalarda, yalnızca yeni ölçümlerin işlenmesi yeterli olduğundan hesaplama açısından oldukça verimlidir. Ayrıca, parametre tahminlerindeki belirsizlikleri ve bu belirsizlikler arası ilişkiyi de hesaba katar (Groves 2013).

Ataletsel seyrüsefer sistemlerinin (ANS) doğruluğu, özellikle düşük maliyetli MEMS sensörlerinde görülen ivmeölçer ve dönüölçer kaymaları gibi rastgele hatalardan ciddi şekilde etkilenir. Bu hatalar zamanla birikerek uzun dönemli pozisyon ve hız

kestirimlerinde ciddi sapmalara yol açar, bu nedenle yalnızca ANS'ye dayalı seyrüsefer uygulamaları pozisyon, hız ve yönelim çıktılarında yeterli doğruluğu sağlayamaz. Doğruluğun artırılması için harici referanslardan elde edilen ölçümlerin belirli aralıklarla sisteme dahil edilmesi büyük önem taşır. Bu noktada Kalman filtresi, farklı kaynaklardan gelen ve farklı hata özelliklerine sahip ölçümleri istatistiksel olarak en uygun biçimde birleştirerek, sistemin mevcut durumunu ve hata bileşenlerini en küçük ortalama kare hatalı kestirim yaklaşımıyla hesaplar. ANS/KKBS entegrasyonunda Kalman filtresi, ANS'nin sağladığı kısa dönemli hassasiyeti, KKBS'nin sunduğu uzun dönemli kararlılıkla tamamlar; böylece pozisyon, hız ve yönelim kestirimlerinde genel sistem performansı belirgin şekilde iyileşir. Ayrıca, filtre yalnızca durum kestirimi sağlamakla kalmaz, aynı zamanda hata büyüklüklerine ve belirsizliklere ilişkin gerçek zamanlı istatistiksel bilgi sunarak hata analizi ve sistem optimizasyonuna katkı sağlamaktadır (Noureldin vd. 2013).

Kalman filtresi, sistemin zaman güncellemesi ve ölçüm güncellemesi olmak üzere iki temel fazdan oluşmaktadır (Groves 2013, Welch ve Bishop 1995). İzleyen alt başlıklarda, Kalman filtresinin çalışma prensibi niteliksel olarak açıklanacak; ayrıntılı matematiksel açıklamalar ve türetmeler sunulacaktır. Bu çalışmada değerlendirilen Kalman filtresi, ayrık zamanlı bir yapıdadır ve her ölçüm anında durum kestirimi ile hata kovaryansı güncellenmektedir.



Şekil 2.11 Kalman filtresi adımları (Welch ve Bishop 1995'ten Türkçeleştirerek alınmıştır)

2.6.1 Kalman filtresi algoritma adımları

Bu bölümde Kalman filtresi algoritması, sistem modeli ve ölçüm modeli ele alınmaktadır. Kalman filtresi her ne kadar sürekli zamanlı çalışabilecek bir yapıya sahip olsa da, sayısal hesaplamalara uygunluğu nedeniyle en yaygın olarak ayırık zamanlı biçimde uygulanmaktadır (Groves 2013). Bu nedenle burada yalnızca ayırık zamanlı versiyonu sunulacaktır.

Aşağıda, ayırık zamanlı Kalman filtresinin çalışmasını sağlayan temel hesaplama adımları sunulmaktadır (Groves 2013). Bu adımlar sırasıyla;

1. Sistem geçiş matrisinin hesaplanması (Φ_{k-1}),
2. Sistem gürültü kovaryans matrisinin hesaplanması (Q_{k-1}),
3. Durum vektörü tahmininin bir önceki zamandan ($\hat{x}_{k-1}^+$) mevcut zamana ($\hat{x}_k^-$) aktarılması,
4. Hata kovaryans tahmininin bir önceki zamandan (P_{k-1}^+) mevcut zamana (P_k^-) aktarılması,
5. Ölçüm matrisinin hesaplanması (H_k),
6. Ölçüm gürültü kovaryans matrisinin hesaplanması (R_k),
7. Kalman kazanç matrisinin hesaplanması (K_k),
8. Ölçüm vektörünün tanımlanması (z_k),
9. Durum vektör tahmininin güncellenmesi ($\hat{x}_k^- \rightarrow \hat{x}_k^+$),
10. Durum hata kovaryans tahmininin güncellenmesi ($P_k^- \rightarrow P_k^+$),

şeklindedir.

Sayan tarafından 2024 yılında gerçekleştirilen çalışmada, algoritmanın doğru çalışabilmesi için başlatma öncesinde belirli koşulların sağlanması gerekir; aksi halde filtre hatalı sonuçlara ulaşabilir. Kalman filtresi algoritması için dikkate alınan temel varsayımlar şunlardır:

1. Kalman filtresi, yalnızca doğrusal sistemlerde optimal performans gösterir. Dolayısıyla süreç ve ölçüm ilişkileri, doğrusal matematiksel modellerle ifade edilmelidir. Yani, hem sistem dinamiği hem de ölçüm süreçleri, doğrusal matris formülleriyle tanımlanmalıdır
2. Algoritma, tahmin edilen süreçlerin ve ölçümlerin belirli, ayrık zaman noktalarında gerçekleştiğini varsayar. Hem süreç hem de ölçüm modelleri, ayrık zaman formunda matematiksel ifadelerle temsil edilir.
3. Sistem (süreç) gürültüsü $\omega_{s,k}$ ve ölçüm gürültüsü $\omega_{m,k}$, sıfır ortalama değerine sahip, beyaz gürültü şeklinde kabul edilir. Bu gürültülerin kovaryansları sırasıyla Q_k ve R_k matrisleriyle belirtilir ve bu matrislerin pozitif tanımlı olması gerekir. Örneğin, Q_k AÖB kaynaklı süreç hatalarını; R_k ise yardımcı sensör ölçüm hatalarını temsil eder.
4. Filtre, başlangıçta doğru bir durum tahminiyle başlatılmalıdır; yanlış bir ilk koşul, özellikle ilk adımlarda önemli sapmalara yol açabilir. Başlangıçta, durum tahmini ve hata kovaryansı, sistemin gerçek başlangıç koşullarına mümkün olduğunca yakın olmalı ve süreç ile ölçüm gürültülerinden bağımsız kabul edilmelidir.

Bu noktadan itibaren, Kalman filtresinin iki temel aşaması olan zaman güncellemesi ve ölçüm güncellemesi ayrıntılı şekilde incelenecektir.

2.6.1.1 Zaman güncellemesi

Kalman filtresinde sistem durum vektörünün ve hata kovaryans matrisinin bir sonraki zaman adımında nasıl değişeceğini belirleyebilmek için, bu değişkenlerin zaman içerisindeki evrimlerinin modellenmesi gerekmektedir (Groves 2013).

Kalman filtresi algoritmasında kullanılan gerçek durum vektörünün zamana bağlı değişimi ise eşitlik (2.36) ile ifade edilmektedir.

$$\dot{x}(t) = F(t)x(t) + G(t)w_s(t) \quad (2.36)$$

Bu eşitlikte $x(t)$ gerçek durum uzay vektörünü, $F(t)$ sistem durum geçiş matrisini, $G(t)$ sürekli zamanlı sistem gürültü dağılım matrisini ve $w_s(t)$ ise sürekli zamanlı sistem gürültü vektörünü temsil etmektedir (Groves 2013). Yüksek lisans tezi kapsamında ele alınan durum uzay matrisi $F(t)$, pozisyon, hız, yönelim hatalarının yanı sıra ivmeölçer ve dönüölçer yanlışlıklarını da içermektedir.

Ayrık ve sürekli zamanlı Kalman filtreleri matematiksel olarak denk kabul edilir; bu kapsamda , $\hat{x}_k \equiv \hat{x}(t_k)$ ve $\hat{x}_{k-1} \equiv \hat{x}(t_k - \tau_s)$ eşitlikleri geçerlidir. Ayrık zamanda ifade edilen gerçek durum vektörünün (x_{k-1}) , $t_k - \tau_s$ ve t_k arasındaki zaman aralığında, eşitlik (2.36)'in integrali alınarak elde edilir. Bu entegrasyon sırasında $F(t)$ ve $G(t)$ matrislerinin integral aralığı boyunca sabit kaldığı varsayılır ve bu varsayımla eşitlik (2.37)'ye ulaşılır. (Groves 2013).

$$x_k = \Phi_{k-1}x_{k-1} + \Gamma_{k-1}w_{s,k-1} \quad (2.37)$$

$$\Phi_{k-1} \approx \exp(F_{k-1}\tau_s) \quad (2.38)$$

$$\Gamma_{k-1}w_{s,k-1} = \int_{t_k-\tau_s}^{t_k} \Phi_{k-1}G_{k-1}w_s(t') dt' \quad (2.39)$$

Eşitlik (2.37)'de yer alan Φ_{k-1} ifadesi, sistem geçiş matrisinin ayrık zamanlı formunu temsil etmekte olup, eşitlik (2.38)'de tanımlandığı şekilde hesaplanmaktadır. Ancak matrisin üstel ifadesinin doğrudan hesaplanması pratikte güç olduğundan, bu matris genellikle eşitlik (2.40)'de belirtilen kuvvet serisi açılımı (power series) veya benzer sayısal yöntemlerle yaklaşık olarak elde edilir. Uygulamada, hesaplama kolaylığı açısından çoğunlukla birinci dereceden kuvvet serisi açılımı yeterli bulunmaktadır (Groves 2013, Noureldin vd. 2013). Ayrıca Γ_{k-1} matrisi ise ayrık zamanlı sistemin gürültü dağılım matrisini ifade etmektedir (Groves 2013).

$$\Phi_{k-1} = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{F_{k-1}^r \tau_s^r}{r!} = I + F_{k-1}\tau_s + \frac{1}{2}F_{k-1}^2\tau_s^2 + \frac{1}{6}F_{k-1}^3\tau_s^3 + \dots \quad (2.40)$$

Ayrık zamanda elde edilen sistem durum vektörü tahmininden sonra, sistem hata kovaryans matrisinin hesaplanması gerçekleştirilir (Groves 2013, Noureldin vd. 2013). Hata kovaryans matrisi P_k^- , tahmin edilen durum vektörü ($\hat{x}_k^-$) ile gerçek durum vektörü (x_k) arasındaki farkın dış çarpımının beklenen değeri alınarak hesaplanır. Bu ifade, sistemin tahmin hatalarının ikinci momentini temsil eder ve eşitlik (2.41)'daki gibi tanımlanır (Groves 2013). Kovaryans matrisinin diyagonal elemanları durum vektörü bileşenlerinin varyanslarını, diyagonal dışı elemanları ise bileşenler arasındaki kovaryansları belirtmektedir (Bar-Shalom vd. 2001).

$$P_k^- = E[(\hat{x}_k^- - x_k)(\hat{x}_k^- - x_k)^\top] \quad (2.41)$$

$$\hat{x}_k^- - x_k = \Phi_{k-1}(\hat{x}_{k-1}^+ - x_{k-1}) - \Gamma_{k-1}w_{s,k-1}$$

Yukarıdaki ifadelerin yerine konulmasıyla, sistem hata kovaryans matrisi eşitlik (2.42)'de gösterildiği gibi nihai formuna dönüştürülmekte ve buna ek olarak sistem gürültü kovaryans matrisi Q_{k-1} 'da ifadesinin matematiksel ifadesine de ulaşılmaktadır (Groves 2013).

$$P_k^- = \Phi_{k-1}P_{k-1}^+\Phi_{k-1}^\top + Q_{k-1} \quad (2.42)$$

$$Q_{k-1} = E[\Gamma_{k-1}w_{s,k-1}w_{s,k-1}^\top\Gamma_{k-1}^\top] \quad (2.43)$$

2.6.1.2 Ölçüm güncellemesi

Zaman güncellemesi sonucunda elde edilen durum tahmininin ölçümlerle düzeltilebilmesi için, ölçümlerin durum vektörü değişkenleriyle olan ilişkisinin bilinmesi gerekir. Bu ilişki, ölçüm modeli ile tanımlanır. Kalman filtresinde ölçüm vektörü z_k , gerçek durum vektörü x_k 'nın doğrusal bir fonksiyonu ve buna eklenen ölçüm gürültüsü şeklinde ifade edilir. Standart doğrusal model:

$$z_k = H_k x_k + \omega_{m,k} \quad (2.44)$$

burada H_k ölçüm matrisidir ve ölçümün hangi durum değişkenlerine bağlı olduğunu gösterir; $\omega_{m,k}$ ise sıfır ortalamalı, beyaz, kovaryansı R_k ile tanımlanan ölçüm gürültüsüdür (Groves 2013).

Zaman güncellemesiyle elde edilen durum tahmininin düzeltme aşamasında Kalman kazancı K_k hesaplanır. Bu kazanç, tahmin edilen hata kovaryansı P_k^- ve ölçüm gürültüsü kovaryansı R_k dikkate alınarak belirlenir (eşitlik (2.45)) (Noureldin vd. 2013).

$$K_k = P_k^- H_k^T [H_k P_k^- H_k^T + R_k]^{-1} \quad (2.45)$$

Kalman kazancı, ölçüm ve model güvenilirliği arasında bir denge kurar. Ölçüm gürültüsü azsa veya süreç gürültüsü çoksa, ölçümlere daha fazla ağırlık verilir (K_k büyür). Ters durumda, tahmine güven artar yani K_k küçülür (Noureldin vd. 2013).

Kalman filtresi t_k anında bir ölçüm aldığı anda (z_k), bu ölçüm, zaman güncellemesinden elde edilen durum vektörünün ölçüm uzayındaki tahminiyle (eşitlik (2.46)) kıyaslanır. Elde edilen fark (inovasyon, δz_k^-), Kalman kazancı K_k ile ağırlıklandırılarak durum vektörü güncellenir ve böylece en iyi durum kestirimi elde edilir. Sonuç olarak, t_k anındaki kestirilmiş durum uzay vektörü eşitlik (2.48)'de gösterilen şekilde yazılır (Noureldin vd. 2013, Güreş 2019).

$$\hat{z}_k = H_k \hat{x}_k^- \quad (2.46)$$

$$\hat{x}_k^+ = \hat{x}_k^- + K_k [z_k - \hat{z}_k] \quad (2.47)$$

$$\hat{x}_k^+ = \hat{x}_k^- + K_k [\delta z_k^-] \quad (2.48)$$

Son aşamada, hata kovaryans matrisi, mevcut zaman adımı için öngörülen hata kovaryans matrisi ve Kalman kazancı kullanılarak (eşitlik (2.49))'de gösterildiği şekilde güncellenir. Hata kovaryans matrisi, hem hata analizi yapmak hem de bir sonraki zaman adımı için tahmin öncesinde başlangıç koşullarını belirlemek açısından önemlidir (Güreş 2019).

$$P_k^+ = [I - K_k H_k] P_k^- \quad (2.49)$$

Güncellenmiş hata kovaryans matrisi, düzeltilmiş durum vektörü $\hat{x}_k^+$ üzerindeki güvenilirlik düzeyini ve bir sonraki durum tahmini için ne kadar güven sağladığını göstermektedir (Güreş 2019).

2.7 Sayısal Yöntemler ve Sayısal Hassasiyet

Kalman filtresi gibi kestirim algoritmalarında ve ANS’de gerçekleştirilen işlemlerde sayısal hassasiyet kritik bir öneme sahiptir. Matris işlemlerinin durum numarası ile kullanılan veri tiplerinin sayısal çözünürlüğü, hem ANS mekanizasyon denklemlerinin nümerik entegrasyonunda hem de Kalman filtresi hesaplamalarında elde edilen sonuçların doğruluğunu doğrudan etkileyen temel unsurlardır. Bu bölümde, bu iki sayısal etki üzerine yapılan literatür çalışmaları ile bunların sistem performansına yansımaları ayrıntılı olarak değerlendirilmektedir.

2.7.1 Sayısal kararlılık ve matris durum numarası

Kalman filtresi gibi nümerik hesaplama yöntemlerinde, matrislerin durum numarası (condition number), matrisin sayısal olarak ne kadar kararlı veya kararsız olduğunu belirten önemli bir kriterdir. Özellikle Kalman filtresinde inovasyon kovaryans matrisinin durum numarasının yüksek olması, filtre algoritmasının sayısal olarak kararsız hale gelmesine sebep olmaktadır. Durum numarası, bir matrisin en büyük tekil değerinin en küçük tekil değerine oranı olarak tanımlanır ve büyük koşul sayıları, matrisin tersini alma işlemlerinde büyük yuvarlama hatalarının oluşmasına yol açmaktadır (Liu ve Chang 2015).

ANS/KKBS entegrasyonunda Kalman filtresi kullanıldığından, sistem durum vektöründe yatay pozisyon hatalarının radyan cinsinden , düşey pozisyon hatasının ise metre cinsinden ifade edilmesi, inovasyon kovaryans matrisi durum numarasının dramatik şekilde yükselmesine yol açabilir. Bu da matrisin tersinin alınması sırasında ciddi

nümerik kararsızlıklara sebep olur (Liu ve Chang 2015). Literatürde bu problemi çözmek için yatay pozisyona ait bilgileri içeren matrislerin belirli bir ölçek faktörüyle çarpılarak yeniden ölçeklendirilmesi önerilmektedir (Groves 2013, Liu ve Chang 2015). Özellikle, yatay koordinat bileşenlerinin Dünya'nın ortalama yarıçapı ($R = 6378137$) ile çarpılarak metre cinsine çevrilmesi, inovasyon kovaryans matrisinin durum numarasını azaltmakta ve Kalman filtresinin nümerik açıdan daha kararlı çalışmasını sağlamaktadır. Bu ölçeklendirme işlemi sayesinde sayısal hesaplamalardaki duyarlılık sorunları minimize edilmekte ve filtre performansı iyileştirilmektedir (Liu ve Chang 2015).

Liu ve Chang (2015) tarafından önerilen yöntemde, bu ölçeklendirmeyi gerçekleştirmek amacıyla $T1$ ve $T2$ biçiminde iki dönüşüm vektörü tanımlanmıştır. Bu vektörlerin matrislerle etkileşimi, eşitlik (2.50) ve eşitlik (2.55) arasında verilen eşitlikler doğrultusunda uygulanmaktadır. Kalman filtresi ile hata kestirimi yapıldıktan sonra, ölçeklendirilmiş durum vektörü ve kovaryans matrisinin orijinal birimlerine geri dönüştürülmesi ise eşitlik (2.57) ve (2.58) ile sağlanmaktadır. Bu yaklaşım sayesinde inovasyon kovaryans matrisinin durum numarası düşürülerek matris işlemlerinde nümerik kararlılık elde edilmektedir.

$$\bar{X} = T1 * X \quad (2.50)$$

$$\bar{Q} = T1 * Q * T1 \quad (2.51)$$

$$\bar{R} = T2 * R * T2 \quad (2.52)$$

$$\bar{F} = T1 * F * T1^{-1} \quad (2.53)$$

$$\bar{Z} = T2 * Z \quad (2.54)$$

$$T1 = \begin{bmatrix} R & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & R & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & \\ \vdots & & & I & \\ 0 & & & & \end{bmatrix} \quad (2.55)$$

$$T2 = \begin{bmatrix} R & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & R & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & \\ \vdots & & & I_{3 \times 3} & \\ 0 & & & & \end{bmatrix} \quad (2.56)$$

$$X = T1^{-1} \bar{X} \quad (2.57)$$

$$P = T1^{-1} * \bar{P} * T1^{-1} \quad (2.58)$$

2.7.2 Kayan nokta aritmetiği ve Kahan toplama algoritması

Kayan noktalı sayılar, bilgisayar sistemlerinde sınırlı bellek kapasitesi ve işlemcinin bit genişliği gibi donanımsal kısıtlar altında, gerçek sayıları yalnızca yaklaşık olarak ifade etmek için kullanılan bir sayısal gösterim biçimidir (Lakshmikantham ve Sen 2005, Parhami 2003). IEEE 754 standardına göre kayan noktalı sayılar; işaret (sign), üs (exponent) ve anlamlı kısım (significand) olmak üzere üç temel bileşenden oluşmaktadır. İlgili standart, normalize edilmiş sayıların anlamlı kısım bileşeninin en başında daima bir ‘1’ biti bulunduğunu varsayar ve bu bit tasarruf amacıyla bellekte saklanmaz. Literatürde gizli bit (hidden bit) olarak adlandırılan bu yaklaşım sayesinde, depolanan bit sayısına ek olarak bir bit düzeyinde etkin hassasiyet elde edilir. Örneğin, tek duyarlıklılı veri tipinde anlamlı kısım için bellekte 23 bit ayrılmasına karşın, işlem sırasında kullanılan etkin duyarlılık 24 bit olmaktadır. Farklı kayan noktalı sayı veri tiplerine ait bit dağılımları ve etkin duyarlılık değerleri Çizelge 2.1’de özetlenmiştir (IEEE 754, 2019).

Çizelge 2.1 IEEE 754 standardına göre tek ve çift duyarlıklılı veri tiplerine ait bit sayıları

	Tek Duyarlıklılı Kayan Nokta Veri Tipi	Çift Duyarlıklılı Kayan Nokta Veri Tipi
İşaret Biti (Sign)	1	1
Üs Alanı (Exponent)	8	11
Saklanan Kesir Alanı (Fraction)	23	52
Etkin Duyarlılık (Precision, p)	24 (1 gizli bit dahil)	53 (1 gizli bit dahil)
Toplam Bit Genişliği	32	64

Veri tipleri arasındaki bu yapısal farklılıklar, sadece elde edilen doğruluk oranını değil, aynı zamanda işlemci üzerindeki hesaplama yükünü ve bellek kullanım maliyetlerini de doğrudan etkilemektedir. Hesaplama maliyetleri ve işlem süreleri incelendiğinde; tek duyarlıklılı veri tipi (32-bit) aritmetiği, modern işlemcilerde (özellikle Intel KNL mimarisinde) çift duyarlıklılı veri tipi (64-bit) aritmetiğine kıyasla 2 kata kadar hız artışı sağlamak ve enerji tüketimini yarı yarıya azaltmaktadır. GPU donanımlarında (NVIDIA V100) ise bu verimlilik farkı, Tensör Çekirdekleri (Tensor Cores) teknolojisi kullanılarak

4 kat hızla ve %80'in üzerinde enerji tasarrufuna kadar çıkarılabilmektedir. Karışık hassasiyetli (mixed-precision) işlemleri hızlandırmak için özel olarak tasarlanan bu çekirdeklerin, çarpma işlemini 16 bit çözünürlüğe sahip kayan nokta veri tipiyle gerçekleştirirken toplama işlemini tek duyarlıklı (32 bit) veri tipiyle yaptığı, böylece hem işlem hızını artırdığı hem de doğruluğu koruduğu belirtilmektedir (Haidar vd. 2018).

Gerçek sayıların sonlu bit genişliğine sahip bir biçimde bilgisayar ortamında temsil edilmesi, toplama, çıkarma, çarpma ve bölme gibi kayan noktalı aritmetik işlemlerinde kaçınılmaz olarak yuvarlama hatalarının ortaya çıkmasına yol açmaktadır (Goldberg, D. 1991). Gerçekleştirilen aritmetik işlemler için kayan nokta aritmetiğinden kaynaklanan hata, eşitlik (2.59)'da gösterildiği şekilde ifade edilmektedir (Higham 1993). İlgili eşitlikte u , anlamlı kısma ait bit çözünürlüğü ifade etmekte olup, tek duyarlıklı kayan noktalı aritmetikte bu değer 2^{-23} (yaklaşık 1.1920929^{-7}) değerine ve çift duyarlıklı kayan noktalı aritmetikte bu değer 2^{-52} (yaklaşık 2.2204^{-16}) karşılık gelmektedir.

$$(x \text{ op } y) = (x \text{ op } y)(1 + \delta), \quad |\delta| \leq u, \quad \text{op} = +, -, *, / \quad (2.59)$$

Tez çalışması kapsamında geliştirilen ANS algoritmasının mekanizasyon bloğunda, pozisyon, hız ve yönelim çıktıları her zaman adımında yinelemeli toplama işlemleriyle güncellendiğinden, özellikle toplama işleminden kaynaklanan kayan noktalı aritmetik hataları kritik hale gelmektedir. Literatür incelendiğinde, Klein (2006) tarafından gerçekleştirilen çalışmada, kayan noktalı aritmetik ile n kez toplama işlemi yapıldığında, hesaplanan sayı ile $(\sum_{k=1}^n x_k)$ ile gerçek sayı (s) arasındaki hata, Eşitlik (2.60)'da gösterildiği şekilde modellenmektedir. Bu modele göre, toplama işlemine ilk dahil edilen sayılar, hatayı en çok büyüten sayılardır. Çünkü dizinin başındaki ilk sayı, döngü tamamlanana kadar her adımda tekrar işleme girmekte ve her seferinde üzerine yeni bir yuvarlama hatası eklenmektedir. Bu modele göre, işleme dahil edilen sayı adedi (n) ne kadar büyükse, toplam hata da o oranda artış göstermektedir. Aynı çalışmada, nihai toplamdaki bu hatayı minimize etmek için Kahan toplama algoritması gibi hatayı telafi eden algoritmalar önerilmektedir.

$$\left| s - \sum_{k=1}^n x_k \right| \leq \epsilon \left[(n-1)|x_1| + \sum_{i=2}^n (n-i+1)|x_i| \right], \quad \epsilon = 2^{-23}. \quad (2.60)$$

Kayan noktalı aritmetikte kullanılan Kahan toplama algoritması, toplama işlemlerindeki yuvarlama hatalarını azaltarak hesaplama doğruluğunu artırmayı amaçlamaktadır. Algoritmanın yaklaşımı, aritmetik işlemler sırasında kaybolan hassasiyetin hesaplama sürecine geri kazandırılması fikrine dayanmaktadır. Bu fikir ilk olarak 1951’de Gill tarafından sabit noktalı aritmetik için önerilmiş, daha sonra Kahan ve Moller tarafından kayan noktalı aritmetiğe uyarlanmıştır (Higham 1993).

Goldberg’e (1991) göre, Kahan toplama algoritması, kayan noktalı aritmetikte toplama işlemleri sırasında kaybolan düşük anlamlı bitleri telafi etmek amacıyla her adımda ortaya çıkan yuvarlama hatasını yakalayıp bir sonraki adıma geri besleyen bir mekanizma üzerine kuruludur. Özel bir donanım mimarisi gerektirmeyen bu yöntem, yalnızca standart aritmetik işlemlere dayanan tamamen hesaplamalı bir çözümdür. Algoritmaya ait sözde kod ise Çizelge 2.2’de gösterilmektedir (Goldberg 1991).

Algoritmaya ait sözde koda (Çizelge 2.2) göre algoritma, her yinelemede bir önceki adımdan arta kalan hata payını (C) telafi etme prensibine dayanır. Döngü içerisinde öncelikle, o anki sayıdan (X[j]) önceki hatanın çıkarılmasıyla düzeltilmiş terim (Y) elde edilir (Satır 4). Ardından, bu düzeltilmiş terim mevcut toplama eklenerek geçici bir toplam değeri (T) hesaplanır (Satır 5). Takip eden adımda (Satır 6), algoritmanın hata düzeltme mekanizması devreye girerek,

$$C = (T - S) - Y \quad (2.61)$$

işlemi gerçekleştirilir. Bu işlem; analitik cebirde sıfıra eşit olması beklenirken, sonlu hassasiyetli bilgisayar aritmetiğinde, 5. satırdaki toplama işlemi sırasında ana toplama (S) sığmayarak toplama sırasında kaybolan düşük anlamlı bitlerin C değişkeninde saklanmasını sağlar. Bu sayede, kayıt altına alınan düzeltme değeri, bir sonraki yineleme

adımında hatayı telafi etmek üzere kullanılır ve döngü, ana toplamın (S) güncellenmesiyle tamamlanır (Satır 7).

Kahan toplama algoritmasının etkinliğine dair yapılan teorik analizlerde, Klein (2006) ve Goldberg (1991); yinelemeli toplama süreçlerinin sonucunda ulaşılan ana toplamın (S), Eşitlik (2.62)'de belirtilen teorik hata sınırlarını aşmadığını göstermektedir. Bu yöntem sayesinde, standart toplama hatasının (Eşitlik (2.60)) aksine, toplam hata, yapılan işlem sayısından (n) bağımsız olarak hesaplanmaktadır. Her yinelemede terimlere yansıyan bağıl hata 2ϵ değerinden küçüktür. Formüldeki $O(n\epsilon^2)$ terimi ise ihmal edilebilir düzeydedir. Bahsi geçen 2ϵ seviyesindeki bu temel hata sınırı, Kahan toplama algoritmasının işleyişindeki düzeltme ve ana toplama adımlarında gerçekleşen yuvarlama işlemlerinden kaynaklanmaktadır.

$$s \leq \sum_{k=1}^n x_k(1 + \delta_k) + O(n\epsilon^2), \quad |\delta_k| \leq 2\epsilon, \quad \epsilon = 2^{-23} \quad (2.62)$$

Algoritmanın hesaplama karmaşıklığı ile modern donanım mimarileri arasındaki ilişki değerlendirildiğinde; düşük hassasiyetli formatlarda yüksek doğruluk elde etmek amacıyla kullanılan Kahan toplama algoritması, standart toplama işlemine kıyasla işlemci üzerinde dört kat daha fazla aritmetik operasyon gerektirmektedir. Ancak Haidar vd. (2018), modern sistemlerin performansının genellikle işlemci hızından ziyade bellek bant genişliği ile sınırlandığını (memory-bound) belirtmektedir. Bu nedenle, veri boyutunu küçülterek (FP64 yerine FP32) bant genişliğinden tasarruf etmek ve işlemci üzerinde ek hesaplama yapmak, toplam işlem süresi ve enerji maliyeti açısından saf 64-bit hesaplamalara kıyasla daha avantajlı ve verimli bir strateji sunmaktadır.

Çizelge 2.2 Kahan toplama algoritması sözde kodu

Algoritma: Kahan Toplama Algoritması

Girdi: N adet kayan noktalı sayıdan oluşan dizi $X[1 \dots N]$

Çıktı: Kayan nokta aritmetiğinde yuvarlama hatası azaltılmış toplam (S)

- 1: $S \leftarrow X[1]$ ▸ Toplam değişkenini dizinin ilk elemanı ile başlat
 - 2: $C \leftarrow 0$ ▸ Yuvarlama hatalarını tutacak telafi terimini sıfırla
 - 3: **for** $j \leftarrow 2$ to N **do** ▸ 2. elemandan N. elemana kadar tüm sayıları sırayla işle
 - 4: $Y \leftarrow X[j] - C$ ▸ Önceki adımda biriken hatayı (C), yeni terimden çıkararak düzeltilmiş terim Y'yi hesapla
 - 5: $T \leftarrow S + Y$ ▸ Mevcut toplam (S) ile düzeltilmiş terim Y'yi toplayıp geçici toplam T'yi hesapla
 - 6: $C \leftarrow (T - S) - Y$ ▸ Toplamada oluşan yeni yuvarlama hatasını ayıkla ve C'ye kaydet
 - 7: $S \leftarrow T$ ▸ Geçerli toplamı (S), yeni toplam T ile güncelle
 - 8: **end for** ▸ Tüm elemanlar toplanınca döngü biter
 - 9: **return** S ▸ Kahan ile düzeltilmiş nihai toplamı döndür
 - 11: **end** ▸ Algoritma sonu
-
-

2.7.3 Sayısal çözünürlük sınırları ve nicemleme gürültüsü

Sayısal hesaplamalarda kullanılan veri tipleri, özellikle hassasiyetin kritik olduğu ANS ve kestirim algoritmalarında, sonuçların doğruluğunu doğrudan etkileyen temel unsurlardan biridir. IEEE 754 (2019) standardına göre, çift duyarlıklılı veri tipi, tek duyarlıklılıya kıyasla çok daha küçük sayıları temsil edebilme yeteneğine sahip olduğundan, yüksek doğruluk gerektiren uygulamalarda sıklıkla tercih edilmektedir. Tek duyarlıklılı çözünürlükte kesir 23 bit ile ifade edilir ve bu da yaklaşık olarak 1.1921×10^{-7} çözünürlüğe karşılık gelmektedir.

Groves'a (2013) göre, Kalman filtresinin sayısal ortamlarda uygulanmasında çözünürlük seviyesi önemli bir faktördür. Kullanılan veri tipinin (tek ya da çift duyarlıklılı) hassasiyet düzeyi, filtre performansını doğrudan etkiler. Tek duyarlıklılı (32-bit) hesaplamalar, yuvarlama hatalarına daha yatkın olup, uzun süreli filtre uygulamalarında hata kovaryans

matrisinin (P) kararlılığını bozabilir. Bu bozulmalar, matrisin simetrisinin kaybı veya fiziksel olarak geçerli olmayan negatif değerlere yol açabilir. Bu durum Kalman kazanç matrisi (K) üzerinde olumsuz etki yaratarak, filtre kestirimlerini dengesizleştirir ve algoritmanın kararlılığını düşürür. Çift duyarlıklı (64-bit) hesaplamalar kullanılarak bu olumsuz etkiler önemli ölçüde azaltılabilir.

Donanım üzerinde geliştirilen ANS/KKBS algoritmalarında kullanılan veri tiplerinin farklı çözünürlük seviyeleri, kaçınılmaz olarak nicemleme hatasına sebep olmaktadır. Nicemleme hatası, sürekli değer alan bir sinyalin ya da hesaplama sonucu oluşan sayıların, sınırlı bit uzunluğunda temsil edilmesi nedeniyle ortaya çıkan fark olarak tanımlanmaktadır (Wong 1990). Literatürde, bu hata türünün genellikle sıfır ortalamalı ve düzgün (uniform) dağılıma sahip beyaz gürültü olarak modellendiği yer almaktadır (Wong 1990, Han ve Wang 2011). Han ve Wang (2011) tarafından yapılan çalışmada, ANS sistemlerinin hata dinamikleri, nicemleme gürültüsünü ek sürüş gürültüsü olarak varsayıp, sistem modelleri bu gürültüyü içerecek şekilde modifiye edilmiştir. Bhaskara vd. (2024) ise bu hataların durum kestirimine etkisini azaltmak için Kalman filtresi gibi durum kestirim algoritmalarının yeniden yapılandırılmasını önermektedir. Ayrıca, nicemleme hatasının güç spektral yoğunluğunun (PSD) sabit olması ve belirli bir bant genişliği içerisinde beyaz gürültü olarak davranması, sistemin filtreleme performansına yönelik tasarımlarda kritik bir faktör olarak göz önüne alınmalıdır (Han ve Wang 2011, Wong 1990). Sonuç olarak, nicemleme hatasının istatistiksel ve spektral özelliklerinin doğru biçimde modellenmesi, özellikle gömülü sistemlerde veya sınırlı hesaplama kaynaklarına sahip donanımlarda çalışan ANS/KKBS algoritmalarının performansı açısından büyük önem taşımaktadır.

Bu tez kapsamında, nicemleme gürültüsü; sıfır ortalamalı, düzgün (uniform) dağılımlı ve beyaz özellikte bir gürültü olarak kabul edilecek ve sistem modeline toplanan bir gürültü (additive noise) bileşeni şeklinde dahil edilecektir.

3. MATERİYAL VE YÖNTEM

3.1 ANS

Ataletsel Navigasyon Sistemi (ANS), ataletsel ölçüm biriminden alınan ivme ve açısal hız verilerini kullanarak platformun üç boyutlu uzaydaki pozisyon, hız ve yönelimini belirleyen bağımsız bir navigasyon sistemidir (Sirikonda ve Parayitam 2021, Ahmed vd. 2019). Hesaplama süreci ardışık adımlardan oluşur: her zaman adımında, öncelikle ivmeölçer ve dönüölçerlerden ölçümler elde edilir; bu ölçümler, sensör yanlışlıkları, ölçek faktörü hataları, hizalama hataları ve rastgele gürültü gibi bilinen hata kaynaklarından arındırılır. Ardından, mekanizasyon denklemleri uygulanarak sistemin kinematik büyüklükleri, yani pozisyon, hız ve yönelim hesaplanır. Bu süreçte hız için bir kez, pozisyon için ise iki kez integral alma işlemi gerçekleştirilirken; yönelim güncellemeleri açısal hızların bir kez integral alma işlemiyle gerçekleştirilir.

ANS çözümünün doğruluğu yalnızca sensör kalitesiyle değil, aynı zamanda başlangıç hizalamasının (initial alignment) hassasiyetiyle doğrudan ilişkilidir. Gerçek uygulamalarda, platform hareketsizken veya belirli kalibrasyon manevraları sırasında yuvarlanma, yunuslama ve sapma açıları belirlenerek başlangıç yönelimi hesaplanır ve sensörlere özgü yanlışlık ile ölçek faktörü hataları kalibre edilir. Bu adımlar, özellikle düşük maliyetli MEMS tabanlı AÖB’lerde uzun vadeli doğruluğu artırmak açısından kritik öneme sahiptir. Ancak bu çalışmada sentetik veri kullanıldığından, gerçek bir başlangıç hizalaması veya kalibrasyon algoritması uygulanmamaktadır; başlangıç koşulları simülasyon ortamında istenilen şekilde hatasız olarak tanımlanabilmektedir (Nebot ve Durrant-Whyte 1998, Kim ve Kweon. 2018).

3.1.1 Sensör verilerinde yanlışlık, ölçek faktörü ve gürültü düzeltmeleri

Daha önceki bölümlerde ayrıntılı olarak ele alındığı üzere, ivmeölçer ve dönüölçer sensörlerinden oluşan AÖB ölçümleri; yanlışlık, ölçek faktörü hatası ve eksen kaçıklığı gibi çeşitli hata parametrelerinden etkilenmektedir. Bu hatalar, ölçümlerde sistematik

sapmalara ve rastgele gürültü artışına neden olarak, ANS çıktılarının (pozisyon, hız ve yönelim) doğruluğunu ciddi şekilde düşürmektedir. Bu hataların etkilerini azaltmak ve navigasyon çözümünün kalitesini artırmak amacıyla hata düzeltme modelleri araştırılmakta ve uygulanmaktadır (Ünsal ve Demirbaş 2012). Bu modeller, Kalman filtresi gibi kestirim algoritmaları kullanarak her ölçüm periyodunda hataları tahmin eder ve bunları sensör verilerinden çıkarır. Böylece ölçüm doğruluğu artırılmakta, mekanizasyon hesaplamalarına daha güvenilir ve tutarlı veri sağlanmakta, nihai navigasyon çözümünün doğruluk seviyesi yükseltilmektedir.

Gerçek uygulamalarda deterministik AÖB hatalarına ilişkin parametreler genellikle cihazların veri sayfalarında sunulmaktadır. Buna karşılık rastgele hatalar, literatürde önerilen modellerle temsil edilmekte ve Kalman filtresiyle her güncelleme zamanında tahmin edilerek ölçümlerden arındırılmaktadır. İvme ve açısal hız ölçümleri, bölüm 2.4.3'te yer alan eşitlik (2.16) ve (2.17)'de verilen modeller aracılığıyla temsil edilmekte ve bu eşitlikler kullanılarak sensör ekseninde düzeltme işlemleri gerçekleştirilmektedir (Ünsal ve Demirbaş 2012). Düzeltilmiş AÖB ölçümleri ise platform eksenine çevrilerek mekanizasyon hesaplamalarına girdi sağlamaktadır.

3.1.2 ANS mekanizasyon

ANS mekanizasyon denklemleri, AÖB aracılığıyla elde edilen ivme ve dönüölçer verilerini kullanarak; coğrafi referans çerçevesinde, AÖB'nin takılı olduğu araç için pozisyon (Enlem, Boylam ve Yükseklik), hız (Kuzey, Doğu ve Aşağı hızları) ve yönelim (Yuvarlanma, Yunuslama ve Sapma) hesaplamaları yapmaya olanak sağlamaktadır.

Bölüm 2.5'te, bu hesaplamaların temelini oluşturan kinematik denklemler ve teorik altyapı detaylandırılmıştır. Bu bölümde ise, söz konusu teorik denklemlerin ayrık zamanlı sayısal sistemde nasıl uygulandığı ele alınacaktır. Her bir örnekleme adımında ($dt = 0.01 \text{ sn}$), sensörlerden gelen ölçümlerin ve bir önceki adımdan elde edilen durum vektörünün; pozisyon, hız ve yönelim güncellemeleri için nasıl entegre edildiği aşağıda sunulmuştur.

Mekanizasyon algoritması yürütülürken; Bölüm 2.5'te türetilen diferansiyel denklemler kullanılarak o anki ivme ve hız durumuna karşılık gelen değişim oranları (türevler) hesaplanır. Elde edilen bu değişimler, aşağıda verilen eşitlik (3.1), (3.3) ve (3.7) aracılığıyla sayısal olarak entegre edilir ve sistemin yeni durumu belirlenir (Farrell, 2008).

$$\begin{bmatrix} \phi \\ \lambda \\ h \end{bmatrix}_k = \begin{bmatrix} \phi \\ \lambda \\ h \end{bmatrix}_{k-1} + \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\lambda} \\ \dot{h} \end{bmatrix} \cdot dt \quad (3.1)$$

$$\omega_{ei} = 15 \text{ } ^\circ/\text{saat} = \text{radyan} \left(\frac{15^\circ}{3600 \text{ sn}} \right) = 7.2722 \times 10^{-5} \text{ rad/sn} \quad (3.2)$$

$$\begin{bmatrix} \hat{v}_n \\ \hat{v}_e \\ \hat{v}_d \end{bmatrix}_k = \begin{bmatrix} \hat{v}_n \\ \hat{v}_e \\ \hat{v}_d \end{bmatrix}_{k-1} + \begin{bmatrix} \dot{\hat{v}}_n \\ \dot{\hat{v}}_e \\ \dot{\hat{v}}_d \end{bmatrix} \cdot dt \quad (3.3)$$

$$\omega_{in}^n = \omega_{en}^n + \omega_{ie}^n$$

$$(\omega_{in}^b = \hat{R}_b^n \omega_{in}^n). \quad (3.4)$$

$$\theta_{bnb} = (\omega_{ib}^b - \omega_{in}^b) dt \quad (3.5)$$

$$\theta = \sqrt{\theta_{bnb_x}^2 + \theta_{bnb_y}^2 + \theta_{bnb_z}^2} \quad (3.6)$$

$$R_{b_k}^n = R_{b_{k-1}}^n \left(I + \frac{\sin(\theta)}{\theta} S + \frac{1-\cos(\theta)}{\theta^2} S^2 \right), \quad (3.7)$$

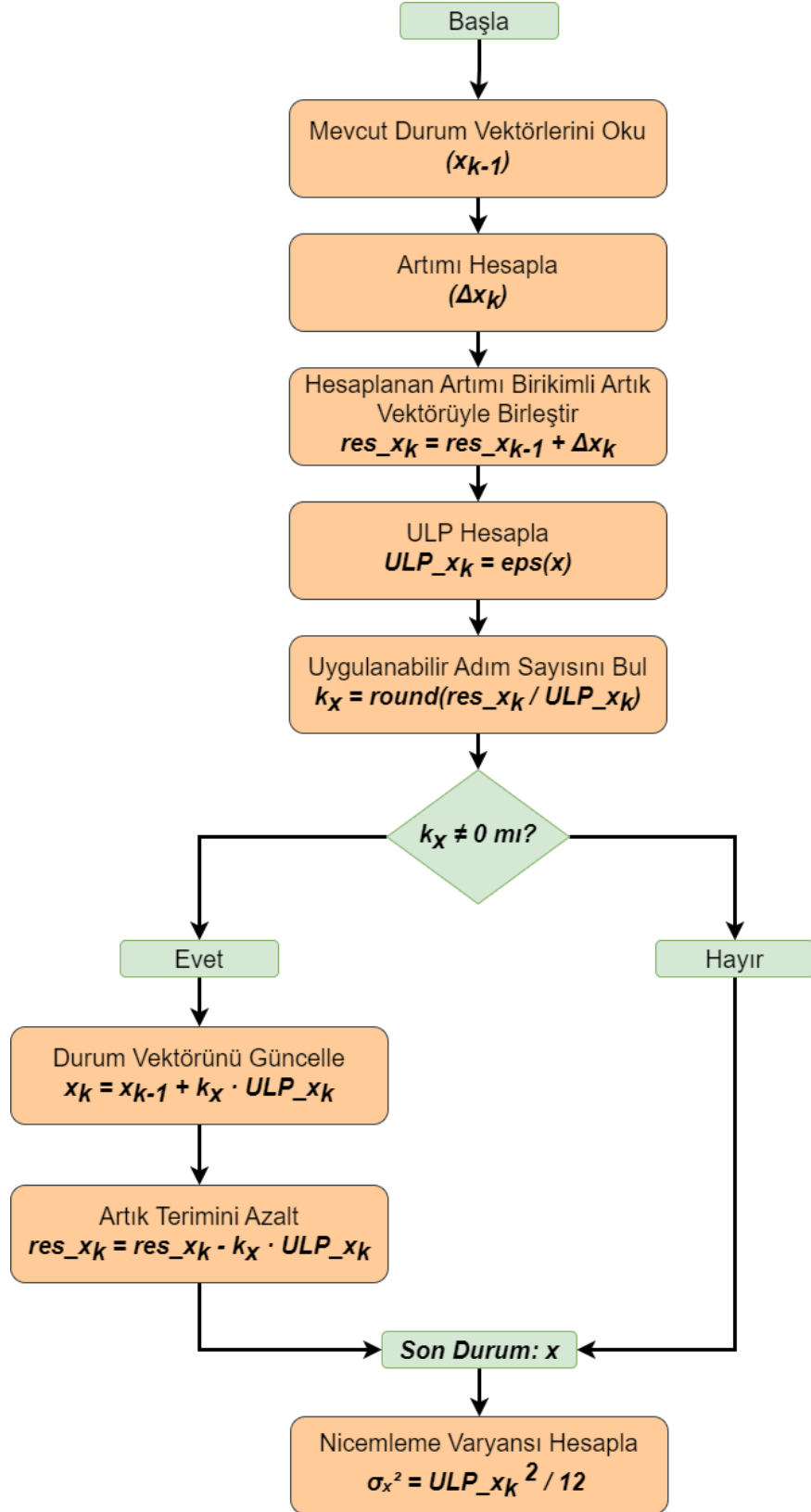
S : θ_{bnb} açısı vektörünün çarpık simetrik matris formudur.

Hem tek hem de çift duyarlılıklı veri tipleriyle yürütülen bu süreçte; olası bilgi kayıplarını minimize etmek adına, Bölüm 2.7.2'te açıklanan ve bir sayısal iyileştirme yöntemi olan Kahan toplama algoritması uygulanmıştır.

3.1.3 Kahan toplama algoritmasının mekanizasyon sürecine uygulanması

Bu bölümde, kayan noktalı sayı aritmetiğinin kullanımından doğan çözünürlük kısıtlamalarını ve buna bağlı bilgi kayıplarını azaltmak için kullanılan Kahan toplama algoritmasının, ANS mekanizasyon denklemlerine uygulanışı detaylandırılacaktır.

Bölüm 2.7.2’te Kahan toplama algoritması ile ilgili genel bir çerçeve sunulmuştur. Benzer biçimde, aynı prensip mekanizasyon sürecinde mevcut pozisyon, hız ve yönelim bileşenlerine eklenen artımlar sonucunda oluşabilecek bilgi kaybını en aza indirmek amacıyla uygulanmıştır. Şekil 3.1 incelendiğinde, mekanizasyon sürecine uygulanan algoritmanın standart yapıdan bazı farklılıklar içerdiği görülmektedir. Algoritma, ANS mekanizasyon denklemlerine uygulanırken; artımları doğrudan eklemek yerine bir hata havuzunda biriktirmekte ve ana durum değişkenini sadece anlamlı bir büyüklüğe (makine epsilon) ulaştığında güncellemektedir. Bu modifikasyonun amacı, sayısal entegrasyon hatalarını sınırlandırmak ve güncelleme adımını kontrollü bir niceleme mantığıyla gerçekleştirmektir.



Şekil 3.1 Mekanizasyon sürecinde uygulanan Kahan toplama algoritmasına ait akış şeması

Pozisyon güncellemesi kapsamında bu süreci ele alacak olursak, ilk olarak; bölüm 2.5’te bulunan mekanizasyon denklemleri kullanılarak mevcut pozisyon bileşenlerine (enlem, boylam ve yükseklik) eklenecek pozisyon artımı,

$$\Delta_{xk} = \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\lambda} \\ \dot{h} \end{bmatrix} \cdot dt \quad (3.8)$$

ile hesaplanmakta ve bu artım bir önceki zaman adımından taşınan kalıcı (persistent) artık vektörüne eklenmektedir. Daha sonra, güncel enlem, boylam ve yükseklik değerleri esas alınarak, söz konusu bileşenlerin sayısal gösterimindeki en küçük anlamlı değişim değeri (ULP, Unit in Last Place);

$$ULP_{x_k} = 2^{(floor(\log_2|\Delta_{xk}|)-p)} \quad (3.9)$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} p = 23, & \text{Tek Duyarlıklılı Veri Tipi} \\ p = 52, & \text{Çift Duyarlıklılı Veri Tipi} \end{array} \right\}$$

ile hesaplanmaktadır. Biriken artık miktarı, ULP_{x_k} değerine oranlanarak uygulanabilir adım sayısı elde edilmekte; bu sayı tam sayıya yuvarlanarak o anda pozisyon değişkenine aktarılabilir kesin artış miktarı belirlenmektedir. Hesaplanan adım sayısı sıfırdan büyük olduğunda pozisyon bileşenleri güncellenmekte ve ilgili miktar artık vektöründen çıkarılmaktadır. Buna karşın, hesaplanan adım sayısının sıfır olması durumunda, pozisyon üzerinde herhangi bir güncelleme yapılmaz.

Hız bileşenlerinin (V_N , V_E ve V_D) güncellemesi aşamasında ise pozisyon için uygulanan yöntem aynen uygulanmıştır. Hız artımı (ΔV),

$$\Delta_{xk} = \begin{bmatrix} \dot{v}_n \\ \dot{v}_e \\ \dot{v}_d \end{bmatrix} \cdot dt \quad (3.10)$$

şeklinde hesaplandıktan sonra kalıcı artık vektörüne eklenmekte; ardından, ilgili hız bileşenine ait en küçük anlamlı değişim değeri (ULP) yine eşitlik (3.9) kullanılarak hesaplanmaktadır. Sonrasında, biriken artık miktarı, ULP_{x_k} değerine oranlanarak uygulanabilir adım sayısı elde edilir, bu sayı tam sayıya yuvarlanarak o anda hız değişkenine aktarılabilecek kesin artış miktarı belirlenmektedir.

Son olarak, yönelim bileşenlerinin (yuvarlanma, yunuslama ve sapma) güncellemesinde de pozisyon ve hız bileşenlerinde kullanılan yöntem uygulanmış; ancak yönelimin matris ile temsil edilmesi nedeniyle süreç kısmen farklı bir yapıda gerçekleştirilmiştir. İlk olarak, dönüölçer ölçümleri ve navigasyon çerçevesinin açısal hızları kullanılarak anlık yönelim artımı eşitlik (3.5)'da gösterildiği gibi hesaplanmaktadır. Hesaplanan bu artım, kayan noktalı aritmetiğin sınırlı çözünürlüğü nedeniyle oluşabilecek bilgi kaybını önlemek amacıyla, yönelim güncellemesi için tanımlanan kalıcı artık vektöründe biriktirilmektedir. Her bir yönelim bileşeni için en küçük anlamlı değişim değeri (ULP_{x_k}), Eşitlik (3.9)'da tanımlanan yöntem izlenerek, yönelimi temsil eden DCM matrisinin (R_b^n) her bir elemanının çözünürlük sınırları üzerinden belirlenmekte; her satırdaki en büyük ULP_{x_k} değeri, bileşenin temsil hassasiyetini tanımlamak üzere seçilmektedir. Ardından, biriken artık miktarının bu ULP_{x_k} değerine oranlanmasıyla uygulanabilir adım sayısı hesaplanmaktadır. Hesaplanan adım sayısının 0'dan farklı olması durumunda; adım katsayısı ile ULP_{x_k} değerinin çarpımı, açısal artım vektörünün (θ_{bnb}) ilgili bileşenine atanmaktadır. Adım sayısının 0 olması durumunda ise θ_{bnb} bileşeni 0'a eşitlenerek, ilgili zaman adımı için o ekseninde herhangi bir yönelim güncellemesi gerçekleştirilmemektedir.

Son olarak, hem pozisyon, hem hız, hem de yönelim güncellemelerinde Kalman filtresine nicemeleme varyansı girdisi sağlamak adına, her mekanizasyon adımında eşitlik (3.11) kullanılarak nicemeleme kaynaklı varyans değeri hesaplanmaktadır.

$$\sigma_{niceleme}^2 = \frac{ULP_{x_k}^2}{12} \quad (3.11)$$

3.1.4 Yönelim hesaplama

Mekanizasyon algoritması, sayısal entegrasyon sürecinde kararlılığı sağlamak ve tekillik (singularity) sorunlarından kaçınmak amacıyla yönelim takibini genellikle Yönelim Kosinüs Matrisi (DCM) veya Dördeyler (Kuaterniyonlar) üzerinden yürütür (Noureldin vd. 2013). Ancak, elde edilen bu matris formatı, bir pilotun veya otonom kontrol sisteminin aracın durumunu algılaması için sezgisel değildir. Bu nedenle, her güncelleme adımının sonunda güncellenmiş DCM (R_b^n) üzerinden; aracın Yuvarlanma (Roll), Yunuslama (Pitch) ve Sapma (Yaw) bilgilerini içeren “Euler” açıları geri kazandırılır.

Mekanizasyon hesaplamaları sonucunda güncellenmiş DCM matrisi üzerinden, platformun “Euler” açıları eşitlik (3.12), (3.13) ve (3.14)’de verilen ifadeler kullanılarak hesaplanmaktadır (Titterton ve Weston 2004).

$$Yuvarlanma (Roll) = \tan^{-1} \left(\frac{R_b^n(3,2)}{R_b^n(3,3)} \right) \quad (3.12)$$

$$Yunuslama (Pitch) = \sin^{-1}(-R_b^n(3,1)) \quad (3.13)$$

$$Sapma (Yaw) = \tan^{-1} \left(\frac{R_b^n(2,1)}{R_b^n(1,1)} \right) \quad (3.14)$$

Burada $R_b^n(i, j)$, gövde ekseninden navigasyon eksenine dönüşüm matrisinin i. satır ve j. sütunundaki elemanı temsil eder.

3.2 ANS/KKBS Entegrasyonu

ANS ve KKBS sistemleri, birbirlerinden farklı ve tamamlayıcı karakteristik özelliklere sahiptir. ANS, dış referansa ihtiyaç duymayan, saniyede 200 Hz’in üzerinde ölçüm sıklığı sunabilen ve kısa vadede yüksek doğruluk sağlayan özerk bir navigasyon sistemidir. Ancak ANS algoritması, doğası gereği ivme ve açısal hız verilerinin integralini alarak ilerlediği için; sensör çıktılarındaki küçük hata payları integral işlemi sonucunda zamanla büyüyerek pozisyon, hız ve yönelim doğruluğunu bozmaktadır. Buna karşılık KKBS,

uzun vadede metre seviyesinde doğruluğa sahip düşük maliyetli navigasyon çözümleri sunabilmekle birlikte, kısa vadede doğruluğu zayıftır ve ölçüm sıklığı düşüktür. Ayrıca KKBS, uydu sinyallerinin binalar, tüneller veya atmosfer koşullarından dolayı engellenebildiği durumlarda kesintiye uğrayabilir. Bu iki sistemin avantajlı özelliklerinin birleştirilmesi ile oluşturulan ANS/KKBS entegrasyonu, her bir sistemin ayrı ayrı sunabileceği doğruluk ve dayanıklılık seviyesinin ötesinde, kısa ve uzun vadede daha güvenilir ve sürekli navigasyon çözümleri sağlamaktadır. Entegrasyon süreci genellikle Kalman filtresi tabanlı optimal kestirim yöntemleriyle gerçekleştirilmekte ve sonuç olarak pozisyon, hız ve yönelim bilgilerinin doğruluğu artırılırken, KKBS sinyal kesintileri sırasında ANS çözümünün sürekliliği de korunmuş olur (Noureldin vd. 2013).

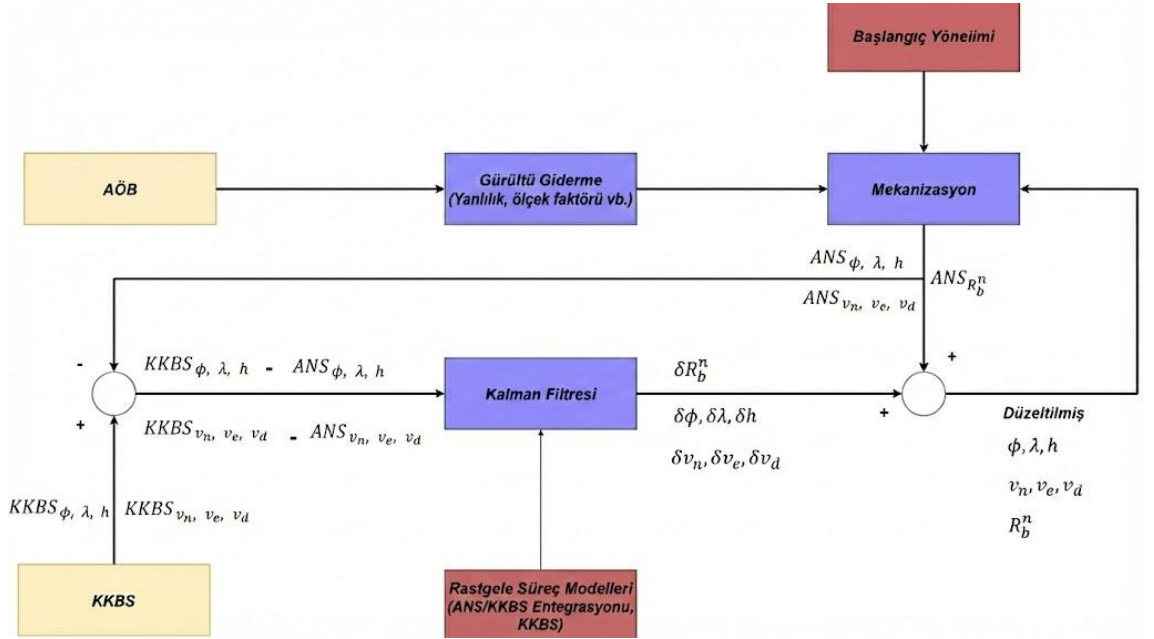
Literatürde, ANS/KKBS entegrasyonuna yönelik çeşitli mimariler geliştirilmiş olup, bunlar temel olarak kullanılan veri türüne göre sınıflandırılmaktadır. Genel yaklaşımda, bağımsız (uncoupled), gevşek bağlı (loosely coupled), sıkı bağlı (tightly coupled) ve derin bağlı (deeply coupled) olmak üzere dört ana entegrasyon yöntemi tanımlanır. Kullanıcı düzeyindeki uygulamalarda en yaygın kullanılanlar ise gevşek bağlı ve sıkı bağlı mimarilerdir (Güreş 2019).

Gevşek bağlı entegrasyon, ANS ve KKBS'nin birbirinden bağımsız şekilde çalışarak ayrı navigasyon çözümleri üretmesi prensibine dayanır. Bu iki çözüm, genellikle Kalman filtresi gibi bir kestirim algoritması yardımıyla birleştirilir. KKBS'den elde edilen konum veya hız bilgileri, ANS çıktıları ile karşılaştırılır; böylece sistemdeki hatalar tahmin edilerek düzeltilir ve sonuçta entegre bir konum, hız ve yönelim çözümü sağlanır. Bu yapıdaki karakteristik özellik, KKBS için ayrıca bir filtre kullanılması ve genel mimarinin ardışık (cascaded) bir yapıya sahip olmasıdır (Noureldin vd. 2013). Uygulama kolaylığı ve sağlamlık avantajları bulunmakla birlikte, uyduların sayısı kritik seviyenin altına düştüğünde sistem performansı ciddi şekilde etkilenebilir (Noureldin vd. 2013, Cossaboom vd. 2012).

Sıkı bağlı entegrasyon ise merkezi mimaride tasarlanır ve tek bir ana filtre kullanır. Bu yaklaşımda, KKBS'nin sözde mesafe (pseudo-range) ve mesafe hızı ölçümleri (pseudo-range rate), ANS tarafından öngörülen değerlerle birlikte filtreye girer; filtre, bu verileri

işleyerek ANS hatalarını tahmin eder ve düzeltir. Böylece birleşik navigasyon çözümü elde edilir. Sıkı bağlı yapı, özellikle zorlu çevresel koşullarda ve dörtten az uydu görülebilen durumlarda bile KKBS güncellemeleri sağlaması bakımından önemlidir (Noureldin vd. 2013, Cossaboom vd. 2012). Bu özellik, kentsel alanlar, sık orman örtüsü veya engebeli arazilerde kullanımı avantajlı kılar. Ayrıca, gevşek bağlı mimaride görülen ölçüm korelasyonu sorunlarının, sıkı bağlı yapı sayesinde minimize edilebildiği bilinmektedir (Noureldin vd. 2013).

ANS/KKBS entegrasyonunda kullanılan mimarilerde kestirilen hataların ANS'ye geri beslenme duruma göre açık döngü ve kapalı döngü yapılar mevcuttur (Güreş 2019). Bu tez çalışması kapsamında, gevşek bağlı kapalı döngü entegrasyon mimarisi kullanılacaktır. Şekil 3.2'de tez kapsamında geliştirilen ANS/KKBS entegrasyonuna ait blok şemayı göstermektedir.



Şekil 3.2 Kapalı döngü ve gevşek bağlı ANS/KKBS entegrasyonu bloğu

Bu başlık altında yer alan alt başlıklarda tez kapsamında önerilen ANS/KKBS entegrasyon mimarisine ait yöntemler ve algoritmalar detaylı bir şekilde sunulacaktır.

3.2.1 Hata kestirimi: sistem modeli

Entegrasyon algoritmasında kullanılan Kalman filtresinde, sistem durum vektörünün ve hata kovaryans matrisinin bir sonraki zaman adımında nasıl değişeceğini belirleyebilmek için, bu değişkenlerin zaman içerisindeki evrimlerinin modellenmesi gerekmektedir. Bu bölümde, sistemin durum matrisi modeli tanımlanacak ve ilgili denklemler aracılığıyla modele ait kovaryans matrisinin nasıl elde edildiği açıklanacaktır.

Yüksek lisans tezi kapsamında geliştirilen entegrasyon algoritmasında, durum uzay matrisi ANS hata parametrelerini ve sensör çıktılarına ait yanlışlık kararsızlığı hatasını içermektedir. Algoritmada kullanılan gerçek durum vektörünün zamana bağlı değişimi, eşitlik (3.15)'de verilen formülle ifade edilmektedir.

$$\delta\dot{x}(t) = F(t)\delta x(t) + G(t)w_s(t) + B_q(t)q(t) \quad (3.15)$$

Bu eşitlikte, $\delta x(t)$ gerçek durum uzay vektörünü, $F(t)$ sistem durum geçiş matrisini, $G(t)$ sürekli zaman sistem gürültü dağılım matrisini, $w_s(t)$ sürekli zaman sistem gürültü vektörünü, $q(t)$ sürekli zaman sistem nicemleme gürültü vektörünü ve $B_q(t)$ sürekli zaman nicemleme gürültü dağılım matrisini göstermektedir.

Başlık 2.6.1.1'de Kalman filtresinde zaman güncellemesi adımı sistem modelinin kesikli zamanda nasıl ifade edileceği açıkça belirtilmiştir. Eşitlik (3.16) incelendiğinde sistem modelinin kesikli zamandaki ifadesi ve eşitlik (3.17)'de de modelin açık hali görülmektedir.

$$\delta x_k = \Phi_{k-1}\delta x_{k-1} + \Gamma_{\omega,k-1}w_{s,k-1} + \Gamma_{q,k-1}q_{k-1} \quad (3.16)$$

$$\begin{bmatrix} \delta \dot{p} \\ \delta \dot{v} \\ \dot{\rho} \\ \delta \dot{x}_a \\ \delta \dot{x}_g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{pp} & F_{pv} & F_{p\rho} & 0 & 0 \\ F_{vp} & F_{vv} & F_{v\rho} & -R_b^n F_{va} & 0 \\ F_{\rho p} & F_{\rho v} & F_{\rho\rho} & 0 & R_b^n F_{pg} \\ 0 & 0 & 0 & F_{aa} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & F_{gg} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta p \\ \delta v \\ \rho \\ \delta x_a \\ \delta x_g \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -R_b^n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R_b^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_{3 \times 3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{3 \times 3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_a \\ v_g \\ \omega_a \\ \omega_g \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

$$+ \begin{bmatrix} I_{3 \times 3} & 0 & 0 \\ 0 & I_{3 \times 3} & 0 \\ 0 & 0 & I_{3 \times 3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_p \\ q_v \\ q_\rho \end{bmatrix}$$

3.2.1.1 Sistem geçiş matrisin oluşturulması

Tez alışmaları kapsamında, sistem durum vektörü eşitlik (3.15)'de ifade edilmiştir. Bu durum vektörü; pozisyon, hız ve yönelim hatalarının yanı sıra ivmeölçer ve dönüölçer sensör çıktılarına ait yanlılık kararsızlıklarını da içermektedir. Hata durumlarının zamanla değişimini modelleyen sistem geçiş matrisi (F), Farrell (2008) tarafından önerilen yapı esas alınarak oluşturulmuştur (şekil 3.3). F matrisi içinde belirtilen parametrelerin açık halleri ise eşitlik (3.18)'de açıkça belirtilmiştir. F matrisinin köşegen bloklarında yer alan F_{aa} ve F_{gg} alt matrisleri, sensör yanlılıklarının birinci dereceden Gauss-Markov süreciyle modellenmesini sağlar. Bu matrisler, ilgili sensörlerin korelasyon zaman sabitlerinin negatif tersini ($-1/\tau$) diyagonal elemanlar olarak barındırmaktadır.

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{p_e}{R} & \frac{1}{R} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{p_d}{\cos(Lat)} & 0 & -\frac{p_n}{R \cos(Lat)} & 0 & \frac{1}{R \cos(Lat)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ F_{41} & 0 & F_{43} & k_d & 2\omega_d & -p_e & 0 & f_d & -f_e & -R_{b11}^n & -R_{b12}^n & -R_{b13}^n & 0 & 0 & 0 \\ F_{51} & 0 & F_{53} & F_{54} & F_{55} & F_{56} & -f_d & 0 & f_n & -R_{b21}^n & -R_{b22}^n & -R_{b23}^n & 0 & 0 & 0 \\ -2V_e \Omega_d & 0 & F_{63} & 2p_e & -2\omega_n & 0 & f_e & -f_n & 0 & -R_{b31}^n & -R_{b32}^n & -R_{b33}^n & 0 & 0 & 0 \\ -\Omega_d & 0 & \frac{p_n}{R} & 0 & -\frac{1}{R} & 0 & 0 & \omega_d & -\omega_e & 0 & 0 & 0 & R_{b11}^n & R_{b12}^n & R_{b13}^n \\ 0 & 0 & \frac{p_e}{R} & \frac{1}{R} & 0 & 0 & -\omega_d & 0 & \omega_n & 0 & 0 & 0 & R_{b21}^n & R_{b22}^n & R_{b23}^n \\ F_{91} & 0 & \frac{p_d}{R} & 0 & \frac{\tan(Lat)}{R} & 0 & \omega_e & -\omega_n & 0 & 0 & 0 & 0 & R_{b31}^n & R_{b32}^n & R_{b33}^n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & F_{aa,11} & F_{aa,12} & F_{aa,13} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & F_{aa,21} & F_{aa,22} & F_{aa,23} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & F_{aa,31} & F_{aa,32} & F_{aa,33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & F_{gg,11} & F_{gg,12} & F_{gg,13} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & F_{gg,21} & F_{gg,22} & F_{gg,23} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & F_{gg,31} & F_{gg,32} & F_{gg,33} \end{bmatrix}$$

şekil 3.3 Hata kestiriminde kullanılan durum geiş matrisi (F)

$$\begin{aligned}
\Omega_N &= \omega_{ie} \cos(\phi) \\
\Omega_D &= -\omega_{ie} \sin(\phi) \\
\rho_N &= \frac{v_e}{R_e} \\
\rho_E &= \frac{v_n}{R_e} \\
\rho_D &= \frac{v_e}{R_e} \tan(\phi) \\
\omega_N &= \Omega_N + \rho_N \\
\omega_E &= \rho_E \\
\omega_D &= \Omega_D + \rho_D \\
k_D &= \frac{v_d}{R_e}
\end{aligned}
\tag{3.18}$$

$$\begin{aligned}
F_{41} &= -2\Omega_N v_e - \frac{\rho_N v_e}{\cos^2(\phi)} \\
F_{43} &= \rho_E k_D - \rho_N \rho_D \\
F_{51} &= 2(\Omega_N v_N + \Omega_D v_d) + \frac{\rho_N v_n}{\cos(\phi)^2} \\
F_{53} &= -\rho_E \rho_D - k_D \rho_N \\
F_{54} &= -(\omega_D + \Omega_D) \\
F_{55} &= k_D - \rho_E \tan(\phi) \\
F_{56} &= \omega_N + \Omega_N \\
F_{63} &= \rho_N^2 + \rho_E^2 - \frac{2g}{R_e} \\
F_{91} &= \Omega_N + \frac{\rho_N}{\cos^2(\phi)}
\end{aligned}$$

F matrisinde yer alan R_e terimi Dünya'nın yarıçapını temsil etmekte olup, kara aracı için gerçekleştirilen bu çalışmada sabit bir parametre olarak $R_e = 6378137$ değeri kullanılmıştır. Söz konusu terim yalnızca kesirli ifadelerin paydasında yer aldığı ve zamanla değişmediği için, modelleme sürecinde Dünya yarıçapının sabit bir değer olarak kabul edilmesi yeterli görülmüştür.

3.2.1.2 Süreç gürültü kovaryans matrislerinin oluşturulması

Bu başlık altında sistem modelinde yer alan süreç gürültüsü ve nicemleme gürültüsüne ait kovaryans matrislerinin ($Q_{w,k-1}$ ve $Q_{q,k-1}$) elde edilme aşamaları açıklanacaktır.

Eşitlik (3.16)'de bulunan $\Gamma_{\omega,k-1}$ ve $\Gamma_{q,k-1}$ ifadeleri, kesikli zaman gürültü dağılım matrislerini göstermektedir, bu ifadelerin açık halleri Eşitlik (3.19) ve (3.20)'da bulunmaktadır.

$$\Gamma_{k-1} w_{s,k-1} = \int_{t_k - \tau_s}^{t_k} \exp(F_{k-1}(t_k - t')) G_{k-1} w_s(t') dt' \quad (3.19)$$

$$\Gamma_{q,k-1} q_{k-1} = \int_{t_k - \tau_q}^{t_k} \exp(F_{k-1}(t_k - t')) B_{q,k-1} q(t') dt' \quad (3.20)$$

Olasılık teoriye göre, durum kovaryans matrisini elde etmek için kestirilen durum vektörü $\widehat{\delta x_k} = \Phi_{k-1} \widehat{\delta x_{k-1}^+}$ ve eşitlik (3.16)'de ifade edilen gerçek durum vektörü arasındaki farkın beklenen değeri alınmalıdır (Bar-Shalom 2001).

$$P_{k-1}^+ = E \left[(\widehat{\delta x_{k-1}^+} - \delta x_{k-1}) (\widehat{\delta x_{k-1}^+} - \delta x_{k-1})^\top \right] \quad (3.21)$$

$$P_k^- = E [(\widehat{\delta x_k} - \delta x_k) (\widehat{\delta x_k} - \delta x_k)^\top] \quad (3.22)$$

$$P_k^+ = E \left[(\widehat{\delta x_k^+} - \delta x_k) (\widehat{\delta x_k^+} - \delta x_k)^\top \right] \quad (3.23)$$

Kestirilen ve gerçek durum uzay vektörleri arasındaki farkı elde etmek amacıyla, kestirilen durum vektöründen eşitlik (3.16)'de verilen ifade çıkarılır ve sonuç olarak eşitlik (3.24) elde edilir. Daha sonra, eşitlik (3.22) ve (3.24)'ün birleştirilmesiyle eşitlik (3.40)'a ulaşılmaktadır. Bu işlemler gerçekleştirilirken,

- $E[w_s(t)] = 0,$
- $E \left[(\widehat{\delta x_k^\pm} - \delta x_k) w_s^\top(t) \right] = 0, \quad E \left[w_s(t) (\widehat{\delta x_k^\pm} - \delta x_k)^\top \right] = 0,$
- $E[q(t)] = 0$ ve
- $E \left[(\widehat{\delta x_k^\pm} - \delta x_k) q^\top(t) \right] = 0, \quad E \left[q(t) (\widehat{\delta x_k^\pm} - \delta x_k)^\top \right] = 0$

varsayımı yapılmaktadır.

$$\widehat{\delta x_k^-} - \delta x_k = \Phi_{k-1}(\widehat{\delta x_{k-1}^+} - \delta x_{k-1}) - \Gamma_{k-1}w_{s,k-1} - \Gamma_{q,k-1}q_{k-1} \quad (3.24)$$

$$P_k^- = E \left[(\Phi_{k-1}(\widehat{\delta x_{k-1}^+} - \delta x_{k-1}) - \Gamma_{k-1}w_{s,k-1} - \Gamma_{q,k-1}q_{k-1})(\Phi_{k-1}(\widehat{\delta x_{k-1}^+} - \delta x_{k-1}) - \Gamma_{k-1}w_{s,k-1} - \Gamma_{q,k-1}q_{k-1})^\top \right] \quad (3.25)$$

$$P_k^- = E[e_k^-(e_k^-)^\top] \quad (3.26)$$

$$e_k^- = \underbrace{\Phi_{k-1}e_{k-1}^+}_{(A)} - \underbrace{\Gamma_{k-1}w_{s,k-1}}_{(B)} - \underbrace{\Gamma_{q,k-1}q_{k-1}}_{(C)} \quad (3.27)$$

$$e_k^- = (A - B - C) \quad (3.28)$$

$$\begin{aligned} e_k^-(e_k^-)^\top &= (A - B - C)(A - B - C)^\top \\ &= AA^\top - AB^\top - AC^\top - BA^\top + BB^\top + BC^\top - CA^\top \\ &\quad + CB^\top + CC^\top \end{aligned} \quad (3.29)$$

$$\begin{aligned} E[AA^\top] &= E[\Phi_{k-1}e_{k-1}^+(e_{k-1}^+)^\top \Phi_{k-1}^\top] = \Phi_{k-1}E[e_{k-1}^+(e_{k-1}^+)^\top]\Phi_{k-1}^\top \\ &= \Phi_{k-1}P_{k-1}^+\Phi_{k-1}^\top \end{aligned} \quad (3.30)$$

$$E[AB^\top] = E[\Phi_{k-1}e_{k-1}^+w_{s,k-1}^\top \Gamma_{k-1}^\top] = \Phi_{k-1}E[e_{k-1}^+w_{s,k-1}^\top]\Gamma_{k-1}^\top = 0 \quad (3.31)$$

$$E[AC^\top] = E[\Phi_{k-1}e_{k-1}^+q_{k-1}^\top \Gamma_{q,k-1}^\top] = \Phi_{k-1}E[e_{k-1}^+q_{k-1}^\top]\Gamma_{q,k-1}^\top = 0 \quad (3.32)$$

$$E[BA^\top] = (E[AB^\top])^\top = 0 \quad (3.33)$$

$$\begin{aligned} E[BB^\top] &= E[\Gamma_{k-1}w_{s,k-1}w_{s,k-1}^\top \Gamma_{k-1}^\top] = \Gamma_{k-1}E[w_{s,k-1}w_{s,k-1}^\top]\Gamma_{k-1}^\top \\ &= \Gamma_{k-1}Q_{k-1}\Gamma_{k-1}^\top \end{aligned} \quad (3.34)$$

$$E[BC^\top] = E[\Gamma_{k-1}w_{s,k-1}q_{k-1}^\top \Gamma_{q,k-1}^\top] = \Gamma_{k-1}E[w_{s,k-1}q_{k-1}^\top]\Gamma_{q,k-1}^\top = 0 \quad (3.35)$$

$$E[CA^\top] = (E[AC^\top])^\top = 0 \quad (3.36)$$

$$E[CB^\top] = (E[BC^\top])^\top = 0 \quad (3.37)$$

$$E[CC^\top] = E[\Gamma_{q,k-1}q_{k-1}q_{k-1}^\top \Gamma_{q,k-1}^\top] = \Gamma_{q,k-1}Q_{q,k-1}\Gamma_{q,k-1}^\top \quad (3.38)$$

$$P_k^- = \Phi_{k-1}P_{k-1}^+\Phi_{k-1}^\top + \Gamma_{k-1}Q_{w,k-1}\Gamma_{k-1}^\top + \Gamma_{q,k-1}Q_{q,k-1}\Gamma_{q,k-1}^\top \quad (3.39)$$

$$P_k^- = \Phi_{k-1}P_{k-1}^+\Phi_{k-1}^\top + Q_{w,k-1} + Q_{q,k-1} \quad (3.40)$$

Gerçekleştirilen matematiksel işlemlerin ardından, durum kovaryans matrisi eşitlik (3.40)'ta ifade edilmiştir. Bu bağlamda, sistem gürültüsünden ve nicemleme

gürültüsünden kaynaklanan süreç gürültüsü matrisleri sırasıyla eşitlik (3.41) ve (3.43)'te sunulmuştur.

Eşitlik (3.19) ve (3.20)'da belirtilen ifadelerle, $Q_{w,k-1}$ ve $Q_{q,k-1}$ matrislerinin açık halleri yazıldığında, eşitlik (3.42) ve (3.44) elde edilmektedir.

$$Q_{w,k-1} = E[\Gamma_{k-1} w_{s,k-1} w_{s,k-1}^T \Gamma_{k-1}^T] \quad (3.41)$$

$$Q_{w,k-1} = E \left[\int_{t_k-\tau_s}^{t_k} \int_{t_k-\tau_s}^{t_k} \exp(F_{k-1}(t_k - t')) G_{k-1} w_s(t') w_s^T(t'') G_{k-1}^T \exp(F_{k-1}^T(t_k - t'')) dt' dt'' \right] \quad (3.42)$$

$$Q_{q,k-1} = E[\Gamma_{q,k-1} q_{k-1} q_{k-1}^T \Gamma_{q,k-1}^T] \quad (3.43)$$

$$Q_{q,k-1} = E \left[\int_{t_k-\tau_q}^{t_k} \int_{t_k-\tau_q}^{t_k} \exp(F_{k-1}(t_k - t')) B_{q,k-1} q(t') q^T(t'') B_{q,k-1}^T \exp(F_{k-1}^T(t_k - t'')) dt' dt'' \right] \quad (3.44)$$

Eşitlik (3.42) ve (3.44), sürekli zamanlı bir sistemde süreç gürültüsünün kovaryansını genel haliyle, yani gürültü herhangi bir varsayıma tabi tutulmadan, çift katlı integral şeklinde ifade eder. Ancak eğer sistem gürültüsünün beyaz gürültü olduğu varsayılırsa, bu durumda iki farklı zamana bağlı çarpım içeren ifade, eşitlik (3.45) ve (3.46)'daki gibi ifade edilebilmektedir. Dirac delta şeklinde türetilen ifadeler, eşitlik (3.47)'de gösterilen Dirac delta fonksiyonun integral operatörü içindeki davranışı sayesinde, çift zamana bağlı bir ifadeyi tek zamana bağlı bir integrale indirgeyebilir. Bu sadeleştirme sonucu elde edilen eşitlik (3.48) ve (3.49), hesaplamada büyük kolaylık sağlar ve Kalman filtresinde sıklıkla bu beyaz gürültü varsayımı kullanılarak süreç kovaryansı bu şekilde hesaplanır. Eşitliklerde bulunan, $S_{s,k-1}$ ve $S_{q,k-1}$ köşegen matrisleri, sistem ve nicemleme gürültülerinin kovaryans değerlerini içermektedir.

$$E[w_s(t')w_s^\top(t'')] = S_{s,k-1}\delta(t' - t'') \quad (3.45)$$

$$E[q(t')q^\top(t'')] = S_{q,k-1}\delta(t' - t'') \quad (3.46)$$

$$\int_{t_k-\tau_s}^{t_k} \int_{t_k-\tau_s}^{t_k} \delta(t' - t'') f(t', t'') dt' dt'' \rightarrow \int_{t_k-\tau_s}^{t_k} f(t', t') dt' \quad (3.47)$$

$$Q_{w,k-1} = \int_{t_k-\tau_s}^{t_k} \exp(F_{k-1}(t_k - t')) G_{k-1} S_{s,k-1} G_{k-1}^\top \exp(F_{k-1}^\top(t_k - t')) dt' \quad (3.48)$$

$$Q_{q,k-1} = \int_{t_k-\tau_q}^{t_k} \exp(F_{k-1}(t_k - t')) B_{q,k-1} S_{q,k-1} B_{q,k-1}^\top \exp(F_{k-1}^\top(t_k - t')) dt' \quad (3.49)$$

Süreç gürültüsü kovaryans matrisleri, $t_k - t'$ zaman aralığında (bir örnekleme periyodu boyunca) alınan integral yoluyla, ayrık zamanlı Q matrisleri olarak ifade edilebilir. Bu ifadelerin durum uzay formuna dönüştürülebilmesi için, $\exp(F_{k-1}(t_k - t'))$ gibi üstel terimler genellikle Taylor serisi açılımı kullanılarak yaklaşık olarak temsil edilir (eşitlik (3.50)).

$$\Phi = e^{FT} = I + FT + \frac{1}{2}(FT)^2 + \frac{1}{3!}(FT)^3 + \dots \quad (3.50)$$

İşlemlerin karmaşıklıktan uzaklaştırılması için $\exp(F_{k-1}(t_k - t'))$ ifadesi 1. Derece Taylor Serisi kullanılarak eşitliklerde kullanılmıştır. Bu yaklaşım, özellikle süreç kovaryansı matrislerinin kapalı formda yazılmasını kolaylaştırır. Bu doğrultuda, $Q_{s,d}$ ve $Q_{q,d}$ matrislerinin durum uzay formunda nasıl ifade edildiği, eşitlik (3.51) ve eşitlik (3.63) aralığında detaylandırılmıştır.

$$Q_{s,d} \approx \int_0^T (I + F(T - t')) G S_s G^\top (I + F^\top(T - t')) dt' \quad (3.51)$$

$$\begin{aligned} & (I + F(T - t')) \cdot G S_s G^\top \cdot (I + F^\top(T - t')) = \\ & G S_s G^\top + F(T - t') G S_s G^\top + G S_s G^\top F^\top(T - t') \\ & + F(T - t') G S_s G^\top F^\top(T - t') \end{aligned} \quad (3.52)$$

$$\int_0^T G S_s G^\top dt' = G S_s G^\top \cdot T = QT \quad (3.53)$$

$$\int_0^T F(T-t') G S_s G^\top dt' = F G S_s G^\top \int_0^T (T-t') dt' = F Q \cdot \frac{T^2}{2} \quad (3.54)$$

$$\int_0^T G S_s G^\top F^\top (T-t') dt' = G S_s G^\top F^\top \int_0^T (T-t') dt' = Q F^\top \cdot \frac{T^2}{2} \quad (3.55)$$

$$\int_0^T F(T-t') G S_s G^\top F^\top (T-t') dt' = F G S_s G^\top F^\top \int_0^T (T-t')^2 dt' = F Q F^\top \cdot \frac{T^3}{3} \quad (3.56)$$

$$\boxed{Q_{s,d} \approx QT + (FQ + QF^\top) \frac{T^2}{2} + FQF^\top \frac{T^3}{3}} \quad (3.57)$$

$$\begin{aligned} & (I + F(T-t')) \cdot B_q S_q B_q^\top \cdot (I + F^\top(T-t')) = \\ & B_q S_q B_q^\top + F(T-t') B_q S_q B_q^\top + B_q S_q B_q^\top F^\top (T-t') \\ & + F(T-t') B_q S_q B_q^\top F^\top (T-t') \end{aligned} \quad (3.58)$$

$$\int_0^T B_q S_q B_q^\top dt' = B_q S_q B_q^\top \cdot T = Q_q T \quad (3.59)$$

$$\int_0^T F(T-t') B_q S_q B_q^\top dt' = F B_q S_q B_q^\top \int_0^T (T-t') dt' = F Q_q \cdot \frac{T^2}{2} \quad (3.60)$$

$$\int_0^T B_q S_q B_q^\top F^\top (T-t') dt' = B_q S_q B_q^\top F^\top \int_0^T (T-t') dt' = Q_q F^\top \cdot \frac{T^2}{2} \quad (3.61)$$

$$\begin{aligned} \int_0^T F(T-t') B_q S_q B_q^\top F^\top (T-t') dt' &= F B_q S_q B_q^\top F^\top \int_0^T (T-t')^2 dt' \\ &= F Q_q F^\top \cdot \frac{T^3}{3} \end{aligned} \quad (3.62)$$

$$\boxed{Q_{q,d} \approx Q_q T + (F Q_q + Q_q F^\top) \frac{T^2}{2} + F Q_q F^\top \frac{T^3}{3}} \quad (3.63)$$

Modelde kullanılan G (gürültü dağılım) matrisi ve B_q matrisinin açık formları, sırasıyla eşitlik (3.64) ve (3.65)'te sunulmuştur. G matrisinin içerisinde yer alan $c_1, c_2, \dots, c_9$ ifadeleri; gövde eksen takımından navigasyon eksen takımına dönüşümü sağlayan Yön Kosinüs Matrisinin ($\hat{R}_b^n$) bileşenlerini temsil etmektedir. Eşitlik (3.65)'te görülen B_q matrisi ise 9×9 boyutunda bir birim matris olarak tanımlanmıştır.

$$G = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -c1 & -c2 & -c3 & 0 & 0 & 0 \\ -c4 & -c5 & -c6 & 0 & 0 & 0 \\ -c7 & -c8 & -c9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c1 & c2 & c3 \\ 0 & 0 & 0 & c4 & c5 & c6 \\ 0 & 0 & 0 & c7 & c8 & c9 \end{bmatrix} \quad (3.64)$$

$$B_q = I_{9 \times 9} \quad (3.65)$$

3.2.2 Hata kestirimi: ölçüm modeli

Kalman filtresinin ölçüm modeli, ayrık zamanlı olarak eşitlik (3.66)'da verilen formda ifade edilir. Burada, ölçüm modeli denkleminin solundaki terim, sistem durum vektörü ile ölçüm matrisinin çarpımına eklenmiş ölçüm gürültüsünü içermektedir. Kalman filtresinde kullanılan durum vektörü (δx_k), ANS sisteminin hata terimlerinden ve sensör yanlışlıklarından oluşmaktadır. Bu nedenle, filtreye ait ölçüm vektörü (δz_k), eşitlik (3.1) ve (3.3)'teki gibi ANS tarafından hesaplanan pozisyon ve hız değerleri ile KKBS aracılığıyla elde edilen pozisyon ve hız ölçümleri arasındaki farkları içermektedir (Noureldin vd. 2013).

$$\delta z_k = H_k \delta x_k + \eta_k \quad (3.66)$$

$$\delta z_k = \begin{bmatrix} GPS_{\phi, \lambda, h} - INS_{\phi, \lambda, h} \\ GPS_{v_N, v_E, v_D} - INS_{v_N, v_E, v_D} \end{bmatrix} \quad (3.67)$$

Eşitlik (3.66)'da yer alan η_k , sıfır ortalamaya ve R_k kovaryansına sahip ölçüm gürültüsünü temsil eden bir vektördür. H_k matrisi ise ölçümlerin, durum değişkenlerinin doğrusal kombinasyonları olarak ifade edilmesini sağlayan ölçüm tasarım matrisidir. Gevşek bağlı (loosely coupled) entegrasyonda, ölçümler doğrudan pozisyon ve hız hatalarına karşılık geldiği için, H_k matrisi basitçe birim matris ve sıfır matrislerden oluşan sade bir form alır (Noureldin vd. 2013).

$$H_k = [I_{6 \times 6} \quad 0_{6 \times 9}] \quad (3.68)$$

3.3 Kalman Ölçeklendirme Algoritması

ANS/KKBS entegrasyonunda durum hata vektörünün kestirilmesi sürecinde uygulanan Kalman filtre matrislerinin ölçeklendirilmesi, bölüm 2.7.1’de aktarılan literatürdeki ölçeklendirme yaklaşımına dayanmaktadır. Literatürde, enlem ve boylam gibi radyan cinden ifade edilen çok küçük büyüklükteki durum bileşenlerinin, inovasyon kovaryans matrisinde sayısal kararlılığı artırmak amacıyla metre ölçeğine taşınması gerektiği vurgulanmaktadır. Bu doğrultuda, çalışmada enlem ve boylam hataları Dünya yarıçapı olan $R = 6371000$ ile ölçeklendirilmiştir; böylece Kalman filtresinin inovasyon kovaryans matrisi içinde ortaya çıkan nümerik kararsızlıklar azaltılmıştır. Tez kapsamında yürütülen tüm test ve analizlerde söz konusu ölçeklendirme yaklaşımı temel alınmıştır.

3.4 Hata Geri Besleme Mekanizması

Hata düzeltme bloğunda, Kalman Filtresi aracılığıyla kestirilen durum hataları (pozisyon, hız ve yönelim) kapalı döngü mimarisi gereği ANS çıktılarına uygulanır. Ölçüm güncellemesi sonrasında elde edilen güncel hata vektörü, mekanizasyon bloğundan gelen ham pozisyon, hız ve yönelim verilerine eklenerek sistemin doğruluğu artırılır. Bu hata düzeltmesi yalnızca ölçüm güncellemesi sonrasında gerçekleştirilir; dolayısıyla bir sonraki ölçüm güncellemesi sağlanana kadar geçen sürede sisteme harici bir düzeltme uygulanmaz ve ANS, son düzeltilmiş durum değerleri üzerinden navigasyon çözümünü sürdürür.

Farrell’e (2008) göre pozisyon ve hız verilerindeki hata düzeltme işlemi, eşitlik (3.69) ve (3.70)’te gösterildiği üzere ANS tarafından elde edilen veri ile ilgili veriye ait hatanın toplanması ile gerçekleştirilir. Kalman filtresi tarafından kestirilen pozisyon ve hız hata vektörleri, mekanizasyon bloğundan gelen ham değerlere eklenir:

$$\begin{bmatrix} \phi \\ \lambda \\ h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi \\ \lambda \\ h \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \delta\phi \\ \delta\lambda \\ \delta h \end{bmatrix} \quad (3.69)$$

$$\begin{bmatrix} \hat{v}_n \\ \hat{v}_e \\ \hat{v}_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{v}_n \\ \hat{v}_e \\ \hat{v}_d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \delta\hat{v}_n \\ \delta\hat{v}_e \\ \delta\hat{v}_d \end{bmatrix} \quad (3.70)$$

Yönelim bilgisini taşıyan Yönelim Kosinüs Matrisi (DCM) için ise pozisyon ve hız verilerinden farklı bir düzeltme yöntemi uygulanır. Yönelim hataları küçük açılar olarak kabul edildiğinden, Farrell (2008) tarafından önerilen küçük açı dönüşüm yaklaşımı kullanılmıştır. Kalman Filtresi çıktıları arasında yer alan yönelim hata vektörü (ρ), çarpık simetrik matris formuna dönüştürülür ve ham DCM matrisi ($\widehat{R}_b^n$) ile işleme sokularak düzeltilmiş matris Eşitlik (3.71) ile elde edilir:

$$R_b^n = (I + [\rho \times])\widehat{R}_b^n \quad (3.71)$$

Burada I birim matrisi, $[\rho \times]$ ise kestirilen Euler açı hatalarından oluşturulan çarpık simetrik matrisi temsil etmektedir.

Düzeltilme işleminin ve simülasyon boyunca gerçekleştirilen ardışık matris çarpımlarının sonucunda, sayısal yuvarlama hataları nedeniyle DCM matrisinin diklik özelliği ($R_b^n R_b^{nT} = I$) zamanla bozulabilmektedir. Matrisin doğruluğunu korumak amacıyla, eşitlik (3.72) işlemi ile matrisin dikliği korunmaktadır (Farrell 2008).

$$\widehat{R}_b^n \leftarrow \widehat{R}_b^n + \frac{1}{2}(I - \widehat{R}_b^n \widehat{R}_b^{nT})\widehat{R}_b^n \quad (3.72)$$

Bu işlem sayesinde, matrisin satır ve sütunlarının birbirine dik olması ve boylarının birim uzunlukta olması her döngüde garanti altına alınarak, navigasyon çözümünün uzun süreli kararlılığı sağlanır. Son aşamada, düzeltilmiş DCM matrisi kullanılarak bir sonraki zaman adımı için gerekli olan Euler açıları hesaplanır.

4. SİMÜLASYON VE SONUÇLAR

Bu bölümde, tez kapsamında oluşturulan simülasyon altyapısı ve bu altyapı kullanılarak tek ve çift duyarlıklı veri tipleriyle gerçekleştirilen testlere ait sonuçlar sunulmaktadır.

4.1 Veri Seti ve Senaryolar

Tez çalışması kapsamında geliştirilen ANS/KKBS entegrasyon algoritmasının, farklı sayısal çözünürlüklerdeki performansını değerlendirmek amacıyla tek ve çift duyarlıklı veri tipleri için aynı senaryo koşullarında testler gerçekleştirilmiştir. Bu kapsamda, sentetik sensör verileri üreten bir uygulama aracılığıyla bir hareket senaryosu tasarlanmış; bu senaryoya bağlı olarak Atalet Ölçüm Birimi (AÖB) ve Küresel Konumlama Sistemi (KKBS) verileri yapay olarak üretilmiştir. Üretilen bu sentetik veriler üzerine farklı seviyelerde gürültü etkileri uygulanarak, çözünürlük farklarının pozisyon, hız ve yönelim sonuçları üzerindeki etkileri aynı hata modelleri altında karşılaştırmalı olarak analiz edilmiştir.

Uygulama aracılığıyla gürültüsüz ve hatasız veriler elde edildikten sonra, KKBS çıktısı olan pozisyon ve hız bileşenlerine, Çizelge 4.1’de belirtilen (1σ) standart sapmaya sahip normal dağılımlı rastgele hata terimleri eklenmiştir. Enlem ve boylam bileşenlerine 2.5 m standart sapmalı hata eklenebilmesi için, bu değer önce dünya yarıçapı (R_m ve R_n) kullanılarak eşitlik (4.1)’de gösterildiği biçimde radyan cinsine dönüştürülmüştür. İlgili eşitlikte δ ile ifade edilen değerler ise ilgili eksenindeki metre seviyesindeki hatayı temsil etmektedir.

Çizelge 4.1 Sentetik olarak oluşturulan KKBS verileri için eklenen gürültü değerleri

Hatanın Uygulandığı Kanal	Hata (1σ)	Birimi
Enlem	2.5	m
Boylam	2.5	m
Yükseklik	2.5	m
Kuzey Hız	0.1	m/sn
Doğu Hız	0.1	m/sn
Aşağı Hız	0.1	m/sn

$$\begin{bmatrix} \Delta\phi \\ \Delta\lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\delta\phi}{R_M + h} \\ \delta\lambda \\ \frac{\delta\lambda}{(R_N + h) \cos(\phi)} \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

KKBS verilerine ek olarak, gerçek bir AÖB sensör davranışını simülasyon ortamında taklit etmek amacıyla, ivme ve açısal hız verilerine de hem deterministik hem de rastgele hata bileşenleri eklenmiştir. Böylece, simülasyon verisinin gerçekçilik (sadakat) seviyesi arttırılmıştır.

Bölüm 2.4.3'te, AÖB verilerinin gerçek ölçümler ve karakteristik hata kaynakları dikkate alınarak nasıl modellendiği ayrıntılı olarak sunulmuştur. İlgili model esas alınarak AÖB verileri oluşturulurken, hem deterministik hata bileşenleri hem de rastgele hatalar dikkate alınmıştır. Üretilen ivme verileri için ölçek faktörü ve eksen kaçıklığı hatalarını içeren matris,

$$I_{3 \times 3} + \begin{bmatrix} 500 & -300 & 200 \\ -150 & -600 & 250 \\ -250 & 100 & 450 \end{bmatrix} \times 10^{-6} (ppm) \quad (4.2)$$

şeklinde tanımlanmıştır. Bunun yanında, ivme ölçümlerine eklenen sabit yanlılık değerleri ise

$$\begin{bmatrix} 1000 \\ -750 \\ 800 \end{bmatrix} x 10^{-6} (g) \quad (4.3)$$

olarak uygulanmıştır.

Aynı yaklaşım dönüölçer için de uygulanmıştır. Dönüölçer ölçümlerine eklenen deterministik hata bileşenleri; ölçek faktörü ve eksen kaçıklığı hatalarını içeren,

$$I_{3 \times 3} + \begin{bmatrix} 400 & -300 & 250 \\ 0 & -300 & 150 \\ 0 & 0 & -350 \end{bmatrix} x 10^{-6} (ppm) \quad (4.4)$$

matrisi ile tanımlanmıştır. Dönüölçer sabit yanlılık terimi ise

$$\begin{bmatrix} -10 \\ -7 \\ 15 \end{bmatrix} x \frac{1}{3600} x \frac{\pi}{180} (rad/sn) \quad (4.5)$$

şeklinde modele eklenmiştir. Son olarak ivmeye bağlı yanlılık bileşeni,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.8 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} x \frac{1}{3600} x \frac{\pi}{180} (rad/s/g) \quad (4.6)$$

şeklinde tanımlanmış olup ivme vektörüyle çarpılarak modele dahil edilmiştir.

Deterministik hata bileşenlerinin sentetik AÖB verilerine eklenmesinin ardından, rastgele hata bileşenleri de modele dahil edilmiştir. Sensör çıktıları üzerindeki etkisinin oldukça sınırlı olması nedeniyle ölçek faktörü için ayrı bir rastgele hata modeli tanımlanmamış; buna karşılık, yanlılık kararsızlığı bileşeni Bölüm 2.4.3.5'te açıklanan Gauss–Markov süreci kapsamında modellenmiştir. İvme ve açısal hız verilerinin oluşturulmasında kullanılan rastgele hata parametrelerinin sayısal değerleri ise Çizelge 4.2'de sunulmaktadır.

Rastgele hata bileşenlerine ait tablo değerleri kullanılarak ilgili standart sapmalar hesaplanmış ve bu standart sapmalar doğrultusunda Gauss (normal) dağılımından üretilen rastgele hata terimleri ölçümlere eklenmiştir. Her bir örnekleme zamanı ($dt = 0.01$) için ivme verilerine eklenen hız rastgele yürüyüşü bileşeninin standart sapması,

$$\sigma_{HRY} = \frac{\left(\frac{HRY}{60}\right)}{\sqrt{dt}} \times \frac{1}{g} \quad (4.7)$$

ifadesi kullanılarak hesaplanmıştır. Burada HRY, Çizelge 4.2’de verilen hız rastgele yürüyüş değeri, g ise yerçekimi ivmesi (9.80665) ve dt örnekleme süresidir. Bu ifade, sürekli-zaman gürültü yoğunluğunun ayrık zamana dönüştürülmesini sağlamaktadır.

İvmeölçer yanlılık kararsızlığı için kullanılan varyans,

$$\sigma_{GM}^2 = \sigma_{YK}^2 [1 - e^{-2dt/T_c}] \quad (4.8)$$

şeklinde hesaplanmıştır. Burada σ_{YK}^2 Çizelge 4.2’de verilen yanlılık kararsızlığı değeri, ($T_c = 700 \text{ sn}$) ise ilgili Gauss–Markov sürecinin korelasyon zamanıdır. Bu model sayesinde, yanlılık değerinin zaman içindeki birbiriyle bağlantılı değişimi doğru bir biçimde ortaya konulmuştur.

Aynı yaklaşım dönüölçer verileri için de uygulanmıştır. Açısal rastgele yürüyüş kaynaklı gürültünün standart sapması,

$$\sigma_{ARY} = \frac{\left(\frac{ARY}{60}\right)}{\sqrt{dt}} \times \frac{\pi}{180} \quad (4.9)$$

ifadesi kullanılarak hesaplanmıştır. Burada ARY, Çizelge 4.2’de verilen hız rastgele yürüyüş değeri olup önce saniyeye, ardından radyana dönüştürülmektedir. Dönüölçer

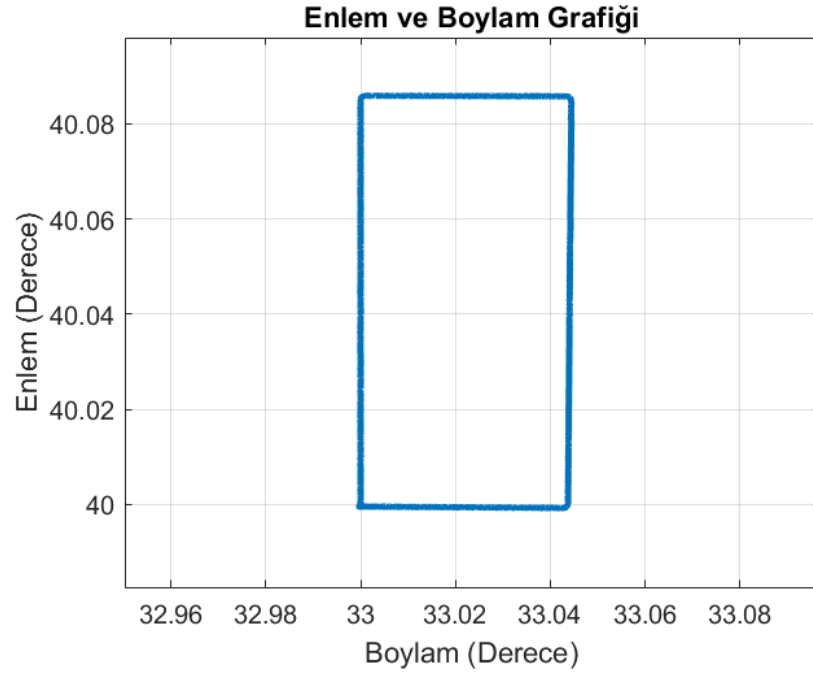
yanlılık kararsızlığı için gerekli standart sapma değeri de aynı Gauss–Markov modeli eşitlik (4.8) kullanılarak hesaplanmıştır ($T_c = 700 \text{ sn}$).

Çizelge 4.2 Sentetik olarak oluşturulan AÖB verileri için eklenen gürültü değerleri

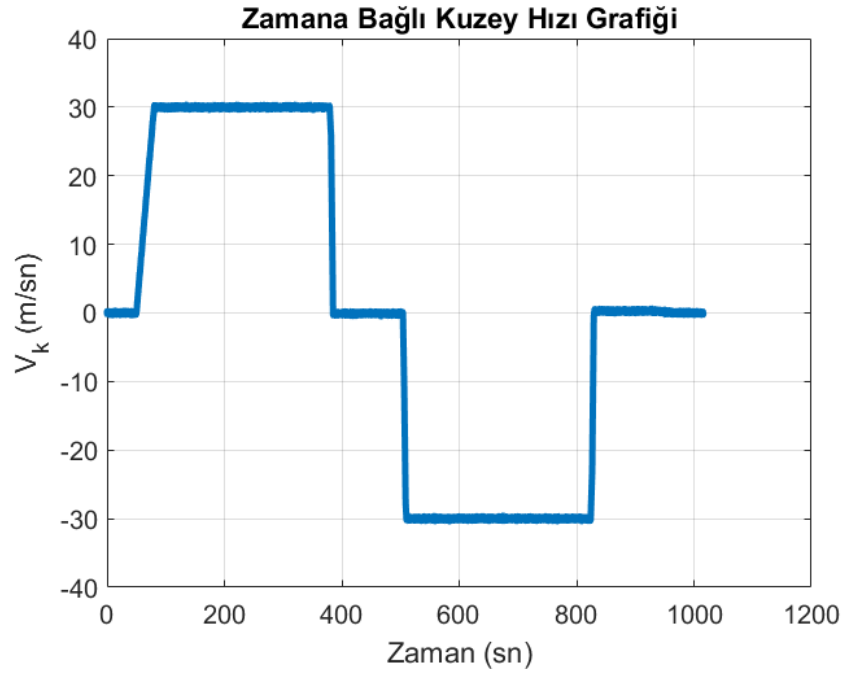
Hata Türü	Hata	Birimi
Açısal Rastgele Yürüyüş	0.15	$^{\circ}/\sqrt{h}$
Yanlılık Kararsızlığı (dönüölçer)	0.5	$^{\circ}/h$
Hız Rastgele Yürüyüş	0.06	$m/s/\sqrt{h}$
Yanlılık Kararsızlığı (ivmeölçer)	5.10^{-5}	g

Gerçekleştirilen bu hata modelleme ve simülasyon sürecinin bir sonucu olarak, ANS/KKBS entegrasyon algoritmasında kullanılan, gürültü bileşenleri eklenmiş KKBS konum (enlem ve boylam) ve hız (Kuzey Hız ve Doğu Hız) verilerinin zamana bağlı değişimleri sırasıyla Şekil 4.1, Şekil 4.2 ve Şekil 4.3'teki görsellerde sunulmuştur. Ek olarak, senaryo boyunca değişen sapma açısı ise Şekil 4.4'te sunulmaktadır.

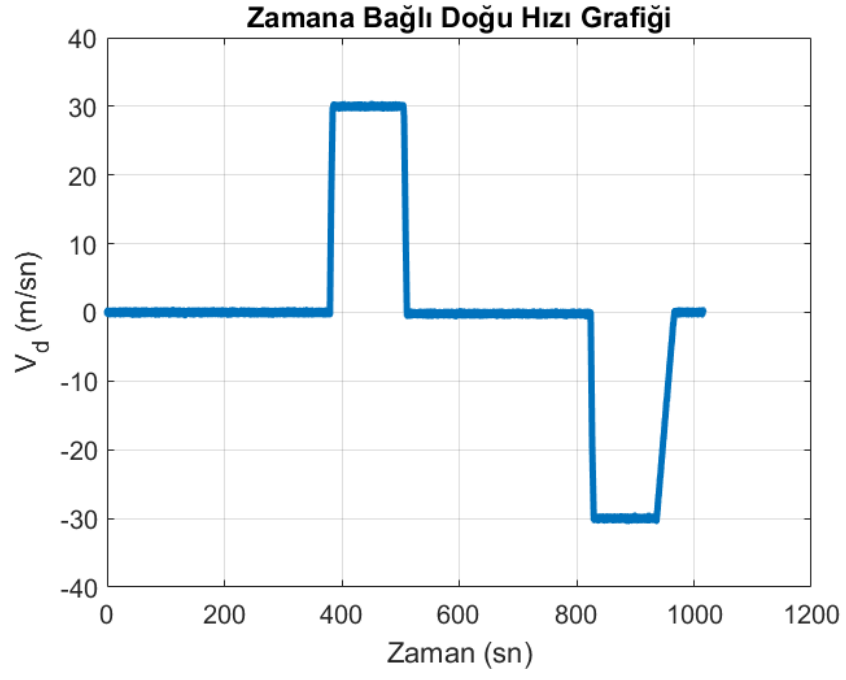
Ayrıca, Atalet Ölçüm Birimi (AÖB)'ne ait, gürültü ve hata bileşenleri içeren ivme ve açısal hız verilerinin üç eksendeki zamansal profilleri ise sırasıyla Şekil 4.5 ve Şekil 4.6'de gösterilmektedir.



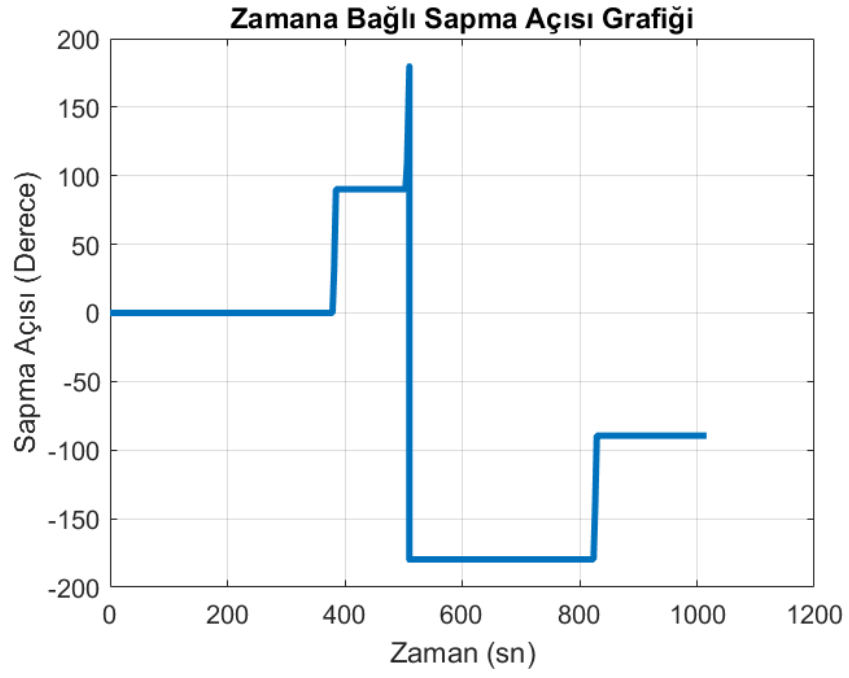
Şekil 4.1 Algoritma test senaryosunda kullanılan zamana bağlı pozisyon grafiği



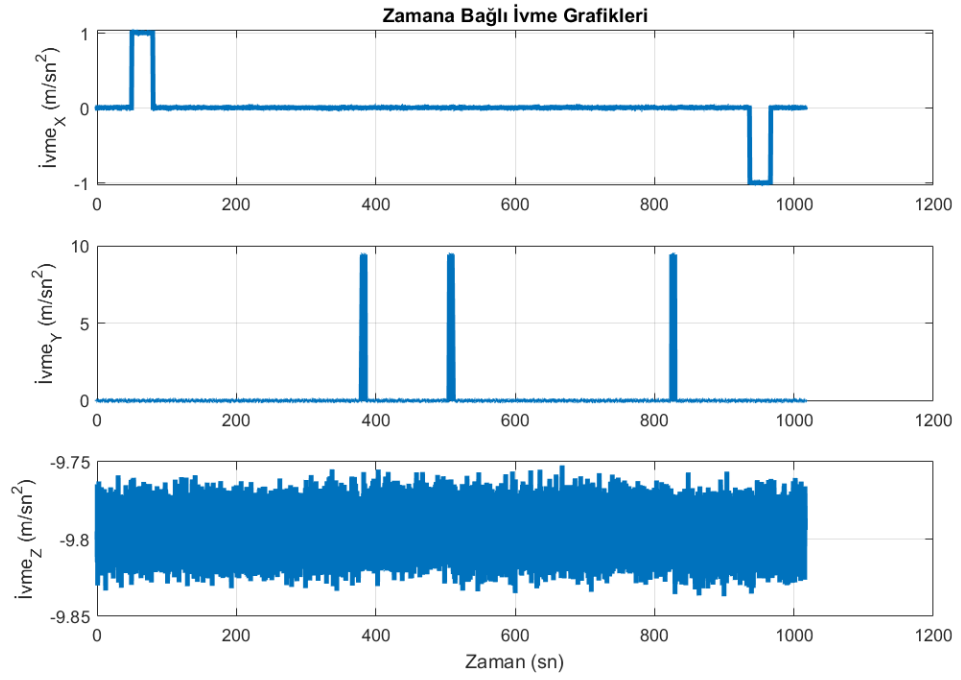
Şekil 4.2 Algoritma test senaryosunda kullanılan zamana bağlı Kuzey hız grafiği



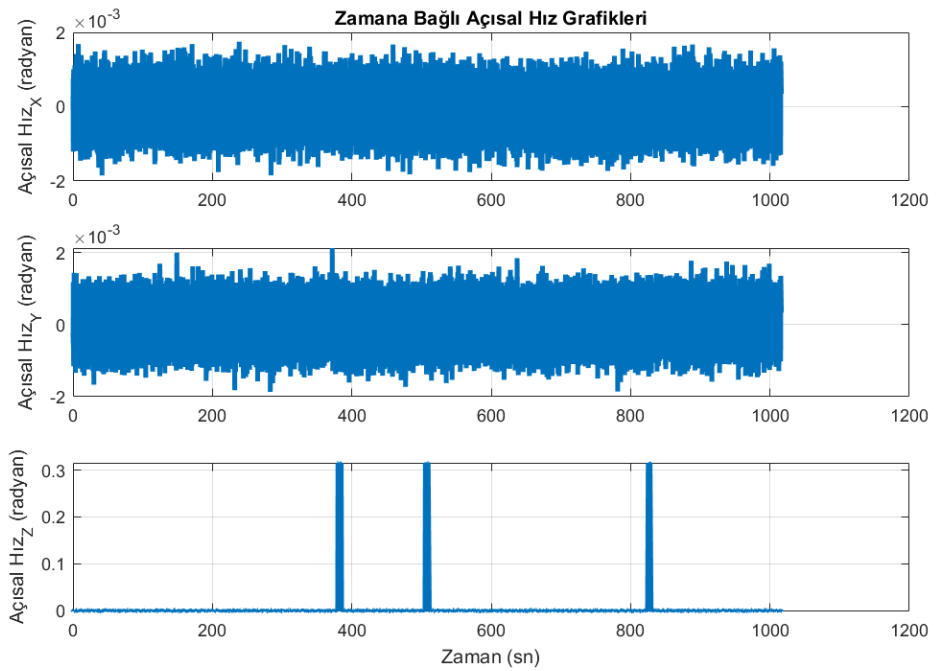
Şekil 4.3 Algoritma test senaryosunda kullanılan zamana bağlı Doğu hız grafiği



Şekil 4.4 Algoritma test senaryosunda kullanılan zamana bağlı sapma açısı grafiği



Şekil 4.5 Algoritma test senaryosunda kullanılan zamana bağlı ivme grafiği



Şekil 4.6 Algoritma test senaryosunda kullanılan zamana bağlı açısal hız grafiği

Senaryo verileri incelendiğinde, senaryonun Kuzey ve Doğu hız profillerine bağlı olarak enlem ve boylam eksenlerinde gerçekleşen yer değiştirmeyi kapsadığı görülmektedir.

Hareket profili; platformun önce Kuzey yönünde ilerlemesi, ardından dikdörtgen bir yörünge izleyerek başlangıç noktasına geri dönmesi şeklinde kurgulanmıştır. Bu kinematik yapı gereği, yönelim açılarından yalnızca sapma (yaw) açısında değişim gözlemlenmiş; yükseklik bilgisi ise senaryo boyunca sabit kalmıştır. Son aşamada, hata bileşenleri eklenmiş bu AÖB ve KKBS verileri, entegrasyon algoritmasının performans değerlendirmesinde doğrudan girdi seti olarak kullanılmış ve simülasyon sonuçları elde edilmiştir.

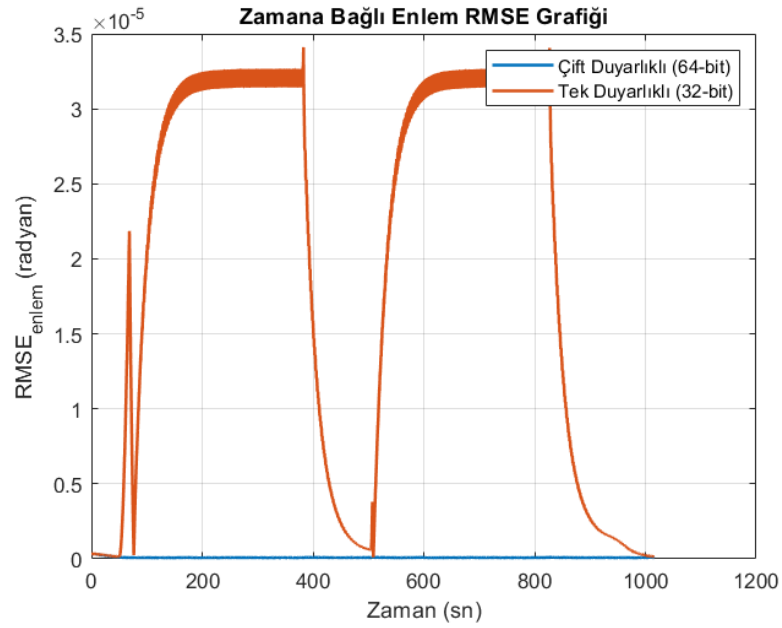
4.2 Tek ve Çift Duyarlıklılı Aritmetik ile Elde Edilen Sonuçlar

Bu başlık altında, bölüm 3.2’te ayrıntıları verilen ANS/KKBS entegrasyon algoritmasının tek duyarlıklılı ve çift duyarlıklılı aritmetik kullanılarak elde edilen sonuçları sunulmaktadır. Bu incelemenin temel amacı, algoritmanın çift duyarlıklılı yapıdan tek duyarlıklılı yapıya geçirildiğinde nasıl bir tepki verdiğini gözlemlemek ve duyarlılık seviyesindeki değişimin çıktılar üzerindeki etkisini nicel olarak değerlendirmektir. Böylece, veri tipi duyarlılığındaki azalmanın entegrasyon performansını ne ölçüde olumsuz etkilediğı açık biçimde ortaya konulmuştur.

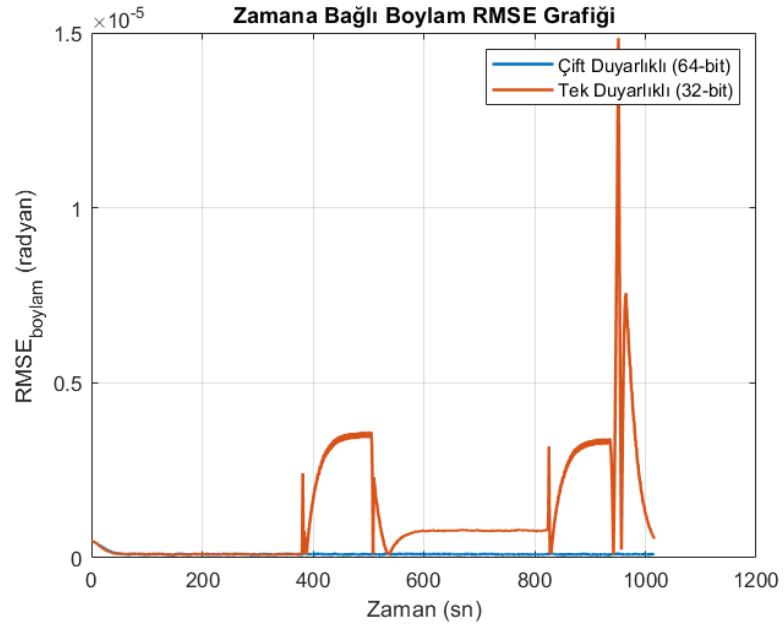
Bu analiz sürecinde yalnızca veri tipi duyarlılığı değiştirilmiş; nicemleme hataları için herhangi bir varyans bileşeni Kalman sürecine eklenmemiş, filtrenin sayısal kararlılığı için ölçekleme algoritması uygulanmamış ve mekanizasyon adımlarında oluşabilecek sayısal kayıpları azaltmaya yönelik Kahan toplama algoritması kullanılmamıştır. Başka bir ifadeyle, tek duyarlıklılı aritmetiğın doğal çözünürlük sınırları olduğı gibi bırakılmış ve algoritmanın bu sınırlara karşı ne kadar hassas olduğı özellikle ortaya konulmuştur. Bu yaklaşım sayesinde, tek duyarlıklılı hesaplamanın entegrasyon çıktılarında ne tür bozulmalara yol açtığı ve bu bozulmaların zaman içindeki birikim karakteristikleri net bir biçimde incelenebilmektedir.

İlk olarak, pozisyon çıktıları incelendiğinde (Şekil 4.7 - Şekil 4.9) özellikle enlem çıktısı için tek duyarlıklılı aritmetikte ortaya çıkan hata dinamiğinin belirgin bir biçimde arttığı görülmektedir. Hareketin etkili olduğı zaman aralıklarında, sayısal çözünürlüğün yetersizliğı nedeniyle tek duyarlıklılı hesaplamalar artımları doğru biçimde temsil

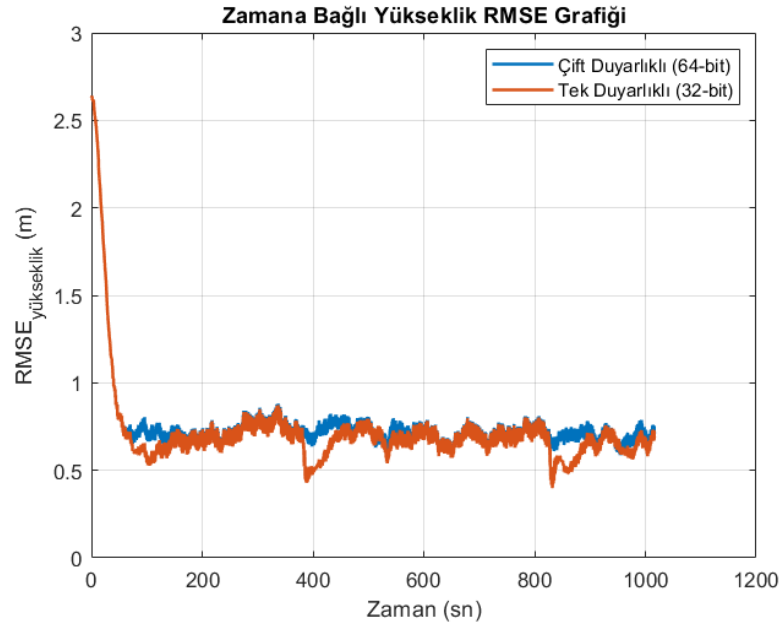
edememekte; bunun sonucu olarak hata belirli bir seviyeye yükselmekte ve bu seviyede sabitlenmiş bir şekilde kalmaktadır. Çift duyarlıklı aritmetikte ise bu tür bir yükselme gözlenmemekte, hata değeri tüm zaman boyunca sifıra yakın kalmaktadır. Bu durum, tek duyarlıklı veri tipinin konum güncellemelerinde ortaya çıkan küçük artımları IEEE-754 çözünürlük sınırları içerisinde temsil edemediğini ve bu nedenle hata büyümesinin zamanla birikerek belirgin bir seviyeye oturduğunu açıkça göstermektedir. Enlem ve boylam için elde edilen RMSE değerlerinin daha iyi anlaşılabilmesi amacıyla, aynı sonuçlar Şekil 4.11 ve Şekil 4.12’de bu kez metre cinsinden sunulmuştur.



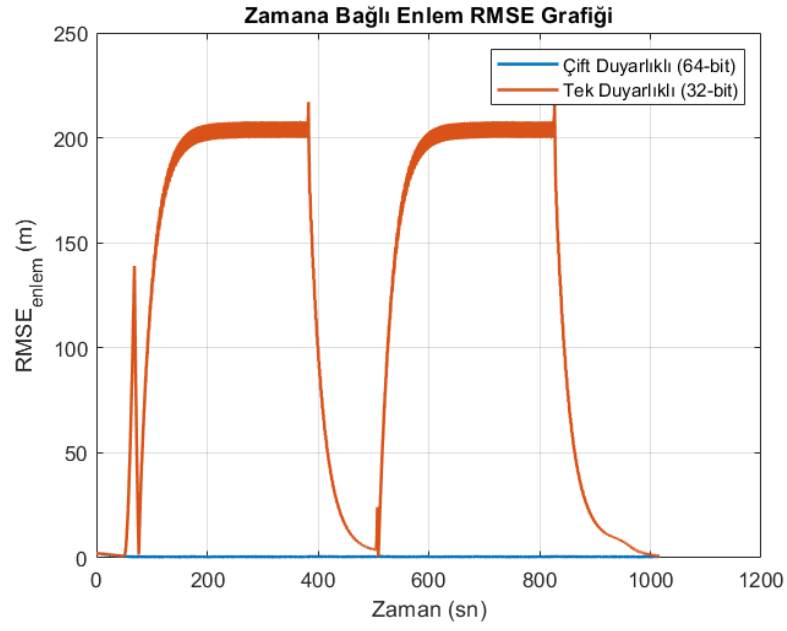
Şekil 4.7 Enlem için farklı sayısal çözünürlüklerde elde edilen zamana bağlı RMSE değerleri



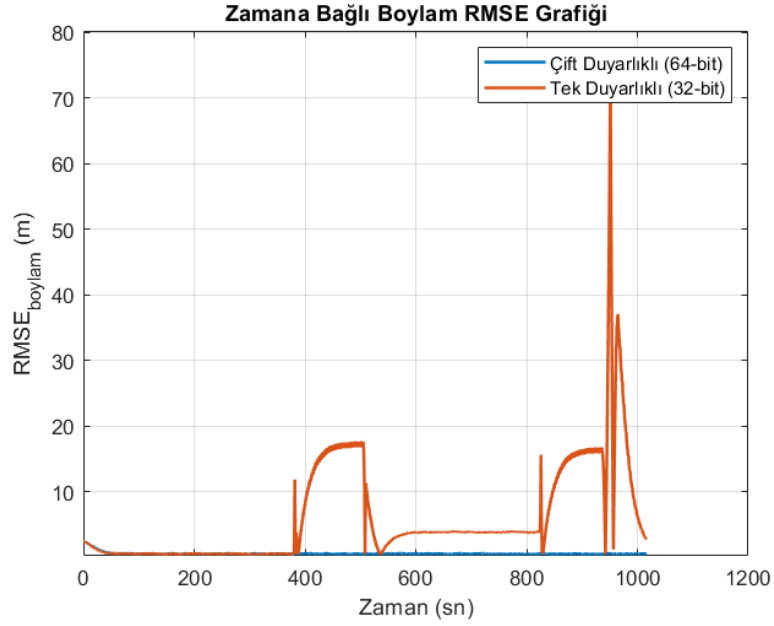
Şekil 4.8 Boylam için farklı sayısal çözünürlüklerde elde edilen zamana bağlı RMSE değerleri



Şekil 4.9 Yükseklik için farklı sayısal çözünürlüklerde elde edilen zamana bağlı RMSE değerleri



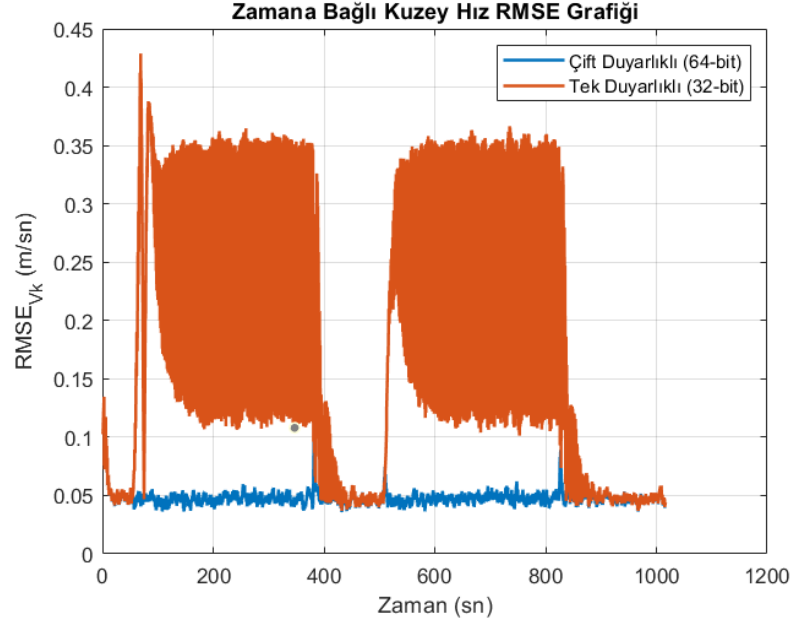
Şekil 4.10 Metre cinsine dönüştürülmüş enlem verisi için farklı sayısal çözünürlüklerde elde edilen zamana bağlı RMSE değerleri



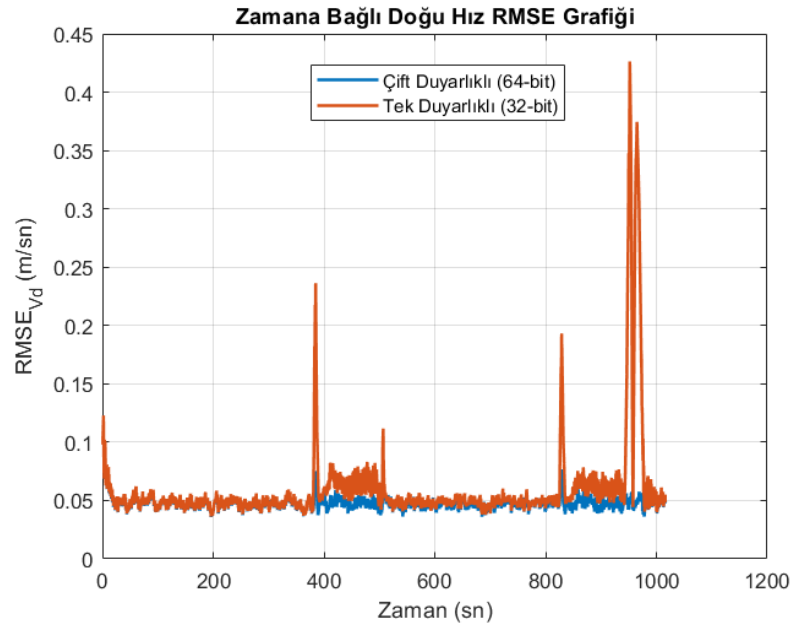
Şekil 4.11 Metre cinsine dönüştürülmüş boylam verisi için farklı sayısal çözünürlüklerde elde edilen zamana bağlı RMSE değerleri

Hız hatalarının zaman içindeki değişimi (Şekil 4.12 - Şekil 4.14), pozisyon sonuçlarına paralel olarak hareketli aralıklarda artış göstermektedir. Bu artışın temel nedeni sayısal çözünürlük sınırının yanı sıra, enlem ve boylam bileşenlerindeki pozisyon hatalarının tam

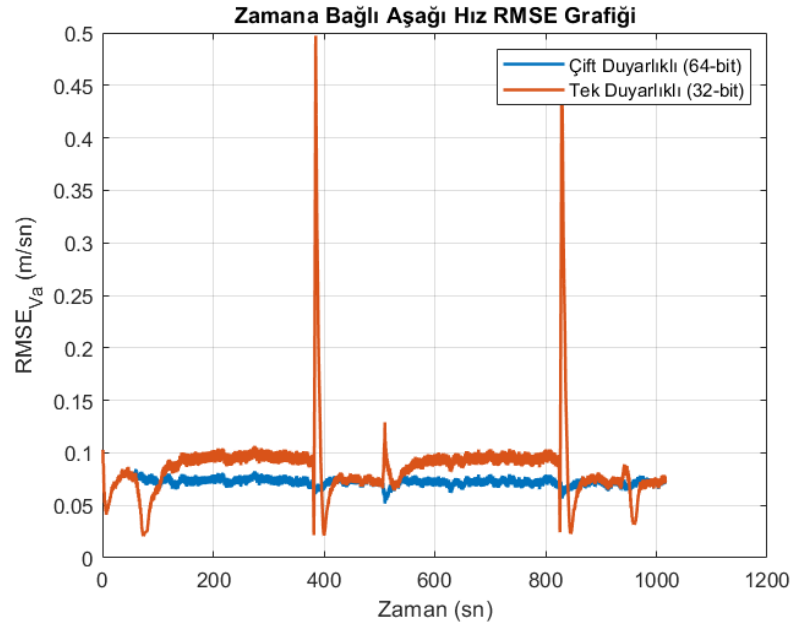
olarak kestirilememesidir. Pozisyon hatalarındaki büyüme, türevsel ilişkiler ve dönüşümler yoluyla hız değerlerine yansıdığı için özellikle manevra içeren kısımlarda hız RMSE değerleri belirgin şekilde yükselmektedir.



Şekil 4.12 Kuzey hız verisi için farklı sayısal çözünürlüklerde elde edilen zamana bağlı RMSE değerleri

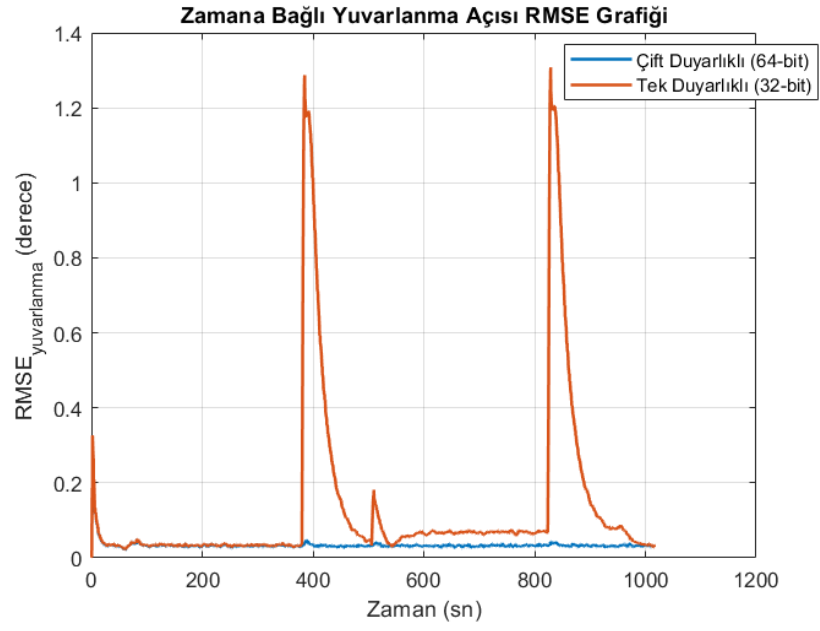


Şekil 4.13 Doğu hız verisi için farklı sayısal çözünürlüklerde elde edilen zamana bağlı RMSE değerleri

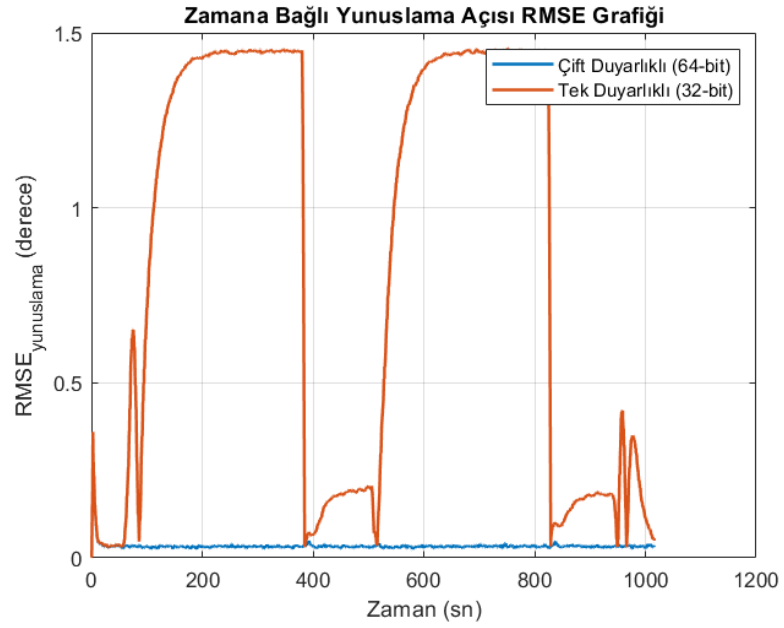


Şekil 4.14 Aşağı hız verisi için farklı sayısal çözünürlüklerde elde edilen zamana bağlı RMSE değerleri

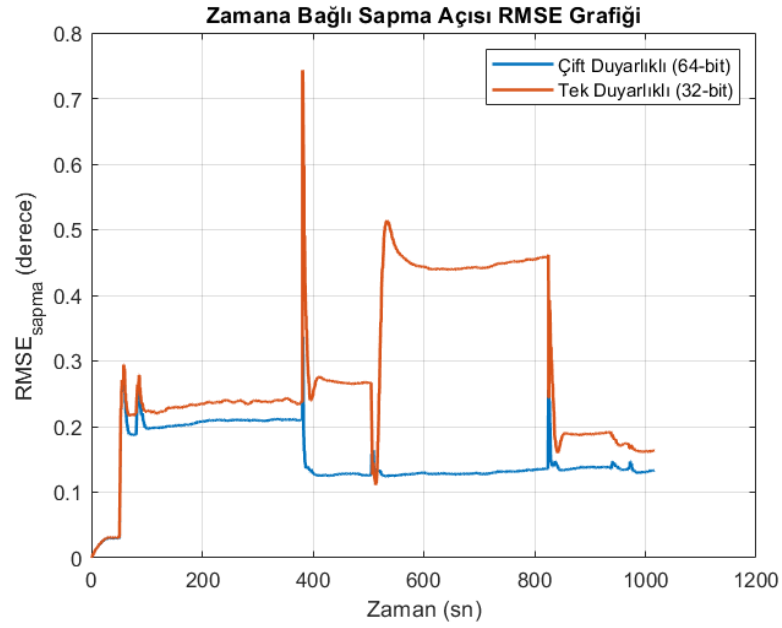
Hız çıktılarında gözlenen RMSE davranışı, yönelim bileşenleri için de benzer bir şekilde ortaya çıkmaktadır (Şekil 4.15 - Şekil 4.17). Yönelim hataları doğrudan sayısal çözünürlükten etkilenmemekle birlikte, konum ve hız bileşenlerindeki kestirim hatalarının zaman içerisinde birikmesi ve bu hataların dönüşüm matrisleri aracılığıyla yönelim hesabına yansması sonucunda belirli bölgelerde artış gözlemlenmektedir. Dolayısıyla, hız RMSE değerlerinde görülen yükselme eğilimi, yönelim bileşenlerinde de hareketin etkili olduğu zaman aralıklarında benzer biçimde ortaya çıkmaktadır.



Şekil 4.15 Yuvarlanma için farklı sayısal çözünürlüklerde elde edilen zamana bağlı RMSE değerleri



Şekil 4.16 Yunuslama için farklı sayısal çözünürlüklerde elde edilen zamana bağlı RMSE değerleri



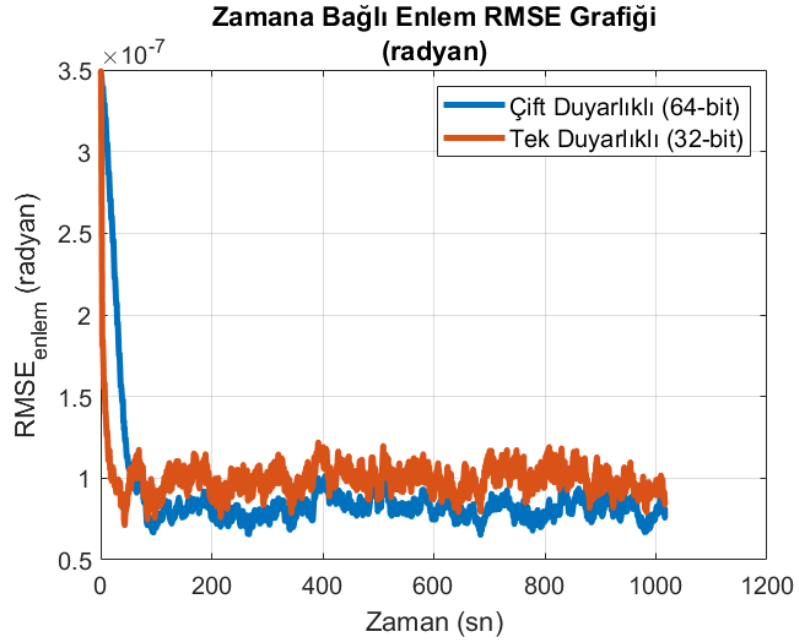
Şekil 4.17 Sapma için farklı sayısal çözünürlüklerde elde edilen zamana bağlı RMSE değerleri

4.3 Önerilen Metot ile Tek/Çift Duyarlıklılı Sonuçların Karşılaştırılması

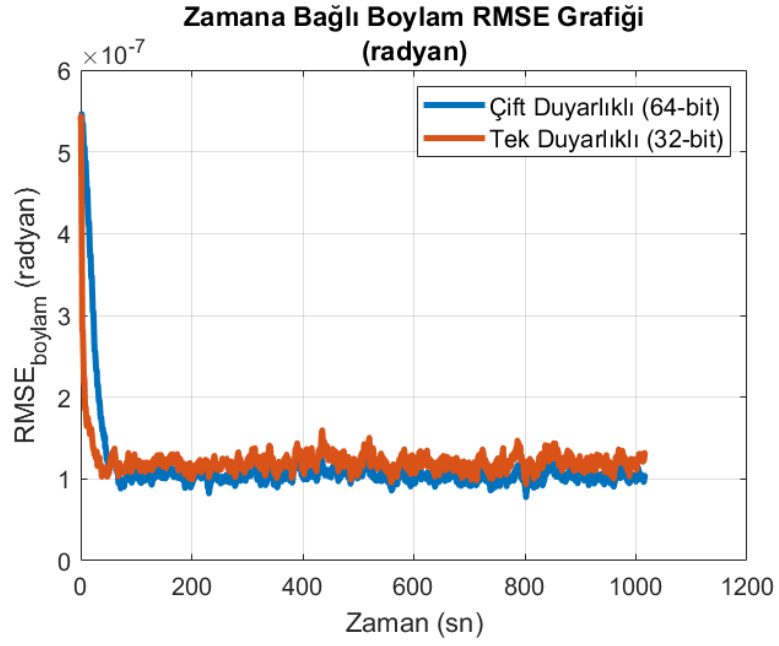
Bu alt bölümde, ANS/KKBS entegrasyon algoritmasının tek duyarlıklılı (32-bit) ve çift duyarlıklılı (64-bit) aritmetik ile çalıştırılması sonucunda elde edilen pozisyon, hız ve yönelim hata çıktılarını RMSE cinsinden karşılaştırılmaktadır. Karşılaştırma, bir önceki bölümde sunulan hareket senaryosunun rastgele oluşturulan 100 farklı koşumu üzerinde gerçekleştirilmiştir. Tek duyarlıklılı aritmetikte toplama aşamalarındaki çözünürlük kayıplarını azaltmak amacıyla Kahan toplama yöntemi kullanılmış; ayrıca nicemleme etkilerini temsil etmek üzere mekanizasyon bloğunda hesaplanan varyans bileşeni süreç gürültüsüne dahil edilmiştir. Ek olarak, Kalman filtresindeki inovasyon kovaryans matrisinin sayısal kararlılığını artırmak amacıyla ölçeklendirme algoritması uygulanmıştır. Bu düzenlemeler doğrultusunda elde edilen sonuçlar, farklı aritmetik duyarlıklarının hata büyümesi üzerindeki etkisinin zamana bağlı olarak nasıl değiştiğini ortaya koymakta ve tek-çift duyarlıklılı yapıların sayısal hassasiyet farklarını karşılaştırmalı olarak göstermektedir.

Öncelikle enlem, boylam ve yükseklik bileşenlerine ait zamana bağlı RMSE değerleri incelendiğinde (Şekil 4.18, Şekil 4.19 ve Şekil 4.20), özellikle enlem ve boylam

çıktılarında tek duyarlıklı (32-bit) aritmetik ile elde edilen hata seviyesinin çift duyarlıklı (64-bit) aritmetiğe kıyasla daha yüksek olduğu görülmektedir. Bu durum, aracın ilgili ekseninde yer değiştirdiği zamanlarda görülmektedir. Bunun temel nedeni, enlem ve boylam değerlerinin algoritma içerisinde radyan cinsinden hesaplanması ve bu bileşenlerin büyüklüklerinin 10^{-7} mertebelerine kadar düşebilmesidir. Tek duyarlıklı aritmetik bu küçük değişimleri temsil edebilecek sınırlı bir çözünürlüğe sahip olduğundan, çift duyarlıklılıya göre daha hatalı sonuçlar vermektedir. Bununla birlikte, önerilen yöntem kullanıldığında elde edilen sonuçların, yalnızca tek duyarlıklı veri tipi ile elde edilen sonuçlara kıyasla yaklaşık 166 kat daha iyi performans sergilediği gözlemlenmiştir.

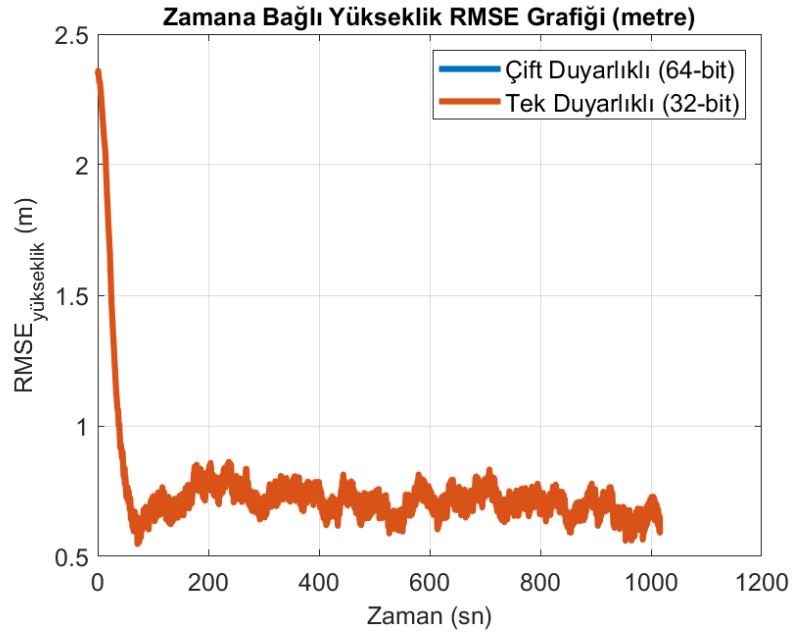


Şekil 4.18 Enlem için farklı sayısal çözünürlüklerde zamana bağlı RMSE değerleri



Şekil 4.19 Boylam için farklı sayısal çözünürlüklerde zamana bağlı RMSE değerleri

Yükseklik bileşeninde ise benzer bir sapma gözlenmemektedir. Bunun nedeni, yüksekliğin metre cinsinden ifade edilmesi ve değer aralığının tek duyarlıklı aritmetiğin çözünürlük sınırları içerisinde kalmasıdır. Sonuç olarak, tek ve çift duyarlık arasındaki fark minimal düzeyde kalmış, RMSE değerleri birbirine yakın çıkmıştır.

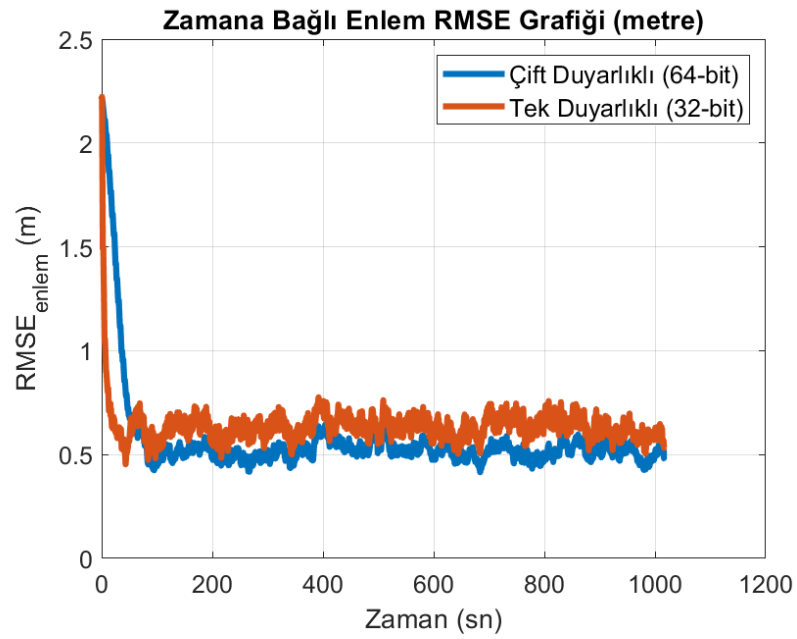


Şekil 4.20 Yükseklik için farklı sayısal çözünürlüklerde zamana bağlı RMSE değerleri

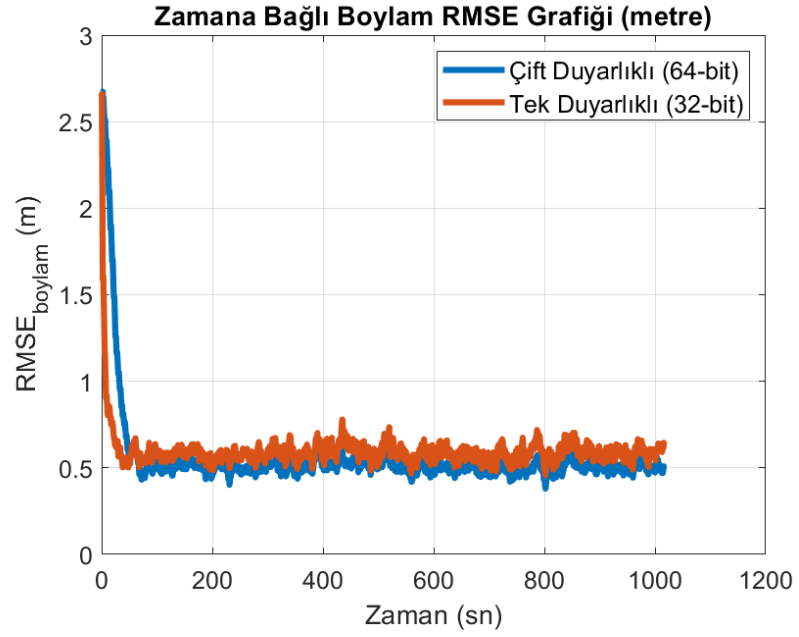
Elde edilen enlem ve boylam hataları başlangıçta radyan cinsinden hesaplanmıştır. Bu nedenle hata büyüklükleri, Dünya yarıçapı, enlem ve yükseklik değerleri kullanılarak eşitlik (4.10) ve (4.11)'de gösterildiği şekilde metre cinsine dönüştürülmüştür. Şekil 4.21 ve Şekil 4.22'de, bu dönüşüm sonrasında enlem ve boylam bileşenlerine ait hata değerlerinin metre cinsinden elde edilen RMSE sonuçları sunulmaktadır.

$$RMSE_{Enlem(m)} = (R_m + h) \times RMSE_{Enlem(radyan)} \quad (4.10)$$

$$RMSE_{Boylam(m)} = (R_n + h) \times \cos \phi \times RMSE_{Boylam(radyan)} \quad (4.11)$$

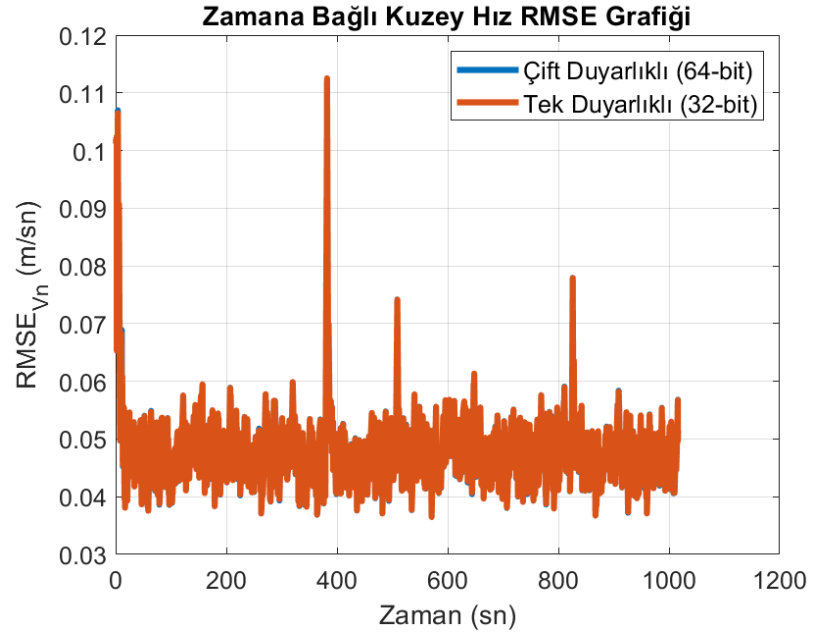


Şekil 4.21 Metre cinsine dönüştürülmüş enlem için farklı sayısal çözünürlüklerde zamana bağlı RMSE değerleri

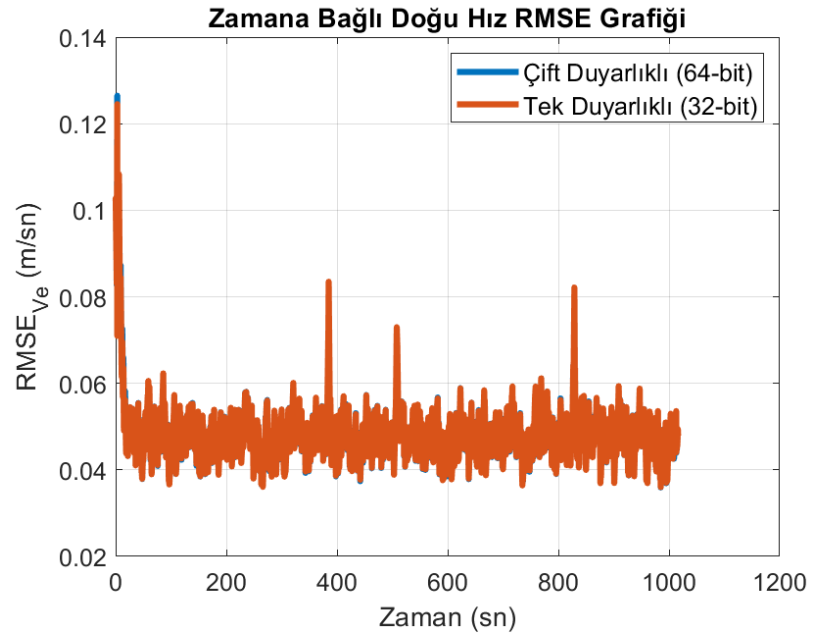


Şekil 4.22 Metre cinsine dönüştürülmüş boylam için farklı sayısal çözünürlüklerde zamana bağlı RMSE değerleri

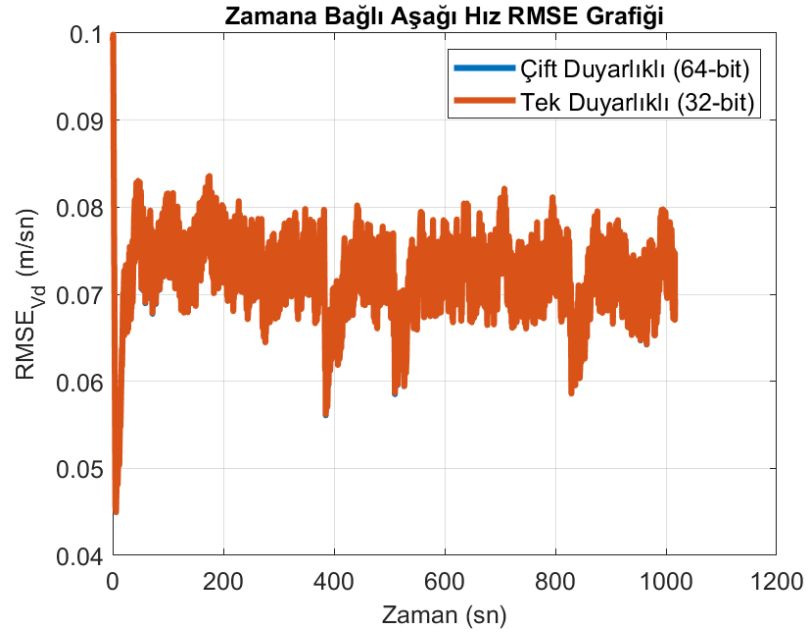
Pozisyon sonuçlarının ardından hız bileşenleri incelendiğinde (Şekil 4.23, Şekil 4.24 ve Şekil 4.25), tek ve çift duyarlıklılı aritmetik arasında belirgin bir farkın oluşmadığı görülmektedir. Bunun temel nedeni, hız verilerinin m/sn cinsinden ifade edilmesi ve bu aralığın tek duyarlıklılı aritmetiğin çözünürlük kapasitesinin oldukça üzerinde olmasıdır. Dolayısıyla tek duyarlıklılı veri tipi çözünürlüğü, hız bileşenlerindeki küçük değişimleri temsil etmekte yeterli hassasiyeti sağlayabilmekte ve pozisyonda gözlenen çözünürlük kaynaklı farklar hız bileşenlerinde ortaya çıkmamaktadır. Bu nedenle her iki veri tipi ile elde edilen RMSE değerleri birbirine oldukça yakın seyretmektedir.



Şekil 4.23 Kuzey hızı için farklı sayısal çözünürlüklerde zamana bağlı RMSE değerleri

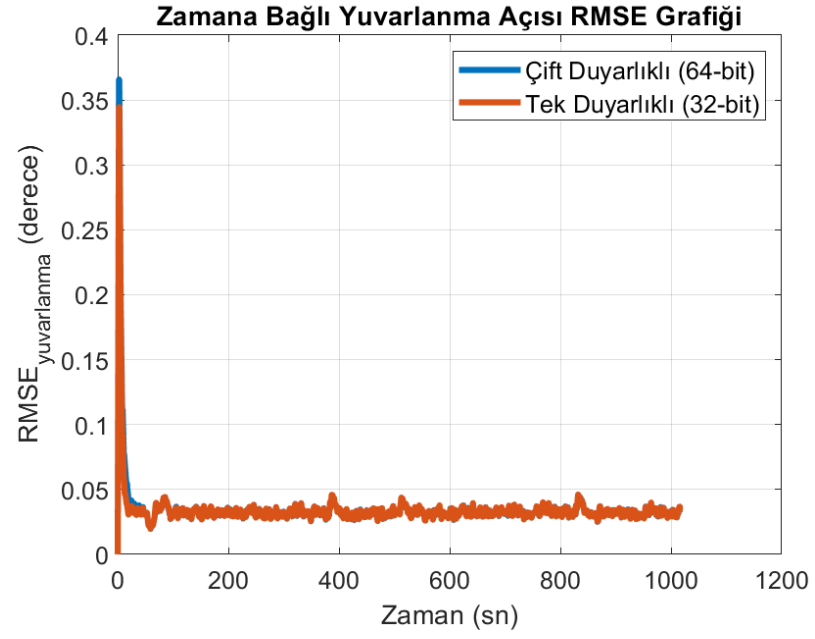


Şekil 4.24 Doğu hızı için farklı sayısal çözünürlüklerde zamana bağlı RMSE değerleri

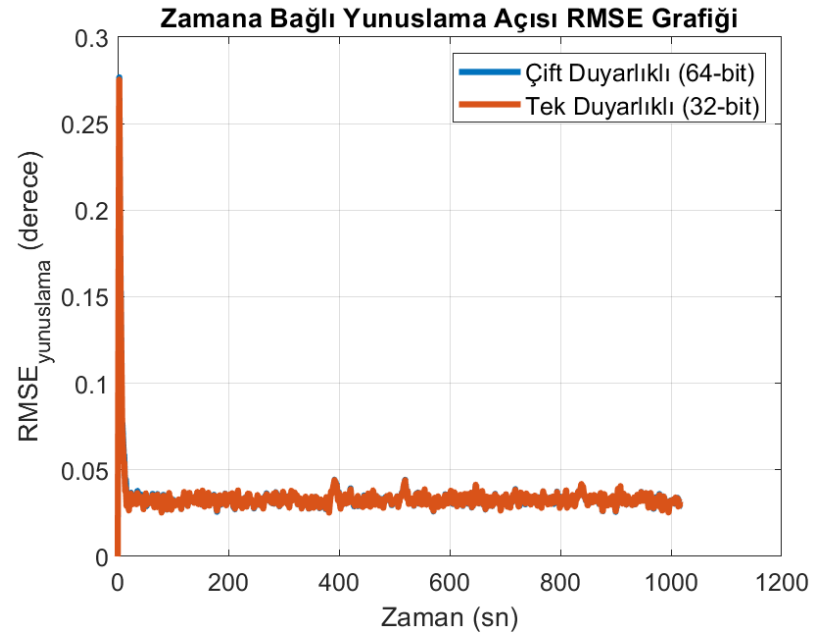


Şekil 4.25 Aşağı hız için farklı sayısal çözünürlüklerde zamana bağlı RMSE değerleri

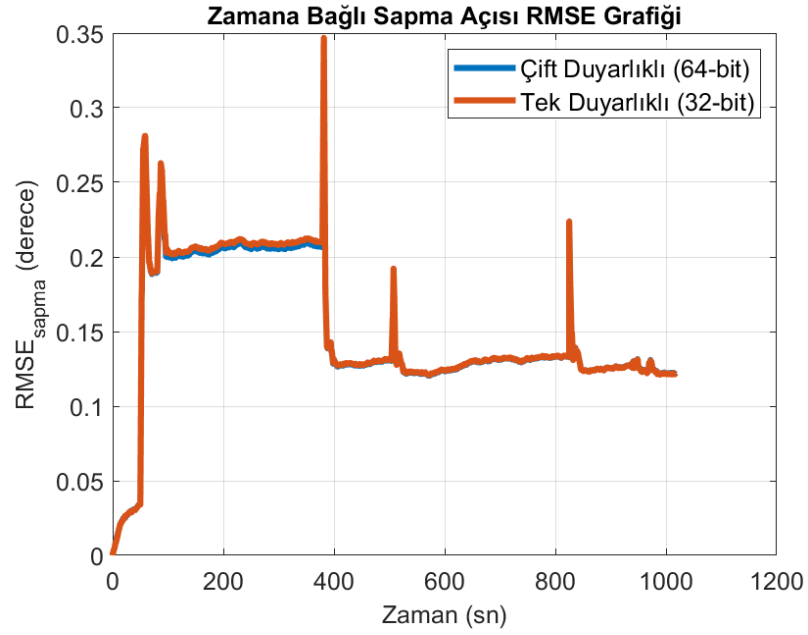
Yönelim verilerine ait RMSE sonuçları (Şekil 4.26, Şekil 4.27 ve Şekil 4.28), incelendiğinde; hız bileşenlerinde olduğu gibi, tek ve çift duyarlıklılı aritmetik kullanımları arasında kayda değer bir farkın oluşmadığı görülmektedir. Bu durumun ilk nedeni, açı değerlerinin tek duyarlıklılı veri tipi çözünürlük sınırlarından daha büyük bir mertebede olmasıdır. Bununla birlikte, sonuçlar üzerinde asıl belirleyici olan ve farkın oluşmamasını sağlayan temel etken; tek duyarlıklılı veri tipiyle elde edilen pozisyon ve hız verilerindeki hata artışının, önerilen metot sayesinde minimize edilmesidir.



Şekil 4.26 Yuvarlanma için farklı sayısal çözünürlüklerde zamana bağlı RMSE değerleri



Şekil 4.27 Yunuslama için farklı sayısal çözünürlüklerde zamana bağlı RMSE değerleri



Şekil 4.28 Sapma için farklı sayısal çözünürlüklerde zamana bağlı RMSE değerleri

4.4 Kahan Toplama Algoritmasının Rastgele Süreç Analizi

Bu bölümde, Kahan toplama algoritmasının ANS mekanizasyon denklemlerine entegrasyonu sonucunda oluşan enlem güncelleme karakteristiği detaylı bir istatistiksel analizle incelenmiştir. Analizin güvenilirliğini artırmak ve sonuçların tutarlılığını doğrulamak amacıyla, analiz süreci tek bir simülasyon ile sınırlı tutulmamış; bunun yerine 100 farklı Monte Carlo simülasyonu gerçekleştirilmiştir. Bu yaklaşım ile Kahan toplama algoritmasının enlem güncelleme davranışının anlık gürültülerden bağımsız, rastgele yapısı ortaya konulmuştur.

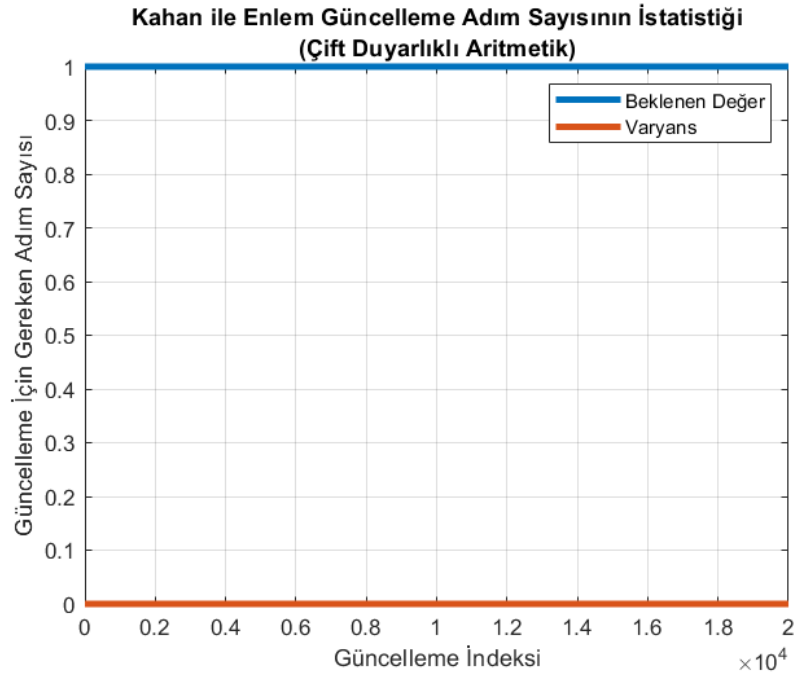
Analiz senaryosu kapsamında, 16 m/sn sabit hızla doğrudan Kuzey yönünde hareket eden bir araca ait ivmeölçer, dönüölçer ve KKBS verileri sentetik olarak üretilmiştir. Bu senaryonun seçilmesindeki temel amaç, hareket dinamiklerini tek bir eksene (Kuzey) odaklayarak diğer eksenlerden kaynaklanabilecek etkileri izole etmektir. Bu sayede, özellikle enlem kanalındaki değişimlerin yalın bir şekilde incelenmesi sağlanmıştır.

Elde edilen veriler ışığında, hem tek duyarlıklılı hem de çift duyarlıklılı veri tipleri için ayrı ayrı analizler gerçekleştirilmiştir. Özellikle tek duyarlıklılı veri tipinin sınırlı bit

çözünürlüğünden kaynaklanan yuvarlama probleminin, Kahan algoritması tarafından kaç adımda bir telafi edildiği nicel olarak ortaya konulmuştur.

Çift duyarlıklı veri tipi ile her enlem güncellemesinin kaç adımda bir gerçekleştiğine dair topluluk ortalaması ve varyans bilgileri Şekil 4.29’da görülmektedir. Her mekanizasyon adımında eşitlik (4.12) ile hesaplanan enlem artış miktarı, bölüm 3.1.3’de açıklanan en küçük anlamlı sayıdan büyük olduğu için; güncelleme işlemi hassasiyet kaybı nedeniyle ötelenmeden her adımda gerçekleşmektedir. Dolayısıyla, her güncelleme indeksi için topluluk ortalamaları alındığında; beklenen değerin 1 ve varyansın 0 olduğu bir sonuç elde edilmiştir.

$$[\Delta\phi] = \left[\frac{\hat{v}_n}{R_M + \hat{h}} \right] \cdot dt \quad (4.12)$$

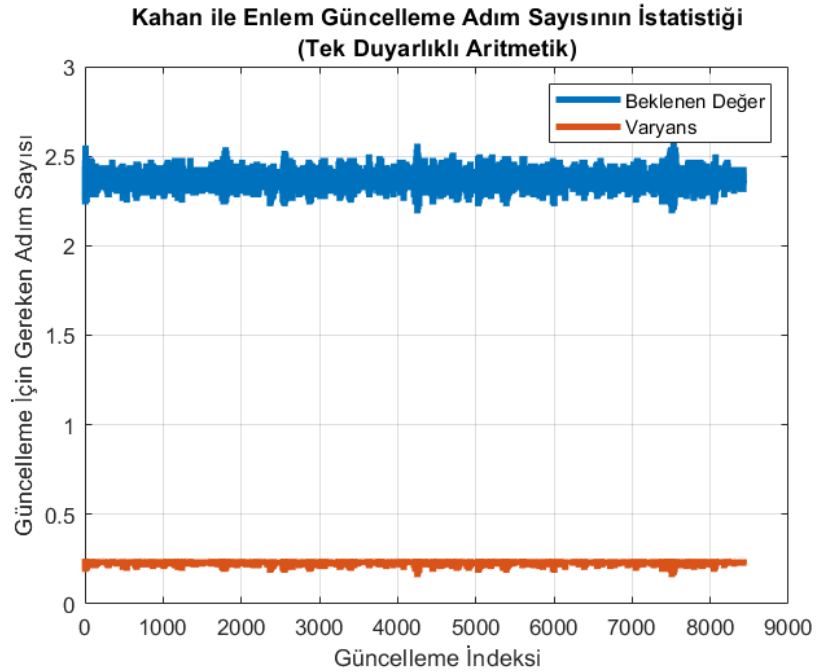


Şekil 4.29 Çift duyarlıklı aritmetik ile Kahan algoritması ile enlem güncellemesi için gerekli adım sayısına ait istatistiksel dağılım grafiği

Tek duyarlıklı veri tipi ile enlem güncellemesine ait istatistiksel bilgiler ise Şekil 4.30’da görülmektedir. Her mekanizasyon adımında eşitlik (4.12) ile hesaplanan enlem artış miktarı, bölüm 3.1.3’de açıklanan en küçük anlamlı sayıdan küçük kalmaktadır. Bu nedenle, güncelleme işlemi her adımda anlık olarak ana veriye yansıtılamamakta; Kahan

algoritması tarafından "telafi" değişkeninde biriktirilerek bir sonraki zaman adımına geçilmektedir. Dolayısıyla, biriken hata miktarı anlamlı bir büyüklüğe ulaşana kadar (2 veya 3 adım) güncelleme gerçekleşmediği için; topluluk ortalamalarının 1 yerine yaklaşık 2.4 seviyesinde salınım yaptığı ve varyansın sıfırdan farklı olarak yaklaşık 0.25 olduğu rastgele bir sonuç elde edilmiştir.

Her iki veri tipi için elde edilen enlem güncelleme adım sayıları üzerinde gerçekleştirilen analizler sonucunda; topluluk ortalamaları ve varyanslarının, zaman ortalamaları ve varyanslarına eşit olduğu gözlemlenmiştir. İstatistiksel parametrelerin zaman ekseninde ve topluluk genelinde tutarlılık göstermesi, incelenen sürecin ergodik bir karakteristiğe sahip olduğunu göstermektedir.



Şekil 4.30 Tek duyarlıklı aritmetik ile Kahan algoritması ile enlem güncellemesi için gerekli adım sayısına ait istatistiksel dağılım grafiği

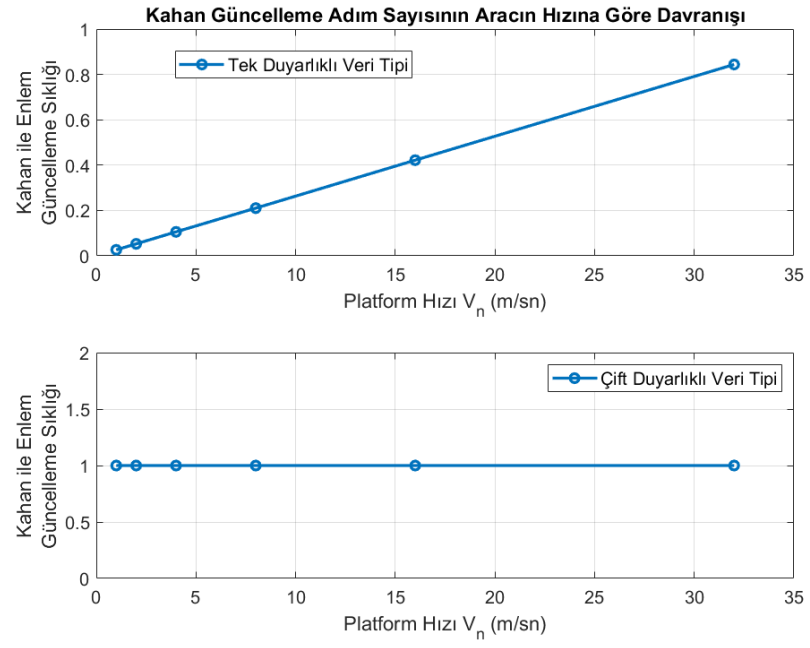
Kahan algoritmasının, enlem güncelleme sıklığını ve farklı platform hızlarına göre bu sıklığın değişimini analiz etmek amacıyla, Çizelge 4.3'te belirtilen farklı hız senaryoları oluşturulmuştur. Sürecin ergodik karakteristiği göz önünde bulundurularak, her bir hız değeri için tek bir uzun süreli koşum gerçekleştirilmiş ve Kahan güncelleme adım sayıları üzerinden ortalama güncelleme sıklıkları elde edilmiştir.

Çizelge 4.3 Platform Kuzey hızına bağlı olarak Kahan algoritması enlem güncelleme sıklığının karşılaştırılması

Platform Kuzey Hızı (V_N)	Kahan Algoritması ile Enlem Güncelleme Sıklığı (Tek Duyarlıklılı Veri Tipi)	Kahan Algoritması ile Enlem Güncelleme Sıklığı (Çift Duyarlıklılı Veri Tipi)
1	0.0263	1
2	0.0528	
4	0.106	
8	0.211	
16	0.422	
32	0.844	

Eşitlik (4.12)'de ifade edilen enlem artış miktarı ($\Delta\phi$), doğrudan platformun kuzey hızına ($\hat{v}_n$) bağlıdır ve aralarında doğrusal bir ilişki vardır. Şekil 4.31 (üst grafik) incelendiğinde, tek duyarlıklılı veri tipinde platform hızı arttıkça; Kahan algoritması tarafından telafi değişkeninde biriktirilerek enlem değerine eklenemeyen miktarın, ilgili enlem değerinde temsil edilebilen en küçük anlamlı büyüklüğe (çözünürlük sınırına) daha hızlı ulaştığı görülmektedir. Dolayısıyla, biriken hata miktarının bu eşik değeri daha sık aşmasına bağlı olarak, güncelleme sıklığı da platform hızıyla doğrusal bir şekilde artmaktadır. Buna karşın, çift duyarlıklılı veri tipinde (alt grafik); veri tipinin sağladığı yüksek çözünürlük sayesinde, hesaplanan değişim miktarı herhangi bir öteleme veya biriktirme işlemine gerek kalmadan, her adımda anlamlı bir büyüklük olarak işlenebilmiştir. Bu sayede, her simülasyon adımında güncelleme gerçekleşmiş ve güncelleme sıklığı hız değişiminden etkilenmeyerek sabit kalmıştır.

Elde edilen bu sonuçlar, Kahan toplama algoritmasının güncelleme mekanizmasının, rastgele bir gürültüden ziyade; taşınan bilginin büyüklüğüne bağlı, kararlı ve öngörülebilir bir yapı sergilediğini göstermektedir.



Şekil 4.31 Farklı platform hızları için, tek (üst) ve çift (alt) duyarlıklı veri tiplerinde Kahan algoritması ile enlem güncelleme sıklığının karşılaştırılması

5. SONUÇ VE DEĞERLENDİRME

Bu tez kapsamında, ANS/KKBS entegrasyon algoritması farklı sayısal duyarlılık seviyelerinde değerlendirilmiş; özellikle tek duyarlılı (single precision) aritmetikte karşılaşılan sayısal duyarlılık kayıplarının sistem performansına etkisi ayrıntılı biçimde incelenmiştir. Elde edilen sonuçlar, hem mekanizasyon aşamasında hem de Kalman Filtresi hesaplamalarında kullanılan sayısal yöntemlerin navigasyon doğruluğu üzerinde belirleyici olduğunu göstermiştir.

Mekanizasyon sürecinde, AÖB (Ataletsel Ölçüm Birimi) ölçümlerinden türetilen küçük artımların, kayan nokta aritmetiğinin çözünürlük sınırları nedeniyle kayba uğramasını engellemek amacıyla Kahan Toplama Algoritması kullanılmıştır. Bu yöntem, toplama işlemlerinde oluşan yuvarlama hatalarını azaltarak, özellikle uzun süreli entegrasyonlarda ortaya çıkabilecek birikimli hata davranışını önemli ölçüde bastırmıştır. Bu sayede, özellikle tek duyarlılı işlemlerle elde edilen pozisyon, hız ve yönelim sonuçları kayda değer biçimde iyileştirilmiştir.

Ek olarak, mekanizasyon sürecinde kayan nokta aritmetiğinin çözünürlük sınırlamalarından kaynaklanan nicemleme etkileri analiz edilmiştir. Bu etkilerden türetilen varyans bileşenlerinin süreç gürültüsü kovaryans matrisine (Q) entegre edildiği yeni bir gürültü modeli geliştirilmiştir. Bu model, düşük çözünürlüklü artımların doğrudan temsil edilemediği durumlarda ortaya çıkan belirsizliği sistematik bir şekilde Kalman filtresine aktarmakta; böylece kayan nokta aritmetiğinin sebep olduğu hataların filtre tarafından daha gerçekçi ve tutarlı biçimde yönetilmesine olanak sağlamaktadır.

ANS ve KKBS verilerinin füzyonu için kullanılan Kalman Filtresi adımlarında karşılaşılan temel bir problem olan inovasyon kovaryans matrisinin tersinin alınması sırasında ortaya çıkan sayısal kararsızlığa karşı da önlem alınarak, algoritmanın nümerik olarak kararlı bir şekilde çalışması sağlanmıştır.

Enlem ve boylam bileşenlerinin radyan cinsinden ifade edilmesi, kovaryans matrisinde çok küçük değerlerin oluşmasına neden olmakta; bu durum matrisin durum sayısını (condition number) yükselterek ters alma işlemlerinde nümerik dengesizliklere yol açmaktadır. Bu sorunu gidermek amacıyla pozisyon bileşenleri, Dünya yarıçapı kullanılarak metre ölçeğine dönüştürülmüş ve yalnızca Kalman adımlarında kullanılan ilgili matrisler bu doğrultuda ölçeklendirilmiştir. Böylece inovasyon kovaryans matrisinin koşullanma sayısı iyileştirilmiş ve filtre hesaplamaları daha kararlı hale getirilmiştir.

Bu tez kapsamında geliştirilen yöntemler, tek duyarlıklı veri tipiyle çalışan ANS/KKBS entegrasyon algoritmasının performansını anlamlı ölçüde iyileştirmiştir. Kahan toplama algoritması, nicemleme tabanlı süreç gürültüsü modeli ve Kalman filtresi ölçeklendirme yaklaşımının bütünleşik uygulanması; hız ve yönelim bileşenlerinde çift duyarlıklı aritmetik sonuçlarıyla neredeyse tam uyum sağlamıştır. Pozisyon bileşenlerinde ise tek duyarlıklı aritmetiğin çözünürlük sınırları nedeniyle bir hassasiyet kaybı oluşsa da, uygulanan düzeltmelerle bu farkın çift duyarlıklı aritmetiğe kıyasla 0.1–0.2 metre RMSE aralığına kadar indirgenebildiği tespit edilmiştir. 100 bağımsız Monte Carlo koşumu üzerinden elde edilen bu bulgular; uygun sayısal tekniklerin kullanılması durumunda, düşük çözünürlüklü aritmetiğin metre mertebesinde hassasiyet gerektiren uygulamalar için güvenilir ve kararlı bir alternatif sunduğunu göstermektedir.

Gelecek çalışmalarda, önerilen algoritmanın gerçek AÖB ve KKBS verileri ile çalıştırılarak performansının değerlendirilmesi planlanmaktadır.

KAYNAKLAR

- Ahmed, H., Ullah, I., Khan, U., Qureshi, M. B., Manzoor, S., Muhammad, N., Khan, M. U. S. ve Nawaz, R. 2019. Adaptive filtering on GPS-aided MEMS-IMU for optimal estimation of ground vehicle trajectory. *Sensors*, 19(24), 5357.
- Altınöz, B. 2015. Identification of inertial sensor error parameters. Yüksek lisans tezi, Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Elektrik – Elektronik Mühendisliği, 169, Ankara.
- Bar-Shalom, Y., Li, X.R. ve Kirubarajan, T. 2001. Estimation with applications to tracking and navigation. John Wiley & Sons, 558, New York.
- Bhaskara, R. R., Majji, M. ve Guzman, F. 2024. Quantized state estimation for linear dynamical systems. *Sensors*, 24(19), 6381.
- Carson, E. ve Chen, X. 2025. Pychop: Emulating Low-Precision Arithmetic in Numerical Methods and Neural Networks. arXiv:2504.07835.
- Cossaboom, M., Georgy, J., Karamat, T. ve Noureldin, A. 2012. Augmented Kalman filter and map matching for 3D RISS/GPS integration for land vehicles. *International Journal of Navigation and Observation*, 2012, 576807
- Dongarra, J., Gunnels, J., Bayraktar, H., Haidar, A. ve Ernst, D. 2024. Hardware Trends Impacting Floating-Point Computations in Scientific Applications. arXiv:2411.12090.
- Fakharian, A., Gustafsson, T. ve Mehrfam, M. 2011. Adaptive Kalman filtering based navigation: An IMU/GPS integration approach. *International Conference on Networking, Sensing and Control*, 11-13 April, 181-185, Delft, Netherlands.
- Farrell, J. A. 2008. Aided navigation: GPS with high rate sensors. McGraw-Hill, 530, New York.
- Flenniken, W. S., Wall, J. H. ve Bevly, D. M. 2005. Characterization of various IMU error sources and the effect on navigation performance. *Proceedings of the 18th International Technical Meeting of the Satellite Division of The Institute of Navigation (ION GNSS)*, 13-16 September, 967–978, Long Beach, USA.
- Fornaciari, W., Agosta, G., Cattaneo, D., Denisov, L., Galimberti, A., Magnani, G. ve Zoni, D. 2023. Hardware and Software Support for Mixed Precision Computing: a Roadmap for Embedded and HPC Systems. *Design, Automation & Test in Europe Conference & Exhibition (DATE)*, 17-19 April, 1–6, Antwerp, Belgium.
- Fried, W.R. 1977. A Comparative Performance Analysis of Modern Ground-Based, Air-Based, and Satellite-Based Radio Navigation Systems. *Navigation*, 24(1), 48-58.
- Goldberg, D. 1991. What Every Computer Scientist Should Know About Floating-Point Arithmetic. *ACM Computing Surveys*, 23(1), 5–48.

- Groves, P. D. 2013. Principles of GNSS, inertial, and multisensor integrated navigation systems. Artech House, 776, Boston.
- Gupta, S., Agrawal, A., Gopalakrishnan, K. ve Narayanan, P. 2015. Deep Learning with Limited Numerical Precision. Proceedings of the 32nd International Conference on Machine Learning (ICML'15), 6-11 July, 1737–1746, Lille, France.
- Güreş, O. 2019. Development and comparison of the Extended Kalman Filter and Unscented Kalman Filter for both tightly coupled and loosely coupled INS/GNSS integration by using MEMS IMU. Yüksek lisans tezi. Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Elektrik – Elektronik Mühendisliği, 119 Ankara.
- Haidar, A., Tomov, S., Luszczek, P., Higham, N.J., Abdelfattah, A. ve Dongarra, J. 2018. The Design of Fast and Energy-Efficient Linear Solvers: On the Potential of Half-Precision Arithmetic and Iterative Refinement Techniques. Computational Science – ICCS 2018, Lecture Notes in Computer Science, vol 10860, Springer, 586-600, Cham.
- Han, S. ve Wang, J. 2011. Quantization and colored noises error modeling for inertial sensors for GPS/INS integration. IEEE Sensors Journal, 11(6), 1493–1503.
- Higham, N. J. 1993. The Accuracy of Floating Point Summation. SIAM Journal on Scientific Computing, 14(4), 783–799.
- IEEE Computer Society. 2019. IEEE Standard for Floating-Point Arithmetic (IEEE Std 754-2019). IEEE Standards Association, 1–84, New York.
- Junaid, M., Aliev, H., Park, S., Kim, H., Yoo, H. ve Sim, S. 2024. Hybrid Precision Floating-Point (HPFP) Selection to Optimize Hardware-Constrained Accelerator for CNN Training. Sensors, 24(7), 2145.
- Kashi, A., Lu, H., Brewer, W., Rogers, D., Matheson, M., Shankar, M. ve Wang, F. 2025. Mixed-precision numerics in scientific applications: survey and perspectives. arXiv:2412.19322.
- Kim, D., Shin, S. ve Kweon, I. S. 2018. On-line initialization and extrinsic calibration of an inertial navigation system with a relative preintegration method on manifold. IEEE Transactions on Automation Science and Engineering, 15(3), 1272–1285.
- Klein, A. 2006. A Generalized Kahan–Babuška Summation Algorithm. Computing, 76, 279–293.
- Lakshmikantham, V. ve Sen, S.K. 2005. Error and Complexity in Numerical Methods. Mathematics in Science and Engineering, Cilt 201, Bölüm 5, Elsevier, 147-193, Amsterdam.
- Liu, M. ve Chang, G. 2015. Numerically and statistically stable Kalman filter for INS/GNSS integration. Journal of Aerospace Engineering, 230(1), 321-332.

- Narasimhappa, M., Mahindrakar, A. D., Guizilini, V. C., Terra, M. H. ve Sabat, S. L. 2018. An improved Sage Husa adaptive robust Kalman filter for de-noising the MEMS IMU drift signal. 2018 Indian Control Conference (ICC), 9-11 January, 229–234, Kanpur, India.
- Narasimhappa, M., Mahindrakar, A. D., Guizilini, V. C., Terra, M. H. ve Sabat, S. L. 2020. MEMS-based IMU drift minimization: Sage Husa adaptive robust Kalman filtering. *IEEE Sensors Journal*, 20(1), 250–260.
- Nebot, E. ve Durrant-Whyte, H. 1999. Initial calibration and alignment of low-cost inertial navigation units for land vehicle applications. *Journal of Robotic Systems*, 16(2), 81–92.
- Noureldin, A., Karamat, T. B. ve Georgy, J. 2013. Fundamentals of inertial navigation, satellite-based positioning and their integration. Springer, 313, Heidelberg.
- Parhami, B. 2003. Number Representation and Computer Arithmetic, In: *Encyclopedia of Information Systems*. Elsevier, 317-333, San Diego.
- Sandoval-Hernandez, M., Velez-Lopez, G., Vazquez-Leal, H., Filobello-Nino, U., Morales Alarcon, G., De-Leo-Baquero, E., Bielma-Perez, A., Sampieri, C., Friscione, J., Contreras-Hernandez, A., Alvarez-Gasca, O., Sanchez-Orea, J. ve Cuellar-Hernandez, L. 2023. Basic implementation of fixed-point arithmetic in numerical analysis. *International Journal of Engineering and Technical Research*, 12, 313–318.
- Sayan, R. 2024. GNSS ve IMU kullanarak ARM tabanlı seyrüsefer sisteminin geliştirilmesi. Yüksek lisans tezi. Marmara Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Elektrik-Elektronik Mühendisliği, 104, İstanbul.
- Sirikonda, S. ve Parayitam, L. 2021. Integration of low-cost IMU with MEMS and NavIC/IRNSS receiver for land vehicle navigation. *Proceedings of the 34th ION GNSS+*, 20-24 September, 2705–2717, St. Louis, Missouri.
- Taşan, K. C. 2019. Parçacık süzgecinin ataletsel ölçüm birimi ilk yönelim probleminin çözümünde uygulanması. Yüksek lisans tezi. Ankara Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Elektrik-Elektronik Mühendisliği, 85, Ankara.
- Titterton, D. H. ve Weston, J. L. 2004. Strapdown inertial navigation technology 2nd edition. Michael Faraday House, 581, USA.
- Ünsal, D. 2012. Estimation of deterministic and stochastic IMU error parameters. Yüksek lisans tezi. Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Elektrik-Elektronik Mühendisliği, 169, Ankara.
- Ünsal, D. ve Demirbaş, K. 2012. Estimation of deterministic and stochastic IMU error parameters. *IEEE/ION Position, Location and Navigation Symposium*, 23-26 April, 862–868, Myrtle Beach, USA.

- Welch, G. ve Bishop, G. 1995. An introduction to the Kalman filter. University of North Carolina at Chapel Hill, Department of Computer Science, 16 s., Chapel Hill, USA.
- Wong, P. W. 1990. Quantization noise, fixed-point multiplicative roundoff noise, and dithering. IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing, 38(2), 286–300.