ANKARA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ÖKLİD UZAYINDA DÜZENLENMİŞ ORTOGONAL ÇATIYA GÖRE BAZI ÖZEL EĞRİLER

Emire ÖZCAN TETİK

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ANKARA
2022

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

ÖKLİD UZAYINDA DÜZENLENMİŞ ORTOGONAL ÇATIYA GÖRE BAZI ÖZEL EĞRİLER

Emire ÖZCAN TETİK

Ankara Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Faik Nejat EKMEKCİ

Bu tez 5 bölümden oluşmaktadır. 1. Bölümde tez boyunca kullanılan temel kavramlar ve ön bilgiler kısmı mevcuttur. Ön bilgiler kısmında tez boyunca kullanılacak olan düzenlenmiş ortogonal çatıların nasıl oluşturulduğuna yer verilmiştir. 2. Bölümde Öklid uzayındaki ortogonal çatıda eğriliğe göre düzenlenen genel helislerin, slant helislerin ve Bertrand eğrilerinin sağlayan teoremlerine yer verilmiştir. 3. Bölümde Öklid uzayındaki ortogonal çatıda torsiyona göre düzenlenen genel helislerin ve Bertrand eğrilerinin sağlayan teoremlerine yer verilmiştir. 4. Bölümde ise Minkowski-3 uzayındaki spacelike eğrisinin torsiyona göre düzenlenmiş ortogonal çatısında genel helislerin sağlayan teoremlerine yer verilmiştir. 5. Bölümde tartışma ve sonuç kısmına yer verilmiştir.

Ekim 2022, 58 sayfa

Anahtar Kelimeler: Bertrand eğri çifti, Helis, Slant helis, Öklid uzayındaki ortogonal çatıda eğriliğe göre düzenlenen, Öklid uzayındaki ortogonal çatıda torsiyona göre düzenlenen, Minkowski-3 uzayındaki spacelike eğrisinin torsiyona göre düzenlenen

ABSTRACT

Master Thesis

ON SOME CURVES WITH MODIFIED ORTHOGONAL FRAME IN EUCLIDEAN 3-SPACE

Emire ÖZCAN TETİK

Ankara University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Faik Nejat EKMEKCİ

This thesis consists of 5 chapters. In the 1. Chapter, there are the basic concepts and preliminary information used throughout the thesis. In the preliminary information section, it is given how to create the modified orthogonal frames that will be used throughout the thesis. In the 2. Chapter, the obtainer theorems of general helixes, slant helixes and Bertrand curves modified according to the curvature in the orthogonal frame in Euclidean space are given. In the 3. Chapter, the obtainer theorems of general helixes and Bertrand curves modified according to torsion on the orthogonal frame in Euclidean space are given. In the 4. Chapter, the obtainer theorems of general helixes in the orthogonal frame of the spacelike curve in Minkowski-3 space modified according to torsion are given. In the 5. Chapter, the obtainer discussion and conclusion part.

October 2022, 58 pages

Anahtar Kelimeler: Bertrand curve, Helix, Slant helix, Modified according to curvature on the orthogonal frame in Euclidean space, Modified according to torsion on the orthogonal frame in Euclidean space, Modified according to torsion on the orthogonal frame of the spacelike curve in Minkowski-3 space

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans tez çalışmamın her aşamasında bilgi ve tecrübelerini benimle paylaşan, görüş ve önerileriyle beni yönlendiren danışman hocam Prof. Dr. F. Nejat EKMEKCİ'ye (Ankara Üniversitesi Matematik Anabilim Dalı) en derin duygularımla saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

Tez yazım aşamasında beni yalnız bırakmayan, desteklerini esirgemeyen çok kıymetli eşim Osman Tetik'e, bana maddi manevi her desteği koşulsuz veren, ne yapsam haklarını ödeyemeyeceğim biricik ailem Gülbahar Özcan'a ve Ali Rıza Özcan'a tüm kalbimle şükranlarımı sunarım.

Emire ÖZCAN TETİK
Ankara, Ekim 2022

İÇİNDEKİLER

TEZ ONAY SAYFASI

ETİK i

ÖZET ii

ABSTRACT iii

TEŞEKKÜR iv

SİMGELER DİZİNİ vi

ŞEKİLLER DİZİNİ vii

1. GİRİŞ 1

1.1 Temel Kavramlar 2

1.1.1 Öklid uzayında temel kavramlar 2

1.1.2 Uzayda eğriler 5

1.1.3 Minkowski-3 uzayında temel kavramlar 11

1.2 Ön Bilgiler 13

2. ÖKLİD UZAYINDAKİ ORTOGONAL ÇATIDA EĞRİLİĞE GÖRE DÜZENLENEN BAZI ÖZEL EĞRİLER 18

2.1 Öklid Uzayındaki Ortogonal Çatıda Eğriliğe Göre Düzenlenen Genel Helisler 18

2.2 Öklid Uzayındaki Ortogonal Çatıda Eğriliğe Göre Düzenlenen Bertrand Eğrileri 28

3. ÖKLİD UZAYINDAKİ ORTOGONAL ÇATIDA TORSİYONA GÖRE DÜZENLENEN BAZI ÖZEL EĞRİLER 41

3.1 Öklid Uzayındaki Ortogonal Çatıda Torsiyona Göre Düzenlenen Genel Helisler 41

3.2 Öklid Uzayındaki Ortogonal Çatıda Torsiyona Göre Düzenlenen Bertrand Eğrileri 47

4. MİNKOWSKİ-3 UZAYINDAKİ SPACELİKE EĞRİSİNİN TORSİYONA GÖRE DÜZENLENMİŞ ORTOGONAL ÇATISINDA GENEL HELİSLER 49

5. TARTIŞMA VE SONUÇ 55

KAYNAKLAR 56

ÖZGEÇMİŞ 58

SİMGELER DİZİNİ

κ	Bir eğrinin eğriliği
τ	Bir eğrinin burulması
$\{t, n, b\}$	Bir eğrinin ortonormal çatıya göre Frenet vektörleri
$\{T, N, B\}$	Bir eğrinin ortogonal çatıya göre Frenet vektörleri
t	Bir eğrinin ortonormal çatıya göre teğet vektörü
n	Bir eğrinin ortonormal çatıya göre normal vektörü
b	Bir eğrinin ortonormal çatıya göre binormal vektörü
T	Bir eğrinin ortogonal çatıya göre teğet vektörü
N	Bir eğrinin ortogonal çatıya göre normal vektörü
B	Bir eğrinin ortogonal çatıya göre binormal vektörü
$\times$	Vektörel çarpım
M	Manifold
$T_p(M)$	M manifoldunun p noktasındaki tanjant uzayı
D	M manifoldu üzerindeki kovaryant türev
$\mathbb{R}$	Reel uzay
λ	Sabit reel sayı
$\|.\|$	Norm
E^3	3-boyutlu Öklid uzayı
I	Temel form
$<,>$	İç çarpım
φ	Eğri
ψ	Eğri
α	Eğri
α^*	Eğri

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 1.1 Eğri 5
Şekil 1.2 Bir eğrinin yay uzunluğu 6
Şekil 1.3 Bir eğrinin teğeti 7
Şekil 1.4 Bir eğrinin asli normali 8
Şekil 1.5 Bir eğrinin binormali 8
Şekil 1.6 Bertrand eğri çifti 10
Şekil 2.1 Dairesel Helis 24
Şekil 2.2 Dairesel Helis 25
Şekil 2.3 (φ,ψ) Bertrand eğri çiftinin Öklid-3 uzayındaki ortogonal çatıda eğriliğe göre düzenlenmiş Frenet vektörleri 30
Şekil 2.4 Bertrand eğri çifti (φ,ψ) 35
Şekil 2.5 Dairesel Helisle Üzerinde Bulunduğu Dönel Silindir Ekseni 35

1. GİRİŞ

Günümüzde diferansiyel geometride, Riemann manifoldlarının özellikleri ve bu manifolda ait bir eğrinin eğriliği, burulması ile ilgili birçok çalışma yapılmış ve bunlar ile ilgili ilginç sonuçlar elde edilmiştir. Klasik diferansiyel geometride eğrinin eğrilikleri arasındaki ilişkilerin öne çıktığı helisler ve Bertrand eğrileri oldukça detaylı incelenmiştir.

Helis eğrilerinin bazı ilginç uygulamaları mevcuttur. Örneğin; Deoksiribo nükleik asit sarmalında, karbon nano tüplerde, helis formunda basamaklarda, fraktal geometride, mimarlık ve mühendislik alanlarında kullanılabilmektedir. Bunun gibi birçok alanda kullanılmasından dolayı helisler dünyadaki en gizemli eğrilerden biridir. Helisler $\kappa \neq 0$ ve $\tau \neq 0$ olmak üzere dik dairesel silindire çevrilmiş eğrilerdir. Helis eğrisinin genelleştirilmesi olan genel helis eğrisi sabit bir dayanakla teğet vektörü sabit açı yapan eğri olarak ifade edilmektedir. (Barros 1997, İlarslan ve Boyacıoğlu 2008, Munteanu 2010, Babaarslan 2013)

Genel helisler için ilk sonuç Lancret tarafından ortaya konulmuş ve Lancret teoremi şeklinde görülmektedir. Bu ifade; “ Bir eğri genel helis eğrisidir ancak ve ancak sıfırdan farklı eğrilik fonksiyonlarının oranları sabittir.” şeklindedir. (Struik 1988, İlarslan 2018)

2004 yılında ise İzumiya ve Takeuchi slant helisleri ifade etmişlerdir. Bu ifade “Asal normal doğruları sabit bir doğru ile sabit bir açı yapan eğrilere slant helis denir” şeklindedir. İzumiya ve Takeuchi tarafından yapılan araştırmaya göre $\kappa \neq 0$ olmak üzere birim hızlı bir eğrinin slant helistir ancak ve ancak

$$\frac{\kappa^2}{(\kappa^2+\tau^2)^{\frac{3}{2}}}\left(\frac{\tau}{\kappa}\right)'$$

dır.

Diferansiyel geometride bir diğer büyük önem taşıyan eğri ise Bertrand eğrileridir. Bertrand eğrilerini 1850’ de J. Bertrand bulmuştur. Bertrand eğrisinin bütün noktalarındaki asli normal vektörü Bertrand çifti şeklinde ifade edilen öteki bir eğrinin de asli normal vektörü olarak ifade edilir. ∀s∈I için α eğrisi Bertrand eğrisidir ancak ve ancak λ_1κ(s)+λ_2τ(s)=1 gerçekleşecek şekilde $\lambda_1 \neq 0$ ve $\lambda_2 \neq 0$ ve $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ sabitlerinin olmasıdır. Bu ise düzlemsel eğrilerin ve dairesel helislerin Bertrand eğrileri olduğunu söyler. (Millman ve Parker 1977, Izumiya ve Takeuchi 2002, Babaarslan 2013)

2002 yılında İzumiya ve Takeuchi çalışmalarında Öklid-3 uzayında Bertrand eğrilerinin küresel eğrilerden de oluşturulabileceğini kanıtladılar. Diğer yandan küresel evolüt görüşünü ifade ettiler. Küresel eğrilerin Singüler nokta teorisinin bir yürütmesi olarak Bertrand eğrilerinin "generic" niteliklerini araştırdılar. (Babaarslan 2013)

Bertrand eğrileri, paralel eğriler olarak bilişim altyapılı dizaynlarında ve üretimlerinde kullanılır. (Nutbourne and Martin 1988, Babaarslan 2013)

1.1 Temel Kavramlar

Bu parçada tez süresince kullanılan Öklid-3 uzayı ve Minkowski-3 uzayı hakkındaki temel kavramlara yer verilmiştir.

1.1.1 Öklid uzayında temel kavramlar

Tanım 1.1.1.1 $\mathbb{R}$, reel sayıları göstersin. $\mathbb{R}^n = \{(p_1, p_2, \ldots., p_n)\}$ eşitliğiyle belirli $\mathbb{R}^n$ kümesinde toplama işlemi

$$(p_1, p_2, \ldots., p_n) + (q_1, q_2, \ldots., q_n) = (p_1 + q_1, p_2 + q_2, \ldots, p_n + q_n)$$

eşitliğiyle ifade edilir (Sabuncuoğlu, A., 2014).

Tanım 1.1.1.2 Skalarla çarpma işlemi, $\lambda \in \mathbb{R}$ ve $(p_1, p_2, \ldots., p_n) \in \mathbb{R}^n$ için

$$\lambda(p_1, p_2, \ldots., p_n) = (\lambda p_1, \lambda p_2, \ldots., \lambda p_n)$$

eşitliğiyle ifade edilir (Sabuncuoğlu, A., 2014).

Tanım 1.1.1.3 $\mathbb{R}^n$ vektör uzayında $p = (p_1, p_2, \dots, p_n)$ ve $q = (q_1, q_2, \dots, q_n)$ olmak üzere

$$\langle p, q \rangle = \sum_{i=1}^{n} p_i q_i$$

eşitliğiyle ifade edilen $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $(p, q) \to \langle p, q \rangle$ fonksiyonu, $\mathbb{R}^n$ uzayında bir iç çarpımdır. Bu iç çarpıma, $\mathbb{R}^n$ uzayının **doğal iç çarpımı** veya **Öklid iç çarpımı** denir (Sabuncuoğlu, A., 2014).

Tanım 1.1.1.4 $p \in \mathbb{R}^n$ olmak üzere

$$\|p\| = \sqrt{\langle p, p \rangle}$$

olsun. $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $p \to \|p\|$ fonksiyonu, $\mathbb{R}^n$ uzayında bir normdur. Buna göre $\mathbb{R}^n$ vektör uzayı, normlu vektör uzayıdır. (Sabuncuoğlu, A., 2014)

$$d(p, q) = \|p - q\|$$

Şeklinde ifade edilen $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ fonksiyonu, $\mathbb{R}^n$ uzayında bir metriktir. Bundan görülür ki $\mathbb{R}^n$ bir metrik uzaydır ve bu metrikle birlikte $\mathbb{R}^n$ uzayına **Öklid Uzayı** olarak adlandırılır. Bu uzay E^n ile de gösterilebilir. (Sabuncuoğlu, A., 2014).

Tanım 1.1.1.5 r pozitif bir reel sayı ve $p_0 \in \mathbb{R}^n$ olsun. $\{p : p_0 \in \mathbb{R}^n$ ve $\|p - p_0\| < r\}$ kümesine, p_0 merkezli r yarıçaplı **açık yuvar** denir. $B_r(p_0)$ ile gösterilir (Sabuncuoğlu, A., 2014).

Tanım 1.1.1.6 $A \subset \mathbb{R}^n$ olmak üzere A kümesinin her bir p_0 elemanı, A kümesi içinde kalan en az bir açık yuvarın merkezi oluyorsa A kümesine $\mathbb{R}^n$ kümesinin bir **açık alt kümesi** denir (Sabuncuoğlu, A., 2014).

Tanım 1.1.1.7 $p_0 \in \mathbb{R}^n$ ve $V \subset \mathbb{R}^n$ olsun. V içinde p_0 noktasını içeren en az bir açık küme varsa V kümesine, p_0 noktasının bir **komşuluğu** denir. (Sabuncuoğlu, A., 2014)

Tanım 1.1.1.8 $x_j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $x_j(p_1, p_2, \ldots, p_n) = p_j$ fonksiyonu, $\mathbb{R}^n$ uzayında j inci **dik koordinat fonksiyonu** olarak adlandırılır. Koordinat fonksiyonlarının meydana getirdiği $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ sıralı n lisi, $\mathbb{R}^n$ üstünde **dik koordinat sistemi** (**Öklidyen koordinat sistemi**) olarak adlandırılır. (Sabuncuoğlu, A., 2014).

Tanım 1.1.1.9 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ve $p \in \mathbb{R}^n$ olsun.

$$\lim_{s\to 0} \frac{1}{s}\left[f\left(p_1, \ldots, p_{j-1}, p_j + s, p_{j+1}, \ldots, p_n\right) - f\left(p_1, \ldots, p_{j-1}, p_j, p_{j+1}, \ldots, p_n\right)\right]$$

limiti mevcutsa bu limite, f nin, j inci parametresine göre kısmi türevi denir ve

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(p) \quad veya \;\; f_j(p)$$

biçiminde gösterilir (Sabuncuoğlu, A., 2014).

Tanım 1.1.1.10 $\mathbb{R}^n$, Öklid-3 uzayının standart bazı $\{i, j, k\}$ olmak üzere

$$\forall v = (v_1, v_2, v_3) \;\; ve \;\; w = (w_1, w_2, w_3) \in \mathbb{R}^3$$

vektörlerinin **vektörel çarpımı** aşağıdaki gibi tanımlanır (Millmann ve Parker 1977).

$$v \times w = \begin{vmatrix} i & j & k \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} = (v_2 w_3 - v_3 w_2)i + (v_3 w_1 - v_1 w_3)j + (v_1 w_2 - v_2 w_1)k$$

Tanım 1.1.1.11 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ve f sürekli ise f, C^0 **sınıfından bir fonksiyondur**. Bu şekilde tanımlanan bütün fonksiyonların kümesi $C^0(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ şeklinde gösterilir.

$\mathbb{R}^n$ nın her noktasında f'nin kısmi türevleri mevcutsa ve bu türevler sürekli fonksiyonlar ise f fonksiyonu C^1 **sınıfındandır**.

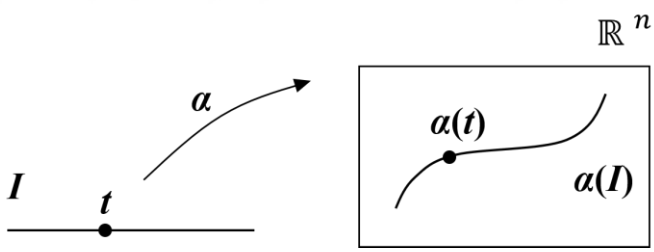
f'nin $\mathbb{R}^n$ nın her bir noktasında k ıncı mertebeden kısmi türevleri mevcutsa ve bu türevler sürekli fonksiyonlar ise f fonksiyonu C^k **sınıfındandır**. Bu şekilde tanımlanan bütün fonksiyonların kümesi $C^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ şeklinde gösterilir.

$\mathbb{R}^n$ nın her bir p noktasında f'nin her mertebeden kısmi türevleri mevcutsa f, C^∞ **sınıfındandır** veya **düzgün (pürüzsüz) fonksiyondur**. Bu şekilde tanımlanan bütün fonksiyonların kümesi $C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ şeklinde gösterilir.

$p \in \mathbb{R}^n$ için f fonksiyonu p noktasının en az bir açık komşuluğunda regüler ise f, p noktasında C^∞ **sınıfındandır** veya **düzgün (pürüzsüz) fonksiyondur**. (Sabuncuoğlu, A., 2014).

1.1.2 Uzayda eğriler

Tanım 1.1.2.1 I , $\mathbb{R}$ nin bir açık aralığı olmak üzere $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$ şeklinde regüler (C^∞ sınıfından) bir α dönüşümüne, $\mathbb{R}^n$ uzayında bir **eğri** olarak adlandırılır (Şekil 1.1) (Sabuncuoğlu, A., 2014).



Şekil 1.1 Eğri

Tanım 1.1.2.2 $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$ eğrisi verilsin. I aralığının bir t noktasında teğet uzayı olan $T_t(\mathbb{R}^1)$ uzayı 1 boyutlu bir vektör uzayıdır.

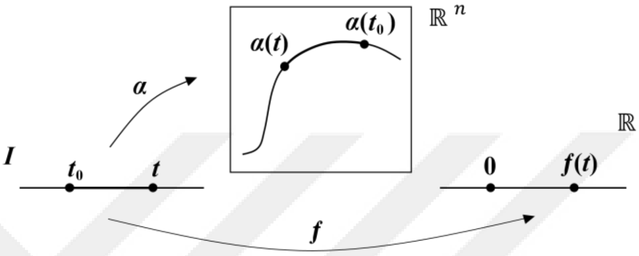
$\mathbb{R}^1$ deki dik koordinat fonksiyonu x olsun. $T_t(\mathbb{R}^1)$ uzayının doğal tabanı $\left\{\frac{d}{dx_{|t}}\right\}$ kümesidir. $\frac{d}{dx}$, $\mathbb{R}^1$ uzayının her bir t noktasına, $\frac{d}{dx_{|t}}$ vektörüne karşılık getiren vektör alanıdır (Şekil 2.2) (Sabuncuoğlu, A., 2014).

Tanım 1.1.2.3 $\alpha_{*t} : T_t(\mathbb{R}^1) \to T_{\alpha(t)}(\mathbb{R}^n)$ olmak üzere

$$\alpha_{*t}\left(\frac{d}{dx_{|t}}\right)$$

vektörüne, α eğrisinin $\alpha(t)$ noktasındaki hız vektörü olarak adlandırılır ve kısaca $\alpha'(t)$ ile gösterilir (Sabuncuoğlu, A., 2014).

Tanım 1.1.2.4 $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$ eğrisi verilsin. $t_0 \in I$ olmak üzere eğride $\alpha(t_0)$ noktasından başlanarak yay uzunluğunun ölçülmeye başlandığı varsayılsın. (Şekil 1.2)



Şekil 1.2 Bir eğrinin yay uzunluğu

$t < t_0$ ise $\alpha(t_0)$ ve $\alpha(t)$ noktaları arasında kalan eğri parçasının uzunluğunun negatifine $f(t)$ denilsin.

$t = t_0$ için $f(t_0) = 0$ olarak tanımlansın.

$t_0 < t$ ise $\alpha(t_0)$ ve $\alpha(t)$ noktaları arasında kalan eğri parçasının uzunluğuna $f(t)$ denilsin.

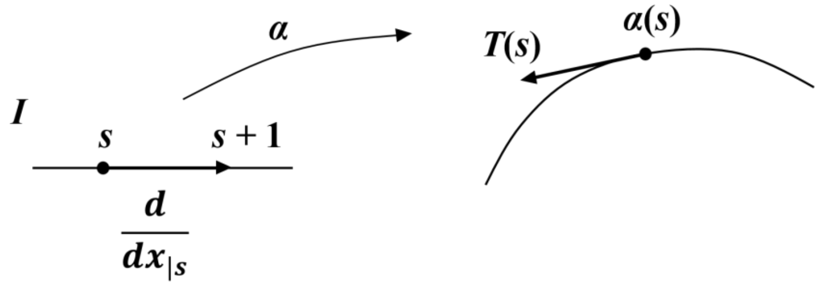
Böylece I aralığından $\mathbb{R}$ ye giden $f : t \to f(t)$ fonksiyonu ifade edilmiş olur. Bu f fonksiyonuna, α eğrisinin **yay uzunluğu fonksiyonu** denilecektir (Sabuncuoğlu, A., 2014).

Teorem 1.1.2.1 $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$ eğrisinin yay uzunluğu fonksiyonu f olduğuna göre

$f' = \|\alpha'\|$ dür

(Sabuncuoğlu, A., 2014).

Tanım 1.1.2.5 $\mathbb{R}^3$' de birim hızlı $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ eğrisi için $T(s) = \alpha'(s)$ eşitliğiyle verilen $T\ (s)$ vektörüne, α eğrisinin **birim teğet vektörü** olarak adlandırılır.



Şekil 1.3 Bir eğrinin teğeti

T fonksiyonu, I aralığının $\forall s$ noktasına, $\alpha(s)$ noktasındaki $T(s)$ teğet vektörünü karşılık getirir. (Şekil 1.3) Buna göre T, α eğrisi üstünde bir vektör alanıdır. Bu vektör alanı, α eğrisinin **birim teğet vektör alanı** şeklinde adlandırılır. Kısaca $T = \alpha'$ yazılabilir (Sabuncuoğlu, A., 2014).

Tanım 1.1.2.6 $\mathbb{R}^3$'de birim hızlı $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ eğrisi için $\kappa : I \to \mathbb{R}$, $\kappa(s) = \|T'(s)\|$ fonksiyonuna α eğrisinin **eğrilik fonksiyonu** şeklinde adlandırılır. $\kappa(s)$ sayısına ise eğrinin $\alpha(s)$ noktasındaki **eğriliği** denir.

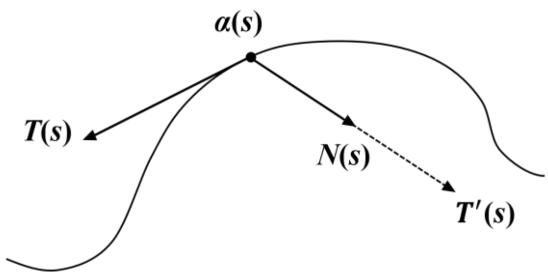
$T = \alpha'$ olduğundan $\kappa(s) = \|\alpha''(s)\|$ olur (Sabuncuoğlu, A., 2014).

Tanım 1.1.2.7 $\mathbb{R}^3$'de birim hızlı $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ eğrisi için

$$N(s) = \frac{1}{\kappa(s)} T'(s)$$

eşitliğiyle görülen $N(s)$ vektörüne, α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki **birinci dik vektörü (asli normali)** , N vektör alanına ise α eğrisinin **birinci dik vektör alanı (asli normal vektör alanı)** denir.

N vektör alanı kısaca $N = \frac{1}{\kappa} T'$ şeklinde yazılabilir (Şekil 1.4) (Sabuncuoğlu, A., 2014).



Şekil 1.4 Bir eğrinin asli normali

Tanım 1.1.2.8 $\mathbb{R}^3$'de birim hızlı $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ eğrisi için

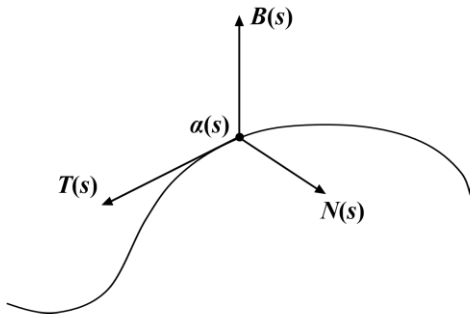
$$B(s) = T(s) \times N(s)$$

eşitliğiyle tanımlı $B(s)$ vektörüne, α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki **ikinci dik vektörü (binormali)** denir. B vektör alanına, α eğrisinin ikinci dik vektör alanı **(binormal vektör alanı)** denir.

Vektörel çarpımın özellikleri sebebiyle $B(s)$ vektörü $T(s)$ ve $N(s)$ vektörlerine diktir. $\{T(s), N(s), B(s)\}$ kümesi pozitif yönlü bir çatıdır. Ayrıca her $s \in I$ için

$$\|B(s)\| = \|T(s)\|\|N(s)\| \left|\sin\frac{\pi}{2}\right| = 1$$

dir. Bunun neticesinde $\{T(s), N(s), B(s)\}$ kümesi $T_{\alpha(s)}(\mathbb{R}^3)$ uzayının ortonormal bir tabanı olarak ifade edilir (Şekil 1.5) (Sabuncuoğlu, A., 2014).



Şekil 1.5 Bir eğrinin binormali

Tanım 1.1.2.9 $T(s), N(s), B(s)$ vektörlerine $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki **Frenet vektörleri** şeklinde adlandırılır. $\{T(s), N(s), B(s)\}$ kümesine, α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki **Frenet çatısı** şeklinde adlandırılır.

T, N, B vektör alanlarına ise α eğrisi üzerinde **Frenet vektör alanları** şeklinde adlandırılır (Sabuncuoğlu, A., 2014).

Tanım 1.1.2.10 Birim hızlı $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ eğrisinin Frenet vektör alanları T, N, B olmak üzere

$$\tau : I \to \mathbb{R}^3, \tau(s) = -\langle B'(s), N(s) \rangle$$

fonksiyonuna, α eğrisinin **burulma fonksiyonu** olarak adlandırılır. $\tau(s)$ sayısı ise eğrinin $\alpha(s)$ noktasındaki **burulması** olarak adlandırılır (Sabuncuoğlu, A., 2014).

Teorem 1.1.2.2 Birim hızlı $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ eğrisinin Frenet vektör alanları T, N, B ise

$$T' = \kappa N$$

$$N' = -\kappa T + \tau B$$

$$B' = -\tau N$$

dir (Sabuncuoğlu, A., 2014).

Tanım 1.1.2.12 $\mathbb{R}^3$'de birim hızlı $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ eğrisinin Frenet vektör alanları T, N, B olmak üzere;

$\{T(s), N(s)\}$ kümesinin gösterdiği düzleme, $\alpha(s)$ noktasındaki **dokunum (oskülatör) düzlemi** denir.

$\{T(s), B(s)\}$ kümesinin gösterdiği düzleme, $\alpha(s)$ noktasındaki **doğrultma(rektifiyan) düzlemi** denir.

$\{N(s), B(s)\}$ kümesinin gösterdiği düzleme, $\alpha(s)$ noktasındaki **dik(normal) düzlem** denir (Sabuncuoğlu, A., 2014).

Teorem 1.1.2.3 $\mathbb{R}^3$'de birim hızlı $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ eğrisinin Frenet vektör alanları T, N, B olmak üzere

$$N \times B = T$$

$$B \times T = N$$

dir (Sabuncuoğlu, A., 2014).

Tanım 1.1.2.13 $\mathbb{R}^3$, Öklid-3 uzayında düzenli bir α eğrisinin birim teğet vektörü T olmak üzere, T sabit bir u vektörü ile sabit bir φ açısı yapıyorsa, kısaca

$$\langle T, u\rangle = \cos\varphi$$

ise, α eğrisine genel helis şeklinde adlandırılır (Lancret, 1802).

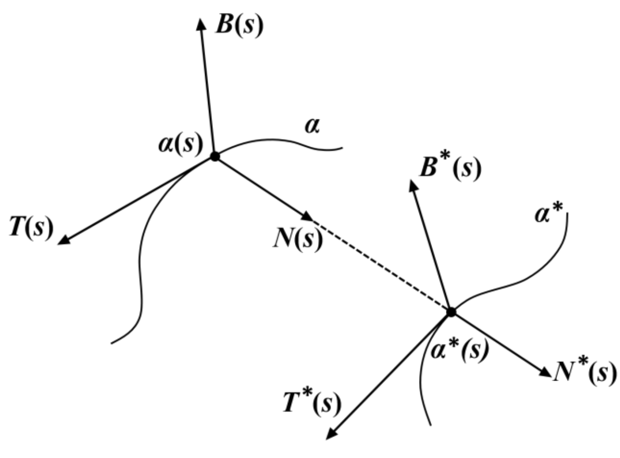
Teorem 1.1.2.4 $\alpha : I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$, Öklid-3 uzayında düzenli bir eğri ve $\kappa > 0$ olsun. α eğrisi genel helistir ancak ve ancak $\frac{\tau}{\kappa} = c \in \mathbb{R}$ dir (Lancret, 1802).

Tanım 1.1.2.14 $\alpha : I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$, Öklid-3 uzayında birim hızlı bir eğri ve $\kappa \neq 0$ olsun. Eğrinin asli normal vektörü olan $\mathbb{N}$, eğrinin her noktasındaki sabit bir u vektörü ile sabit bir açı yapıyorsa, kısaca

$$\langle N, u\rangle = \cos\varphi$$

ise, α eğrisine slant helis olarak adlandırılır (Izimuya ve Takeuchi, 2004).

Tanım 1.1.2.15 Birim hızlı $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ eğrisi ile aynı aralıkta tanımlı $\alpha^* : I \to \mathbb{R}^3$ eğrisi verilsin. $s \in I$ için $\alpha^*(s)$ noktası ile $\alpha(s)$ noktasını birleştiren doğru, α^* eğrisinin $\alpha^*(s)$ noktasındaki birinci normalini ve α nın $\alpha(s)$ noktasındaki birinci normalini kapsıyorsa, α^* eğrisi α eğrisi ile **Bertrand eğri çifti** oluşturuyor şeklinde ifade edilir (Şekil 1.6) (Sabuncuoğlu, A., 2014).



Şekil 1.6 Bertrand eğri çifti

Teorem 1.1.2.5 α^* eğrisi α eğrisi ile Bertrand eğri çifti oluşturuyorsa $k = sabit$ için α^* eğrisi

$$\alpha^* = \alpha + kN$$

biçimindedir (Sabuncuoğlu, A., 2014).

Teorem 1.1.2.6 Bertrand eğri çiftlerinin karşılıklı noktalardaki teğet vektörleri arasındaki açının ölçüsü sabittir (Sabuncuoğlu, A., 2014).

1.1.3 Minkowski-3 uzayında temel kavramlar

Tanım 1.1.3.1 $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3$ olmak üzere

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle_L = -u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3$$

ile ifade edilen çarpma işlemine Lorentz çarpımı denir. Bu çarpım ile kuşatılan $\mathbb{R}^3$ uzayına 3 boyutlu Minkowski (Lorentz) uzayı şeklinde adlandırılır ve ${E_1}^3$ ile ifade edilir (Yüce, 2017)

Bu tanımdan görülür ki bu çarpım pozitif tanımlı değildir. Bu ifadenin yerine bu çarpım Minkowski uzayındaki vektörleri aşağıdaki şekilde sınıflara ayırır. $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3) \in {E_1}^3$ olmak üzere

(i) $\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle_L > 0$ veya $\vec{u} = \vec{0}$ ise $\vec{u}$ vektörüne **spacelike vektör**,

(ii) $\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle_L < 0$ ise $\vec{u}$ vektörüne **timelike vektör**,

(iii) $\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle_L = 0$ ise $\vec{u}$ vektörüne **lightlike (null) vektör**;

şeklinde adlandırılır (Yüce,2017).

Tanım 1.1.3.2 $\forall \vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\overrightarrow{\forall v} = (v_1, v_2, v_3) \in {E_1}^3$ için

$$\vec{u} \times_L \vec{v} = det \begin{vmatrix} -e_1 & e_2 & e_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

şeklinde verilen ifade $\vec{u}$ ve $\vec{v}$ vektörlerinin **Lorentz vektörel çarpımı** olarak adlandılır.

Tanım 1.1.3.3 $\alpha : I \to E_1^{\ 3}$ için $\alpha'(s)$ vektörü timelike vektör ise α eğrisi timelike eğri olarak adlandırılır. $\forall s \in I$ için $\langle \alpha'(s), \alpha'(s) \rangle_L = -1$ ise α birim hızlı **timelike eğri** olarak adlandırılır (Walrave, 1995).

Teorem 1.1.3.1 Birim hızlı timelike $\alpha : I \to E_1^{\ 3}$ eğrisinin Frenet vektör alanları T, N, B ise

$$\begin{bmatrix} T'(s) \\ N'(s) \\ B'(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ \kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T(s) \\ N(s) \\ B(s) \end{bmatrix}$$

dir (Walrave, 1995).

Tanım 1.1.3.4 $\alpha : I \to E_1^{\ 3}$, $\forall s \in I$ için $\alpha'(s)$ vektörü spacelike bir vektör ise α eğrisi **spacelike eğri** olarak adlandırılır. $\forall s \in I$ için $\langle \alpha'(s), \alpha'(s) \rangle_L = 1$ ise α birim hızlı **spacelike eğri** olarak adlandırılır (Walrave, 1995).

$\alpha : I \to E_1^{\ 3}$ birim hızlı bir spacelike eğri olmak üzere $T(s) = \alpha'(s)$ vektörü α eğrisinin birim teğet vektörüdür ve spacelike vektördür. $\langle T(s), T(s) \rangle_L = 1$ olduğundan her iki tarafın türevi alınırsa

$$\langle T'(s), T(s) \rangle_L = 0$$

olur. $T'(s) \perp T(s)$ elde edilir. $T(s)$ spacelike olduğundan $T'(s)$ spacelike ya da timelike olabilir.

1.Durum $T'(s) = \alpha''(s)$ spacelike ise bu durumda

$$\kappa(s) = \|T'(s)\| = \sqrt{\langle \alpha''(s), \alpha''(s) \rangle_L}$$

olarak tanımlanır.

$$N(s) = \frac{T'(s)}{\kappa(s)}$$

eğrinin asli normali olup

$$B(s) = T(s) \times_L N(s)$$

ise eğrinin binormal vektörüdür. Bu eğriler için burulma fonksiyonu

$$\tau(s) = -\langle N'(s), B(s) \rangle_L$$

olarak tanımlanır. Frenet formülleri ise;

$$\begin{bmatrix} T'(s) \\ N'(s) \\ B'(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & \tau & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T(s) \\ N(s) \\ B(s) \end{bmatrix}$$

olarak bulunur (Walrave, 1995).

2.Durum $T'(s) = \alpha''(s)$ timelike ise bu durumda

$$\kappa(s) = \sqrt{-\langle T'(s), T'(s) \rangle_L} = \sqrt{-\langle \alpha''(s), \alpha''(s) \rangle_L}$$

olmak üzere normal vektörü

$$N(s) = \frac{T'(s)}{\kappa(s)}$$

şeklindedir.

$$B(s) = T(s) \times_L N(s)$$

spacelike bir vektördür. Eğrinin burulması ise

$$\tau(s) = \langle N'(s), B(s) \rangle_L$$

olarak tanımlanır. Frenet formülleri ise;

$$\begin{bmatrix} T'(s) \\ N'(s) \\ B'(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ \kappa & 0 & \tau \\ 0 & \tau & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T(s) \\ N(s) \\ B(s) \end{bmatrix}$$

şeklindedir (Walrave, 1995).

1.2 Ön Bilgiler

$\varphi(s)$ eğrisinin yay uzunluğu Öklid-3 uzayında aşağıdaki gibi parametrize edilsin. Ayrıca her yerde $\kappa(s) \neq 0$ olsun. Bunu karşılayan ortonormal çatıya göre $\{t, n, b\}$ Frenet-Serret denklemleri

$$\begin{bmatrix} t'(s) \\ n'(s) \\ b'(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t(s) \\ n(s) \\ b(s) \end{bmatrix}$$

(1.2.1)

olup burada t birim teğet, n birimin asli normali, b birim normal, $\tau(s)$ burulmadır. Özel halde $t \in \mathrm{I}$ için $\varphi(t)$ eğrisi (I, φ) koordinat komşuluğu ile verilmiş ise $s \in \mathrm{I}$ yay parametresi olmak üzere;

$$T = \frac{d\varphi}{ds} = \varphi', \qquad N = \frac{dT}{ds} = \frac{\varphi''}{\|\varphi''\|}, \qquad B = T \times N \tag{1.2.2}$$

olduğu görülür. $\{T, N, B\}$ üç birim ve birbirine dik olan vektörlerden oluşan bir çatıdır. Buradaki $\{T, N, B\}$ çatısıyla eğriliği sıfırdan farklı $\{t, n, b\}$ çatısı arasında;

$$T = t\,, \qquad N = \kappa n\,, \qquad B = \kappa b \tag{1.2.3}$$

ilişkisi vardır.

Burada $\kappa(s_0) = 0$ olduğunda $N(s_0) = B(s_0) = 0$ olur ve N ve B nin uzunluğunun kareleri s cinsinden analitik olarak değişir.

$$\begin{bmatrix} T'(s) \\ N'(s) \\ B'(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\kappa^2 & \frac{\kappa'}{\kappa} & \tau \\ 0 & -\tau & \frac{\kappa'}{\kappa} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T(s) \\ N(s) \\ B(s) \end{bmatrix} \tag{1.2.4}$$

Yay uzunluğuna (s) göre tüm farklılaştırmaların yapıldığı yerde φ nin burulma fonksiyonu

$$\tau = \tau(s) = \frac{\det(\varphi', \varphi'', \varphi''')}{\kappa^2} \qquad \text{dır.}$$

Burada $\kappa^2 = 0$ ise τ nun herhangi bir noktada kaldırılabilir singülerliğe sahip olduğunu Frenet denklemlerinden çıkarılır.

$\{T, N, B\}$ çatısını karşılayan standart iç çarpımlar ise;

$\langle T, T \rangle = 1$

$\langle N, N \rangle = \langle B, B \rangle = \kappa^2$ (1.2.5)

$\langle T, N\rangle = \langle T, B\rangle = \langle N, B\rangle = 0$ dır.

Burada (1.2.4)'deki ortogonal çatı, Öklid uzayındaki ortogonal çatıda eğriliğe göre düzenlenmiş ortogonal çatı adını alacaktır.

Ayrıca burada $\kappa = 1$ için (1.2.1)'deki Frenet çatısı ile (1.2.3)'deki düzenlenmiş ortogonal çatı birbirine eşit olmaktadır.

Ayrıca;

Öklid - 3 uzayında

α birim hızlı eğrisinin κ(s) ≠ 0 olmak üzere Frenet çatısı olan {t,n,b} ile ortogonal çatı olan {T,N,B} arasında aşağıdaki ilişki vardır.

$$\mathrm{T}=\mathrm{t}\,, \quad \mathrm{N}=\tau n, \quad \mathrm{B}=\tau \mathrm{b} \tag{1.2.6}$$

Böylece;

$$\left.\begin{aligned} &\langle T, T\rangle = \langle t, t\rangle = 1 \\ &\langle N, N\rangle = \langle \tau_n, \tau_n\rangle = \tau^2 \\ &\langle B, B\rangle = \langle \tau_b, \tau_b\rangle = \tau^2 \\ &\langle T, N\rangle = \langle T, B\rangle = \langle N, B\rangle = 0 \quad \text{olur.} \end{aligned}\right\} \tag{1.2.7}$$

Burada;

$$T' = t' = \kappa n = \frac{\kappa N}{\tau} = \frac{\kappa}{\tau} N$$

$$N' = (\tau n)' = \tau' n + \tau n' = \tau' n + \tau(-\kappa t + \tau b) = \tau' n - \kappa\tau t + \tau^2 b$$

$$= -\kappa\tau T + \frac{\tau' N}{\tau} + \frac{\tau^2 B}{\tau} = -\kappa\tau T + \frac{\tau'}{\tau} N + \tau B$$

$$B' = (\tau b)' = \tau' b + \tau b' = \tau' b + \tau(-\tau n) = -\tau^2 n + \tau' b$$

$$= \frac{\tau^2 N}{\tau} + \frac{\tau' B}{\tau} = -\tau n + \frac{\tau'}{\tau} B$$

olup α eğrisinin Öklid uzayında torsiyona göre düzenlenmiş ortogonal çatısı aşağıdaki şekilde verilir.

$$\begin{bmatrix} T'(s) \\ N'(s) \\ B'(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\kappa}{\tau} & 0 \\ -\kappa\tau & \frac{\tau'}{\tau} & \tau \\ 0 & -\tau & \frac{\tau'}{\tau} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T(s) \\ N(s) \\ B(s) \end{bmatrix}$$

(1.2.8)

Ayrıca;

Minkowski- 3 uzayında

α birim hızlı eğrisinin $\kappa(s) \neq 0$ olmak üzere Frenet çatısı olan {t,n,b} ile ortogonal çatı olan {T,N,B} arasında aşağıdaki ilişki vardır.

$$T=t, \quad N=\tau n, \quad B=\tau b$$

(1.2.9)

Tanım 1.1.3.4 'ün 1. Durumunda α spacelike eğri olmak üzere verilen Frenet denklemleri (1.2.9) daki ilişkiye göre aşağıdaki şekilde düzenlensin.

$$T' = t' = \kappa n = \frac{\kappa N}{\tau} = \frac{\kappa}{\tau} N$$

$$N' = (\tau n)' = \tau' n + \tau n' = \tau' n + \tau(-\kappa t + \tau b) = \tau' n - \kappa\tau t + \tau^2 b$$

$$= -\kappa\tau T + \frac{\tau' N}{\tau} + \frac{\tau^2 B}{\tau} = -\kappa\tau T + \frac{\tau'}{\tau} N + \tau B$$

$$B' = (\tau b)' = \tau' b + \tau b' = \tau' b + \tau(-\tau n) = -\tau^2 n + \tau' b$$

$$= \frac{\tau^2 N}{\tau} + \frac{\tau' B}{\tau} = \tau N + \frac{\tau'}{\tau} B$$

olup α spacelike eğrisinin Minkowski-3 uzayında torsiyona göre düzenlenmiş ortogonal çatısı aşağıdaki şekilde verilir.

$$\begin{bmatrix} T'(s) \\ N'(s) \\ B'(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\kappa}{\tau} & 0 \\ -\kappa\tau & \frac{\tau'}{\tau} & \tau \\ 0 & \tau & \frac{\tau'}{\tau} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T(s) \\ N(s) \\ B(s) \end{bmatrix}$$

(1.2.10)

Şimdi açık bir alt aralığı R olan n boyutlu M Riemann manifoldu alınsın. M nin tanjant uzayından alınan bir $p \in M$ noktası $T_p(M)$ ile gösterilsin. M deki φ eğrisi $\psi\colon \mathrm{I} \to M$ olacak şekilde tanımlansın. Alt manifold olan R özdeşlik dönüşümünün koordinat sistemine sahiptir. $s \in \mathrm{I}$ için φ eğrisinin hız vektörü;

$\psi'(\mathrm{s}) = \frac{\mathrm{d}\psi(\mathrm{u})}{\mathrm{du}}|_{\mathrm{s}} \in \mathrm{T}_{\psi(\mathrm{s})}(\mathrm{M})$ olur.

Eğer $\forall s \in \mathrm{I}$ için $\psi'(s) \neq 0$ oluyorsa $\psi(s)$ eğrisi regülerdir. $\{t, n, b\}$ çatısı M üzerindeki bir $\psi(s)$ eğrisi boyunca uygulanırsa aşağıdaki özellikler elde edilir.

$$\begin{cases} \psi'(s) = t \\ D_t t = \kappa n \\ D_t n = -\kappa t + \tau b \\ D_t b = -\tau n \end{cases}$$

(1.2.11)

Burada D, M üzerindeki kovaryant türevi gösterir. (Ekmekci, 2000)

2. ÖKLİD UZAYINDAKİ ORTOGONAL ÇATIDA EĞRİLİĞE GÖRE DÜZENLENEN BAZI ÖZEL EĞRİLER

Bu bölümde Lone M.S., Es H., Karacan M.K., Bukcu B. tarafından ele alınan "On Some Curves with Modified Orthogonal Frame in Euclidean 3-Space" adlı makalenin içeriği incelenmiştir. Bu makalede Öklid uzayındaki ortogonal çatıda eğriliğe göre düzenlenmiş genel helisler, slant helisler ve Bertrand eğrileri incelenmiştir.

2.1 Öklid Uzayındaki Ortogonal Çatıda Eğriliğe Göre Düzenlenen Genel Helisler

Bu bölümde M manifoldundaki bir eğri üzerinde çalışılacaktır. (1.2.4)'de gösterilen matris çarpımına göre,

$$\begin{cases} \psi'(s) = t = T \\ D_T T = N \\ D_T N = -\kappa^2 + \frac{\kappa'}{\kappa} N + \tau B \\ D_T B = -\tau N + \frac{\kappa'}{\kappa} B \end{cases} \tag{2.1.1}$$

elde edilir.

Teorem 2.1.1 (Lancret Teoremi) Öklid uzayındaki ortogonal çatıda eğriliğe göre düzenlenen ortogonal çatıya göre bir eğrinin genel helistir ancak ve ancak sıfırdan farklı eğrilik fonksiyonlarının oranı sabit bir reel sayıdır.

$$\frac{\tau(s)}{\kappa(s)} = \lambda, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Açıklama 2.1.2 Lancret teoremi farklı ortamlarda ve çatılarda kanıtlanmış, helisler üzerinde ünlü bir teoremdir.

Teorem 2.1.3 Birim hızlı bir ψ eğrisinin Öklid uzayındaki ortogonal çatıda eğriliğe göre düzenlenen ortogonal çatıya göre genel helis eğrisi olabilmesi için gerek ve yeter şart

$$\mathrm{D_T D_T D_T T} = \mu \mathrm{N} + \frac{3\kappa'}{\kappa}\mathrm{D_T N}$$

(2.1.2)

olmasıdır. Burada;

$$\mu = \frac{\kappa''}{\kappa} - \kappa^2 - \tau^2 - 3\left(\frac{\kappa'}{\kappa}\right)' \text{ dır.}$$

(2.1.3)

İspat ψ genel helis eğrisi olsun. (2.1.1) den bilinir ki

$$D_T(D_T T) = D_T N = -\kappa^2 T + \frac{\kappa'}{\kappa} N + \tau B$$

(2.1.4)

ve

$$D_T D_T D_T T = D_T D_T N = D_T(-\kappa^2 T + \frac{\kappa'}{\kappa} N + \tau B)$$

$$= -2\kappa\kappa' T - \kappa^2 N + \left(\frac{\kappa''}{\kappa} - \frac{\kappa'^2}{\kappa^2}\right) N + \frac{\kappa'}{\kappa}\left(-\kappa^2 T + \frac{\kappa'}{\kappa} N + \tau B\right)$$

$$+ \tau' B + \tau(-\tau N + \frac{\kappa'}{\kappa} B)$$

(2.1.5)

(2.1.5) de terimleri düzenlenirse;

$$D_T D_T D_T T = (-3\kappa\kappa')T + \left(\frac{\kappa''}{\kappa} - \kappa^2 - \tau^2\right) N + 2\left(\frac{\kappa'}{\kappa}\tau + \tau'\right) B$$

(2.1.6)

elde edilir.

(2.1.1) deki 3. Bilgi (2.1.6) da kullanılırsa;

(2.1.1) deki 3. bilgi $\quad D_T N = -\kappa^2 T + \frac{\kappa'}{\kappa} N + \tau B \quad$ olup

$$B = \left(D_T N + \kappa^2 T - \frac{\kappa'}{\kappa} N\right) . \frac{1}{\tau} \text{ yazılabilir.}$$

O halde (2.1.6) yeniden düzenlenirse;

$$D_T D_T D_T T = \left(-3\kappa\kappa' + \frac{-2\tau\kappa' + \tau'\kappa}{\tau}\kappa\right)T + \left(\frac{\kappa''}{\kappa} - \tau^2 - \kappa^2 - \frac{2\tau\kappa' + \tau'\kappa}{\tau\kappa^2}\kappa'\right)N$$

$$+ \left(\frac{2\tau\kappa' + \tau'\kappa}{\tau\kappa}\right)D_T N \qquad (2.1.7)$$

elde edilir.

Şimdi φ genel helis eğrisi olduğundan $\frac{\tau}{\kappa} = sabit$ olduğu görülür. O halde aşağıdakiler türetilebilir.

$$\kappa'\tau = \kappa\tau' \qquad \text{veya} \qquad \frac{\kappa'}{\kappa} = \frac{\tau'}{\tau}$$

(2.1.8)

(2.1.8) deki bilgiler (2.1.7) de yerine yazılırsa;

$$D_T D_T D_T T = \left(\frac{\kappa''}{\kappa} - \kappa^2 - \tau^2 - \frac{3\kappa'^2}{\kappa^2}\right)N + \frac{3\kappa'}{\kappa}D_T N$$

(2.1.9)

olur. Elde edilen (2.1.9) , (2.1.2) yi ispatlamaktadır. Şimdi (2.1.1) deki $\mathrm{D_T T = N}$ olan kovaryant türevi alınsın.

$$D_T N = D_T D_T T$$

(2.1.10)

olur. Böylece;

$$D_T D_T N = D_T D_T D_T T = \mu N + \frac{3\kappa'}{\kappa}D_T N$$

(2.1.11)

(2.1.11) de (2.1.1) in üçüncü denklemi kullanılarak;

$D_T N = -\kappa^2 T + \frac{\kappa'}{\kappa}N + \tau B$ yazılırsa

$D_T D_T N = \mu N + \frac{3\kappa'}{\kappa}\left(-\kappa^2 T + \frac{\kappa'}{\kappa}N + \tau B\right)$ elde edilir.

Burada benzer terimler birleştirilirse;

$$D_T D_T N = -3\kappa\kappa' T + \left(\mu + 3\left(\frac{\kappa'}{\kappa}\right)^2\right) N + 3\frac{\tau\kappa'}{\kappa} B \quad \text{olur.}$$

(2.1.12)

(2.1.10) u (2.1.6) da kullanılırsa;

$$D_T D_T N = -3\kappa\kappa' T + \left(\frac{\kappa''}{\kappa} - \kappa^2 - \tau^2\right) N + \left(\tau' + \frac{2\tau\kappa'}{\kappa}\right) B \quad \text{olur.}$$

(2.1.13)

(2.1.12) ve (2.1.13) den

$\frac{\kappa'}{\kappa} = \frac{\tau'}{\tau}$ elde edilir. Böylece;

$$\left(\frac{\tau}{\kappa}\right)' = 0$$

(2.1.14)

olup $\frac{\tau}{\kappa} = sabittir.$

Bu nedenle φ bir genel helistir.

Teorem 2.1.4 Öklid uzayındaki ortogonal çatıda eğriliğe göre düzenlenen ortogonal çatıya göre düzenlenmiş ψ birim hızlı eğrisi genel helistir ancak ve ancak

$$det(T', T'', T''') = 0 \text{ dır.}$$

(2.1.15)

İspat $\frac{\tau}{\kappa}$ oranı sabit olup φ genel helis olsun. O halde aşağıdaki eşitliklere sahip olunur.

$$\varphi' = T$$

$$\varphi'' = T' = N$$

$$\varphi''' = T'' = -\kappa^2 T + \frac{\kappa'}{\kappa} N + \tau B$$

$$\varphi^{(4)} = T''' = -2\kappa\kappa' T - \kappa^2 N + \frac{1}{\kappa}\kappa'' N - \frac{\kappa'\kappa'}{\kappa^2} N$$

$$+\frac{\kappa'}{\kappa}\left(-\kappa^2 T+\frac{\kappa'}{\kappa}N+\tau B\right)+\tau\left(-\tau N+\frac{\kappa'}{\kappa}N\right)+\ \tau' B$$

$$\varphi^{(4)}=T'''=-3\kappa\kappa' T+\left(\frac{\kappa''}{\kappa}-\kappa^2-\tau^2\right)N+\left(\frac{2\kappa'\tau}{\kappa}+\tau'\right)B$$

φ genel helistir yani $\frac{\kappa}{\tau}=c\ (sabit)$ veya $\frac{\kappa'}{\kappa}=\frac{\tau'}{\tau}$

Böylece;

$$\frac{2\kappa'\tau}{\kappa}+\tau'=3\tau' \text{ olur}$$

ve

$$T'''=-3\kappa\kappa' T+\left(\frac{\kappa''}{\kappa}-\kappa^2-\tau^2\right)N+\ 3\tau' B \text{ yazılabilir.}$$

Yukarıdaki eşitlikler gösterir ki;

$$det(T',T'',T''')=\begin{vmatrix}0 & 1 & 0\\ -\kappa^2 & \frac{\kappa'}{\kappa} & \tau\\ -3\kappa\kappa' & \frac{\kappa''}{\kappa}-\kappa^2-\tau^2 & 3\tau'\end{vmatrix}.\begin{vmatrix}T\\ N\\ B\end{vmatrix}$$

$$det(T',T'',T''')=\begin{vmatrix}0 & 1 & 0\\ -\kappa^2 & \frac{\kappa'}{\kappa} & \tau\\ -3\kappa\kappa' & \frac{\kappa''}{\kappa}-\kappa^2-\tau^2 & 3\tau'\end{vmatrix}.\begin{vmatrix}t\\ \kappa n\\ \kappa b\end{vmatrix}$$

(2.1.16)

$=3\kappa(\kappa\tau'-\tau\kappa')=3\kappa^5\left(\frac{\tau}{\kappa}\right)'$

$\frac{\tau}{\kappa}$ oranı sabit olduğu için $\left(\frac{\tau}{\kappa}\right)'=0$ olup $det(T',T'',T''')=0$ dır.

Şimdi de gerektirmeye diğer yönden bakılıp $det(T',T'',T''')=0$ olduğu kabul edilirse (2.1.16) dan açıktır ki $\left(\frac{\tau}{\kappa}\right)'=0$ olup $\frac{\tau}{\kappa}$ sabittir. Dolayısıyla φ genel helistir.

Örnek Bir φ eğrisi aşağıdaki gibi parametrelendirilsin.

$$\varphi(s) = \left(sin\frac{s}{\sqrt{2}}, \frac{s}{\sqrt{2}}, cos\frac{s}{\sqrt{2}}\right)$$

(2.1.17)

Bu eğrinin $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}\}$ Frenet çatısı oluşturulursa;

$t = \varphi' = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}cos\frac{s}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}sin\frac{s}{\sqrt{2}}\right)$

$n = \frac{\varphi''}{\|\varphi''\|} = \left(-sin\frac{s}{\sqrt{2}}, 0, -cos\frac{s}{\sqrt{2}}\right)$

$b = t \times n = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}cos\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}sin\frac{1}{\sqrt{2}}s\right)$ olur. Ayrıca eğrilik ve burulma;

$$\kappa(s) = \frac{1}{2} \quad , \quad \tau(s) = \frac{1}{2} \quad \text{dir.}$$

(2.1.18)

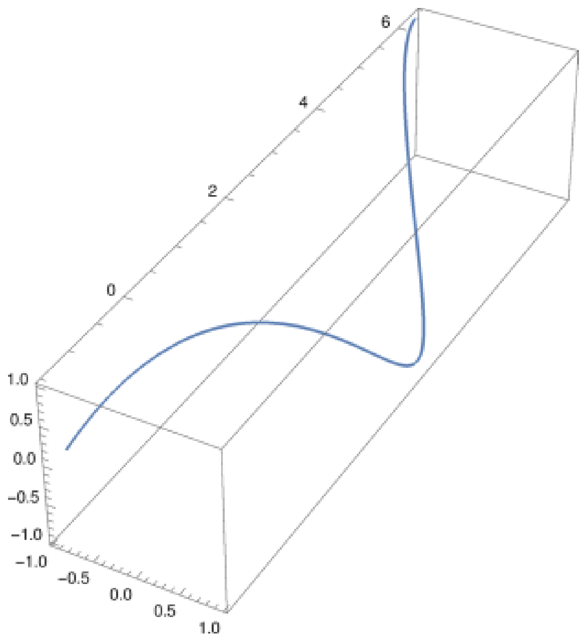
Böylece Öklid uzayındaki ortogonal çatıda eğriliğe göre düzenlenmiş ortogonal çatıya göre;

$$T(s) = \boldsymbol{t} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}cos\frac{s}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}sin\frac{s}{\sqrt{2}}\right)$$

$$N(s) = \kappa\boldsymbol{n} = \left(-\frac{1}{2}sin\frac{s}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{2}cos\frac{s}{\sqrt{2}}\right)$$

$$B(s) = \kappa\boldsymbol{b} = \left(-\frac{1}{2\sqrt{2}}cos\frac{s}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2\sqrt{2}}, \frac{1}{2\sqrt{2}}sin\frac{s}{\sqrt{2}}\right)$$

Yukarıdaki vektör çatısından ve (2.1.18) den sırasıyla φ nin yay uzunluğunun parametrelendirildiği ve bir helis olduğu görülür. Yukarıdaki eşitlikler (2.1.3) de yerine koyulursa (2.1.2) deki eşitliğin gerçeklendiği görülür. (Şekil 2.1)



Şekil 2.1 Dairesel Helis

Dairesel Helis: $\left(sin\frac{s}{\sqrt{2}},\frac{s}{\sqrt{2}},cos\frac{s}{\sqrt{2}}\right)$

T(s) nin daha yüksek mertebeden türevi şu şekilde verilir.

$$\begin{cases} T'(s) = \left(-\frac{1}{2}sin\frac{s}{\sqrt{2}},0,-\frac{1}{2}cos\frac{s}{\sqrt{2}}\right) \\ T''(s) = \left(-\frac{1}{2\sqrt{2}}cos\frac{s}{\sqrt{2}},0,\frac{1}{2\sqrt{2}}sin\frac{s}{\sqrt{2}}\right) \\ T'''(s) = \left(\frac{1}{4}sin\frac{s}{\sqrt{2}},0,\frac{1}{4}cos\frac{s}{\sqrt{2}}\right) \end{cases}$$

(2.1.19)

(2.1.19) daki ifadeler aynı zamanda (2.1.15) deki $det(T',T'',T''') = 0$ ifadesini de doğrulayıp bir helis olduğunu kanıtlar.

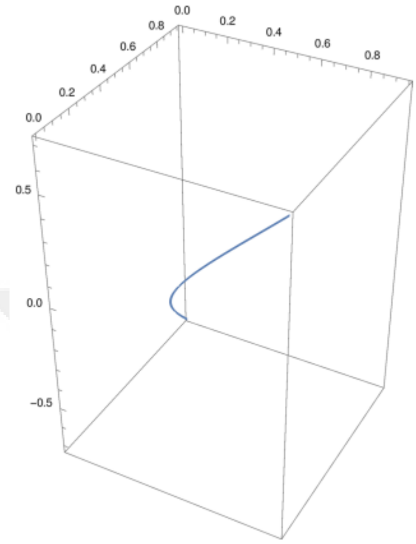
Örnek Aşağıdaki şekilde parametrelendirilmiş bir eğri olsun.

$$\varphi(s) = \left(\frac{(1+s)^{\frac{3}{2}}}{3},\frac{(1-s)^{\frac{3}{2}}}{3},\frac{s}{\sqrt{2}}\right)$$

(2.1.20)

Burada $-1 < s < 1$ olup Frenet çatısının vektörleri şu şekilde bulunur;

$$\begin{cases} \boldsymbol{t} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{1+s}, -\sqrt{1-s}, \sqrt{2}\right) \\ \boldsymbol{n} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{1-s}, \sqrt{1+s}, 0\right) \\ \boldsymbol{b} = \boldsymbol{t} \wedge \boldsymbol{n} = \frac{1}{2}\left(-\sqrt{1+s}, \sqrt{1-s}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \end{cases} \qquad ve \quad \kappa = \tau = \frac{1}{\sqrt{8(1-s^2)}}$$



Şekil 2.2 Dairesel Helis

Genel helis: $\left(\frac{(1+s)^{\frac{3}{2}}}{3}, \frac{(1-s)^{\frac{3}{2}}}{3}, \frac{s}{\sqrt{2}}\right)$

Eğriliğe göre düzenlenmiş ortogonal çatıya göre ise Frenet vektörleri;

$$T = \boldsymbol{t} = \left(\frac{\sqrt{1+s}}{2}, -\frac{\sqrt{1-s}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$N = \kappa\boldsymbol{n} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{\sqrt{1+s}}, \frac{1}{\sqrt{1-s}}, 0\right)$$

$B = \kappa\boldsymbol{b} = \frac{1}{4\sqrt{2}}\left(-\frac{1}{\sqrt{1-s}}, \frac{1}{\sqrt{1+s}}, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1-s^2}}\right)$ olur. Ayrıca;

$$\frac{d\varphi}{ds} = T = \frac{1}{2}\left(\sqrt{1+s}, -\sqrt{1-s}, \sqrt{2}\right)$$

$$\frac{d^2\varphi}{ds^2} = T' = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{\sqrt{1+s}}, \frac{1}{\sqrt{1-s}}, 0\right)$$

$$\frac{d^3\varphi}{ds^3} = T'' = \frac{1}{8}\left(-\frac{1}{(1+s)^{\frac{3}{2}}}, \frac{1}{(1-s)^{\frac{3}{2}}}, 0\right)$$

$\frac{d^4\varphi}{ds^4} = T''' = \frac{3}{16}\left(\frac{1}{(1+s)^{\frac{5}{2}}}, \frac{1}{(1-s)^{\frac{5}{2}}}, 0\right)$ olup

$det(T', T'', T''') = 0$ olup (2.1.15) doğrulanmış olur. Elde edilenlere göre (2.1.3) deki veriler (2.1.2) de yerine koyulursa Şekil 2.1.2 basitçe doğrulanmış olur.

Teorem 2.1.5 $\psi\colon \mathrm{I} \longrightarrow E^3$ ve ψ birim hızlı ve eğriliği ve burulmasının bölümü sıfır olmayan bir eğri olmak üzere bu eğri Öklid uzayındaki eğriliğe göre düzenlenmiş ortogonal çatıya göre slant helistir ancak ve ancak

$$\frac{\tau'}{(\kappa^2+\tau^2)^{\frac{3}{2}}} \tag{2.1.21}$$

fonksiyonu sabit bir fonksiyondur. Burada κ sabittir.

İspat Öklid 3-uzayında ψ birim hızlı eğrisini alalım. U vektör alanı için

$< N(s), U > = c\ (sabit)$ olsun.

a ve b düzgün fonksiyon olsun. Öyle ki;

$$U = a(s)T(s) + cN(s) + b(s)B(s)\,, s \in I \tag{2.1.22}$$

(2.1.22) nin diferansiyeli (2.1.3) ile verilirse;

$$\begin{cases} a' - c\kappa^2 = 0 \\ a - b\tau = 0 \\ b' + c\tau = 0 \end{cases} \tag{2.1.23}$$

elde edilir.

Buradaki ikinci denklemden;

$$a = \tau b$$
(2.1.24)

yazılabilir.

Ayrıca U sabit vektör alanı olup;

$$< U, U > = a^2 + c^2\kappa^2 + b\kappa^2 = sabittir.$$
(2.1.25)

(2.1.23) deki ikinci ve üçüncü denklemler ile (2.1.25) deki denklem birleştirilirse; m şu şekilde verilen bir sabit olsun;

$b^2(\kappa^2 + \tau^2) = sabit\,, -c^2\kappa^2 = m^2$

Böylece;

$b = \pm \frac{m}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}}$ olur.

(2.1.23) deki üçüncü denklem I üzerinde şunu verir;

$\frac{d}{ds}\left(\pm \frac{m}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}}\right) = c\tau$

Dolayısıyla da;

$$\pm \frac{c}{m} = \frac{\tau'}{(\kappa^2 + \tau^2)^{\frac{3}{2}}}$$

yazılabilir. Bu da (2.1.21) i kanıtlar.

Gerektirmenin diğer yönünün, yani (2.1.21) in gerçeklendiği varsayılsın. Hesaplamaları kolaylaştırmak için (2.1.21) deki fonksiyonun $sabit$ (c) fonksiyon olduğu varsayılsın.

$$U = \frac{m\tau}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}}T(s) + \frac{m}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}}B(s) + cN(s) \qquad , \ s \in I$$
(2.1.26)

Öklid uzayında eğriliğe göre düzenlenmiş ortogonal çatıya göre (2.1.26) nın diferansiyeli verilirse;

$$U' = \frac{m\tau'\kappa^2}{(\kappa^2+\tau^2)^{\frac{3}{2}}}T(s) - \frac{m\tau\tau'}{(\kappa^2+\tau^2)^{\frac{3}{2}}}B(s) + \frac{m\tau}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}}N(s) + \frac{m}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}}\big(-\tau N(s)\big)$$

$$+\frac{m\tau'}{(\kappa^2+\tau^2)^{\frac{3}{2}}}\left(-\kappa^2 T(s) + \underbrace{\frac{\kappa'}{\kappa}}_{0}N + \tau B(s)\right) = 0$$

olur. Bu U nun sabit vektör olduğunu gösterir. Diğer yandan;

$$< N(s), U > = < N(s)\,, \frac{m\tau}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}}T(s) + cN(s) + \frac{m\tau}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}}B(s) > = c$$

olup, bunun anlamı ψ eğrisinin slant helis olmasıdır.

Açıklama 2.1.6 $\kappa = 1$ için ortogonal çatıya göre düzenlenmiş çatıda (2.1.21) deki ifade (2.1.1) deki ifadeyi karşılar.

Örnek Salkowski 1909'da eğriliği (κ) sabit olan fakat burulması (τ) sabit olmayan eğriler ailesini tanıttı ve bunları Salkowski eğrileri olarak adlandırdı. Sonra 2009'da Monterde Salkowski eğrilerini, eğriliği (κ) sabit ve normal vektörü sabit bir doğru ile sabit bir açı oluşturan uzay eğrileri şeklinde tanımlamıştır. Bu nedenle slant helislerin çarpıcı bir örneği olarak Salkowski eğrileri verilebilir.

2.2 Öklid Uzayındaki Ortogonal Çatıda Eğriliğe Göre Düzenlenen Bertrand Eğrileri

Tanım 2.2.1 Sıfırdan farklı eğrilikli ve burulmalı, normalleri sırasıyla N_φ ve N_ψ olan φ ve ψ iki eğrisi alınsın. Eğer N_φ ve N_ψ birbirlerine paralel ise (φ, ψ) ikilisine Bertrand eğri çifti denir. (Do Carmo 1976)

Yukarıdaki tanıma göre $(\varphi(s), \psi(s^*))$ Bertrand çiftinin arasındaki fonksiyonel ilişki $s^* = s^*(s)$ olup, öyle ki;

$\delta^*\big(s^*(s)\big) = \delta(s)$ dır.

(φ, ψ) Bertrand eğri çifti için;

$\psi(s) = \varphi(s) + \delta(s) N_\varphi(s)$ yazılsın.

(2.2.1)

Teorem 2.2.2 (φ, ψ) ikilisi Bertrand çifti olsun. Bu çifte karşılık gelen (C_φ, C_ψ) arasındaki mesafe Öklid uzayında eğriliğe göre düzenlenmiş ortogonal çatıya göre sabittir.

İspat $\varphi(s)$ ve $\psi(s)$ eğrilerine karşılık gelen noktalar C_φ ve C_ψ olmak üzere (2.2.1) den

$\psi = \varphi + \delta N_\varphi$ yazılabilir.

Düzenlenmiş ortogonal çatıya göre bu ifadenin diferansiyeli alınırsa;

$$\psi'(s) = \left(1 - \delta\kappa^2{}_\varphi\right) T_\varphi + \left(\delta' + \frac{\delta\kappa'{}_\varphi}{\kappa_\varphi}\right) N_\varphi + \delta\tau_\varphi B_\varphi$$

(2.2.2)

elde edilir.

N_φ ve N_ψ lineer bağımlı olduğundan

$$< N_\varphi , \psi'(s) > = \delta' + \frac{\delta\kappa'{}_\varphi}{\kappa_\varphi} = 0$$ dır.

Bu ifade düzenlenirse;

$$-\frac{\delta'}{\delta} = \frac{\kappa'{}_\varphi}{\kappa_\varphi}$$ olduğu görülür.

(2.2.3)

(2.2.3) de integral alınırsa, c sıfırdan farklı reel sayı olmak üzere;

$$\delta(s) = \frac{c}{\kappa_\varphi(s)}$$ elde edilir.

(2.2.4)

Bu nedenle;

$$\|\psi - \varphi(s)\| = \left\|\frac{c}{\kappa_\varphi(s)} N_\varphi(s)\right\| = |c| \left|\frac{1}{\kappa_\varphi}\right| \left|\kappa_\varphi\right| = |c|$$

elde edilip ispat tamamlanır.

Lemma 2.2.3 (φ, ψ) Bertrand eğri çiftinin teğetinin eğimleri arasındaki açı sabittir. (Şekil 2.2.1)

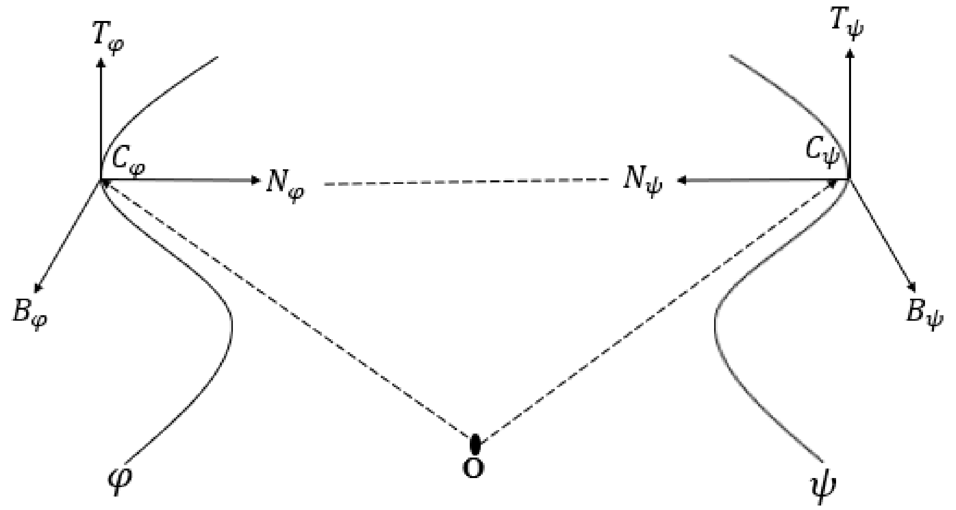
İspat $< T_\psi, T_\varphi >$ iç çarpımının diferansiyeli alınsın.

$\frac{d}{ds} < T_\psi, T_\varphi >= < T_\psi, N_\varphi > + < T_\psi, N_\varphi >$

$\frac{N_\psi}{\kappa_\psi} = \pm \frac{N_\varphi}{\kappa_\varphi}$ olduğundan $< N_\psi, T_\varphi > = 0$ ve $< N_\varphi, T_\psi > = 0$ dır.

Dolayısıyla

$\frac{d}{ds} < T_\varphi, T_\psi > = 0$ dır. Böylece $< T_\varphi, T_\psi > = sabittir.$



Şekil 2.3 (φ,ψ) Bertrand eğri çiftinin Öklid-3 uzayındaki ortogonal çatıda eğriliğe göre düzenlenmiş Frenet vektörleri

Teorem 2.2.4 φ ve ψ eğrilerine E^3'de karşılık gelen (C_φ, C_ψ) noktaları verilsin. $\tau_\varphi \neq 0$ olmak üzere,

(φ, ψ) Bertrand eğri çiftidir. $\Leftrightarrow$ $a = cot\theta$ ve c sabiti için $c\kappa_\varphi + ac\tau_\varphi = 1\ dir.$ (2.2.5)

İspat $(\Rightarrow)$: C_φ ve C_ψ noktalarında $\tau_\varphi \neq 0$ olmak üzere $\varphi(s)$ ve $\psi(s)$ nin düzenlenmiş ortogonal çatısı sırasıyla;

$\{T_\varphi = \boldsymbol{t_\varphi}, N_\varphi = \kappa_\varphi \boldsymbol{n}_\varphi, B_\varphi = \kappa_\varphi \boldsymbol{b}_\varphi\}$

$\{T_\psi = \boldsymbol{t}_\psi, N_\psi = \kappa_\psi \boldsymbol{n}_\psi, B_\psi = \kappa_\psi \boldsymbol{b}_\psi\}$ şeklindedir.

Lemma (2.2.3) den T_φ ve T_ψ arasındaki sabit açı θ olmak üzere;

$$T_\psi = cos\theta T_\varphi + \frac{sin\theta}{\kappa_\varphi} B_\varphi \text{ yazılabilir.}$$

(2.2.6)

(2.2.3) ve (2.2.4) , (2.2.2) de düzenlenirse;

$$\psi'(s) = (1 - c\kappa_\varphi)T_\varphi + \frac{c\tau_\varphi}{\kappa_\varphi} B_\varphi \text{ olur.}$$

(2.2.7)

(2.2.6) ve (2.2.7) den

$$\frac{1-c\kappa_\varphi}{cos\theta} = \frac{\frac{c\tau_\varphi}{\kappa_\varphi}}{\frac{sin\theta}{\kappa_\varphi}} \quad \text{ve ya} \quad c\kappa_\varphi + ac\tau_\varphi = 1 \quad \text{elde edilir.}$$

(2.2.8)

(⇐) : Tersine varsayılsın ki c_φ eğrisi için $c\kappa_\varphi + ac\tau_\varphi = 1 \quad \tau_\varphi \neq 0$ için sağlansın. Diğer bir c_ψ eğrisi için

$\psi(s) = \varphi(s) + \delta(s)N_\varphi(s)$ olup şimdi de c_φ ve c_ψ eğrilerinin Bertrand eğrileri olduğu kanıtlanacaktır.

(2.2.7) den

$$\psi'(s) = (1 - c\kappa_\varphi)T_\varphi + \frac{c\tau_\varphi}{\kappa_\varphi} B_\varphi \text{ olduğu biliniyor.}$$

(2.2.9)

Burada veriler kullanılarak $\psi'(s) = ac\tau_\varphi T_\varphi + \frac{c\tau_\varphi}{\kappa_\varphi} B_\varphi = c\left(aT_\varphi + \frac{B_\varphi}{\kappa_\varphi}\right)\tau_\varphi$ yazılabilir.

Dolayısıyla c_ψ eğrisinin teğet vektörü, a sabit olmak üzere;

$$T_\psi = \frac{\psi'(s)}{\|\psi'(s)\|} = \frac{c\tau_\varphi}{|c\tau_\varphi|} \frac{\left(aT_\varphi + \frac{B_\varphi}{\kappa_\varphi}\right)}{\sqrt{a^2+1}} = \pm \frac{aT_\varphi + \frac{B_\varphi}{\kappa_\varphi}}{\sqrt{a^2+1}}$$

(2.2.10) şeklindedir.

(2.2.10) da s^* ' a göre diferansiyel alınırsa;

$$\frac{dT_\psi}{ds^*} = \pm\frac{1}{\sqrt{a^2+1}}\left\{aN_\varphi - \frac{\kappa'_\varphi}{\kappa^2_\varphi}B_\varphi + \frac{1}{\kappa_\varphi}\left(-\tau_\varphi N_\varphi + \frac{\kappa'_\varphi}{\kappa_\varphi}B_\varphi\right)\right\}\frac{ds}{ds^*}$$

olur.

Bu ifade de gösterir ki;

$$N_\psi = \pm\frac{a-\frac{\tau_\varphi}{\kappa_\varphi}}{\sqrt{a^2+1}}\frac{ds}{ds^*}N_\varphi$$

veya

$$\frac{N_\psi}{\kappa_\psi} = \pm\frac{a-\frac{\tau_\varphi}{\kappa_\varphi}}{\sqrt{a^2+1}}\frac{ds}{ds^*}\frac{\kappa_\varphi}{\kappa_\psi}\frac{N_\varphi}{\kappa_\varphi}$$

(2.2.11)

$\frac{N_\psi}{\kappa_\psi}$ ve $\pm\frac{N_\varphi}{\kappa_\varphi}$ birim vektörler olduğundan ve (2.2.11) den

$\frac{ds^*}{ds} = \frac{\kappa_\varphi}{\kappa_\psi}\frac{a-\frac{\tau_\varphi}{\kappa_\varphi}}{\sqrt{a^2+1}}$ ve $\frac{N_\psi}{\kappa_\psi} = \pm\frac{N_\varphi}{\kappa_\varphi}$ yazılabilir.

Bu ispatı tamamlar.

Teorem 2.2.5 Öklid uzayındaki ortogonal çatıda eğriliğe göre düzenlenmiş ortogonal çatıya göre (c_φ, c_ψ) Bertrand eğri çiftleri aşağıdaki özdeşlikleri sağlar.

$$\begin{cases} \kappa_\varphi = \frac{c\kappa_\psi + sin^2\theta}{c(1+c\kappa_\psi)} \\ \tau_\varphi\tau_\psi = \left(\frac{\sin\theta}{c}\right)^2 > 0 \end{cases}$$

(2.2.12)

İspat (2.2.6) ve (2.2.7) den

$$\begin{cases} \frac{1-c\kappa_\varphi}{\cos\theta} = \frac{ds^*}{ds} \Rightarrow \frac{ds^*}{ds}\cos\theta = 1 - c\kappa_\varphi \\ \frac{c\frac{\tau_\varphi}{\kappa_\varphi}}{\frac{\sin\theta}{\kappa_\varphi}} = \frac{ds^*}{ds} \Rightarrow \frac{ds^*}{ds}\sin\theta = c\tau_\varphi \end{cases}$$ yazılabilir.

(2.2.13)

Burada φ ve ψ nin rolleri değiştirilirse;

$$\begin{cases} \frac{ds}{ds^*}\cos\theta = 1 + c\kappa_\psi \\ \frac{ds}{ds^*}\sin\theta = c\tau_\psi \end{cases}$$ yazılabilir.

(2.2.14)

(2.2.13) ve (2.2.14) ün ilk kısımları çarpılırsa;

$$\cos^2\theta = (1 - c\kappa_\varphi)(1 + c\kappa_\psi) \quad \text{veya} \quad \kappa_\varphi = \frac{c\kappa_\psi + \sin^2\theta}{c(1 + c\kappa_\psi)}$$ olur.

(2.2.15)

(2.2.13) ve (2.2.14) ün ikinci kısımları çarpılırsa

$$\sin^2\theta = c^2(\tau_\varphi\tau_\psi)$$ olur.

(2.2.16)

Yukarıdaki denklemden $\tau_\varphi\tau_\psi > 0$ olduğu açıktır.

Örnek φ eğrisinin parametrelendirilmiş hali;

$$\varphi(s) = \left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\sin 2s, \frac{1}{2\sqrt{2}}\cos 2s, \frac{s}{\sqrt{2}}\right)$$ olsun.

(2.2.17)

Buna göre, düzenlenmiş ortogonal çatıda Frenet denklemleri;

$$T_\varphi = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos 2s, -\frac{1}{\sqrt{2}}\sin 2s, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

(2.2.18)

$$N_\varphi = \left(-\sqrt{2}\sin 2s, -\sqrt{2}\cos 2s, 0\right)$$

(2.2.19)

$$B_\varphi = (-2\sin 2s, -2\cos 2s, 0)$$
(2.2.20)

$$\kappa_\varphi = \sqrt{2}$$

$$\tau_\varphi = -\sqrt{2} \quad \text{olur.}$$

Şimdi (2.2.1) yardımıyla ve $c = \frac{1}{\sqrt{2}}$ için ψ eğrisi parametrelendirilsin.

$$\psi(s) = \left(-\frac{1}{2\sqrt{2}}\sin 2s, -\frac{1}{2\sqrt{2}}\cos 2s, \frac{s}{\sqrt{2}}\right)$$
(2.2.21)

$\psi(s)$ için düzenlenmiş ortogonal çatıda Frenet denklemleri;

$$T_\psi = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\cos 2s, \frac{1}{\sqrt{2}}\sin 2s, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$
(2.2.22)

$$N_\psi=\left(\sqrt{2}\sin 2s, \sqrt{2}\cos 2s, 0\right)$$
(2.2.23)

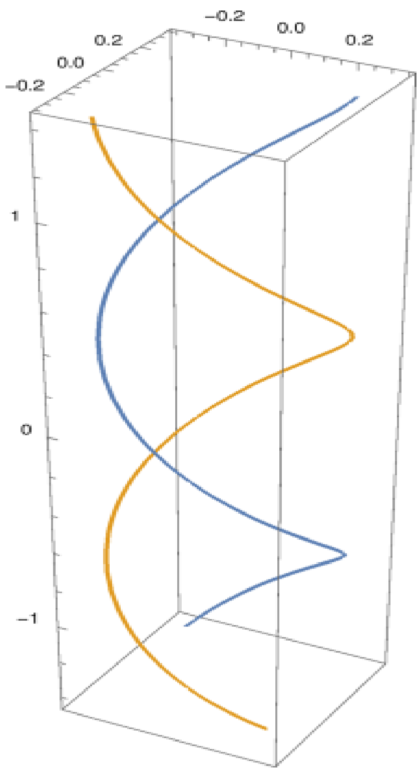
$$B_\psi=(-\cos 2s, \sin 2s, -1)$$
(2.2.24)

$$\kappa_\varphi = \sqrt{2}$$

$$\tau_\varphi = -\sqrt{2} \quad \text{olur.}$$

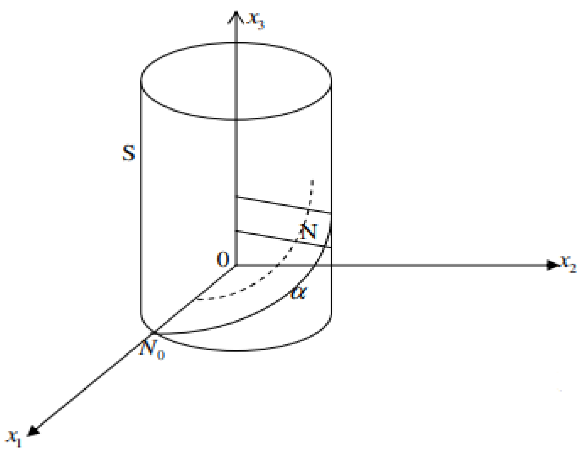
(2.2.19) ve (2.2.23) yani N_φ ve N_ψ lineer bağımlı olduğundan (φ, ψ) ikilisi Bertrand eğri çiftidir. (Şekil 2.2.2)

Burada (2.2.18) ve (2.2.22) den $\theta = \frac{\pi}{2}$ dir. Dolayısıyla (2.2.5) deki $\cot\theta = sabit$ ifadesi de açıkça görülür.



Şekil 2.4 Bertrand eğri çifti (φ,ψ)

Örnek Bir dairesel helisle üzerinde bulunduğu dönel silindirin ekseni bir Bertrand eğri çifti oluşturur.



Şekil 2.5 Dairesel Helisle Üzerinde Bulunduğu Dönel Silindir Ekseni

Teorem 2.2.6 Eğrilerin karşılık geldiği C_φ ve C_ψ noktaları arasında birebir bir ilişki olduğunu varsayalım. Öyle ki C_φ üzerindeki P_φ ve C_ψ üzerindeki P_ψ noktaları için;

(a) κ_φ sabittir.

(b) τ_ψ sabittir.

(c) T_φ ile T_ψ paraleldir.

Daha sonra $P_\varphi P_\psi$ 'ni $h{:}\,1$ oranında bölen P tarafından oluşturulan C eğrisi bir Bertrand eğrisidir.

İspat $C\,, C_\varphi\,, C_\psi$ üzerindeki P, P_φ, P_ψ noktalarının koordinat vektörleri $\alpha(s), \alpha_\varphi(s), \alpha_\psi(s)$ olsun.

P_φ ve P_ψ noktalarının dışbükey kombinasyonlarından P noktasının denklemi

$$\alpha(s) = h\alpha_\varphi(s) + (1-h)\alpha_\psi(s)\ ,\ \ h \in \mathbb{R}\ , h \in [0,1]\ \text{ olur.} \tag{2.2.25}$$

(2.2.25) te s ye göre diferansiyel alıp $T_\varphi = T_\psi$ hipotezi kullanılırsa;

$$Tds = hT_\varphi ds_\varphi + (1-h)T_\psi ds_\psi = \left[hds_\varphi + (1-h)ds_\psi\right]T_\varphi \tag{2.2.26}$$

$$T = T_\varphi = T_\psi \tag{2.2.27}$$

$$h\frac{ds_\varphi}{ds} + (1-h)\frac{ds_\psi}{ds} = 1\ \text{ olur.} \tag{2.2.28}$$

Benzer şekilde (2.2.27) de diferansiyel alınırsa;

$$Nds = N_\varphi ds_\varphi = N_\psi ds_\psi \tag{2.2.29}$$

$$\kappa ds = \kappa_\varphi ds_\varphi = \kappa_\psi ds_\psi \tag{2.2.30}$$

ve

$$\frac{ds_\varphi}{ds} = \frac{\kappa}{\kappa_\varphi} \tag{2.2.31}$$

$$\frac{N}{\kappa} = \frac{N_\varphi}{\kappa_\varphi} = \frac{N_\psi}{\kappa_\psi} \tag{2.2.32}$$

(2.2.27) ve (2.2.32) den

$$\frac{B}{\kappa} = \frac{B_\varphi}{\kappa_\varphi} = \frac{B_\psi}{B_\psi}\ \text{ yazılabilir.} \tag{2.2.33}$$

(2.2.33) de diferansiyel alınıp (2.2.27) ve (2.2.32) kullanılırsa;

$$\tau \frac{N}{\kappa} = \tau_\psi \frac{N_\psi}{\kappa_\psi} \frac{ds_\psi}{ds}$$

(2.2.34)

ve

$$\frac{ds_\psi}{ds} = \frac{\tau}{\tau_\varphi} \text{ yazılabilir.}$$

(2.2.35)

(2.2.31) ve (2.2.35) , (2.2.28) e eklenerek;

$$\left(\frac{h}{\kappa_\varphi}\right)\kappa + \left(\frac{1-h}{\tau_\psi}\right)\tau = 1 \ ; \ \kappa_\varphi \neq 0 \ , \tau_\psi \neq 0 \quad \text{elde edilir.}$$

Böylece $h, \kappa_\varphi, \tau_\psi$ sabit olduğundan istenen sonuç bulunur.

Teorem 2.2.7 Teorem (2.2.6) daki (c) koşulu karşılık gelen P_φ ve P_ψ noktalarının binormalleri olan B_φ ve B_ψ paralel olacak şekilde değiştirilirse C bir Bertrand eğrisidir.

İspat (2.2.33) den $\frac{B_\varphi}{\kappa_\varphi} = \frac{B_\psi}{B_\psi}$ ve benzer şekilde (2.2.34) ve (2.2.35) den

$$\frac{N_\varphi}{\kappa_\varphi} = \frac{\tau_\psi}{\tau_\varphi} \frac{ds_\psi}{ds_\varphi} \frac{N_\psi}{\kappa_\psi}$$

(2.2.36)

ve

$$\frac{ds_\psi}{ds_\varphi} = \frac{\tau_\varphi}{\tau_\psi} \text{ elde edilir.}$$

(2.2.37)

(2.2.37) , (2.2.36) da yerine yazılırsa;

$$\frac{N_\varphi}{\kappa_\varphi} = \frac{N_\psi}{\kappa_\psi} \quad \text{olur.}$$

Böylece;

$$T_\varphi = \frac{N_\varphi}{\kappa_\varphi} \times \frac{B_\varphi}{\kappa_\varphi} = \frac{1}{\kappa^2{}_\varphi}\left(\frac{\kappa_\varphi}{\kappa_\psi} N_\psi \times \frac{\kappa_\varphi}{\kappa_\psi} B_\psi\right) = \frac{N_\psi}{\kappa_\psi} \times \frac{B_\psi}{\kappa_\psi} = T_\psi$$

olup, T_φ ve T_ψ paraleldir. Bu da Teorem (2.2.6) tarafından C 'nin bir Bertrand eğrisi olduğunu kanıtlar.

Teorem 2.2.8 Teorem (2.2.6) daki (c) koşulu karşılık gelen P_φ ve P_ψ noktaları için, P_φ nin teğet vektörü T_φ ve P_ψ nin binormali olan B_ψ paralel olacak şekilde değiştirilirse C bir Bertrand eğrisidir.

İspat

$$T_\varphi = \frac{B_\psi}{\kappa_\psi} \text{ olup}$$

$$N_\varphi = -\frac{\tau_\psi}{\kappa_\psi}\frac{ds_\psi}{ds_\varphi}N_\psi$$

(2.2.38)

yukarıdaki denklemi takip eder.

Bu nedenle N_φ ve N_ψ paralel olup $\frac{N_\varphi}{\kappa_\varphi}$ ve $\frac{N_\psi}{\kappa_\psi}$ birim vektörleri için

$\frac{N_\varphi}{\kappa_\varphi} = \pm\frac{N_\psi}{\kappa_\psi}$ yazılabilir. (2.2.39)

(2.2.38) ve (2.2.39) dan

$\frac{ds_\psi}{ds_\varphi} = -\frac{\kappa_\varphi}{\tau_\psi}$ elde edilir. (2.2.40)

Ayrıca

$B_\varphi = T_\varphi \times N_\varphi = \frac{B_\psi}{\kappa_\psi} \times \frac{\kappa_\varphi}{\kappa_\psi}N_\psi = \frac{\kappa_\varphi}{\kappa^2{}_\psi}\left(B_\psi \times N_\psi\right) = \frac{\kappa_\varphi\kappa^2{}_\psi}{\kappa^2{}_\psi}\left(-T_\psi\right) = -\kappa_\varphi T_\psi$ olup

$T_\psi = -\frac{B_\varphi}{\kappa_\varphi}$ olur.

C, C_φ, C_ψ eğrileri üzerindeki noktalar olan P, P_φ, P_ψ nın koordinat vektörleri R, R_φ, R_ψ olsun.

$R = hR_\varphi + (1-h)R_\psi$ yazılabilir. (2.2.41)

(2.2.41) de s 'ye göre diferansiyel alınırsa ve (2.2.40) dan;

$$T = \left[hT_\varphi - \frac{\kappa_\varphi}{\tau_\psi}(1-h)T_\psi\right]\frac{ds_\varphi}{ds} \quad \text{elde edilir.}$$

(2.2.42)

(2.2.42) nin normu alınırsa;

$$\frac{ds_\varphi}{ds} = \frac{\tau_\psi}{\sqrt{h^2\tau^2{}_\psi + \kappa^2{}_\varphi(1-h)^2}} \quad \text{elde edilir.}$$

(2.2.43)

Böylece (2.2.43) yardımıyla (2.2.42) yeniden yazılırsa;

$$T = \left[\frac{h\tau_\psi}{\sqrt{h^2\tau^2{}_\psi + \kappa^2{}_\varphi(1-h)^2}}\right]T_\varphi + \left[\frac{-(1-h)\kappa_\varphi}{\sqrt{h^2\tau^2{}_\psi + \kappa^2{}_\varphi(1-h)^2}}\right]T_\psi$$

veya

$$T = h_\varphi T_\varphi + h_\psi T_\psi \quad \text{olup}$$

(2.2.44)

$$h\frac{ds_\varphi}{ds} = \frac{h\tau_\psi}{\sqrt{h^2\tau^2{}_\psi + \kappa^2{}_\varphi(1-h)^2}} = h_\varphi \ , \ \ h_\varphi = sabittir.$$

$$(1-h)\frac{ds_\psi}{ds} = -\frac{(1-h)\kappa_\varphi}{\sqrt{h^2\tau^2{}_\psi + \kappa^2{}_\varphi(1-h)^2}} = h_\psi \ , \ \ h_\psi = sabittir.$$

(2.2.44) de diferansiyel alınırsa;

$$\frac{N}{\kappa} = h_\varphi\frac{ds_\varphi}{ds}\frac{N_\varphi}{\kappa_\varphi} + h_\psi\frac{ds_\psi}{ds}\frac{N_\psi}{\kappa_\psi} \qquad \text{yazılabilir.}$$

(2.2.45)

Dolayısıyla;

$$\frac{N}{\kappa} = \frac{N_\varphi}{\kappa_\varphi} = \frac{N_\psi}{\kappa_\psi} \ \text{ ve } \ \kappa = \kappa_\varphi h_\varphi\frac{ds_\varphi}{ds} + \kappa_\psi h_\psi\frac{ds_\psi}{ds} \quad \text{dır.}$$

(2.2.47)

(2.2.44) ve (2.2.46) dan;

$$\frac{B}{\kappa} = h_\varphi \frac{B_\varphi}{\kappa_\varphi} + h_\psi \frac{B_\psi}{\kappa_\psi}$$ bulunur.

(2.2.48)

(2.2.48) de diferansiyel alınırsa;

$$\tau \frac{N}{\kappa} = h_\varphi \tau_\varphi \frac{ds_\varphi}{ds} \frac{N_\varphi}{\kappa_\varphi} + h_\psi \tau_\psi \frac{ds_\psi}{ds} \frac{N_\psi}{\kappa_\psi}$$ olur.

(2.2.49)

Dolayısıyla;

$$\tau = \tau_\varphi h_\varphi \frac{ds_\varphi}{ds} + \tau_\psi h_\psi \frac{ds_\psi}{ds}$$ dır.

(2.2.50)

(2.2.36) ve (2.2.37) den;

$$-\frac{\kappa_\varphi}{\tau_\psi} = \frac{ds_\psi}{ds_\varphi} = \frac{\tau_\varphi}{\kappa_\psi} \quad \text{ve} \quad \frac{\tau_\varphi}{\kappa_\varphi} = -\frac{\kappa_\psi}{\tau_\psi}$$ yazılabilir.

(2.2.51)

(2.2.47) , (2.2.50) ve (2.2.51) den varsayılsın ki;

$M_\varphi = h_\varphi \frac{ds_\varphi}{ds}$, $M_\psi = h_\psi \frac{ds_\psi}{ds}$ olsun. O zaman;

$$\frac{\kappa}{\tau_\psi M_\psi} + \frac{\tau}{\kappa_\varphi M_\varphi} = \frac{\kappa_\varphi M_\varphi + \kappa_\psi M_\psi}{\tau_\psi M_\psi} + \frac{\tau_\varphi M_\varphi + \tau_\psi M_\psi}{\kappa_\varphi M_\varphi}$$

$$= \frac{\kappa_\varphi}{\tau_\psi}\frac{M_\varphi}{M_\psi} + \underbrace{\left(\frac{\kappa_\psi}{\tau_\psi} + \frac{\tau_\varphi}{\kappa_\varphi}\right)}_{0} + \frac{\tau_\psi}{\kappa_\varphi}\frac{M_\psi}{M_\varphi} = \frac{\kappa_\varphi}{\tau_\psi}\frac{M_\varphi}{M_\psi} + \frac{\tau_\psi}{\kappa_\varphi}\frac{M_\psi}{M_\varphi} = sabit$$

$\frac{\kappa_\varphi}{\tau_\psi}$ ve $\frac{M_\varphi}{M_\psi} = \frac{h}{1-h}\frac{ds_\psi}{ds_\varphi} = \frac{h}{1-h}\frac{\kappa_\varphi}{\tau_\psi}$ sabit olduğundan bu Bertrand eğrisinin asıl denklemidir.

3. ÖKLİD UZAYINDAKİ ORTOGONAL ÇATIDA TORSİYONA GÖRE DÜZENLENEN BAZI ÖZEL EĞRİLER

3.1 Öklid Uzayındaki Ortogonal Çatıda Torsiyona Göre Düzenlenen Genel Helisler

Bu bölümde, ön bilgiler kısmında (1.2.1)'de Öklid-3 uzayındaki bir eğrinin genel Frenet denklemleri, ön bilgiler kısmındaki (1.2.8) 'de torsiyona göre modifiye edilmiş olup, modifiye edilen bu çatıda genel helisler incelenecektir.

Teorem 3.1.1 Frenet çatısına göre genel helis olan α birim hızlı eğrisi torsiyona göre düzenlenmiş ortogonal çatıda da genel helistir ancak ve ancak

$$\det(T', T'', T''') = 0 \text{ dır.}$$

İspat (⇒) :

$\frac{\tau}{\kappa}$ oranı sabit olup α genel helis olsun.

$\frac{\tau}{\kappa}$ oranı sabit olduğundan

$$\left(\frac{\tau}{\kappa}\right)' = 0$$

$$\frac{\tau'\kappa - \tau\kappa'}{\kappa^2} = 0$$

$$\tau'\kappa = \tau\kappa' \tag{3.1.1}$$

sağlanır.

O halde aşağıdaki eşitliklere sahip olunur.

$$\alpha' = T$$

$$\alpha'' = T' = \frac{\kappa}{\tau} N$$

$$\alpha''' = T'' = \left(\frac{\kappa}{\tau} N\right)' = \left(\frac{\kappa}{\tau}\right)' N + \frac{\kappa}{\tau} N'$$

$$= \left(\frac{\kappa'\tau - \kappa\tau'}{\tau^2}\right) N + \frac{\kappa}{\tau}\left(-\kappa\tau T + \frac{\tau'}{\tau} N + \tau B\right)$$

$$= \frac{\kappa'\tau N}{\tau^2} - \frac{\kappa\tau' N}{\tau^2} - \kappa^2 T + \frac{\kappa\tau' N}{\tau^2} + \kappa B$$

$$= -\kappa^2 T + \frac{\kappa'}{\tau} N + \kappa B$$

$$\alpha''' = T'' = -\kappa^2\ T + \frac{\kappa'}{\tau} N + \kappa b$$

$$\alpha^{(4)} = T''' = (-\kappa^2 T)' + \left(\frac{\kappa'}{\tau} N\right)' + (\kappa B)'$$

$$= -2\,\kappa\kappa' T - \kappa^2 T' + \left(\frac{\kappa'}{\tau}\right)' N + \frac{\kappa'}{\tau} N' + \kappa' B + \kappa B'$$

$$= -2\,\kappa\kappa' T - \kappa^2 \left(\frac{\kappa}{\tau}\right) N + \frac{(\kappa')'\tau - \kappa'\tau'}{\tau^2} N + \frac{\kappa'}{\tau}\left(-\kappa\tau T + \frac{\tau'}{\tau} N + \tau B\right) + \kappa' B$$

$$+ \kappa\left(-\tau N + \frac{\tau'}{\tau} B\right)$$

$$= -2\,\kappa\kappa' T - \frac{\kappa^3}{\tau} N + \frac{(\kappa')' N}{\tau} - \frac{\kappa'\tau'}{\tau^2} N - \kappa\kappa' T + \frac{\kappa'\tau'}{\tau^2} N + \kappa' B + \kappa' B - \kappa\tau N + \frac{\kappa\tau'}{\tau} B$$

$$T''' = -3\kappa\kappa'\, T + \left(-\frac{\kappa^3}{\tau} + \frac{(\kappa')'}{\tau} - \kappa\tau\right) N + \left(2\kappa' + \frac{\kappa\tau'}{\tau}\right) B$$

$$det(T', T'', T''') = \begin{vmatrix} 0 & \dfrac{\kappa}{\tau} & 0 \\ -\kappa^2 & \dfrac{\kappa'}{\tau} & \kappa \\ -3\kappa\kappa' & \dfrac{-\kappa^3}{\tau} + \dfrac{(\kappa')'}{\tau} - \kappa\tau & 2\kappa' + \dfrac{\kappa\tau'}{\tau} \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} T \\ N \\ B \end{vmatrix}$$

$$det(T', T'', T''') = \begin{vmatrix} 0 & \dfrac{\kappa}{\tau} & 0 \\ -\kappa^2 & \dfrac{\kappa'}{\tau} & \kappa \\ -3\kappa\kappa' & \dfrac{-\kappa^3}{\tau} + \dfrac{(\kappa')'}{\tau} - \kappa\tau & 2\kappa' + \dfrac{\kappa\tau'}{\tau} \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} t \\ \tau n \\ \tau b \end{vmatrix}$$

(3.1.1) deki bilgiden;

$= \frac{\kappa^3}{\tau^2}\,(-\kappa'\tau + \kappa\tau').\tau^2 = 0$

olduğu açıktır.

($\Leftarrow$) :

$det(T', T'', T''') = 0$ olduğu kabul edilirse $\frac{\kappa^3}{\tau^2}\,(\kappa'\tau + \kappa\tau')\tau^2 = 0$ dır.

$\kappa'\tau + \kappa\tau' = 0$ olup $\left(\frac{\tau}{\kappa}\right)' = 0$ ve $\frac{\tau}{\kappa}$ sabittir. Dolayısı ile α genel helistir.

Teorem 3.1.2 Frenet çatısına göre genel helis olan α birim hızlı eğrisi torsiyona göre düzenlenmiş ortogonal çatıda genel helistir ancak ve ancak

$$det(N, N', N'') = 0 \text{ dır.}$$

İspat (⇒) :

$$N' = -\kappa\tau T + \frac{\tau'}{\tau} N + \tau B$$

$$N'' = (-\kappa\tau T)' + \left(\frac{\tau'}{\tau} N\right)' + (\tau B)'$$

$$= (-\kappa\tau)' T - \kappa\tau T' + \left(\frac{\tau'}{\tau}\right)' N + \frac{\tau'}{\tau} N' + \tau' B + \tau B'$$

$$= (-\kappa'\tau + \kappa\tau')\, T - \kappa\tau\left(\frac{\kappa}{\tau} N\right) + \frac{(\tau')'\tau - \tau'\tau'}{\tau^2} N + \frac{\tau'}{\tau}\left(-\kappa\tau T + \frac{\tau'}{\tau} N + \tau B\right)$$

$$+ \tau' B + \tau(-\tau N + \frac{\tau'}{\tau} B)$$

$$= -\kappa'\tau T - \kappa\tau' T - \kappa^2 N + \frac{(\tau')' N}{\tau} - \frac{(\tau')^2 N}{\tau^2} - \kappa\tau' T + \frac{(\tau')^2 N}{\tau^2} + \tau' B + \tau' B - \tau^2 N + \tau' B$$

$$= (-\kappa'\tau - 2\kappa\tau')T + \left(-\kappa^2 + \frac{(\tau')'}{\tau} - \tau^2\right) N + (3\tau')B$$

$$N'' = (-\kappa'\tau - 2\kappa\tau')T + \left(-\kappa^2 + \frac{(\tau')'}{\tau} - \tau^2\right) N + (3\tau')B$$

$$det(N, N', N'') = \begin{vmatrix} 0 & \frac{\kappa}{\tau} & 0 \\ -\kappa\tau & \frac{\tau'}{\tau} & \tau \\ -\kappa'\tau - 2\kappa\tau' & -\kappa^2 + \frac{(\tau')'}{\tau} - \tau^2 & 3\tau' \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} T \\ N \\ B \end{vmatrix}$$

$$det(N, N', N'') = \begin{vmatrix} 0 & \frac{\kappa}{\tau} & 0 \\ -\kappa\tau & \frac{\tau'}{\tau} & \tau \\ -\kappa'\tau - 2\kappa\tau' & -\kappa^2 + \frac{(\tau')'}{\tau} - \tau^2 & 3\tau' \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} t \\ \tau n \\ \tau b \end{vmatrix}$$

$(-\kappa'\tau - 2\kappa\tau')\, \frac{\kappa}{\tau}\, \tau = -\kappa\kappa'\tau - 2\kappa^2\tau'$

$(-\kappa'\tau)\frac{\kappa}{\tau}\, 3\tau' = -3\kappa^2\tau'$

$-\kappa\kappa'\tau - 2\kappa^2\tau' + 3\kappa^2\tau' = -\kappa\kappa'\tau + \kappa^2\tau'$ olup (3.1.1) deki bilgiden;

$= \kappa\,(-\kappa'\tau + \kappa\tau')\tau^2 = 0$

olur ve $det(N, N', N'') = 0$ olup α genel helistir.

$(\Leftarrow)$:

$det(N, N', N'') = 0$ kabul edelim.

$\kappa\,(-\kappa'\tau + \kappa\tau')\tau^2 = 0$ için $\kappa \neq 0$ olmak üzere $(\frac{\tau}{\kappa})' = 0$ olur. Dolayısı ile $\frac{\tau}{\kappa}$ sabit olup α genel helistir.

Teorem 3.1.3 Birim hızlı bir α eğrisinin torsiyona göre düzenlenmiş ortogonal çatıda genel helis olabilmesi için gerek ve yeter şart ;

$D_T^3 = \mu N + \frac{3\kappa'}{\tau} D_T N$ olmasıdır.

Burada;

$\mu = \frac{-\kappa^3}{\tau} + \frac{(\kappa')'}{\tau} - \kappa\tau - \frac{3(\kappa')^3}{\kappa\tau}$ dır.

İspat

$$D_T T = \frac{\kappa}{\tau} N$$

$$D_T^2\, T = \left(\frac{\kappa}{\tau} N\right)' = \left(\frac{\kappa}{\tau}\right)' N + \frac{\kappa}{\tau} N'$$

$$= \frac{\kappa'\tau - \kappa\tau'}{\tau^2} N + \frac{\kappa}{\tau}\left(-\kappa\tau T + \frac{\tau'}{\tau} N + \tau B\right)$$

$$= \frac{\kappa'}{\tau} N - \frac{\kappa\tau'}{\tau^2} N - \kappa^2 T + \frac{\kappa\tau'}{\tau^2} N + \kappa b$$

$$D_T^2\, T = -\kappa^2 T + \frac{\kappa'}{\tau} N + \kappa b$$

$$D_T^3 = (-\kappa^2 T)' + \left(\frac{\kappa'}{\tau} N\right)' + (\kappa B)'$$

$$= -2\kappa\kappa' T - \kappa^2 T' + \left(\frac{\kappa'}{\tau}\right)' N + \frac{\kappa'}{\tau} N' + \kappa' B + \kappa B'$$

$$= -2\kappa\kappa' T - \kappa^2\left(\frac{\kappa}{\tau} N\right) + \frac{(\kappa')'\tau - \kappa'\tau'}{\tau^2} N + \frac{\kappa'}{\tau}\left(-\kappa\tau T + \frac{\tau'}{\tau} N + \tau b\right) + \kappa' B$$

$$+ \kappa\left(-\tau n + \frac{\tau'}{\tau} B\right)$$

$$= -2\kappa\kappa' T - \frac{\kappa^3}{\tau} N + \frac{(\kappa')'}{\tau} N - \frac{\kappa'\tau'}{\tau^2} N - \kappa\kappa' T + \frac{\kappa'\tau'}{\tau^2} N + \kappa' B - \kappa\tau N + \frac{\kappa\tau'}{\tau} B$$

$$D_T^3 = -3\kappa\kappa' T + \left(-\frac{\kappa^3}{\tau} + \frac{(\kappa')'}{\tau} - \kappa\tau\right) N + \left(2\kappa' + \frac{\kappa\tau'}{\tau}\right) B$$

(3.1.2)

olur.

$$D_T N = -\kappa\tau T + \frac{\tau'}{\tau} N + \tau B$$
(3.1.3)

$$\tau B = D_T N + \kappa\tau T - \frac{\tau'}{\tau} N$$

$$B = \frac{1}{\tau}\left(D_T N + \kappa\tau T - \frac{\tau'}{\tau} N\right)$$
(3.1.4)

(3.1.4) deki bilgi (3.1.2) de kullanılırsa;

$$D_T^3 = -3\kappa\kappa' T + \left(\frac{-\kappa^3}{\tau} + \frac{(\kappa')'}{\tau} - \kappa\tau\right) N + \left(2\kappa' + \frac{\kappa\tau'}{\tau}\right)\left(\frac{1}{\tau}\left(D_T N + \kappa\tau T - \frac{\tau'}{\tau} N\right)\right)$$

$$= -3\kappa\kappa' T + \left(\frac{-\kappa^3}{\tau} + \frac{(\kappa')'}{\tau} - \kappa\tau\right) N + \left(\frac{2\kappa'}{\tau} + \frac{\kappa\tau'}{\tau^2}\right)\left(D_T N + \kappa\tau T - \frac{\tau'}{\tau} N\right)$$

$$= -3\kappa\kappa' T + \left(\frac{-\kappa^3}{\tau} + \frac{(\kappa')'}{\tau} - \kappa\tau\right) N + \frac{2\kappa'}{\tau} D_T N + 2\kappa\kappa' T - \frac{2\kappa'\tau'}{\tau^2} N + \frac{\kappa\tau'}{\tau^2} D_T N + \frac{\kappa^2\tau'}{\tau} T - \frac{\kappa(\tau')^2}{\tau^3} N$$

$$= -3\kappa\kappa' T + \left(\frac{-\kappa^3}{\tau} + \frac{(\kappa')'}{\tau} - \kappa\tau\right) N + \left(\frac{2\kappa'}{\tau} + \frac{\kappa\tau'}{\tau^2}\right) D_T N + \left(2\kappa\kappa' + \frac{\kappa^2\tau'}{\tau}\right) T + \left(-\frac{2\kappa'\tau'}{\tau^2} - \frac{\kappa(\tau')^2}{\tau^3}\right) N$$

$$= \left(\frac{2\kappa'}{\tau} + \frac{\kappa\tau'}{\tau^2}\right) D_T N + \left(-\kappa\kappa' + \frac{\kappa^2\tau'}{\tau}\right) T + \left(\frac{-\kappa^3}{\tau} + \frac{(\kappa')'}{\tau} - \kappa\tau - \frac{2\kappa'\tau'}{\tau^2} - \frac{\kappa(\tau')^2}{\tau^3}\right) N$$

α genel helis olduğundan $\frac{\tau}{\kappa}$ = sabit olduğu görülür. O halde;

$\left(\frac{\tau}{\kappa}\right)' = 0$ olup $\frac{\tau'\kappa - \tau\kappa'}{\kappa^2} = 0 \Rightarrow \tau'\kappa = \tau\kappa'$ veya $\frac{\kappa'}{\kappa} = \frac{\tau'}{\tau}$ türetilebilir.

$$= \left(\frac{2\kappa'}{\tau} + \frac{\kappa\tau'}{\tau\tau}\right) D_T N + \left(-\kappa\kappa' + \frac{\kappa^2\tau'}{\tau}\right) T + \left(\frac{-\kappa^3}{\tau} + \frac{(\kappa')'}{\tau} - \kappa\tau - \frac{2\kappa'\tau'}{\tau\tau} - \frac{\kappa\tau'\tau'}{\tau\tau\tau}\right) N$$

$$= \left(\frac{2\kappa'}{\tau} + \frac{\kappa\kappa'}{\tau\kappa}\right) D_T N + \left(-\kappa\kappa' + \frac{\kappa^2\kappa'}{\kappa}\right) T + \left(\frac{-\kappa^3}{\tau} + \frac{(\kappa')'}{\tau} - \kappa\tau - \frac{2\kappa'\kappa'}{\kappa\tau} - \frac{\kappa\kappa'\kappa'}{\kappa\kappa\tau}\right) N$$

$$= \left(\frac{2\kappa'}{\tau} + \frac{\kappa'}{\tau}\right) D_T N + \left(-\kappa\kappa' + \kappa\kappa'\right) T + \left(\frac{-\kappa^3}{\tau} + \frac{(\kappa')'}{\tau} - \kappa\tau - \frac{2(\kappa')^2}{\kappa\tau} - \frac{(\kappa')^2}{\kappa\tau}\right) N$$

$$= \left(\frac{-\kappa^3}{\tau} + \frac{(\kappa')'}{\tau} - \kappa\tau - \frac{3(\kappa')^2}{\kappa\tau}\right) N + \left(\frac{\mathbf{3\kappa'}}{\boldsymbol{\tau}}\right) D_T N$$

$$D_T^3 T = \left(\frac{-\kappa^3}{\tau} + \frac{(\kappa')'}{\tau} - \kappa\tau - \frac{3(\kappa')^2}{\kappa\tau}\right) N + \left(\frac{3\kappa'}{\tau}\right) D_T N$$

olup ispat elde edilir.

Diğer yönden

$$D_T T = \frac{\kappa}{\tau} N$$

$$D_T^2 T = D_T\left(\frac{\kappa}{\tau} N\right)$$

$$D_T^2\left(\frac{\kappa}{\tau} N\right) = D_T^3 T = \mu N + \left(\frac{3\kappa'}{\tau}\right) D_T N$$

(3.1.5)

(3.1.3) deki bilgi (3.1.5) de kullanılırsa;

$$D_T^2\left(\frac{\kappa}{\tau} N\right) = \mu N + \left(\frac{3\kappa'}{\tau}\right)\left(-\kappa\tau T + \frac{\tau'}{\tau} N + \tau B\right)$$

$$= \mu N - 3\kappa\kappa' T + \frac{3\kappa'\tau'}{\tau^2} N + 3\kappa' B$$

$$= -3\kappa\kappa' T + \left(\mu + \frac{3\kappa'\tau'}{\tau^2}\right) N + 3\kappa' B$$

$$= -3\kappa\kappa' T + \left(\frac{-\kappa^3}{\tau} + \frac{(\kappa')'}{\tau} - \kappa\tau - \frac{3(\kappa')^2}{\kappa\tau} + \frac{3\kappa'\tau'}{\tau^2}\right) N + 3\kappa' B$$

$$= -3\kappa\kappa' T + \left(\frac{-\kappa^3}{\tau} + \frac{(\kappa')'}{\tau} - \kappa\tau\right) N + \left(2\kappa' + \frac{\kappa\tau'}{\tau}\right) B$$

$$= -3\kappa\kappa' T + \left(\frac{-\kappa^3}{\tau} + \frac{(\kappa')'}{\tau} - \kappa\tau\right) N + \left(-\frac{3(\kappa')^2}{\kappa\tau} + \frac{3\kappa'\tau'}{\tau^2}\right) N + 3\kappa' B$$

(3.1.6)

(3.1.6)' da kat sayı eşitliği kullanılarak;

$2\kappa' + \frac{\kappa\tau'}{\tau} = 3\kappa'$ ve $-\frac{3(\kappa')^2}{\kappa\tau} + \frac{3\kappa'\tau'}{\tau^2} = 0$

$\frac{\kappa\tau'}{\tau} = \kappa' \Rightarrow \frac{\tau'}{\tau} = \frac{\kappa'}{\kappa} \Rightarrow \kappa\tau' = \kappa'\tau$ olup $\left(\frac{\tau}{\kappa}\right)' = 0$ olur ve $\frac{\tau}{\kappa}$ sabit olup α genel helistir.

$\frac{3(\kappa')^2}{\kappa\tau} = \frac{3\kappa'\tau'}{\tau^2} \Rightarrow \frac{\tau'}{\tau} = \frac{\kappa'}{\kappa}$ olur. Böylece buradan $\frac{\tau}{\kappa}$ sabit olup α genel helistir.

3.2 Öklid Uzayındaki Ortogonal Çatıda Torsiyona Göre Düzenlenen Bertrand Eğrileri

Bu bölümde, ön bilgiler kısmında (1.2.1)'de Öklid-3 uzayındaki bir eğrinin genel Frenet denklemleri, ön bilgiler kısmındaki (1.2.8) 'de torsiyona göre modifiye edilmiş olup, modifiye edilen bu çatıda Bertrand eğrileri incelenecektir.

Tanım 3.2.1 Sıfırdan farklı eğrilikli ve burulmalı, normalleri sırasıyla $\boldsymbol{N_\varphi}$ ve $\boldsymbol{N_\psi}$ olan φ ve ψ iki eğrisi alınsın. Eğer $\boldsymbol{N_\varphi}$ ve $\boldsymbol{N_\psi}$ birbirlerine paralel ise (φ, ψ) ikilisine Bertrand eğri çifti denir.

(φ, ψ) Bertrand eğri çifti için

Ψ(s) = φ (s) + δ(s) $\boldsymbol{N_\varphi}$ (s) yazılsın.

Teorem 3.2.1 *(φ, ψ)* Bertrand çifti olsun. Bu çifte karşılık gelen (C_φ, C_ψ) arasındaki mesafe torsiyona göre düzenlenmiş ortogonal çatıda sabittir.

İspat

$$\Psi = \varphi + \delta N_\varphi$$

$$\psi' = \varphi' + \delta' N_\varphi + \delta N_\varphi{}'$$

$$\psi' = \varphi' + \delta' N_\varphi + \delta\left(-\kappa_\varphi \tau_\varphi \tau_\varphi + \frac{\tau_\varphi{}'}{\tau_\varphi} N_\varphi + \tau_\varphi B_\varphi\right)$$

$$\psi' = \tau_\varphi + \delta' N_\varphi - \delta\kappa_\varphi \tau_\varphi \tau_\varphi + \delta\frac{\tau_\varphi{}'}{\tau_\varphi} N_\varphi + \delta\tau_\varphi B_\varphi$$

$$\psi' = \left(1 - \delta\kappa_\varphi \tau_\varphi\right) T_\varphi + \left(\delta' + \delta\frac{\tau_\varphi{}'}{\tau_\varphi}\right) N_\varphi + \delta\tau_\varphi B_\varphi$$

$\psi'(s)$ vektörü T_ψ vektörüne paralel olduğundan $\psi'(s) \perp N_\psi$ dir. N_ψ vektörü N_φ vektörüne paralel olduğundan $\psi'(s) \perp N_\psi$ olur. Öyleyse $\langle N_\varphi, \psi'(s) \rangle = 0$ dır.

$$\langle N_\varphi, \psi'(s) \rangle = \delta' + \delta\frac{\tau_\varphi{}'}{\tau_\varphi} = 0$$

$$\Longrightarrow \ \delta \frac{\tau_\varphi'}{\tau_\varphi} = -\delta' \Longrightarrow \frac{-\delta'}{\delta} = \frac{\tau_\varphi'}{\tau_\varphi}$$

Burada integral alınırsa c sıfırdan farklı reel sayı olmak üzere;

$$\int \frac{-\delta'}{\delta} = \int \frac{\tau_\varphi'}{\tau_\varphi}$$

$$-ln\delta = ln\,\tau_\varphi + lnc$$

$$ln\delta = -\,ln\,\tau_\varphi + lnc$$

$$ln\delta = ln\frac{c}{\tau_\varphi}$$

$$\delta(s) = \frac{c}{\tau_{\varphi\,(s)}} \qquad \Psi = \varphi + \delta N_\varphi \quad N_\varphi = \tau_\varphi n$$

$$\|\psi - \varphi(s)\| = \left\| \frac{c}{\tau_{\varphi\,(s)}} N_\varphi(s) \right\| = |c| \left|\frac{1}{\tau_\varphi}\right| |\tau_\varphi|\,|n| = c$$

olup ispat tamamlanır.

Teorem 3.2.2 *(φ, ψ)* Bertrand eğri çiftinin teğetinin eğimleri arasındaki açı torsiyona göre düzenlenmiş ortogonal çatıda sabittir.

İspat

$\langle T_\psi, T_\varphi \rangle' = 0$ olduğu gösterilirse ispat yapılmış olur.

$$\langle T_\psi, T_\varphi \rangle' = \langle T_\psi', T_\varphi \rangle + \langle T_\psi, T_\varphi' \rangle = \langle \frac{\kappa_\psi}{\tau_\psi} N_\psi, T_\varphi \rangle + \langle T_\psi, \frac{\kappa_\varphi}{\tau_\varphi} N_\varphi \rangle$$

N_ψ ve N_φ paralel olduğundan ve $N_\varphi \perp T_\varphi$ olduğundan

$N_\psi \perp T_\varphi$ olup $\langle N_\psi, T_\varphi \rangle = 0$ dır.

$T_\psi \perp N_\varphi$ ve $N_\psi // N_\varphi$ olduğundan

$T_\psi \perp N_\varphi$ olup $\langle T_\psi, N_\varphi \rangle = 0$ dır.

$= \frac{\kappa_\psi}{\tau_\psi} \langle N_\psi, T_\varphi \rangle + \frac{\kappa_\varphi}{\tau_\varphi} \langle T_\psi, N_\varphi \rangle = 0$ dır.

Böylece $\langle T_\psi, T_\varphi \rangle$ = sabittir.

4. MİNKOWSKİ-3 UZAYINDAKİ SPACELİKE EĞRİSİNİN TORSİYONA GÖRE DÜZENLENMİŞ ORTOGONAL ÇATISINDA GENEL HELİSLER

Bu bölümde, temel kavramlar kısmında Tanım (1.1.3.4)'ün 1. Durumunda verilen Minkowski-3 uzayındaki bir spacelike eğrinin genel Frenet denklemleri, ön bilgiler kısmındaki (1.2.10) 'da torsiyona göre modifiye edilmiş olup, modifiye edilen bu çatıda helisler incelenecektir.

Teorem 4.1 Minkowski-3 uzayında Frenet çatısına göre genel helis olan α birim hızlı eğrisi β spacelike eğrisinin torsiyona göre düzenlenmiş ortogonal çatısında da genel helistir ancak ve ancak

$$\det(T', T'', T''') = 0 \text{ dır.}$$

İspat (⇒) :

$\frac{\tau}{\kappa}$ oranı sabit olup α genel helis olsun.

$$\frac{\tau}{\kappa} \text{ oranı sabit olduğundan}$$

$$\left(\frac{\tau}{\kappa}\right)' = 0$$

$$\frac{\tau'\kappa-\tau\kappa'}{\kappa^2} = 0$$

$$\tau'\kappa = \tau\kappa' \tag{4.1}$$

sağlanır.

O halde aşağıdaki eşitliklere sahip olunur.

$$\alpha' = T$$

$$\alpha'' = T' = \frac{\kappa}{\tau} N$$

$$\alpha''' = T'' = \left(\frac{\kappa}{\tau} N\right)' = \left(\frac{\kappa}{\tau}\right)' N + \frac{\kappa}{\tau} N'$$

$$= \left(\frac{\kappa'\tau-\kappa\tau'}{\tau^2}\right) N + \frac{\kappa}{\tau}\left(-\kappa\tau T + \frac{\tau'}{\tau} N + \tau B\right)$$

$$= \frac{\kappa'\tau N}{\tau^2} - \frac{\kappa\tau' N}{\tau^2} - \kappa^2 T + \frac{\kappa\tau' N}{\tau^2} + \kappa B$$

$$= -\kappa^2 T + \frac{\kappa'}{\tau} N + Kb$$

$$\alpha''' = T'' = -\kappa^2 \; T + \frac{\kappa'}{\tau} N + \kappa b$$

$$\alpha^{(4)} = T''' = (-\kappa^2 T)' + \left(\frac{\kappa'}{\tau} N\right)' + (\kappa B)'$$

$$= -2\,\kappa\kappa' T - \kappa^2 T' + \left(\frac{\kappa'}{\tau}\right)' N + \frac{\kappa'}{\tau} N' + \kappa' B + \kappa B'$$

$$= -2\,\kappa\kappa' T - \kappa^2 \left(\frac{\kappa}{\tau}\right) N + \frac{(\kappa')'\tau - \kappa'\tau'}{\tau^2} N + \frac{\kappa'}{\tau}\left(-\kappa\tau T + \frac{\tau'}{\tau} N + \tau B\right) + \kappa' B$$

$$+ \kappa\left(-\tau N + \frac{\tau'}{\tau} B\right)$$

$$= -2\,\kappa\kappa' T - \frac{\kappa^3}{\tau} N + \frac{(\kappa')' N}{\tau} - \frac{\kappa'\tau'}{\tau^2} N - \kappa\kappa' T + \frac{\kappa'\tau'}{\tau^2} N + \kappa' B + \kappa' B - \kappa\tau N + \frac{\kappa\tau'}{\tau} B$$

$$T''' = -3\kappa\kappa' T + \left(-\frac{\kappa^3}{\tau} + \frac{(\kappa')'}{\tau} + \kappa\tau\right) N + \left(2\kappa' + \frac{\kappa\tau'}{\tau}\right) B$$

$$det(T', T'', T''') = \begin{vmatrix} 0 & \frac{\kappa}{\tau} & 0 \\ -\kappa^2 & \frac{\kappa'}{\tau} & \kappa \\ -3\kappa\kappa' & \frac{-\kappa^3}{\tau} + \frac{(\kappa')'}{\tau} + \kappa\tau & 2\kappa' + \frac{\kappa\tau'}{\tau} \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} T \\ N \\ B \end{vmatrix}$$

$$det(T', T'', T''') = \begin{vmatrix} 0 & \frac{\kappa}{\tau} & 0 \\ -\kappa^2 & \frac{\kappa'}{\tau} & \kappa \\ -3\kappa\kappa' & \frac{-\kappa^3}{\tau} + \frac{(\kappa')'}{\tau} + \kappa\tau & 2\kappa' + \frac{\kappa\tau'}{\tau} \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} t \\ \tau n \\ \tau b \end{vmatrix}$$

(4.1) deki bilgiden;

$= \frac{\kappa^3}{\tau^2}\,(-\kappa'\tau + \kappa\tau')\tau^2 = 0$

olduğu açıktır.

(⇐) :

$det(T', T'', T''') = 0$ olduğu kabul edilirse $\frac{\kappa^3}{\tau^2}\,(\kappa'\tau + \kappa\tau')\tau^2 = 0$ dır.

$\kappa'\tau + \kappa\tau' = 0$ olup $\left(\frac{\tau}{\kappa}\right)' = 0$ ve $\frac{\tau}{\kappa}$ sabittir. Dolayısı ile α genel helistir.

Teorem 4.2 Minkowski-3 uzayında Frenet çatısına göre genel helis olan α birim hızlı eğrisi β spacelike eğrisinin torsiyona göre düzenlenmiş ortogonal çatısında da genel helistir ancak ve ancak

$$det(N,N',N'')=0 \text{ dır.}$$

İspat (⇒) :

$$N'=-\kappa\tau T+\frac{\tau'}{\tau}N+\tau B$$

$$N''=\ (-\kappa\tau T)'+\left(\frac{\tau'}{\tau}N\right)'+(\tau B)'$$

$$=(-\kappa\tau)'T-\kappa\tau T'+\left(\frac{\tau'}{\tau}\right)'N+\frac{\tau'}{\tau}N'+\tau' B+\tau B'$$

$$=(-\kappa'\tau-\kappa\tau')\,T-\kappa\tau\left(\frac{\kappa}{\tau}N\right)+\frac{(\tau')'\tau-\tau'\tau'}{\tau^2}N+\frac{\tau'}{\tau}\left(-\kappa\tau T+\frac{\tau'}{\tau}N+\tau B\right)$$

$$+\tau' B+\tau(\tau N+\frac{\tau'}{\tau}B)$$

$$=-\kappa'\tau T-\kappa\tau' T-\kappa^2N+\frac{(\tau')'N}{\tau}-\frac{(\tau')^2N}{\tau^2}-\kappa\tau' T+\frac{(\tau')^2N}{\tau^2}+\tau' B+\tau' B+\tau^2N+\tau' B$$

$$=(-\kappa'\tau-2\kappa\tau')T+\left(-\kappa^2+\frac{(\tau')'}{\tau}-\tau^2\right)N+(3\tau')B$$

$$N''=\ (-\kappa'\tau-2\kappa\tau')T+\left(-\kappa^2+\frac{(\tau')'}{\tau}+\tau^2\right)N+(3\tau')B$$

$$det(N,N',N'')=\begin{vmatrix}0 & \frac{\kappa}{\tau} & 0\\ -\kappa\tau & \frac{\tau'}{\tau} & \tau\\ -\kappa'\tau-2\kappa\tau' & -\kappa^2+\frac{(\tau')'}{\tau}+\tau^2 & 3\tau'\end{vmatrix}.\begin{vmatrix}T\\ N\\ B\end{vmatrix}$$

$$det(N,N',N'')=\begin{vmatrix}0 & \frac{\kappa}{\tau} & 0\\ -\kappa\tau & \frac{\tau'}{\tau} & \tau\\ -\kappa'\tau-2\kappa\tau' & -\kappa^2+\frac{(\tau')'}{\tau}+\tau^2 & 3\tau'\end{vmatrix}.\begin{vmatrix}t\\ \tau n\\ \tau b\end{vmatrix}$$

$$(-\kappa'\tau-2\kappa\tau')\,\frac{\kappa}{\tau}\tau=-\kappa\kappa'\tau-2\kappa^2\tau'$$

$$(-\kappa'\tau)\frac{\kappa}{\tau}3\tau'=-3\kappa^2\tau'$$

$-\kappa\kappa'\tau - 2\kappa^2\tau' + 3\kappa^2\tau' = -\kappa\kappa'\tau + \kappa^2\tau'$ olup (4.1) deki bilgiden;

$= \kappa\,(-\kappa'\tau + \kappa\tau')\tau^2 = 0$

olur ve $det(N, N', N'') = 0$ olup α genel helistir.

(⇐) :

$det(N, N', N'') = 0$ kabul edelim.

$\kappa\,(-\kappa'\tau + \kappa\tau')\tau^2 = 0$ için $\kappa \neq 0$ olmak üzere $(\frac{\tau}{\kappa})' = 0$ olur. Dolayısı ile $\frac{\tau}{\kappa}$ sabit olup α genel helistir.

Teorem 4.3 Minkowski-3 uzayında Frenet çatısına göre genel helis olan α birim hızlı eğrisi β spacelike eğrisinin torsiyona göre düzenlenmiş ortogonal çatısında da genel helis olabilmesi için gerek ve yeter şart ;

$D_T^3 = \mu N + \frac{3\kappa'}{\tau} D_T N$ olmasıdır.

Burada;

$\mu = \frac{-\kappa^3}{\tau} + \frac{(\kappa')'}{\tau} + \kappa\tau - \frac{3(\kappa')^3}{\kappa\tau}$ dır.

İspat

$$D_T T = \frac{\kappa}{\tau} N$$

$$D_T^2\, T = \left(\frac{\kappa}{\tau} N\right)' = \left(\frac{\kappa}{\tau}\right)' N + \frac{\kappa}{\tau} N'$$

$$= \frac{\kappa'\tau - \kappa\tau'}{\tau^2} N + \frac{\kappa}{\tau}\left(-\kappa\tau T + \frac{\tau'}{\tau} N + \tau B\right)$$

$$= \frac{\kappa'}{\tau} N - \frac{\kappa\tau'}{\tau^2} N - \kappa^2 T + \frac{\kappa\tau'}{\tau^2} N + \kappa b$$

$$D_T^2\, T = -\kappa^2 T + \frac{\kappa'}{\tau} N + \kappa b$$

$$D_T^3 = (-\kappa^2 T)' + \left(\frac{\kappa'}{\tau} N\right)' + (\kappa B)'$$

$$= -2\kappa\kappa' T - \kappa^2 T' + \left(\frac{\kappa'}{\tau}\right)' N + \frac{\kappa'}{\tau} N' + \kappa' B + \kappa B'$$

$$= -2\kappa\kappa' T - \kappa^2\left(\frac{\kappa}{\tau} N\right) + \frac{(\kappa')'\tau - \kappa'\tau'}{\tau^2} N + \frac{\kappa'}{\tau}\left(-\kappa\tau T + \frac{\tau'}{\tau} N + \tau b\right) + \kappa' B$$

$$+ \kappa\left(+\tau n + \frac{\tau'}{\tau} B\right)$$

$$= -2\kappa\kappa' T - \frac{\kappa^3}{\tau} N + \frac{(\kappa')'}{\tau} N - \frac{\kappa'\tau'}{\tau^2} N - \kappa\kappa' T + \frac{\kappa'\tau'}{\tau^2} N + \kappa' B + \kappa\tau N + \frac{\kappa\tau'}{\tau} B$$

$$D_T^3 = -3\kappa\kappa' T + \left(-\frac{\kappa^3}{\tau} + \frac{(\kappa')'}{\tau} + \kappa\tau\right) \mathrm{N} + \left(2\kappa' + \frac{\kappa\tau'}{\tau}\right)\mathrm{B}$$
(4.2)

olur.

$$D_T N = -\kappa\tau \mathrm{T} + \frac{\tau'}{\tau}\mathrm{N} + \tau\mathrm{B}$$
(4.3)

$$\tau\mathrm{B} = D_T N + \kappa\tau\mathrm{T} - \frac{\tau'}{\tau}\mathrm{N}$$

$$\mathrm{B} = \frac{1}{\tau}\left(D_T N + \kappa\tau\mathrm{T} - \frac{\tau'}{\tau}\mathrm{N}\right)$$
(4.4)

(4.4) deki bilgi (4.2) de kullanılırsa;

$$D_T^3 = -3\,\kappa\kappa'\mathrm{T} + \left(\frac{-\kappa^3}{\tau} + \frac{(\kappa')'}{\tau} + \kappa\tau\right)\mathrm{N} + \left(2\kappa' + \frac{\kappa\tau'}{\tau}\right)\left(\frac{1}{\tau}\left(D_T N + \kappa\tau\mathrm{T} - \frac{\tau'}{\tau}\mathrm{N}\right)\right)$$

$$= -3\,\kappa\kappa'\mathrm{T} + \left(\frac{-\kappa^3}{\tau} + \frac{(\kappa')'}{\tau} + \kappa\tau\right)\mathrm{N} + \left(\frac{2\kappa'}{\tau} + \frac{\kappa\tau'}{\tau^2}\right)\left(D_T N + \kappa\tau\mathrm{T} - \frac{\tau'}{\tau}\mathrm{N}\right)$$

$$= -3\,\kappa\kappa'\mathrm{T} + \left(\frac{-\kappa^3}{\tau} + \frac{(\kappa')'}{\tau} + \kappa\tau\right)\mathrm{N} + \frac{2\kappa'}{\tau}D_T N + 2\kappa\kappa'\mathrm{T} - \frac{2\kappa'\tau'}{\tau^2}\mathrm{N} + \frac{\kappa\tau'}{\tau^2}D_T N + \frac{\kappa^2\tau'}{\tau}\mathrm{T} - \frac{\kappa(\tau')^2}{\tau^3}\mathrm{N}$$

$$= -3\,\kappa\kappa'\mathrm{T} + \left(\frac{-\kappa^3}{\tau} + \frac{(\kappa')'}{\tau} + \kappa\tau\right)\mathrm{N} + \left(\frac{2\kappa'}{\tau} + \frac{\kappa\tau'}{\tau^2}\right)D_T N + \left(2\kappa\kappa' + \frac{\kappa^2\tau'}{\tau}\right)\mathrm{T} + \left(-\frac{2\kappa'\tau'}{\tau^2} - \frac{\kappa(\tau')^2}{\tau^3}\right)\mathrm{N}$$

$$= \left(\frac{2\kappa'}{\tau} + \frac{\kappa\tau'}{\tau^2}\right)D_T\mathrm{N} + \left(-\kappa\kappa' + \frac{\kappa^2\tau'}{\tau}\right)\mathrm{T} + \left(\frac{-\kappa^3}{\tau} + \frac{(\kappa')'}{\tau} + \kappa\tau - \frac{2\kappa'\tau'}{\tau^2} - \frac{\kappa(\tau')^2}{\tau^3}\right)\mathrm{N}$$

α genel helis olduğundan $\frac{\tau}{\kappa}$ = sabit olduğu görülür. O halde;

$\left(\frac{\tau}{\kappa}\right)' = 0$ olup $\frac{\tau'\kappa - \tau\kappa'}{\kappa^2} = 0 \Rightarrow \tau'\kappa = \tau\kappa'$ veya $\frac{\kappa'}{\kappa} = \frac{\tau'}{\tau}$ türetilebilir.

$$= \left(\frac{2\kappa'}{\tau} + \frac{\kappa\tau'}{\tau\tau}\right)D_T\mathrm{N} + \left(-\kappa\kappa' + \frac{\kappa^2\tau'}{\tau}\right)\mathrm{T} + \left(\frac{-\kappa^3}{\tau} + \frac{(\kappa')'}{\tau} + \kappa\tau - \frac{2\kappa'\tau'}{\tau\tau} - \frac{\kappa\tau'\tau'}{\tau\tau\tau}\right)\mathrm{N}$$

$$= \left(\frac{2\kappa'}{\tau} + \frac{\kappa\kappa'}{\tau\kappa}\right)D_T\mathrm{N} + \left(-\kappa\kappa' + \frac{\kappa^2\kappa'}{\kappa}\right)\mathrm{T} + \left(\frac{-\kappa^3}{\tau} + \frac{(\kappa')'}{\tau} + \kappa\tau - \frac{2\kappa'\kappa'}{\kappa\tau} - \frac{\kappa\kappa'\kappa'}{\kappa\kappa\tau}\right)\mathrm{N}$$

$$= \left(\frac{2\kappa'}{\tau} + \frac{\kappa'}{\tau}\right) D_T N + (-\kappa\kappa' + \kappa\kappa')T + \left(\frac{-\kappa^3}{\tau} + \frac{(\kappa')'}{\tau} + \kappa\tau - \frac{2(\kappa')^2}{\kappa\tau} - \frac{(\kappa')^2}{\kappa\tau}\right) N$$

$$= \left(\frac{-\kappa^3}{\tau} + \frac{(\kappa')'}{\tau} + \kappa\tau - \frac{3(\kappa')^2}{\kappa\tau}\right) N + \left(\frac{\mathbf{3\kappa'}}{\boldsymbol{\tau}}\right) D_T N$$

$D_T^3 T = \left(\frac{-\kappa^3}{\tau} + \frac{(\kappa')'}{\tau} + \kappa\tau - \frac{3(\kappa')^2}{\kappa\tau}\right) N + \left(\frac{\mathbf{3\kappa'}}{\boldsymbol{\tau}}\right) D_T N$ olup ispat elde edilir.

Diğer yönden

$$D_T T = \frac{\kappa}{\tau} N$$

$$D_T^2 T = D_T\left(\frac{\kappa}{\tau} N\right)$$

$$D_T^2\left(\frac{\kappa}{\tau} N\right) = D_T^3 T = \mu N + \left(\frac{3\kappa'}{\tau}\right) D_T N \tag{4.5}$$

(4.3) deki bilgi (4.5) de kullanılırsa;

$$D_T^2\left(\frac{\kappa}{\tau} N\right) = \mu N + \left(\frac{3\kappa'}{\tau}\right)\left(-\kappa\tau T + \frac{\tau'}{\tau} N + \tau B\right)$$

$$= \mu N - 3\kappa\kappa' T + \frac{3\kappa'\tau'}{\tau^2} N + 3\kappa' B$$

$$= -3\kappa\kappa' T + \left(\mu + \frac{3\kappa'\tau'}{\tau^2}\right) N + 3\kappa' B$$

$$= -3\kappa\kappa' T + \left(\frac{-\kappa^3}{\tau} + \frac{(\kappa')'}{\tau} + \kappa\tau - \frac{3(\kappa')^2}{\kappa\tau} + \frac{3\kappa'\tau'}{\tau^2}\right) N + 3\kappa' B$$

$$= -3\kappa\kappa' T + \left(\frac{-\kappa^3}{\tau} + \frac{(\kappa')'}{\tau} + \kappa\tau\right) N + \left(2\kappa' + \frac{\kappa\tau'}{\tau}\right) B = -3\kappa\kappa' T + \left(\frac{-\kappa^3}{\tau} + \frac{(\kappa')'}{\tau} + \kappa\tau\right) N$$

$$+ \left(-\frac{3(\kappa')^2}{\kappa\tau} + \frac{3\kappa'\tau'}{\tau^2}\right) N + 3\kappa' B \tag{4.6}$$

(4.6)'da kat sayı eşitliği kullanılarak;

$2\kappa' + \frac{\kappa\tau'}{\tau} = 3\kappa'$ ve $-\frac{3(\kappa')^2}{\kappa\tau} + \frac{3\kappa'\tau'}{\tau^2} = 0$

$\frac{\kappa\tau'}{\tau} = \kappa' \Rightarrow \frac{\tau'}{\tau} = \frac{\kappa'}{\kappa} \Rightarrow \kappa\tau' = \kappa'\tau$ olup $\left(\frac{\tau}{\kappa}\right)' = 0$ olur ve $\frac{\tau}{\kappa}$ sabit olup α genel helistir.

$\frac{3(\kappa')^2}{\kappa\tau} = \frac{3\kappa'\tau'}{\tau^2} \Longrightarrow \frac{\tau'}{\tau} = \frac{\kappa'}{\kappa}$ olur. Böylece buradan $\frac{\tau}{\kappa}$ sabit olup α genel helistir.

5. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu tezde, Öklid-3 uzayındaki genel helisler, slant helisler, Bertrand eğrileri için ve Minkowski-3 uzayındaki genel helisler için farklı Frenet çatılarında çalışılmıştır. Öklid-3 uzayındaki standart Frenet-Serret denklemlerinin $\kappa \neq 0$ olmak üzere κ katını alarak yeniden modifiye edilmiş Frenet çatısında genel helislerin, slant helislerin ve Bertrand eğri çiftinin sağladığı teoremler incelenmiştir. Ayrıca genel helislerin ve Bertrand eğri çiftinin yine Öklid-3 uzayındaki standart Frenet-Serret denklemlerinin $\tau \neq 0$ olmak üzere τ katını alarak yeniden modifiye edilmiş Frenet çatısında da sağlayan teoremleri incelenmiştir.

Öklid-3 uzayının yanı sıra Minkowski-3 uzayındaki spacelike eğrinin principal normal çatısının τ katı alınarak bu spacelike eğrinin principal normal çatısı yeniden modifiye edilmiştir. Bu çatıya göre de genel helislerin sağlayan teoremleri incelenmiştir.

Bu tezin sonucu gösterir ki; çalışılan çatılar belli ölçülerde yeniden modifiye edilirse birçok teorem bu çatılarda uygunluk sağlayabilmektedir.

KAYNAKLAR

Ali AT. ,Lopez R. , 2011 , Slant helices in Minkowski 3-space. J Korean Math Soc 48: 159-167

Balgetir H. , Bektaş M. , Inoguchi J. , 2004 , Null Bertrand curves in Minkowski 3-space and their characterizations. Note di Matematica 23(1):7-13

Barros M. , 1997 , General helices and a theorem of Lancret. Proc Am Math Soc 125(5):1503-1509

Bertrand JM. , 1850 , Memoire sur la theorie des courbes a double courbure. J. Math Pures Appl 15:332-350

Bukcu B. , Karacan M.K., On the modified orthogonal frame with curvature and torsion in -3 space, Mathematical sciences and applications e-notes, 2016

Bukcu B., Karacan M.K., Es H., Lone M.S., On some curves with modified orthogonal frame in euclidean 3-space, Shiraz Unıversity,2018

Burke J.F. , 1960 , Bertrand curves associated with a pair of curves. Math Mag 34(1):60-62

Ekmekci F.N. , 2000 , On genaral helices and submanifolds of an indefinite- Riemann manifold. An Ştiint Univ Al I Cuza Iaşi Mat (NS) 46(2): 263-270

Hacısalihoğlu H.H. ve Sabuncuoğlu , 1983, A. Diferansiyel Geometri, Milli Eğitim Basımevi, İstanbul.

Hacısalihoğlu H.H. , 1983, Diferansiyel Geometri. Fen Fakültesi, Ankara.

Ilarslan K. , 2003 , Characterizations of spacelike general helices in Lorentzian manifolds. Kragujev J. Math 25:209-218

Ilarslan ve Boyacıoğlu 2008 , Munteanu , 2010

Izumiya S. , Takeuchi N. , 2004 , New special curves and developable surfaces. Turk J. Math 28:153-163

İzumiya, S. Takeuchi N. , 2002 , N. Generic Properties of helices and Bertrand Curves, Journal of Geometry.

Kula L. , Yaylı Y. , 2005 , On slant helix and its spherical indicatrix. Appl Math Comput 169(1):600-607

Kula L, Ekmekci F.N., Yaylı Y, Ilarslan K. , 2010 , Characterizations of slant helices in Euclidian 3-space. Turk J Math 34:261-218

Lone M.S. , Es H. , Karacan M.K. , Bukcu B. , 2019 , Iranian Journal Of Science And Technology Transaction A-Science , cilt.43, ss.1905-1916.

Matsuda, H. ve Yoruzu , 2003 , S., Notes on Bertrand Curves, Yokohama Mathematical. Journal, V.50:41-58

Millmann, R.S. and Parker, G.D., 1977. Elements of Differantial Geometry, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey.

Minkowski 3- space and their characterizations. Note di Matematica 23(1): 7-13

Monterde J. , 2009 , Salkowski curves revisted: a family of curves with constant curvature and non-constant torsion. Comput Aided Geom Des 26:271-278

Nutbourne AW. , Martin RR. , 1988 , Differential geoemtry applied to the design of curves and surfaces. Ellis Horwood, Chichester

Öğrenmiş AO. , Ergut M. , Bektaş M. , 2007 , On the helices in the Galilean space G_3. Iran J Sci Technol Trans A 31(A2):177-181

Öğrenmiş AO. , Öztekin H. , Ergut M. , 2009 , Bertrand curves in Galilean space and their characterizations. Kragujev J. Math 32:139-147

Öztekin HB. , Bektaş M. , 2010 , Representation formulae for Bertrand curves in the Minkowski 3-space. Sci Magna 6(1):89-96

Sabuncuğlu, A. , 2014 , Diferensiyel Geometri , Nobel Yayınevi, Ankara.

Salkowski E. , 1909 , Zur transformation von raumkurven. Math Ann 66(4):517-557

Sasai T. , 1984 , The fundamental theorem of analytic space curves and apparent singularities of Fuchsian differential equations. Tohoku Math J 36:17-24

Schief WK. , 2003 , On the integrability of Bertrand curves and Razzaboni surfaces. J Geom Phys 45:130-150

Struik DJ. , 1988 , Lectures on classical differential geometry, 2nd edn. Addison Wesley, Boston

Walrave, J., 1995, Curves and surfaces in Minkowski space, Doctoral dissertation, K.U. LEUVEN Faculteit Der Wetenschappen, 1-9.

Van-Brunt B. , Grant K. , 1996 , Potential application of Weingarten surfaces in CADG, part 1: Weingarten surfaces and surface shape investigation. Comput Aided Geom Des 13: 569-582

Yoon DW. , 2012 , General helices of AW(k)-type in lie group. J Appl Math 10. Article ID 535123. https://doi.org/10.1155/2012/535123

Yüce, S., 2017, Öklid uzayında diferansiyel geometri, Pegem Akademi, Ankara, 156-302.