

ANKARA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DOKTORA TEZİ

KUATERNİYONLARIN DİFERENSİYEL GEOMETRİSİ

Selahattin ASLAN


MATEMATİK ANABİLİM DALI

ANKARA
2017


Her hakkı saklıdır


TEZ ONAYI

Selahattin ASLAN tarafından hazırlanan " **Kuaterniyonların Diferensiyel Geometrisi** " adlı tez çalışması 10/11/2017 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından **oy birliği**(veya **oy çokluğu**) ile Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda **DOKTORA TEZİ** olarak kabul edilmiştir.


Danışman: Prof. Dr. Yusuf YAYLI 

Jüri Üyeleri:

Başkan: Prof. Dr. Mustafa ÇALIŞKAN 
Gazi Üniversitesi, Matematik Anabilim Dalı

Üye : Prof. Dr. Yusuf YAYLI 
Ankara Üniversitesi, Matematik Anabilim Dalı

Üye : Prof. Dr. Faik Nejat EKMEKÇİ 
Ankara Üniversitesi, Matematik Anabilim Dalı

Üye : Prof. Dr. Baki KARLIĞA 
Gazi Üniversitesi, Matematik Anabilim Dalı

Üye : Doç. Dr. İsmail GÖK 
Ankara Üniversitesi, Matematik Anabilim Dalı

Yukarıdaki sonucu onaylarım

Prof. Dr. Atila YETİŞEMİYEN
Enstitü Müdürü

ETİK

Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez içindeki bütün bilgilerin doğru ve tam olduğunu, bilgilerin üretilmesi aşamasında bilimsel etiğe uygun davrandığımı, yararlandığım bütün kaynakları atıf yaparak belirttiğimi beyan ederim.

10/11/2017



Selahattin ASLAN

ÖZET

Doktora Tezi

KUATERNİYONLARIN DİFERENSİYEL GEOMETRİSİ

Selahattin ASLAN

Ankara Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Yusuf YAYLI

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde, şimdiye kadar yapılan çalışmalar ve tez konusunun gelişimi hakkında bilgi verildi. İkinci bölümde, tezin diğer bölümleri için gerekli olan temel kavramlara yer verildi. Üçüncü bölümde, üç boyutlu Öklid uzayında kanal yüzeyleri ve genelleştirilmiş sabit oranlı yüzeyler birim kuaterniyonlarla elde edildi. Daha sonra, birim kuaterniyona karşılık gelen matrislerden yararlanarak bu yüzeyler homotetik hareket olarak elde edildi. Ayrıca, üç boyutlu Minkowski 3-uzayında bazı kanal yüzeyleri birim split kuaterniyonlarla ifade edildi. Dördüncü bölümde, Darboux çatısı kullanılarak şekil operatörü elde edildi. Darboux çatısıyla şekil operatörü, kuaterniyonlar ile elde edildikten sonra, kuaterniyonik şekil operatörü tanımlandı. Kuaterniyonik şekil operatörüne karşılık gelen matrisler kullanılarak bazı sonuçlar elde edildi. Beşinci bölümde, eğri ve yüzeylerin konum vektörlerinden yararlanarak bir kuaterniyon operatörü tanımlandı. Ayrıca, diğer bölümlerde yüzeyler ve kuaterniyonik şekil operatöründe kullanılan kuaterniyonlar bu kuaterniyon operatörüyle elde edildi.

Kasım 2017, 63 sayfa

Anahtar Kelimeler: Eğriler, yüzeyler, kanal yüzeyleri, genelleştirilmiş sabit oranlı yüzeyler, şekil operatörü, kuaterniyonlar, split kuaterniyonlar, homotetik hareketler, Minkowski uzayı.

ABSTRACT

Ph.D. Thesis

DIFFERENTIAL GEOMETRY OF QUATERNIONS

Selahattin ASLAN

Ankara University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Yusuf YAYLI

This thesis consist of five of chapters. In the first part, it was given the studies done up until now, and information about the development of the thesis. The second part consist of the basic concepts necessary for the other parts of the thesis. In the third chapter, canal surfaces and generalized constant-ratio surfaces in the three-dimensional Euclidean space are obtained by unit quaternions. Then, by using the matrices corresponding to the unit quaternion, these surfaces were obtained as homothetic motions. In addition, some canal surfaces in Minkowski 3-space were expressed by unit split quaternions. In the fourth chapter, the shape operator was obtained using the Darboux frame. After the shape operator with Darboux frame obtained by quaternions, quaternionic shape operator was defined. Some results were obtained using the matrices corresponding to quaternionic shape operator. In the fifth chapter, a quaternion operator was defined using the positions vectors of the curves and surfaces. Also, the quaternions used in the other parts, in the surfaces and quaternionic shape operator, were obtained with this quaternion operator.

November 2017, 63 pages

Key Words: Curves, surfaces, canal surfaces, generalized constant-ratio surfaces, shape operator, quaternions, split quaternions, homothetic motions, Minkowski space.

TEŐEKKÖR

Akademik çalıŐmalarımnda bilgi, öneri ve yönlendirmelerini, araŐtırmalarımnda olduğu kadar sosyal hayatta da manevi desteğini esirgemeyen danışman hocam Sayın Prof. Dr. Yusuf YAYLI'ya (Ankara Öniversitesi Matematik Anabilim Dalı), Tez İzleme Komitesinde bulunan Prof. Dr. Mustafa ÇALIŞKAN'a (Gazi Öniversitesi Matematik Anabilim Dalı) ve Doç. Dr. İsmail GÖK'e (Ankara Öniversitesi Matematik Anabilim Dalı), hayatım boyunca maddi ve manevi desteklerini esirgemeyen ailem, hocalarım ve dostlarıma teŐekkÖr ederim.

Selahattin ASLAN
Ankara, Kasım 2017

İÇİNDEKİLER

TEZ ONAY SAYFASI	
ETİK	i
ÖZET	ii
ABSTRACT.....	iii
TEŞEKKÜR.....	iv
SİMGELER DİZİNİ	vi
ŞEKİLLER DİZİNİ	vii
1. GİRİŞ	1
2. TEMEL KAVRAMLAR	5
3. YÜZEYLER VE KUATERNİYONLAR	14
3.1 Kuaterniyonlar ve 3 Boyutlu Öklid Uzayında Kanal Yüzeyleri ..	14
3.2 Split Kuaterniyonlar ve Minkowski 3 Uzayında Kanal Yüzeyleri	18
3.2.1 Merkez spacelike eğri kanal yüzeyleri ve split kuaterniyonlar .	19
3.2.2 Merkez timelike eğri kanal yüzeyleri ve split kuaterniyonlar ..	21
3.3 Kuaterniyonlar ve Genelleştirilmiş Sabit Oranlı Yüzeyler	25
4. ŞEKİL OPERATÖRÜNÜN KUATERNİYONİK İFADESİ	32
5. KUATERNİYON OPERATÖRÜ	44
5.1 Yörüngesi Eğri Olan Kuaterniyon Operatörü	44
5.1.1 Noktayı eğriye dönüştüren kuaterniyon operatörü	44
5.1.2 Eğriyi eğriye dönüştüren kuaterniyon operatörü	48
5.2 Yörüngesi Yüzey Olan Kuaterniyon Operatörü	51
5.2.1 Noktayı yüzeye dönüştüren kuaterniyon operatörü	51
5.2.2 Eğriyi yüzeye dönüştüren kuaterniyon operatörü	53
5.2.3 Yüzeyi yüzeye dönüştüren kuaterniyon operatörü	54
5.3 Kuaterniyon Operatörünün Uygulamaları	55
6. TARTIŞMA VE SONUÇ	59
KAYNAKLAR	60
ÖZGEÇMİŞ	63

SİMGELER DİZİNİ

\mathbb{R}	Reel Sayılar Cismi
\mathbb{R}^n	Öklid n-Uzay
\mathbb{H}	Reel Kuaterniyon Cebiri
\langle, \rangle	İç Çarpım
\times	Vektörel Çarpım
$*$	Kuaterniyon Çarpım



ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 2.1	Şekil operatörü (O'Neill 2006)	7
Şekil 2.2	Birim kuaterniyon ile dönme	9
Şekil 3.1	Tüp yüzeyi	18
Şekil 3.2	Spacelike eğri üzerinde tüp yüzeyi	24
Şekil 3.3	Timelike eğri üzerinde tüp yüzeyi	25
Şekil 3.4	GSO yüzey-1	30
Şekil 3.5	GSO yüzey-2	31
Şekil 4.1	Kuaterniyonik şekil operatörü	38
Şekil 5.1	Noktayı eğriye dönüştüren kuaterniyon operatörü	47
Şekil 5.2	Yörüngesi yüzey üzerindeki bir eğri olan kuaterniyon operatörü	48
Şekil 5.3	Eğriyi eğriye dönüştüren kuaterniyon operatörü	49
Şekil 5.4	Noktayı yüzeye dönüştüren kuaterniyon operatörü	51
Şekil 5.5	Yüzeyi yüzeye dönüştüren kuaterniyon operatörü	54
Şekil 5.6	M yüzeyini N yüzeyine dönüştüren kuaterniyon operatörü	57

1. GİRİŞ

Diferensiyel geometride; diferensiyel, integral ve lineer cebir etkin bir şekilde kullanılmaktadır. Diferensiyel geometrinin; diferensiyel topoloji ve diferensiyel denklemler gibi bir çok disiplinle yakın ilişkisi vardır. Son yıllarda kinematik, fizik, ekonomi, bilgisayar grafiği, mühendislik, kontrol teorisi, istatistik ve bilgisayar oyunları gibi alanlarda kullanılmaktadır. Eğri ve yüzeyler teorisi diferensiyel geometrinin gelişiminde önemli katkı sağlamıştır. Diferensiyel geometri, eğri ve yüzeylerin karmaşık yapılarını inceliyor ve henüz ortaya çıkarılamamış benzer ve ayırt edici özelliklerini bulmaya çalışmaktadır. Ayrıca, eğri ve yüzeyler teorisi diferensiyel geometrinin en yoğun araştırma alanlarından biridir. Şimdiye kadar eğrilik, torsiyon, Gauss eğriliği, ortalama eğrilik ve jeodezik gibi birçok temel ayırt edici özellikler elde edilmiştir.

Bilindiği gibi uzayda her bir noktanın bir konum vektörü vardır. Dolayısıyla eğri ve yüzey üzerindeki her bir noktanın konum vektörü vardır. Böylece, konum vektörü, üç boyutlu eğriler ve yüzeyler için en temel geometrik öğelerden biri olmuştur. Son yıllarda diferensiyel geometride eğri ve yüzeyleri araştırmada kullanılan en yaygın yöntemlerden biri eğri ve yüzeylerin konum vektörlerinden yararlanarak yapılan araştırma yöntemidir. Eğri ve yüzeylerin konum vektörlerinden yararlanarak logaritmik spiral eğri (Boyadzhiev 1999), sabit eğimli yüzeyler (Munteanu 2010), sabit oranlı hiperyüzeyler (Chen 2001) ve genelleştirilmiş sabit oranlı yüzeyler (Fu ve Munteanu 2014) gibi birçok eğri ve yüzey sınıflandırılmıştır.

Sir William Rowan Hamilton (1844) kompleks sayıları düzlem üzerinde noktalar olarak yorumladı. Daha sonra Hamilton 1843'te dört boyutlu olan kuaterniyonları kompleks sayılara göre yorumladı ve bütün hayatını kuaterniyonlar üzerinde çalışarak geçirdi. 20. yüzyılın sonlarından beri kuaterniyonlar büyük bir rağbet görmektedir. Shoemake (1985), kuaterniyonları kullanarak dönme matrislerinden daha pratik olan bir dönme sistemi tanımladı. Kuaterniyonlar özellikle herhangi bir eksen etrafında dönme yaptıkları için Euler açılarından daha problemsiz, matrislerden nümerik

olarak daha stabil ve kullanışlıdır. Bu yüzden kuaterniyonlar birçok alanda daha fazla tercih edilmektedir. Ayrıca kuaterniyonlar küresel hareketlerde dönme yaptırmada ve hem dönme hem de ötelemenin olduğu uzay hareketlerinde çok güçlü bir araç olarak kullanılmaktadır. Euler açıları ve dönme matrislerinden daha hızlı, kullanışlı ve pratik olan kuaterniyonlar bu özellikleri sayesinde üç boyutlu bilgisayar grafikleri, robotlar, kontrol teorisi, fizik, uzay araçlarının kontrolü, bilgisayar simülasyonları, uygulamalı matematik ve teorik matematik gibi birçok alanda kullanılmaktadır. Dört boyutlu olan kuaterniyonlar özellikle üç boyutlu uzayda modellenen ve oyuncunun dışarıdan dördüncü boyut olarak etki ettiği bilgisayar oyunlarında öne çıkmaktadır. Bununla birlikte mekanik ve klasik fizikteki birçok kural kuaterniyonlarla verilmektedir. Kuaterniyonlar skaler ve vektörel olmak üzere iki kısımdan oluşmaktadır. Bir kuaterniyonun vektörel kısmı üç boyutlu Öklid uzayında bir vektör olduğu için üç boyutlu Öklid uzayı kuaterniyonların yapısal kısımlarından birini oluşturmaktadır.

Eğri ve yüzeylerin son zamanlarda araştırıldıkları alanlardan biri de Einstein'ın özel görelilik kuramının en uygun biçimde gösterildiği Minkowski uzayıdır. Bu araştırmalar sonucunda birçok eğri ve yüzey Minkowski uzayında ifade edilmiştir. Petrovic ve Sucurovic (2000), spacelike, timelike ve null eğrilerin bazı karakterizasyonlarını verdiler. Karacan ve Bükçü (2007), Minkowski uzayında timelike ve spacelike eğriler üzerinde kanal yüzeylerini verdiler.

Inoguchi (1998) yılında split kuaterniyonları tanımlamış ve Minkowski 3-uzayında sabit ortalama eğrilikli timelike yüzeylerin temel denklemlerini bölünmüş kuaterniyonlar yardımıyla yeniden formüleştirmiştir. Özdemir ve Ergin (2006), timelike split kuaterniyonun Minkowski 3-uzayında bir dönme yaptırdığını gösterdiler. Ayrıca, timelike split kuaterniyonlara karşılık gelen Lorentz dönme matrisleri elde ettiler. Kula ve Yaylı (2007), split kuaterniyonlar cebirinin, yarı Öklid uzayıyla tanımlanmasına olanak sağlayan bir skaler çarpımına sahip olduğunu gösterdiler. Ayrıca, iki birim split kuaterniyonun bir dönme oluşturduğunu gösterdiler.

Kinematik; hareketi tanımlamak için nokta, doğru ve diğer geometrik nesnelerin hız, ivme ve diferensiyel özelliklerini incelemektedir. Kinematik hareket geometrisinde matematikçilerin yoğun bir şekilde çalıştıkları hareketle sıkı bir bağı vardır. Kinematik fizik, mekanik mühendislik, robot ve biomekanik gibi birçok alanda kullanılmaktadır. Kinematığın en çok araştırılan konularından biri homotetik hareketlerdir. Hacısalihoğlu (1971) n -boyutlu Öklid uzayında 1-parametrelili homotetik hareketlerin bazı özelliklerini göstermiştir. Daha sonar, Yaylı (1992) Hamilton operatörünü kullanarak 4-boyutlu Öklid uzayında homotetik hareketleri vermiştir. 1-parametrelili homotetik hareketler yoğun bir şekilde incelenmiş ve çok geniş uygulama alanı bulmuştur. Ancak, 2-parametrelili homotetik hareketler hem Karger ve Novak (1985) tarafından uzay kinematığı ve Lie grupları olarak, hem de Bottema ve Roth (1979) tarafından teorik kinematik olarak incelenmiş olsada 1-parametrelili homotetik hareketler kadar incelenmemiştir. Bundan dolayı 2-parametrelili homotetik hareketler son yıllarda araştırılmaya tekrar başlanmıştır. Karacan ve Yaylı (2004, 2005) genel 2-parametrelili hareketleri ve Lorentz düzleminde 2-parametrelili hareketleri vermişlerdir. Tosun vd. (2006), Minkowski 3-uzayında 1-parametrelili homotetik hareketlerin bazı özelliklerini araştırdılar.

3-boyutlu (3D) uzayda kinematikte bazı problemler ve zorluklarla karşılaşmıştır. Bu zorluklar kuaterniyonlar kullanılarak aşılmaya çalışılmıştır. Bayro-Corrochano (2003) göz hareketinin 3D kinematığının matematiksel modeli için Clifford ve geometrik cebirini kullandı. Burada iç çarpım ve dış çarpımdan yararlanarak bir kuaterniyonik yapı tanımladı. Leclercq vd. (2013), bu kuaterniyonik yapıyı dual kuaterniyonlarda kullanarak 3D kinematığında dönme, öteleme ve vida hareketleri gibi bazı hareketlerin modellenmesinde kullandılar.

Kuaterniyonlar vektörler üzerinde etki etmekte ve vektörler üzerinde birçok işlemde kullanılmaktadır. Kuaterniyonların bu özelliklerinden yararlanarak, eğri ve yüzeylerin konum vektörleri üzerinde kuaterniyon kullanılmaktadır. Babaarslan ve Yaylı (2012, 2013), Öklid 3-uzayında ve Minkowski uzayında sabit eğimli yüzeyleri kuaterniyonlarla elde ettiler. Ayrıca, bu kuaterniyonlara karşılık gelen matrislerden

yararlanarak bu yüzeyleri homotetik hareketlerle elde ettiler. Gök (2017) Öklid 3-uzayında kanal yüzeylerini birim kuaterniyondan yararlanarak elde etti. Bu birim kuaterniyona karşılık gelen matrisleri kullanarak homotetik hareket elde ettiler. Benzer bir şekilde, Gök vd. (2017) Minkowski 3-uzayında kanal yüzeylerini split kuaterniyonlarla elde ettiler.

Bu tez çalışmasında, eğri ve yüzeyler kuaterniyonlar ile ifade edildikten sonra diferensiyel ve kinematik özellikleri incelenmiştir. İlk önce genelleştirilmiş sabit oranlı yüzeyler ve kanal yüzeyleri kuaterniyonlar ile ifade edilecektir. Daha sonra, bu kuaterniyonlara karşılık gelen matrislerden yararlanarak bu yüzeyleri homotetik hareketlerle ifade edilecektir. Benzer biçimde, Minkowski 3-uzayında bazı kanal yüzeyleri split kuaterniyonla ifade edildikten sonra homotetik hareketlerle ifade edilecektir. İkinci kısımda, Darboux çatısından yararlanarak şekil operatörü elde edilecektir. Darboux çatısıyla şekil operatörü kuaterniyon ile verilerek kuaterniyonik şekil operatörü tanımlanacaktır. Kuaterniyonik şekil operatörü, birim kuaterniyona karşılık gelen matrislerden yararlanarak homotetik hareket ile elde edilecektir. Bu operatöre karşılık gelen matrisler, yüzeyler üzerinde bazı özel eğrilerden yararlanarak farklı bir şekilde elde edilecektir. Son olarak, şimdiye kadar elde edilen sonuçları da kapsayacak biçimde bir kuaterniyon operatörü tanımlanacaktır. Bu kuaterniyon operatörü, eğri ve yüzeyler üzerinde olmak üzere iki şekilde incelenecektir. Son olarak bu kuaterniyon operatörünün bazı uygulamaları verilecektir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Tanım 2.1 Merkezileri bir $\alpha(t)$ eğrisi üzerinde bulunan ve yarıçapları bu eğriye bağlı olarak değişen küre ailesinin zarfına kanal yüzeyi denir. Eğer yarıçap fonksiyonu $r(t)$; $r'(t) < \|\alpha'(t)\|$ özelliğini sağlıyorsa kanal yüzeyi regülerdir. Birim hızlı $\alpha(t)$ eğrisinin Frenet çatısı $\{T(t), N(t), B(t)\}$ olmak üzere, merkez eğrisi $\alpha(t)$ olan kanal yüzeyi

$$C(t, \theta) = \alpha(t) - r(t)r'(t)T(t) \pm r(t)\sqrt{1 - r'(t)^2}(\cos \theta N(t) + \sin \theta B(t)) \quad (2.1)$$

biçiminde parametrelendirilir. Eğer yarıçap fonksiyonu $r(t)$ sabit ise kanal yüzeyine tüp yüzeyi denir. Tüp yüzeyi

$$X(t, \theta) = \alpha(t) + r(t)(\cos \theta N(t) + \sin \theta B(t)) \quad (2.2)$$

biçiminde parametrelendirilir (Gray 1999).

Tanım 2.2 Yarıçap fonksiyonu $r(\theta)$ iki kez türevlenebilen bir fonksiyon olmak üzere, genelleştirilmiş tüp yüzeyi

$$Y(t, \theta) = \alpha(t) + r(\theta)(\cos \theta N(t) + \sin \theta B(t)) \quad (2.3)$$

biçiminde parametrelendirilir (Gross 1994).

Tanım 2.3 Birim hızlı $\alpha(t)$ merkez eğrisinin Bishop çatısı

$\{T(t), N_1(t), N_2(t) = T(t) \times N_1(t)\}$ olmak üzere, kanal yüzeyi ve tüp yüzeyi, sırasıyla

$$C(t, \theta) = \alpha(t) - r(t)r'(t)T(t) \pm r(t)\sqrt{1 - r'(t)^2}(\cos \theta N_1(t) + \sin \theta N_2(t)) \quad (2.4)$$

$$X(t, \theta) = \alpha(t) + r(t)(\cos \theta N_1(t) + \sin \theta N_2(t)) \quad (2.5)$$

biçiminde parametrelendirilir (Doğan 2012).

Tanım 2.4 Birim hızlı $\alpha(t)$ merkez eğrisinin Darboux çatısı

$\{T(t), Y(t) = U(t) \times T(t), U(t)\}$ olmak üzere, kanal yüzeyi ve tüp yüzeyi, sırasıyla

$$C(t, \theta) = \alpha(t) - r(t)r'(t)T(t) \pm r(t)\sqrt{1 - r'(t)^2}(\cos \theta Y(t) + \sin \theta U(t)) \quad (2.6)$$

$$X(t, \theta) = \alpha(t) + r(t)(\cos \theta Y(t) + \sin \theta U(t)) \quad (2.7)$$

biçiminde parametrelendirilir (Doğan 2012).

Tanım 2.5 $f : I \longrightarrow \mathbb{S}^2$, parametresi " t " olan bir küresel eğri olmak üzere, $\{f'(t), f(t) \times f'(t), f(t)\}$ ortonormal çatısı $f(t)$ eğrisi boyunca Sabban çatısıdır. Sabban çatısında bulunan vektörlerin türevleri aşağıdaki biçimde verilebilir.

$$\begin{aligned} f''(t) &= k_g(t)f(t) \times f'(t) - f(t), \\ (f(t) \times f'(t))' &= -k_g(t)f'(t), \\ f'(t) &= f'(t), \end{aligned} \quad (2.8)$$

burada $k_g(t) = \langle f''(t), (f(t) \times f'(t)) \rangle$, $f(t)$ eğrisinin geodezik eğriliğidir (Koenderink 1990).

Tanım 2.6 $x : S \longrightarrow \mathbb{E}^3$, 3-boyutlu Öklid uzayında bir yüzey olmak üzere, S aşağıdaki gibi parametrelendirilmiş bir genelleştirilmiş sabit oranlı (GSO) yüzeydir.

$$x(s, t) = s(\cos u(s)f(t) + \sin u(s)f(t) \times f'(t)), \quad (2.9)$$

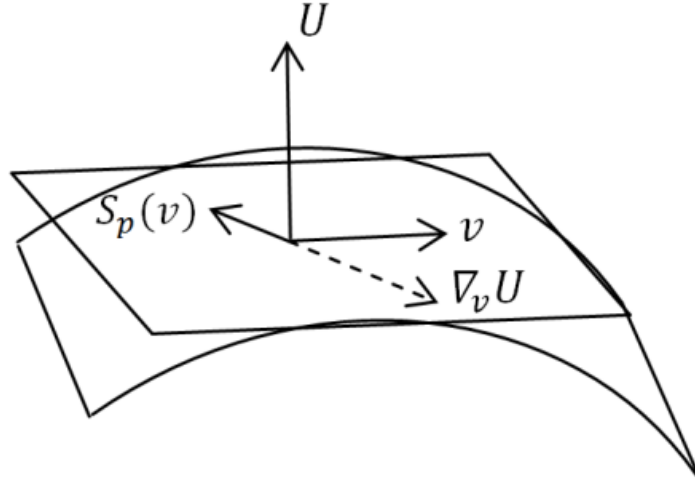
burada $u(s) = \int \frac{\cot \theta(s)}{s} ds$, $\theta(s) \notin \left\{0, \frac{\pi}{2}\right\}$ açı fonksiyonu ve f ise \mathbb{S}^2 üzerinde bir birim hızlı küresel eğridir (Fu ve Munteanu 2014).

Tanım 2.7 p , M yüzeyinde bir nokta olmak üzere, p noktasında M yüzeyine teğet olan vektör aşağıdaki biçimde verilebilir.

$$S_p(v) = -\nabla_v U, \quad (2.10)$$

burada U , M yüzeyinde p noktasının komşuluğunda birim normal vektördür.

$S_p : T_p(M) \rightarrow T_p(M)$ dönüşümüne p noktasındaki şekil operatörü denir (Şekil 2.1).



Şekil 2.1 Şekil operatörü (O'Neill 2006)

v ve w teğet vektörler olmak üzere, şekil operatörü simetrik bir lineer dönüşüm olduğundan $\langle S_p(v), w \rangle = \langle v, S_p(w) \rangle$ 'dir (O'Neill 2006).

Tanım 2.8 $x : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow M \subset \mathbb{R}^3$ parametreleri s ve t olan bir yüzey olmak üzere aşağıdaki reel değerli fonksiyonlar verilebilir.

$$K = \frac{\langle S(x_s), x_s \rangle \langle S(x_t), x_t \rangle - \langle S(x_s), x_t \rangle \langle S(x_t), x_s \rangle}{\langle x_s, x_s \rangle \langle x_t, x_t \rangle - \langle x_s, x_t \rangle^2} \quad (2.11)$$

$$= \frac{|S(x_s) \times S(x_t)|}{|x_s \times x_t|} \quad (2.12)$$

$$H = \frac{\langle x_t, x_t \rangle \langle S(x_s), x_s \rangle + \langle x_s, x_s \rangle \langle S(x_t), x_t \rangle - 2 \langle x_s, x_t \rangle \langle S(x_s), x_t \rangle}{2(\langle x_s, x_s \rangle \langle x_t, x_t \rangle - \langle x_s, x_t \rangle^2)} \quad (2.13)$$

$$= \frac{|S(x_s) \times x_t + x_s \times S(x_t)|}{2|x_s \times x_t|} \quad (2.14)$$

burada K ve H fonksiyonları sırasıyla Gauss eğrilik ve ortalama eğriliktir (O'Neill 2006).

Tanım 2.9 $\alpha : I \rightarrow M$, s ile parametrelendirilmiş birim hızlı bir eğri olmak üzere, $\alpha'(s) = T(s)$ vektörü M yüzeyindeki $\alpha(s)$ eğrisine teğet vektördür. $T(s)$, $Y(s)$ ve $U(s)$ sırasıyla birim teğet vektör, teğet normal vektör ve birim normal vektör alanı olmak üzere, $\{T, Y = U \times T, U\}$ çatısı Darboux çatısıdır. T , Y ve U vektörlerinin

türevleri aşağıdaki biçimde verilebilir.

$$\frac{d}{ds} \begin{bmatrix} T \\ Y \\ U \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k_g & k_n \\ -k_g & 0 & t_g \\ -k_n & -t_g & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ Y \\ U \end{bmatrix}, \quad (2.15)$$

burada k_g , k_n ve t_g sırasıyla geodezik eğrilik, normal eğrilik ve geodezik torsiyondur. $\alpha(s)$ birim hızlı bir eğri değilse aşağıdaki eşitlik verilebilir.

$$\frac{d}{ds} \begin{bmatrix} T \\ Y \\ U \end{bmatrix} = |\alpha'(s)| \begin{bmatrix} 0 & k_g & k_n \\ -k_g & 0 & t_g \\ -k_n & -t_g & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ Y \\ U \end{bmatrix}. \quad (2.16)$$

$k_g = 0$, $k_n = 0$, $t_g = 0$ ise $\alpha(s)$ eğrisi sırasıyla geodezik eğri, asimptotik eğri, çizgisel eğridir (O'Neill 2006).

Tanım 2.10 $\mathbb{H} = \{q = a_0 + a_1i + a_2j + a_3k : a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}\}$ reel kuaterniyonların kümesi \mathbb{R}^4 4-boyutlu vektör uzayına eşittir. Kuaterniyonların bazı $\{1, i, j, k\}$ aşağıdaki biçimde kısaca ifade edilebilir.

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1. \quad (2.17)$$

Kuaterniyonlar cebiri birleşimli fakat değişimli değildir (Hamilton 1844). Reel kuaterniyonlar kümesinin birim elemanı 1'dir. $q = a_0 + a_1i + a_2j + a_3k$ olmak üzere q kuaterniyonunun skaler ve vektörel bileşenleri sırasıyla $S(q) = a_0 \in \mathbb{R}$ ve $V(q) = a_1i + a_2j + a_3k \in \mathbb{R}^3$ 'dir. Böylece, kuaterniyon $q = S(q) + V(q)$ biçiminde yazılabilir. $q = S(q) + V(q)$ olmak üzere, $S(q) = 0$ ise q kuaterniyonuna saf (pure) kuaterniyon denir. $q = S(q) + V(q)$, $p = S(p) + V(p) \in \mathbb{H}$ ve $\lambda \in \mathbb{R}$ olmak üzere, kuaterniyonların toplamı ve skalerle çarpımı aşağıdaki biçimde verilebilir.

$$\begin{aligned} q + p &= (S(q) + S(p)) + (V(q) + V(p)) \\ \lambda q &= \lambda S(q) + \lambda V(q). \end{aligned}$$

\mathbb{R}^3 vektör uzayında iç çarpım ve vektörel çarpım kullanılarak kuaterniyon çarpımı * aşağıdaki biçimde verilebilir.

$$q * p = S(q)S(p) - \langle V(q), V(p) \rangle + S(q)V(p) + S(p)V(q) + V(q) \times V(p) \quad (2.18)$$

burada \times vektörel çarpım ve $*$ kuaterniyon çarpımıdır. $q = a_0 + a_1i + a_2j + a_3k$ kuaterniyonunun eşleniği $\bar{q} = a_0 - a_1i - a_2j - a_3k$ biçimdedir. Bir kuaterniyonun normu ve tersi aşağıdaki biçimde verilebilir.

$$|q| = q * \bar{q} = a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2, \quad q^{-1} = \frac{\bar{q}}{|q|}, \quad |q| \neq 0.$$

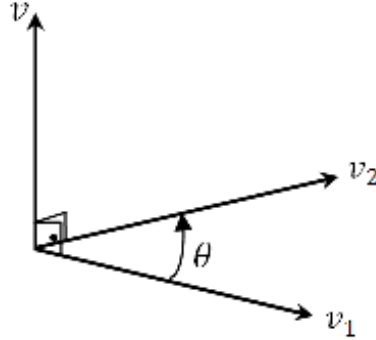
$|q| = 1$ ise q kuaterniyonuna birim kuaterniyon denir. Bir birim kuaterniyonun trigonometrik formu aşağıdaki biçimdedir.

$$q = \cos \theta + \sin \theta v, \quad (2.19)$$

burada $v \in \mathbb{R}^3$ ve $\|v\| = 1$. v_1 ve v_2 3-boyutlu \mathbb{R}^3 vektör uzayında birim vektörler (4-boyutlu \mathbb{R}^4 vektör uzayında saf (pure) kuaterniyonlar) ve bu iki vektör arasındaki açı θ olmak üzere, bu iki vektörden q birim kuaterniyonu aşağıdaki biçimde elde edilir.

$$q = v_2 * v_1^{-1} = \cos \theta + \sin \theta v, \quad (2.20)$$

burada $v = \frac{v_1 \times v_2}{\|v_1 \times v_2\|}$ 'dir. $q = \cos \theta + \sin \theta v$ birim kuaterniyonu, v_1 vektörünü v vektörü etrafında döndürerek v_2 vektörü üzerine getirir (Şekil 2.2) (Hacisalihoğlu 1983).



Şekil 2.2 Birim kuaterniyon ile dönme

Tanım 2.11 q birim kuaterniyon ve w saf (pure) kuaterniyon olmak üzere, ϕ lineer dönüşümü aşağıdaki biçimde verilebilir.

$$\begin{aligned} \phi & : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \\ \phi(w) & = q * w * q^{-1}. \end{aligned} \quad (2.21)$$

$q = a_0 + a_1i + a_2j + a_3k$ birim kuaterniyonu için ϕ lineer dönüşümüne karşılık gelen matris aşağıdaki biçimde verilebilir.

$$A = \begin{bmatrix} a_0^2 + a_1^2 - a_2^2 - a_3^2 & -2a_0a_3 + 2a_1a_2 & 2a_0a_2 + 2a_1a_3 \\ 2a_0a_3 + 2a_1a_2 & a_0^2 + a_2^2 - a_1^2 - a_3^2 & 2a_2a_3 - 2a_0a_1 \\ 2a_1a_3 - 2a_0a_2 & 2a_0a_1 + 2a_2a_3 & a_0^2 + a_3^2 - a_2^2 - a_1^2 \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

burada $AA^T = I$ ve $\det A = 1$ olduğundan A ortogonal matristir. Böylece, ϕ lineer dönüşümü 3-boyutlu vektör uzayında bir dönme yapmıştır. $q = \cos \theta + \sin \theta v$ olmak üzere ϕ lineer dönüşümü w vektörünü v vektörü etrafında 2θ kadar döndürür (Shoemake 1985).

Tanım 2.12 \mathbb{R}^3 vektör uzayında 1-parametrelili homotetik hareket aşağıdaki biçimde verilebilir.

$$v_2(t) = h(t)A(t)v_1(t) + C(t), \quad (2.23)$$

burada v_2 ve v_1 sırasıyla bir noktanın sabit uzay \mathbb{R}' ve hareketli uzaydaki \mathbb{R} konum vektörüdür. Ayrıca, h , A ve C sırasıyla homotetik hareketin skalası, ortogonal matrisi ve öteleme vektörüdür. " t " ise homotetik hareketin parametresidir (Düldül 2010).

Tanım 2.13 \mathbb{R}^3 vektör uzayında 2-parametrelili homotetik hareket aşağıdaki biçimde verilebilir.

$$v_2(t, s) = h(t, s)A(t, s)v_1(t, s) + C(t, s), \quad (2.24)$$

burada v_2 ve v_1 sırasıyla bir noktanın sabit uzay \mathbb{R}' ve hareketli uzaydaki \mathbb{R} konum vektörüdür. Ayrıca, h , A ve C sırasıyla homotetik hareketin skalası, ortogonal matrisi ve öteleme vektörüdür. " t ve s " ise homotetik hareketin parametreleridir (Bottema ve Roth 1979) (Karger ve Novák 1985).

Tanım 2.14 $\mathbb{R}^3 = \{x = (x_1, x_2, x_3) | x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}\}$ üç boyutlu vektör uzayı olmak üzere, $x = (x_1, x_2, x_3)$, $y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$ için Lorentz iç çarpımı

$$\langle x, y \rangle_L = -x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 \quad (2.25)$$

biçimindedir. $\mathbb{E}_1^3 = (\mathbb{R}^3, \langle x, y \rangle_L)$ ifadesi Lorentz-Minkowski 3-uzayı denir.

$x \in \mathbb{E}_1^3$ vektörü, $\langle x, x \rangle_L > 0$ ise spacelike vektör, $\langle x, x \rangle_L < 0$ ise timelike vektör veya $\langle x, x \rangle_L = 0$ ise null vektör denir. x vektörünün normu $\|x\|_L = \sqrt{|\langle x, x \rangle_L|}$ 'dir. $\|x\|_L = 1$ ise x birim vektördür. $x, y \in \mathbb{E}_1^3$ olmak üzere Lorentz vektörel çarpım

$$x \times_L y = (x_3y_2 - x_2y_3, x_3y_1 - x_1y_3, x_1y_2 - x_2y_1) \quad (2.26)$$

biçimindedir. Lorentz-Minkowski 3-uzayında herhangi bir $\alpha(s)$ eğrisinin her $s \in I \subset \mathbb{R}$ için hız vektörü $\alpha'(s)$ spacelike, timelike veya lightlike ise sırasıyla bu $\alpha(s)$ eğrisi lokal olarak spacelike, timelike veya lightlike'dır. $\langle x, y \rangle_L = 0$ ise x ve y vektörleri ortogonaldır. $\alpha(s)$ eğrisinin tanjant vektörü $T(s) = \alpha'(s) = \frac{d\alpha(s)}{ds}$ ve $\|\alpha'\|_L = 1$ ise birim normal vektörü $N(s) = \frac{T'(t)}{\|T'(t)\|_L}$ ve binormal vektörü $B(s) = T \times_L N$ 'dir. O halde bu eğrinin Frenet çatısı $\{T, N, B\}$ 'dir (Petrovic ve Sucurovic 2000).

Tanım 2.15 Merkez eğrisi birim hızlı spacelike eğri, binormal vektörü spacelike ve eğriliği sıfırdan farklı olmak üzere, kanal yüzeyi ve tüp yüzeyi

$$C(t, \theta) = \alpha(t) + r(t)r'(t)T(t) \pm r(t)\sqrt{1 - r'(t)^2}(\sinh \theta N(t) + \cosh \theta B(t)), \quad (2.27)$$

$$Tube(t, \theta) = \alpha(t) + r(t)(\sinh \theta N(t) + \cosh \theta B(t)) \quad (2.28)$$

biçiminde parametrelendirilir (Karacan ve Bukcu 2007a).

Tanım 2.16 Merkez eğrisi birim hızlı timelike eğri ve eğriliği sıfırdan farklı olmak üzere, kanal yüzeyi ve tüp yüzeyi

$$C(t, \theta) = \alpha(t) + r(t)r'(t)T(t) \pm r(t)\sqrt{1 + r'(t)^2}(\cos \theta N(t) + \sin \theta B(t)), \quad (2.29)$$

$$Tube(t, \theta) = \alpha(t) + r(t)(\cos \theta N(t) + \sin \theta B(t)) \quad (2.30)$$

biçiminde parametrelendirilir (Karacan ve Bukcu 2007b).

Tanım 2.17 Split kuaterniyon cebiri birimli, değişimli olmayan ve bölümlü olmayan halkadır. Split kuaterniyon cebirinin bazı $\{1, i, j, k\}$ olmak üzere,

$$i^2 = -1, j^2 = k^2 = ijk = 1 \quad (2.31)$$

çarpım kuralıyla tanımlanır. $q = a_0 + a_1i + a_2j + a_3k$ olmak üzere, q split kuaterniyonunun skala kısmı $S(q) = a_0$ ve vektörel kısmı $V(q) = a_1i + a_2j + a_3k$ 'dir. q ve p split kuaterniyonları için $*_L$ split kuaterniyon çarpımı

$$q *_L p = S(q)S(p) + \langle V(q), V(p) \rangle_L + S(q)V(p) + S(p)V(q) + V(q) \times_L V(p) \quad (2.32)$$

biçimindedir. $S(q) = 0$ ise q saf (pure) split kuaterniyon denir. q split kuaterniyonunun eşleniği $\bar{q} = S(q) - V(q)$ 'dir. $I_q = q *_L \bar{q} = \bar{q} *_L q = a_0^2 + a_1^2 - a_2^2 - a_3^2$ olmak üzere, $I_q < 0$, $I_q > 0$ ve $I_q = 0$ ise q split kuaterniyonu sırasıyla spacelike, timelike ve lightlike split kuaterniyondur. q split kuaterniyonunun normu $N_q = \sqrt{|a_0^2 + a_1^2 - a_2^2 - a_3^2|}$ 'dir. $N_q = 1$ ise q birim split kuaterniyon denir (Bekar ve Yaylı 2013).

Her spacelike split kuaterniyonunun vektörel kısmı da spacelike vektördür. Ancak, timelike split kuaterniyonunun vektörel kısmı spacelike veya timelike vektör olabilir.

- v birim spacelike vektör olmak üzere, her birim spacelike split kuaterniyon $q = \sinh \theta + \cosh \theta v$ biçiminde yazılabilir.
- v birim spacelike vektör olmak üzere, vektörel kısmı spacelike vektör olan her birim timelike split kuaterniyon $q = \cosh \theta + \sinh \theta v$ biçiminde yazılabilir.
- v birim timelike vektör olmak üzere, vektörel kısmı timelike vektör olan her birim timelike split kuaterniyon $q = \cos \theta + \sin \theta v$ biçiminde yazılabilir (Ozdemir ve Ergin 2006) (Kula ve Yaylı 2007).

Tanım 2.18 Birim time split kuaterniyonlar Lorentz-Minkowski 3-uzayında dönme yaptırır. $q = a_0 + a_1i + a_2j + a_3k$ birim timelike split kuaterniyon olmak üzere,

$$(q *_L V_q *_L q^{-1})_i = \sum_{j=1}^3 R_{ij}(V_q)_j \quad (2.33)$$

dönüşümüne karşılık gelen dönme matrisi

$$R_q = \begin{bmatrix} a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 & 2a_0a_3 - 2a_1a_2 & -2a_0a_2 - 2a_1a_3 \\ 2a_0a_3 + 2a_1a_2 & a_0^2 - a_2^2 - a_1^2 + a_3^2 & -2a_2a_3 - 2a_0a_1 \\ 2a_1a_3 - 2a_0a_2 & 2a_0a_1 - 2a_2a_3 & a_0^2 - a_3^2 + a_2^2 - a_1^2 \end{bmatrix}, \quad (2.34)$$

biçimindedir. Bu matrisin bütün satırları Lorentz uzayında ortogondur. Bundan dolayı, q birim timelike split kuaterniyonu 3×3 ortogond dönme yaptıran R_q matrisine eşdeğerdur. $\det(R_q) = 1$ olmak üzere, R_q matrisi Minkowski 3-uzayında bir dönme ifade eder. Birim timelike split kuaterniyonun vektörel kısmı timelike ise dönme açısı küresel, spacelike ise dönme açısı hiperboliktur (Ozdemir ve Ergin 2006).

Tanım 2.19 Minkowski 3-uzayında 1-parametrel hareketler

$$\begin{bmatrix} X \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} hA & C \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.35)$$

dönüşümüyle ifade edilebilir. Burada, $A \in SO_1(3)$, $A^t = \varepsilon A^{-1} \varepsilon$ ve diyagonal matrisin girdileri $\varepsilon_1 = -1$ ve $\varepsilon_2 = \varepsilon_3 = 1$ olmak üzere matris işareti ε , $\delta_{ij}\varepsilon_j$ diyagonal matrisidir. Böylece $\varepsilon^{-1} = \varepsilon = \varepsilon^t$ 'dur. X ve X_0 3×1 reel matrisler ve h homotetik skaldur. A , h ve C bir t parametresinin C^∞ sınıfının diferensiyelenebilir fonksiyonlardır. X ve X_0 sırasıyla bir noktanın sabit \mathbb{R}' hareketli uzaydaki \mathbb{R} konum vektörüdür. Başlangıçta $t = t_0$, \mathbb{R}' ve \mathbb{R} koordinat sistemleri çakışkıdır (Tosun vd. 2006).

3. YÜZEYLER VE KUATERNİYONLAR

3.1 Kuaterniyonlar ve 3 Boyutlu Öklid Uzayında Kanal Yüzeyleri

Çalışmanın bu kısmında, kanal yüzeyinin merkez eğrisinin birim tanjant vektöründen yararlanarak bir birim kuaterniyon verilecektir. Kanal yüzeyleri ve tüp yüzeyleri, bu birim kuaterniyon ile elde edilecektir. Ayrıca, bu birim kuaterniyon için (2.21) linear dönüşüme karşılık gelen matrisi kullanarak kanal yüzeyleri ve tüp yüzeyleri homotetik hareket ile elde edilecektir. Aynı birim kuaterniyon kullanılarak Bishop çatısı ve Darboux çatısıyla verilen kanal yüzeyleri ve tüp yüzeyleri elde edilecektir. Son olarak, elde edilen sonuçlarla ilgili bir örnek verilecektir.

Uyarı 3.1 $\alpha(t)$ eğrisinin birim tanjant vektörü $T(t) = (T_1(t), T_2(t), T_3(t))$ olmak üzere, $q(t, \theta) = \cos \theta + \sin \theta T(t)$ birim kuaterniyonu için (2.21) ϕ linear dönüşümüne karşılık gelen matris aşağıdaki biçimdedir.

$$A_1 = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta + \sin^2 \theta (T_1^2 - T_2^2 - T_3^2) \\ 2 \sin \theta (\cos \theta T_3 + \sin \theta T_1 T_2) \\ 2 \sin \theta (\sin \theta T_1 T_3 - \cos \theta T_2) \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} -2 \sin \theta (\cos \theta T_3 - \sin \theta T_1 T_2) \\ \cos^2 \theta + \sin^2 \theta (T_2^2 - T_1^2 - T_3^2) \\ 2 \sin \theta (\cos \theta T_1 + \sin \theta T_2 T_3) \end{bmatrix}$$
$$A_3 = \begin{bmatrix} 2 \sin \theta (\cos \theta T_2 + \sin \theta T_1 T_3) \\ 2 \sin \theta (\sin \theta T_2 T_3 - \cos \theta T_1) \\ \cos^2 \theta + \sin^2 \theta (T_3^2 - T_2^2 - T_1^2) \end{bmatrix}$$

olmak üzere,

$$A(t, \theta) = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

burada $T(t)$ vektörü $A(t, \theta)$ matrisinin dönme eksenini ve $A(t, \theta)T(t) = T(t)$ 'dir (Aslan ve Yaylı 2016a).

Teorem 3.1 $\alpha(t)$ birim hızlı eğrisi $C(t, \theta)$ kanal yüzeyinin merkez eğrisi, $\alpha(t)$ eğrisinin Frenet çatısı $\{T(t), N(t), B(t)\}$ ve $q(t, \theta) = \cos \theta + \sin \theta T(t)$ birim kuaterniyon olmak

üzere, $q(t, \theta) * N(t)$ kuaterniyon çarpımından yararlanarak $C(t, \theta)$ kanal yüzeyi ve $X(t, \theta)$ tüp yüzeyi sırasıyla aşağıdaki biçimde elde edilebilir.

$$C(t, \theta) = \alpha(t) - r(t)r'(t)T(t) \pm r(t)\sqrt{1 - r'(t)^2}q(t, \theta) * N(t) \quad (3.2)$$

$$X(t, \theta) = \alpha(t) + r(t)q(t, \theta) * N(t) \quad (3.3)$$

$q(t, \theta) = \cos \theta + \sin \theta T(t)$ birim kuaterniyonu için ϕ lineer dönüşümüne karşılık gelen matris $A(t, \theta)$ olmak üzere, (3.2) kanal yüzeyi ve (3.3) tüp yüzeyi sırasıyla homotetik hareket ile aşağıdaki biçimde verilebilir.

$$C(t, \theta) = \beta(t) + h(t)A(t, \theta)N(t) \quad (3.4)$$

$$X(t, \theta) = \alpha(t) + r(t)A(t, \theta)N(t) \quad (3.5)$$

burada $\beta(t) = \alpha(t) - r(t)r'(t)T(t)$ ve $h(t) = \pm r(t)\sqrt{1 - r'(t)^2}$ 'dir (Aslan ve Yaylı 2016a).

İspat. $q(t, \theta) = \cos \theta + \sin \theta T(t)$ birim kuaterniyonu ve $N(t)$ saf (pure) kuaterniyonun kuaterniyon çarpımından

$$q(t, \theta) * N(t) = \cos \theta N(t) + \sin \theta B(t). \quad (3.6)$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitliği teoremdeki kuaterniyon çarpımlarının yerine yazarak

$$C(t, \theta) = \alpha(t) - r(t)r'(t)T(t) \pm r(t)\sqrt{1 - r'(t)^2}(\cos \theta N(t) + \sin \theta B(t))$$

$$X(t, \theta) = \alpha(t) + r(t)(\cos \theta N(t) + \sin \theta B(t))$$

(2.1) kanal yüzeyi ve (2.2) tüp yüzeyi elde edilir.

Eğer $\beta(t)$, $h(t)$ ve $A(t, \theta)$ sırasıyla homotetik hareketin öteleme vektörü, homotetik skalası ve ortogonal matrisi olarak alırsak kanal yüzeyi

$$C(t, \theta) = \beta(t) + h(t)A(t, \theta)N(t)$$

homotetik hareketiyle elde edilir. $\alpha(t)$, $r(t)$ ve $A(t, \theta)$ sırasıyla, öteleme vektörü, homotetik skalası ve homotetik hareketin ortogonal matrisi olarak alırsak tüp yüzeyi

$$X(t, \theta) = \alpha(t) + r(t)A(t, \theta)N(t)$$

homotetik hareketiyle elde edilir (Aslan ve Yaylı 2016a). ■

Önerme 3.1 Genelleştirilmiş tüp yüzeyi $Y(t, \theta) = \alpha(t) + r(\theta)(\cos \theta N(t) + \sin \theta B(t))$, kuaterniyon çarpımıyla

$$Y(t, \theta) = \alpha(t) + r(\theta)q(t, \theta) * N(t) \quad (3.7)$$

biçiminde elde edilir. Bu kuaterniyon çarpımından yararlanarak (2.3) genelleştirilmiş tüp yüzeyi

$$Y(t, \theta) = \alpha(t) + r(\theta)A(t, \theta)N(t) \quad (3.8)$$

homotetik hareketiyle elde edilir. Genelleştirilmiş tüp yüzeyinin homotetik hareket olarak gösteriminde, $r(\theta)$ sabit olmayan bir homotetik skaladır (Aslan ve Yaylı 2016a).

Teorem 3.2 $\alpha(t)$ birim hızlı merkez eğrisinin Bishop çatısı

$\{T(t), N_1(t), N_2(t) = T(t) \times N_1(t)\}$ ve $q(t, \theta) = \cos \theta + \sin \theta T(t)$ birim kuaterniyon olmak üzere, $q(t, \theta) * N_1(t)$ kuaterniyon çarpımından yararlanarak (2.4) kanal yüzeyi ve (2.5) tüp yüzeyi

$$C(t, \theta) = \alpha(t) - r(t)r'(t)T(t) \pm r(t)\sqrt{1 - r'(t)^2}q(t, \theta) * N_1(t) \quad (3.9)$$

$$X(t, \theta) = \alpha(t) + r(t)q(t, \theta) * N_1(t) \quad (3.10)$$

biçiminde elde edilir. $q(t, \theta) = \cos \theta + \sin \theta T(t)$ birim kuaterniyonu için ϕ lineer dönüşümüne karşılık gelen matrisi kullanarak kanal yüzeyi ve tüp yüzeyi homotetik hareket ile verilebilir, sırasıyla

$$C(t, \theta) = \beta(t) + h(t)AN_1(t) \quad (3.11)$$

$$X(t, \theta) = \alpha(t) + r(t)AN_1(t) \quad (3.12)$$

burada $\beta(t) = \alpha(t) - r(t)r'(t)T(t)$ ve $h(t) = \pm r(t)\sqrt{1 - r'(t)^2}$ 'dir (Aslan ve Yaylı 2016a).

Teorem 3.3 $\alpha(t)$ birim hızlı merkez eğrisinin Darboux çatısı

$\{T(t), Y(t) = U(t) \times T(t), U(t)\}$ ve $q(t, \theta) = \cos \theta + \sin \theta T(t)$ birim kuaterniyon olmak üzere, $q(t, \theta) * Y(t)$ kuaterniyon çarpımından yararlanarak (2.6) kanal yüzeyi ve (2.7) tüp yüzeyi

$$C(t, \theta) = \alpha(t) - r(t)r'(t)T(t) \pm r(t)\sqrt{1 - r'(t)^2}q(t, \theta) * Y(t) \quad (3.13)$$

$$X(t, \theta) = \alpha(t) + r(t)q(t, \theta) * Y(t) \quad (3.14)$$

biçiminde elde edilir. $q(t, \theta) = \cos \theta + \sin \theta T(t)$ birim kuaterniyonu için ϕ lineer dönüşümüne karşılık gelen matrisi kullanarak kanal yüzeyi ve tüp yüzeyi homotetik hareket ile verilebilir, sırasıyla

$$C(t, \theta) = \beta(t) + h(t)AY(t) \quad (3.15)$$

$$X(t, \theta) = \alpha(t) + r(t)AY(t) \quad (3.16)$$

burada $\beta(t) = \alpha(t) - r(t)r'(t)T(t)$ ve $h(t) = \pm r(t)\sqrt{1 - r'(t)^2}$ 'dir (Aslan ve Yaylı 2016a).

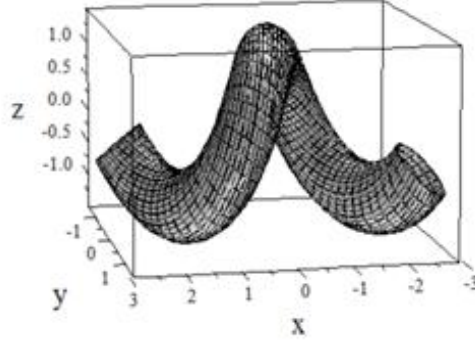
Sonuç 3.1 Frenet çatısı, Bishop çatısı ve Darboux çatısı ile verilen kanal yüzeyleri ve tüp yüzeyleri, aynı $q(t, \theta) = \cos \theta + \sin \theta T(t)$ birim kuaterniyonuyla ve aynı ortogonal matris $A(t, \theta)$ ile elde edilebilir (Aslan ve Yaylı 2016a).

Örnek 3.1 $\alpha(t) = (\frac{t}{2}, \sin(\frac{\sqrt{3}t}{2}), \cos(\frac{\sqrt{3}t}{2}))$ birim hızlı eğrisinin Frenet çatısı

$$\begin{aligned} T(t) &= \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \cos\left(\frac{\sqrt{3}t}{2}\right), -\frac{\sqrt{3}}{2} \sin\left(\frac{\sqrt{3}t}{2}\right) \right) \\ N(t) &= \left(0, -\sin\left(\frac{\sqrt{3}t}{2}\right), -\cos\left(\frac{\sqrt{3}t}{2}\right) \right) \\ B(t) &= \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2} \cos\left(\frac{\sqrt{3}t}{2}\right), -\frac{1}{2} \sin\left(\frac{\sqrt{3}t}{2}\right) \right) \end{aligned} \quad (3.17)$$

olmak üzere, $q(t, \theta) = \cos \theta + \sin \theta T(t)$ birim kuaterniyonu için ϕ lineer dönüşümüne karşılık gelen A matrisi;

$$\begin{aligned} A_1 &= \begin{bmatrix} \cos^2 \theta - \frac{1}{2} \sin^2 \theta \\ \sqrt{3} \sin \theta \left(\frac{1}{2} \sin \theta \cos\left(\frac{\sqrt{3}t}{2}\right) - \sin\left(\frac{\sqrt{3}t}{2}\right) \cos \theta \right) \\ -\sqrt{3} \sin \theta \left(\frac{1}{2} \sin\left(\frac{\sqrt{3}t}{2}\right) \sin \theta - \cos \theta \cos\left(\frac{\sqrt{3}t}{2}\right) \right) \end{bmatrix} \\ A_2 &= \begin{bmatrix} \sqrt{3} \sin \theta \left(\sin\left(\frac{\sqrt{3}t}{2}\right) \cos \theta + \frac{1}{2} \sin \theta \cos\left(\frac{\sqrt{3}t}{2}\right) \right) \\ \cos^2 \theta + \sin^2 \theta \left(\frac{3}{4} \cos^2\left(\frac{\sqrt{3}t}{2}\right) - \frac{1}{4} - \frac{3}{4} \sin^2\left(\frac{\sqrt{3}t}{2}\right) \right) \\ \sin \theta \left(\cos \theta - \frac{3}{2} \sin\left(\frac{\sqrt{3}t}{2}\right) \sin \theta \cos\left(\frac{\sqrt{3}t}{2}\right) \right) \end{bmatrix} \\ A_3 &= \begin{bmatrix} \sqrt{3} \sin \theta \left(\cos \theta \cos\left(\frac{\sqrt{3}t}{2}\right) - \frac{1}{2} \sin\left(\frac{\sqrt{3}t}{2}\right) \sin \theta \right) \\ -\sin \theta \left(\frac{3}{2} \sin\left(\frac{\sqrt{3}t}{2}\right) \sin \theta \cos\left(\frac{\sqrt{3}t}{2}\right) + \cos \theta \right) \\ \cos^2 \theta + \sin^2 \theta \left(\frac{3}{4} \sin^2\left(\frac{\sqrt{3}t}{2}\right) - \frac{3}{4} \cos^2\left(\frac{\sqrt{3}t}{2}\right) - \frac{1}{4} \right) \end{bmatrix} \end{aligned}$$



Şekil 3.1 Tüp yüzeyi

olmak üzere,

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

şeklindedir. Bu matrisi teorem 3.1'de kullanarak

$$\begin{aligned} X(t, \theta) &= \alpha(t) + r(t)AN(t) \\ &= \left(\frac{t}{2} - r \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2\theta, \sin\left(\frac{\sqrt{3}t}{2}\right) - r \cos 2\theta \sin\left(\frac{\sqrt{3}t}{2}\right) + r \frac{1}{2} \sin 2\theta \cos\left(\frac{\sqrt{3}t}{2}\right) \right. \\ &\quad \left. , \cos\left(\frac{\sqrt{3}t}{2}\right) - r \cos 2\theta \cos\left(\frac{\sqrt{3}t}{2}\right) - r \frac{1}{2} \sin 2\theta \sin\left(\frac{\sqrt{3}t}{2}\right) \right) \end{aligned} \quad (3.19)$$

tüp yüzeyi elde edilir. $r = \frac{1}{2}$ için bu tüp yüzeyi şekil 3.1'de gösterilebilir (Aslan ve Yaylı 2016a).

3.2 Split Kuaterniyonlar ve Minkowski 3 Uzayında Kanal Yüzeyleri

Çalışmanın bu kısmında da Minkowski uzayında kanal yüzeylerinin merkez eğrisinin birim tanjant vektöründen yararlanılarak iki birim split timelike kuaterniyon verilecektir. Merkez eğrisi, binormal vektörü spacelike olan spacelike eğri olan kanal yüzeyleri ve tüp yüzeyleri, birim kuaterniyon ile merkez eğrisinin binormal vektörünün (skalersiz split kuaterniyon) split kuaterniyon çarpımından elde edilecektir. Benzer şekilde, merkez eğrisi timelike olan kanal yüzeyleri elde edilecektir. Ayrıca, bu birim kuaterniyonlar için linear dönüşüme karşılık gelen (2.22) matrisleri kullanarak kanal yüzeyleri ve tüp yüzeyleri homotetik hareket ile verilecektir. Son olarak, elde edilen sonuçlar kullanılarak iki örnek verilecektir.

3.2.1 Merkez spacelike eğri kanal yüzeyleri ve split kuaterniyonlar

Uyarı 3.2 Minkowski uzayında, birim hızlı spacelike $\alpha(t)$ eğrisinin birim tanjant vektörü $T(t) = (T_1(t), T_2(t), T_3(t))$ ve $\langle T(t), T(t) \rangle_L > 0$ olmak üzere, vektörel kısmı spacelike olan birim timelike split kuaterniyon $q_1(t, \theta) = \cosh \theta - \sinh \theta T(t)$ için dönüşüme karşılık gelen (2.34) matris aşağıdaki biçimde verilebilir.

$$\begin{aligned}
 A_1 &= \begin{bmatrix} \cosh^2 \theta + \sinh^2 \theta (T_1^2 + T_2^2 + T_3^2) \\ 2 \sinh \theta (\sinh \theta T_1 T_2 - \cosh \theta T_3) \\ 2 \sinh \theta (\sinh \theta T_1 T_3 + \cosh \theta T_2) \end{bmatrix}, \\
 A_2 &= \begin{bmatrix} -2 \sinh \theta (\cosh \theta T_3 + \sinh \theta T_1 T_2) \\ \cosh^2 \theta + \sinh^2 \theta (T_3^2 - T_1^2 - T_2^2) \\ -2 \sinh \theta (\cosh \theta T_1 + \sinh \theta T_2 T_3) \end{bmatrix} \\
 A_3 &= \begin{bmatrix} 2 \sinh \theta (\cosh \theta T_2 - \sinh \theta T_1 T_3) \\ 2 \sinh \theta (\cosh \theta T_1 - \sinh \theta T_2 T_3) \\ \cosh^2 \theta + \sinh^2 \theta (T_2^2 - T_3^2 - T_1^2) \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

olmak üzere,

$$R_{q_1} = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

burada $T(t)$ vektörü R_{q_1} matrisinin dönme eksenini ve $R_{q_1} T(t) = T(t)$ 'dir (Aslan ve Yaylı 2016b).

Teorem 3.4 $\alpha(t)$ binormal vektörü spacelike olan birim hızlı spacelike eğri (2.27) $C(t, \theta)$ kanal yüzeyinin merkez eğrisi ve $q_1(t, \theta) = \cosh \theta - \sinh \theta T(t)$ vektörel kısmı spacelike olan birim timelike split kuaterniyon olmak üzere, $q_1(t, \theta) *_L B(t)$ split kuaterniyon çarpımından yararlanarak sırasıyla (2.27) kanal yüzeyi ve (2.28) tüp yüzeyi

$$C(t, \theta) = \alpha(t) + r(t)r'(t)T(t) \pm r(t)\sqrt{1 - r'(t)^2}q_1(t, \theta) *_L B(t) \quad (3.21)$$

$$Tube(t, \theta) = \alpha(t) + r(t)q_1(t, \theta) *_L B(t) \quad (3.22)$$

biçimde edilebilir. Burada $\{T(t), N(t), B(t)\}$, 3-boyutlu Minkowski uzayında $\alpha(t)$ eğrisinin Frenet-Serret çatısıdır (Aslan ve Yaylı 2016b).

İspat. (2.32) split kuaterniyon çarpımı, (2.25) ve (2.26) Lorentz çarpımlarından

$$\begin{aligned}
q_1(t, \theta) *_L B(t) &= (\cosh \theta - \sinh \theta T(t)) *_L B(t) \\
&= (\cosh \theta B(t) - \sinh \theta T(t) \times_L B(t)) \\
&= (\cosh \theta B(t) + \sinh \theta N(t))
\end{aligned} \tag{3.23}$$

eşitliği elde edilir. (3.23) eşitliğini (3.21) ve (3.22) eşitliklerinde yazarak

$$\begin{aligned}
C(t, \theta) &= \alpha(t) + r(t)r'(t)T(t) \pm r(t)\sqrt{1 - r'(t)^2}(\sinh \theta N(t) + \cosh \theta B(t)) \\
Tube(t, \theta) &= \alpha(t) + r(t)(\sinh \theta N(t) + \cosh \theta B(t)).
\end{aligned}$$

eşitlikleri elde edilir. Böylece merkez eğrisi, binormal vektörü spacelike olan birim hızlı spacelike eğri olan kanal yüzeyi ve tüp yüzeyi elde edilir (Aslan ve Yaylı 2016b).

■

Önerme 3.2 $q_1(t, \theta) = \cosh \theta - \sinh \theta T(t)$ vektörel kısmı spacelike olan birim time-like split kuaterniyonu için dönüşümüne karşılık gelen (3.20) matris R_{q_1} ve merkez eğrisi, binormal vektörü spacelike olan birim hızlı spacelike eğri olan kanal yüzeyi $C(t, \theta)$ ve tüp yüzeyi $Tube(t, \theta)$ olmak üzere, teorem 3.4'teki (3.21) ve (3.22) eşitlikler

$$C(t, \theta) = \beta(t) + h(t)R_{q_1}B(t) \tag{3.24}$$

$$Tube(t, \theta) = \alpha(t) + r(t)R_{q_1}B(t) \tag{3.25}$$

olarak yazılabilir. Burada $\beta(t) = \alpha(t) + r(t)r'(t)T(t)$ ve $h(t) = \pm r(t)\sqrt{1 - r'(t)^2}$ 'dir (Aslan ve Yaylı 2016b).

Sonuç 3.2 Merkez eğrisi, binormal vektörü spacelike olan birim hızlı spacelike eğri olan kanal yüzeyi ve tüp yüzeyi sırasıyla homotetik hareket ile aşağıdaki biçimde verilebilir.

$$C(t, \theta) = \beta(t) + h(t)R_{q_1}B(t) \tag{3.26}$$

$$Tube(t, \theta) = \alpha(t) + r(t)R_{q_1}B(t) \tag{3.27}$$

burada R_{q_1} homotetik hareketin ortogonal matrisi, $h(t)$ ve $r(t)$ homotetik hareketin skalaları, $\beta(t)$ ve $\alpha(t)$ konum vektörleri buldukları homotetik hareketin öteleme vektörleridir (Aslan ve Yaylı 2016b).

3.2.2 Merkez timelike eğri kanal yüzeyleri ve split kuaterniyonlar

Uyarı 3.3 Minkowski uzayında, birim hızlı timelike $\alpha(t)$ eğrisinin birim tanjant vektörü $T(t) = (T_1(t), T_2(t), T_3(t))$ ve $\langle T(t), T(t) \rangle_L < 0$ olmak üzere, vektörel kısmı timelike olan birim timelike split kuaterniyonu $q_2(t, \theta) = \cos \theta + \sin \theta T(t)$ için (2.21) dönüşüme karşılık gelen matris aşağıdaki biçimde verilebilir.

$$A_1 = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta + \sin^2 \theta (T_1^2 + T_2^2 + T_3^2) \\ 2 \sin \theta (\sin \theta T_1 T_2 + \cos \theta T_3) \\ 2 \sin \theta (\sin \theta T_1 T_3 + \cos \theta T_2) \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 2 \sin \theta (\cos \theta T_3 - \sin \theta T_1 T_2) \\ \cos^2 \theta + \sin^2 \theta (T_3^2 - T_1^2 - T_2^2) \\ 2 \sin \theta (\cos \theta T_1 - \sin \theta T_2 T_3) \end{bmatrix}$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} -2 \sin \theta (\cos \theta T_2 + \sin \theta T_1 T_3) \\ -2 \sin \theta (\cos \theta T_1 + \sin \theta T_2 T_3) \\ \cos^2 \theta + \sin^2 \theta (T_2^2 - T_3^2 - T_1^2) \end{bmatrix}$$

olmak üzere,

$$R_{q_2} = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \end{bmatrix}. \quad (3.28)$$

burada $T(t)$ vektörü R_{q_2} matrisinin dönme eksenini ve $R_{q_2} T(t) = T(t)$ 'dir (Aslan ve Yaylı 2016b).

Teorem 3.5 $\alpha(t)$ birim hızlı timelike eğri, $C(t, \theta)$ kanal yüzeyinin merkez eğrisi ve $q_2(t, \theta) = \cos \theta + \sin \theta T(t)$ vektörel kısmı timelike olan birim timelike split kuaterniyon olmak üzere, $q_2(t, \theta) *_L N(t)$ split kuaterniyon çarpımından yararlanarak sırasıyla (2.29) kanal yüzeyi ve (2.30) tüp yüzeyi,

$$C(t, \theta) = \alpha(t) + r(t)r'(t)T(t) \pm r(t)\sqrt{1 + r'(t)^2}q_2(t, \theta) *_L N(t), \quad (3.29)$$

$$Tube(t, \theta) = \alpha(t) + r(t)q_2(t, \theta) *_L N(t) \quad (3.30)$$

biçimde elde edilir. Burada $\{T(t), N(t), B(t)\}$, $\alpha(t)$ eğrisinin Frenet-Serret çatısıdır (Aslan ve Yaylı 2016b).

İspat. (2.32) split kuaterniyon çarpımı, (2.25) ve (2.26) Lorentz çarpımlarından

$$\begin{aligned}
q_2(t, \theta) \times_L N(t) &= (\cos \theta + \sin \theta T(t)) *_L N(t) \\
&= (\cos \theta N(t) + \sin \theta T(t) \times_L N(t)) \\
&= (\cos \theta N(t) + \sin \theta B(t))
\end{aligned} \tag{3.31}$$

eşitliği elde edilir. (3.31) eşitliğini (3.29) ve (3.30) eşitliklerinde yazarak

$$\begin{aligned}
C(t, \theta) &= \alpha(t) + r(t)r'(t)T(t) \pm r(t)\sqrt{1+r'(t)^2}(\cos \theta N(t) + \sin \theta B(t)), \\
Tube(t, \theta) &= \alpha(t) + r(t)(\cos \theta N(t) + \sin \theta B(t))
\end{aligned}$$

merkez eğrisi, birim hızlı timelike eğri olan kanal yüzeyi ve tüp yüzeyi elde edilir (Aslan ve Yaylı 2016b). ■

Önerme 3.3 Vektörel kısmı timelike olan birim timelike split kuaterniyon $q_2(t, \theta) = \cos \theta + \sin \theta T(t)$ için dönüşümüne karşılık gelen (3.28) matris R_{q_2} ve merkez eğrisi, birim hızlı timelike eğri olan kanal yüzeyi $C(t, \theta)$ ve tüp yüzeyi $Tube(t, \theta)$ olmak üzere, teorem 3.5'teki (3.29) ve (3.30) eşitlikleri

$$C(t, \theta) = \beta(t) + h(t)R_{q_2}N(t) \tag{3.32}$$

$$Tube(t, \theta) = \alpha(t) + r(t)R_{q_2}N(t) \tag{3.33}$$

biçiminde verilebilir. Burada $\beta(t) = \alpha(t) + r(t)r'(t)T(t)$, $h(t) = \pm r(t)\sqrt{1+r'(t)^2}$ 'dir (Aslan ve Yaylı 2016b).

Sonuç 3.3 Merkez eğrisi, birim hızlı spacelike eğri olan sırasıyla kanal yüzeyi $C(t, \theta)$ ve tüp yüzeyi $Tube(t, \theta)$ homotetik hareket ile aşağıdaki biçimde verilebilir.

$$C(t, \theta) = \beta(t) + h(t)R_{q_2}N(t) \tag{3.34}$$

$$Tube(t, \theta) = \alpha(t) + r(t)R_{q_2}N(t) \tag{3.35}$$

burada R_{q_2} homotetik hareketin ortogonal matrisi, $h(t)$ ve $r(t)$ homotetik hareketin skalaları, $\beta(t)$ ve $\alpha(t)$ konum vektörleri buldukları homotetik hareketin öteleme vektörleridir (Aslan ve Yaylı 2016b).

Sonuç 3.4 $q_1(t, \theta)$ ve $q_2(t, \theta)$ birim timelike kuaterniyonları, $T(t)$ birim tanjant vektörden elde edildi ancak farklı kuaterniyonlardır. Tanım 2.15'teki kanal yüzeyleri $q_1(t, \theta)$ birim kuaterniyonu ve $B(t)$ binormal vektöründen elde edilirken tanım 2.16'daki kanal yüzeyleri $q_2(t, \theta)$ birim kuaterniyonu ve $N(t)$ normal vektöründen elde edildi. Böylece, bu iki kanal yüzeyi farklı $q_1(t, \theta)$ ve $q_2(t, \theta)$ kuaterniyonlarından, farklı $B(t)$ ve $N(t)$ normal vektörlerden elde edildi (Aslan ve Yaylı 2016b).

Sonuç 3.5 Tanım 2.15'teki kanal yüzeyleri ve $q_1(t, \theta)$ kuaterniyonu, hiperbolik açı ile ifade edildi. Benzer şekilde, tanım 2.16'daki kanal yüzeyleri ve $q_2(t, \theta)$ kuaterniyonu, küresel açı ile ifade edildi. Bundan dolayı, kanal yüzeyleri ve birim kuaterniyonlar arasında yakın bir ilişki olduğu söylenebilir (Aslan ve Yaylı 2016b).

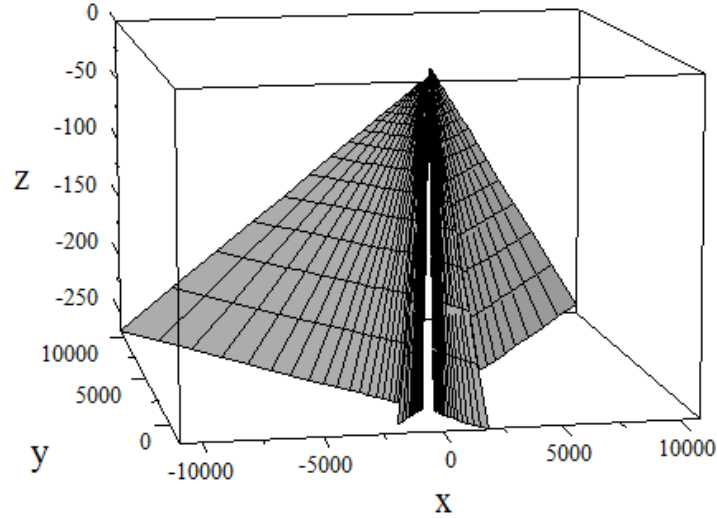
Örnek 3.2 Binormal vektörü spacelike olan birim hızlı spacelike

$\alpha(t) = (\cosh \frac{t}{\sqrt{2}}, \sinh \frac{t}{\sqrt{2}}, \frac{t}{\sqrt{2}})$ eğrisinin Frenet çatısı

$$\begin{aligned} T(t) &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \sinh \frac{t}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \cosh \frac{t}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \\ N(t) &= \left(\cosh \frac{t}{\sqrt{2}}, \sinh \frac{t}{\sqrt{2}}, 0 \right) \\ B(t) &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \sinh \frac{t}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \cosh \frac{t}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right) \end{aligned}$$

olmak üzere, vektörel kısmı spacelike olan birim timelike kuaterniyonu $q_1(t, \theta) = \cosh \theta - \sinh \theta T(t)$ için dönüşümüne karşılık gelen (3.20) matris aşağıdaki biçimdedir.

$$\begin{aligned} A_1 &= \begin{bmatrix} \cosh^2 \theta + \frac{\sinh^2 \theta}{2} (\sinh \beta + \cosh^2 \beta + 1) \\ \sinh \theta (\sinh \theta \sinh \beta \cosh \beta - \sqrt{2} \cosh \theta) \\ \sinh \theta (\sqrt{2} \sinh \theta \cosh \beta + \cosh \theta \sinh \beta) \end{bmatrix}, \\ A_2 &= \begin{bmatrix} -\sinh \theta (\sqrt{2} \cosh \theta + \sinh \theta \sinh \beta \cosh \beta) \\ \cosh^2 \theta + \frac{\sinh^2 \theta}{2} (1 - \sinh^2 \beta - \cosh^2 \beta) \\ -\sinh \theta (\sqrt{2} \cosh \theta \sinh \beta + \sinh \theta \cosh \beta) \end{bmatrix} \\ A_3 &= \begin{bmatrix} \sinh \theta (\sqrt{2} \cosh \theta \cosh \beta - \sinh \theta \sinh \beta) \\ \sinh \theta (\sqrt{2} \cosh \theta \sinh \beta - \sinh \theta \cosh \beta) \\ \cosh^2 \theta + \frac{\sinh^2 \theta}{2} (\cosh^2 \beta - \sinh^2 \beta - 1) \end{bmatrix} \end{aligned}$$



Şekil 3.2 Spacelike eğri üzerinde tüp yüzeyi

olmak üzere,

$$R_{q_1} = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \end{bmatrix}$$

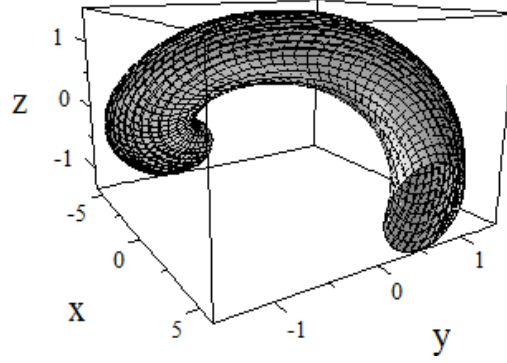
(3.25) eşitliğini R_{q_1} matrisi ve $B(t) = (\frac{1}{\sqrt{2}} \sinh \frac{t}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \cosh \frac{t}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$ binormal vektörü için kullanarak

$$\begin{aligned} Tube(t, \theta) &= \alpha(t) + r(t)R_{q_1}B(t) \\ &= (\cosh \frac{t}{\sqrt{2}} + r \cosh \frac{t}{\sqrt{2}} \sinh \theta + r \frac{1}{\sqrt{2}} \sinh \frac{t}{\sqrt{2}} \cosh \theta, \\ &\quad \sinh \frac{t}{\sqrt{2}} + r \sinh \frac{t}{\sqrt{2}} \sinh \theta + r \cosh \frac{t}{\sqrt{2}} \cosh \theta, \frac{t}{\sqrt{2}} - \cosh \theta) \end{aligned}$$

tüp yüzeyi elde edilir. Bu tüp yüzeyi, $r = 5$ için şekil 3.2'de gösterilebilir (Aslan ve Yaylı 2016b).

Örnek 3.3 Birim hızlı timelike $\alpha(t) = (\frac{\sqrt{5}t}{2}, \sin \frac{t}{2}, \cos \frac{t}{2})$ eğrisinin Frenet çatısı

$$\begin{aligned} T(t) &= (\frac{\sqrt{5}}{2}, \frac{1}{2} \cos \frac{t}{2}, -\frac{1}{2} \sin \frac{t}{2}) \\ N(t) &= (0, -\sin \frac{t}{2}, -\cos \frac{t}{2}) \\ B(t) &= (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{5}}{2} \cos \frac{t}{2}, -\frac{\sqrt{5}}{2} \sin \frac{t}{2}). \end{aligned}$$



Şekil 3.3 Timelike eğri üzerinde tüp yüzeyi

olmak üzere, vektörel kısmı timelike olan birim timelike kuaterniyonu $q_2(t, \theta) = \cos \theta + \sin \theta T(t)$ ve $N(t) = (0, -\sin \frac{t}{2}, -\cos \frac{t}{2})$ için (3.30) eşitliğini kullanarak

$$\begin{aligned}
 Tube(t, \theta) &= \alpha(t) + r(t)q_2(t, \theta) *_L N(t) \\
 &= \alpha(t) + r(t)(\cos \theta N(t) + \sin \theta B(t)) \\
 &= \left(\frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{2}r \sin \theta, \sin \frac{t}{2} - r \cos \theta \sin \frac{t}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}r \sin \theta \cos \frac{t}{2}, \right. \\
 &\quad \left. \cos \frac{t}{2} - r \cos \theta \cos \frac{t}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}r \sin \theta \sin \frac{t}{2}\right)
 \end{aligned}$$

tüp yüzeyi elde edilir. Bu tüp yüzeyini, $r = \frac{1}{2}$ için şekil 3.3'de gösterilebilir (Aslan ve Yaylı 2016b).

3.3 Kuaterniyonlar ve Genelleştirilmiş Sabit Oranlı Yüzeyler

Bu bölümde, genelleştirilmiş sabit oranlı (GSO) yüzeyler bir birim kuaterniyonun ve bir saf (pure) kuaterniyonun çarpımından elde edilerek incelenecektir. GSO yüzeyler, birim kuaterniyon ve bu birim kuaterniyon için (2.21) lineer dönüşüm altında inveryant olduğu gösterilecektir. Ayrıca, bu yüzeylerle ilgili bazı sonuçlar elde edildikten sonra örnekler verilecektir.

Uyarı 3.4 $f(t)$ kresel eğrisinin teğet vektöründen yararlanarak, $q(s, t) = \cos u(s) - \sin u(s)f'(t)$ birim kuaterniyonu tanımlanabilir. $f'(t) = (f'_1(t), f'_2(t), f'_3(t))$ olmak

üzere, $q(s, t)$ birim kuaterniyonu için ϕ lineer dönüşümüne karşılık gelen (2.22) matris aşağıdaki biçimde verilebilir.

$$A_1 = \begin{bmatrix} \cos^2 u + \sin^2 u(f_1'^2 - f_2'^2 - f_3'^2) \\ 2 \sin u(\sin u f_1' f_2' - \cos u f_3') \\ 2 \sin u(\sin u f_1' f_3' + \cos u f_2') \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 2 \sin u(\cos u f_3' + \sin u f_1' f_2') \\ \cos^2 u - \sin^2 u(f_1'^2 - f_2'^2 + f_3'^2) \\ 2 \sin u(\sin u f_2' f_3' - \cos u f_1') \end{bmatrix}$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 2 \sin u(\sin u f_1' f_3' - \cos u f_2') \\ 2 \sin u(\sin u f_2' f_3' + \cos u f_1') \\ \cos^2 u - \sin^2 u(f_1'^2 + f_2'^2 - f_3'^2) \end{bmatrix}$$

olmak üzere,

$$M(s, t) = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \end{bmatrix}. \quad (3.36)$$

$f'(t)$ vektörü M matrisinin dönme eksenini olduğundan aşağıdaki eşitlik verilebilir (Aslan ve Yaylı 2017a).

$$f'(t) = M f'(t). \quad (3.37)$$

Teorem 3.6 $x : S \rightarrow E^3$ GSO bir yüzey olsun. $q(s, t) = \cos u(s) - \sin u(s)f'(t)$ birim kuaterniyon $q_1(s, t) = sf(t)$ ise saf (pure) kuaterniyon olmak üzere, GSO yüzey aşağıdaki biçimde elde edilebilir (Aslan ve Yaylı 2017a).

$$x(s, t) = q(s, t) * q_1(s, t). \quad (3.38)$$

İspat. $q(s, t) = \cos u(s) - \sin u(s)f'(t)$ ve $q_1(s, t) = sf(t)$ kuaterniyon çarpımı alınırsa aşağıdaki sonuç elde edilir.

$$\begin{aligned} q(s, t) * q_1(s, t) &= s \cos u(s)f(t) - s \sin u(s)f'(t) \times f(t) \\ &= s(\cos u(s)f(t) + \sin u(s)f(t) \times f'(t)). \end{aligned} \quad (3.39)$$

Böylece, GSO yüzeyi

$$x(s, t) = q(s, t) * q_1(s, t). \quad (3.40)$$

biçiminde elde edilir. ■

Teorem 3.7 $x : S \longrightarrow E^3$ GSO bir yüzey, $q(s, t) = \cos u(s) - \sin u(s)f'(t)$ birim kuaterniyon ve $q_1(s, t) = sf(t)$ saf (pure) kuaterniyon (3-boyutlu öklid uzayında bir yüzey) olmak üzere,

$$q^n(s, t) * x(s, t) = q^{(n+1)}(s, t) * q_1(s, t) \quad (3.41)$$

ifadesi bir GSO yüzey ve $n \in R$ 'dir (Aslan ve Yaylı 2017a).

İspat. $q^n(s, t) = \cos(nu) - \sin(nu)f'(t)$ ve $x(s, t) = s(\cos uf + \sin uf \times f')$ için kuaterniyon çarpımı aşağıdaki biçimdedir.

$$\begin{aligned} q^n(s, t) * x(s, t) &= s \cos(nu) \cos uf(t) + \cos(nu) \sin uf(t) \times f'(t) \\ &\quad - s \sin(nu) \cos uf'(t) \times f(t) - s \sin(nu) \sin uf'(t) (f(t) \times f'(t)) \end{aligned} \quad (3.42)$$

$f(t)$ eğrisinin Sabban çatısı özelliklerinden

$$f'(t) \times f(t) = -f(t) \times f'(t), f'(t) \times (f(t) \times f'(t)) = f(t). \quad (3.43)$$

eşitlikleri (3.42) denkleminde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} q^n(s, t) * x(s, t) &= s(\cos(nu) \cos u - \sin(nu) \sin u) f(t) \\ &\quad + s(\cos(nu) \sin u + \sin(nu) \cos u) f(t) \times f'(t) \\ &= s(\cos((n+1)u) f(t) + \sin((n+1)u) f(t) \times f'(t)). \end{aligned} \quad (3.44)$$

eşitliği elde edilir. Böylece, (3.44) eşitliğinin bir GSO yüzey olduğu kolayca görülebilir. Ayrıca,

$$\begin{aligned} q^n(s, t) * x(s, t) &= q^n(s, t) * q(s, t) * q_1(s, t) \\ &= q^{(n+1)}(s, t) * q_1(s, t). \end{aligned} \quad (3.45)$$

eşitliği de elde edilebilir. ■

Önerme 3.4 $q(s, t) = \cos u(s) - \sin u(s)f'(t)$ birim kuaterniyonu için ϕ lineer dönüşümüne karşılık gelen matris $M(s, t)$ olmak üzere GSO yüzeyleri, $x(s, t)$ yüzeyinin konum vektörü ve $M(s, t)$ ortogonal matrisiyle aşağıdaki biçimde elde edilebilir.

$$Ax(s, t), \quad (3.46)$$

burada $x(s, t)$ GSO yüzeydir (Aslan ve Yaylı 2017a).

Önerme 3.5 $q_2(s, t) = sq(s, t)$ olmak üzere, $x(s, t)$ GSO yüzeyi homotetik hareket ile aşağıdaki biçimde elde edilebilir.

$$\begin{aligned} x(s, t) &= q(s, t) * q_1(s, t), \\ &= q_2(s, t) * f(t). \end{aligned} \quad (3.47)$$

Ayrıca, GSO yüzey aşağıdaki biçimde elde edilebilir.

$$\begin{aligned} x(s, t) &= Aq_1(s, t), \\ &= sAf(t). \end{aligned} \quad (3.48)$$

burda s ve A sırasıyla homotetik hareketin skalası ve ortogonal matrisidir (Aslan ve Yaylı 2017a).

Sonuç 3.6 $q(s, t)$ birim kuaterniyonu $x(s, t)$ ve $q_1(s, t)$ yüzeylerini $sp\{f'(t)\}$ eksenini etrafında $u(s)$ açısı kadar döndürür (Aslan ve Yaylı 2017a).

Sonuç 3.7 Teorem 3.7'den; GSO yüzeyler $q(s, t)$ birim kuaterniyonu ile döndürüldüğünde yine bir GSO yüzey elde edilir. Böylece, GSO yüzeyler $q(s, t)$ birim kuaterniyonu altında invarianttır. Ayrıca, GSO yüzeyler ϕ lineer dönüşümü altında da invarianttır (Aslan ve Yaylı 2017a).

Sonuç 3.8 GSO yüzeyler, $f(t)$ eğrisinin $q_2(s, t)$ homotetik hareketiyle $sp\{f'(t)\}$ eksenini etrafında $u(s)$ açısı kadar döndürülmesiyle elde edilebilir (Aslan ve Yaylı 2017a).

Örnek 3.4 Eğer $p(t) = 2 \arctan e^t$ ise $f(t) = (\cos p(t) \cos t, \cos p(t) \sin t, \sin p(t))$ eğrisi S^2 üzerinde bir küresel eğridir (Fu ve Munteanu 2014). Bu eğrinin Sabban çatısı aşağıdaki biçimde elde edilebilir.

$$\begin{aligned} f(t) &= (\cos p(t) \cos t, \cos p(t) \sin t, \sin p(t)), \\ f'(t) &= (-p' \sin p \cos t - \cos p \sin t, -p' \sin p \sin t + \cos p \cos t, p' \cos p), \end{aligned} \quad (3.49)$$

$$f(t) \times f'(t) = (p' \sin t - \cos p \sin p \cos t, -p' \cos t - \cos p \sin p \sin t, \cos^2 p).$$

Böylece (2.9) denkleminde GSO yüzey

$$\begin{aligned} x(s, t) &= (s \cos u \cos p \cos t + sp' \sin u \sin t - s \sin u \cos p \sin p \cos t, \\ &\quad s \cos u \cos p \sin t - sp' \sin u \cos t - s \sin u \cos p \sin p \sin t, \\ &\quad s \cos u \sin p + s \sin u \cos^2 p). \end{aligned} \quad (3.50)$$

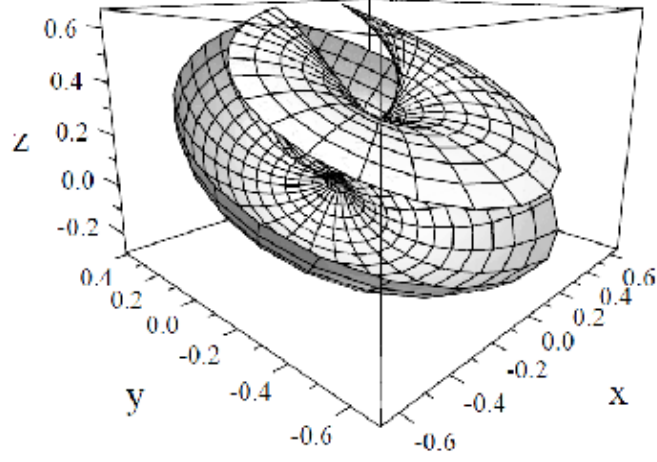
biçiminde yazılabilir. (3.41) eşitliğinde $n = 1$ için GSO yüzey aşağıdaki biçimde elde edilebilir.

$$\begin{aligned} q(s, t) * x(s, t) &= (s \cos 2u \cos p \cos t + sp' \sin 2u \sin t - s \sin 2u \cos p \sin p \cos t, \\ &\quad s \cos 2u \cos p \sin t - sp' \sin 2u \cos t - s \sin 2u \cos p \sin p \sin t, \\ &\quad s \cos 2u \sin p + s \sin 2u \cos^2 p). \end{aligned} \quad (3.51)$$

$u(s) = s$, $p(t) = (2 \arctan e^t)$ ve $p'(t) = (\sin(2 \arctan e^t))$ için GSO yüzeyi şekil 3.4'de verilebilir (Aslan ve Yaylı 2017a).

Örnek 3.5 $f(t) = (\frac{1}{3} \cos 3t, \frac{1}{3} \sin 3t, \frac{2\sqrt{2}}{3})$ küresel eğrisinin Sabban çatısı

$$\begin{aligned} f(t) &= (\frac{1}{3} \cos 3t, \frac{1}{3} \sin 3t, \frac{2\sqrt{2}}{3}), \\ f'(t) &= (-\sin 3t, \cos 3t, 0), \\ f(t) \times f'(t) &= (-\frac{2\sqrt{2}}{3} \cos 3t, -\frac{2\sqrt{2}}{3} \sin 3t, \frac{1}{3}). \end{aligned} \quad (3.52)$$



Şekil 3.4 GSO yüzey-1

biçimindedir. Böylece, $q(s, t) = \cos u(s) - \sin u(s)f'(t)$ ve $q_1(s, t) = sf(t)$ için (3.48) denkleminde GSO yüzey aşağıdaki biçimde elde edilebilir.

$$A_1 = \begin{bmatrix} \cos^2 u + \sin^2 u (\sin^2 3t - \cos^2 3t) \\ -2 \sin^2 u \sin 3t \cos 3t \\ 2 \sin u \cos u \cos 3t \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} -2 \sin^2 u \sin 3t \cos 3t \\ \cos^2 u - \sin^2 u (\sin^2 3t - \cos^2 3t) \\ 2 \sin u \cos u \sin 3t \end{bmatrix}$$

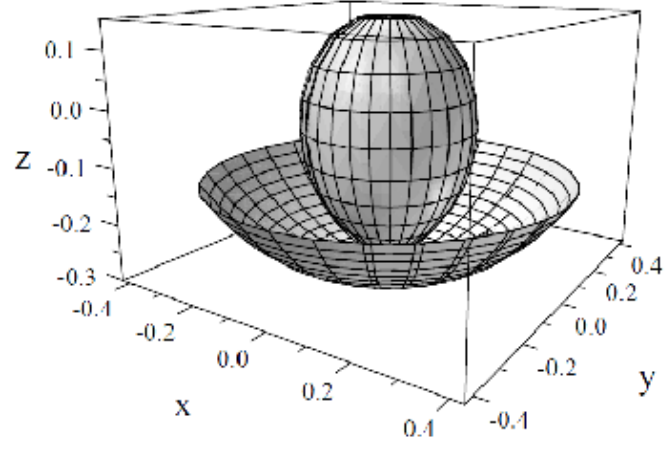
$$A_3 = \begin{bmatrix} -2 \sin u \cos u \cos 3t \\ -2 \sin u \cos u \sin 3t \\ \cos^2 u - \sin^2 u \end{bmatrix}$$

olmak üzere,

$$x(s, t) = s \begin{bmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \cos 3t \\ \frac{1}{3} \sin 3t \\ \frac{2\sqrt{2}}{3} \end{bmatrix} \quad (3.53)$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{3}s \cos 2u \cos 3t - \frac{2\sqrt{2}}{3}s \sin 2u \cos 3t \\ \frac{1}{3}s \cos 2u \sin 3t - \frac{2\sqrt{2}}{3}s \sin 2u \sin 3t \\ \frac{2\sqrt{2}}{3}s \cos 2u + \frac{1}{3}s \sin 2u \end{bmatrix}. \quad (3.54)$$

$u = \frac{1}{2s}$ için GSO oranlı yüzey şekil 3.5'de verilebilir (Aslan ve Yaylı 2017a).



Şekil 3.5 GSO yüzey-2

4. ŞEKİL OPERATÖRÜNÜN KUATERNİYONİK İFADESİ

Çalışmanın bu bölümünde, yüzeylerin incelenmesinde önemli bir yeri olan şekil operatörü kuaterniyonlarla ifade edilerek incelenmiştir. Yüzeydeki bir eğrinin Darboux çatısı kullanılarak elde edilen şekil operatöründen kuaterniyon operatörü elde edilmiştir. Daha sonra, bu operatörden yararlanarak kuaterniyonik şekil operatörü tanımlanmıştır. Kuaterniyonik şekil operatörü birim kuaterniyonla ifade edildikten sonra, kuaterniyonik şekil operatörü bu birim kuaterniyona karşılık gelen ortogonal matrisle ifade edilmiştir. Böylece, kuaterniyonik şekil operatörü ortogonal matris yardımıyla homotetik hareket ile ifade edilmiştir. Ayrıca, Gauss eğrilik ve ortalama eğrilik hem kuaterniyonik şekil operatörüyle hem de homotetik hareket ile elde edilmiştir. Son olarak, yüzeyler üzerinde asimptotik eğri ve geodezik eğri gibi bazı eğriler boyunca kuaterniyonik şekil operatörü matris ile elde edildikten sonra çalışmanın bu bölümünde elde edilen sonuçlar kullanılarak bir örnek verilmiştir.

Uyarı 4.1 $x : D \subset R^2 \rightarrow M \subset R^3$, parametreleri "s ve t" olan bir yüzey ve $\alpha(s)$ eğrisi M yüzeyinde birim hızlı bir eğri olmak üzere, $\alpha'(s)$ hız vektörü aşağıdaki biçimde verilebilir.

$$\frac{d\alpha(s)}{ds} = \alpha'(s) = T(s), \quad (4.1)$$

burada $T(s)$ vektörü M yüzeyine teğet birim tanjant vektördür. $T(s)$ tanjant vektörüyle şekil operatörü

$$\begin{aligned} S(T(s)) &= -\nabla_{T(s)}U \\ &= -\nabla_{\frac{d\alpha(s)}{ds}}U \\ &= -\nabla_{\alpha'(s)}U \\ &= -\frac{dU}{ds}. \end{aligned} \quad (4.2)$$

biçiminde elde edilebilir (O'Neill 2006). (2.15) Darboux çatısı vektörlerinin türevin-

den yararlanarak şekil operatörü Darboux çatısıyla aşağıdaki biçimde elde edilebilir.

$$\begin{aligned}
S(T(s)) &= -\frac{dU}{ds} \\
&= -(-k_n(s)T(s) - t_g(s)Y(s)) \\
&= k_n(s)T(s) + t_g(s)Y(s),
\end{aligned} \tag{4.3}$$

burada $\{T, Y, U\}$, k_n ve t_g sırasıyla Darboux çatısı, normal eğrilik ve geodezik tor-siyondur (Aslan ve Yaylı 2017b).

Teorem 4.1 $x : D \subset R^2 \rightarrow M \subset R^3$, parametreleri "s ve t" olan bir yüzey olsun. $\alpha(s)$ ve $\beta(t)$ eğrileri M yüzeyinde birim hızlı eğriler olsun. $\alpha(s)$ ve $\beta(t)$ eğrilerinin teğet vektörleri sırasıyla $T(s)$ ve $T(t)$ olmak üzere, bu eğriler boyunca sırasıyla $S(T(s)) = k_n(s)T(s) + t_g(s)Y(s)$ ve $S(T(t)) = k_n(t)T(t) + t_g(t)Y(t)$ Darboux çatısıyla şekil operatörlerinden yararlanarak Gauss eğriliği K ve ortalama eğril-iği H aşağıdaki biçimde elde edilebilir.

$$K = k_n(s)k_n(t) + t_g(s)t_g(t) + (k_n(s)t_g(t) - k_n(t)t_g(s)) \cot \theta(s, t) \tag{4.4}$$

$$H = \frac{k_n(t) - (k_n(s) \cos 2\theta(s, t) + t_g(s) \sin 2\theta(s, t))}{2 \sin^2 \theta(s, t)}, \tag{4.5}$$

burada $\theta(s, t)$ açısı $T(s)$ ve $T(t)$ vektörleri arasındaki açıdır (Aslan ve Yaylı 2017b).

İspat. (2.11) eşitliğinden yararlanarak

$$K = \frac{\langle S(T(s)), T(s) \rangle \langle S(T(t)), T(t) \rangle - \langle S(T(s)), T(t) \rangle \langle S(T(t)), T(s) \rangle}{\langle T(s), T(s) \rangle \langle T(t), T(t) \rangle - \langle T(s), T(t) \rangle^2} \tag{4.6}$$

eşitliğinde (4.3) Darboux çatısıyla şekil operatörü kullanılacaktır. Darboux çatısıyla şekil operatöründen

$$\langle S(T(s)), T(s) \rangle = k_n(s) \tag{4.7}$$

$$\langle S(T(t)), T(t) \rangle = k_n(t) \tag{4.8}$$

eşitlikleri elde edilir. Ayrıca, $T(s)$ ve $T(t)$ teğet vektörlerinden

$$\langle T(s), T(s) \rangle = 1, \quad \langle T(t), T(t) \rangle = 1, \quad \langle T(s), T(t) \rangle = \cos \theta(s, t) \tag{4.9}$$

eşitlikleri elde edilir. (4.7), (4.8) ve (4.9) eşitlikleri (4.6) eşitliğinde yazılarak

$$K = \frac{k_n(s)k_n(t) - \langle S(T(s)), T(t) \rangle \langle S(T(t)), T(s) \rangle}{1 - \cos^2 \theta(s, t)} \quad (4.10)$$

eşitliği elde edilir. Şimdi $\langle S(T(s)), T(t) \rangle$ eşitliğini aşağıdaki biçimde elde edebiliriz.

$$\begin{aligned} \langle S(T(s)), T(t) \rangle &= \langle k_n(s)T(s) + t_g(s)Y(s), T(t) \rangle \\ &= k_n(s) \langle T(s), T(t) \rangle + t_g(s) \langle Y(s), T(t) \rangle \end{aligned} \quad (4.11)$$

eşitliğindeki $\langle Y(s), T(t) \rangle$ iç çarpımı aşağıdaki biçimde elde edilebilir.

$$\begin{aligned} \langle Y(s), T(t) \rangle &= \langle U \times T(s), T(t) \rangle \\ &= \langle U, T(s) \times T(t) \rangle \\ &= \left\langle \frac{T(s) \times T(t)}{\|T(s) \times T(t)\|}, T(s) \times T(t) \right\rangle \\ &= \|T(s) \times T(t)\| \end{aligned} \quad (4.12)$$

$T(s)$ ve $T(t)$ birim vektörler olduğundan

$$\langle T(s), T(t) \rangle = \cos \theta(s, t) \quad (4.13)$$

$$\langle Y(s), T(t) \rangle = \|T(s) \times T(t)\| = \sin \theta(s, t) \quad (4.14)$$

eşitlikleri elde edilir. (4.13) ve (4.14) eşitlikleri (4.11) eşitliğinde yazılarak

$$\langle S(T(s)), T(t) \rangle = k_n(s) \cos \theta(s, t) + t_g(s) \sin \theta(s, t) \quad (4.15)$$

eşitliği elde edilir. Benzer bir şekilde $\langle T(s), S(T(t)) \rangle$ eşitliği aşağıdaki biçimde elde edilebilir.

$$\begin{aligned} \langle T(s), S(T(t)) \rangle &= \langle T(s), k_n(t)T(t) + t_g(t)Y(t) \rangle \\ &= k_n(t) \langle T(s), T(t) \rangle + t_g(t) \langle T(s), Y(t) \rangle \end{aligned} \quad (4.16)$$

eşitliğindeki $\langle T(s), Y(t) \rangle$ eşitliği aşağıdaki biçimde elde edilebilir.

$$\begin{aligned}
\langle T(s), Y(t) \rangle &= \langle T(s), U \times T(t) \rangle \\
&= \langle U \times T(t), T(s) \rangle \\
&= \langle U, T(t) \times T(s) \rangle \\
&= \left\langle \frac{T(s) \times T(t)}{\|T(s) \times T(t)\|}, T(t) \times T(s) \right\rangle \\
&= \left\langle \frac{T(s) \times T(t)}{\|T(s) \times T(t)\|}, -T(s) \times T(t) \right\rangle \\
&= -\|T(s) \times T(t)\| \\
&= -\sin \theta(s, t).
\end{aligned} \tag{4.17}$$

(4.13) ve (4.17) eşitlikleri (4.16) eşitliğinde yazılarak

$$\langle T(s), S(T(t)) \rangle = k_n(t) \cos \theta(s, t) - t_g(t) \sin \theta(s, t) \tag{4.18}$$

eşitliği elde edilir. Şimdi (4.15) ve (4.18) eşitlikleri (4.10) eşitliğinde yerine yazılarak

$$\begin{aligned}
K &= \frac{k_n(s)k_n(t) - (k_n(s) \cos \theta + t_g(s) \sin \theta)(k_n(t) \cos \theta - t_g(t) \sin \theta)}{1 - \cos^2 \theta} \\
&= \frac{k_n(s)k_n(t) - k_n(s)k_n(t) \cos^2 \theta + (k_n(s)t_g(t) - k_n(t)t_g(s)) \cos \theta \sin \theta + t_g(s)t_g(t) \sin^2 \theta}{\sin^2 \theta} \\
&= k_n(s)k_n(t) + t_g(s)t_g(t) + (k_n(s)t_g(t) - k_n(t)t_g(s)) \cot \theta
\end{aligned} \tag{4.19}$$

(4.4) eşitliği elde edilir. Benzer şekilde (2.13) eşitliğinden yararlanarak

$$H = \frac{\langle T(t), T(t) \rangle \langle S(T(s)), T(s) \rangle + \langle T(s), T(s) \rangle \langle S(T(t)), T(t) \rangle - 2 \langle T(s), T(t) \rangle \langle S(T(s)), T(t) \rangle}{2(\langle T(s), T(s) \rangle \langle T(t), T(t) \rangle - \langle T(s), T(t) \rangle^2)} \tag{4.20}$$

eşitliğinde (4.3) Darboux çatisıyla şekil operatörü kullanılacaktır. (4.7), (4.8), (4.15) ve (4.18) eşitlikleri (4.20) eşitliğinde yazılarak

$$\begin{aligned}
H &= \frac{k_n(s) + k_n(t) - 2 \cos \theta (k_n(s) \cos \theta + t_g(s) \sin \theta)}{2(1 - \cos^2 \theta)} \\
&= \frac{k_n(s) + k_n(t) - 2 \cos \theta (k_n(s) \cos \theta + t_g(s) \sin \theta)}{2 \sin^2 \theta} \\
&= \frac{k_n(s)(1 - 2 \cos^2 \theta) + k_n(t) - 2 t_g(s) \cos \theta \sin \theta}{2 \sin^2 \theta} \\
&= \frac{k_n(t) - (k_n(s) \cos 2\theta + t_g(s) \sin 2\theta)}{2 \sin^2 \theta}
\end{aligned} \tag{4.21}$$

(4.5) eşitliği elde edilir. ■

Teorem 4.2 $x : D \subset R^2 \rightarrow M \subset R^3$, parametreleri "s ve t" olan bir yüzey ve $\alpha(s)$ eğrisi M yüzeyi üzerinde birim hızlı bir eğri olmak üzere, $Q(s) = k_n(s) + t_g(s)U(s)$ kuaterniyon operatörü kullanılarak $\alpha(s)$ eğrisi boyunca (4.3) Darboux çatısıyla şekil operatörü aşağıdaki biçimde elde edilebilir.

$$S(T(s)) = Q(s) * T(s) \quad (4.22)$$

burada $\{T(s), Y(s), U(s)\}$ Darboux çatısı, * kuaterniyon çarpımı ve $T(s)$ saf (pure) kuaterniyondur (R^3 3-boyutlu vektör uzayında bir vektördür) (Aslan ve Yaylı 2017b).

İspat. $Q(s) = k_n(s) + t_g(s)U(s)$ kuaterniyon operatörü ve $T(s)$ saf (pure) kuaterniyonunun * kuaterniyon çarpımından,

$$\begin{aligned} Q(s) * T(s) &= (k_n(s) + t_g(s)U(s)) * T(s) \\ &= -t_g(s) \langle U(s), T(s) \rangle + k_n(s)T(s) + t_g(s)U(s) \times T(s) \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. $\langle U(s), T(s) \rangle = 0$ ve $U(s) \times T(s) = Y(s)$ eşitliklerinden

$$\begin{aligned} Q(s) * T(s) &= k_n(s)T(s) + t_g(s)Y(s) \\ &= S(T(s)). \end{aligned}$$

böylece, Darboux çatısıyla şekil operatörü elde edilir. ■

Uyarı 4.2 Teorem 4.2'de görüldüğü gibi Q kuaterniyon operatörü ve S şekil operatörü T tanjant vektörü üzerinde aynı işleve sahiptir. Bundan sonra, Q kuaterniyon operatörüne kuaterniyonik şekil operatörü denilecektir.(Aslan ve Yaylı 2017b).

Önerme 4.1 Kuaterniyonik şekil operatörü, $p(s) = \cos 2\varphi(s) + \sin 2\varphi(s)U(s)$ birim kuaterniyonuyla aşağıdaki biçimde elde edilebilir (Aslan ve Yaylı 2017b).

$$\begin{aligned} Q(s) &= k_n(s) + t_g(s)U(s) \\ &= \sqrt{k_n^2(s) + t_g^2(s)} \left(\frac{k_n(s)}{\sqrt{k_n^2(s) + t_g^2(s)}} + \frac{t_g(s)}{\sqrt{k_n^2(s) + t_g^2(s)}}U(s) \right) \\ &= \sqrt{k_n^2(s) + t_g^2(s)} (\cos 2\varphi(s) + \sin 2\varphi(s)U(s)) \end{aligned} \quad (4.23)$$

$$= \sqrt{k_n^2(s) + t_g^2(s)}p(s). \quad (4.24)$$

Teorem 4.3 $A(s)$ matrisi, $q(s) = \cos \varphi(s) + \sin \varphi(s)U(s)$ birim kuaterniyonu için ϕ lineer dönüşümüne karşılık gelen matris ve

$$\varphi(s) = \arccos \left(\sqrt{\frac{1}{2} \left(1 + \frac{k_n(s)}{\sqrt{k_n^2(s) + t_g^2(s)}} \right)} \right). \quad (4.25)$$

olmak üzere, kuaterniyonik şekil operatörü homotetik hareket ile aşağıdaki biçimde elde edilebilir.

$$Q(s) * T(s) = h(s)A(s)T(s), \quad (4.26)$$

burada $h(s) = \sqrt{k_n^2(s) + t_g^2(s)}$, $A(s)$ ve "s" sırasıyla homotetik hareketin skalası, ortogonal matrisi ve parametresidir (Aslan ve Yaylı 2017b).

İspat. Tanım 2.11'den görüldüğü gibi $q(s) = \cos \varphi(s) + \sin \varphi(s)U(s)$ birim kuaterniyonu için ϕ lineer dönüşümü, $T(s)$ vektörünü 2φ kadar döndürür. $q(s) = \cos \varphi(s) + \sin \varphi(s)U(s)$ birim kuaterniyonu için ϕ lineer dönüşümüne karşılık gelen matris aşağıdaki biçimdedir.

$$A_1 = \begin{bmatrix} \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi (u_1^2 - u_2^2 - u_3^2) \\ 2 \sin \varphi (\cos \varphi u_3 + \sin \varphi u_1 u_2) \\ 2 \sin \varphi (\sin \varphi u_1 u_3 - \cos \varphi u_2) \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} -2 \sin \varphi (\cos \varphi u_3 - \sin \varphi u_1 u_2) \\ \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi (u_2^2 - u_1^2 - u_3^2) \\ 2 \sin \varphi (\cos \varphi u_1 + \sin \varphi u_2 u_3) \end{bmatrix}$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 2 \sin \varphi (\cos \varphi u_2 + \sin \varphi u_1 u_3) \\ 2 \sin \varphi (\sin \varphi u_2 u_3 - \cos \varphi u_1) \\ \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi (u_3^2 - u_2^2 - u_1^2) \end{bmatrix}$$

olmak üzere,

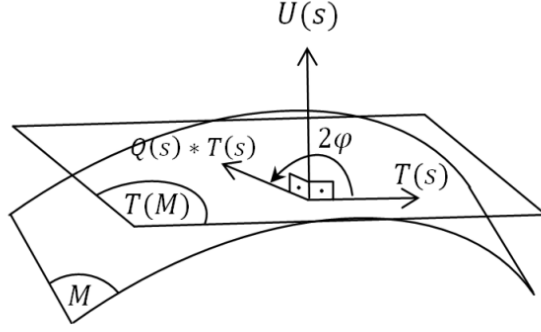
$$A(s) = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \end{bmatrix}. \quad (4.27)$$

burada $U(s) = (u_1(s), u_2(s), u_3(s))$ 'dir. $A(s)A^T(s) = I$ ve $\det A(s) = 1$ olduğundan $A(s)$ bir ortogonal matristir. Böylece, kuaterniyonik şekil operatörü homotetik hareket ile aşağıdaki biçimde verilebilir.

$$Q(s) * T(s) = h(s)A(s)T(s). \quad (4.28)$$

■

Uyarı 4.3 Teorem 4.2 ve Teorem 4.3'ten görebiliriz ki $Q(s)$ operatörü $T(s)$ teğet vektörünü yüzeyin teğet düzleminde ve yüzeyin $U(s)$ normal vektörü etrafında döndürür (Şekil 4.1) (Aslan ve Yaylı 2017b).



Şekil 4.1 Kuaterniyonik şekil operatörü

Teorem 4.4 $x : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow M \subset \mathbb{R}^3$, parametreleri "s ve t" olan bir yüzey, $\alpha(s)$ ve $\beta(t)$ eğrileri M yüzeyi üzerinde birim hızlı eğriler olsun. $\alpha(s)$ ve $\beta(t)$ eğrilerinin birim teğet vektörleri $T(s)$ ve $T(t)$ olmak üzere, $Q(s) * T(s)$ and $Q(t) * T(t)$ kuaterniyonik şekil operatörleriyle K Gauss eğrilik ve H ortalama eğrilik aşağıdaki biçimde verilebilir.

$$K = \frac{|(Q(s) * T(s)) \times (Q(t) * T(t))|}{|T(s) \times T(t)|} \quad (4.29)$$

$$H = \frac{|(Q(s) * T(s)) \times T(t) + T(s) \times (Q(t) * T(t))|}{2|T(s) \times T(t)|}, \quad (4.30)$$

burada $*$ kuaterniyon çarpımı ve \times vektörel çarpımdır. $Q(s)$ ve $Q(t)$ kuaterniyonlarına karşılık gelen matris ile K Gauss eğrilik ve H ortalama eğrilik aşağıdaki biçimde verilebilir (Aslan ve Yaylı 2017b).

$$K = h(s)h(t) \frac{|(A(s)T(s)) \times (A(t)T(t))|}{|T(s) \times T(t)|} \quad (4.31)$$

$$H = \frac{|(h(s)A(s)T(s)) \times T(t) + T(s) \times (h(t)A(t)T(t))|}{2|T(s) \times T(t)|}. \quad (4.32)$$

İspat. (2.12) ve (2.14) eşitliklerinden ve kuaterniyonik şekil operatöründen aşağıdaki eşitlikler verilebilir.

$$\begin{aligned} K &= \frac{|(Q(s) * T(s)) \times (Q(t) * T(t))|}{|T(s) \times T(t)|} \\ H &= \frac{|(Q(s) * T(s)) \times T(t) + T(s) \times (Q(t) * T(t))|}{2|T(s) \times T(t)|}. \end{aligned}$$

$Q(s)$ ve $Q(t)$ kuaterniyon operatörlerine karşılık gelen (4.27) matrislerden aşağıdaki eşitlikler elde edilebilir.

$$\begin{aligned} K &= \frac{|(h(s)A(s)T(s)) \times (h(t)A(t)T(t))|}{|T(s) \times T(t)|} \\ &= h(s)h(t) \frac{|(A(s)T(s)) \times (A(t)T(t))|}{|T(s) \times T(t)|} \\ H &= \frac{|(h(s)A(s)T(s)) \times T(t) + T(s) \times (h(t)A(t)T(t))|}{2|T(s) \times T(t)|}. \end{aligned}$$

■

Sonuç 4.1 M yüzeyindeki eğri asimptotik eğri $k_n = 0$ ise $q = \cos \varphi + \sin \varphi U$ birim kuaterniyonu için $\phi(w) = q * w * q^{-1}$ lineer dönüşümüne karşılık gelen (4.27) matris A aşağıdaki biçimde verilebilir.

$$A = \begin{bmatrix} 1 + u_1^2 - u_2^2 - u_3^2 & -2(u_3 - u_1u_2) & 2(u_2 + u_1u_3) \\ 2(u_3 + u_1u_2) & 1 + (u_2^2 - u_1^2 - u_3^2) & 2(u_2u_3 - u_1) \\ 2(u_1u_3 - u_2) & 2(u_1 + u_2u_3) & 1 + (u_3^2 - u_2^2 - u_1^2) \end{bmatrix}, \quad (4.33)$$

burada $U = (u_1, u_2, u_3)$. Böylece, kuaterniyonik şekil operatörü aşağıdaki biçimde elde edilebilir.

$$Q * T = |t_g| AT \quad (4.34)$$

burada $T = (t_1, t_2, t_3)$ 'dir (Aslan ve Yaylı 2017b).

Sonuç 4.2 M yüzeyindeki eğri eğrilik çizgisi $t_g = 0$ ise $q = \cos \varphi + \sin \varphi U$ birim kuaterniyonu için $\phi(w) = q * w * q^{-1}$ lineer dönüşümüne karşılık gelen matris A

aşağıdaki biçimde verilebilir.

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= I, \end{aligned} \quad (4.35)$$

burada I , 3x3 boyutunda bir birim matristir. Böylece, kuaterniyonik şekil operatörü aşağıdaki biçimde elde edilebilir (Aslan ve Yaylı 2017b).

$$\begin{aligned} Q * T &= |k_n|IT \\ &= |k_n|T. \end{aligned} \quad (4.36)$$

Sonuç 4.3 $\alpha(s)$ ve $\beta(t)$ eğrileri M yüzeyi üzerinde birim hızlı eğriler olsun. $\alpha(s)$ ve $\beta(t)$ eğrilerinin birim tranjant vektörleri $T(s)$ ve $T(t)$ olmak üzere, kuaterniyonik şekil operatörüne karşılık gelen matrisi kullanarak K Gauss eğriliği aşağıdaki biçimde verilebilir.

$$K = h(s)h(t) \frac{\sin \gamma(s, t)}{\sin \theta(s, t)} \quad (4.37)$$

burada $\gamma(s, t)$ açısı $Q(s) * T(s)$ ve $Q(t) * T(t)$ kuaterniyonik şekil operatörleri arasındaki açı, $\theta(s, t)$ açısı ise $T(s)$ ve $T(t)$ vektörleri arasındaki açıdır (Aslan ve Yaylı 2017b).

Uyarı 4.4 $\alpha(s)$ ve $\beta(t)$ eğrileri M dönele yüzeyi üzerinde birim hızlı eğriler ise $|T(s) \times T(t)| = 1$ ve $|(A(s)T(s)) \times (A(t)T(t))| = 1$ olduğundan $\sin \gamma(s, t) = \sin \theta(s, t) = 1$ 'dir. Böylece, (4.37) eşitliği aşağıdaki biçimde elde edilebilir (Aslan ve Yaylı 2017b).

$$K = h(s)h(t). \quad (4.38)$$

Uyarı 4.5 $\alpha(s)$ ve $\beta(t)$ eğrileri M yüzeyi üzerinde birim hızlı eğriler olsun. $\alpha(s)$ ve $\beta(t)$ eğrileri eğrilik çizgisi $t_g(s) = t_g(t) = 0$ ise $Q(s) * T(s) = k_n(s)T(s)$ ve $Q(t) * T(t) = k_n(t)T(t)$ 'dir. (4.29) eşitliğinden Gauss eğriliği aşağıdaki biçimde verilebilir.

$$K = k_n(s)k_n(t). \quad (4.39)$$

Böylece, (4.37) ve (4.39) eşitliklerinden $\sin \gamma(s, t) = \sin \theta(s, t)$ 'dir (Aslan ve Yaylı 2017b).

Önerme 4.2 M yüzeyindeki eğri geodezik eğri ise $k_g = 0$ 'dır. Böylece $\{T, N, B\}$ Frenet çatısı, κ eğrilik ve τ torsiyon olmak üzere, $k_n = \kappa$, $t_g = \tau$ ve $U = N$ 'dir. Bu eşitlikler kullanılarak kuaterniyon operatörü aşağıdaki biçimde elde edilebilir.

$$Q = \kappa + \tau N. \quad (4.40)$$

Şimdi kuaterniyonik şekil operatörü Frenet çatısıyla aşağıdaki biçimde verilebilir (Aslan ve Yaylı 2017b).

$$\begin{aligned} Q * T &= (\kappa + \tau N) * T \\ &= \kappa T - \tau B. \end{aligned} \quad (4.41)$$

Örnek 4.1 $x(s, t) = (s, t, st)$ yüzeyinin parametre eğrilerinin birim hızlı vektörleri

$$T(s) = \frac{x_s}{|x_s|} = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}(1, 0, t) \text{ ve } T(t) = \frac{x_t}{|x_t|} = \frac{1}{\sqrt{1+s^2}}(0, 1, s) \quad (4.42)$$

biçiminde verilebilir. Bu vektörlerden $x(s, t)$ yüzeyinin normal vektörü de elde edilebilir.

$$\begin{aligned} U &= \frac{T(s) \times T(t)}{\|T(s) \times T(t)\|} \\ &= \frac{1}{\sqrt{t^2 + s^2 + 1}}(-t, -s, 1). \end{aligned} \quad (4.43)$$

Bu yüzeyin parametre eğrilerinin teğet normal vektörleri aşağıdaki biçimde elde edilebilir.

$$Y(s) = U(s) \times T(s) = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \frac{1}{\sqrt{t^2+s^2+1}}(-st, 1+t^2, s) \quad (4.44)$$

$$Y(t) = U(t) \times T(t) = \frac{1}{\sqrt{1+s^2}} \frac{1}{\sqrt{t^2+s^2+1}}(-1-s^2, st, -t). \quad (4.45)$$

(2.15) eşitliğinden $k_n = -\frac{1}{|\alpha'|} \left\langle \frac{dU}{ds}, T \right\rangle$ normal eğrilik ve $t_g = -\frac{1}{|\alpha'|} \left\langle \frac{dU}{ds}, Y \right\rangle$ geodezik eğrilikler

$$k_n(s) = 0 \text{ ve } k_n(t) = 0 \quad (4.46)$$

$$t_g(s) = \frac{1}{t^2 + s^2 + 1} \text{ ve } t_g(t) = -\frac{1}{t^2 + s^2 + 1} \quad (4.47)$$

biçimde elde edilebilir. Böylece, (4.3) Darboux çatısıyla şekil operatörü

$$\begin{aligned} S(T(s)) &= k_n(s)T(s) + t_g(s)Y(s) \\ &= \frac{1}{\sqrt{1+t^2}(t^2+s^2+1)^{\frac{3}{2}}}(-st, 1+t^2, s), \end{aligned} \quad (4.48)$$

$$\begin{aligned} S(T(t)) &= k_n(t)T(t) + t_g(t)Y(t), \\ &= -\frac{1}{\sqrt{1+s^2}(t^2+s^2+1)^{\frac{3}{2}}}(-1-s^2, st, -t). \end{aligned} \quad (4.49)$$

biçiminde elde edilebilir. Şimdi, $Q(s)$ ve $Q(t)$ kuaterniyon operatörleri

$$\begin{aligned} Q(s) &= k_n(s) + t_g(s)U(s) \\ &= 0 + \frac{1}{(t^2+s^2+1)^{\frac{3}{2}}}(-t, -s, 1) \end{aligned} \quad (4.50)$$

$$\begin{aligned} Q(t) &= k_n(t) + t_g(t)U(t) \\ &= 0 - \frac{1}{(t^2+s^2+1)^{\frac{3}{2}}}(-t, -s, 1). \end{aligned} \quad (4.51)$$

biçiminde elde edildikten sonra kuaterniyonik şekil operatörleri aşağıdaki gibi elde edilebilir.

$$Q(s) * T(s) = \left(0 + \frac{1}{(t^2+s^2+1)^{\frac{3}{2}}}(-t, -s, 1) \right) * \left(\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}(1, 0, t) \right) \quad (4.52)$$

$$Q(t) * T(t) = \left(0 - \frac{1}{(t^2+s^2+1)^{\frac{3}{2}}}(-t, -s, 1) \right) * \left(\frac{1}{\sqrt{1+s^2}}(0, 1, s) \right). \quad (4.53)$$

(4.29) ve (4.30) eşitliklerinden Gauss eğrilik ve ortalama eğrilik aşağıdaki biçimde elde edilebilir.

$$K = -\frac{1}{(t^2+s^2+1)^2} \quad (4.54)$$

$$H = -\frac{st}{(t^2+s^2+1)^{\frac{3}{2}}} \quad (4.55)$$

Ayrıca, $q = \cos \varphi + \sin \varphi U$ birim kuaterniyonu için ϕ lineer dönüşümüne karşılık gelen matris

$$A(s) = \frac{1}{(t^2+s^2+1)} \begin{bmatrix} t^2 & st - \sqrt{t^2+s^2+1} & s\sqrt{t^2+s^2+1} + t \\ \sqrt{t^2+s^2+1} + st & s^2 & t\sqrt{t^2+s^2+1} - s \\ s\sqrt{t^2+s^2+1} - t & -t\sqrt{t^2+s^2+1} - s & 1 \end{bmatrix} \quad (4.56)$$

biçiminde elde edilebilir. Böylece kuaterniyonik şekil operatörü (4.26) homotetik hareket ile aşağıdaki biçimde elde edilebilir.

$$\begin{aligned} Q(s) * T(s) &= h(s)A(s)T(s) \\ &= \frac{1}{\sqrt{1+t^2} (t^2 + s^2 + 1)^{\frac{3}{2}}}(-st, 1 + t^2, s) \end{aligned} \quad (4.57)$$

burada $h(s) = \frac{1}{t^2 + s^2 + 1}$ ve $T(s) = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}(1, 0, t)$ 'dir (Aslan ve Yaylı 2017b).



5. KUATERNİYON OPERATÖRÜ

Bu bölümde, 3-boyutlu Öklid uzayında eğri ve yüzeylerin konum vektörlerinden yararlanarak bir kuaterniyon operatörü tanımlandı. Kuaterniyon operatörü yörüngesi eğri veya yüzey olmak üzere iki şekilde incelendi. Son olarak, çalışmamızın diğer bölümlerinde kullanılan kuaterniyonları bu yöntemle elde ederek bu kuaterniyon operatörünün bir uygulaması olarak gösterildi.

5.1 Yörüngesi Eğri Olan Kuaterniyon Operatörü

Yörüngesi eğri olan kuaterniyon operatörü iki başlık altında incelendi. Birincisi, operatör noktayı eğriye dönüştürerek yörüngesi eğri olan bir kuaterniyonik hareket elde edildi. Ayrıca, operatör birim kuaterniyon ile ifade edildi. Birim kuaterniyona karşılık gelen matris kullanılarak yörüngesi eğri olan 1-parametrelili homotetik hareket elde edildi. İkincisi, operatör eğriyi eğriye dönüştürerek yörüngesi eğri olan bir kuaterniyonik hareket elde edildi. Ayrıca, operatör birim kuaterniyon ile verildi. Birim kuaterniyona karşılık gelen matris kullanılarak yörüngesi eğri olan 1-parametrelili homotetik hareket elde edildi.

5.1.1 Noktayı eğriye dönüştüren kuaterniyon operatörü

Teorem 5.1 3-boyutlu Öklid uzayında $\alpha(t)$ bir eğri ve P sabit bir nokta olmak üzere yörüngesi $\alpha(t)$ eğrisi olan kuaterniyon operatörü aşağıdaki biçimde verilebilir.

$$Q(t) = \frac{1}{\|P\|^2} (\langle P, \alpha(t) \rangle + P \times \alpha(t)), \quad (5.1)$$

burada operatörün skaler ve vektörel kısmı sırasıyla $\frac{\langle P, \alpha(t) \rangle}{\|P\|^2}$ ve $\frac{P \times \alpha(t)}{\|P\|^2}$, dır. $Q(t)$ kuaterniyon operatörü P noktasından başlayarak $\alpha(t)$ eğrisini aşağıdaki biçimde çizebilir.

$$Q(t) * P = \alpha(t) \quad (5.2)$$

burada $*$ kuaterniyon çarpımı, P ve $\alpha(t)$ saf (pure) kuaterniyonlardır (3-boyutlu Öklid uzayında konum vektörlerdir).

İspat. $Q(t)$ kuaterniyon operatörü ve P saf kuaterniyonun $*$ kuaterniyon çarpımı

$$\begin{aligned}
Q(t) * P &= \frac{1}{\|P\|^2} (\langle P, \alpha(t) \rangle + P \times \alpha(t)) * P \\
&= \frac{1}{\|P\|^2} (\langle P, \alpha(t) \rangle P + (P \times \alpha(t)) \times P) \\
&= \frac{1}{\|P\|^2} (\langle P, \alpha(t) \rangle P + \langle P, P \rangle \alpha(t) - \langle \alpha(t), P \rangle P) \\
&= \frac{1}{\|P\|^2} \langle P, P \rangle \alpha(t) \\
&= \frac{1}{\|P\|^2} \|P\|^2 \alpha(t) \\
&= \alpha(t),
\end{aligned}$$

$\alpha(t)$ eğrisi elde edilir. Böylece, $Q(t)$ kuaterniyon operatörü P noktasından başlayarak $\alpha(t)$ eğrisini çizmektedir. ■

Uyarı 5.1 $\theta(t)$ açısı P ve $\alpha(t)$ konum vektörleri arasındaki açı olmak üzere,

$$\langle P, \alpha(t) \rangle = \|P\| \|\alpha(t)\| \cos \theta(t) \quad (5.3)$$

$$\|P \times \alpha(t)\| = \|P\| \|\alpha(t)\| \sin \theta(t) \quad (5.4)$$

eşitliklerini (5.1) denkleminde yazarak aşağıdaki eşitlik elde edilir.

$$\begin{aligned}
Q(t) &= \frac{1}{\|P\|^2} (\langle P, \alpha(t) \rangle + P \times \alpha(t)) \\
&= \frac{1}{\|P\|^2} (\langle P, \alpha(t) \rangle + \|P \times \alpha(t)\| \frac{P \times \alpha(t)}{\|P \times \alpha(t)\|}) \\
&= \frac{1}{\|P\|^2} (\|P\| \|\alpha(t)\| \cos \theta(t) + \|P\| \|\alpha(t)\| \sin \theta(t) \frac{P \times \alpha(t)}{\|P \times \alpha(t)\|}) \\
&= \frac{\|P\| \|\alpha(t)\|}{\|P\|^2} (\cos \theta(t) + \sin \theta(t) \frac{P \times \alpha(t)}{\|P \times \alpha(t)\|}) \\
&= \frac{\|\alpha(t)\|}{\|P\|} (\cos \theta(t) + \sin \theta(t) v(t)) \quad (5.5)
\end{aligned}$$

burada $q(t) = \cos \theta(t) + \sin \theta(t)v(t)$ birim kuaterniyon ve $v(t) = \frac{P \times \alpha(t)}{\|P \times \alpha(t)\|}$ dönme eksenidir. Böylece, $Q(t)$ kuaterniyon operatörü $q(t)$ birim kuaterniyonu ile elde edilir. Şimdi, (5.2) ve (5.5) eşitliklerinden aşağıdaki eşitlik verilebilir.

$$Q(t) * P = \frac{\|\alpha(t)\|}{\|P\|} q(t) * P. \quad (5.6)$$

Teorem 5.2 $p(t) = \cos \frac{\theta(t)}{2} + \sin \frac{\theta(t)}{2}v(t)$ birim kuaterniyonu için (2.21) ϕ lineer dönüşümüne karşılık gelen matris $R(t)$ olmak üzere, (5.6) eşitliği yörüngesi $\alpha(t)$ eğrisi olan 1-parametrel homotetik hareket olarak aşağıdaki biçimde verilebilir.

$$Q(t) * P = h(t)R(t)P \quad (5.7)$$

burada $R(t)$, $h(t) = \frac{\|\alpha(t)\|}{\|P\|}$ ve “ t ” sırasıyla homotetik hareketin ortogonal matrisi, skalası ve parametresidir.

İspat. $v(t) = (v_1(t), v_2(t), v_3(t))$ olmak üzere, $p(t) = \cos \frac{\theta(t)}{2} + \sin \frac{\theta(t)}{2}v(t)$ birim kuaterniyonu için ϕ lineer dönüşümüne karşılık gelen matris aşağıdaki biçimde verilebilir.

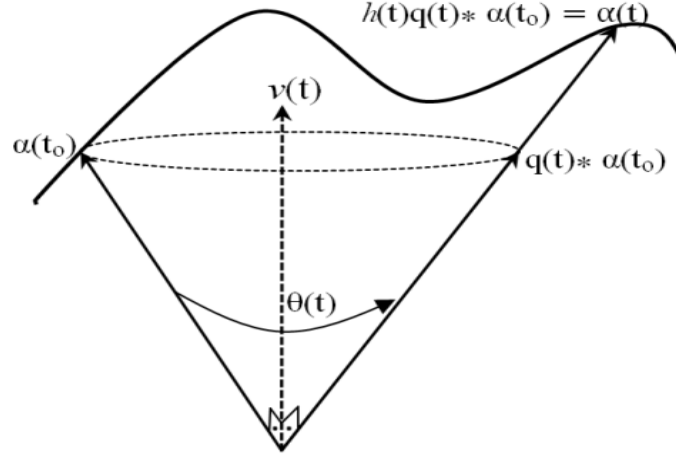
$$A_1 = \begin{bmatrix} (\cos^2 \frac{\theta}{2} + \sin^2 \frac{\theta}{2}(v_1^2 - v_2^2 - v_3^2)) \\ 2 \sin \frac{\theta}{2}(\cos \frac{\theta}{2}v_3 + \sin \frac{\theta}{2}v_1v_2) \\ 2 \sin \frac{\theta}{2}(\sin \frac{\theta}{2}v_1v_3 - \cos \frac{\theta}{2}v_2) \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} -2 \sin \frac{\theta}{2}(\cos \frac{\theta}{2}v_3 - \sin \frac{\theta}{2}v_1v_2) \\ \cos^2 \frac{\theta}{2} + \sin^2 \frac{\theta}{2}(v_2^2 - v_1^2 - v_3^2) \\ 2 \sin \frac{\theta}{2}(\cos \frac{\theta}{2}v_1 + \sin \frac{\theta}{2}v_2v_3) \end{bmatrix}$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 2 \sin \frac{\theta}{2}(\cos \frac{\theta}{2}v_2 + \sin \frac{\theta}{2}v_1v_3) \\ 2 \sin \frac{\theta}{2}(\sin \frac{\theta}{2}v_2v_3 - \cos \frac{\theta}{2}v_1) \\ \cos^2 \frac{\theta}{2} + \sin^2 \frac{\theta}{2}(v_3^2 - v_2^2 - v_1^2) \end{bmatrix}$$

olmak üzere,

$$R = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \end{bmatrix} \quad (5.8)$$

burada $R(t)R^T(t) = I$ ve $\det R(t) = 1$ olduğundan $R(t)$ matrisi ortogonaldır. Ayrıca, $R(t)$ matrisinin eksenini $v(t)$ vektörü olduğu için $R(t)v(t) = v(t)$ 'dir. Tanım 2.11'den, $p(t) = \cos \frac{\theta(t)}{2} + \sin \frac{\theta(t)}{2}v(t)$ birim kuaterniyonu için ϕ lineer dönüşümü P



Şekil 5.1 Noktayı eğriye dönüştüren kuarterniyon operatörü

konum vektörünü $\theta(t)$ kadar döndürür. Böylece, $p(t)$ için ϕ lineer dönüşümünü $q(t)$ birim kuarterniyonun yerine kullanılabilir.

$$q(t) * P = \phi(P). \quad (5.9)$$

Şimdi, (5.6) $q(t)$ birim kuarterniyonuyla $Q(t)$ kuarterniyon operatörü 1-parametrelili homotetik hareket olarak aşağıdaki biçimde elde edilebilir.

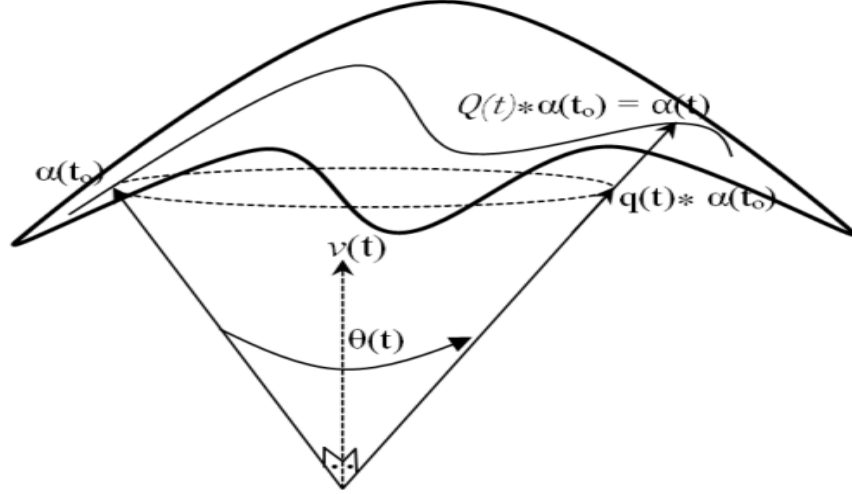
$$\begin{aligned} Q(t) * P &= \frac{\|\alpha(t)\|}{\|P\|} q(t) * P \\ &= \frac{\|\alpha(t)\|}{\|P\|} \phi(P) \\ &= \frac{\|\alpha(t)\|}{\|P\|} R(t)P \\ &= h(t)R(t)P. \end{aligned}$$

Böylece, yörüngesi $\alpha(t)$ eğrisi olan 1-parametrelili homotetik hareket elde edilir. ■

Uyarı 5.2 Teorem 5.1'de $P = \alpha(t_0)$ noktası $\alpha(t)$ eğrisi üzerinde alınrsa kuarterniyon operatörü $\alpha(t)$ eğrisi üzerindeki sabit bir noktadan başlayarak $\alpha(t)$ eğrisini çizer (Şekil 5.1).

Uyarı 5.3 $\alpha(t)$ eğrisi $M(t, s)$ yüzeyi üzerinde olacak biçimde alınrsa $Q(t)$ kuarterniyon operatörü $M(t, s)$ yüzeyi üzerinde $\alpha(t)$ eğrisini çizer. Bu operatör, (5.1)

eşitliğinde verilen operatörden bir farkı yoktur. Ayrıca, bu operatör yörüngesi $M(t, s)$ yüzeyinde kalacak şekilde $\alpha(t)$ eğrisi olan 1-parametrelî homotetik hareket olarak verilebilir (Şekil 5.2).



Şekil 5.2 Yörüngesi yüzey üzerindeki bir eğri olan kuaterniyon operatörü

5.1.2 Eğriyi eğriye dönüştüren kuaterniyon operatörü

Teorem 5.3 $\alpha(t)$ ve $\beta(t)$ 3-boyutlu Öklid uzayda iki eğri olsun. $\alpha(t)$ eğrisini $\beta(t)$ eğrisine dönüştürerek yörüngesi $\beta(t)$ eğrisi olan kuaterniyon operatörü aşağıdaki biçimde verilebilir.

$$Q(t) = \frac{1}{\|\alpha(t)\|^2} (\langle \alpha(t), \beta(t) \rangle + \alpha(t) \times \beta(t)) \quad (5.10)$$

burada, $Q(t)$ kuaterniyon operatörü $\alpha(t)$ eğrisini $\beta(t)$ eğrisine aşağıdaki biçimde dönüştürür.

$$Q(t) * \alpha(t) = \beta(t) \quad (5.11)$$

burada $*$ kuaterniyon çarpımı, $\alpha(t)$ ve $\beta(t)$ saf (pure) kuaterniyondur (R^3 'de konum vektörleridir).

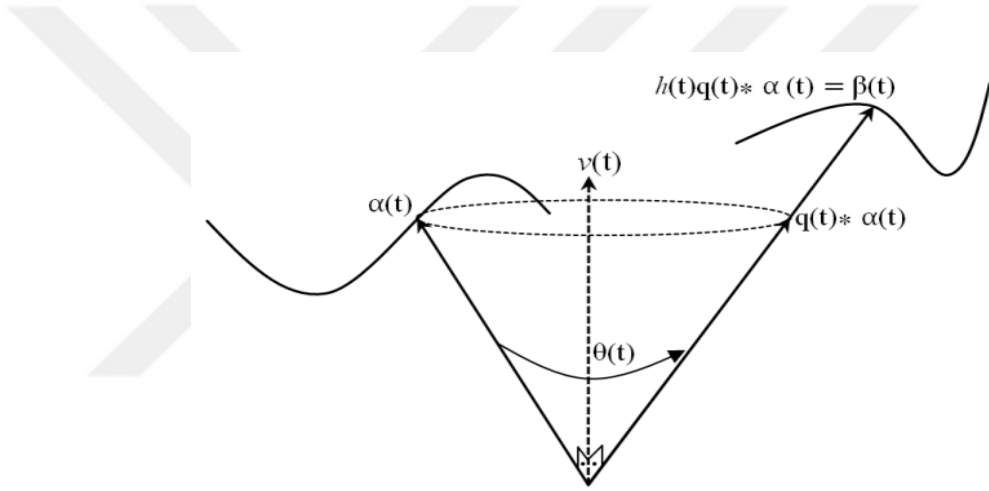
Uyarı 5.4 $\theta(t)$ açısı $\alpha(t)$ ve $\beta(t)$ konum vektörleri arasındaki açı ve $v(t) = \frac{\alpha(t) \times \beta(t)}{\|\alpha(t) \times \beta(t)\|}$ olmak üzere, $Q(t)$ kuaterniyon operatörü $q(t) = \cos \theta(t) + \sin \theta(t)v(t)$ birim kuaterniyonla verilebilir.

$$Q(t) = \frac{\|\beta(t)\|}{\|\alpha(t)\|} (\cos \theta(t) + \sin \theta(t)v(t)) \quad (5.12)$$

Böylece, (5.11) eşitliği

$$Q(t) * \alpha(t) = \frac{\|\beta(t)\|}{\|\alpha(t)\|} q(t) * \alpha(t). \quad (5.13)$$

biçiminde verilebilir (Şekil 5.3).



Şekil 5.3 Eğriyi eğriye dönüştüren kuaterniyon operatörü

Teorem 5.4 $p(t) = \cos \frac{\theta(t)}{2} + \sin \frac{\theta(t)}{2}v(t)$ birim kuaterniyonu için ϕ lineer dönüşümüne karşılık gelen matris $R(t)$ olsun. (5.11) eşitliği 1-parametrelili homotetik hareket olarak aşağıdaki biçimde verilebilir.

$$Q(t) * \alpha(t) = h(t)R(t)\alpha(t) \quad (5.14)$$

burada $R(t)$, $h(t) = \frac{\|\beta(t)\|}{\|\alpha(t)\|}$ ve ‘t’ sırasıyla homotetik hareketin ortogonal matrisi, skalası ve parametresidir.

Örnek 5.1 $\alpha(t) = (\cos t, \sin t, 0)$ ve $\beta(t) = (\cos t, \sin t, t)$ eğrileriyle $Q(t)$ kuaterniyon operatörü aşağıdaki biçimde elde edilebilir.

$$\begin{aligned} Q(t) &= \frac{1}{\|\alpha(t)\|^2} (\langle \alpha(t), \beta(t) \rangle + \alpha(t) \times \beta(t)) \\ &= 1 + (t \sin t, -t \cos t, 0) \\ &= 1 + t(\sin t, -\cos t, 0), \end{aligned} \quad (5.15)$$

böylece, kuaterniyon operatörü $Q(t) = 1 + t(\sin t, -\cos t, 0)$ olarak elde edilir. Şimdi $Q(t)$ kuaterniyon operatörüyle $\alpha(t)$ eğrisi $\beta(t)$ eğrisine aşağıdaki biçimde dönüştürülebilir.

$$\begin{aligned} Q(t) * \alpha(t) &= (1 + t(\sin t, -\cos t, 0)) * (\cos t, \sin t, 0) \\ &= (\cos t, \sin t, 0) + (0, 0, t) \\ &= (\cos t, \sin t, t) \\ &= \beta(t). \end{aligned} \quad (5.16)$$

$Q(t) = 1 + t(\sin t, -\cos t, 0)$ kuaterniyon operatörü $\|\alpha(t)\| = 1$, $\|\beta(t)\| = \sqrt{1+t^2}$ ve $v(t) = (\sin t, -\cos t, 0)$ eşitliklerinden yararlanarak birim kuaterniyon ile aşağıdaki biçimde verilebilir.

$$\begin{aligned} Q(t) &= \frac{\|\beta(t)\|}{\|\alpha(t)\|} (\cos \theta(t) + \sin \theta(t)v(t)) \\ &= \sqrt{1+t^2} (\cos \theta(t) + \sin \theta(t)(\sin t, -\cos t, 0)) \end{aligned} \quad (5.17)$$

$$= \sqrt{1+t^2} q(t) (\sin t, -\cos t, 0). \quad (5.18)$$

$p(t) = \cos \frac{\theta(t)}{2} + \sin \frac{\theta(t)}{2} v(t)$ için ϕ lineer dönüşümüne karşılık gelen matris $R(t)$ aşağıdaki biçimde elde edilebilir.

$$\begin{bmatrix} \cos^2 \frac{\theta}{2} + \sin^2 \frac{\theta}{2} (\sin^2 t - \cos^2 t) & -\sin^2 \frac{\theta}{2} \sin 2t & -\sin \theta \cos t \\ -\sin^2 \frac{\theta}{2} \sin 2t & \cos^2 \frac{\theta}{2} + \sin^2 \frac{\theta}{2} (\cos t - \sin t) & -\sin \theta \sin t \\ \sin \theta \cos t & \sin \theta \sin t & -1 \end{bmatrix}, \quad (5.19)$$

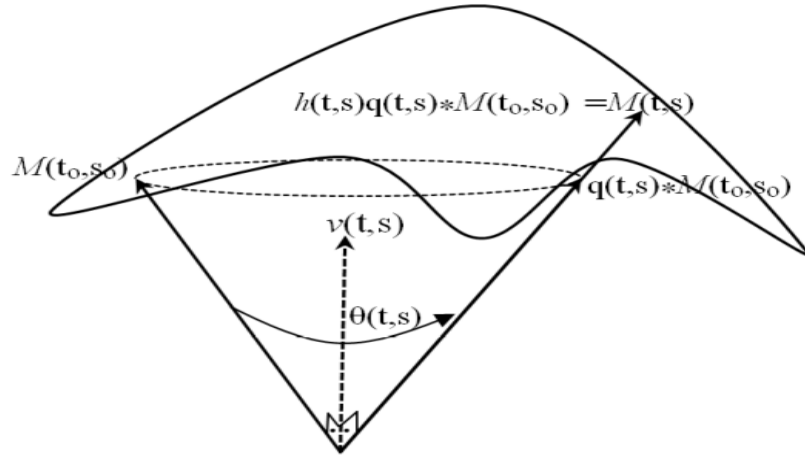
böylece, (5.16) eşitliği 1-parametrelili homotetik hareket olarak aşağıdaki biçimde verilebilir.

$$Q(t) * \alpha(t) = \sqrt{1+t^2} R(t) \alpha(t). \quad (5.20)$$

5.2 Yörüngesi Yüzey Olan Kuaterniyon Operatörü

Yörüngesi yüzey olan kuaterniyon operatörü üç başlık altında incelendi. Birincisi, operatör noktayı yüzeye dönüştürerek yörüngesi yüzey olan bir kuaterniyonik hareket elde edildi. Ayrıca, operatör birim kuaterniyon ile ifade edildi. Birim kuaterniyona karşılık gelen matris kullanılarak yörüngesi yüzey olan 2-parametrelilik homotetik hareket elde edildi. İkincisi, operatör eğriyi yüzeye dönüştürerek yörüngesi yüzey olan bir kuaterniyonik hareket elde edildi. Ayrıca, operatör birim kuaterniyon ile verildi. Birim kuaterniyona karşılık gelen matris kullanılarak yörüngesi yüzey olan 2-parametrelilik homotetik hareket elde edildi. Üçüncüsü, operatör yüzeyi yüzeye dönüştürerek yörüngesi yüzey olan bir kuaterniyonik hareket elde edildi. Ayrıca, operatör birim kuaterniyon ile ifade edildi. Birim kuaterniyona karşılık gelen matris kullanılarak yörüngesi yüzey olan 2-parametrelilik homotetik hareket elde edildi.

5.2.1 Noktayı yüzeye dönüştüren kuaterniyon operatörü



Şekil 5.4 Noktayı yüzeye dönüştüren kuaterniyon operatörü

Teorem 5.5 $M(t, s)$ bir yüzey ve P sabit bir nokta olmak üzere, yörüngesi $M(t, s)$ yüzeyi olan $Q(t, s)$ kuaterniyon operatörü aşağıdaki biçimde verilebilir.

$$Q(t, s) = \frac{1}{\|P\|^2} (\langle P, M(t, s) \rangle + P \times M(t, s)), \quad (5.21)$$

bu $Q(t, s)$ kuaterniyon operatörü $M(t, s)$ yüzeyini aşağıdaki biçimde çizer.

$$Q(t, s) * P = M(t, s) \quad (5.22)$$

burada P ve $M(t, s)$ konum vektörleri saf (pure) kuaterniyondur.

Uyarı 5.5 $\theta(t, s)$ açısı P ve $M(t, s)$ konum vektörleri arasındaki olmak üzere, $q(t, s) = \cos \theta(t, s) + \sin \theta(t, s)v(t, s)$ birim kuaterniyonu ile $Q(t, s)$ kuaterniyon operatörü aşağıdaki biçimde verilebilir.

$$Q(t, s) = \frac{\|M(t, s)\|}{\|P\|} (\cos \theta(t, s) + \sin \theta(t, s)v(t, s)) \quad (5.23)$$

burada, $v(t, s) = \frac{P \times M(t, s)}{\|P \times M(t, s)\|}$ vektörü dönme eksenidir. (5.22) eşitliği $q(t, s)$ birim kuaterniyon ile aşağıdaki biçimde verilebilir.

$$Q(t, s) * P = \frac{\|M(t, s)\|}{\|P\|} q(t, s) * P. \quad (5.24)$$

Teorem 5.6 $p(t, s) = \cos \frac{\theta(t, s)}{2} + \sin \frac{\theta(t, s)}{2}v(t, s)$ birim kuaterniyonu için ϕ lineer dönüşümüne karşılık gelen matris $R(t, s)$ olmak üzere (5.24) eşitliği yörüngesi $M(t, s)$ yüzeyi olan 2-parametrelili homotetik hareket aşağıdaki biçimde verilebilir.

$$Q(t, s) * P = h(t, s)R(t, s)P \quad (5.25)$$

burada $R(t, s)$, $h(t, s) = \frac{\|M(t, s)\|}{\|P\|}$ ve “ t ve s ” sırasıyla homotetik hareketin ortogonal matrisi, skalası ve parametreleridir.

Uyarı 5.6 Teorem 5. 'te $P = M(t_0, s_0)$ noktası $M(t, s)$ yüzeyi üzerinde alınırsa kuaterniyon operatörü $M(t, s)$ yüzeyi üzerindeki sabit bir noktadan başlayarak $M(t, s)$ eğrisini çizer (Şekil 5.4).

5.2.2 Eğriyi yüzeye dönüştüren kuaterniyon operatörü

Teorem 5.7 $M(t, s)$ bir yüzey ve $\alpha(t)$ bir eğri olmak üzere, $\alpha(t)$ eğrisini $M(t, s)$ yüzeyine dönüştüren $Q(t, s)$ kuaterniyon operatörü aşağıdaki biçimde verilebilir.

$$Q(t, s) = \frac{1}{\|\alpha(t)\|^2} (\langle \alpha(t), M(t, s) \rangle + \alpha(t) \times M(t, s)), \quad (5.26)$$

$Q(t, s)$ kuaterniyon operatörü, aşağıdaki biçimde $\alpha(t)$ eğrisini $M(t, s)$ yüzeyine dönüştürür.

$$Q(t, s) * \alpha(t) = M(t, s) \quad (5.27)$$

burada $\alpha(t)$ ve $M(t, s)$ konum vektörleri saf (pure) kuaterniyondur.

Uyarı 5.7 $\theta(t, s)$ açısı $\alpha(t)$ ve $M(t, s)$ konum vektörleri arasındaki olmak üzere, $q(t, s) = \cos \theta(t, s) + \sin \theta(t, s)v(t, s)$ birim kuaterniyonu ile $Q(t, s)$ kuaterniyon operatörü aşağıdaki biçimde verilebilir.

$$Q(t, s) = \frac{\|M(t, s)\|}{\|\alpha(t)\|} (\cos \theta(t, s) + \sin \theta(t, s)v(t, s)) \quad (5.28)$$

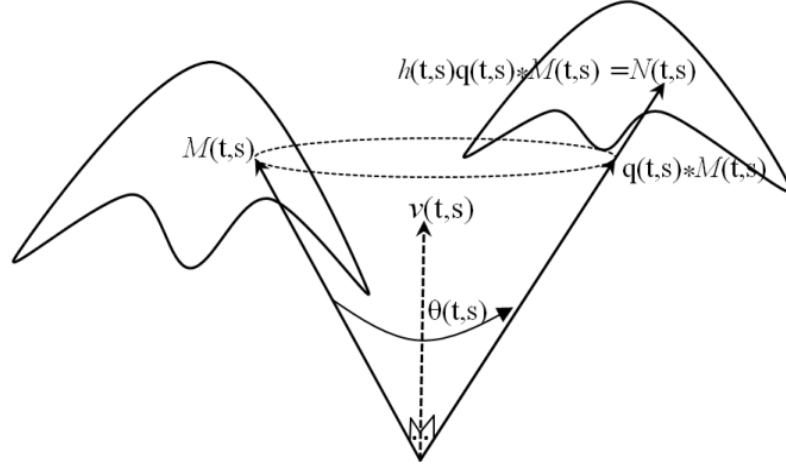
burada, $v(t, s) = \frac{\alpha(t) \times M(t, s)}{\|\alpha(t) \times M(t, s)\|}$ vektörü dönme eksenidir. (5.27) eşitliği $q(t, s)$ birim kuaterniyon ile aşağıdaki biçimde verilebilir.

$$Q(t, s) * \alpha(t) = \frac{\|M(t, s)\|}{\|\alpha(t)\|} q(t, s) * \alpha(t). \quad (5.29)$$

Teorem 5.8 $p(t, s) = \cos \frac{\theta(t, s)}{2} + \sin \frac{\theta(t, s)}{2}v(t, s)$ birim kuaterniyonu için ϕ lineer dönüşümüne karşılık gelen matris $R(t, s)$ olmak üzere (5.29) eşitliği yörüngesi $M(t, s)$ yüzeyi olan 2-parametrelili homotetik hareket aşağıdaki biçimde verilebilir.

$$Q(t, s) * \alpha(t) = h(t, s)R(t, s)\alpha(t) \quad (5.30)$$

burada $R(t, s)$, $h(t, s) = \frac{\|M(t, s)\|}{\|\alpha(t)\|}$ ve "t ve s" sırasıyla homotetik hareketin ortogonal matrisi, skalası ve parametreleridir.



Şekil 5.5 Yüzeyi yüzeye dönüştüren kuaterniyon operatörü

5.2.3 Yüzeyi yüzeye dönüştüren kuaterniyon operatörü

Teorem 5.9 $M(t, s)$ ve $N(t, s)$ 3-boyutlu Ödlid uzayında R^3 iki yüzey olsun. $M(t, s)$ yüzeyini $N(t, s)$ yüzeyine dönüştüren $Q(t, s)$ kuaterniyon operatörü aşağıdaki biçimde verilebilir.

$$Q(t, s) = \frac{1}{\|M(t, s)\|^2} (\langle M(t, s), N(t, s) \rangle + M(t, s) \times N(t, s)), \quad (5.31)$$

bu $Q(t, s)$ kuaterniyon operatörü $M(t, s)$ yüzeyini $N(t, s)$ yüzeyine aşağıdaki biçimde dönüştürür.

$$Q(t, s) * M(t, s) = N(t, s), \quad (5.32)$$

burada $M(t, s)$ ve $N(t, s)$ konum vektörleri saf kuaterniyondur.

Uyarı 5.8 $q(t, s) = \cos \theta(t, s) + \sin \theta(t, s)v(t, s)$ birim kuaterniyonuyla $Q(t, s)$ kuaterniyon operatörü aşağıdaki biçimde verilebilir.

$$Q(t, s) = \frac{\|N(t, s)\|}{\|M(t, s)\|} (\cos \theta(t, s) + \sin \theta(t, s)v(t, s)) \quad (5.33)$$

burada $v(t, s) = \frac{M(t, s) \times N(t, s)}{\|M(t, s) \times N(t, s)\|}$ vektörü dönme eksenidir. Böylece, (5.32) eşitliğini $q(t, s)$ birim kuaterniyon ile aşağıdaki biçimde verilebilir.

$$Q(t, s) * M(t, s) = \frac{\|N(t, s)\|}{\|M(t, s)\|} q(t, s) * M(t, s), \quad (5.34)$$

bu kuaterniyon operatörü şekil 5.5'te gösterilebilir.

Teorem 5.10 $p(t, s) = \cos \frac{\theta(t,s)}{2} + \sin \frac{\theta(t,s)}{2}v(t, s)$ birim kuaterniyonu için ϕ lineer dönüşümüne karşılık gelen matris $R(t, s)$ olmak üzere, (5.34) eşitliği yörüngesi $N(t, s)$ yüzeyi olan 2-parametrelili homotetik hareket ile aşağıdaki biçimde verilebilir.

$$Q(t, s) * M(t, s) = h(t, s)R(t, s)M(t, s) \quad (5.35)$$

burada, $R(t, s)$, $h(t, s) = \frac{\|N(t, s)\|}{\|M(t, s)\|}$ ve "t ve s" sırasıyla homotetik hareketin ortogonal matrisi, skalası ve parametreleridir.

5.3 Kuaterniyon Operatörünün Uygulamaları

Bu bölümde, kanal yüzeyler, GSO yüzeyler ve kuaterniyonik şekil operatöründe kullandığımız kuaterniyonları kuaterniyon operatörüyle elde edilecektir. Daha sonra, kuaterniyon operatörüyle bu yüzeyler ve kuaterniyonik şekil operatörü elde edilecektir.

Sonuç 5.1 $C(t, \theta)$ kanal yüzeyinin merkez eğrisi $\alpha(t)$ birim hızlı eğrisi ve $S(t, \theta) = \cos \theta N(t) + \sin \theta B(t)$ küresi olmak üzere, (2.1) denklemini aşağıdaki biçimde verilebilir.

$$\begin{aligned} C(t, \theta) &= \alpha(t) - r(t)r'(t)T(t) \pm r(t)\sqrt{1 - r'(t)^2}(\cos \theta N(t) + \sin \theta B(t)) \\ &= \alpha(t) - r(t)r'(t)T(t) \pm r(t)\sqrt{1 - r'(t)^2}S(t, \theta). \end{aligned}$$

Teorem 3.1 ve ispatında $q(t, \theta) = \cos \theta + \sin \theta T(t)$ birim kuaterniyonu $N(t)$ normal vektörünü $S(t, \theta) = \cos \theta N(t) + \sin \theta B(t)$ küresine dönüştürmektedir. Bu $q(t, \theta)$

birim kuaterniyonu, teorem 5.7'den yararlanarak aşağıdaki biçimde elde edilebilir.

$$\begin{aligned}
Q(t, \theta) &= \frac{1}{\|N(t)\|^2} (\langle N(t), S(t, \theta) \rangle + N(t) \times S(t, \theta)) \\
&= \frac{1}{\|N(t)\|^2} (\langle N(t), \cos \theta N(t) + \sin \theta B(t) \rangle + N(t) \times (\cos \theta N(t) + \sin \theta B(t))) \\
&= \frac{1}{\|N(t)\|^2} (\cos \theta \langle N(t), N(t) \rangle + \sin \theta N(t) \times B(t)) \\
&= \frac{1}{\|N(t)\|^2} (\cos \theta \|N(t)\|^2 + \sin \theta T(t)) \\
&= \cos \theta + \sin \theta T(t) \\
&= q(t, \theta)
\end{aligned}$$

böylece $N(t)$ normal vektörünü $S(t, \theta)$ küresine dönüştüren kuaterniyon operatörünün $q(t, \theta)$ birim kuaterniyonu olduğu kolayca aşağıdaki biçimde gösterilebilir.

$$\begin{aligned}
q(t, \theta) * N(t) &= (\cos \theta + \sin \theta T(t)) * N(t) \\
&= \cos \theta N(t) + \sin \theta T(t) \times N(t) \\
&= \cos \theta N(t) + \sin \theta B(t) \\
&= S(t, \theta).
\end{aligned}$$

Sonuç 5.2 $f(t)$ birim hızlı küresel eğri, $M(s, t) = sf(t)$ koni yüzeyi ve $N(s, t) = s(\cos u(s)f(t) + \sin u(s)f(t) \times f'(t))$ (2.9) genelleştirilmiş sabit oranlı yüzey olmak üzere, teorem 3.6'da $q(s, t) = \cos u(s) - \sin u(s)f'(t)$ birim kuaterniyonu $M(s, t)$ koni yüzeyini $N(s, t)$ GSO yüzeyine dönüştürmüştür. Bu birim kuaterniyon, teorem 5.9'dan yararlanarak aşağıdaki biçimde elde edilebilir.

$$\begin{aligned}
Q(s, t) &= \frac{1}{\|M\|^2} (\langle M, N \rangle + M \times N) \\
&= \frac{1}{s^2} (\langle sf(t), s(\cos u(s)f(t) + \sin u(s)f(t) \times f'(t)) \rangle \\
&\quad + sf(t) \times s(\cos u(s)f(t) + \sin u(s)f(t) \times f'(t)))
\end{aligned}$$

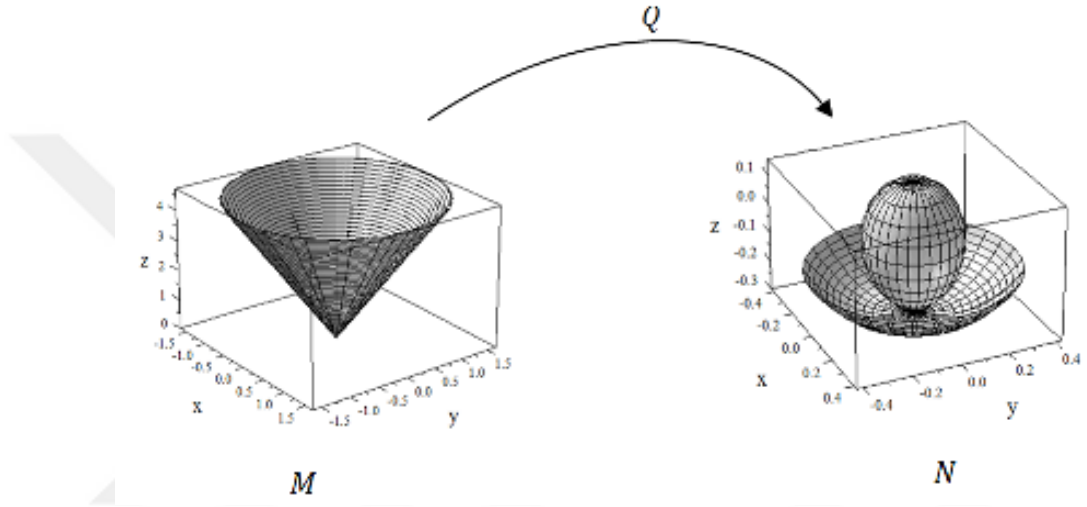
$\langle f(t), f(t) \rangle = 1$ ve $\langle f'(t), f(t) \rangle = 0$ eşitliklerinden

$$\begin{aligned}
Q(s, t) &= \frac{1}{s^2} (s^2 \cos u(s) \langle f(t), f(t) \rangle + s^2 \sin u(s) f(t) \times (f(t) \times f'(t))) \\
&= \cos u(s) + \sin u(s) (\langle f'(t), f(t) \rangle f(t) - \langle f(t), f(t) \rangle f'(t)) \\
&= \cos u(s) - \sin u(s) f'(t) \\
&= q(s, t)
\end{aligned}$$

böylece $M(s, t)$ konisini $N(s, t)$ GSO yüzeyine dönüştüren kuaterniyon operatörü $q(s, t)$ birim kuaterniyonu olduğu kolayca aşağıdaki biçimde gösterilebilir.

$$\begin{aligned} q(s, t) * M(s, t) &= s(\cos u(s)f(t) + \sin u(s)f(t) \times f'(t)) \\ &= N(s, t). \end{aligned}$$

$u(s) = \frac{1}{2s}$ ve $f(t) = (\frac{1}{3} \cos 3t, \frac{1}{3} \sin 3t, \frac{2\sqrt{2}}{3})$ olmak üzere, $M(s, t)$ konisini $N(s, t)$ GSO yüzeyine dönüştüren kuaterniyon operatörü şekil 5.6'da gösterilebilir.



Şekil 5.6 M yüzeyini N yüzeyine dönüştüren kuaterniyon operatörü

Sonuç 5.3 $x : D \rightarrow M$, parametreleri "s ve t" olan bir yüzey ve $\alpha(s)$ eğrisi M yüzeyi üzerinde birim hızlı bir eğri olmak üzere, teorem 4.2'de $Q(s) = k_n(s) + t_g(s)U(s)$ kuaterniyon operatörü $T(s)$ vektörünü $S(T(s)) = k_n(s)T(s) + t_g(s)Y(s)$ Darboux çatısıyla şekil operatörüne dönüştürmüştür. Burada kullanılan $Q(s)$ operatörü teorem 5.3'ten yararlanarak aşağıdaki biçimde elde edilebilir.

$$\begin{aligned} Q(s) &= \frac{1}{\|T(s)\|^2} (\langle T(s), S(T(s)) \rangle + T(s) \times S(T(s))) \\ &= (\langle T(s), T(s) \rangle k_n(s) + \langle T(s), Y(s) \rangle t_g(s) \\ &\quad + T(s) \times T(s)k_n(s) + t_g(s)T(s) \times Y(s)) \\ &= (\langle T(s), T(s) \rangle k_n(s) + t_g(s)T(s) \times Y(s)) \\ &= k_n(s) + t_g(s)U(s) \end{aligned}$$

böylece kuaterniyonik şekil operatöründe kullanılan $Q(s)$ operatörü elde edilir.



6. TARTIŞMA VE SONUÇ

Kuaterniyonlar, 3-boyutlu öklid uzayında vektörler üzerine etki etmektedir. Tezde kuaterniyonların bu özelliklerinden yararlanılmıştır. 3. bölümde, bazı yüzeyler kuaterniyonlar ile elde edilmiş ve kuaterniyonların kinematik özelliklerinden yararlanarak yüzeylerde homotetik hareketler elde edilmiştir. 4. bölümde kuaterniyonlar, yüzeylerin araştırılmasında önemli bir yeri olan şekil operatöründe kullanılarak kuaterniyonik şekil operatörü tanımlandı.

5. bölümde, eğri ve yüzeylerin konum vektörlerinden yararlanarak bir kuaterniyon operatörü tanımlandı. Bu kuaterniyon operatörüyle eğri ve yüzeylerin diferensiyel geometrisinde kuaterniyonları kullanma olanağı sağladı. Kuaterniyon operatörüne karşılık gelen matristen yararlanarak eğri ve yüzeylerde bazı kinematik özellikler incelendi.

Kuaterniyonik şekil operatörü, yüzeylerin incelenmesinde kullanılan şekil operatörü yerine kullanılarak çalışılabilir. Ayrıca, kuaterniyonik şekil operatörü Minkowski 3-uzayında elde edilerek araştırılabilir. Tezin 5. bölümünde, tanımlanan kuaterniyon operatörü, geliştirilerek bazı kinematik uygulamalarda çalışılabilir. Ayrıca, bu operatör Minkowski 3-uzayında çalışılabilir.

KAYNAKLAR

- Aslan, S. and Yaylı, Y. 2016a. Canal Surfaces with Quaternions. *Advanced in Applied Clifford Algebras*, 26(1); 31-38.
- Aslan, S. and Yaylı, Y. 2016b. Split quaternions and canal surfaces in Minkowski 3-space. *International Journal of Geometry*, 5(2); 51-61.
- Aslan, S. and Yaylı, Y. 2017a. Generalized constant ratio surfaces and quaternions, *Kuwait Journal Science*, 44(1); 108-113.
- Aslan, S. and Yaylı, Y. 2017b. Quaternionic Shape Operator. *Advanced in Applied Clifford Algebras*, 27(4); 2921–2931.
- Babaarslan, M. and Yaylı, Y. 2012. A new approach to constant slope surfaces with quaternion. *ISRN Geometry*, 2012(2012); 0-8.
- Babaarslan, M. and Yaylı, Y. 2013. Split Quaternions and Spacelike Constant Slope Surfaces in Minkowski 3-space. *International Journal of Geometry*, 2(1); 23-33.
- Bayro-Corrochano, E. 2003. Modeling the 3D kinematics of the eye in the geometric algebra framework. *Pattern Recognition*, 36; 2993–3012.
- Bekar, M. and Yaylı, Y. 2013. Involutions of Complexified Quaternions and Split Quaternions. *Advanced in Applied Clifford Algebras*, 23(2); 283-299.
- Bottema, O. and Roth, B. 1979. *Theoretical Kinematics*. North Holland Publishing Company, New York.
- Boyadzhiev, K. N. 1999. Spirals and Conchospirals in the Flight of Insects. *The Collage Mathematics Journal*, 30(1); 23-31.
- Chen, B.-Y. 2001. Constant-ratio hypersurfaces. *Soochow Journal of Mathematics*, 27(4); 353-362.
- Doğan, F., 2012. *Generalized Canal Surfaces*. Doktora Tezi, Ankara Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara.
- Düldül, M. 2010. Two and three dimensional regions from homothetic motions. *Applied Mathematics ENotes*, 10; 86–93.
- Fu, Y. and Munteanu, M. I. 2014. Generalized constant ratio surfaces in E^3 . *Bulletin of the Brazilian Mathematical Society*, 45(1); 73-90.
- Gök, I. 2017. Quaternionic Approach of Canal Surfaces Constructed by Some New Ideas. *Advanced in Applied Clifford Algebras*; 27(2); 1175-1190.
- Gray, A. 1999. *Modern Differential Geometry of Curves and Surfaces with Mathematics*. CrcPress, Second ed., USA.
- Gross, A. 1994. Analyzing Generalized Tubes. *Proceedings of the SPIE*, 2354; 422-433.

- Hacısalihoğlu, H. H. 1971. On the Rolling of one curve or surface upon another. Proceeding of the Royal Irish Academy, 71A(2); 13-17.
- Hacısalihoğlu, H. H. 1983. Hareket Geometrisi ve Kuarterniyonlar Teorisi. Gazi Üniversitesi Yayınları, Ankara.
- Hamilton, W. R. 1844. On quaternions; or on a new system of imaginaries in algebra. Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science, London, 25(3); 489–495.
- Karacan, M. K. and Bukcu, B. 2007a. An Alternative Moving Frame for Tubular Surface around the Spacelike Curve with a Spacelike Binormal in Minkowski 3-Space, *Mathematica Moravica*, 11; 47-54.
- Karacan, M. K. and Bukcu, B. 2007b. An Alternative Moving Frame for Tubular Surfaces around Timelike Curves in Minkowski 3-Space, *Balkan Journal of Geometry and Its Applications*, 2(12); 73-80.
- Karacan, M. K. and Yaylı, Y. 2004. Special two parameter motion in Lorentzian plane. *Thai J. Math.*, 2(2); 239-246.
- Karacan, M. K. and Yaylı, Y. 2005. General two parameter motion. *Algebras Groups Geometry*, 22(1); 137-144.
- Karger, A. and Novák, J. 1985. *Space Kinematics and Lie Groups*. Breach Science Publishers S.A. Switzerland.
- Kocakusaklı, E., Tuncer, O.O., Gok, I. and Yaylı, Y. 2017. A New Representation of Canal Surfaces with Split Quaternions in Minkowski 3-Space. *Advanced in Applied Clifford Algebras*, 27(2); 1387-1409.
- Koenderink, J. 1990. *Solid Shape*. MIT Press, Cambridge, MA.
- Kula, L. and Yaylı, Y. 2007. Split quaternions and rotations in semi Euclidean Space E_2^4 . *J. Korean Math.. Soc.* 44(6); 1313-1327.
- Leclercq, G., Lefèvre, P. and Blohm, G. 2013. 3D kinematics using dual quaternions: theory and applications in neuroscience. *METHODS ARTICLE* published : 20 February, doi: 10.3389/fnbeh.2013.00007.
- Munteanu, M. I. 2010. From golden spirals to constant slope surfaces. *J. Math. Phys.*, 51(7); 073507.
- O'Neill, B. 2006. *Elementary Differential Geometry*. Revised Second Edition, Department of mathematics University of California, Elsevier, Los Angles.
- Ozdemir, M. and Ergin, A. A. 2006. Rotations with unit timelike quaternions in Minkowski 3-space. *J. Geom. Phys.*, 56(2), 322-326.
- Petrovic, M. and Sucurovic, E. 2000. Some Characterizations of the spacelike, the timelike and the null curves on the pseudo hyperbolic space H_0^2 in E_1^3 . *Kragujevac J. Math.*, 22, 71-82.

- Shoemake, K. 1985. Animating rotation with quaternion curves. in Proceedings of the Proceedings of the 12th Annual Conference on Computer Graphics and Interactive Techniques (SIG-GRAPH '85), 19(3); 245–254.
- Tosun, M., Kucuk, A. and Gungor, M. A. 2006. The homothetic motions in the Lorantzian 3-space. Acta Math. Sci., 26B(4), 711-719.
- Yaylı, Y. 1992. Homothetic Motions at R^4 . Mech. Mach. Theory, 27(3); 303-305.



ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Selahattin ASLAN

Doğum Yeri : Şanlıurfa

Doğum Tarihi : 24/02/1984

Medeni Hali : Bekar

Yabancı Dili : İngilizce

Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl):

Lise : Şanlıurfa Lisesi (2000–2003)

Lisans : Akdeniz Üniversitesi, Matematik Bölümü (2004–2008)

Yüksek Lisans : Harran Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı (2011–2013)

Çalıştığı Kurum/Kurumlar ve Yıl:

Ölçme, Seçme ve Yerleştirme Merkezi (2015–...)

SCI Yayınları

Aslan, S., Yaylı, Y., 2016. *Canal Surfaces with Quaternions*. Advanced in Applied Clifford Algebras, 26(1); 31-38.

Aslan, S., Yaylı, Y., 2017. *Generalized constant ratio surfaces and quaternions*, Kuwait Journal Science, 44(1); 108-113.

Aslan, S., Yaylı, Y., 2017. *Quaternionic Shape Operator*. Advanced in Applied Clifford Algebras, 27(4); 2921–2931.

Hakemli Dergiler

Aslan, S., Yaylı, Y., 2016. *Split quaternions and canal surfaces in Minkowski 3-space*. International Journal of Geometry, 5(2); 51-61.