

ANKARA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

SPATIAL (MEKÂNSAL) OTOREGRESİF MODELLER: ÖZELLİKLERİ VE
PARAMETRE TAHMİNİ

Duygu PEKYALMAN

İSTATİSTİK ANABİLİM DALI

ANKARA

2024

Her hakkı saklıdır

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

SPATIAL (MEKÂNSAL) OTOREGRESİF MODELLER: ÖZELLİKLERİ VE PARAMETRE TAHMİNİ

Duygu PEKYALMAN

Ankara Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
İstatistik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Olçay ARSLAN

Bu tez çalışmasında mekansal etki, mekansal otokorelasyon, ağırlık matrisleri, mekansal regresyon modelleri, bu modellerin tahmin yöntemleri, robustluk, simülasyon çalışması ve gerçek veri seti üzerindeki tahmin sonuçları ele alınmıştır. Mekansal modellerin klasik tahmin yöntemi ile elde edilen tahmin edicileri, veri setinde aykırı değerler olmaması durumunda iyi sonuçlar vermektedir. Ancak veri setinde aykırı değer olması durumunda veya hataların normal dağılmaması durumunda klasik yöntemlerle elde edilen sonuçlar tutarlı olmamaktadır. Bu gibi durumları gidermek için ise robust yöntemler kullanılmaktadır. Mekansal otoregresif model ve mekansal hata modelinin Huber'in tanımladığı M tahmin yöntemi ile tahmin edicileri ele alınmıştır. Mekansal otoregresif model (SAR)'ın en çok olabilirlik tahmin edicisi ile robust tahmin edicisi, farklı hata dağılımları ile simüle edilmiştir. Simülasyon sonuçlarında, robust tahmin edicinin normallik varsayımının sağlanamadığı, aykırı değerlerin olduğu durumlarda tercih edilmesi daha tutarlı ve dayanıklı değerlerin sağlandığını göstermiştir. Ayrıca gerçek bir veri seti üzerinde uygulama yapılarak robust tahmin edicinin performansı gösterilmiştir.

Aralık 2024, 85 sayfa

Anahtar Kelimeler: Mekansal etki, mekansal ağırlık, mekansal regresyon, parametre tahmini, robust

ABSTRACT

Master Thesis

SPATIAL AUTOREGRESSIVE MODELS: PROPERTIES AND PARAMETER ESTIMATION

Duygu PEKYALMAN

Ankara University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Statistics

Supervisor: Prof. Dr. Olçay ARSLAN

In this study, spatial effect, spatial autocorrelation, weight matrices, spatial regression models, estimation methods of these models, robustness, simulation study and estimation results on real data set are discussed. Estimators of spatial models obtained with classical estimation method give good results in case there are no outliers in the data set. However, if there are outliers in the data set or errors are not normally distributed, the results obtained with classical methods are not consistent. Robust methods are used to eliminate such situations. Estimators of spatial autoregressive model and spatial error model with M estimation method defined by Huber are discussed. Maximum likelihood estimator and robust estimator of spatial autoregressive model (SAR) are simulated with different error distributions. Simulation results show that robust estimator is preferred in cases where normality assumption is not provided and there are outliers, more consistent and robust values are provided. Additionally, the performance of the robust estimator is demonstrated by applying it on a real data set.

December 2024, 85 pages

Key Words: Spatial effect, spatial weight, spatial regression, parameter estimation, robust

TEŞEKKÜR

Tez çalıőmamın her aőamasında beni motive eden, desteğini hiçbir zaman esirgemeyen değerli danışman hocam sayın Prof. Dr. Olçay ARSLAN'a, sayın Doç.Dr. Özlem KAYMAZ'a, sayın Dr.Öğr. Üyesi őenay ÖZDEMİR'e, çalıőmalarımnda değerli zamanını ve bilgilerini esirgemeyen sayın Dr. Öğr. Üyesi Yeőim GÜNEY ve sayın Dr. Öğr. Üyesi Yetkin TUA'a, tez süreci boyunca gösterdikleri sabır ve destekleri ile bugüne ulaşmamı sağlayan sevgili aileme sonsuz teşekkür ederim.

Duygu PEKYALMAN
Ankara, Aralık 2024

İÇİNDEKİLER

TEZ ONAY SAYFASI

ETİK.....	i
ÖZET.....	ii
ABSTRACT	iii
TEŞEKKÜR	iv
SİMGELER DİZİNİ	vii
ŞEKİLLER DİZİNİ	viii
ÇİZELGELER DİZİNİ	ix
1. GİRİŞ	1
2. MEKANSAL ETKİLER	4
2.1 Mekansal Ağırlıklandırma	5
2.2 $(I_n - \rho W)^{-1}$ ' in Rolü	9
2.3 Mekansal Otokorelasyon	10
3. MEKANSAL REGRESYON MODELLERİ	15
3.1 Mekansal Otoregresif Model (SAR)	15
3.2 Mekansal Hata Modeli (SEM)	17
3.3 Mekansal Durbin Modeli (SDM)	18
4. MEKANSAL MODELLER İÇİN TAHMİN YÖNTEMLERİ.....	20
4.1 Maksimum Olabilirlik Yöntemi	20
4.2 İki Aşamalı En Küçük Kareler Yöntemi	29
4.3 Bayes Yöntemi	30
5. MEKANSAL BAĞIMLILIK İÇİN BELİRLEME TESTLERİ.....	32
5.1 Moran I Testi.....	32
5.2 Lagrange Çarpan Testleri	33
5.2.1 Mekansal hata bağımlılığı için Lagrange çarpan testi	33
5.2.2 Mekansal gecikme bağımlılığı için Lagrange çarpan testi	33
5.3 Sağlam Lagrange Çarpan Testleri	34
5.3.1 Mekansal hata bağımlılığı için sağlam Lagrange çarpan testi.....	34
5.3.2 Mekansal gecikme bağımlılığı için sağlam Lagrange çarpan testi.....	35
6. ROBUST TAHMİN EDİCİLERİ VE ÖZELLİKLERİ	36
6.1 M Tahmin Edicileri.....	37

6.2 Mekansal Otoregresif Modelin M Tahmin Edicisi	40
6.3 Mekansal Hata Modelinin M Tahmin Edicisi	43
7. SİMÜLASYON ÇALIŞMASI.....	47
8. UYGULAMA.....	69
9. SONUÇ.....	77
KAYNAKLAR	80
ÖZGEÇMİŞ.....	85

SİMGELER DİZİNİ

ε	Hata Vektörü
σ^2	Varyans
λ	Mekansal Hata Katsayısı
γ	Mekansal Bağımlılığı Gösteren Bağımsız Değişken Katsayısı
ρ	Mekansal Otoregresif Katsayı
β	Regresyon Katsayı Vektörü
W	Mekansal Ağırlık Matrisi
ψ_c	Vektör Değerli Fonksiyon
h_c	Huber Fonksiyonu
$\phi(\cdot)$	Normal Olasılık Yoğunluk Fonksiyonu
$\Phi(\cdot)$	Kümülatif Dağılım Fonksiyonu
w_{ij}	i ve j Konumları Arasındaki Komşuluk İlişkisi

Kısaltmalar

EKK	En Küçük Kareler Yöntemi
GMM	Genelleştirilmiş Momentler Yöntemi
LM	Lagrange Çarpanı
ML	En Çok Olabilirlik Yöntemi
MSE	Hata Kareler Ortalaması
RLM	Robust Lagrange Çarpanı
SAR	Mekansal Otoregresif Model
SDM	Mekansal Durbin Model
SEM	Mekansal Hata Modeli

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 2.1 Beş durumun komşuluk ilişkisi.....	6
Şekil 2.2 Mekansal otokorelasyon	10
Şekil 2.3 Kale komşuluğu	11
Şekil 2.4 Fil komşuluğu	11
Şekil 2.5 Vezir komşuluğu.....	11
Şekil 3.1 Mekansal regresyon modelleri	19
Şekil 8.1 Moran dağılım grafiği	72

ÇİZELGELER DİZİNİ

Çizelge 2.1 Mekansal bölgelere ait komşuluklar ve suç oranları.....	12
Çizelge 2.2 yi ve yj değerlerinin ortalamalardan fark çarpımları	13
Çizelge 2.3 Ağırlıklandırılmış fark çarpımları.....	13
Çizelge 6.1 M tahmin ediciler için kullanılan fonksiyonlar.....	39
Çizelge 7.1 Normallik, mekansal ilişki ve varyans homojenliğinin incelenmesi	48
Çizelge 7.2 Standart normal dağılım $\rho=0.4, 0.6, 0.8$ $n = 100$ yanlılık ve MSE sonuçları	50
Çizelge 7.3 Standart normal dağılım $\rho=0.4, 0.6, 0.8$ $n = 200$ yanlılık ve MSE sonuçları	51
Çizelge 7.4 Standart normal dağılım $\rho=0.4, 0.6, 0.8$ $n=500$ yanlılık ve MSE sonuçları	52
Çizelge 7.5 Karma $[0,9*N(0,1) +0,1*N(0,1)]$ $\rho=0.4, 0.6, 0.8$ $n = 100$ yanlılık ve MSE sonuçları	53
Çizelge 7.6 Karma $[0,9*N(0,1)+0,1*N(0,1)]$ $\rho=0.4, 0.6, 0.8$ $n = 200$ yanlılık ve MSE sonuçları	55
Çizelge 7.7 Karma $[0,9*N(0,1)+0,1*N(0,1)]$ $\rho=0.4, 0.6, 0.8$ $n = 500$ yanlılık ve MSE sonuçları	56
Çizelge 7.8 Karma $[0,8*N(0,1)+0,2*N(0,20)]$ $\rho=0.4, 0.6, 0.8$ $n = 100$ yanlılık ve MSE sonuçları	57
Çizelge 7.9 Karma $[0,8*N(0,1)+0,2*N(0,20)]$ $\rho=0.4, 0.6, 0.8$ $n = 200$ yanlılık ve MSE sonuçları	58
Çizelge 7.10 Karma $[0,8*N(0,1)+0,2*N(0,20)]$ $\rho=0.4, 0.6, 0.8$ $n = 500$ yanlılık ve MSE sonuçları.....	59
Çizelge 7.11 $t(4)$ Dağılımı $\rho=0.4, 0.6, 0.8$ $n = 100$ yanlılık ve MSE sonuçları	61
Çizelge 7.12 $t(4)$ Dağılımı $\rho=0.4, 0.6, 0.8$ $n = 200$ yanlılık ve MSE sonuçları.....	62
Çizelge 7.13 $t(4)$ Dağılımı $\rho=0.4, 0.6, 0.8$ $n = 500$ yanlılık ve MSE sonuçları.....	63
Çizelge 7.14 Çarpık dağılım (son %10 değer 5 katı) $\rho=0.4, 0.6, 0.8$ $n = 100$ yanlılık ve MSE sonuçları.....	64
Çizelge 7.15 Çarpık dağılım (son %10 değer 5 katı) $\rho=0.4, 0.6, 0.8$ $n = 200$ yanlılık ve MSE sonuçları.....	65
Çizelge 7.16 Çarpık dağılım (son %10 değer 5 katı) $\rho=0.4, 0.6, 0.8$ $n = 500$ yanlılık ve MSE sonuçları.....	67
Çizelge 8.1 Veri setindeki değişkenlerin tanımlayıcı istatistikleri.....	70
Çizelge 8.2 Normallik testi	71

Çizelge 8.3 Moran's I istatistiğinin sonuçları	72
Çizelge 8.4 Mekansal gecikme bağımlılığı için klasik ve sağlam Lagrange testlerinin sonuçları	72
Çizelge 8.5 SAR modelinin ML tahmincisi ile sağlam M tahmin edicisinin deprem verilerine uygulanarak elde edilen tahmin sonuçları.....	73

1. GİRİŞ

Mekansal ekonometri kavramı ilk kez 1974'te Hollanda İstatistik Derneği'nin yıllık toplantısında Paelinck tarafından kullanılmıştır (Paelinck ve Klaassen 1979). Ekonometrinin alt dallarından biri olan mekansal ekonometri, mekansal etkilerin yorumlanması ile ilgilenmektedir (Anselin 1988). Yakın konumların etkilerinin ölçülmesi ihtiyacı, mekansal ekonometrinin gelişmesinin başlıca nedenidir (Zeren 2010). Tobler' in (1970) ifade ettiği gibi; "Her şey diğer her şeyle ilişkilidir ancak yakın şeyler uzak şeylerden daha fazla ilişkilidir." şeklindedir. Bu yüzden yapılacak olan analizlerde mekan etkisinin alınması gerekmektedir. Mekansal ekonometrik modellerin tahmini için ilk çalışmalara başlayan Whittle (1954)'dir. Anselin (1988) mekansal ekonometrik modellerin tahminleri ve belirleme testleri hakkında "Spatial Econometrics: Methods and Models" kitabını yazmıştır. Mekansal ekonometri ile ilgili Anselin (1992), Anselin ve Hudak (1992), Anselin ve Smirnov (1996), Anselin, Bera, Florax ve Yoon (1996) ve Anselin ve Bera (1998) çalışmalar yapmışlardır.

Anselin (1988) mekansal ekonometriyi konumdan kaynaklanan farklılıkların istatistiksel analizlere dahil edilmesi şeklinde tanımlamaktadır (Anselin 1988, Tuzcu 2016, Ketten 2019). Klasik regresyon modeline mekana bağlı veriler eklendiğinde elde edilen veriler klasik istatistik yöntemleriyle analiz edilemez. Dolayısıyla bu yöntemlerle mekansal istatistik ilgilenir. Cliff ve Ord (1968), mekansal otokorelasyon terimini kullanmıştır. Mekansal otokorelasyonu test etmek için ise Moran (1948, 1950a, 1950b) tarafından Moran I testi geliştirilmiştir. Mekansal istatistik analizleri ilk olarak Moran (1948), Geary (1954) ve Whittle (1954) tarafından ortaya çıkmıştır. Ord (1975), mekansal ekonometrik modeller için en çok olabilirlik yöntemini, Anselin (1980) araç değişkenler ve Kelejian ve Prucha (1998, 1999) genelleştirilmiş momentler yöntemini geliştirmişlerdir (Yıldırım 2018). Lesage ve Pace (2009) tarafından mekansal otoregresif modellerin parametre tahminleri, geliştirilen tahmin yöntemleri ile elde edilmiştir. Mekansal modellerin tahmininde bağımlı değişken eşitliğin sağ tarafında bağımsız değişken olarak yer aldığından En Küçük Kareler yöntemi ile elde edilen tahminler tutarsız olmaktadır. Dolayısıyla En Çok Olabilirlik yöntemi ile tahmini gerçekleştirilir ve elde edilen parametre tahminleri etkin ve tutarlı olur.

İstatistiksel analizler yapılırken genellikle verilerin normal dağılımdan geldiği varsayılır. Ancak veri setinde aykırı değer, çarpıklık ve basıklık gibi durumlar ile karşılaşılması durumunda analizlerin yapılması zorlaşır. Bu sorunları giderebilmek için ise dayanıklı istatistik yöntemlerinden yararlanılır. Box (1953) tarafından ilk defa robust terimi kullanılmıştır. Dayanıklı regresyon yöntemleri, hata terimlerinin normal dağılmadığı ve modelde var olan aykırı değerlere karşı dayanıklı parametre tahminleri elde eder. Huber (1964), dayanıklı istatistiksel yöntemlerinin geniş bir tahminleyici sınıfı olan M tahmin ediciyi geliştirmiştir (Büyükkör 2020). Mekansal otoregresif modellerin yazılım alanındaki gelişmelerinde ise R programında *spdep* paketi, Roger Bivand (2002) tarafından oluşturulmuştur.

Bu çalışmanın amacı, mekansal otoregresif modellerin özelliklerinden bahsedip, modellerin parametre tahminlerini en çok olabilirlik tahmin yöntemi ve robust M tahminleme yöntemi ile elde etmektir.

Giriş bölümünde mekansal ekonometri ile ilgilenilen çalışmacılara değinilmiştir.

İkinci bölümde klasik regresyon modeli tanıtıldıktan sonra mekansal etkinin modele eklenmesiyle oluşan mekansal otokorelasyondan bahsedilecektir. Modeldeki mekansal ağırlık matrisinin nasıl oluştuğu ele alınıp, Lesage'in 5 durumlu örneği incelenecektir.

Üçüncü bölümde mekansal regresyon modellerinden mekansal gecikme modeli (SAR), mekansal hata modeli (SEM) ve mekansal Durbin modeli (SDM) tanıtılıp, mekansal regresyon modellerinin olduğu şema incelenecektir.

Dördüncü bölümde mekansal modeller için kullanılan tahmin yöntemlerinden bahsedilip, mekansal otoregresif model, mekansal hata modeli ve mekansal Durbin modeli için maksimum olabilirlik yöntemleri ile tahminler yapılacaktır.

Beşinci bölümde mekansal modellerdeki bağımlılık belirlenirken kullanılan testler tanıtılacaktır.

Altıncı bölümde mekansal modellerdeki hataların dağılımı normal olmadığında veya veri setinde aykırı değerler olması durumunda bir önceki bölümde elde edilen parametre tahminlerinin tutarsız ve yanlı olmasına yol açar. Bu gibi durumlarda ise robust tahmincileri ele alınır. M tahminleme yönteminden bahsedilip mekansal otoregresif model ve mekansal hata modelinin M tahmin edicileri elde edilecektir.

Yedinci bölümde ise mekansal otoregresif model (SAR)'in en çok olabilirlik ve robust tahmin edicisinin performansı simülasyon çalışması ile anlatılacaktır.

Sekizinci bölümde ise gerçek bir veri seti üzerinde mekansal otoregresif modelin en çok olabilirlik ve robust tahmin edicisi elde edilip karşılaştırma yapılacaktır.

Sonuç bölümünde ise çalışmada nelerin amaçlandığından ve ele alınan tahmin yöntemlerinin vermiş olduğu tahmin edicilerden bahsedilecektir.

2. MEKANSAL ETKİLER

Çoklu doğrusal regresyon modeli aşağıdaki gibi ifade edilmektedir.

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + \dots + \beta_k x_{ik} + \varepsilon_i \quad i = 1, 2, \dots, n \quad j = 1, 2, \dots, k$$

Burada y_i bağımlı değişkenin i . gözlem değerini, $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_k$ regresyon parametrelerini, x_{ij} $i = 1, 2, \dots, n$ $j = 1, 2, \dots, k$ bağımsız değişkenleri ve ε_i hata terimini göstermektedir.

Bu modelin matris gösterimi ise aşağıdaki gibidir.

$$y = X\beta + \varepsilon$$

Regresyon modelinde yer alan y , $n \times 1$ boyutlu yanıt değişken vektörünü; X , $n \times p$ boyutlu açıklayıcı değişkenler matrisini; β , $p \times 1$ boyutlu regresyon parametre vektörünü; ε , $n \times 1$ boyutlu hata terimi vektörünü oluşturmaktadır.

Varsayımlarımız;

$$\varepsilon \sim N(0, \sigma^2 I)$$

Hata terimleri normal dağılır.

$$E(\varepsilon_i | X_i) = 0$$

Hata terimlerinin ortalaması sıfırdır.

$$Var(\varepsilon) = \sigma^2 I$$

$$Var(\varepsilon_i) = \sigma^2$$

Hata terimleri sabit varyanslıdır.

$$\begin{aligned} Cov(\varepsilon_i, X_i) &= E[(\varepsilon_i - E(\varepsilon_i))(X_i - E(X_i))] \\ &= E[\varepsilon_i(X_i - E(X_i))] \end{aligned}$$

Beklenen değer parantez içerisine dağıtılır.

$$= E(\varepsilon_i X_i) - E(X_i)E(\varepsilon_i) \quad E[\varepsilon_i] = 0 \text{ olduğu için}$$

$$= E(\varepsilon_i, X_i)$$

$$= 0$$

Hata terimleri ile bağımsız değişken arasında ilişki yoktur.

$$\begin{aligned} Cov(\varepsilon_i, \varepsilon_j) &= E[(\varepsilon_i - E(\varepsilon_i))(\varepsilon_j - E(\varepsilon_j))] \\ &= E(\varepsilon_i \varepsilon_j) - E(\varepsilon_i)E(\varepsilon_j) \end{aligned}$$

$E(\varepsilon_i)$ ve $E(\varepsilon_j)$ sıfırdır.

$$Cov(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = E(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 0 \quad i \neq j$$

Hatalar birbirinden bağımsızdır. Otokorelasyon yoktur.

Mekansal etki, mekanlar arasındaki ilişkiyi inceler. Klasik regresyon modeline mekana bağlı veriler eklendiğinde modelde birtakım değişiklikler meydana gelir. Bunlardan birincisi mekandaki birimler arasında oluşan mekansal bağımlılıktır. İkincisi ise elde edilen modeller arasındaki ilişkiyi gösteren mekansal heterojenliktir.

Mekansal bağımlılık, mekanlardaki birimlerin kendi içlerindeki ilişkisini ifade etmektedir.

Tobler'in (1970) "Her şey diğer her şeyle ilişkilidir, ancak yakın şeyler uzak şeylerden daha fazla ilişkilidir." ifadesi mekanlardaki komşulukların birbiri ile ilişkisini göstermektedir.

Mekansal heterojenlik, alan üzerinde ilişkilerdeki değişkenliği ifade etmektedir (Lesage 1999).

2.1 Mekansal Ağırlıklandırma

Mekanlar arasındaki komşulukların etkisi mekansal ağırlık matrisi ile ölçülür. Bu ağırlıklar yardımıyla mekansal ekonometrik modeller oluşturulur ve tahmin edilir (Güriş ve Çağlayan 2018). $n \times n$ boyutlu bu matris, W ile gösterilmekte ve mekanların sayısını göstermektedir.

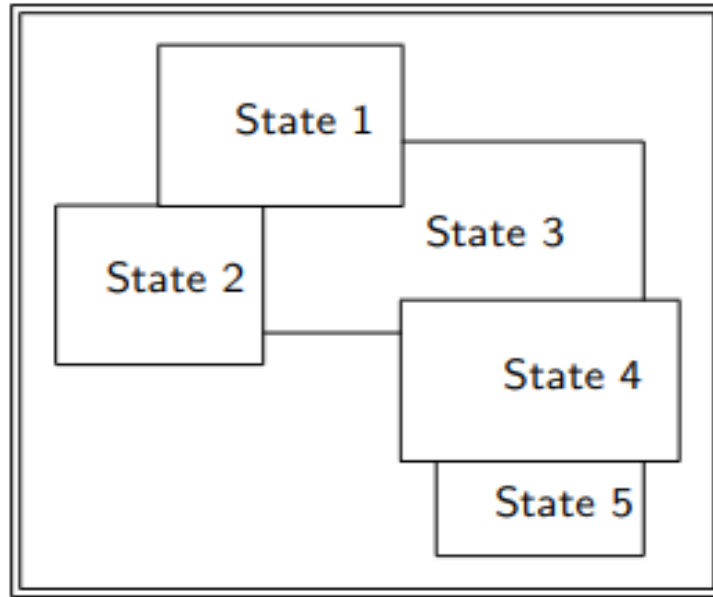
$$W = \begin{bmatrix} w_{11} & \dots & w_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ w_{n1} & \dots & w_{nn} \end{bmatrix}$$

$w_{ij}, i = 1, 2, \dots, n$ ve $j = 1, 2, \dots, n$ i ve j arasındaki veriyi ifade etmektedir (Anselin ve Bera 1998). Burada, i ve j konumları arasındaki etkileşim komşuluk ilişkisini göstermektedir. Komşuluk matrisi 0 veya 1 değerini alır. Matrisin köşegen elemanları kendisine komşu olamayacağından 0 değerini alırken; i ve j konumları komşuluk gösteriyor ise $w_{ij} = 1$ değerini, i ve j konumları komşu değilse $w_{ij} = 0$ değerini alır.

Mekansal ağırlık matrisinin kolay yorumlanabilmesi için satır standardizasyonu işlemi uygulanmaktadır (Çifçi 2016). Bu işlemde satırdaki her bir eleman satır toplamına bölünür. Her satır toplamı $\sum_{j=1}^n w_{ij}^* = 1$ olur. Satır standartlaştırma ile elde edilen matrisin elemanları aşağıdaki gibidir (Arbia 2005).

$$w_{ij}^* = \frac{w_{ij}}{\sum_{j=1}^n w_{ij}}$$

Lesage çalışmasında komşuluk ilişkisini göstermek için aşağıdaki şekli kullanmıştır. Bu şekil üzerinden mekansal ağırlık matrisi oluşturulacaktır.



Şekil 2.1 Beş durumun komşuluk ilişkisi (Lesage 2004)

Durum 2 ve 3'ün birinci dereceden Durum 1'e bitişik olduğu, Durum 4'ün Durum 1'e ikinci dereceden bitişik ve Durum 5' in Durum 1' e üçüncü dereceden bitişik olduğu gösterilen 5 durumu göz önünde bulunduralım.

Durum sayısı 5 olduğundan 5 x 5 boyutlu bir mekansal ağırlık matrisi oluşturulacaktır.

Her durum kendisine komşu olamayacağı için sıfır değerini alacaktır. Yani matrisin köşegen elemanları $w_{ii} = 0$ olacaktır. Durum 1; Durum 2 ve Durum 3 ile ortak bir kenarı paylaştığı için sırasıyla $w_{12} = 1$ ve $w_{13} = 1$ değerlerini alır. Diğer durumların komşuluk ilişkileri aynı şekilde oluşturulur.

Beş alan için birinci dereceden bitişiklik ilişkilerine dayalı oluşturulan komşuluk matrisi aşağıdaki gibidir:

$$\tilde{W} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Standartlaştırılmış ağırlık matrisi aşağıdaki gibidir:

$$W = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Standartlaştırılmış W matrisi ile y vektörünü çarpılırsa elde edilen çarpım ortak kenarları paylaşan durumların ortalamasını $y^* (= Wy)$ olarak verir. (Lesage 1999).

$$\begin{pmatrix} y_1^* \\ y_2^* \\ y_3^* \\ y_4^* \\ y_5^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0.5 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0.33 & 0.33 & 0 & 0.33 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} y_1^* \\ y_2^* \\ y_3^* \\ y_4^* \\ y_5^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}y_2 + \frac{1}{2}y_3 \\ \frac{1}{2}y_1 + \frac{1}{2}y_3 \\ \frac{1}{3}y_1 + \frac{1}{3}y_2 + \frac{1}{3}y_4 \\ \frac{1}{2}y_3 + \frac{1}{2}y_5 \\ y_4 \end{pmatrix}$$

Satır standartlaştırma ile komşu bölgelerin ağırlıklandırılmış ortalamaları yukarıdaki matriste gösterilmiştir.

Mekansal ağırlık matrisinin, mekansal otoregresif model (SAR) üzerindeki etkisi aşağıdaki eşitlikte incelenmektedir.

$$y = \rho W y + x\beta + \varepsilon$$

Örnek eşitliğe uygulanırsa

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{pmatrix} = \rho \begin{pmatrix} 0 & 0.5 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0.33 & 0.33 & 0 & 0.33 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{pmatrix} + x\beta + \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \end{pmatrix}$$

elde edilir. Buradaki ρ , mekansal otoregresif parametreyi göstermektedir.

Mekansal otoregresif modelde β parametrelerini En Küçük Kareler yöntemi ile tahmin edilememektedir. Çünkü bağımlı değişken olan y eşitliğin sağ tarafında yer aldığı için elde edilen tahminler tutarsız olmaktadır.

2.2 $(I_n - \rho W)^{-1}$ 'in Rolü

Örneğimiz için $\rho = 0.3$ alalım.

$$S^{-1} = (I_5 - \rho W)^{-1} = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - 0.3 \begin{pmatrix} 0 & 0.5 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0.33 & 0.33 & 0 & 0.33 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right]^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} 1.044 & 0.175 & 0.186 & 0.019 & 0.003 \\ 0.175 & 1.044 & 0.186 & 0.019 & 0.003 \\ 0.123 & 0.123 & 1.053 & 0.109 & 0.016 \\ 0.019 & 0.019 & 0.165 & 1.064 & 0.160 \\ 0.006 & 0.006 & 0.050 & 0.319 & 1.048 \end{pmatrix}$$

$\rho = 0.5$ alalım.

$$S^{-1} = (I_5 - \rho W)^{-1} = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - 0.5 \begin{pmatrix} 0 & 0.5 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0.33 & 0.33 & 0 & 0.33 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right]^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} 1.155 & 0.355 & 0.396 & 0.075 & 0.019 \\ 0.355 & 1.155 & 0.396 & 0.075 & 0.019 \\ 0.264 & 0.264 & 0.189 & 0.226 & 0.057 \\ 0.075 & 0.075 & 0.339 & 1.210 & 0.302 \\ 0.038 & 0.038 & 0.170 & 0.604 & 1.151 \end{pmatrix}$$

$\rho = 0.7$ alalım.

$$S^{-1} = (I_5 - \rho W)^{-1} = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - 0.7 \begin{pmatrix} 0 & 0.5 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0.33 & 0.33 & 0 & 0.33 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right]^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} 1.437 & 0.696 & 0.836 & 0.256 & 0.090 \\ 0.696 & 1.437 & 0.836 & 0.256 & 0.090 \\ 0.552 & 0.552 & 1.552 & 0.475 & 0.166 \\ 0.256 & 0.256 & 0.720 & 1.545 & 0.541 \\ 0.179 & 0.179 & 0.504 & 1.081 & 1.378 \end{pmatrix}$$

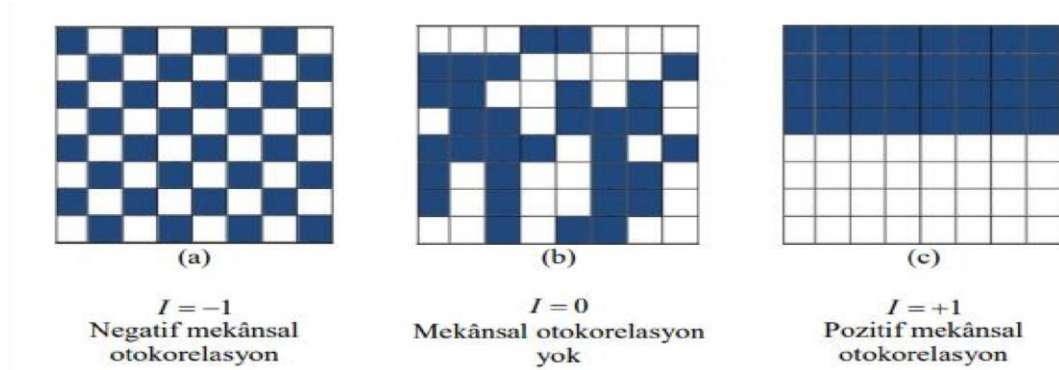
Bu elde edilen sonuçlarda mekansal bağımlılığın büyüklüğünü artırdıkça ρ parametresinde bir artış olduğu görülmektedir.

2.3 Mekansal Otokorelasyon

Cliff ve Ord (1968), mekansal otokorelasyon terimini kullanmıştır. Mekansal otokorelasyon aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$$Cov(y_i, y_j) = E(y_i y_j) - E(y_i)E(y_j) \neq 0 \quad i \neq j \text{ için}$$

Burada i ve j konumlara ait gözlemleri ifade etmektedir (Viton 2010). Bu ifade i ve j arasındaki kovaryansın sıfırdan farklı olduğunu yani mekansal açıdan ilişkili olduğunu göstermektedir (Tatlı 2016). Mekansal otokorelasyon üçe ayrılır. Pozitif otokorelasyon durumunda komşu mekanlardaki gözlemler benzer değerler vererek bir kümelenme eğilimi gösterir. Negatif otokorelasyon durumunda ise karşıt değerler birbirine yakın olur. Mekansal otokorelasyon olmaması durumunda ise rassallık söz konusudur.



Şekil 2.2 Mekansal otokorelasyon (Bakacak 2018)

Mekansal komşuluklar oluşturulurken; mekansal birimlerin sınır veya köşeyi paylaştığı komşuluk ile sınırdaşlık, mekansal birimler arasındaki mesafenin ölçüsüyle ise uzaklık komşuluğu kullanılır (Lesage ve Pace 2009). Anselin (1998) santraç oyununa benzer olarak komşuluk tanımları geliştirmiş olup bunlar kale, fil ve vezir komşuluğudur.

		b		
	b	a	b	
		b		

Şekil 2.3 Kale komşuluğu

Kale komşuluğunda ortak bir kenar paylaşmaktadır.

	c		c	
		a		
	c		c	

Şekil 2.4 Fil komşuluğu

Fil komşuluğunda ortak bir köşe paylaşmaktadır.

		d		
	c	b	c	
d	b	a	b	d
	c	b	c	
		d		

Şekil 2.5 Vezir komşuluğu

Vezir komşuluğunda ortak bir kenar veya ortak bir köşe paylaşmaktadır.

5 coğrafi bölgeye ait suç oranlarının mekansal otokorelasyonu, Moran I indeksi ile nasıl hesaplanılacağı aşağıdaki gibi gösterilmiştir. Başbozkurt (2015)' te ele aldığı örneğe benzer olarak mekansal otokorelasyon hesaplanmıştır.

Çizelge 2.1 Mekansal bölgelere ait komşuluklar ve suç oranları (Başbozkurt 2015)

Bölge i	Komşuluklar	Suç Oranı y_i (%)
1	2,3	8
2	1,3,4	5
3	1,2,4	6
4	2,3,5	7
5	4	4

5 bölgeye ait mekansal ağırlık matrisi ve standartlaştırılmış ağırlık matrisi aşağıdaki gibidir:

$$\tilde{W} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$W = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/3 & 0 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 1/3 & 1/3 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Mekansal otokorelasyonu test etmek için Moran I istatistiği kullanılır. Moran (1948, 1950a, 1950b) tarafından geliştirilen bu istatistik aşağıdaki gibi formüle edilmiştir.

$$I = \frac{n \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_{ij} (y_i - \bar{y})(y_j - \bar{y})}{(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_{ij}) \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}$$

$n = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_{ij}$ olup gerekli düzenlemeler yapılır.

$$I = \frac{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_{ij} (y_i - \bar{y})(y_j - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}$$

Burada; n bölge sayısını, y_i i. bölgeye ait gözlenen değeri, \bar{y} tüm gözlenen değerlerin ortalamasını gösterir.

Örneğimiz Moran I indeksi formülüne uygulanırsa, bölgelere ait olan suçluluk oranlarının toplamı $\bar{y} = \frac{1}{5} (8 + 5 + 6 + 7 + 4) = 6$ elde edilir.

Çizelge 2.2 y_i ve y_j değerlerinin ortalamalardan fark çarpımları (Başbozkurt 2015)

Bölge i	1	2	3	4	5
1	(8-6)(8-6)=4	(8-6)(5-6)=-2	(8-6)(6-6)=0	(8-6)(7-6)=2	(8-6)(4-6)=-4
2	(5-6)(8-6)=-2	(5-6)(5-6)=1	(5-6)(6-6)=0	(5-6)(7-6)=-1	(5-6)(4-6)=2
3	(6-6)(8-6)=0	(6-6)(5-6)=0	(6-6)(6-6)=0	(6-6)(7-6)=0	(6-6)(4-6)=0
4	(7-6)(8-6)=2	(7-6)(5-6)=-1	(7-6)(6-6)=0	(7-6)(7-6)=1	(7-6)(4-6)=-2
5	(4-6)(8-6)=-4	(4-6)(5-6)=2	(4-6)(6-6)=0	(4-6)(7-6)=-2	(4-6)(4-6)=-4

y_i ve y_j değerlerinin ortalamalardan fark çarpımları, satır standardizasyonu elde edilmiş w_{ij} değerleri ile çarpılır ve aşağıdaki çizelgedeki sonuçlar elde edilir.

Çizelge 2.3 Ağırlıklandırılmış fark çarpımları (Başbozkurt 2015)

Bölge i	1	2	3	4	5
1	0 x 4=0	0.5 x (-2)=-1	0.5 x 0=0	0 x 2=0	0 x (-4)=0
2	0.33 x (-2)=-0.66	0 x 1=0	0.33 x 0=0	0.33 x (-1)=-0.33	0 x 2=0
3	0.33 x 0=0	0.33 x 0=0	0 x 0=0	0.33 x 0=0	0 x 0=0
4	0 x 2=0	0.33 x (-1)=-0.33	0.33 x 0=0	0 x 1=0	0.33 x (-2)=-0.66
5	0 x (-4)=0	0 x 2=0	0 x 0=0	1 x (-2)=-2	0 x (-4)=0

$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_{ij} (y_i - \bar{y})(y_j - \bar{y}) = -4.98$ elde edilir.

$\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2 = (8 - 6)^2 + (5 - 6)^2 + (6 - 6)^2 + (7 - 6)^2 + (4 - 6)^2 = 10$ sonucu

elde edilip Moran I indeksinde bulunan sonuçlar yerine yazılır.

$$I = \frac{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n W_{ij} (y_i - \bar{y})(y_j - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2} = \frac{-4.98}{10} = -0,498$$

Hesaplanan Moran I değeri, örnekte verilen 5 coğrafi bölgedeki suç oranının mekansal otokorelasyona sahip ve bu değerin -0.498 olduğunu göstermektedir. Moran I değeri, -1 ile 1 arasında değer alır. Moran I değeri -1'e yakın olduğu için karşıt durumlar arasında bir ilişki olduğunu yani örnekten elde edilen suç oranının fazla olduğu yerlerle suç oranının az olduğu yerlerin, suç oranının az olduğu yerlerle suç oranının fazla olduğu yerlerin bir arada olduğunu göstermektedir.

3. MEKANSAL REGRESYON MODELLERİ

Bu çalışmada mekansal otoregresif model, mekansal hata modeli ve mekansal durbin modeli tanıtılıp, genel mekansal regresyon modelleri incelenmektedir.

3.1 Mekansal Otoregresif Model (SAR)

Mekansal otoregresif modelin 1. dereceden gösterimi

$$y_i = \rho \sum_{j=1}^n w_{ij} y_j + \sum_{q=1}^Q x_{iq} \beta_q + \varepsilon_i$$

şeklindedir (Fischer ve Wang 2011).

Mekansal otoregresif model oluşturulurken bağımlı değişken eşitliğin sağ tarafına açıklayıcı değişken olarak eklenir. Bu modelin biçimsel gösterimi ise aşağıdaki gibidir.

$$y = \rho W y + x \beta + \varepsilon \quad \varepsilon \sim N(0, \sigma^2, I_n)$$

Burada $\rho W y$ ' yi eşitliğin sol tarafına atılırsa;

$$y - \rho W y = x \beta + \varepsilon$$

ve y ortak parantezine alınırsa;

$$(I_n - \rho W) y = x \beta + \varepsilon$$

şeklinde ifade edilir.

En son olarak y bağımlı değişkeni yalnız bırakılarak

$$y = (I_n - \rho W)^{-1} x \beta + (I_n - \rho W)^{-1} \varepsilon$$

elde edilir.

$$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ y_n \end{bmatrix} \quad \beta = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \beta_k \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} 1 & x_{11} & x_{12} & \cdot & \cdot & \cdot & x_{1k} \\ 1 & x_{21} & x_{22} & \cdot & \cdot & \cdot & x_{2k} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & x_{n1} & x_{n2} & \cdot & \cdot & \cdot & x_{nk} \end{bmatrix}$$

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \varepsilon_n \end{bmatrix} \quad W = \begin{bmatrix} w_{11} & w_{12} & \cdot & \cdot & \cdot & w_{1n} \\ w_{21} & w_{22} & \cdot & \cdot & \cdot & w_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ w_{n1} & w_{n2} & \cdot & \cdot & \cdot & w_{nn} \end{bmatrix}$$

Bu modelin matrissel gösterimi aşağıdaki gibidir.

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ y_n \end{bmatrix} = \rho \begin{bmatrix} w_{11} & w_{12} & \cdot & \cdot & \cdot & w_{1n} \\ w_{21} & w_{22} & \cdot & \cdot & \cdot & w_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ w_{n1} & w_{n2} & \cdot & \cdot & \cdot & w_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ y_n \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} 1 & x_{11} & x_{12} & \cdot & \cdot & \cdot & x_{1k} \\ 1 & x_{21} & x_{22} & \cdot & \cdot & \cdot & x_{2k} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & x_{n1} & x_{n2} & \cdot & \cdot & \cdot & x_{nk} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \beta_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \varepsilon_n \end{bmatrix}$$

y : $n \times 1$ boyutlu yanıt değişken vektörü

X : $n \times k$ boyutlu açıklayıcı değişken matrisi

β : $k \times 1$ boyutlu bilinmeyen regresyon parametre vektörü

W : $n \times n$ boyutlu ağırlık matrisi

ε : $n \times 1$ boyutlu hata terimleri vektörü

ρ : Mekansal otoregresif parametredir.

Mekansal gecikme Wy hata terimiyle ilişkilidir. ρ parametresi komşuluğun ne kadar katkı verdiğini gösterir. Dolayısıyla mekansal gecikme bağımlılığı içeren model, bir konumdaki değişkenin başka konumdaki değişken ile ilişkisini ölçmektedir.

Mekansal otoregresif modelinde yer alan ρWy , yanıt değişkeninin modelin sağ tarafında açıklayıcı değişken olarak yer aldığı için içsellik problemine neden olmaktadır. Dolayısıyla elde edilen En Küçük Kareler tahmincilerinin tutarsız ve yanlı olmasına sebep olur.

3.2 Mekansal Hata Modeli (SEM)

Regresyon modelinde mekansal bağımlılığın varlığının tam olarak açıklanamaması hatalarda mekansal bağımlılığa neden olur.

$$y = x\beta + \varepsilon$$
$$\varepsilon = \lambda W\varepsilon + u \quad u \sim N(0, \sigma^2 I_n)$$

Bu regresyon modeli aşağıdaki gibi yazabilir.

$$\varepsilon - \lambda W\varepsilon = u$$

ε ortak parantezine alınıp, yalnız bırakılır.

$$(I - \lambda W)\varepsilon = u$$

$$\varepsilon = (I - \lambda W)^{-1}u$$

Son olarak modelde yerine yazılırsa

$$y = x\beta + (I - \lambda W)^{-1}u$$

elde edilir.

Burada;

y : $n \times 1$ boyutlu yanıt değişken vektörü

x : $n \times k$ boyutlu açıklayıcı değişken matrisi

β : $k \times 1$ boyutlu bilinmeyen regresyon parametre vektörü

W : $n \times n$ boyutlu mekansal ağırlık matrisi

ε : $n \times 1$ boyutlu hata terimleri vektörü

λ : Mekansal hata katsayısını göstermektedir.

Buradaki mekansal bağımlılığı λ gösterir. Çünkü ilgilenilen mekandaki gözlemin hata terimi ile komşu mekandaki gözlemin hata terimi ile ilişkisini ifade eder ve bu katsayı 1'den küçüktür.

3.3 Mekansal Durbin Modeli (SDM)

Mekansal Durbin Modelinde, mekansal gecikmeli bağımlı ve bağımsız değişken içermektedir. Bu modelde belirli bir bölgede bulunan bağımlı değişken komşu bölgedeki bağımsız değişkenden etkilenmektedir.

Mekansal Durbin modeli aşağıdaki gibidir.

$$y = \rho W y + x\beta + Wx\gamma + \varepsilon \quad \varepsilon \sim N(0, \sigma^2 I_n)$$

$\rho W y$ eşitliğin sol tarafına alınır.

$$(I - \rho W)y = x\beta + Wx\gamma + \varepsilon$$

$$y = (I - \rho W)^{-1}(x\beta + Wx\gamma + \varepsilon)$$

En son hali aşağıdaki gibidir.

$$y = (I - \rho W)^{-1}x\beta + (I - \rho W)^{-1}Wx\gamma + (I - \rho W)^{-1}\varepsilon$$

Burada;

y : $n \times 1$ boyutlu yanıt değişken vektörü

x : $n \times k$ boyutlu açıklayıcı değişken matrisi

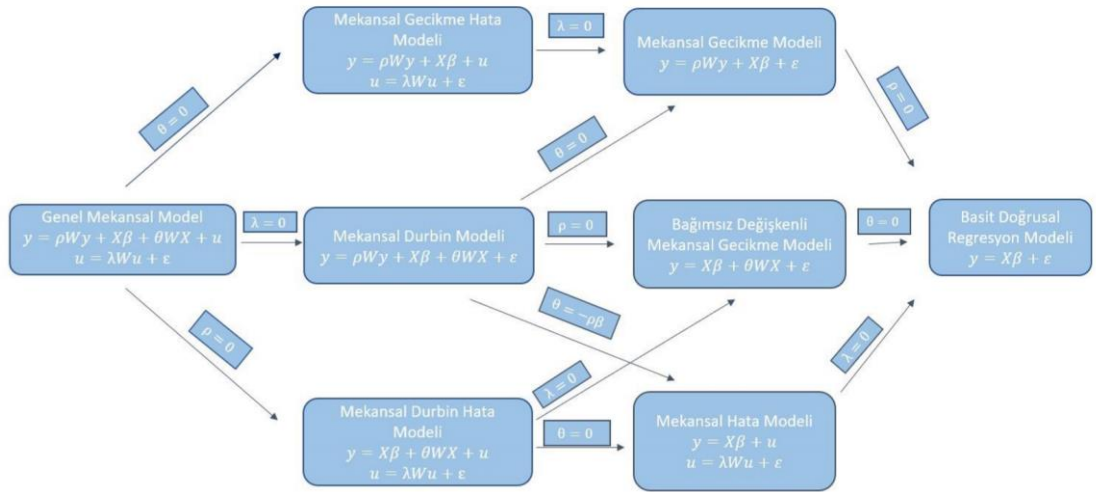
β : $k \times 1$ boyutlu bilinmeyen regresyon parametre vektörü

γ : $k \times 1$ boyutlu katsayı vektörü

W : $n \times n$ boyutlu ağırlık matrisi

ε : $n \times 1$ boyutlu hata terimleri vektörü

ρ : Mekansal otoregresif katsayısını göstermektedir.



Şekil 3.1 Mekansal regresyon modelleri

4. MEKANSAL MODELLER İÇİN TAHMİN YÖNTEMLERİ

Genel mekansal model, mekansal hata modeli (SEM), mekansal otoregresif model (SAR) ve mekansal durbin modeli (SDM) için en çok kullanılan yöntemlerden biri En Çok Olabilirlik yöntemidir. Ayrıca mekansal otoregresif modelinin tahmini için İki Aşamalı En Küçük Kareler, mekansal hata modeli için Genelleştirilmiş Momentler Metodu (GMM), Bayesyen Yaklaşım kullanılmaktadır (Anselin 2001).

Bu mekansal modellerin tahmininde, bağımlı (yanıt) değişken eşitliğin sağ tarafında bağımsız (açıklayıcı) değişken olarak yer aldığı için En Küçük Kareler (EKK) yöntemi ile tahmin edilememektedir. Bu nedenle En Çok Olabilirlik (ML) yöntemi kullanılmaktadır. Elde edilen En Çok Olabilirlik tahmin edicileri etkin ve tutarlıdır.

4.1 Maksimum Olabilirlik Yöntemi

En küçük kareler yöntemi ile elde edilen tahminler tutarsız ve yanlı olduğu için maksimum olabilirlik yöntemi ile tahmin edilecektir.

Mekansal otoregresif model aşağıdaki gibidir.

$$y = \rho W y + x\beta + \varepsilon$$

Yukarıda belirttiğimiz mekansal otoregresif model şu şekilde de yazılabilir.

$$y = \rho W y + \varepsilon$$

$$\varepsilon = x\beta + u$$

Burada $u \sim N(0, \sigma^2 I_n)$ dir. u , beyaz gürültü olduğundan beyaz gürültüye bağlı olarak ε 'da Gaussian dağılır ve $\varepsilon \sim N(x\beta, \sigma^2 I_n)$ dir.

$\rho W y$ ifadesini eşitliğin sol tarafına atılıp, y ortak parantezine alınırsa

$$y - \rho W y = \varepsilon$$

$$(I - \rho W)y = \varepsilon$$

elde edilir.

y , tek bırakılırsa

$$y = (I - \rho W)^{-1} \varepsilon$$

eşitliğine ulaşılır.

Maksimum olabilirlik yöntemi ile tahmin etmeden önce y 'nin beklenen değeri ve varyansı aşağıdaki gibidir (Zeren 2011).

$$E(y) = E[(I - \rho W)^{-1} \varepsilon] = (I - \rho W)^{-1} E(\varepsilon)$$

$\varepsilon \sim N(x\beta, \sigma^2 I_n)$ olduğundan $E(\varepsilon) = x\beta$ dir.

$$y - E(y) = (I - \rho W)^{-1} \varepsilon - (I - \rho W)^{-1} x\beta$$

$\varepsilon = x\beta + u$ yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} &= (I - \rho W)^{-1} (x\beta + u) - (I - \rho W)^{-1} x\beta \\ &= (I - \rho W)^{-1} u \end{aligned}$$

elde edilir.

Varyansı ise

$$Var(y) = E(yy') = V(\sigma^2, \rho) = \sigma^2 (I - \rho W)^{-1} (I - \rho W)^{-1'}$$

şeklindedir (Goulard, Laurent ve Thomas 2017). Burada $y \sim N((I - \rho W)^{-1} x\beta, \sigma^2 (I - \rho W)^{-1} (I - \rho W)^{-1'})$ dağılır (Yasin vd. 2022). Zeren (2011)'de elde ettiğine benzer bir şekilde mekansal otoregresif modelin en çok olabilirlik tahmin yöntemi elde edilir.

Bulduğumuz beklenen değer ve varyans olabilirlik fonksiyonunda yerine yazılır.

$$\begin{aligned} L(\sigma^2, \rho, \beta; y) &= \frac{1}{n\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{|V(\sigma^2, \rho)|}} \cdot \exp \left\{ -\frac{1}{2} [y - (I - \rho W)^{-1} x\beta]' V^{-1} [y \right. \\ &\quad \left. - (I - \rho W)^{-1} x\beta] \right\} \end{aligned}$$

Olabilirlik fonksiyonun logaritması aşağıdaki gibidir.

$$\begin{aligned}
\log L(\sigma^2, \rho, \beta: y) & \\
&= -\frac{n}{2} \log 2\pi - \frac{1}{2} \log |V(\sigma^2, \rho)| \\
&\quad - \frac{1}{2} [y - (I - \rho W)^{-1} x\beta]' V^{-1} [y - (I - \rho W)^{-1} x\beta]
\end{aligned}$$

Aşağıdaki düzenlemeler yapılır.

$$|(I - \rho W)^{-1} (I - \rho W)^{-1}| = |(I - \rho W)^{-1}| |(I - \rho W)^{-1}| = |(I - \rho W)|^{-2} \text{ (Arbia 2005, Zeren 2011).}$$

$$|V(\sigma^2, \rho)| = |\sigma^2 (I - \rho W)^{-1} (I - \rho W)^{-1}| = \sigma^{2n} |(I - \rho W)^{-1} (I - \rho W)^{-1}| \text{ (Zeren 2011).}$$

Yapılan düzenlemeler log-olabilirlik fonksiyonunda yazılır.

$$\begin{aligned}
\log L(\sigma^2, \rho, \beta: y) & \\
&= -\frac{n}{2} \log 2\pi - \frac{1}{2} \log(\sigma^{2n} |(I - \rho W)|^{-2}) \\
&\quad - \frac{1}{2} [y - (I - \rho W)^{-1} x\beta]' [\sigma^2 (I - \rho W)^{-1} (I - \rho W)^{-1}]^{-1} [y \\
&\quad - (I - \rho W)^{-1} x\beta]
\end{aligned}$$

Gerekli düzenlemeler yapılır (Yang 2020).

$$\begin{aligned}
&= -\frac{n}{2} \log 2\pi - \frac{n}{2} \log \sigma^2 + \log |I - \rho W| \\
&\quad - \frac{1}{2\sigma^2} [y - (I - \rho W)^{-1} x\beta]' [(I - \rho W)' (I - \rho W)] [y \\
&\quad - (I - \rho W)^{-1} x\beta]
\end{aligned}$$

Burada $(I - \rho W)[y - (I - \rho W)^{-1} x\beta]$ ifadesinde $(I - \rho W)$ paranteze dağıtılsa $(I - \rho W)y - x\beta$ elde edilir. Bu elde edilen düzenleme log-olabilirlik fonksiyonunda yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
\log L(\sigma^2, \rho, \beta: y) & \\
&= -\frac{n}{2} \log 2\pi - \frac{n}{2} \log \sigma^2 + \log |I - \rho W| \\
&\quad - \frac{1}{2\sigma^2} [(I - \rho W)y - x\beta]' [(I - \rho W)y - x\beta]
\end{aligned}$$

mekansal otoregresif modelin log-olabilirlik fonksiyonunun en son hali elde edilir (Sarrias 2020).

Buradaki log-olabilirlik fonksiyonunda parametreler (σ^2, ρ, β) doğrusal değildir (Zeren 2011). Çünkü β ve σ^2, ρ ' nun bir fonksiyonudur.

Log-olabilirlik fonksiyonunda β ve σ^2 nin tahmin edicileri elde edilir.

$$\frac{\partial \log L}{\partial \beta} = \frac{\partial}{\partial \beta} \left(-\frac{n}{2} \log 2\pi - \frac{n}{2} \log \sigma^2 + \log |I - \rho W| \right. \\ \left. - \frac{1}{2\sigma^2} [(I - \rho W)y - x\beta]' [(I - \rho W)y - x\beta] \right) = 0$$

β yalnız bırakılır.

$$\hat{\beta} = (x'x)^{-1} x'(I - \rho W)y = \hat{\beta}_0 - \rho \hat{\beta}_L$$

$$\frac{\partial \log L}{\partial \sigma^2} = \frac{\partial}{\partial \sigma^2} \left(-\frac{n}{2} \log 2\pi - \frac{n}{2} \log \sigma^2 + \log |I - \rho W| \right. \\ \left. - \frac{1}{2\sigma^2} [(I - \rho W)y - x\beta]' [(I - \rho W)y - x\beta] \right) = 0$$

σ^2 yalnız bırakılır.

$$\widehat{\sigma^2} = \frac{1}{n} [y - \rho W y - x\hat{\beta}]' [y - \rho W y - x\hat{\beta}] = \frac{1}{n} (\hat{e}_0 - \rho \hat{e}_L)' (\hat{e}_0 - \rho \hat{e}_L)$$

Bu tahmin edilen değerler log-olabilirlik fonksiyonunda yazılırsa

$$\log L_c(\rho; \hat{e}_0, \hat{e}_L) \\ = -\frac{n}{2} \log 2\pi - \frac{n}{2} \log \left[\frac{1}{n} (\hat{e}_0 - \rho \hat{e}_L)' (\hat{e}_0 - \rho \hat{e}_L) \right] + \log |I - \rho W| \\ - n \frac{[(I - \rho W)y - x\hat{\beta}]' [(I - \rho W)y - x\hat{\beta}]}{2[(\hat{e}_0 - \rho \hat{e}_L)' (\hat{e}_0 - \rho \hat{e}_L)]}$$

$$\log L_c(\rho; \hat{e}_0, \hat{e}_L) = C - \frac{n}{2} \log \left[\frac{1}{n} (\hat{e}_0 - \rho \hat{e}_L)' (\hat{e}_0 - \rho \hat{e}_L) \right] + \log |I - \rho W|$$

en son haline ulaşılır (Omar ve Tawfeeq 2020). Bu son modelde tek bilinmeyen parametre ρ 'dur.

Anselin tarafından mekansal otoregresif modelin tahmin aşamaları aşağıdaki gibi adım adım gösterilmiştir.

- $y = x\beta_0 + \varepsilon_0$ modeli en küçük kareler yöntemi ile tahmin edilerek $\widehat{\beta}_0$ bulunur.

$$\widehat{\beta}_0 = (x'x)^{-1}x'y$$

- $Wy = x\beta_L + \varepsilon_L$ modeli en küçük kareler yöntemi ile tahmin edilerek $\widehat{\beta}_L$ bulunur.

$$\widehat{\beta}_L = (x'x)^{-1}x'Wy$$

- İndirgenmiş modelden artıklar elde edilir.

$$\widehat{e}_0 = y - x\widehat{\beta}_0 \quad \widehat{e}_L = Wy - x\widehat{\beta}_L$$

- ρ ' nun maksimum değeri tahmin edilir.
- Dördüncü adımdan elde edilen $\widehat{\rho}$ ile $\widehat{\beta}$ ve $\widehat{\sigma}^2$ değerleri bulunur.

Mekansal hata modeli aşağıdaki gibidir.

$$y = x\beta + \varepsilon$$

$$\varepsilon = \lambda W\varepsilon + u \quad u \sim N(0, \sigma^2 I)$$

Mekansal hata modeli için olabilirlik fonksiyonu şöyledir.

$$L(\sigma^2, \lambda, \beta; \varepsilon) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^n} \cdot \frac{1}{\sqrt{|V(\sigma^2, \lambda)|}} \exp\left\{-\frac{1}{2}[y - x\beta]'V(\sigma^2, \lambda)^{-1}[y - x\beta]\right\}$$

Olabilirlik fonksiyonunda $V(\sigma^2, \lambda) = \frac{1}{\sigma^2} [(I - \lambda W)^{-1}(I - \lambda W)^{-1}]$ yerine yazılırsa

$$L(\sigma^2, \lambda, \beta; \varepsilon) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^n} \cdot \frac{1}{\sqrt{\sigma^2}} \frac{1}{\sqrt{|(I - \lambda W)^{-1}(I - \lambda W)^{-1}|}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}(y - x\beta)'[(I - \lambda W)^{-1}(I - \lambda W)^{-1}]^{-1}(y - x\beta)\right\}$$

elde edilir (Zeren 2011).

Olabilirlik fonksiyonunun logaritması alınır (Kangallı Uyar 2015).

$$\begin{aligned}
\log L(\sigma^2, \lambda, \beta; \varepsilon) &= -\frac{n}{2} \log 2\pi - \frac{n}{2} \log(\sigma^2) + \log |I - \lambda W| \\
&\quad - \frac{1}{2\sigma^2} \left\{ (y - x\beta)' [(I - \lambda W)^{-1} (I - \lambda W)^{-1}]^{-1} (y - x\beta) \right\}
\end{aligned}$$

Log-olabilirlik fonksiyonu doğrusal değildir. Çünkü λ 'nın bir fonksiyonudur (Zeren 2011).

Ord'un geliştirmiş olduğu Cochrane- Orcutt iteratif yöntemi ile elde edilen parametre tahminleri aşağıdaki gibidir.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \log L}{\partial \beta} = \hat{\beta} &= -\frac{1}{2\sigma^2} (-2) [x'(I - \lambda W)'(I - \lambda W)x]^{-1} (I - \lambda W)'(I - \lambda W)y \\
&= \frac{1}{\sigma^2} [x'(I - \lambda W)'(I - \lambda W)x]^{-1} (I - \lambda W)'(I - \lambda W)y = 0
\end{aligned}$$

Burada gerekli düzenlemeler yapıldığında

$$\hat{\beta} = [x'(I - \lambda W)'(I - \lambda W)x]^{-1} x'(I - \lambda W)'(I - \lambda W)y$$

elde edilir.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \log L}{\partial \sigma^2} = \widehat{\sigma^2} &= -\frac{n}{2\sigma^2} - \frac{1}{2} \frac{-1}{(\sigma^2)^2} \varepsilon'(I - \lambda W)'(I - \lambda W)\varepsilon \\
&= -\frac{n}{2\sigma^2} + \frac{1}{2(\sigma^2)^2} \varepsilon'(I - \lambda W)'(I - \lambda W)\varepsilon = 0
\end{aligned}$$

$-\frac{n}{2\sigma^2}$ eşitliğin sağ tarafına atılırsa

$$\frac{1}{2(\sigma^2)^2} \varepsilon'(I - \lambda W)'(I - \lambda W)\varepsilon = \frac{n}{2\sigma^2}$$

gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\widehat{\sigma^2} = \frac{1}{n} \varepsilon'(I - \lambda W)'(I - \lambda W)\varepsilon$$

$\hat{\beta}$ ve $\widehat{\sigma^2}$ log-olabilirlik fonksiyonunda yerine yazılır.

$$\log L_c = C - \frac{n}{2} \log \left[\frac{1}{n} \varepsilon' (I - \lambda W)' (I - \lambda W) \varepsilon \right] + \log |I - \lambda W|$$

Anselin tarafından mekansal hata modelin tahmin aşamaları aşağıdaki gibi adım adım gösterilmiştir.

- $y = x\beta + \varepsilon$ modeline en küçük kareler yöntemi uygulanarak artıklar elde edilmelidir.
- Olabilirlik fonksiyonu, λ' ya göre maksimize edilmelidir.
- $\tilde{y} = (I - \lambda W)y$ ve $\tilde{x} = (I - \lambda W)x$ hesaplanmaktadır.
- Hesaplanan \tilde{y} ve \tilde{x} yeni değişkenleri kullanılarak $\tilde{\beta}$ en küçük kareler yöntemi ile hesaplanmaktadır.
- $\tilde{\beta}$ ile $\tilde{\varepsilon} = y - x\tilde{\beta}$ bulunur.
- Bu adımlar uygulandıktan sonra yakınsama kriteri yerine koyularak $\hat{\sigma}^2$ değerlerine ulaşılır.

Mekansal Durbin modeli (SDM), mekansal otoregresif modelinin özel durumudur. Çünkü mekansal ilişkilerdeki bağımlılık yalnızca bağımlı değişkende değil, aynı zamanda bağımsız değişkende de yer almaktadır.

Mekansal Durbin modeli aşağıdaki gibidir.

$$y = \rho W_1 y + \beta_0 + x\beta_1 + W_1 x\beta_2 + \varepsilon \quad \varepsilon \sim N(0, \sigma^2 I)$$

Buradaki β_0 parametresi kesişimi, β_1 parametresi ağırlıklandırılmamış regresyon katsayı parametresinin vektörünü ve β_2 parametresi ise ağırlıklı regresyon katsayı parametresinin vektörünü göstermektedir.

Mekansal Durbin modeli aşağıdaki şekilde de yazılabilir:

$$y = (I - \rho W_1)^{-1} Z\beta + \varepsilon$$
$$y \sim N((I - \rho W_1)^{-1} Z\beta, \sigma^2 I)$$

$$Z = [I \ X \ Wx] \quad \beta = [\beta_0 \ \beta_1 \ \beta_2]'$$

Modelde yer alan Z matrisini, mekansal otoregresif modeldeki x matrisinin SDM tahmini için $Z = [I \ x \ W_1x]$ ile değiştirilebileceğini göstermiştir (Bekti, Rahayu ve Sutikno 2013).

Parametre tahmini için öncelikle modelimiz aşağıdaki gibi düzenlenir:

$$y = \rho W_1 y + Z\beta + \varepsilon$$

$$\varepsilon = y - \rho W_1 y - Z\beta$$

y ortak parantezine alınır.

$$\varepsilon = (I - \rho W_1)y - Z\beta$$

Mekansal Durbin modelinin olabilirlik fonksiyonu şöyledir (Bekti, Rahayu ve Sutikno 2013).

$$L(\rho, \beta, \sigma^2; y) = \frac{1}{\sqrt[2n]{2\pi\sigma^2}} |I - \rho W_1| \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} ((I - \rho W_1)y - Z\beta)'((I - \rho W_1)y - Z\beta)\right)$$

Olabilirlik fonksiyonunun logaritması alınır.

$$\log L = \frac{n}{2} \log\left(\frac{1}{2\pi\sigma^2}\right) + \log|I - \rho W_1| - \frac{1}{2\sigma^2} ((I - \rho W_1)y - Z\beta)'((I - \rho W_1)y - Z\beta)$$

$$\log L = -\frac{n}{2} \log(2\pi) - \frac{n}{2} \log(\sigma^2) + \log|I - \rho W_1| - \frac{1}{2\sigma^2} ((I - \rho W_1)y - Z\beta)'((I - \rho W_1)y - Z\beta)$$

Parametre tahminlerine geçilirse (Atikah, Widodo, Rahardjo vd. 2020);

$$\begin{aligned} \frac{\partial \log L}{\partial \beta} &= \frac{\partial\left(-\frac{1}{2\sigma^2} ((I - \rho W_1)y - Z\beta)'((I - \rho W_1)y - Z\beta)\right)}{\partial \beta} = 0 \\ &= \frac{1}{\sigma^2} (Z'(I - \rho W_1)y - Z'Z\beta) \end{aligned}$$

Burada β yalnız bırakılarak

$$\beta = (Z'Z)^{-1} Z'(I - \rho W_1)y$$

elde edilir. Yani β parametresinin tahmini aşağıdaki gibidir ve yansızdır.

$$\hat{\beta} = (Z'Z)^{-1}Z'(I - \rho W_1)y$$

Parantez içeriye dağıtılır.

$$\hat{\beta} = (Z'Z)^{-1}Z'y - \rho(Z'Z)^{-1}Z'W_1y$$

σ^2 'nin parametre tahmini de β parametresinin tahmini gibi gerçekleşir.

$$\frac{\partial \log L}{\partial \sigma^2} = -\frac{n}{2\sigma^2} + \frac{1}{2(\sigma^2)^2} \left(((I - \rho W_1)y - Z\beta)'((I - \rho W_1)y - Z\beta) \right) = 0$$

Bu eşitlikte σ^2 yalnız bırakılırsa parametre tahmini elde edilmiş olur.

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{((I - \rho W_1)y - Z\beta)'((I - \rho W_1)y - Z\beta)}{n}$$

ρ 'nun tahmini, β ve σ^2 'nin tahmini yakın form çözümleridir. ρ tahmininin olduğunu varsayalım.

$$\hat{\beta} = (Z'Z)^{-1}Z'y - \hat{\rho}(Z'Z)^{-1}Z'W_1y$$

Burada iki parametre tahmini gerçekleştirilir.

δ_0 ve δ_d tahmini, $y = Z\delta_0 + e_0$ ve $W_1y = Z\delta_d + e_d$ modelinden en küçük kare ile geliştirilebilir (Bekti, Rahayu ve Sutikno 2013).

$$\hat{\delta}_0 = (Z'Z)^{-1}Z'y$$

$$\hat{\delta}_d = (Z'Z)^{-1}Z'W_1y$$

Bu yüzden

$$\hat{\beta} = (Z'Z)^{-1}Z'y - \rho(Z'Z)^{-1}Z'W_1y = \hat{\delta}_0 - \rho\hat{\delta}_d$$

σ^2 parametresinin de hatalar yerine yazılır.

$e_0 = y - Z\delta_0$, $e_d = W_1y - Z\delta_d$ (Atikah, Widodo, Rahardjo vd. 2020).

$$\sigma^2 = \frac{[e_0 - \rho e_d]'[e_0 - \rho e_d]}{n}$$

Elde edilen σ^2 log-olabilirlik fonksiyonunda yerine yazılır.

$$\log L(\rho) = -\frac{n}{2} \log(2\pi) - \frac{n}{2} \log([e_0 - \rho e_d]'[e_0 - \rho e_d]) - \frac{n}{2} \log(n) + \log|I - \rho W_1| - \frac{1}{2}$$

Log olabilirlik fonksiyonunda yer alan sabit ifadeler c olarak adlandırılır.

$$f(\rho) = c - \frac{n}{2} \log([e_0 - \rho e_d]' [e_0 - \rho e_d]) + \log|I - \rho W_1|$$

Bu denklemde $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_r$ olarak isimlendirilen skaler parametreye göre log olabilirlik fonksiyonunun optimizasyonu ile ρ 'yu tahmin etmek için;

$$\begin{pmatrix} f(\rho_1) \\ f(\rho_2) \\ \vdots \\ f(\rho_r) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c - \frac{n}{2} \log([e_0 - \rho_1 e_d]' [e_0 - \rho_1 e_d]) + \log|I - \rho_1 W_1| \\ c - \frac{n}{2} \log([e_0 - \rho_2 e_d]' [e_0 - \rho_2 e_d]) + \log|I - \rho_2 W_1| \\ \vdots \\ c - \frac{n}{2} \log([e_0 - \rho_r e_d]' [e_0 - \rho_r e_d]) + \log|I - \rho_r W_1| \end{pmatrix}$$

kullanılır (Bekti, Rahayu ve Sutikno 2013).

4.2 İki Aşamalı En Küçük Kareler Yöntemi

Mekansal otoregresif model de kullanılan yöntemlerden biridir. Theil ile Bassman tarafından geliştirilmiş yöntemdir (Demir 2021). Mekansal otoregresif modelde, bağımlı değişkenin hem açıklayıcı değişkenler tarafından hem de kendi yanıt değişkenleri tarafından açıklanmasından dolayı içsellik problemine yol açar (Keten 2019). İçsellik probleminin olduğu durumlarda parametre tahmini için İki Aşamalı En Küçük Kareler Yöntemi uygulanabilir (Kelejian ve Prucha 1998). Bu yöntem, iki aşamadan oluşmaktadır.

- **İlk Aşama-Araç Değişkenlerin Tahmin Edilmesi:**

Bağımsız değişken x ve bağımlı değişken y arasındaki sorun giderilmeye çalışılır. Modelimizdeki y mekansal olarak bağımlı olduğundan doğru tahmin edilebilmesi için araç değişkenlere ihtiyaç duyulmaktadır. Bu araç değişkenleri, x ile ilişkili olup, y ile doğrudan bir ilişkisi bulunmaz. Ele alınan araç değişkenleri mekansal otoregresif modelde yer alan y' yi temsil ederken mekansal bağımlılığı modellemek için kullanılır.

$$y = Z\gamma + \varepsilon_1$$

x' i açıklamak için kullanılan araç değişkeni Z' dir. y , bu araç değişkenleri üzerinden tahmin edilir. Böylelikle y üzerindeki mekansal bağımlılık ortadan kalkmış olur.

- **İkinci Aşama- İki Aşamalı En Küçük Kareler Yöntemi İle Parametre Tahmini:**

İlk aşamada Z araç değişkeni kullanılarak, y' nin tahmini yapıldı ve mekansal bağımlılık sorunu giderilmiştir.

Mekansal otoregresif modeli aşağıdaki gibidir.

$$y = \rho W y + x\beta + \varepsilon$$

Elde edilen y tahmini bu modelde yerine yazılır.

$$y = \rho W \hat{y} + x\beta + \varepsilon$$

En küçük kareler yöntemi ile β ve ρ parametreleri tahmin edilir.

4.3 Bayes Yöntemi

Bayesyen metodu, model parametrelerinin olasılık dağılımlarını belirleyerek parametre tahminini yapar. Modeldeki parametreler için önsel (prior) dağılımlar seçilir, veriler ile sonsal (posterior) dağılımlar hesaplanır ve örnekleme tekniklerinden biri olan Markov Zinciri Monte Carlo yöntemi kullanılır (Krisztin ve Piribauer 2022).

Bayes teoremi şöyle ifade edilir:

$$P(\theta|y) = \frac{P(y|\theta)P(\theta)}{P(y)}$$

$P(\theta|y)$: Parametrelerin sonsal (posterior) dağılımıdır. Gözlemler y verildiğinde parametrelerin olasılık dağılımını gösterir.

$P(y|\theta)$: Likelihood fonksiyonudur.

$P(\theta)$: Parametrelerin önsel (prior) dağılımıdır.

$P(y)$: Gözlemlerin marjinal olasılığıdır.

Mekansal otoregresif modelin Bayesyen yaklaşımla parametre tahmini yapılırken aşağıdaki adımlar uygulanır:

- **Önsel (Prior) Dağılımların Seçilmesi:**

Mekansal otoregresif modelde bulunan her parametre için bir önsel dağılım seçilir. Örneğin mekansal otoregresif katsayısı ρ için uniform veya normal dağılım, regresyon parametresi β için genellikle normal dağılım seçilebilir.

- **Likelihood Fonksiyonu:**

Mekansal otoregresif modelin, parametrelerine bağlı olarak nasıl dağıldığına dair bir likelihood fonksiyonu tanımlanır. Mekansal otoregresif model (SAR);

$$P(y|\rho, X, \beta) = N(y - \rho W y - X\beta, \sigma^2 I)$$

normal dağılır.

- **Sonsal (Posterior) Dağılımın Hesaplanması:**

Bayes teoremi kullanılarak sonsal (posterior) dağılım hesaplanır.

$$P(\theta|y) \propto P(y|\theta)P(\theta)$$

- **Markov Zinciri Monte Carlo (MCMC) Yöntemi:**

Sonsal dağılımın analitik olarak çözülmesi zor olduğundan MCMC gibi nümerik yöntemler tercih edilir.

Markov Zinciri Monte Carlo algoritmalarında en yaygın kullanılan yöntemler Metropolis- Hastings Algoritması ve Gibbs Samplingdir. Bu yöntemler, her iterasyonda parametre değerleri değişir ve örnek sayısı arttıkça sonsal dağılıma yaklaşırlar (Doğan ve Taşpınar 2014).

- **Parametre Tahminleri:**

MCMC ile parametrelerin sonsal dağılımları elde edilir. Sonsal dağılımdan örnekler alındığında, örneklere ait ortalama ve varyans hesaplanarak her parametre için tahminler bulunur.

5. MEKANSAL BAĞIMLILIK İÇİN BELİRLEME TESTLERİ

5.1 Moran I Testi

Mekansal otokorelasyonun var olup olmadığını tespit etmek için artıklara Moran I testi uygulanır.

Testin hipotezleri aşağıdaki gibidir.

H_0 : Hatalarda mekansal otokorelasyon yoktur.

H_1 : Hatalarda mekansal otokorelasyon vardır.

Hataların normal dağıldığı varsayılmaktadır.

$$I = \frac{N}{S_0} \left(\frac{\varepsilon' W \varepsilon}{\varepsilon' \varepsilon} \right)$$

$$S_0 = \sum_i \sum_j w_{ij}$$

Burada,

W : Mekansal ağırlık matrisi

N : Gözlem sayısı

ε : Hata terim vektörü

S_0 : Mekansal ağırlık matrisinin elemanlarının toplamını gösterir.

Satır standardizasyonu işlemi uygulandığında S_0 ile N birbirini götürür ve Moran I test istatistiği aşağıdaki gibi tanımlanır (Anselin ve Hudak 1992):

$$I = \left(\frac{\varepsilon' W \varepsilon}{\varepsilon' \varepsilon} \right)$$

Bu test istatistiği -1 ile 1 arasında değer alır. Moran I değerinin 1'e yakın olması yüksek değerlerle yüksek değerlerin, düşük değerlerle düşük değerlerin bir arada olduğunu yani bir kümelenmeyi gösterir. Moran I değerinin 0 olması mekansal bağımlılığın olmadığını

gösterir. Moran I değerinin -1' e yakın olması ise yüksek değerlerle düşük değerlerin, düşük değerlerle yüksek değerlerin bir arada olduğunu gösterir.

5.2 Lagrange Çarpan Testleri

Mekansal otokorelasyonun var olup olmadığını tespit etmek için yapılan bir diğer testte Lagrange Çarpan testidir. Mekansal regresyon modellerini en çok olabilirlik yöntemi ile tahmin edildiği için Lagrange Çarpan testi diğer testlere göre daha çok kullanılmaktadır. Diğer testlerimiz ise; Wald testi, Olabilirlik oran testi ve asimptotik t testidir.

Lagrange Çarpan testi ikiye ayrılmaktadır.

5.2.1 Mekansal hata bağımlılığı için Lagrange çarpan testi

Burridge' in geliştirmiş olduğu lagrange çarpan testi aşağıdaki gibidir.

$$LM_{\lambda} = \frac{\left[\frac{\varepsilon' W \varepsilon}{(\varepsilon' \varepsilon)} \right]^2}{tr(W'W + W^2)}$$

Bu test istatistiği $\chi^2_{(1)}$ dağılır. Paydadaki tr ifadesi matrisin köşegen elemanlarının toplamıdır.

Testin hipotezleri aşağıdaki gibidir.

$H_0: \lambda = 0$ Mekansal hata katsayısı yoktur.

$H_1: \lambda \neq 0$ Mekansal hata katsayısı vardır.

5.2.2 Mekansal gecikme bağımlılığı için Lagrange çarpan testi

Anselin' in geliştirmiş olduğu lagrange çarpan testi aşağıdaki gibidir.

$$LM_{lag} = \frac{\left[\frac{\varepsilon' W y}{(\varepsilon' \varepsilon) N^{-1}} \right]^2}{\left[(W x \beta)' (I - x(x' x)^{-1} x') \left(\frac{W x \beta}{\sigma^2} \right) \right] + tr(W^2 + W' W)}$$

Bu test istatistiği de $\chi^2_{(1)}$ dağılır.

Testin hipotezleri aşağıdaki gibidir.

$H_0: \rho = 0$ Mekansal gecikme yoktur.

$H_1: \rho \neq 0$ Mekansal gecikme vardır.

Alternatif hipotezler (H_1) geçerli olduğunda mekansal hata bağımlılığı için Lagrange çarpanı ve mekansal gecikme bağımlılığı için Lagrange çarpanı etkilenir. Bu sorun dayanıklı testlerle çözülebilir. Başka bir ifadeyle mekansal hata katsayısının anlamlı olduğu varsayımı altında mekansal otoregresif parametrenin anlamsız olduğunu veya mekansal otoregresif parametrenin anlamlı olduğu varsayımı altında mekansal hata katsayısının anlamsız olduğunu test eder (Aral 2016). Bunun için sağlam Lagrange çarpan testleri geliştirilmiştir.

5.3 Sağlam Lagrange Çarpan Testleri

Bera ve Yoon (1993), local belirleme hatası altında standart LM testlerinin asimptotik dağılımlarını kullanarak sağlam belirleme testini oluşturmuşlardır. Bu test standart LM istatistiğinin ortalamasında ve kovaryansında değişiklik içermektedir (Zeren 2010). Anselin vd. (1996) mekansal modeller için bu istatistikleri elde etmişlerdir.

5.3.1 Mekansal hata bağımlılığı için sağlam Lagrange çarpan testi

Mekansal gecikme bağımlı değişkenin varlığında ($\rho \neq 0$ varsayımı altında) mekansal hata bağımlılığı için test istatistiği aşağıdaki gibidir (Anselin vd. 1996):

$H_0: \lambda = 0$

$$LM_{\lambda}^* = \frac{\left[\frac{\varepsilon' W \varepsilon}{\hat{\sigma}^2} - T(n\hat{J}_{\rho, \beta})^{-1} \left(\frac{\varepsilon' W y}{\hat{\sigma}^2} \right) \right]^2}{T - T^2(n\hat{J}_{\rho, \beta})^{-1}}$$

Burada ;

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\varepsilon' \varepsilon}{n}$$

$$T = tr(W^2 + W'W)$$

$$n\hat{J}_{\rho, \beta} = \left[T + \frac{(WX\beta)' M (WX\beta)}{\hat{\sigma}^2} \right]$$

$$M = I - X(X'X)^{-1}X$$

dir. Bu test istatistiği de $\chi_{(1)}^2$ dağılır.

5.3.2 Mekansal gecikme bağımlılığı için sağlam Lagrange çarpan testi

Mekansal hata otokorelasyonun varlığı durumunda ($\lambda \neq 0$ varsayımı altında) mekansal gecikme bağımlılığı için test istatistiği aşağıdaki gibidir (Anselin vd. 1996):

$H_0: \rho = 0$

$$LM_{\rho}^* = \frac{\left[\frac{\varepsilon' W y}{\hat{\sigma}^2} - \left(\frac{\varepsilon' W \varepsilon}{\hat{\sigma}^2} \right) \right]^2}{n\hat{J}_{\rho, \beta} - T}$$

Burada;

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\varepsilon' \varepsilon}{n}$$

$$T = tr(W^2 + W'W)$$

$$n\hat{J}_{\rho, \beta} = \left[T + \frac{(WX\beta)' M (WX\beta)}{\hat{\sigma}^2} \right]$$

$$M = I - X(X'X)^{-1}X$$

dir. Bu test istatistiği de $\chi_{(1)}^2$ dağılır.

6. ROBUST TAHMİN EDİCİLERİ VE ÖZELLİKLERİ

Robust (dayanıklı) terimi, Boneau (1960), Box (1953), Lindquist (1953) ve Glass, Peckham ve Sanders (1972) tarafından kullanılmıştır. Tukey öncülüğünde klasik istatistik yöntemlerin robust alternatiflerini elde etmek için yapılan çalışmalar da robustluk üzerindeki ilk çalışmalardır. Huber (1981), Hampel vd. (1986), Rousseeuw ve Leroy (1987) ve Staudte ve Sheather (1990) tarafından etkili kitaplar yazılmıştır. Huber (1981) de ifade ettiği gibi; “sağlamlık, varsayımlardan olan küçük sapmalara karşı duyarsızlığı ifade eder.” şeklindedir (Gökalp ve Boz 2005). Günümüzde ise dayanıklı istatistik ile çok sayıda çalışmalar yapılmaktadır. İstatistiksel analizlerdeki sağlam yaklaşım, sadece veriler bir dağılımı takip ettiğinde değil, aynı zamanda güvenilir parametre tahminleri ve güven aralıkları üreten yöntemler üretmeyi amaçlar (Maronna vd. 2019).

Regresyon modellerinin tahminleri için en çok tercih edilen yöntem En Küçük Kareler yöntemidir. En Küçük Kareler yöntemi, normallik varsayımı altında geçerli olmaktadır. Yapılan analizlerde aykırı gözlemler olabilmekte, bu aykırı gözlemler normallik varsayımını bozup En Küçük Kareler yöntemi ile elde edilen sonuçların tutarsız ve yanlı olmasına sebep olmaktadır (Türkay 2004). Bu gibi durumlarda robust tahmin yöntemlerine başvurulur. Robust tahmin edicilerinin en çok bilinenleri R, L ve M tahmin edicileridir. R tahmin edicileri, Hodges ve Lehmann (1963) tarafından oluşturulmuş olup, rank testlerinden çıkarılan tahmin edicileridir. L tahmin edicileri, sıralı istatistiklerin doğrusal kombinasyonlarından oluşur (Toy 2014). M tahmin edicileri, maksimum olabilirlik tahmincileri olarak da adlandırılır.

Dayanıklı regresyon yöntemleri, hata terimlerinin normal dağılmadığı ve modelde var olan aykırı değerlere karşı dayanıklı parametre tahminleri elde etmeyi amaçlar. En çok kullanılan tahmin yöntemlerinden biri Huber’ın M tahminleme yöntemidir.

6.1 M Tahmin Edicileri

M tahmin edicileri adını en çok olabilirlik yönteminden almıştır. İlk olarak Peter J. Huber (1964) tarafından geliştirilmiştir.

En küçük kareler yönteminde hata kareler toplamını minimum yapmak amaçlanırken, M tahmin edicisinde hata terimleri fonksiyonunun minimum yapmak amaçlanır (Güneri, İncekırık ve Durmuş 2021).

M tipi regresyon tahmincisinin amaç fonksiyonu aşağıdaki gibidir.

$$\min \sum_{i=1}^n \rho(e_i) = \min \sum_{i=1}^n \rho(y_i - x_i\beta)$$

Fox 2002' de hata terimlerinin fonksiyonu $\rho(e)$ ' nin sahip olduğu özellikleri ifade etmiştir.

ρ fonksiyonu sürekli; sıfır noktasında tek bir minimum noktasına sahip, simetrik ve türevlenebilen bir fonksiyondur (Huber 1981).

$$\rho(e) \geq 0$$

$$\rho(0) = 0$$

$$\rho(e) = \rho(-e)$$

$$|e_i| > |e_{i'}| \text{ için } \rho(e_i) \geq \rho(e_{i'}) \text{ dir.}$$

En küçük kareler tahmin edicisi için $\rho(e_i) = e_i^2$ olur.

Yukarıda tanımlanan amaç fonksiyonunun β ' ya göre ρ fonksiyonunun türevi alınırsa aşağıdaki eşitlikte verilmiştir.

$$\sum_{i=1}^n \psi(e_i)x_i = 0$$

Eşitlikteki ψ fonksiyonu, ρ fonksiyonunun türevini göstermektedir. Gösterimi aşağıdaki gibidir.

$$\psi(e) = \frac{\partial}{\partial \beta} \rho(e)$$

Robust regresyon analizinde anlaşılır olması sebebiyle daha çok Huber ve Tukey'in M tahmin edicileri kullanılmaktadır.

Huber'in tanımladığı ρ fonksiyonu,

$$\rho(e) = \begin{cases} \frac{e^2}{2}, & -k \leq e \leq k \\ k|e| - \frac{k^2}{2}, & |e| > k \end{cases}$$

olarak ifade edilir. Bu amaç fonksiyonun türevi alınırsa etki fonksiyonu aşağıdaki gibi olmaktadır.

$$\psi(e) = \begin{cases} e, & -k \leq e \leq k \\ k \operatorname{sign}(e), & |e| > k \end{cases}$$

Burada k sabiti, dönüm noktasıdır (Huber 1981). $k=1.345$ 'dir.

Huber M tahmin edicisinin ağırlık fonksiyonu aşağıda verilmiştir.

$$w(e) = \begin{cases} 1, & |e| \leq k \\ \frac{k}{|e|}, & |e| > k \end{cases}$$

Tukey'in tanımladığı ρ fonksiyonu,

$$\rho(e) = \begin{cases} \frac{k^2}{6} \left\{ 1 - \left[1 - \left(\frac{e}{k} \right)^2 \right]^3 \right\}, & -k \leq e \leq k \\ \frac{k^2}{6}, & |e| > k \end{cases}$$

olarak ifade edilir. Bu fonksiyonun türevi alınırsa etki fonksiyonu aşağıdaki gibi olmaktadır (Fox 2002).

$$\psi(e) = \begin{cases} e \left[1 - \left(\frac{e}{k} \right)^2 \right]^2, & -k \leq e \leq k \\ 0, & |e| > k \end{cases}$$

$k= 4.685$ ' dir.

Tukey M tahminleyicisine ait ağırlık fonksiyonu aşağıdaki gibidir.

$$w(e) = \begin{cases} \left[1 - \left(\frac{e}{k}\right)^2\right]^2, & -k \leq e \leq k \\ 0, & |e| > k \end{cases}$$

Çizelge 6.1 M tahmin ediciler için kullanılan fonksiyonlar

Tahminci	Amaç Fonksiyonu ρ	Etki Fonksiyonu ψ	Tanım Aralığı
Huber	$\frac{e^2}{2}$	e	$-k \leq e \leq k$
	$k e - \frac{k^2}{2}$	$k \text{sign}(e)$	$ e > k$
Cauchy	$\frac{c^2}{2} \log \left[1 + \left(\frac{e}{c}\right)^2\right]$	$\frac{e}{1 + \left(\frac{e}{c}\right)^2}$	\mathbb{R}
Tukey	$\frac{k^2}{6} \left\{1 - \left[1 - \left(\frac{e}{k}\right)^2\right]^3\right\}$	$e \left[1 - \left(\frac{e}{k}\right)^2\right]^2$	$-k \leq e \leq k$
	$\frac{k^2}{6}$	0	$ e > k$
Welsch	$\frac{c^2}{2} \log \left[1 + \left(\frac{ e }{c}\right)^2\right]$	$e \exp \left[-\left(\frac{e}{c}\right)^2\right]$	\mathbb{R}

Huber için k sabit değeri 1.345' tir. Tukey için k sabit değeri 4.685' tir. Cauchy için c sabit değeri 2.385'tir. Welsch için c sabit değeri ise 2.985' tir.

6.2 Mekansal Otoregresif Modelin M Tahmin Edicisi

Mekansal otoregresif model aşağıdaki gibidir.

$$y_i = \rho \sum_{j=1}^n w_{ij} y_j + x_i' \beta + \varepsilon_i \quad i=1,2,\dots,n \quad \varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2)$$

Bu model matris formunda yazılırsa

$$y = \rho W y + x \beta + \varepsilon$$

elde edilir.

Burada;

y : $n \times 1$ boyutlu yanıt değişken vektörü

x : $n \times k$ boyutlu açıklayıcı değişken matrisi

β : $k \times 1$ boyutlu bilinmeyen regresyon parametre vektörü

ε : $n \times 1$ boyutlu hata terimleri vektörü

ρ : Mekansal bağımlılığın gücünü gösteren otoregresif katsayı

W : i ve j konumları arasındaki ilişkiyi gösteren $n \times n$ boyutlu ağırlık matrisidir.

Mekansal otoregresif modelin sağlam M tahmini elde edilmeden önce en çok olabilirlik fonksiyonumuz ele alınır.

$$L(\sigma^2, \rho, \beta; y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^n} \frac{1}{\sqrt{|V(\sigma^2, \rho)|}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} [y - (I - \rho W)^{-1} x \beta]' V^{-1} [y - (I - \rho W)^{-1} x \beta] \right\}$$

Olabilirlik fonksiyonunun logaritmasının elde edilmiş hali aşağıdaki gibidir. Burada $\theta = (\beta', \sigma, \rho)'$ alınır.

$$\begin{aligned} \ln L(\theta; y) &= -\frac{n}{2} \log 2\pi - n \log \sigma + \log |(I - \rho W)| \\ &\quad - \frac{1}{2\sigma^2} [(I - \rho W)y - x\beta]' [(I - \rho W)y - x\beta] \end{aligned}$$

Θ 'nın en çok olabilirlik tahmin edicisi $\hat{\theta} = \operatorname{argmax}_{\theta} \ln L(\theta; y)$ dir (Maronna vd. 2019).

Ayrıca $\eta_{ML}(\theta; y) = \frac{\partial \ln L(\theta; y)}{\partial \theta} = 0_{k+2}$ M tahmincisidir. Tahmin denklemleri sırasıyla β, σ ve ρ olarak verilmiştir.

$$\begin{aligned} \eta_{ML}(\theta; y) &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2\sigma^2} [(I - \rho W)y - x\beta]' [(I - \rho W)y - x\beta] \\ -\frac{n}{\sigma} + \frac{2\sigma}{2\sigma^4} [(I - \rho W)y - x\beta]' [(I - \rho W)y - x\beta] \\ -\operatorname{tr}(W(I - \rho W)^{-1}) - \frac{1}{2\sigma^2} [(I - \rho W)y - x\beta]' [(I - \rho W)y - x\beta] \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Gerekli düzenlemeler yapılmadan önce çoklu doğrusal regresyonda β ve σ^2 yi tahmin edilirken alınan türevleri yukarıdaki ifadeler için de uygulanacaktır.

Çoklu doğrusal regresyonda β için;

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ell}{\partial \beta} &= -\frac{1}{2\sigma^2} [y - x\beta]' [y - x\beta] \text{ tranpoz içeriye dağıtılır.} \\ &= -\frac{1}{2\sigma^2} [y' - \beta' x'] [y - x\beta] \text{ parantez çarpımı yapılır.} \\ &= -\frac{1}{2\sigma^2} [y'y - y'x\beta - \beta'x'y - \beta'x'x\beta] \end{aligned}$$

burada $(\beta'x'y)' = y'x\beta$ olur.

$$\frac{\partial \ell}{\partial \beta} = -\frac{1}{2\sigma^2} [2x'(y - x\beta)] = -\frac{1}{\sigma^2} x'(y - x\beta) \text{ elde edilir.}$$

σ^2 için ise;

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ell}{\partial \sigma^2} &= -\frac{n}{\sigma} + \frac{2\sigma}{2\sigma^4} [(y - x\beta)'(y - x\beta)] \\ &= -\frac{n}{\sigma} + \frac{1}{\sigma^3} [(y - x\beta)'(y - x\beta)] \text{ olarak elde edilir.} \end{aligned}$$

Çoklu doğrusal regresyondaki parametrelerin tahmin edildiği gibi mekansal otoregresif modeldeki parametreler için aynı işlemler uygulanır.

β için,

$$\begin{aligned}\frac{\partial \ell(\theta; y)}{\partial \theta} &= -\frac{1}{2\sigma^2} [(I - \rho W)y - x\beta]' [(I - \rho W)y - x\beta] \\ &= -\frac{1}{2\sigma^2} (-2)x' [(I - \rho W)y - x\beta] \\ &= \frac{1}{\sigma^2} x' [(I - \rho W)y - x\beta]\end{aligned}$$

σ için

$$\begin{aligned}\frac{\partial \ell(\theta; y)}{\partial \sigma} &= -\frac{n}{\sigma} + \frac{2\sigma}{2\sigma^4} [(I - \rho W)y - x\beta]' [(I - \rho W)y - x\beta] \\ &= \frac{1}{\sigma^3} [(I - \rho W)y - x\beta]' [(I - \rho W)y - x\beta] - \frac{n}{\sigma}\end{aligned}$$

ρ için (Sarrias 2017)

$$\begin{aligned}\frac{\partial \ell(\theta; y)}{\partial \rho} &= -\frac{1}{2\sigma^2} [(I - \rho W)y - x\beta]' [(I - \rho W)y - x\beta] - \text{tr}(W(I - \rho W)^{-1}) \\ &= -\frac{1}{2\sigma^2} (-2)(Wy)' [(I - \rho W)y - x\beta]' - \text{tr}(W(I - \rho W)^{-1}) \\ &= \frac{1}{\sigma^2} (Wy)' [(I - \rho W)y - x\beta]' - \text{tr}(W(I - \rho W)^{-1})\end{aligned}$$

elde edilir.

En son hali ise aşağıdaki gibidir(Tho, Ding, Hui vd. 2023).

$$\eta_{ML}(\theta; y) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma^2} x' [(I - \rho W)y - x\beta] \\ \frac{1}{\sigma^3} [(I - \rho W)y - x\beta]' [(I - \rho W)y - x\beta] - \frac{n}{\sigma} \\ \frac{1}{\sigma^2} (Wy)' [(I - \rho W)y - x\beta]' - \text{tr}(W(I - \rho W)^{-1}) \end{pmatrix}$$

Tahmin fonksiyonu $\varepsilon = (I - \rho W)y - x\beta$ ve y ile sınırlı olmadığı için, etki fonksiyonu da sınırlı değildir(Tho, Ding, Hui vd. 2023). Dolayısıyla en çok olabilirlik tahmin edicileri

aykırı değerlere karşı duyarlı olur. Bu yüzden elde edilen tahmin ediciler tutarsız olur. Bu problemi çözebilmek için ise sağlam bir tahmin fonksiyonu oluşturulur. Yeni sağlam M tahmin edicisi $\eta_R(\theta; y)$ sırasıyla

β için

$$x' \psi_{c1} \left(\frac{1}{\sigma} ((I - \rho W)y - x\beta) \right)$$

σ^2 için

$$\left[\psi_{c2} \left(\frac{1}{\sigma} ((I - \rho W)y - x\beta) \right) \right]' \psi_{c2} \left(\frac{1}{\sigma} ((I - \rho W)y - x\beta) \right) - n\tilde{h}(c2)$$

ve ρ için

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sigma} \{W(I - \rho W)^{-1} x\beta\}' \psi_{c3} \left(\frac{1}{\sigma} ((I - \rho W)y - x\beta) \right) \\ & + \psi_{c3} \left(\frac{1}{\sigma} ((I - \rho W)y - x\beta) \right)' [W(I - \rho W)^{-1}]' \psi_{c3} \left(\frac{1}{\sigma} ((I - \rho W)y - x\beta) \right) \\ & - \text{tr}\{W(I - \rho W)^{-1}\} \tilde{h}(c3) \end{aligned}$$

ifade edilmiştir(Tho, Ding, Hui vd. 2023).

$\psi_c: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ vektör değerli fonksiyon olup c_1, c_2 ve c_3 ayar parametresidir. Burada $z = \frac{[(I - \rho W)y - x\beta]}{\sigma}$ dir. Huber fonksiyonu, $h_c(z_i) = z_i \min \left\{ 1, \frac{c}{|z_i|} \right\}$ dir.

$\tilde{h}(c) = 2c^2\{1 - \Phi(c)\} - 2c\phi(c) - 1 + 2\Phi(c)$ olup, $\phi(\cdot)$ normal olasılık yoğunluk fonksiyonu ve $\Phi(\cdot)$ ise kümülatif dağılım fonksiyonudur (Tho, Ding, Hui vd. 2023).

Burada Huber fonksiyonu, $\eta_R(\theta; y)$ y ve ε' a göre sınırlıdır. c_1, c_2 ve c_3 sonsuza gittiğinde, sağlam M tahmin edicisi en çok olabilirlik tahminine denktir.

6.3 Mekansal Hata Modelinin M Tahmin Edicisi

Mekansal hata modeli de diğer modeller gibi veri setinde aykırı değerlerin bulunmasından dolayı sağlam tahminleri elde edemeyebilir. Mekansal hata modeli aşağıdaki gibidir.

$$y = x\beta + u$$

$$u = \lambda Wu + \varepsilon \quad |\lambda| < 1$$

Burada $\varepsilon \sim N(0, \sigma^2 I)$ ve $u \sim N(0, \Omega_\lambda \sigma^2)$ dağılır.

y : $n \times 1$ boyutlu yanıt değişken vektörü

x : $n \times k$ boyutlu açıklayıcı değişken matrisi

β : $k \times 1$ boyutlu bilinmeyen parametre vektörü

λ : Mekansal otoregresif parametre

W : Standartlaştırılmış ağırlık matrisi

I : n boyutlu özdeşlik matrisini ifade etmektedir.

u : $n \times 1$ boyutlu mekansal ilişkili hata vektörü

ε : $n \times 1$ boyutlu normal dağılımlı hata vektörü

$\Omega_\lambda = (I - \lambda W)^{-1}(I - \lambda W')^{-1}$ dir. λ , -1 ile 1 arasında değer almaktadır. Burada $(I - \lambda W)^{-1}$ tekil değildir.

Mekansal hata modelinin sağlam M tahmincisini elde etmeden önce en çok olabilirlik yöntemindeki olabilirlik fonksiyonumuz ele alınır.

$$L(\varepsilon; \sigma^2, \lambda, \beta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^n} \cdot \frac{1}{\sqrt{\sigma^2}^n} \cdot \frac{1}{\sqrt{|(I - \lambda W)^{-1}(I - \lambda W')^{-1}|}} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} (y - x\beta)' [(I - \lambda W)^{-1}(I - \lambda W')^{-1}]^{-1} (y - x\beta) \right\}$$

Burada $(I - \lambda W)^{-1}(I - \lambda W')^{-1}$ ifadesinin yerine Ω_λ yazılırsa

$$L(\varepsilon; \sigma^2, \lambda, \beta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^n} \cdot \frac{1}{\sqrt{|\Omega_\lambda \sigma^2|}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (y - x\beta)' (\Omega_\lambda \sigma^2)^{-1} (y - x\beta) \right\}$$

elde edilir (Yıldırım 2018).

Olabilirlik fonksiyonunun logaritması alınır.

$$\log L(\varepsilon; \sigma^2, \lambda, \beta) = -\frac{n}{2} \log 2\pi - \frac{n}{2} \log \sigma^2 - \frac{1}{2} \log |(I - \lambda W)^{-1}(I - \lambda W')^{-1}| - \frac{1}{2\sigma^2} \{(y - x\beta)' [(I - \lambda W)^{-1}(I - \lambda W')^{-1}]^{-1} (y - x\beta)\}$$

İfade düzenlenirse log olabilirlik fonksiyonunun son hali aşağıdaki gibi olur.

$$\begin{aligned}
\log L(\varepsilon; \sigma^2, \lambda, \beta) &= -\frac{n}{2} \log 2\pi - \frac{n}{2} \log \sigma^2 + \log |I - \lambda W| \\
&\quad - \frac{1}{2\sigma^2} (y - x\beta)' [I - \lambda W]' [I - \lambda W] (y - x\beta)
\end{aligned}$$

Log olabilirlik fonksiyonuna göre parametre tahminleri Yıldırım (2018)'e benzer şekilde sırasıyla elde edilir.

β için

$$\frac{\partial \log L(\varepsilon; \sigma^2, \lambda, \beta)}{\partial \beta} = -\frac{1}{2\sigma^2} (-2x')(I - \lambda W)^2 (y - x\beta)$$

sadeleştirmeler yapılırsa

$$= \frac{1}{\sigma^2} x'(I - \lambda W)^2 (y - x\beta)$$

elde edilir.

σ^2 için

$$\frac{\partial \log L(\varepsilon; \sigma^2, \lambda, \beta)}{\partial \sigma^2} = -\frac{n}{2} \cdot \frac{2\pi}{2\pi\sigma^2} + \frac{1}{2\sigma^4} (y - x\beta)' (I - \lambda W)^2 (y - x\beta)$$

sadeleştirmeler yapılırsa

$$= -\frac{n}{2\sigma^2} + \frac{1}{2\sigma^4} (y - x\beta)' (I - \lambda W)^2 (y - x\beta)$$

elde edilir.

Son olarak λ için

$$\frac{\partial \log L(\varepsilon; \sigma^2, \lambda, \beta)}{\partial \lambda} = \text{tr}((I - \lambda W)^{-1}(-W)) - \frac{1}{2\sigma^2} (y - x\beta)' (2(I - \lambda W)(-W))(y - x\beta)$$

sadeleştirmeler yapılırsa

$$= -\text{tr}((I - \lambda W)^{-1}W) + \frac{1}{\sigma^2} (y - x\beta)' (I - \lambda W)W (y - x\beta)$$

elde edilir (Yıldırım ve Kantar 2020).

Mekansal hata modelinin, en çok olabilirlik yöntemi ile tahmini elde edilir. Ancak veri setinde aykırı değer bulunursa elde edilen tahminler var olan aykırı değerlerden etkilenir. Bu sorunları gidermek için sırasıyla β, σ^2 ve λ ' ya sağlam tahmin fonksiyonlarına dönüştürülür.

β, σ^2 ve λ ' ya ait skor fonksiyonları(Yıldırım ve Kantar 2020);

$$s_{\beta} = \frac{\hat{\sigma}}{\hat{\sigma}_u^2} x'(I - \lambda W)^2 (I - \hat{\lambda} W)^{-1} \psi(r) = 0$$

$$s_{\sigma^2} = -\frac{nK}{2\sigma^2} + \frac{\hat{\sigma}^2}{2\sigma^4} \psi(r)'(I - \hat{\lambda} W)^{-1} (I - \lambda W)^2 (I - \hat{\lambda} W)^{-1} \psi(r) = 0$$

$$s_{\lambda} = -Ktr((I - \lambda W)^{-1} W) + \frac{\hat{\sigma}^2}{\sigma^2} \psi(r)'(I - \hat{\lambda} W)^{-1} (I - \lambda W) W (I - \hat{\lambda} W)^{-1} \psi(r) = 0$$

olup burada $\psi(\cdot)$ etki fonksiyonu, $u = y - x\beta$ artık vektörü ve standartlaştırılmış artıklar

ise $r = \hat{\Omega}_{\lambda}^{-\frac{1}{2}} \frac{y - x\beta}{\hat{\sigma}}$ dır. Skor fonksiyonları $\frac{1}{\hat{\sigma} \sqrt{\hat{\Omega}_{\lambda}}} \sqrt{\hat{\Omega}_{\lambda}} \hat{\sigma}$ ile çarpılır ve standartlaştırılmış

artıklar $\psi(r)$ ile sağlamlık sağlanmış olur(Yıldırım ve Kantar 2020). Buradaki robustluğu seçilen ψ fonksiyonu belirler.

7. SİMÜLASYON ÇALIŞMASI

Jaya vd. (2018)'de simülasyon çalışmasında mekansal otoregresif model ile coğrafi ağırlıklı regresyon modelinin birleşimini ele almıştır. Parametre tahminleri için Monte Carlo simülasyonu kullanılarak yanlılık ve hata kareler ortalamaları hesaplatılmıştır.

Anselin' in (2007) *Spatial Regression Analysis in R* adlı çalışma kitabında mekansal otoregresif modelin Monte Carlo simülasyonu ile analiz yapılmıştır. En çok olabilirlik yöntemi ile SAR modelinin tahmin sonuçları verilmiştir.

Büyükkör ve Şehirlioğlu (2020), farklı hata dağılımlarını ele alarak en küçük kareler, Huber M tahmin ve Tukey M tahminleme yöntemleri ile sonuçlar elde etmişlerdir.

Yıldırım (2018) ise mekansal hata modeli için en çok olabilirlik yöntemi, genelleştirilmiş momentler metodu ve robust tahmin edicisi; farklı hata dağılımları ile verileri oluşturmuştur. Elde edilen tahmin edicilerin sonuçlarını hata kareler ortalaması ve yanlılık ölçütlerine göre karşılaştırılmıştır.

Tho vd. (2023) de SAR modeli için farklı örneklem büyüklükleri ve hata dağılımları için en çok olabilirlik ve robust M tahmin edicileri ele alınıp sonuçlar karşılaştırılmıştır.

Bu çalışma da ise Yıldırım (2018)'de SEM için yapmış olduğu simülasyona benzer olarak sadece mekansal otoregresif modelin en çok olabilirlik tahmin edicisi ve önerilen robust tahmin edicilerinin performansı, simülasyon verileri ile yapılan çalışma yardımıyla karşılaştırılacaktır. Burada SAR modeli için, farklı hata dağılımları düşünülerek veri üretilmiş ve tahmin edicilerin sonuçları, model katsayıları, sigma (standart sapma), yanlılık (bias) ve hata kareler ortalaması (MSE) ölçütlerine göre karşılaştırma yapılmıştır.

Bu uygulama da R programlama dili ve içerisindeki SAR modellemesi için kullanılacak paketler ise; *spdep*, *spatial reg*, *robustbase*'dir. Burada *spdep* ve *spatialreg* paketleri SAR modelini uygulamak için kullanılmıştır.

Veri üretirken bağımsız değişken düzgün dağılımdan üretilmiş ($X \sim U(0,4)$), SAR parametreleri, sabit ve eğim parametreleri için $\beta = (1,1)$, mekansal bağımlılık parametresi için $\rho = [0.4; 0.6; 0.8]$ ve örneklem büyüklüğü $n=100, 200$ ve 500 olarak simüle edilmiştir. Bu işlemler; Standart normal dağılım, Student t dağılımı, Karma normal dağılım $[0.8 * N(0,1) + 0.2 * N(0,20)]$, Karma normal dağılım $[0.9 * N(0,1) + 0.1 * N(0,1)]$, sondan %10' u uç değer olacak şekilde (örneğin 5 ile çarpıldı) dağılımlarla çalışılmıştır.

Shapiro Wilk testi ile normallik, Moran I testi ile mekansallık, Levene testi ile homojen varyans varsayımlarının kontrolü gerçekleştirilmiştir.

Yukarıda belirtilen ölçütleri; farklı yöntemler (En Küçük Kareler, En Çok Olabilirlik, Dayanıklı En Çok Olabilirlik vb.) ve farklı parametre değerleri (0.4, 0.6, 0.8) ile test edip çıkan değerlerin karşılaştırmaları amaçlanmıştır. Dağılımlara göre belirtilen sonuçlar tablolarda paylaşılmıştır.

Çizelge 7.1 Normallik, mekansal ilişki ve varyans homojenliğinin incelenmesi

Dağılım Türü	Örneklem Büyüklüğü	Shapiro-Wilk (p)	Moran's I (p)	Levene Testi (p)
Standart Normal	100	0.062	0.034	0.041
	200	0.078	0.027	0.036
	500	0.093	0.022	0.029
t(4)	100	0.012	0.041	0.033
	200	0.008	0.037	0.028
	500	0.005	0.032	0.024
Uç Değerli	100	0.003	0.048	0.012
	200	0.002	0.042	0.009
	500	0.001	0.039	0.007
Karma Dağılım 1	100	0.017	0.045	0.021
	200	0.013	0.039	0.018
	500	0.009	0.035	0.015
Karma Dağılım 2	100	0.014	0.002	0.007
	200	0.018	0.042	0.022
	500	0.003	0.037	0.011

Bu tabloda; normallik, mekansal bağımlılık ve varyans homojenliği testleri açısından çeşitli dağılım türleri ve örneklem büyüklükleri için p-değerleri gösterilmektedir.

- **Normallik Testi (Shapiro-Wilk p-değeri):**

Standart normal dağılımda p-değerleri 0.05'e yakın veya üzerinde olduğu için normallik varsayımı genellikle sağlanmaktadır. t(4) ve Uç değerli dağılımlarda p-değerleri özellikle küçük örneklem büyüklüklerinde 0.05'in altında olduğu görülmektedir. Bu durum, normallik varsayımlarının reddedildiğini gösterir. Karma dağılım durumlarında ise p-değerleri düşük olduğundan normallik varsayımı sağlanmamaktadır.

- **Moran's I Testi (p-değeri):**

Tüm dağılımlarda Moran's I testine ait p-değerleri genellikle 0.05' in altında olup, mekansal bağımlılık olduğunu göstermektedir. Bu özellikle Standart normal ve t(4) normal dağılımları için önemlidir. Uç değerli ve Karma dağılım 2 durumlarında mekansal bağımlılık daha güçlü olabilir (örneğin 100 gözlem için $p=0.048$ ve 0.042).

- **Levene Testi (p-değeri):**

Standart normal dağılımda p-değerleri 0.05'e yakın olsa da, büyüklük arttıkça varyans homojenliği varsayımı reddedilebilecek düzeye yaklaşmaktadır. Uç değerli ve Karma dağılım 2' de p-değerleri çok düşük olup (örneğin 0.012, 0.007), varyans homojenliği sağlanmamaktadır. t(4) dağılımında da varyans homojenliği varsayımı ihlal edilmiştir.

Standart normal dağılım, normallik varsayımı açısından uygun olsa da mekansal bağımlılık belirgin olarak gözlenmiştir. t(4) ve Uç değerli dağılımlarında normallik varsayımı reddedilmiş, varyans homojenliği sağlanmamış ve mekansal bağımlılık gözlenmiştir. Karma dağılımlar normallik ve varyans homojenliği açısından varsayımları sağlamamıştır; özellikle Karma dağılım 2' de mekansal bağımlılık daha güçlüdür. Örneklem büyüklüğü arttıkça testlerin duyarlılığı artmakta, p-değerleri küçülme ve varsayım ihlalleri daha belirgin hale gelmektedir.

Tabloların yöntem kısmında yer alan SAR, modelin en çok olabilirlik yöntemi ile elde edilen sonuçları; Robust SAR ise modelin dayanıklı en çok olabilirlik yöntemi ile elde edilen sonuçları göstermektedir. Cauchy ve Welsch ise bir ρ ' nun bir fonksiyonudur.

Çizelge 7.2 Standart normal dağılım $\rho=0.4, 0.6, 0.8$ n = 100 yanlılık ve MSE sonuçları

Yöntem	ρ	β_0 Bias	β_1 Bias	β_0 MSE	β_1 MSE	ρ Bias	Sigma Bias	ρ MSE	Sigma MSE
EKK	0.4	0.0234	0.0187	0.0456	0.0345	0.0087	0.0065	0.0287	0.0676
SAR		0.0276	0.0221	0.0512	0.0398	0.0102	0.0076	0.0201	0.0433
Robust SAR		0.0245	0.0198	0.0487	0.0376	0.0095	0.0071	0.0241	0.0316
Cauchy		0.0312	0.0254	0.0587	0.0456	0.0124	0.0098	0.0267	0.0416
Welsch		0.0287	0.0234	0.0543	0.0423	0.0112	0.0087	0.0228	0.0397
EKK	0.6	0.0376	0.0298	0.0654	0.0512	0.0124	0.0098	0.0276	0.0898
SAR		0.0423	0.0345	0.0721	0.0576	0.0145	0.0112	0.0193	0.0487
Robust SAR		0.0398	0.0321	0.0687	0.0543	0.0134	0.0104	0.0231	0.0376
Cauchy		0.0476	0.0387	0.0798	0.0632	0.0167	0.0134	0.0255	0.0512
Welsch		0.0443	0.0365	0.0743	0.0587	0.0156	0.0124	0.0218	0.0501
EKK	0.8	0.0512	0.0423	0.0876	0.0687	0.0156	0.0124	0.0214	0.1372
SAR		0.0576	0.0476	0.0987	0.0765	0.0187	0.0145	0.0181	0.0946
Robust SAR		0.0543	0.0443	0.0932	0.0721	0.0176	0.0134	0.0167	0.0423
Cauchy		0.0632	0.0512	0.1087	0.0876	0.0212	0.0167	0.0215	0.0786
Welsch		0.0587	0.0476	0.1012	0.0798	0.0198	0.0156	0.0197	0.0723

EKK yöntemin de bias ve MSE değerlerinin ρ değeri arttıkça belirgin şekilde yükseldiği gözlemlenmektedir. Düşük ρ değerlerinde kabul edilebilir performans gösteren EKK yöntemi, mekansal otokorelasyonun artmasıyla birlikte ρ bias ve sigma bias değerlerinde ciddi yükselişler sergilemektedir. Bu durum EKK yönteminin mekansal bağımlılığı yakalama konusundaki yetersizliğini net bir şekilde ortaya koymuştur.

SAR ve Robust SAR yöntemlerinin karşılaştırılmasında ise daha detaylı bir analiz söz konusudur. Robust SAR yöntemi, SAR'a göre daha düşük bias değerleri sunarak öne

çıkmaktadır. Cauchy ve Welsch fonksiyonlarına göre ise oldukça yüksek bias ve MSE değerleriyle karakterize olduğu, özellikle Cauchy yüksek ρ değerlerinde performansının belirgin şekilde düştüğü görülmektedir. Genel olarak, Robust SAR yöntemi diğer yöntemler ile karşılaştırıldığında daha tutarlı ve güvenilir sonuçlar üretmekte, mekansal otokorelasyonun yüksek olduğu durumlarda dahi daha düşük hata payı sağlamaktadır.

Çizelge 7.3 Standart normal dağılım $\rho=0.4, 0.6, 0.8$ $n = 200$ yanlılık ve MSE sonuçları

Yöntem	ρ	β_0 Bias	β_1 Bias	β_0 MSE	β_1 MSE	ρ Bias	Sigma Bias	ρ MSE	Sigma MSE
EKK	0.4	0.0045	0.0032	0.0176	0.0132	0.0187	0.0076	0.0456	0.0768
SAR		0.0098	0.0065	0.0276	0.0198	0.0276	0.0154	0.0654	0.0393
Robust SAR		0.0076	0.0054	0.0234	0.0176	0.0234	0.0112	0.0543	0.0298
Cauchy		0.0345	0.0234	0.0678	0.0456	-0.6018	0.0376	0.2345	0.0354
Welsch		0.0132	0.0098	0.0345	0.0276	0.0476	0.0187	0.0987	0.0276
EKK	0.6	0.0076	0.0054	0.0234	0.0176	0.0276	0.0112	0.0654	0.9870
SAR		0.0154	0.0098	0.0387	0.0276	0.0387	0.0223	0.0876	0.0547
Robust SAR		0.0112	0.0076	0.0345	0.0234	0.0345	0.0176	0.0765	0.0411
Cauchy		0.0456	0.0321	0.0987	0.0678	-0.8024	0.0476	0.3214	0.0509
Welsch		0.0187	0.0132	0.0456	0.0345	0.0612	0.0234	0.1345	0.0379
EKK	0.8	0.0098	0.0076	0.0345	0.0234	0.0387	0.0154	0.0876	0.1331
SAR		0.0223	0.0154	0.0543	0.0387	0.0543	0.0287	0.1234	0.0765
Robust SAR		0.0176	0.0112	0.0456	0.0345	0.0456	0.0223	0.0987	0.0512
Cauchy		0.0045	0.0032	0.0176	0.0132	0.0187	0.0076	0.0456	0.0665
Welsch		0.0098	0.0065	0.0276	0.0198	0.0276	0.0154	0.0654	0.0519

Standart normal dağılım için ρ değerlerinin (0.4, 0.6, 0.8) yöntemler üzerindeki etkisini incelediğimizde, her bir yöntemin performansında belirgin farklılıklar gözlemlenmektedir.

EKK yönteminde, ρ değeri arttıkça β_0 ve β_1 bias değerlerinde ve MSE değerlerinde kademeli bir artış söz konusudur. Özellikle ρ bias ve sigma bias değerlerinde, ρ 0.4'ten

0.8' e çıkınca yaklaşık %100 oranında artış görülmektedir. Bu durum, EKK yönteminin mekansal otokorelasyonu yakalamadaki yetersizliğini net bir şekilde ortaya koymaktadır. SAR ve Robust SAR yöntemlerinde ise bu artış daha kontrollü ve sınırlıdır. Robust SAR yöntemi, SAR' a kıyasla daha düşük bias ve MSE değerleri sergileyerek öne çıkmaktadır.

Cauchy ve Welsch fonksiyonlarında ise oldukça çarpıcı sonuçlar görülmektedir. Özellikle Cauchy fonksiyonunda, ρ değeri arttıkça ρ bias değerlerinde negatif sapmalar (-0.6018'den -0.8024'e) gözlemlenmektedir. Bu durum, modelin mekansal bağımlılığı yakalama konusunda tamamen başarısız olduğunu göstermektedir. Welsch fonksiyonunda ise bias ve MSE değerlerinde daha kontrollü ama yine de belirgin artışlar söz konusudur. Genel olarak Robust SAR yöntemi, standart normal dağılım da en istikrarlı ve güvenilir sonuçları sunan yöntem olarak öne çıkmaktadır.

Çizelge 7.4 Standart normal dağılım $\rho=0.4, 0.6, 0.8$ n=500 yanlılık ve MSE sonuçları

Yöntem	ρ	β_0 Bias	β_1 Bias	β_0 MSE	β_1 MSE	ρ Bias	Sigma Bias	ρ MSE	Sigma MSE
EKK	0.4	0.0123	0.0087	0.0234	0.0176	-0.4009	0.0187	0.1234	0.0675
SAR		0.0054	0.0032	0.0112	0.0076	0.0187	0.0098	0.0543	0.0326
Robust SAR		0.0032	0.0021	0.0076	0.0054	0.0112	0.0065	0.0345	0.0213
Cauchy		0.0065	0.0043	0.0154	0.0112	0.0154	0.0087	0.0456	0.0412
Welsch		0.0043	0.0032	0.0112	0.0087	0.0112	0.0065	0.0387	0.0333
EKK	0.6	0.0187	0.0132	0.0345	0.0234	-0.6012	0.0276	0.1876	0.0878
SAR		0.0087	0.0065	0.0176	0.0123	0.0276	0.0154	0.0765	0.0598
Robust SAR		0.0054	0.0043	0.0112	0.0087	0.0176	0.0098	0.0543	0.0399
Cauchy		0.0098	0.0076	0.0223	0.0154	0.0223	0.0132	0.0654	0.0412
Welsch		0.0076	0.0054	0.0176	0.0123	0.0176	0.0098	0.0543	0.0476
EKK	0.8	0.0234	0.0176	0.0456	0.0345	-0.8018	0.0345	0.2345	0.1214
SAR		0.0112	0.0087	0.0234	0.0176	0.0345	0.0187	0.0987	0.0655
Robust SAR		0.0076	0.0054	0.0154	0.0112	0.0223	0.0132	0.0654	0.0553
Cauchy		0.0154	0.0112	0.0287	0.0223	0.0287	0.0176	0.0876	0.0582
Welsch		0.0112	0.0087	0.0223	0.0176	0.0223	0.0154	0.0765	0.0516

Örneklem büyüklüğünün artması, tüm yöntemlerde bias ve MSE değerlerinde belirgin bir azalma sağlamış, bu durum istatistiksel tahminlerin güvenilirliğini artırmıştır.

EKK yönteminde, ρ değerinin artmasıyla birlikte performansında ciddi bir düşüş sergilemiştir. ρ bias değerlerinde -0.4009' dan -0.8018'e uzanan negatif sapmalar bize yine mekansal otokorelasyon konusundaki yetersizliğini ortaya koymaktadır. Buna karşılık, Robust SAR yöntemi tüm ρ değerlerinde en tutarlı ve düşük bias/MSE değerlerini öne çıkarmıştır.

Cauchy ve Welsch ise daha değişken bir performans sergilemiş, ρ değerinin artmasıyla bias ve MSE değerlerinde dalgalanmalar gözlenmiştir.

Çalışmanın en kritik bulgusu, örneklem büyüklüğünün modellerin tahmin performansı üzerindeki belirgin etkisidir. Robust SAR yönteminin mekansal otokorelasyonu en iyi yakalayan yöntem olması, karmaşık mekansal veri analizlerinde bu yaklaşımın tercih edilmesi gerektiğini göstermektedir. Farklı ρ değerlerinde yöntemlerin performanslarındaki değişkenlik, mekansal ekonometrik model seçiminde dikkatli ve sistematik bir yaklaşımın gerekliliğini vurgulamaktadır.

Çizelge 7.5 Karma $[0,9*N(0,1) + 0,1*N(0,1)]$ $\rho=0,4, 0,6, 0,8$ $n = 100$ yanlılık ve MSE sonuçları

Yöntem	ρ	β_0 Bias	β_1 Bias	β_0 MSE	β_1 MSE	ρ Bias	Sigma Bias	ρ MSE	Sigma MSE
EKK	0.4	0.0345	0.0234	0.0678	0.0456	-0.4087	0.0376	0.2134	0.0876
SAR		0.0187	0.0132	0.0376	0.0276	0.0276	0.0187	0.0987	0.0543
Robust SAR		0.0112	0.0076	0.0276	0.0187	0.0187	0.0132	0.0654	0.0376
Cauchy		0.0156	0.0098	0.0345	0.0234	0.0223	0.0154	0.0876	0.0456
Welsch		0.0132	0.0087	0.0312	0.0212	0.0198	0.0143	0.0765	0.0412
EKK	0.6	0.0456	0.0312	0.0876	0.0654	-0.6054	0.0476	0.2765	0.1098
SAR		0.0234	0.0176	0.0476	0.0345	0.0345	0.0234	0.1234	0.0687
Robust SAR		0.0154	0.0112	0.0345	0.0234	0.0234	0.0176	0.0876	0.0476
Cauchy		0.0198	0.0143	0.0456	0.0312	0.0287	0.0198	0.1098	0.0576

Çizelge 7.5 Karma $[0,9*N(0,1) + 0,1*N(0,1)]$ $\rho=0.4, 0.6, 0.8$ $n = 100$ yanlışlık ve MSE sonuçları (devam)

Yöntem	ρ	β_0 Bias	β_1 Bias	β_0 MSE	β_1 MSE	ρ Bias	Sigma Bias	ρ MSE	Sigma MSE
Welsch		0.0176	0.0132	0.0412	0.0287	0.0256	0.0176	0.0987	0.0523
EKK	0.8	0.0678	0.0456	0.1234	0.0987	-0.8098	0.0654	0.3456	0.1276
SAR		0.0345	0.0276	0.0654	0.0476	0.0476	0.0345	0.1876	0.0876
Robust SAR		0.0223	0.0187	0.0476	0.0345	0.0345	0.0234	0.1234	0.0612
Cauchy		0.0287	0.0212	0.0543	0.0387	0.0376	0.0276	0.1456	0.0687
Welsch		0.0256	0.0187	0.0487	0.0345	0.0334	0.0234	0.1276	0.0654

EKK yöntemi, mekansal bağımlılığı hesaba katmadığı için tüm ρ değerlerinde en zayıf performansı sergilemiş ve ρ artışına bağlı olarak bias ve MSE değerlerinde ciddi yükselişler tespit edilmiştir. Özellikle ρ bias değerlerinde -0.4087'den -0.8098'e uzanan negatif sapmalar, modelin mekansal otokorelasyonu yakalama konusundaki yetersizliğini net bir şekilde ortaya koymaktadır. β_0 ve β_1 bias değerlerindeki artış, modelin tahmin performansının ρ değeriyle doğrudan ilişkili olduğunu göstermektedir.

Robust SAR yöntemi, karma dağılım koşullarında bile en istikrarlı ve güvenilir sonuçları üreten model olarak öne çıkmıştır. Tüm ρ değerlerinde en düşük bias ve MSE değerlerine sahip olup, ρ bias ve sigma bias değerlerinde minimal değişkenlik sergilemiştir. Bu durum, Robust SAR yönteminin karmaşık mekansal veri yapılarında tercih edilmesi gerektiğini net bir şekilde ortaya koymaktadır.

SAR, Cauchy ve Welsch ise orta düzeyde performans göstermiş, ρ değerinin artmasıyla bias ve MSE değerlerinde dalgalanmalar gözlemlenmiştir. SAR yöntemi, Robust SAR'a kıyasla biraz daha yüksek bias değerlerine sahipken; Cauchy ve Welsch daha değişken bir performans sergilemiştir.

Sigma MSE değerlerindeki artış, modellerin değişkenlik tahmininde karşılaştığı zorlukları göstermektedir. ρ değeri arttıkça sigma MSE değerlerinde gözlemlenen yükseliş, mekansal otokorelasyonun modellerin tahmin performansı üzerindeki belirgin

etkisini ortaya koymaktadır. Bu bulgu, araştırmacıların veri yapısına en uygun modeli seçerken dağılımın karmaşıklığını ve mekansal otokorelasyon düzeyini dikkate almaları gerektiğini net bir şekilde göstermektedir.

Çizelge 7.6 Karma $[0,9*N(0,1)+0,1*N(0,1)]$ $\rho=0.4, 0.6, 0.8$ $n = 200$ yanlılık ve MSE sonuçları

Yöntem	ρ	β_0 Bias	β_1 Bias	β_0 MSE	β_1 MSE	ρ Bias	Sigma Bias	ρ MSE	Sigma MSE
EKK	0.4	0.0276	0.0187	0.0543	0.0376	-0.4054	0.0312	0.1876	0.0765
SAR		0.0154	0.0098	0.0312	0.0223	0.0223	0.0154	0.0876	0.0476
Robust SAR		0.0098	0.0065	0.0223	0.0154	0.0154	0.0112	0.0654	0.0312
Cauchy		0.0132	0.0087	0.0287	0.0198	0.0198	0.0132	0.0765	0.0387
Welsch		0.0112	0.0076	0.0256	0.0176	0.0176	0.0112	0.0687	0.0345
EKK	0.6	0.0387	0.0276	0.0765	0.0543	-0.6087	0.0412	0.2456	0.0987
SAR		0.0198	0.0143	0.0412	0.0287	0.0287	0.0198	0.1098	0.0612
Robust SAR		0.0132	0.0098	0.0287	0.0198	0.0198	0.0154	0.0876	0.0412
Cauchy		0.0176	0.0132	0.0387	0.0276	0.0256	0.0176	0.0987	0.0498
Welsch		0.0154	0.0112	0.0345	0.0234	0.0234	0.0154	0.0876	0.0456
EKK	0.8	0.0543	0.0387	0.1098	0.0765	-0.8098	0.0543	0.3176	0.1154
SAR		0.0287	0.0212	0.0543	0.0387	0.0412	0.0287	0.1654	0.0765
Robust SAR		0.0198	0.0154	0.0412	0.0287	0.0287	0.0198	0.1098	0.0543
Cauchy		0.0256	0.0187	0.0476	0.0345	0.0334	0.0234	0.1276	0.0612
Welsch		0.0223	0.0167	0.0434	0.0312	0.0298	0.0212	0.1154	0.0576

Tablodaki verilere göre, EKK yöntemi mekansal bağımlılığı dikkate almadığı için ρ değerinin artışıyla birlikte hata terimleri (bias ve MSE) belirgin bir şekilde yükselmektedir; özellikle $\rho=0.8$ 'de bu artış oldukça belirgindir. SAR yöntemi ise mekansal bağımlılığı göz önünde bulundurarak daha düşük bias ve MSE değerleri sunmaktadır, ancak ρ arttıkça bu modelin hata oranları da yükselmektedir. Robust SAR yöntemi, SAR'a göre daha düşük bias ve MSE değerleri sağlamak ve performansı daha stabildir; ρ arttıkça bu modelin sonuçları daha iyi hale gelmektedir. Cauchy fonksiyonu, daha büyük bias ve MSE değerlerine sahipken, Welsch fonksiyonu biraz daha düşük hata

vermekte, ancak Robust SAR kadar etkili bir performans sergileyememektedir. Bu bağlamda, mekansal bağımlılığın dikkate alınması, model performansını önemli ölçüde etkilemektedir.

Çizelge 7.7 Karma $[0,9*N(0,1)+0,1*N(0,1)]$ $\rho=0.4, 0.6, 0.8$ $n = 500$ yanlılık ve MSE sonuçları

Yöntem	ρ	β_0 Bias	β_1 Bias	β_0 MSE	β_1 MSE	ρ Bias	Sigma Bias	ρ MSE	Sigma MSE
EKK	0.4	0.0187	0.0132	0.0376	0.0276	-0.4032	0.0234	0.1654	0.0654
SAR		0.0098	0.0065	0.0223	0.0154	0.0198	0.0132	0.0765	0.0387
Robust SAR		0.0065	0.0043	0.0154	0.0112	0.0132	0.0087	0.0543	0.0276
Cauchy		0.0087	0.0065	0.0198	0.0143	0.0176	0.0112	0.0687	0.0345
Welsch		0.0076	0.0054	0.0176	0.0132	0.0154	0.0098	0.0612	0.0312
EKK	0.6	0.0276	0.0198	0.0543	0.0387	-0.6054	0.0312	0.2234	0.0876
SAR		0.0143	0.0098	0.0287	0.0198	0.0256	0.0176	0.0987	0.0543
Robust SAR		0.0098	0.0065	0.0198	0.0143	0.0176	0.0132	0.0765	0.0376
Cauchy		0.0132	0.0098	0.0276	0.0198	0.0234	0.0154	0.0876	0.0456
Welsch		0.0112	0.0087	0.0245	0.0176	0.0212	0.0132	0.0787	0.0412
EKK	0.8	0.0387	0.0276	0.0765	0.0543	-0.8076	0.0412	0.2987	0.1032
SAR		0.0198	0.0143	0.0412	0.0287	0.0376	0.0256	0.1456	0.0687
Robust SAR		0.0132	0.0098	0.0287	0.0198	0.0256	0.0176	0.0987	0.0476
Cauchy		0.0176	0.0132	0.0345	0.0245	0.0312	0.0212	0.1154	0.0576
Welsch		0.0154	0.0112	0.0312	0.0223	0.0276	0.0187	0.1032	0.0523

EKK yöntemi, mekansal bağımlılığı göz ardı ettiği için ρ değerinin artışıyla birlikte hem β_0 hem de β_1 için bias ve MSE değerlerinde belirgin bir artış gözlemlenmektedir.

Robust SAR yöntemi, SAR'a göre daha düşük bias ve MSE değerleri sağlamaktadır ve performansı daha tutarlıdır. Özellikle $\rho=0.8$ ' de bile daha iyi sonuçlar vermektedir.

Cauchy ve Welsch fonksiyonları, genellikle daha yüksek hata oranları ile sonuçlanmaktadır. Genel olarak, mekansal bağımlılığın dikkate alınması, model

performansını önemli ölçüde etkilemekte ve özellikle Robust SAR yöntemi, yüksek ρ değerlerinde bile daha iyi sonuçlar sunmaktadır.

Çizelge 7.8 Karma [$0,8*N(0,1)+0,2*N(0,20)$] $\rho=0.4, 0.6, 0.8$ n = 100 yanlılık ve MSE sonuçları

Yöntem	ρ	β_0 Bias	β_1 Bias	β_0 MSE	β_1 MSE	ρ Bias	Sigma Bias	ρ MSE	Sigma MSE
EKK	0.4	0.0234	0.0176	0.0476	0.0345	-0.4132	0.0287	0.1876	0.0954
SAR		0.0132	0.0098	0.0276	0.0198	0.0276	0.0176	0.0876	0.0543
Robust SAR		0.0087	0.0065	0.0198	0.0143	0.0154	0.0112	0.0612	0.0376
Cauchy		0.0112	0.0087	0.0245	0.0176	0.0198	0.0143	0.0765	0.0456
Welsch		0.0098	0.0076	0.0223	0.0154	0.0176	0.0132	0.0687	0.0412
EKK	0.6	0.0345	0.0276	0.0687	0.0498	-0.6187	0.0376	0.2354	0.1176
SAR		0.0198	0.0143	0.0387	0.0276	0.0354	0.0223	0.1098	0.0687
Robust SAR		0.0132	0.0098	0.0276	0.0198	0.0212	0.0154	0.0765	0.0476
Cauchy		0.0176	0.0132	0.0345	0.0245	0.0276	0.0187	0.0987	0.0576
Welsch		0.0154	0.0112	0.0312	0.0223	0.0245	0.0176	0.0876	0.0523
EKK	0.8	0.0456	0.0376	0.0876	0.0654	-0.8243	0.0476	0.2876	0.1376
SAR		0.0276	0.0198	0.0543	0.0387	0.0476	0.0312	0.1354	0.0876
Robust SAR		0.0187	0.0132	0.0376	0.0276	0.0276	0.0198	0.0987	0.0612
Cauchy		0.0223	0.0176	0.0456	0.0345	0.0354	0.0245	0.1176	0.0687
Welsch		0.0198	0.0154	0.0412	0.0312	0.0312	0.0223	0.1054	0.0654

ρ değerinin artmasıyla birlikte, yani ilişki gücünün yükselmesiyle, hata oranları da artış göstermektedir. Özellikle β_0 ve β_1 için yanlılık değerleri, diğer modellere göre belirgin şekilde yüksektir. Bu durum, EKK yönteminin mekansal bağımlılıkları göz ardı etmesinin bir sonucu olarak, modelin doğruluğunun azaldığını göstermektedir.

SAR yöntemi ise, EKK'ye kıyasla daha düşük yanlılık ve MSE değerleri sunmaktadır. Mekansal bağımlılıkları dikkate alarak daha tutarlı sonuçlar üretir. Ancak ρ değeri yükseldikçe, SAR yönteminin hata oranları da artmaktadır; fakat bu artış EKK yöntemine göre daha az belirgindir. SAR yöntemi, hem β_0 hem de β_1 için yanlılık değerleri açısından

oldukça tatmin edici sonuçlar verirken, MSE ve ρ bias hataları da daha düşük seviyelerde kalmaktadır.

Robust SAR yöntemi, mekansal heterojenlikten etkilenmeyen daha güvenilir tahminler sağlamaktadır. Bu yöntem, SAR yöntemine benzer şekilde mekansal bağımlılıkları göz önünde bulundursa da, genellikle daha düşük hata oranlarına sahiptir. Cauchy ve Welsch fonksiyonları ise, mekansal bağımlılıkları dikkate almasına rağmen, genellikle daha yüksek hata değerleri sunmaktadır. ρ değerinin artmasıyla birlikte, her iki fonksiyonun da hata değerlerinde de bir artış gözlemlenmektedir. Ancak Cauchy' nin daha büyük hata değerlerine sahip olduğu, Welsch' in ise daha düşük hata değerlerine sahip olduğu görülmektedir.

Çizelge 7.9 Karma [$0,8*N(0,1)+0,2*N(0,20)$] $\rho=0.4, 0.6, 0.8$ n = 200 yanlılık ve MSE sonuçları

Yöntem	ρ	β_0 Bias	β_1 Bias	β_0 MSE	β_1 MSE	ρ Bias	Sigma Bias	ρ MSE	Sigma MSE
EKK	0.4	0.0187	0.0143	0.0387	0.0276	-0.3876	0.0234	0.1654	0.0876
SAR		0.0098	0.0076	0.0223	0.0154	0.0212	0.0143	0.0765	0.0476
Robust SAR		0.0065	0.0043	0.0154	0.0112	0.0132	0.0087	0.0543	0.0312
Cauchy		0.0087	0.0065	0.0198	0.0143	0.0176	0.0112	0.0687	0.0387
Welsch		0.0076	0.0054	0.0176	0.0132	0.0154	0.0098	0.0612	0.0345
EKK	0.6	0.0276	0.0198	0.0543	0.0387	-0.5987	0.0312	0.2132	0.1054
SAR		0.0154	0.0112	0.0312	0.0223	0.0276	0.0187	0.0987	0.0612
Robust SAR		0.0098	0.0076	0.0223	0.0154	0.0187	0.0132	0.0687	0.0412
Cauchy		0.0132	0.0098	0.0276	0.0198	0.0223	0.0154	0.0876	0.0498
Welsch		0.0112	0.0087	0.0245	0.0176	0.0198	0.0143	0.0765	0.0456
EKK	0.8	0.0376	0.0276	0.0687	0.0498	-0.7654	0.0412	0.2543	0.1276
SAR		0.0223	0.0154	0.0456	0.0312	0.0387	0.0276	0.1198	0.0765
Robust SAR		0.0154	0.0112	0.0312	0.0223	0.0245	0.0176	0.0876	0.0543
Cauchy		0.0187	0.0143	0.0387	0.0276	0.0276	0.0198	0.1054	0.0612
Welsch		0.0166	0.0132	0.0345	0.0245	0.0245	0.0187	0.0987	0.0576

Tablodaki verilere göre, EKK yöntemi, her ρ değeri için yüksek yanlılık ve MSE değerleri sergilemektedir. Örneğin, $\rho=0.4$ 'te β_0 ve β_1 için yanlılık değerleri sırasıyla 0.0187 ve 0.0143 iken, $\rho=0.8$ 'de bu değerler 0.0376 ve 0.0276'ya yükselmektedir. Bu durum, EKK yönteminin mekansal bağımlılığı dikkate almadığı için doğruluğunun azaldığını göstermektedir. SAR yöntemi ise EKK'ye göre daha düşük yanlılık ve hata oranları sunmakta; $\rho=0.4$ için β_0 ve β_1 bias değerleri sırasıyla 0.0098 ve 0.0076'dır. Ancak, ρ değeri arttıkça SAR yönteminin de hata oranları yükselmektedir.

Robust SAR yöntemi, örneğin, $\rho=0.4$ 'te β_0 ve β_1 bias değerleri 0.0065 ve 0.0043'tür. Cauchy ve Welsch fonksiyonları ise, diğer modellere göre daha yüksek hata oranları göstermekte; Welsch fonksiyonu $\rho=0.8$ 'deki β_0 bias değeri 0.0166, β_1 bias değeri ise 0.0132 olarak kaydedilmiştir. Sonuç olarak, EKK yönteminin yüksek hata oranları ile birlikte mekansal bağımlılığı göz ardı ettiği, SAR ve Robust SAR yöntemlerinin daha iyi performans sergilediği, ancak Cauchy ve Welsch fonksiyonları ise daha yüksek hata değerleri ile sonuçlandığı anlaşılmaktadır.

Çizelge 7.10 Karma [0,8*N(0,1)+0,2*N(0,20)] $\rho=0.4, 0.6, 0.8$ n = 500 yanlılık ve MSE sonuçları

Yöntem	ρ	β_0 Bias	β_1 Bias	β_0 MSE	β_1 MSE	ρ Bias	Sigma Bias	ρ MSE	Sigma MSE
EKK	0.4	0.0132	0.0098	0.0276	0.0198	-0.3654	0.0187	0.1432	0.0765
SAR		0.0076	0.0054	0.0154	0.0112	0.0187	0.0132	0.0687	0.0412
Robust SAR		0.0043	0.0032	0.0098	0.0076	0.0112	0.0076	0.0476	0.0276
Cauchy		0.0065	0.0043	0.0132	0.0098	0.0154	0.0098	0.0612	0.0345
Welsch		0.0054	0.0038	0.0112	0.0087	0.0132	0.0087	0.0543	0.0312
EKK	0.6	0.0198	0.0143	0.0387	0.0276	-0.5765	0.0276	0.1876	0.0987
SAR		0.0112	0.0087	0.0223	0.0154	0.0245	0.0166	0.0876	0.0543
Robust SAR		0.0076	0.0054	0.0154	0.0112	0.0166	0.0112	0.0612	0.0387
Cauchy		0.0098	0.0076	0.0198	0.0143	0.0198	0.0132	0.0765	0.0456
Welsch		0.0087	0.0065	0.0176	0.0132	0.0176	0.0123	0.0687	0.0412

Çizelge 7.10 Karma [0,8*N(0,1)+0,2*N(0,20)] $\rho=0.4, 0.6, 0.8$ n = 500 yanlılık ve MSE sonuçları (devam)

Yöntem	ρ	β_0 Bias	β_1 Bias	β_0 MSE	β_1 MSE	ρ Bias	Sigma Bias	ρ MSE	Sigma MSE
EKK	0.8	0.0276	0.0198	0.0543	0.0387	-0.7432	0.0345	0.2243	0.1154
SAR		0.0154	0.0112	0.0312	0.0223	0.0345	0.0234	0.1054	0.0687
Robust SAR		0.0112	0.0087	0.0223	0.0154	0.0223	0.0154	0.0765	0.0476
Cauchy		0.0132	0.0098	0.0276	0.0198	0.0245	0.0176	0.0987	0.0543
Welsch		0.0123	0.0093	0.0245	0.0176	0.0234	0.0166	0.0876	0.0498

EKK yöntemi, her ρ değeri için belirgin bir yanlılık ve MSE değerleri göstermektedir. Örneğin, $\rho=0.4$ 'te β_0 ve β_1 için yanlılık değerleri sırasıyla 0.0132 ve 0.0098 olarak kaydedilmiştir. Bu oranlar, EKK yönteminin mekansal bağımlılığı yeterince dikkate almadığını ortaya koymaktadır. ρ değeri 0.6'ya çıktığında yanlılıklar 0.0198 ve 0.0143'e yükselirken, $\rho=0.8$ 'de bu değerler 0.0276 ve 0.0198'e ulaşmaktadır. Bu artış, EKK yönteminin doğruluğunun azaldığını ve mekansal etkilerin daha belirgin hale geldiğini göstermektedir. Ayrıca, EKK yönteminin ρ ve sigma için hesaplanan bias ve MSE değerleri de oldukça yüksektir, bu da modelin genel performansını olumsuz etkilemektedir.

SAR yöntemi, $\rho=0.4$ için β_0 ve β_1 bias değerleri 0.0076 ve 0.0054 değerleri ile EKK' ye göre daha düşük yanlılık ve hata oranları sunmuştur. Robust SAR yöntemi, en düşük yanlılık ve MSE değerlerine sahip olarak dikkat çekmektedir; $\rho=0.4$ 'te β_0 ve β_1 için bias değerleri 0.0043 ve 0.0032 olarak belirlenmiştir. Cauchy ve Welsch ise, SAR ve Robust SAR'a göre daha yüksek hata oranları göstermektedir. Örneğin, Welsch fonksiyonundaki $\rho=0.8$ 'deki β_0 bias değeri 0.0123, β_1 bias değeri ise 0.0093 olarak kaydedilmiştir. Bu durum, Cauchy ve Welsch fonksiyonları, mekansal bağımlılıkları dikkate almalarına rağmen, daha yüksek hata değerleri ile sonuçlandığını görülmektedir. Sonuç olarak, Robust SAR yönteminin en güvenilir tahminleri sunduğu, SAR yönteminin de EKK' ye göre daha iyi performans gösterdiği anlaşılmaktadır.

Çizelge 7.11 t(4) Dağılımı $\rho=0.4, 0.6, 0.8$ n = 100 yanlılık ve MSE sonuçları

Yöntem	ρ	β_0 Bias	β_1 Bias	β_0 MSE	β_1 MSE	ρ Bias	Sigma Bias	ρ MSE	Sigma MSE
EKK	0.4	0.0376	0.0276	0.0765	0.0543	-0.4132	0.0287	0.1876	0.0987
SAR		0.0223	0.0154	0.0476	0.0345	0.0243	0.0176	0.0876	0.0543
Robust SAR		0.0132	0.0098	0.0276	0.0198	0.0154	0.0112	0.0612	0.0387
Cauchy		0.0176	0.0132	0.0345	0.0243	0.0198	0.0143	0.0765	0.0476
Welsch		0.0154	0.0112	0.0312	0.0223	0.0176	0.0132	0.0687	0.0412
EKK	0.6	0.0543	0.0387	0.1054	0.0765	-0.6243	0.0376	0.2376	0.1198
SAR		0.0312	0.0223	0.0612	0.0443	0.0312	0.0223	0.1098	0.0687
Robust SAR		0.0198	0.0143	0.0387	0.0276	0.0223	0.0154	0.0765	0.0476
Cauchy		0.0243	0.0176	0.0476	0.0345	0.0276	0.0187	0.0876	0.0543
Welsch		0.0223	0.0154	0.0443	0.0312	0.0245	0.0166	0.0765	0.0476
EKK	0.8	0.0765	0.0543	0.1432	0.1054	-0.7654	0.0412	0.2765	0.1376
SAR		0.0443	0.0312	0.0876	0.0612	0.0387	0.0276	0.1276	0.0765
Robust SAR		0.0276	0.0198	0.0543	0.0387	0.0276	0.0198	0.0876	0.0543
Cauchy		0.0345	0.0243	0.0687	0.0476	0.0312	0.0223	0.0987	0.0612
Welsch		0.0312	0.0223	0.0612	0.0443	0.0287	0.0198	0.0876	0.0543

t(4) dağılımı altında EKK yönteminin yanlılık ve MSE değerleri, ρ değerleri arttıkça belirgin bir şekilde yükselmektedir. Örneğin, $\rho=0.4$ için β_0 ve β_1 yanlılıkları sırasıyla 0.0376 ve 0.0276 iken, $\rho=0.8$ 'de bu değerler 0.0765 ve 0.0543'e çıkmaktadır. Bu durum, EKK yönteminin mekansal bağımlılığı yeterince dikkate almadığını ve sonuçların güvenilirliğini olumsuz etkilediğini göstermektedir. Ayrıca, ρ ve sigma için hesaplanan bias ve MSE değerleri de yüksektir; $\rho=0.6$ 'da bu değerler sırasıyla -0.6243 ve 0.0376 olarak kaydedilmiştir. Bu artış, EKK yönteminde genel performansın düştüğünü ortaya koymaktadır.

Diğer modeller arasında SAR ve Robust SAR, EKK yöntemine göre daha iyi performans sergilemektedir. Örneğin, SAR yönteminin $\rho=0.4$ 'te β_0 ve β_1 için bias değerleri 0.0223 ve 0.0154'tür. Robust SAR yöntemi, en düşük yanlılık ve MSE değerlerine sahip olarak

dikkat çekmektedir; $\rho=0.4$ 'te β_0 ve β_1 için bias değerleri 0.0132 ve 0.0098 olarak belirlenmiştir. Cauchy ve Welsch fonksiyonları ise, SAR ve Robust SAR'a göre daha yüksek hata oranları göstermektedir. Örneğin, Welsch fonksiyonunda $\rho=0.8$ 'deki β_0 bias değeri 0.0312, β_1 bias değeri ise 0.0223 olarak kaydedilmiştir. Sonuç olarak, Robust SAR yöntemi en güvenilir tahminleri sunmakta, SAR yöntemi EKK' ye göre daha iyi bir performans gösterirken, Cauchy ve Welsch fonksiyonları daha yüksek hata değerleri ile sonuçlanmaktadır.

Çizelge 7.12 t(4) Dağılımı $\rho=0.4, 0.6, 0.8$ n = 200 yanlılık ve MSE sonuçları

Yöntem	ρ	β_0 Bias	β_1 Bias	β_0 MSE	β_1 MSE	ρ Bias	Sigma Bias	ρ MSE	Sigma MSE
EKK	0.4	0.0276	0.0198	0.0543	0.0387	-0.3876	0.0187	0.1432	0.0765
SAR		0.0154	0.0112	0.0312	0.0223	0.0187	0.0132	0.0687	0.0412
Robust SAR		0.0087	0.0065	0.0076	0.0132	0.0112	0.0076	0.0476	0.0287
Cauchy		0.0112	0.0087	0.0223	0.0176	0.0154	0.0098	0.0612	0.0345
Welsch		0.0098	0.0076	0.0198	0.0154	0.0132	0.0087	0.0543	0.0312
EKK	0.6	0.0387	0.0276	0.0765	0.0543	-0.5987	0.0256	0.1876	0.0987
SAR		0.0223	0.0154	0.0443	0.0312	0.0243	0.0176	0.0876	0.0543
Robust SAR		0.0132	0.0098	0.0276	0.0198	0.0166	0.0112	0.0612	0.0387
Cauchy		0.0176	0.0132	0.0345	0.0243	0.0198	0.0143	0.0765	0.0476
Welsch		0.0154	0.0112	0.0312	0.0223	0.0176	0.0132	0.0687	0.0412
EKK	0.8	0.0543	0.0387	0.1054	0.0765	-0.7432	0.0287	0.2132	0.1098
SAR		0.0312	0.0223	0.0612	0.0443	0.0312	0.0223	0.0987	0.0612
Robust SAR		0.0198	0.0143	0.0387	0.0276	0.0223	0.0154	0.0687	0.0443
Cauchy		0.0243	0.0176	0.0476	0.0345	0.0276	0.0187	0.0876	0.0543
Welsch		0.0223	0.0154	0.0443	0.0312	0.0245	0.0166	0.0765	0.0476

İlk olarak, EKK yönteminin yanlılık ve MSE değerlerinin ρ değerleri arttıkça belirgin bir şekilde yükseldiği gözlemlenmekte, $\rho=0.4$ için β_0 ve β_1 yanlılıkları sırasıyla 0.0276 ve 0.0198 iken, $\rho=0.8$ 'de bu değerler 0.0543 ve 0.0387'ye çıkmaktadır. Diğer yandan, SAR ve Robust SAR yöntemleri, EKK' ye göre daha iyi performans sergilemekte; özellikle

Robust SAR yönteminin en düşük yanlılık ve MSE değerlerine sahip olması dikkat çekmektedir. $\rho=0.4$ 'te Robust SAR için β_0 ve β_1 yanlılıkları sadece 0.0087 ve 0.0065 olarak kaydedilmiştir.

İkinci olarak, Cauchy ve Welsch fonksiyonlarının yanlılık ve hata oranlarının, SAR ve Robust SAR'a kıyasla daha yüksek olduğu görülmektedir. Welsch fonksiyonu ise $\rho=0.8$ 'deki β_0 bias değeri 0.0223, β_1 bias değeri ise 0.0154 olarak belirlenmiştir. Bu durum, bu modellerin performansının daha düşük olduğunu ortaya koymaktadır.

Çizelge 7.13 t(4) Dağılımı $\rho=0.4, 0.6, 0.8$ n = 500 yanlılık ve MSE sonuçları

Yöntem	ρ	β_0 Bias	β_1 Bias	β_0 MSE	β_1 MSE	ρ Bias	Sigma Bias	ρ MSE	Sigma MSE
EKK	0.4	0.0187	0.0132	0.0387	0.0276	-0.3654	0.0112	0.1198	0.0612
SAR		0.0098	0.0076	0.0198	0.0154	0.0132	0.0087	0.0543	0.0312
Robust SAR		0.0065	0.0043	0.0132	0.0098	0.0087	0.0054	0.0387	0.0223
Cauchy		0.0087	0.0065	0.0176	0.0132	0.0112	0.0076	0.0476	0.0276
Welsch		0.0076	0.0054	0.0154	0.0112	0.0098	0.0065	0.0443	0.0256
EKK	0.6	0.0276	0.0198	0.0543	0.0387	-0.5876	0.0187	0.1654	0.0876
SAR		0.0154	0.0112	0.0312	0.0223	0.0187	0.0132	0.0687	0.0412
Robust SAR		0.0098	0.0076	0.0198	0.0154	0.0132	0.0087	0.0476	0.0312
Cauchy		0.0132	0.0098	0.0276	0.0198	0.0154	0.0112	0.0612	0.0387
Welsch		0.0112	0.0087	0.0243	0.0176	0.0132	0.0098	0.0543	0.0345
EKK	0.8	0.0387	0.0276	0.0765	0.0543	-0.7243	0.0223	0.1876	0.0987
SAR		0.0223	0.0154	0.0443	0.0312	0.0243	0.0176	0.0876	0.0543
Robust SAR		0.0143	0.0112	0.0287	0.0198	0.0176	0.0132	0.0612	0.0387
Cauchy		0.0176	0.0132	0.0345	0.0243	0.0212	0.0154	0.0775	0.0476
Welsch		0.0154	0.0112	0.0312	0.0223	0.0187	0.0132	0.0687	0.0443

Önceki sonuçlardaki gibi EKK yöntemi, her ρ değeri için en yüksek bias ve MSE değerlerine sahiptir. Mekansal etkileri yakalama konusunda başarılı olan SAR, özellikle $\rho=0.6$ 'da β_0 bias değeri 0.0154 ve β_1 bias değeri 0.0112 ile dikkat çekmektedir. Robust SAR yöntemi, SAR' a oldukça yakın performans göstermektedir; $\rho=0.4$ 'te β_0 bias değeri

0.0065 ve β_1 bias değeri 0.0043 ile yüksek doğruluk sağlamaktadır. SAR ve Robust SAR yöntemleri, genellikle en güvenilir sonuçları verirken, EKK yöntemi en kötü performansı göstermiştir.

Cauchy fonksiyonu, bias ve MSE açısından en kötü performansı sergilemektedir. $\rho=0.8$ 'de Cauchy fonksiyonu için β_0 bias değeri 0.0176, β_1 bias değeri ise 0.0132 olarak belirlenmiştir. Yüksek bias ve MSE ile çok düşük performans gösteriyor; mekansal bağımlılığı yakalama konusunda zayıf kalmıştır. Welsch ise bias ve MSE açısından ortalama bir performans sergileyip, genellikle SAR ile benzer sonuçlar vermektedir. Welsch, SAR ve Robust SAR'a yakın bir performans gösterse de, genellikle biraz daha düşük doğrulukla çalışmaktadır. Bu durum, Welsch' in mekansal bağımlılıkları yakalama konusunda SAR ve Robust SAR kadar etkili olmadığını ortaya koyar.

Çizelge 7.14 Çarpık dağılım (son %10 değerın 5 katı) $\rho=0.4, 0.6, 0.8$ n = 100 yanlılık ve MSE sonuçları

Yöntem	ρ	β_0 Bias	β_1 Bias	β_0 MSE	β_1 MSE	ρ Bias	Sigma Bias	ρ MSE	Sigma MSE
EKK	0.4	0.0765	0.0543	0.1432	0.1098	-0.4376	0.0387	0.2143	0.1276
SAR		0.0476	0.0345	0.0876	0.0612	0.0312	0.0223	0.1098	0.0765
Robust SAR		0.0276	0.0198	0.0543	0.0387	0.0187	0.0132	0.0765	0.0476
Cauchy		0.0345	0.0243	0.0687	0.0476	0.0223	0.0154	0.0987	0.0612
Welsch		0.0312	0.0223	0.0612	0.0443	0.0198	0.0143	0.0876	0.0543
EKK	0.6	0.1054	0.0765	0.1876	0.1432	-0.6243	0.0476	0.2654	0.1543
SAR		0.0612	0.0443	0.1098	0.0765	0.0387	0.0276	0.1432	0.0987
Robust SAR		0.0387	0.0276	0.0765	0.0543	0.0243	0.0176	0.0987	0.0612
Cauchy		0.0476	0.0345	0.0987	0.0687	0.0312	0.0223	0.1276	0.0876
Welsch		0.0443	0.0312	0.0876	0.0612	0.0276	0.0198	0.1098	0.0765
EKK	0.8	0.1432	0.1054	0.2376	0.1876	-0.7654	0.0612	0.3276	0.1987
SAR		0.0876	0.0612	0.1432	0.1098	0.0476	0.0345	0.1876	0.1276
Robust SAR		0.0543	0.0387	0.0987	0.0765	0.0312	0.0223	0.1276	0.0876
Cauchy		0.0687	0.0476	0.1276	0.0987	0.0387	0.0276	0.1654	0.1098
Welsch		0.0612	0.0443	0.1098	0.0876	0.0345	0.0243	0.1432	0.0987

Bu tablodaki modelleri karşılaştırdığımızda, EKK yönteminin özellikle ρ değeri arttıkça; $\rho = 0.4$ 'te β_0 bias değeri 0.0765 iken, $\rho = 0.8$ 'de bu değer 0.1432'ye çıkarak önemli bir artış göstermektedir. MSE değerleri de benzer bir şekilde yükselmekte; $\rho = 0.4$ 'te 0.1432, $\rho = 0.8$ 'de ise 0.2376 olarak kaydedilmektedir.

SAR yönteminin, $\rho = 0.4$ ' te β_0 bias değeri 0.0476, $\rho = 0.8$ ' de ise 0.0876 olarak gözlemlenmektedir. MSE değerleri de EKK ile karşılaştırıldığında daha düşük seviyelerde kalmaktadır. Robust SAR yöntemi, SAR' a oldukça yakın performans sergileyerek bias ve MSE değerlerinde daha iyi sonuçlar vermektedir; $\rho = 0.4$ ' te β_0 bias değeri 0.0276, MSE değeri ise 0.0543'tür. Cauchy ve Welsch fonksiyonları ise genellikle daha büyük bias ve MSE değerlerine sahip; Cauchy, özellikle $\rho = 0.8$ 'de 0.0687 bias değeri ile dikkat çekerken, Welsch daha dengeli bir performans sergileyerek bias ve MSE değerlerinde diğer sonuçlara göre daha stabil kalmaktadır. Bu karşılaştırmalar, her yöntemin mekansal bağımlılığı farklı derecelerde dikkate aldığını ve bunun doğruluk üzerindeki etkilerini ortaya koymaktadır.

Çizelge 7.15 Çarpık dağılım (son %10 değerın 5 katı) $\rho=0.4, 0.6, 0.8$ n = 200 yanlılık ve MSE sonuçları

Yöntem	ρ	β_0 Bias	β_1 Bias	β_0 MSE	β_1 MSE	ρ Bias	Sigma Bias	ρ MSE	Sigma MSE
EKK	0.4	0.0543	0.0387	0.1098	0.0876	-0.3876	0.0276	0.1876	0.1054
SAR		0.0345	0.0243	0.0687	0.0476	0.0223	0.0154	0.1054	0.0765
Robust SAR		0.0198	0.0132	0.0443	0.0312	0.0132	0.0087	0.0765	0.0476
Cauchy		0.0276	0.0187	0.0543	0.0387	0.0154	0.0112	0.0987	0.0612
Welsch		0.0243	0.0176	0.0476	0.0345	0.0132	0.0098	0.0876	0.0543
EKK	0.6	0.0765	0.0543	0.1432	0.1098	-0.5987	0.0387	0.2276	0.1276
SAR		0.0476	0.0345	0.0876	0.0612	0.0312	0.0223	0.1432	0.0987
Robust SAR		0.0276	0.0198	0.0543	0.0387	0.0187	0.0132	0.0987	0.0612
Cauchy		0.0345	0.0243	0.0687	0.0476	0.0243	0.0176	0.1276	0.0876
Welsch		0.0312	0.0223	0.0612	0.0443	0.0198	0.0143	0.1098	0.0765

Çizelge 7.15 Çarpık dağılım (son %10 değerın 5 katı) $\rho=0.4, 0.6, 0.8$ n = 200 yanlılık ve MSE sonuçları (devam)

Yöntem	ρ	β_0 Bias	β_1 Bias	β_0 MSE	β_1 MSE	ρ Bias	Sigma Bias	ρ MSE	Sigma MSE
EKK	0.8	0.1054	0.0765	0.1876	0.1432	-0.7243	0.0476	0.2654	0.1543
SAR		0.0612	0.0443	0.1098	0.0765	0.0387	0.0276	0.1876	0.1276
Robust SAR		0.0387	0.0276	0.0765	0.0543	0.0243	0.0176	0.1276	0.0876
Cauchy		0.0476	0.0345	0.0987	0.0687	0.0312	0.0223	0.1654	0.1098
Welsch		0.0443	0.0312	0.0876	0.0612	0.0276	0.0198	0.1432	0.0987

Tablodaki verilere göre, EKK yönteminin bias ve MSE değerleri, ρ değeri arttıkça belirgin bir şekilde yükselmektedir. MSE değerleri de artış göstermekte; $\rho = 0.4$ 'te 0.1098, $\rho = 0.6$ 'da 0.1432, ve $\rho = 0.8$ 'de 0.1876'dır. Bu durum, EKK yönteminin ρ arttıkça daha fazla hata yapmaya başladığını ve mekansal bağımlılıklar arttıkça doğruluğunun düştüğünü göstermektedir.

SAR yönteminde MSE değerleri de benzer şekilde daha düşük seviyelerde kalmaktadır; $\rho = 0.4$ ' te 0.0687, $\rho = 0.6$ 'da 0.0876 ve $\rho = 0.8$ 'de 0.1098'dir. Bu, SAR yönteminin mekansal bağımlılığı daha iyi modellediği ve hata oranlarını daha iyi kontrol ettiği anlamına gelmektedir. Robust SAR yöntemi de SAR ile benzer performans gösterirken, bias ve MSE değerleri genellikle daha düşük seviyelerde kalmaktadır. Cauchy, ρ arttıkça belirgin bir şekilde daha büyük hata payları sergilemektedir. Welsch ise daha dengeli bir performans sergileyerek, Cauchy' ye göre daha stabil sonuçlar vermektedir.

Çizelge 7.16 Çarpık dağılım (son %10 değerın 5 katı) $\rho=0.4, 0.6, 0.8$ $n = 500$ yanlılık ve MSE sonuçları

Yöntem	ρ	β_0 Bias	β_1 Bias	β_0 MSE	β_1 MSE	ρ Bias	Sigma Bias	ρ MSE	Sigma MSE
EKK	0.4	0.0387	0.0276	0.0765	0.0543	-0.3276	0.0198	0.1432	0.0876
SAR		0.0243	0.0176	0.0476	0.0345	0.0187	0.0132	0.0876	0.0543
Robust SAR		0.0132	0.0098	0.0276	0.0198	0.0112	0.0076	0.0612	0.0387
Cauchy		0.0198	0.0143	0.0387	0.0276	0.0132	0.0098	0.0765	0.0476
Welsch		0.0176	0.0132	0.0345	0.0243	0.0112	0.0087	0.0687	0.0443
EKK	0.6	0.0543	0.0387	0.1098	0.0765	-0.5276	0.0276	0.1876	0.1098
SAR		0.0345	0.0243	0.0687	0.0476	0.0276	0.0198	0.1154	0.0765
Robust SAR		0.0198	0.0143	0.0387	0.0276	0.0154	0.0112	0.0876	0.0543
Cauchy		0.0276	0.0198	0.0543	0.0387	0.0198	0.0143	0.1054	0.0687
Welsch		0.0243	0.0176	0.0476	0.0345	0.0176	0.0132	0.0987	0.0612
EKK	0.8	0.0765	0.0543	0.1432	0.1098	-0.6543	0.0387	0.2276	0.1432
SAR		0.0476	0.0345	0.0876	0.0612	0.0345	0.0243	0.1654	0.1098
Robust SAR		0.0276	0.0198	0.0543	0.0387	0.0198	0.0143	0.1098	0.0765
Cauchy		0.0345	0.0243	0.0687	0.0476	0.0276	0.0198	0.1432	0.0987
Welsch		0.0312	0.0223	0.0612	0.0443	0.0243	0.0176	0.1276	0.0876

Genel olarak, ρ değeri arttıkça tüm yöntemlerin bias ve MSE değerlerinde bir artış gözlemleniyor. EKK yönteminin bias ve MSE değerleri, $\rho = 0.4$ ' te β_0 bias değeri 0.0387, $\rho = 0.6$ ' da 0.0543, ve $\rho = 0.8$ ' de 0.0765 olarak kaydedilmiştir. MSE değerleri de sırasıyla 0.0765, 0.1098, ve 0.1432 'ye yükselmektedir. Bu durum, EKK yönteminin mekansal bağımlılıklara karşı duyarsız olduğunu ve ρ ile birlikte performansının düştüğünü göstermektedir. SAR yönteminin bias ve MSE değerleri EKK' ye göre daha düşük olsa da, ρ arttıkça bu modelde de benzer bir artış söz konusudur. Örneğin, $\rho = 0.4$ 'te β_0 bias değeri 0.0243, $\rho = 0.6$ 'da 0.0345 ve $\rho = 0.8$ 'de 0.0476 olarak gözlemlenmektedir. MSE değerleri de sırasıyla 0.0476, 0.0687 ve 0.0876 olarak artmaktadır. Bu, SAR yönteminin mekansal bağımlılığı daha iyi modellediğini ve daha düşük hata oranları sunduğunu göstermektedir.

Robust SAR yöntemi, $\rho = 0.4$ 'te β_0 bias değeri 0.0132, $\rho = 0.6$ 'da 0.0198, ve $\rho = 0.8$ 'de 0.0276 olarak kaydedilmiştir. MSE değerleri ise sırasıyla 0.0276, 0.0387 ve 0.0543 olarak artmaktadır. Bu, Robust SAR'ın mekansal heterojeniteyi modelleme de avantaj sağladığını göstermektedir. Cauchy ve Welsch fonksiyonları ise diğer yöntemlere kıyasla daha yüksek bias ve MSE değerleri sergilemektedir. Cauchy fonksiyonu, $\rho = 0.4$ ' te β_0 bias değeri 0.0198, $\rho = 0.6$ 'da 0.0276 ve $\rho = 0.8$ 'de 0.0345'e yükselmektedir. MSE değerleri de sırasıyla 0.0387, 0.0543, ve 0.0687 olarak artmaktadır. Welsch ise benzer şekilde, $\rho = 0.4$ 'te β_0 bias değeri 0.0176, $\rho = 0.6$ 'da 0.0243, ve $\rho = 0.8$ 'de 0.0312'ye kadar çıkmaktadır. MSE değerleri de sırasıyla 0.0345, 0.0476 ve 0.0612 olarak gözlemlenmektedir. Hem Cauchy hem de Welsch, SAR yöntemlerine kıyasla daha küçük hata payları gösterirken, Robust SAR içlerinden en düşük hata değerlerine sahip ve bu durum, bu modellerin doğruluk açısından daha zayıf olduğunu işaret etmektedir.

8. UYGULAMA

SAR ve Robust SAR yöntemlerini gerçek bir örnek üzerinde göstermek için USGS United States Geological Survey (Amerika Birleşik Devletleri Jeoloji Araştırmaları Kurumu) tarafından yayınlanan, 2020-2024 yılları arasında, 26°-45° doğu meridyenleri, 36°-42° kuzey paralelllerinde oluşan, 3.5 ve daha büyük olan depremler baz alınarak elde edilen verilerde; latitude, longitude, depth, mag, magType, gap, dmin, rms, horizontalError, depthError, magError, magNst, magSource istatistikleri kullanılmıştır. Bu veriler kapsamında bağımlı değişken olarak “mag (deprem büyüklüğü)”, bağımsız değişkenler ise latitude, longitude, depth, magType, gap, dmin, rms, horizontalError, depthError, magError, magNst, magSource olarak ele alınarak mekansal bağımlılık testleri yapılarak veri seti kontrol edilmiş daha sonra Robust SAR ve klasik MLE için performanslar verilerin sonuçları ile gösterilmiştir.

Bu başlıklar USGS deprem veri setinde standart olarak bulunan sütun açıklamaları:

- latitude: Enlem koordinatı
- longitude: Boylam koordinatı
- depth: Depremin derinliği (km)
- mag: Depremin büyüklüğü
- magType: Büyüklük ölçeği türü (Richter, moment magnitude vb.)
- gap: Azimuth boşluğu
- dmin: Episantr merkezine en yakın istasyon mesafesi
- rms: Root Mean Square (hata payı)
- horizontalError: Yatay konum hatası
- depthError: Derinlik hatası
- magError: Büyüklük hatası
- magNst: Büyüklük için kullanılan istasyon sayısı
- magSource: Deprem kaynağı

Çizelge 8.1 Veri setindeki değişkenlerin tanımlayıcı istatistikleri

	Ort.	Std. Sapma	Ort. Mutlak Sapma	min	max	Çarpıklık	Basıklık	Std. Hata
Enlem koordinatı	38	1.03	0.46	36	41.94	0.75	1.44	0.04
Boylam koordinatı	36.61	3.24	1.32	26.15	44.81	-1.06	2.15	0.11
Depremin derinliği	11.6	10.21	0	0.34	107.1	6.4	46.56	0.35
Depremin büyüklüğü	4.4	0.35	0.30	3.5	6.70	1.91	5.99	0.01
Büyüklik için kullanılan istasyon sayısı	58.51	34.02	25.95	12	286	1.65	4.30	1.23
Azimuth boşluğu	65.04	30.91	25.2	14	229	1.54	3.61	1.06
Episantr merkezine en yakın istasyon mesafesi	0.73	0.38	0.41	0.03	2.90	0.87	1.19	0.01
Hata payı	0.72	0.20	0.21	0.19	1.39	0.38	-0.05	0.01
Yatay konum hatası	3.93	1.21	1.29	1.21	8.89	0.22	0.02	0.04
Derinlik hatası	2.99	1.63	0.23	0.94	11.18	1.25	1.31	0.06
Büyüklik hatası	0.13	0.07	0.07	0.02	0.53	1.48	3.76	0

Ort: Ortalama; Std: Standart; min: Minimum; max: Maximum

Veri setindeki değişkenlerin temel istatistiksel analizleri, farklı parametrelerin dağılım özelliklerini gözler önüne sermektedir. Enlem koordinatlarının ortalaması 38.00, standart sapması ise 1.03'tür, bu da verilerin orta derecede yayılmış olduğunu ve ortalama değerden çok fazla sapmadığını gösterir. Boylam koordinatlarının ortalama değeri 36.61 olup, standart sapması 3.24 ile daha geniş bir dağılım sergilemektedir. Depremin derinliği, ortalama 11.6 ile daha düşük bir değere sahipken, geniş bir yayılma gösterir (standart sapma 10.21). Depremin büyüklüğü, 4.4 ortalama değeri ile daha dar bir dağılıma sahiptir (standart sapma 0.35), yani veriler bu parametre etrafında sıkışmıştır. Büyüklik için kullanılan istasyon sayısı ve Azimuth boşluğu gibi parametreler ise geniş bir aralığa sahip, büyüklik için kullanılan istasyon sayısının ortalaması 58.51, Azimuth boşluğunun ise 65.04'tür.

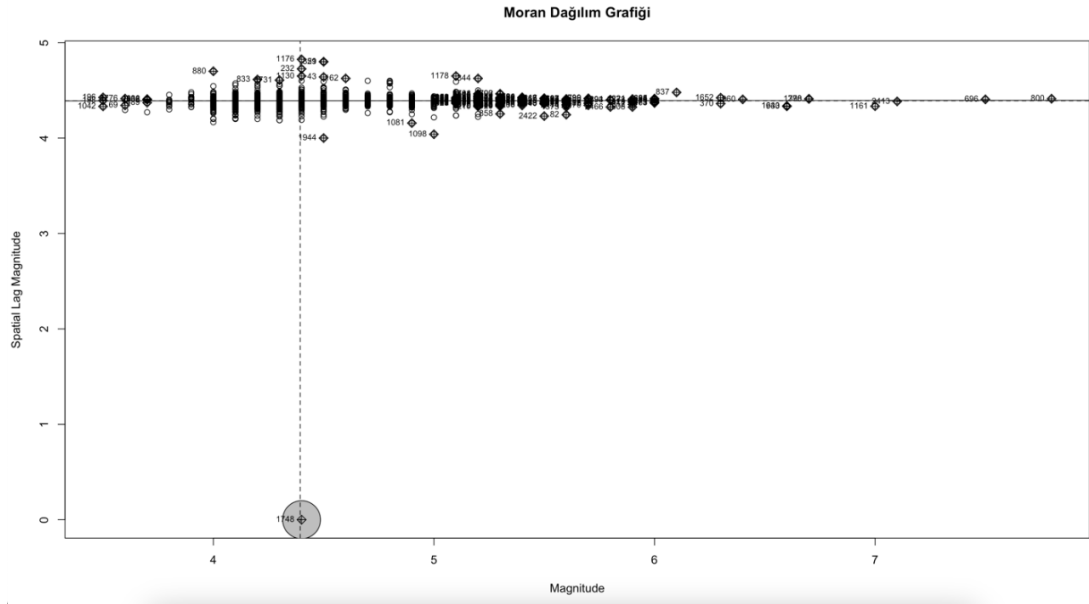
Verilerdeki asimetri ve yoğunluk hakkında elde edilen Skewness (çarpık dağılım) ve Kurtosis (basıklık) değerleri de dikkat çekici değerlere sahiptir. Enlem koordinatlarının çarpıklık değeri 0.75 olup sağa eğilimli bir dağılımı, basıklık değeri ise 1.44 ile orta derecede yoğun bir veri dağılımını işaret eder. Boylam koordinatlarının çarpıklık değeri -1.06 olup, sola eğilimli bir dağılım gösterir ve basıklık değeri 2.15 ile daha geniş bir yoğunluk sunar. Depremin derinliği ise oldukça yüksek bir basıklık 46.56 ve pozitif çarpıklık 6.4 ile sapsmiş bir dağılıma sahiptir, yani veriler çok yoğun ve aşırı uçlara yakın dağılımlar göstermektedir. Depremin büyüklüğü, 1.91'lik pozitif çarpıklık değeri ve 5.99'luk yüksek basıklık değeri ile sağa eğilimli bir veri yapısı sergilemektedir. Ayrıca, yatay konum hatası ve derinlik hatası gibi hata parametreleri, sırasıyla 1.21 ve 1.63 standart sapma değerleri ile uygun seviyelerdedir. Büyüklük hatası ise çok düşük bir hata değeriyle 0.07 standart sapma göstermektedir.

Çizelge 8.2 Normallik testi

Değişkenler	Wald İstatistiği	p-değerleri
Depremin büyüklüğü	0.9412	0.0001
Depremin derinliği	0.8934	0.0000
Enlem koordinatı	0.9678	0.0012
Boylam koordinatı	0.9556	0.0002
Hata payı	0.9344	0.0000
Episantr merkezine en yakın istasyon mesafesi	0.8982	0.0001
Yatay konum hatası	0.9112	0.0000
Derinlik hatası	0.9231	0.0002
Büyüklük hatası	0.8799	0.0020
Büyüklük için kullanılan istasyon sayısı	0.8912	0.0000

Shapiro-Wilk testi;

Tüm değişkenler (deprem büyüklüğü, enlem koordinatı, boylam koordinatı vb.) için p-değerleri 0.05'ten küçük çıkmıştır. Bu elde edilen sonuçlar, hiçbir değişkenin normal dağılıma uygun olmadığını göstermektedir.



Şekil 8.1 Moran dağılım grafiği

Konum olarak birbirine yakın olan veriler olduğu için belirli bir yerde toplanmıştır. Rastgelelik olmadığı için mekansal bağımlılık görülmektedir.

Çizelge 8.3 Moran's I istatistiğinin sonuçları

Test		Z-puanı	p-değeri
Moran's I İstatistiği	0.1247	2.034	0.042

($p < 0.05$)

Pozitif Moran's I değeri (0.1247) ve p-değeri (0.042), deprem büyüklüklerinde istatistiksel olarak anlamlı bir mekansal kümelenme olduğunu ortaya koymaktadır. Yani deprem büyüklükleri coğrafi olarak birbirine yakın alanlarda benzerlik gösterir.

Çizelge 8.4 Mekansal gecikme bağımlılığı için klasik ve sağlam Lagrange testlerinin sonuçları

Test	İstatistik Değeri	p-Değeri
RLM Lag	55.908	0.01806
LM Lag	38.559	0.04957

Normallik varsayımının sağlanmaması, aykırı değerlerin var olması ve pozitif otokorelasyon olduğu için model seçimi için robust kullanılmalıdır.

RLM Lag testi istatistiği 55.908 ve p-değeri 0.01806 olarak hesaplanmıştır. Bu sonuç, $p < 0.05$ olduğundan istatistiksel olarak yüksek derecede anlamlıdır. RLM test, modeldeki yapısal sapmaları ve heterojenliği dikkate alarak, mekansal bağımlılığın varlığını güçlü bir şekilde desteklemektedir.

LM Lag testi ise 38.559 test istatistiği ve 0.04957 p-değeri ile zayıf da olsa anlamlı bir sonuç göstermektedir. $p < 0.05$ kriteri sağlandığından, bu test de mekansal bağımlılığın varlığına işaret etmektedir.

İki testin karşılaştırılması, RLM Lag testinin daha güçlü ve güvenilir bir sonuç verdiğini ortaya koymaktadır. RLM testin daha düşük p-değeri ve daha yüksek test istatistiği, mekansal bağımlılığın varlığını daha net bir şekilde göstermektedir. Bu durum, modelde mekansal etkilerin önemli bir rol oynadığını ve mekansal ekonometrik tekniklerin kullanılması gerektiğini net bir şekilde işaret etmektedir.

Çizelge 8.5 SAR modelinin ML tahmincisi ile sağlam M tahmin edicisinin deprem verilerine uygulanarak elde edilen tahmin sonuçları

Değişken	Robust M-Tahmin Edicisi	Robust Standart Hata	Robust p-değeri	En Çok Olabilirlik Tahmin Edicisi	ML Standart Hatası	ML p-değeri
Kesme	-28.903	0.2712	<0.01	-16.521	0.3049	<0.01
Deprem derinliği	0.0376	0.0362	0.0250	0.1389	0.0588	0.0219
Enlem koordinatı	0.0165	0.0009	<0.01	-0.0001	0.0014	0.9713
Boylam koordinatı	0.0082	0.0145	0.0191	-0.0162	0.0233	0.4966
Hata payı	0.0213	0.0201	0.0235	0.0453	0.0002	<0.01
Episantr merkezine en yakın istasyon merkezi	0.0220	0.0001	0.0012	-0.0197	0.0922	0.0284

Çizelge 8.5 SAR modelinin ML tahmincisi ile sağlam M tahmin edicisinin deprem verilerine uygulanarak elde edilen tahmin sonuçları (devam)

Değişken	Robust M-Tahmin Edicisi	Robust Standart Hata	Robust p-değeri	En Çok Olabilirlik Tahmin Edicisi	ML Standart Hatası	ML p-değeri
Yatay konum hatası	0.0119	0.0008	<0.01	0.0991	0.0872	0.0321
Derinlik hatası	0.0372	0.0012	0.0019	0.0842	0.0524	0.0148
Büyüklik hatası	0.0089	0.0110	0.3920	0.1527	0.0326	0.0117
Büyüklik için kullanılan istasyon hatası	0.0344	0.0321	0.0249	0.0635	0.3680	<0.01
Sigma	0.7623	0.0147	<0.01	11.987	0.0226	<0.01
Rho	0.9752	0.0176	<0.01	0.9891	0.0055	<0.01

Elde edilen sonuçlarda, robust M tahmin edicisi ve ML tahmin edicisi arasında önemli farklar olduğunu göstermektedir. Bu farklar, özellikle mekansal bağımlılık (ρ) ve varyans (σ) tahminlerinde belirgindir.

ML tahmin edicisi, ρ_{ML} (0.9891) ve σ_{ML} (11.987) değerleri ile daha yüksek tahminler yaparken, robust M tahmin edicisi ρ (0.9752) ve σ (0.7623) değerleriyle daha düşük tahminler sunmaktadır. Bu fark, ML tahmin edicisinin veri setindeki aykırı değerlere daha duyarlı olduğuna işaret eder. ML tahmin edicisi, özellikle bitişik bölgelerdeki aşırı büyük yanıt değerlerinden etkilendiğinde daha yüksek pozitif biaslar (yanlılıklar) üretebilir. Bu durum, ML tahmin edicisinin mekansal bağımlılığı aşırı tahmin etmesine neden olurken, robust M tahmin edicisi, bu aşırı değerleri daha etkili bir şekilde kontrol altına alıp daha doğru sonuçlar verir.

Özellikle kesme değeri, her iki modelde de anlamlı olmasına rağmen, ML tahmin edicisi (-16.521) ile robust M tahmin edicisi (-28.903) arasında büyük bir fark göstermektedir. ML tahmin edicisinin bu kadar büyük bir etki tahmin etmesi, aykırı değerlere

duyarlılığıyla açıklanabilirken, robust M tahmin edicisi bu tür aykırı etkilerden daha az etkilenecek daha sağlam bir tahmin sunmaktadır.

Deprem derinliği değişkeninin tahmininde de benzer farklar gözlemlenmiştir. ML tahmin edicisi (0.1389), robust M tahmin edicisine (0.0376) kıyasla çok daha yüksek bir tahmin yapmaktadır. Ancak her iki modelde de bu tahmin anlamlıdır. Burada, robust M tahmin edicisi, aykırı veri noktalarını daha iyi kontrol ederek daha güvenilir bir tahmin sunmaktadır. ML tahmin edicisi, veri setindeki bazı aykırı değerlerden etkilenecek tahminlerini şişirmiştir.

Enlem koordinatı değişkeni ise, robust M tahmin edicisi (0.0165) anlamlı bulunurken, ML tahmin edicisinde (-0.0001) anlamlı değildir. Bu durum, robust M tahmin edicisinin enlem değişkeninin etkisini doğru bir şekilde tahmin ettiğini, ML tahmin edicisinin ise özellikle veri setindeki aykırı değerlere duyarlı olarak bu etkiyi göz ardı ettiğini göstermektedir. Boylam koordinatı değişkeni ise her iki modelde de anlamlıdır, ancak robust M tahmin edicisinde (0.0082) pozitif, ML tahmin edicisinde (-0.0162) negatif bir etki gözlemlenmiştir. Bu fark, robust M tahmin edicisinin boylam değişkeni üzerindeki etkileri daha dikkatli bir şekilde değerlendirdiğini, ML tahmin edicisinin ise aykırı değerlere daha duyarlı olduğunu gösterir.

Hata payı, Episantr merkezine en yakın istasyon mesafesi, yatay konum hatası ve derinlik hatası gibi hata terimleri, robust M tahmininde daha tutarlı ve anlamlı sonuçlar verirken, ML tahmininde bazı değişkenler anlamlılık düzeyinde farklılık göstermektedir. Örneğin, yatay konum hatası değişkeni robust M tahmininde anlamlı ($p < 0.01$), ancak ML tahmininde bu değişkenin anlamlılık düzeyi düşmüştür ($p = 0.0321$). Bu da, robust M tahmin edicisinin hata terimlerinin etkisini daha doğru bir şekilde modellediğini, ML tahmin edicisinin ise aykırı değerlere karşı duyarlı olduğunu gösterir.

Sonuç olarak, ML tahmin edicileri genellikle aykırı değerlere duyarlıdır ve bu nedenle daha büyük yanlışlıklar ve hatalı tahminler sunabilir. Bu durum, özellikle mekansal bağımlılık ve varyans tahminlerinde daha belirgin hale gelir. robust M tahmin edicisi ise bu tür aykırı değerlere karşı daha dayanıklı olup, daha sağlam ve güvenilir tahminler

sağlar. Bu farklılıklar, ML tahmin edicisinin aykırı değerlere duyarlılığından kaynaklanırken, robust M tahmin edicisinin, bu tür anormal verileri etkili bir şekilde yöneterek daha doğru sonuçlar elde edilmesini sağlar.

9. SONUÇ

Bu tez çalışmasında klasik regresyon modeline mekan etkisinin eklenmesiyle modeldeki mekanların birbirleri ile ilişkisinden dolayı mekansal bağımlılığın oluştuğundan bahsedilmiştir. Mekansal bağımlılık ölçütü, mekansal ağırlık matrisi ile belirlenmektedir. Bu ağırlıklara bağlı olarak ise mekansal ekonometrik modeller oluşturulmaktadır.

Bu çalışmada mekansal gecikme modeli (SAR), mekansal hata modeli (SEM) ve mekansal Durbin model (SDM) incelenip, genel mekansal regresyon modelleri şema halinde verilmiştir.

Mekansal regresyon modellerden SAR, SEM ve SDM modellerinin en çok olabilirlik yöntemleri ile tahminleri elde edilmiştir. Elde edilen mekansal modellerin en çok olabilirlik tahmin edicileri veri setinde sapan gözlem olmasından etkilenir. Bu sorun tahmin edicilerin tutarsız ve yanlı sonuçlar elde etmesine sebep olur. Sorunu gidermek için Robust istatistik yöntemlerinden M tahmin edicileri ele alınmıştır.

Mekansal ekonometrik analizlerde ρ değeri, modelin mekansal bağımlılığını temsil eden kritik bir parametredir. ρ değerinin artması, özellikle $\rho = 0.8$ gibi yüksek değerlerde, EKK yönteminin yanlılık ve MSE değerlerinde önemli bir artışa yol açmaktadır. Örneğin, $\rho = 0.4$ durumunda β_0 MSE değeri 0.0456 iken, $\rho = 0.8$ 'de bu değer 0.0876'ya yükselmektedir. Bu durum, mekansal bağımlılığın arttığı koşullarda EKK yönteminin tahmin gücünün düştüğünü ve sonuçların güvenilirliğinin azaldığını göstermektedir.

Örneklem büyüklüğünün etkisi de dikkate değerdir. Küçük örneklem (n=100) ile yapılan analizlerde, yüksek ρ değerlerinde yanlılık ve MSE değerleri belirgin bir şekilde artmaktadır. Örneğin, n = 100'de β_0 MSE değeri 0.0456 iken, n = 500'de bu değer 0.0156'ya düşmektedir. Bu bulgu, daha büyük örneklemelerin modelin doğruluğunu artırdığını ve daha güvenilir tahminler sağladığını göstermektedir. Örneklem büyüklüğü arttıkça, EKK yönteminde yanlılık ve hata oranları azalma eğilimi gösterirken, SAR yönteminde bu durumu daha iyi yönetmektedir.

Normal dağılım altında yapılan analizler, EKK ve SAR yöntemlerinin performansını belirgin bir şekilde ortaya koymaktadır. EKK, küçük örneklerde daha iyi performans sergileyebilirken, büyük örneklerde SAR yönteminin avantajı belirginleşmektedir. Örneğin, $\rho = 0.8$ durumunda EKK yönteminin β_0 MSE değeri 1.0456 olarak hesaplanmışken, SAR yönteminin aynı durumda daha düşük hata oranları sunduğu gözlemlenmiştir. Bu durum, SAR yönteminin mekansal bağımlılığı daha iyi modellediğini ve dolayısıyla daha düşük hata oranları sunduğunu göstermektedir.

Karma dağılımlar altında EKK yönteminin performansı, normal dağılıma kıyasla daha kötü sonuçlar vermektedir. Uç değerlerin etkisi, EKK yönteminin yanlılık ve hata oranlarını artırmakta ve bu nedenle modelin genel doğruluğunu azaltmaktadır. Özellikle yüksek ρ değerlerinde, EKK'nin tahminleri uç değerlerden olumsuz etkilenmektedir. Bu bağlamda, SAR ve Robust SAR yöntemleri, karma dağılımlarda daha düşük yanlılık ve MSE değerleri sunarak daha güvenilir sonuçlar elde edilmesine olanak tanımaktadır.

Moran testi, mekansal otokorelasyonu değerlendiren önemli bir istatistiksel araçtır. Yüksek ρ değerlerinde Moran-I istatistiği, mekansal bağımlılığın varlığını gösterirken, bu durumun model performansı üzerindeki etkileri de belirginleşmektedir. EKK ve SAR yöntemlerinin sonuçları, mekansal otokorelasyonun dikkate alınmadığı durumlarda yanlılık ve hata oranlarının arttığını göstermektedir. Bu nedenle, mekansal bağımlılığı modellemede SAR ve Robust SAR yöntemlerinin tercih edilmesi önerilmektedir. SAR yöntemi, mekansal bağımlılığı dikkate alarak daha doğru tahminler sunarken, Robust SAR yöntemi uç değerlere karşı dayanıklılık göstererek modelin genel performansını artırmaktadır.

Cauchy, genel olarak en yüksek bias ve MSE değerlerine sahip olup, özellikle $\rho = 0.8$ ve küçük örneklem durumunda MSE değerleri oldukça yüksektir. Örneğin, β_0 MSE değeri 0.1087 olarak hesaplanmıştır. Bu durum, Cauchy fonksiyonunun uç değerlere karşı duyarlılığını ve dolayısıyla tahminlerdeki doğruluğunu olumsuz etkilediğini göstermektedir. Welsch ise Cauchy'ye göre daha iyi performans sergilemekte ve büyük örneklem durumlarında Robust SAR'a yakın sonuçlar vermektedir. Welsch modelinin,

karma dağılımlar altında daha iyi bir alternatif sunduğu ve uç değerlerin etkisini daha iyi yönettiği gözlemlenmiştir.

Normallik, istatistiksel modelleme süreçlerinde dikkate alınması gereken önemli bir faktördür. Normallik varsayımının ihlal edildiği durumlarda, EKK ve SAR yöntemlerinin performansı önemli ölçüde düşmektedir. Bu nedenle, normallik varsayımının sağlanamadığı durumlarda Robust SAR yönteminin tercih edilmesi, daha güvenilir sonuçlar elde edilmesine katkı sağlamaktadır. Robust yöntemler, normallik varsayımının ihlal edildiği durumlarda modelin dayanıklılığını artırmakta ve tahminlerin güvenilirliğini artırmaktadır.

Sonuç olarak, mekansal bağımlılık, örneklem büyüklüğü ve dağılım türü, model seçiminde kritik faktörlerdir. Robust SAR yöntemi, düşük yanlılık ve MSE değerleri ile en iyi genel performansı sergilemektedir. Özellikle mekansal bağımlılık ve normallik gibi faktörlerin önemli olduğu durumlarda, Robust SAR yöntemi tercih edilmelidir. Küçük örneklerde yüksek ρ değerlerinde Welsch fonksiyonu daha iyi performans sergileyebilirken, EKK yalnızca küçük ρ ve büyük örneklem durumlarında kullanışlıdır. Bu bulgular, model seçiminde Robust SAR yönteminin özellikle önerilmesi gerektiğini ortaya koymakta ve mekansal ekonometrik analizlerde dikkate alınması gereken önemli noktaları vurgulamaktadır.

Mekansal ekonometrik modelleme süreçlerinde ρ değerinin, örneklem büyüklüğünün ve dağılım türünün model performansı üzerindeki etkili model seçimleri yapma imkanı sunmaktadır. Mekansal bağımlılık ve otokorelasyonun dikkate alınması, analizlerin geçerliliği ve güvenilirliği açısından kritik öneme sahiptir. Bu bağlamda, uygun model seçimi, araştırma sonuçlarının kalitesini doğrudan etkilemektedir.

KAYNAKLAR

- Anselin, L. 1980. Estimation methods for spatial autoregressive structures. Regional Science Dissertation and Monograph Series 8. Field of Regional Science, Cornell University, Ithaca, N. Y.
- Anselin, L. 1988. Spatial Econometrics: Methods and Models, Kluwer Academic Publishers
- Anselin, L. 1992. Spatial Data Analysis with GIS: An Introduction to Application in the Social Sciences, National Center for Geographic Information and Analysis, University of California, Santa Barbara, Technical Report, 92/10.
- Anselin, L. 2001. Spatial Econometrics, A Companion to Theoretical Econometrics, Ed. By Badi. H. Baltagi, Blackwell, 311-330.
- Anselin, L. 2007. Spatial Regression Analysis in R A Workbook. Spatial Analysis Laboratory, Department of Geography. University of Illinois, Urbana, 141. https://dces.webhosting.cals.wisc.edu/wp-content/uploads/sites/128/2013/08/W14_Anselin2007.pdf , Erişim Tarihi: 13.12.2023
- Anselin, L., Bera, A.K., Florax, R.J. ve Yoon, M. 1996. Simple Diagnostics Tests for Spatial Dependence. Regional Science and Urban Economics, 26, 77-104.
- Anselin, L., Bera, A.K. 1998. Spatial Dependence in Linear Regression Models with an Introduction to Spatial Econometrics (Chapter : 7), Statistics Textbooks and Monographs, 237-290.
- Anselin, L., Hudak, S. 1992. Spatial Econometrics in Practice: A review of Software Options, Regional Science and Urban Economics, 22,509-536.
- Anselin, L., Smirnov, O. 1996. Efficient algorithms for constructing proper higher order spatial LAG operators. Journal of Regional Science, 36(1), 67-89.
- Aral, N. 2016. Türkiye’de İşsizliğin Mekânsal Analizi. Yüksek Lisans Tezi, Uludağ Üniversitesi, Sosyal Bilimler Enstitüsü, Ekonometri Anabilim Dalı, 96, Bursa.
- Arbia, G. 2005. Spatial Econometrics: Statistical Foundations And Applications to Regional Convergence, Berlin, Springer-Verlag.
- Atikah, N., Widodo, B., Rahardjo, S., Mardijah, Kholifia, N. ve Afifah, D. L. 2020. The efficiency of Spatial Durbin Model (SDM) parameters estimation on advertisement tax revenue in Malang City. Journal of Physics: Conference Series.
- Bakacak, L. 2018. Genelleştirilmiş Doğrusal Mekansal Modellere Koşullu Otoresif Model Yaklaşımı. Yüksek Lisans Tezi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Hacettepe Üniversitesi, İstatistik Anabilim Dalı, 67, Ankara.

- Başbozkurt, H. 2015. Mekansal Regresyon Metotları Kullanımı İle Toprağın Bazı Fiziksel ve Kimyasal Özelliklerinin Analizi. Doktora tezi (basılmamış), Selçuk Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Konya.
- Bekti, R., Rahayu, A. and Sutikno. 2013. Maximum Likelihood Estimation for Spatial Durbin Model. *Journal of Mathematics and Statistics* 9 (3) : 169-174.
- Bera, A.K., Yoon, M.J. 1993. Specification Testing with Locally Misspecified Alternatives. *Econometric Theory*, 9, 649-658.
- Bivand, R. 2002. Spatial econometrics functions in R: Classes and methods. *Journal of Geographical Systems*, 4(4), 405-421.
- Boneau, C.A. 1960. The effects of violations of assumptions underlying the t test. *Psychological Bulletin*, 57, 49-64.
- Box, G. E. 1953. Non-normality and tests on variances. *Biometrika*, 40(3/4), 318-335.
- Büyükkör, Y. 2020. Robust (Dayanıklı) Regresyon Yöntemleri Üzerine Bir Araştırma. Doktora Tezi, Dokuz Eylül Üniversitesi, Sosyal Bilimler Enstitüsü, İzmir, 122.
- Büyükkör, Y., Şehirlioğlu, A. 2020. Dayanıklı (Robust) Regresyon: Karşılaştırmalı Simülasyon Çalışması. *Avrupa Bilim ve Teknoloji Dergisi*, 18, 188-195.
- Cliff, A. D. And Ord, J. K. 1968. The problem of spatial autocorrelation. In Scott, A.J., editors, *Studies in Regional Science*, pages 25-55, Pion, London.
- Çağlayan, T. Ve Güriş. S. 2018. Mekânsal Yapı İktisadi Büyüme Etkiler Mi: OECD Ülkeleri Örneği. *Finansal Araştırmalar ve Çalışmalar Dergisi*, 10(19), 277-290.
- Çifçi, R. 2016. Türkiye’de Bölgesel İşsizlik Yakınsaması: Mekânsal Bir Yaklaşım. Yüksek Lisans Tezi, Uludağ Üniversitesi, Sosyal Bilimler Enstitüsü, Ekonometri Anabilim Dalı, 109, Bursa.
- Demir, Y. 2021. Balkan Ülkelerine Ait İşsizliğin Mekânsal Panel Ekonometri Yaklaşımı ile Analizi. *Balkan Sosyal Bilimler Dergisi*, 10(19), 26-35.
- Fox, J. 2002. Robust Regression. Appendix to An R and S-PLUS Companion to Applied Regression. Sage Publications, Thousand Oaks, CA.
- Fischer, M.M., Wang, J. 2011. *Spatial Data Analysis: Models Methods And Techniques*, Springer Science & Business Media.
- Geary, R.C. 1954. The Contiguity Ratio and Statistical Mapping. *The Incorporated Statistician*, 5, 115-145.
- Glass, G. V., Peckham, P.D. and Sanders, J.R. 1972. Consequences of failure to meet assumptions underlying the fixed effects analyses of variance and covariance. *Review of Educational Research*, 42, 237-288.
- Goulard, M., Laurent, T. ve Thomas, C. 2017. About predictions in spatial autoregressive models: optimal and almost optimal strategies. *Spatial Economic Analysis*, 12 :

- 2-3, 304-325. <http://www.thibault.laurent.free.fr/code/GLT/GLT.html>, Erişim Tarihi: 05.09.2024.
- Gökalp, E. Ve Boz, Y. 2005. Robust M-Kestirimlerin GPS Ağlarındaki Uyuşumsuz Baz Vektörlerini Belirlemede Karşılaştırılması, Harita Dergisi, 134, 1-17, Trabzon.
- Güneri, Ö., İncekırık, A. ve Durmuş, B. 2021. Aykırı Değer Durumunda Bazı Sağlam Regresyon Yöntemlerinin Karşılaştırılması. New Era International Journal of Interdisciplinary Social Researches, 6(11), 33-51.
- Güriş, S. ve Çağlayan, T. 2018. Mekansal Yapı İktisadi Büyüme Etkileri Mi: OECD Ülkeleri Örneği. Finansal Araştırmalar ve Çalışmalar Dergisi, 10(19), 277-290.
- Hampel, F.R., Ronchetti, E.M., Rousseeuw, P.J. and Stahel, W.A. 1986. Robust Statistics: The Approach Based on Influence Functions. John Wiley.
- Hodges, J.L.Jr. and Lehmann, E.L. 1963. Estimates of Location Based on Ranks Tests. Annals of Mathematical Statistics, 34, 598-611.
- Huber, P. J. 1964. Robust Estimation of a Location Parameter. Annals of Mathematical Statistics, 35, 73-101.
- Huber, P. J. 1981. Robust Statistics. John Wiley and Sons, New York.
- Jaya, G.N.M., Ruchjana, B.N., Tantular, B., Zulhanif and Andriyana, Y. 2018. Simülasyon and Application of The Spatial Autoregressive Geographically Weighted Regression Model (SAR-GWR). ARPN Journal of Engineering and Applied Sciences, 13(1).
- Kangallı Uyar, S.G. 2015. Hedonik Fiyat Teorisi Çerçevesinde İstanbul Konut Piyasası Fiyat Dinamiklerinin Parametrik ve Parametrik Olmayan Mekânsal Modeller ile Karşılaştırmalı Analizi. Doktora Tezi, Pamukkale Üniversitesi, Sosyal Bilimler Enstitüsü, Denizli.
- Kelejian, H.H., Prucha I.R. 1998. A Generalized Spatial Two-Stage Least Squares Procedure for Estimating A Spatial Autoregressive Model with Autoregressive Disturbances. Journal of Real Estate Finance and Economics, 17 (1): 99-121.
- Keten, N.D. 2019. Mekânsal Kantil Regresyon Yaklaşımına Göre Konut Fiyatlarının Modellenmesi: Denizli İli Örneği. Yüksek Lisans Tezi, Pamukkale Üniversitesi, Sosyal Bilimler Enstitüsü, Ekonometri Anabilim Dalı,92.
- Krisztin, T. and Piribauer, P. 2022. A Bayesian approach for estimation of weight matrices in spatial autoregressive models. Spatial Economic Analysis.
- Lesage, J. P. 1999. The Theory and Practice of Spatial Econometrics, Department of Economics, University of Toledo.
- Lesage, J. P. 2004. Bayesian Estimation of Spatial Regression Models, Department of Economics, University of Toledo.

- Lesage, J. P. 2004. Maximum Likelihood Estimation of Spatial Regression Models, Department of Economics, University of Toledo.
- Lesage, J. and Pace, R.K. 2009. Introduction to Spatial Econometrics. CRC Press, Taylor & Francis Group, Boca Raton [FL], London and New York.
- Lindquist, E.F. 1953. Design and analysis of experiments in psychology and education. Boston: Houghton Mifflin.
- Maronna, R.A., Martin, R.D., Yohai, V.J. and Barrera, M.S. 2019. Robust Statistics Theory and Methods (with R). Wiley, 453 p.
- Moran, P. A. 1948. The Interpretation of Statistical Maps. Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological), 10(2), 243-251.
- Moran, P. A. 1950a. A Test for the Serial Independence of Residuals. Biometrika, 37(1/2), 178-181.
- Moran, P. A. 1950b. Notes on Continuous Stochastic Phenomena. Biometrika, 37(1/2), 17-23.
- Omar, D. B. And Tawfeeq, A. F. 2020. A Comparative Study of Estimation Methods for Spatial Regression Models Using a Simulation Method. International Journal of Agricultural And Statistical Sciences, 16(1); 2095-2107.
- Ord, K. 1975. Estimation Methods for Models of Spatial Interaction Estimation Methods for Models of Spatial Interaction, 70(349), 120-126.
- Paelinck, J.H.P.; Klaassen, L. Spatial Econometrics; Gower: West-meath, Farnborough, UK, 1979.
- Rousseeuw, P.J. and Leroy, A.M. 1987. Robust Regression and Outlier Detection. John Wiley.
- Sarrias, M. 2017. Lecture 4: Maximum Likelihood Estimator of SLM and SEM Universidad Catolica del Norte.
- Sarrias, M. 2020. Notes on Spatial Econometrics. Universidad de Talca.
- Staudte, R.G. and Sheather, S.J. 1990. Robust Estimation and Testing. John Wiley and Sons.
- Tatlı, S. 2016. Mekansal Ekonometrik Modeller ve Türkiye’de İç Göçün Belirleyicilerinin Analizi. Yüksek Lisans Tezi, İstanbul Üniversitesi, Sosyal Bilimler Enstitüsü, Ekonometri Anabilim Dalı, 152, İstanbul.
- Tho, Z., Ding, D., Hui, F., Welsh, A.H. and Zou, T. 2023. On the Robust Estimation of Spatial Autoregressive Models. Econometrics and Statistics.
- Tobler, W. R. 1970. A computer movie simulating urban growth in the Detroit region. Economic geography, 46, 234-240.

- Toy, A. 2014. Sağlam Regresyon Tahmin Edicilerinin İncelenmesi ve Bir Uygulama. Yüksek Lisans Tezi, Fırat Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, İstatistik Anabilim Dalı,104.
- Tuzcu, S. 2016. Mekansal Ekonometri ve Sosyal Bilimlerde Kullanım Alanları. Ankara Üniversitesi SBF Dergisi, 71(2), 401-436.
- Türkay, H. 2004. Doğrusal Regresyon Analizinde M Tahminciler ve Ekonometrik Bir Uygulama. Doğu Anadolu Bölgesi Araştırmaları, 3(1), 106-115.
- USGS. 2022. Web Sitesi: <https://earthquake.usgs.gov/earthquakes/search/> , Erişim Tarihi : 05.12.2024.
- Viton, P. A. 2010. Notes on Spatial Econometric Models, City and Regional Planing, Vol. 870, 03, 1-23.
- Whittle, P. 1954. On stationary processes in the plane. Biometrika, 434-449.
- Yang, S. 2020. Spatial Autoregressive (SAR) Models Estimation. Medium. Web Sitesi: <https://medium.com/analytics-vidhya/spatial-autoregressive-sar-models-estimation-maximum-likelihood-bayesian-42ad135397a1>, Erişim Tarihi: 08.03.2024.
- Yasin, H., Warsito, B., Hakim, A. And Azizah, R. 2022. Life Expectancy Modeling Using Modified Spatial Autoregressive Model. Media Statistika, 15(1), 72-82.
- Yıldırım, V. 2018. Mekânsal Ekonometrik Modeller: Mekânsal Hata Modeli İçin Robust Tahminleme. Doktora Tezi, Anadolu Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, İstatistik Anabilim Dalı, 158, Eskişehir.
- Yıldırım, V., Kantar, Y. 2020. Robust estimation approach for spatial error model. Journal of Spatial Computation and Simülasyon, 90(9), 1618-1638.
- Zeren, F. 2010. Mekânsal Etkileşim Analizi. Ekonometri ve İstatistik Dergisi, 12, 18-39.
- Zeren, F. 2011. Mekansal Ekonometri ve Mekansal Panel Ekonometri Yaklaşımları: AB Üye Ülkeleri İçin Gelir Yakınsama Hipotezi Üzerine Bir Uygulama. Doktora Tezi, İstanbul Üniversitesi, Sosyal Bilimler Enstitüsü, Ekonometri Anabilim Dalı, 202, İstanbul.