ANKARA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATRİS KATSAYILI FARK OPERATÖRLERİ

Emel YILDIRIM

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ANKARA
2014

ETİK

Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez içindeki bütün bilgilerin doğru ve tam olduğunu, bilgilerin üretilmesi aşamasında bilimsel etiğe uygun davrandığımı, yararlandığım bütün kaynakları atıf yaparak belirttiğimi beyan ederim.

10/01/2013

Emel YILDIRIM

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

MATRİS KATSAYILI FARK OPERATÖRLERİ

Emel YILDIRIM

Ankara Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Şeyhmus YARDIMCI

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır.

İlk bölüm giriş kısmına ayrılmıştır.

İkinci bölümde, spektral analizin temel tanımları ve önemli teoremleri verilmiştir.

Üçüncü bölümde, matris katsayılı self adjoint fark operatörünün spektral özellikleri incelenmiş ve sürekli spektrumu elde edilmiştir.

Dördüncü bölümde ise matris katsayılı non-selfadjoint fark operatörünün spektral analizi yapılmış ve analitik fonksiyonların birebirlik teoremleri kullanılarak L operatörünün özdeğerleri ve spektral tekillikleri hakkında önemli bilgiler verilmiştir.

Son bölümde ise bu tezde yapılan çalışmalar ve bu çalışmaların sonuçları ifade edilmiştir.

Ocak 2014, 42 sayfa

Anahtar Kelimeler : Sınırlı operatörler, fark operatörleri, spektral teori.

ABSTRACT

Master Thesis

DIFFERENCE OPERATORS with MATRIX COEFFICIENTS

Emel YILDIRIM

Ankara University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Assoc. Dr. Şeyhmus YARDIMCI

This thesis consists of five chapters.

The first chapter is devoted to the introduction.

In the second chapter, some basic definitions and main theorems of spectral analysis have been given.

In the third chapter, spectral properties of selfadjoint difference operators with matrix coefficients are investigated and continous spectrum is calculated.

In the fourth chapter, spectral analysis of non-selfadjoint difference operators with matrix coefficients are examined and using the uniqueness theorems of analytic functions important information about eigenvalues and spectral singularities of L operators are given.

In the last chapter, the studies performed in this thesis and the result of these studies are expressed.

Januray 2014, 42 pages

Key Words: : Bounded operators, difference operators, spectral theory.

TEŞEKKÜR

Çalışmalarımı yönlendiren ve karşılaştığım güçlüklerde değerli yardımlarını esirgemeyen, akademik ortamda olduğu kadar beşeri ilişkilerde de engin fikirleriyle yetişme ve gelişmeme yardımcı olan, beni yönlendiren, saygı değer hocalarım, Sayın Doç. Dr. Şeyhmus YARDIMCI (Ankara Üniversitesi Matematik Anabilim Dalı)'a ve Sayın Prof. Dr. Elgiz BAYRAM (Ankara Üniversitesi Matematik Anabilim Dalı)'a ve bana her zaman destek olan aileme en içten saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

Emel YILDIRIM

Ankara, Ocak 2014

İÇİNDEKİLER

SİMGELER DİZİNİ

$\mathbb{N}$	Doğal sayıla kümesi
$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
$\mathbb{C}$	Kompleks sayılar kümesi
$\operatorname{Im} z$	z kompleks sayısının sanal kısmı
$\mathbb{C}_+$	$\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$
$\overline{\mathbb{C}_+}$	$\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z \geq 0\}$
$D(L)$	L operatörünün tanım kümesi
$R(L)$	L operatörünün değer kümesi
$R_\lambda(L)$	L operatörünün resolvent operatörü
$\sigma(L)$	L operatörünün spektrumu
$\sigma_d(L)$	L operatörünün özdeğerler kümesi
$\sigma_c(L)$	L operatörünün sürekli spektrumu
$\sigma_r(L)$	L operatörünün rezidü spektrumu
$\sigma_{ss}(L)$	L operatörünün spektral tekillikler kümesi
μ	Lebesque ölçüsü
$l^2(\mathbb{N}, \mathbb{C})$	$\left\{ x = \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} : \sum_n \|x_n\|^2 < \infty \right\}$

1. GİRİŞ

Skaler katsayılı fark operatörleri ve skaler bileşenli sonsuz Jacobi matrislerinin spektral analizi hem selfadjoint hem de non-seladjoint durumda şimdiye kadar detaylı bir şekilde incelenmiştir. Fakat son yıllarda Sturm-Liouville denklemlerinin diskre analoğu olan fark operatörlerinin spektral analizi ile ilgili yapılan çalışmalar yaygınlaşmış, hem skaler hem de matris katsayılı olarak ele alınan bu fark operatörleri selfadjoint ve non-selfadjoint durumda incelenmiştir.

İlk olarak Naimark, 1960 yılında non-selfadjoint, sürekli ve diskre spektruma sahip Sturm-Liouville operatörünün spektral analizi üzerine çalışmış ve bu operatörün sürekli spektrum ve diskre spektrum dışında spektral tekiilliklere de sahip olduğunu ispatlamıştır. Daha sonra spektral tekilliklerin önemi Lyance tarafından daha kapsamlı bir şekilde ortaya konmuştur.

Selfadjoint fark operatörlerinin spektral analizi ile ilgili çalışmalar ise Atkinson tarafından "Discrete and Continuous Boundary Problems" ve Berezanski tarafından "Expansion in Eigenfunctions of Selfadjoint Operators" adlı kitaplarda toplanmıştır.

Bu tezde ise ;

E $v-boyutlu$ $(v<\infty)$ Euclid uzayı ve $\|,\|_E$ ve $\langle .,.\rangle_E$ sırasıyla Euclid uzayı

üzerindeki norm ve iç çarpımı belirtmek üzere

$$\ell^2(\mathbb{N},E)=\left\{y=(y_n)\quad ;y\in E\quad n\in\mathbb{N}\quad \sum_{n=1}^{\infty}\|y_n\|_E^2<\infty\right\} \tag{1.1}$$

uzayı

$$\langle y,z\rangle=\sum_{n=1}^{\infty}(y_n,z_n)_E \tag{1.2}$$

iç çarpımıyla tanımlanan Hilbert uzayı olmak üzere bu uzay üzerinde

$$(\ell y)_n = A_{n-1}y_{n-1} + B_n y_n + A_n y_{n+1} \tag{1.3}$$

matris katsayılı fark denkleminin

$$y_0 = 0 \tag{1.4}$$

sınır koşulu altında tanımlanan operatör L olsun. Burada $A_n, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ve $B_n, n \in \mathbb{N}$, E uzayı üzerinde tanımlı matris dizileri için ilk olarak

$$\det A_n \neq 0 \quad n \in \mathbb{N}$$

olarak kabul edilecek ve selfadjoint L operatörünün sürekli spektrumu ve özdeğerleri incelenecektir. Daha sonra A_n ve B_n matris dizilerinin

$$\det A_n \neq 0 \;\; A_n \neq A_n^* \; B_n \neq B_n^* \; n \in \mathbb{N}$$

koşulunu sağladığı kabul edilerek L operatörünün non-selfadjoint durumdaki spektral özellikleri incelenecektir.

İlk olarak temel kavramlar verilecek daha sonra Weyl Kompakt Heyecanlandırma Teoremi yardımıyla L operatörünün hem selfadjoint hem de non-selfadjoint durumundaki sürekli spektrumu elde edilecektir. Ayrıca non-selfadjoint durumdaki L operatörünün

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \{e^{\varepsilon n} (\|I - A_n\| + \|B_n\|)\} < \infty \quad \varepsilon > 0 \tag{1.5}$$

koşulu altında özdeğerleri ve spektral tekillikleriyle ilgili önemli sonuçlar verilecektir.

2. TEMEL TANIM ve TEOREMLER

Bu bölümde, ileride ihtiyaç duyulacak bazı temel tanım ve teoremler verilecektir.

Teorem 2.1 X ve Y aynı bir K cismi üzerinde iki vektör uzayı olmak üzere

$$L : D(L) \subset X \rightarrow Y$$

operatörü verilsin. L operatörünün $D(L)$ tanım kümesi ve $R(L)$ değer kümesi sırasıyla X ve Y uzaylarının alt vektör uzayları olsunlar. Eğer her $x,\ y \in D(L)$ ve her $\alpha, \beta \in K$ için

$$L(\alpha x + \beta y) = \alpha L(x) + \beta L(y) \tag{2.1}$$

sağlanıyorsa L operatörü lineerdir (Akhiezer1965).

Teorem 2.2 X ve Y aynı bir K cismi üzerinde iki normlu uzay $L : D(L) \subset X \rightarrow Y$ lineer bir operatör olsun. Eğer her $x \in D(L)$ için

$$\|Lx\| \leq C \|x\| \tag{2.2}$$

olacak biçimde $C > 0$ sayısı varsa L operatörüne sınırlı lineer bir operatör denir (Lusternik&Sobolev 1968).

Tanım 2.1 X ve Y aynı bir K cismi üzerinde iki normlu uzay ve

$$L : X \rightarrow Y$$

lineer bir operatör olsun. X uzayının sınırlı her alt kümesinin L operatörü altındaki görüntüsü Y uzayında kompakt ise, L operatörüne kompakt operatör adı verilir (Akhiezer 1965).

Teorem 2.3 ($l^2(\mathbb{N})$ de Kompaktlık Kriteri) $M \subset l^2(N)$ sınırlı bir küme olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ ve her $x = \{\xi_1, \xi_2, \xi_3, ..., \xi_n, ...\} \in M$ için $n > N_0$ oldukça

$$\sum_{i=n+1}^{\infty} |\xi_i|^2 < \varepsilon^2 \tag{2.3}$$

sağlanacak biçimde en az bir N_0 sayısı varsa M kompakttır (Lusternik&Sobolev 1968).

Teorem 2.4 (*Borel Lebesgue Teoremi*) Reel sayılar kümesinin kapalı ve sınırlı her aralığı kompakttır (Lusternik&Sobolev 1968).

Tanım 2.2 X bir Hilbert uzayı

$$L : D(L) \subset X \to Y$$

lineer bir operatör ve $\overline{D(L)} = X$ olsun. Her $y \in Y$ ve her $x \in D(L)$ için

$$\langle Lx, y \rangle = \langle x, L^* y \rangle \tag{2.4}$$

eşitliğini gerçekleyen L^* operatörüne L operatörünün Hilbert -Adjointi denir (Akhiezer 1965).

Tanım 2.3 X bir Hilbert uzayı ve L, X uzayı üzerinde tanımlı lineer bir operatör olsun. Eğer

$$L^* x = Lx \tag{2.5}$$

eşitliği gerçekleniyorsa L operatörüne self-adjoint operatördür denir (Naimark 1968).

Tanım 2.4 X bir Hilbert uzayı olmak üzere tanım kümesi X de yoğun olan self-adjoint operatöre simetrik operatör denir (Naimark 1968).

Teorem 2.5 X bir Hilbert uzayı olsun ve $L : X \to Y$ sınırlı lineer operatörü verilsin. L operatörünün self adjoint olması için gerek ve yeter koşul simetrik olmasıdır

(Akhiezer 1965).

Tanım 2.5 $X \neq \{\theta\}$ normlu bir uzay ve $L : X \to Y$ lineer bir operatör olsun. Eğer $R_\lambda(L) = (L - \lambda I)^{-1}$ resolvent operatörü mevcut, sınırlı ve X de yoğun bir küme üzerinde tanımlı ise $\lambda \in \mathbb{C}$ sayısına L operatörünün bir regüler değeri denir.
L operatörünün bütün regüler değerlerinin oluşturduğu kümeye L operatörünün resolventi denir ve bu küme

$$\rho(L) = \left\{ \lambda \in \mathbb{C} : R_\lambda(L) \ \mathit{mevcut\ ve\ sınırlı}, \overline{D(R_\lambda(L))} = X \right\}$$

biçiminde ifade edilir.

Teorem 2.6 H kompleks Hilbert uzay ve $L : H \to H$ sınırlı self adjoint lineer bir operatör olsun. Bu durumda, bir λ sayısının L nin $\rho(L)$ resolvent cümlesine ait olması için gerek ve yeter koşul , $L_\lambda = L - \lambda I$ olmak üzere her $x \in H$ için

$$\|L_\lambda x\| \geq C \|x\| \tag{2.6}$$

olacak şekilde bir $C > 0$ sayısının var olmasıdır (Berezanski 1968).

Tanım 2.6 $\rho(L)$ nin $\mathbb{C}$ kompleks düzlemindeki tümleyeni olan $\sigma(L) = \mathbb{C} \setminus \rho(L)$ kümesine L nin spektrumu ve her bir $\lambda \in \sigma(L)$ sayısına da L operatörünün bir spektral değeri denir.

Tanım 2.7 $L : X \to X$ lineer bir operatör olsun. Eğer $Lx = \lambda x$ olacak biçimde X de $x \neq 0$ elemanı varsa λ kompleks sayısına L nin bir özdeğeri ve $x \in X$ elemenına da bir öz vektör denir.

Yukarıdaki tanımlardan aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

I) Eğer λ, L operatörünün bir özdeğeri ise $L-\lambda I$ operatörü birebir değildir. Dolayısıyla $R_\lambda(L)$ var olmayacağından $\lambda \in \sigma(L)$ olur. Yani her özdeğer bir spektral değerdir. Buna göre L operatörünün özdeğerlerinin kümesi $\sigma_d(L)$ ile gösterilir. Bu durumda $\sigma_d(L) \subset \sigma(L)$ olur. $\sigma_d(L)$ kümesine L operatörünün diskre veya nokta spektrumu denir. Buna göre

$$\sigma_d(L) = \{\lambda \in \mathbb{C} : R_\lambda(L) \text{ mevcut değil}\}$$

gerçeklenir.

II)Eğer $R_\lambda(L)$ var ve X de yoğun bir küme üzerinde tanımlı fakat sınırsız ise $\lambda \in \sigma(L)$ olur. Bu özelliğe sahip bütün λ sayılarının kümesine sürekli spektrum denir ve $\sigma_c(L)$ ile gösterilir. O halde

$$\sigma_c(L) = \left\{\lambda \in \mathbb{C} : R_\lambda(L) \text{ mevcut }, R_\lambda(L) \text{ sınırsız}, \overline{D(R_\lambda(L))} = X\right\}$$

gerçeklenir.

III) $R_\lambda(L)$ var, sınırlı fakat X de yoğun bir küme üzerinde tanımlı olmayacak şekilde λ spektral değelerinin oluşturduğu kümeye ise L operatörünün rezidü spektrumu denir ve $\sigma_r(L)$ ile gösterilir. Dolayısıyla

$$\sigma_r(L) = \left\{\lambda \in \mathbb{C} : R_\lambda(L) \text{ mevcut }, R_\lambda(L) \text{ sınırlı}, \overline{D(R_\lambda(L))} \neq X\right\}$$

olur. Buna göre λ spektral değeri $\sigma_d(L), \sigma_c(L)$ ve $\sigma_r(L)$ kümelerinden en az birine sahip olup

$$\sigma(L) = \sigma_d(L) \cup \sigma_c(L) \cup \sigma_r(L)$$

gerçeklenir. Ayrıca $\rho(L), \sigma_d(L), \sigma_c(L)$ ve $\sigma_r(L)$ kümeleri ikişer ikişer ayrık olup birleşimleri tüm kompleks düzlemi verir (Naimark 1968).

Teorem 2.7 Kompleks bir H Hilbert uzayı üzerinde sınırlı selfadjoint lineer

$L : H \to H$ operatörünün özdeğerleri reeldir (Lusternik &Sobolev 1968).

Teorem 2.8 Kompleks bir H Hilbert uzayı üzerinde sınırlı selfadjoint lineer $L : H \to H$ operatörünün $\sigma_r(L)$ rezidü spektrumu boştur (Lusternik &Sobolev 1968).

Teorem 2.9 Kompleks bir H Hilbert uzayı üzerinde sınırlı selfadjoint lineer $L : H \to H$ operatörünün spektrumu reel eksende bulunur (Lusternik &Sobolev 1968).

Teorem 2.10 Kompleks bir H Hilbert uzayı üzerinde herhangi sınırlı selfadjoint lineer L operatörü için

$$\|L\| = \sup_{\|\upsilon\|=1} \langle L\upsilon, \upsilon \rangle \tag{2.7}$$

gerçeklenir.

Şimdi self adjoint ve kompakt iki operatörün toplamı biçiminde yazılabilen bir operatörün sürekli spektrumunu bulmayı sağlayan bir teorem verelim.

Teorem 2.11 (Weyl Kompakt Heyecanlandırma Teoremi) L_1 selfadjoint ve L_2 kompakt operatör olmak üzere $L = L_1 + L_2$ biçiminde yazılabilen bir operatör olsun. Buna göre

$$\sigma_c(L) = \sigma_c(L_1) \tag{2.8}$$

gerçeklenir (Glazman 1965).

Tanım 2.8 $R_\lambda(L)$ operatörünün kutup noktası olup, sürekli spektrumda bulunan ve L operatörünün özdeğeri olmayan λ kompleks sayısına L operatörünün spektral tekilliği adı verilir ve $\sigma_{ss}(L)$ ile gösterilir (Naimark 1960).

Bir operatörün regüler değerleri, özdeğerleri, spektral tekillikleri ve bunların özelliklerinin belirlenmesinde aşağıdaki teoremler kullanılacaktır.

Teorem 2.12 Özdeş olarak sıfır olmayan bir analitik fonksiyonun, analitiklik bölgesi içindeki sıfırları (eğer varsa) ayrıktır (Dolzhenko1979).

Teorem 2.13 Özdeş olarak sıfır olmayan bir analitik fonksiyonun, analitiklik bölgesi içindeki sıfırlarının limit noktaları (eğer varsa) analitiklik bölgesinin sınırındadır (Dolzhenko 1979).

Teorem 2.14 Özdeş olarak sıfır olmayan bir analitik fonksiyonun, sonsuz katlı sıfırları (eğer varsa) analitiklik bölgesinin sınırındadır (Dolzhenko 1979).

Teorem 2.15 (Privalov Teoremi) Açık üst yarı düzlemde özdeş olarak sıfır olmayan, analitik bir fonksiyonun reel eksendeki sıfırlarının Lebesgue ölçüsü sıfırdır (Dolzhenko 1979).

3. JOST ÇÖZÜMÜ ve SELFADJOİNT L OPERATÖRÜNÜN SÜREKLİ SPEKTRUMU

I, E uzayı üzerindeki birim matris ve $\|.\|$, $v \times v$ tipindeki kompleks bileşenli matrislerin normunu göstermek üzere,

$\{A_n\}$ ve $\{B_n\}$, $n \in \mathbb{N}$ matris dizilerinin

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\|I - A_n\| + \|B_n\|) < \infty \tag{3.1}$$

şartını sağladığı kabul edilsin.

$\lambda = z + z^{-1}$ için

$$A_{n-1}y_{n-1} + B_n y_n + A_n y_{n+1} = \left(z + z^{-1}\right) y_n \ , \ \ n \in \mathbb{N} \tag{3.2}$$

denkleminin

$$\lim_{n\to\infty} E_n(z)\, z^{-n} = I \qquad , \qquad z \in D_0 := \{z : |z| = 1\} \tag{3.3}$$

koşulunu sağlayan matris çözümü $E(z) := \{E_n(z)\}$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ile gösterilsin. $E(z)$ çözümüne (3.2) fark denkleminin Jost çözümü denir.

Teorem 3.1 (3.1) koşulu altında $E(z)$ çözümü mevcuttur ve

$$\begin{aligned} E_n(z) \ &= \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{z^{k-n} - z^{n-k}}{z - z^{-1}} \left[(I - A_{k-1}) E_{k-1}(z) - B_k E_k(z) + (I - A_k) E_{k+1}(z) \right] \\ &\quad + z^n I \end{aligned} \tag{3.4}$$

biçiminde ifade edilir.

İspat. (3.2) eşitliği $\forall n \in \mathbb{N}$ için $\lambda = z + z^{-1}$ olmak üzere

$$y_{n-1} + y_{n+1} - \left(z + z^{-1}\right) y_n = \left(I - A_{n-1}\right) y_{n-1} - B_n y_n + \left(I - A_n\right) y_{n+1}$$

şeklinde ifade edilebilir. Buradan

$$\left(I - A_{n-1}\right) y_{n-1} - B_n y_n + \left(I - A_n\right) y_{n+1} = F_n$$

dersek

$$y_{n-1} + y_{n+1} - \left(z + z^{-1}\right) y_n = F_n \tag{3.5}$$

şeklindeki homogen olmayan fark denklemi elde edilir. (3.5) denklemine parametrelerin değişimi yöntemini uygulayarak istediğimiz eşitliği elde edebilirz.

$$y_{n-1} + y_{n+1} - \left(z + z^{-1}\right) y_n = 0 \tag{3.6}$$

denklemi (3.5) denkleminin homogen kısmı olup bu denkleminin lineer bağımsız iki çözümü

$$y_n^{(1)} = z^n I \quad \text{ve } y_n^{(2)} = z^{-n} I$$

olduğundan (3.6) denkleminin genel çözümü

$$\widetilde{y_n} = c y_n^{(1)} + d y_n^{(2)}$$

şeklindedir. O halde homogen olmayan (3.5) denkleminin

$$y_n = c_n z^n + d_n z^{-n}$$

şeklinde bir özel çözümü vardır. Dolayısıyla

$$y_n - y_{n-1} = c_n z^n + d_n z^{-n} - c_{n-1} z^{n-1} - d_{n-1} z^{-(n-1)}$$

yazılır. Son eşitliğe $c_{n-1} z^n + d_{n-1} z^{-n}$ terimleri ekleyip çıkarıldığında

$$\begin{aligned} y_n - y_{n-1} &= c_n z^n + d_n z^{-n} + c_{n-1} z^n + d_{n-1} z^{-n} \\ &\quad - c_{n-1} z^{n-1} - d_{n-1} z^{-(n-1)} + c_{n-1} z^n + d_{n-1} z^{-n} \\ &= (c_n - c_{n-1}) z^n + (d_n - d_{n-1}) z^{-n} + c_{n-1} z^n + d_{n-1} z^{-n} \end{aligned}$$

bulunur. Parametrelerin değişim metodundan dolayı

$$(c_n - c_{n-1}) z^n + (d_n - d_{n-1}) z^{-n} = 0 \tag{3.7}$$

olmalıdır. O halde

$$y_n - y_{n-1} = c_{n-1} \left(z^n - z^{n-1} \right) + d_{n-1} \left(z^{-n} - z^{-n+1} \right)$$

yazılır. Buradan

$$y_{n+1} - y_n = c_n \left(z^{n+1} - z^n \right) + d_n \left(z^{-n-1} - z^{-n} \right)$$

elde edilir. Son iki eşitlik yardımıyla

$$\begin{aligned} y_{n+1} + y_{n-1} &= 2y_n + c_n \left(z^{n+1} - z^n \right) - c_{n-1} \left(z^n - z^{n-1} \right) \\ &\quad + d_n \left(z^{-(n+1)} - z^{-n} \right) - d_{n-1} \left(z^{-n} - z^{-(n-1)} \right) \end{aligned}$$

bulunur. Dolayısıyla

$$
\begin{aligned}
y_{n+1}+y_{n-1} &= 2\left(c_n z^n + d_n z^{-n}\right) + c_n\left(z^{n+1}-z^n\right) - c_{n-1}\left(z^n - z^{n-1}\right) \\
&\quad + d_n\left(z^{-(n+1)} - z^{-n}\right) - d_{n-1}\left(z^{-n} - z^{-(n-1)}\right) \\
&= (c_n - c_{n-1})z^n + (d_n - d_{n-1})z^{-n} \\
&\quad + c_{n-1}z^{n-1} + c_n z^{n+1} + d_{n-1}z^{-(n-1)} + d_n z^{-(n+1)}
\end{aligned}
$$

elde edilir. Son eşitlikte (3.7) ifadesi dikkate alındığında

$$
y_{n+1}+y_{n-1} = c_{n-1}z^{n-1} + c_n z^{n+1} + d_{n-1}z^{-(n-1)} + d_n z^{-(n+1)}
$$

yazılabilir. Bu ifade (3.5) denkleminde yerine yazıldığında

$$
\left(c_{n-1}-c_n\right)z^{n-1} + \left(d_{n-1}-d_n\right)z^{-n+1} = F_n \tag{3.8}
$$

elde edilir. (3.7) ve (3.8) denklemlerinin ortak çözümünden

$$
c_n - c_{n-1} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & z^{-n} \\ -F_n & z^{-n+1} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} z^n & z^{-n} \\ z^{n-1} & z^{-n+1} \end{vmatrix}} \quad \text{ve} \quad d_n - d_{n-1} = \frac{\begin{vmatrix} z^n & 0 \\ z^{n-1} & -F_n \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} z^n & z^{-n} \\ z^{n-1} & z^{-n+1} \end{vmatrix}}
$$

yazılabilir. Buradan

$$
\begin{aligned}
c_n - c_{n-1} &= \frac{F_n z^{-n}}{z - z^{-1}} \\
d_n - d_{n-1} &= -\frac{F_n z^n}{z - z^{-1}}
\end{aligned}
$$

olarak bulunur. Buradan her iki eşitliğe iterasyon yöntemi uygulandığında

$$c_m - c_n = \sum_{k=n+1}^{m} \frac{F_k z^{-k}}{z - z^{-1}} \tag{3.9}$$

ve

$$d_m - d_n = -\sum_{k=n+1}^{m} \frac{F_k z^{k}}{z - z^{-1}} \tag{3.10}$$

eşitlikleri elde edilir. (3.9) ve (3.10) eşitliklerinde $m \to \infty$ için limit alındığında

$$\lim_{m\to\infty} c_m - c_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{F_k z^{-k}}{z - z^{-1}}$$

ve

$$\lim_{m\to\infty} d_m - d_n = -\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{F_k z^{k}}{z - z^{-1}}$$

bulunur. Bu eşitliklerinin sağ kısmındaki seriler (3.1) koşulundan dolayı yakınsak olduğundan $\lim\limits_{m\to\infty} c_m$ ve $\lim\limits_{m\to\infty} d_m$ limitleri de sonlu olmalıdır.
Dolayısıyla $\lim\limits_{m\to\infty} c_m = \alpha$ ve $\lim\limits_{m\to\infty} d_m = \beta$ olacak şekilde E uzayından olan sonlu α, β matrisleri vardır. Buradan

$$\begin{aligned} c_n &= \alpha - \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{F_k z^{-k}}{z - z^{-1}} \\ d_n &= \beta + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{F_k z^{k}}{z - z^{-1}} \end{aligned}$$

olarak bulunur. c_n ve d_n ifadeleri kullanılarak (3.5) denkleminin $y_n(z)$ genel çözümü

$$y_n(z) = \alpha z^n + \beta z^{-n} + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{z^{k-n} - z^{n-k}}{z - z^{-1}} F_k$$

biçiminde elde edilir. Bu çözümde F_k açık biçimde yazıldığında

$$y_n(z) = \alpha z^n + \beta z^{-n} + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{z^{k-n} - z^{n-k}}{z - z^{-1}} \left[(I - A_{k-1}) y_{k-1} - B_k y_k + (I - A_k) y_{k+1}\right]$$

eşitliği bulunur. Bu eşitliğin her iki yanını z^{-n} ile çarpıp $n \to \infty$ için limit alırsak

$$\lim_{n\to\infty} y_n(z) z^{-n} = \lim_{n\to\infty} \left[\alpha + \beta z^{-2n} + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{z^{k-2n} - z^{-k}}{z - z^{-1}} F_k \right], \; z \in D_0$$

elde edilir. (3.3) koşulunun sağlanması için $\alpha = I$, $\beta = 0$ olmalıdır. Dolayısıyla koşulu sağlayan $E(z)$ matris çözümünün (3.4) eşitliğini sağladığı görülür.

Bundan sonraki kısımda $\{A_n\}$ ve $\{B_n\}$, $n \in \mathbb{N}$ matris dizilerinin

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \left(\|I - A_n\| + \|B_n\| \right) < \infty \tag{3.11}$$

koşulunu sağladığı kabul edilecektir.

Teorem 3.2 (3.11) koşulu altında $E(z) = \{E_n(z)\}$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ Jost çözümü

$$E_n(z) = T_n z^n \left[I + \sum_{m=1}^{\infty} K_{n,m} z^m \right]; \; n \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \; z \in D_0 \tag{3.12}$$

gösterimine sahiptir. Burada T_n ve $K_{n,m}$ matrisleri $\{A_n\}$ ve $\{B_n\}$ dizileriyle ifade edilir.

İspat. (3.12) eşitliğiyle verilen $E_n(z)$ çözümü (3.2)denkleminde yerine yazıldığında

$$\begin{aligned} & A_{n-1} \left\{ T_{n-1} z^{n-1} \left[I + \sum_{m=1}^{\infty} K_{n-1,m} z^m \right] \right\} + B_n \left\{ T_n z^n \left[I + \sum_{m=1}^{\infty} K_{n,m} z^m \right] \right\} \\ & + A_n \left\{ T_{n+1} z^{n+1} \left[I + \sum_{m=1}^{\infty} K_{n+1,m} z^m \right] \right\} \\ = & \left(z + z^{-1} \right) \left\{ T_n z^n \left[I + \sum_{m=1}^{\infty} K_{n,m} z^m \right] \right\} \end{aligned}$$

veya

$$\begin{aligned}
& A_{n-1}\left\{T_{n-1}z^{n-1}\left[I+\sum_{m=1}^{\infty}K_{n-1,m}z^m\right]\right\}+B_n\left\{T_nz^n\left[I+\sum_{m=1}^{\infty}K_{n,m}z^m\right]\right\} \\
& +A_n\left\{T_{n+1}z^{n+1}\left[I+\sum_{m=1}^{\infty}K_{n+1,m}z^m\right]\right\} \\
= \; & T_nz^{n+1}\left[I+\sum_{m=1}^{\infty}K_{n,m}z^m\right]+T_nz^{n-1}\left[I+\sum_{m=1}^{\infty}K_{n,m}z^m\right]
\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Son eşitlikteki z^{n-1}, z^n ve z^{n+1} terimlerinin katsayıları karşılaştırılırsa

z^{n-1} teriminin katsayısından;

$A_{n-1}T_{n-1}=T_n$ bulunur. Buradan iterasyonlarla

$$T_n=\prod_{p=n}^{\infty}A_p^{-1} \tag{3.13}$$

olarak elde edilir.

z^n teriminin katsayısından;

$$A_{n-1}T_{n-1}K_{n-1,1}+B_nT_n=T_nK_{n1}$$

eşitliği yazılır. $A_{n-1}=T_nT_{n-1}^{-1}$ olduğu kullanılarak

$$T_nT_{n-1}^{-1}T_{n-1}K_{n-1,1}+B_nT_n=T_nK_{n1}$$

denklemi elde edilir. Son denklem soldan T_n^{-1} ile çarpılarak

$$K_{n-1,1}+T_n^{-1}B_nT_n=K_{n1}$$

yani

$$K_{n-1,1}-K_{n1}=-T_n^{-1}B_nT_n$$

bulunur. Buradan iterasyonlarla

$$K_{n1} = -\sum_{p=n+1}^{\infty} T_p^{-1} B_p T_p \tag{3.14}$$

olarak elde edilir.

z^{n+1} teriminin katsayısından;

$$A_{n-1}T_{n-1}K_{n-1,2} + B_n T_n K_{n1} + A_n T_{n+1} = T_n + T_n K_{n2}$$

bulunur. $A_{n-1} = T_n T_{n-1}^{-1}$ olduğu bilindiğinden bu eşitlik yeniden düzenlenip eşitliğin her iki yanı soldan T_n^{-1} ile çarpılırsa

$$K_{n-1,2} + T_n^{-1} B_n T_n K_{n1} + T_n^{-1} A_n T_{n+1} = I + K_{n2}$$

elde edilir. Buradan iterasyonlarla

$$K_{n2} = -\sum_{p=n+1}^{\infty} T_p^{-1} B_p T_p K_{p1} + \sum_{p=n+1}^{\infty} T_p^{-1} \left(I - A_p^2\right) T_p \tag{3.15}$$

bulunur. Son olarak

z^{m+n+1} teriminin katsayısından ise

$$K_{n,m+2} = \sum_{p=n+1}^{\infty} T_p^{-1} \left(I - A_p^2\right) T_p K_{p+1,m} - \sum_{p=n+1}^{\infty} T_p^{-1} B_p T_p K_{p,m+1} + K_{n+1,m} \tag{3.16}$$

şeklinde elde edilir.

(3.11) koşulundan dolayı T_n tanımındaki sonsuz çarpım ve K_{nm} tanımlarındaki seriler mutlak yakınsaktır.

Teorem 3.3 $C > 0$ bir sabit, $\left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor$, $\frac{m}{2}$ sayısının tam kısmı olmak üzere, (3.11) koşulu altında

$$\|K_{nm}\| \leq C \sum_{p=n+\left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor}^{\infty} (\|I - A_p\| + \|B_p\|) \tag{3.17}$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat. Teorem (3.2) de elde edilen (3.14),(3.15) ve (3.16) eşitlikleri yardımıyla tümevarım yöntemi kullanılarak istenilen eşitsizlik elde edilir.

$m = 1$ için

$$\begin{aligned}
\|K_{n1}\| &= \left\| \sum_{p=n+1}^{\infty} T_p^{-1} B_p T_p \right\| \leq \sum_{p=n+1}^{\infty} \left\|T_p^{-1} B_p T_p\right\| \\
&\leq \sum_{p=n+1}^{\infty} \left\|T_p^{-1}\right\| \|B_p\| \|T_p\| \leq \sum_{p=n+1}^{\infty} \|B_p\| \\
&\leq \sum_{p=n+1}^{\infty} \|I - A_P\| + \|B_P\| \leq 1 \sum_{p=n+\left[\frac{1}{2}\right]}^{\infty} \|I - A_P\| + \|B_P\|
\end{aligned}$$

elde edilir. $m = k$ için

$$\| K_{nm}\| \leq c \sum_{p=n+\left[\frac{k}{2}\right]}^{\infty} (\|I - A_P\| + \|B_P\|)$$

olsun. $m = k + 1$ için

$$\| K_{nm}\| \leq c \sum_{p=n+\left[\frac{k+1}{2}\right]}^{\infty} (\|I - A_P\| + \|B_P\|)$$

eşitsizliğinin sağlandığını göstermeliyiz.

$$
\begin{aligned}
\| K_{n,k+1}\| &= \left\| \sum_{p=n+1}^{\infty} T_P^{-1}\left(I-A_P^2\right)T_P K_{p+1,k-1} - \sum_{p=n+1}^{\infty} T_p^{-1} B_p T_p K_{p,k} + \|K_{n+1,k-1}\| \right\| \\
&\leq \sum_{p=n+1}^{\infty} \left\|T_P^{-1}\left(I-A_P^2\right)T_P K_{p+1,k-1}\right\| + \sum_{p=n+1}^{\infty} \left\|T_p^{-1} B_p T_p K_{p,k}\right\| + \|K_{n+1,k-1}\| \\
&= \sum_{p=n+1}^{\infty} \left\|T_P^{-1}\right\| \left\|I-A_P^2\right\| \left\|T_P\right\| \|K_{p+1,k-1}\| \\
&\quad + \sum_{p=n+1}^{\infty} \left\|T_P^{-1}\right\| \|B_P\| \left\|T_P\right\| \|K_{pk}\| + \|K_{n+1,k-1}\|
\end{aligned}
$$

olup T_P^{-1} ve $T-_p^1$ sınırlı olduğundan

$$
\begin{aligned}
\| K_{n,k+1}\| &\leq c \sum_{p=n+1}^{\infty} \left\|I-A_P^2\right\| \|K_{p+1,k-1}\| + \sum_{p=n+1}^{\infty} \|B_P\| \|K_{pk}\| + \|K_{n+1,k-1}\| \\
&= c \sum_{p=n+1}^{\infty} \left\|I-A_P^2\right\| \sum_{t=p+1+\left[\frac{k-1}{2}\right]}^{\infty} \left(\|I-A_t\| + \|B_t\|\right) \\
&\quad + c \sum_{p=n+1}^{\infty} \|B_P\| \sum_{t=p+\left[\frac{k}{2}\right]}^{\infty} \left(\|I-A_t\| + \|B_t\|\right) \\
&\quad + c \sum_{p=n+1+\left[\frac{k-1}{2}\right]}^{\infty} \left(\|I-A_p\| + \|B_p\|\right)
\end{aligned}
$$

elde edilir. Son eşitsizlikte

$$
\left\|I-A_p^2\right\| + \|B_p\| = U_p \qquad \|I-A_t\| + \|B_t\| = V_t
$$

dersek

$$
\begin{aligned}
\| K_{n,k+1}\| &\leq c\sum_{p=n+1}^{\infty} U_p \sum_{t=p+\left[\frac{k}{2}\right]}^{\infty} V_t + c\sum_{p=n+1+\left[\frac{k-1}{2}\right]}^{\infty} V_p \\
& c\left\{U_{n+1}\sum_{t=n+1+\left[\frac{k}{2}\right]}^{\infty} V_t + U_{n+2}\sum_{t=n+2+\left[\frac{k}{2}\right]}^{\infty} V_t + ...\right\} + c\sum_{p=n+1+\left[\frac{k-1}{2}\right]}^{\infty} V_p
\end{aligned}
$$

yazılır. Bu eşitsizlikte indisleri düzenlersek

$$
\| K_{n,k+1}\| \leq c\left\{U_{n+1}\sum_{t=n+\left[\frac{k+2}{2}\right]}^{\infty} V_t + U_{n+2}\sum_{t=n+\left[\frac{k+4}{2}\right]}^{\infty} V_t + ... + \sum_{p=n+\left[\frac{k+1}{2}\right]}^{\infty} V_p\right\}
$$

elde edilir. O halde serilerin indisleri $t = n + \left[\frac{k+1}{2}\right]$ den başlatılırsa ifade daha da büyür.

$$
\begin{aligned}
\| K_{n,k+1}\| &\leq c\sum_{p=n+1}^{\infty} U_p \sum_{t=n+\left[\frac{k+1}{2}\right]}^{\infty} V_t + c\sum_{p=n+\left[\frac{k+1}{2}\right]}^{\infty} V_p \\
&\leq c\sum_{p=n+1}^{\infty} \left\|I - A_p^2\right\| + \|B_p\| \sum_{t=n+\left[\frac{k+1}{2}\right]}^{\infty} \|I - A_t\| + \|B_t\| \\
&+ \sum_{p=n+\left[\frac{k+1}{2}\right]}^{\infty} \|I - A_p\| + \|B_p\| \\
&\leq c_1\left\{\sum_{t=n+\left[\frac{k+1}{2}\right]}^{\infty} \|I - A_t\| + \|B_t\| + \sum_{p=n+\left[\frac{k+1}{2}\right]}^{\infty} \|I - A_p\| + \|B_p\|\right\} \\
&\leq c\left\{\sum_{p=n+\left[\frac{k+1}{2}\right]}^{\infty} \|I - A_p\| + \|B_p\|\right\}
\end{aligned}
$$

c pozitif sabit olmak üzere istenilen eşitsizlik elde edilmiştir.

Teorem (3.3) gereğince $E_n(z)$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ çözümü D_0 kümesinden $\{z : |z| < 1\} \setminus \{0\}$ kümesine analitik devama sahiptir.

Teorem 3.4 Jost çözümü

$$E_n(z) = z^n [I + o(1)], \quad z \in D := \{z : |z| \leq 1\} \setminus \{0\}, \ n \to \infty \tag{3.18}$$

asimptotik eşitliğini gerçekler.

İspat. (3.12) eşitliğinden

$$\begin{aligned}
E_n(z) &= T_n z^n \left[I + \sum_{m=1}^{\infty} K_{nm} z^m \right] \\
E_n(z) z^{-n} &= T_n \left[I + \sum_{m=1}^{\infty} K_{nm} z^m \right] \\
\lim_{n\to\infty} E_n(z) z^{-n} &= \lim_{n\to\infty} T_n + \lim_{n\to\infty} \sum_{m=1}^{\infty} K_{nm} z^m
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada

$$T_n = \prod_{p=n}^{\infty} A_p^{-1} < \infty$$

olup yakınsak çarpımın kalan terimi I olduğundan $\lim\limits_{n\to\infty} T_n = I$ ve

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \|K_{nm}\| &\leq c \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{p=n+\left[\frac{m}{2}\right]}^{\infty} \|I - A_p\| + \|B_p\| \\
&\leq c \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{p} \left\| I - A_{p+\left[\frac{m}{2}\right]} \right\| + \left\| B_{p+\left[\frac{m}{2}\right]} \right\| \\
&= c \sum_{p=1}^{\infty} p \left\| I - A_{p+\left[\frac{m}{2}\right]} \right\| + \left\| B_{p+\left[\frac{m}{2}\right]} \right\| \\
&= c \sum_{p=1}^{\infty} p \|I - A_p\| + \|B_p\| < \infty
\end{aligned}$$

olduğundan $\lim\limits_{n\to\infty} \|K_{nm}\| = 0$ gerçeklenir. Dolayısıyla

$$\begin{aligned} E_n(z)\, z^{-n} &= [I + o(1)]\,, \quad z \in D := \{z : |z| \leq 1\} \setminus \{0\}\,,\ n \to \infty \\ E_n(z) &= z^n [I + o(1)]\,, \quad z \in D := \{z : |z| \leq 1\} \setminus \{0\}\,,\ n \to \infty \end{aligned}$$

asimptotik eşitliği gerçeklenir.

Teorem 3.5 (3.11) koşulu altında $\sigma_c(L) = [-2, 2]$ aralığıdır.

İspat. $l_2(\mathbb{N}, E)$ uzayında

$$(\ell y)_n = A_{n-1} y_{n-1} + B_n y_n + A_n y_{n+1}$$

$$(l_1 y)_n = y_{n-1} + y_{n+1}$$

ve

$$(l_2 y)_n = (A_{n-1} - I)\, y_{n-1} + B_n y_n + (A_n - I)\, y_{n+1}$$

fark ifadeleri ve $y_0 = 0$ sınır koşuluyla üretilen operatörler sırasıyla L, L_1 ve L_2 ile gösterilsin. Bu durumda L, L_1 ve L_2 operatörleri sırasıyla aşağıdaki J, J_1 ve J_2 Jacobi matrisleri ile tanımlanabilir.

$$J = \begin{pmatrix} B_1 & A_1 & 0 & 0 & 0 & . & . & . \\ A_1 & B_2 & A_2 & 0 & 0 & . & . & . \\ 0 & A_2 & B_3 & A_3 & 0 & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . \end{pmatrix},$$

$$J_1 = \begin{pmatrix} 0 & I & 0 & 0 & . & . & . \\ I & 0 & I & 0 & . & . & . \\ 0 & I & 0 & I & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \end{pmatrix},$$

$$J_2 = \begin{pmatrix} B_1 & A_1 - I & 0 & 0 & 0 & . & . & . \\ A_1 - I & B_2 & A_2 - I & 0 & 0 & . & . & . \\ 0 & A_2 - I & B_3 & A_3 - I & 0 & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . \end{pmatrix}.$$

Buradan $J = J_1 + J_2$ olduğu görülür. Dolayısıyla $L = L_1 + L_2$ bulunur. Eğer L_1 operatörü self adjoint, L_2 operatörü kompakt operatör ise Weyl Kompakt Heyecanlandırma teoremi gereğince

$$\sigma_c(L_1) = \sigma_c(L)$$

sağlanır. İlk olarak

$$\begin{aligned} \|(L_1 y)_n\| &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} |y_{n-1} + y_{n+1}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \left(\sum_{n=0}^{\infty} |y_{n-1}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{n=0}^{\infty} |y_{n+1}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad \leq 2\|y_n\| \end{aligned}$$

eşitsizliği sağlandığından L_1 operatörü sınırlıdır. Dolayısıyla L_1 operatörünün self adjoint olduğunu göstermek için $l_2(\mathbb{N}, E)$ uzayından alınan herhangi $y = \{y_n\}$ ve $z = \{z_n\}$ dizileri için

$$\langle (L_1 y)_n, z_n \rangle = \langle y_n, (L_1 z)_n \rangle$$

eşitliğinin gerçeklendiğini göstermek yeterli olacaktır.

$\forall\ y = \{y_n\},\ z = \{z_n\} \in l_2(\mathbb{N}, E)$ için

$$\begin{aligned}\langle (L_1 y)_n, z_n\rangle &= \sum_{n=1}^{\infty} (L_1 y)_n \overline{z_n} = \sum_{n=1}^{\infty} (y_{n-1} + y_{n+1}) \overline{z_n} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} y_{n-1}\overline{z_n} + \sum_{n=1}^{\infty} y_{n+1}\overline{z_n}\end{aligned}$$

olup $y_0 = 0$ olduğundan son eşitlikten

$$\begin{aligned}\langle (L_1 y)_n, z_n\rangle &= \sum_{n=0}^{\infty} y_n \bar{z}_{n+1} + \sum_{n=2}^{\infty} y_n \bar{z}_{n-1} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} y_n \bar{z}_{n+1} + \sum_{n=1}^{\infty} y_n \bar{z}_{n-1} - y_1 z_0\end{aligned}$$

$z_0 = 0$ olduğundan son eşitlikten

$$\begin{aligned}\langle (L_1 y)_n, z_n\rangle &= = \sum_{n=0}^{\infty} y_n (\bar{z}_{n-1} + \bar{z}_{n+1}) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} y_n \overline{(L_1 z)} = \langle y_n, (L_1 z)_n\rangle\end{aligned}$$

bulunur. Dolayısıyla L_1 operatörünün selfadjoint olduğu elde edilir.

Şimdi de (3.11) koşulu altında L_2 operatörünün $l_2(\mathbb{N}, E)$ uzayında kompakt olduğunu gösterelim. L_2 operatörünün $l_2(\mathbb{N}, E)$ uzayında kompakt olduğunu göstermek için $M \subset l_2(\mathbb{N}, E)$ sınırlı herhangi bir küme olmak üzere

$$L_2(M) = M_1 = \{y = (L_2 x)_n : x = (x_n) \in M\}$$

görüntü kümesinin $l_2(\mathbb{N}, E)$ uzayında kompakt olduğunu göstermek yeterlidir. Bunun için ise bu uzay için bilinen kompaktlık kriteri gereğince M_1 kümesinin düzgün sınırlı olduğunu ve M_1 kümesinden alınan her diziyi genel terim olarak kabul eden serinin kalan teriminin düzgün olarak sıfıra gittiğini göstermek gerekir. O halde

$$\forall x \in M_1 \text{ için } x = (L_2 y) \text{ olacak şekilde } y = (y_n) \in M \text{ vardır.}$$

$$\|x\|^2 = \|(L_2 y)\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \|(L_2 y)_n\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \|(A_{n-1} - I)\, y_{n-1} + B_n y_n + (A_n - I)\, y_{n+1}\|^2$$

olup, bu eşitlikten

$$\|x\|^2 = \|(L_2 y)\|^2 \le \sum_{n=1}^{\infty} [\|(A_{n-1} - I)\, y_{n-1}\| + \|B_n y_n\| + \|(A_n - I)\, y_{n+1}\|]^2 \qquad (3.19)$$

yazılır. Son eşitlikte

$$A = \|(A_{n-1} - I)\, y_{n-1}\|, \ B = \|B_n y_n\| \ \text{ ve } C = \|(A_n - I)\, y_{n+1}\|$$

denilirse

$$\begin{aligned} (\mathbf{A} + \mathbf{B} + \mathbf{C})^2 &\le (|A| + |B| + |C|)^2 \\ &= |A|^2 + |B|^2 + |C|^2 + 2\,(|AB| + |BC| + |AC|) \\ &\le 3\,(|A| + |B| + |C|)^2 \end{aligned}$$

olduğundan (3.19) eşitsizliği

$$\|x\|^2 \le 3 \sum_{n=1}^{\infty} \left[\|(A_{n-1} - I)\, y_{n-1}\|^2 + \|B_n y_n\|^2 + \|(A_n - I)\, y_{n+1}\|^2 \right]$$

şeklinde yazılır. $y = (y_n) \in M$ olduğundan her n için $\|y_n\| \le k$ olacak şekilde $k > 0$ sayısı vardır. Dolayısıyla son eşitsizlikten

$$\|x\|^2 \le 3k^2 \sum_{n=1}^{\infty} \left[\|(A_{n-1} - I)\|^2 + \|B_n\|^2 + \|(A_n - I)\|^2 \right]$$

bulunur. (3.1) koşulundan dolayı $\sum_{n=1}^{\infty} \|(A_{n-1} - I)\|$, $\sum_{n=1}^{\infty} \|B_n\|$ ve $\sum_{n=1}^{\infty} \|(A_n - I)\|$ serileri yakınsak olduğundan $\sum_{n=1}^{\infty} \|(A_{n-1} - I)\|^2$, $\sum_{n=1}^{\infty} \|B_n\|^2$ ve $\sum_{n=1}^{\infty} \|(A_n - I)\|^2$serileri de yakınsak olur. O halde $\|x\|^2 < \infty$ bulunur. Bu ise M_1 kümesinin düzgün sınırlılığını gösterir.

İkinci adımda M_1 kümesinden alınan tüm $x = \{x_n\}$ dizilerini genel terim kabul eden serilerin kalan terimlerinin düzgün olarak sıfıra gittiği gösterilmelidir.
İlk adımda yapılan işlemlere benzer olarak

$$\begin{aligned}
\sum_{n=m+1}^{\infty} \|x_n\|^2 &= \sum_{n=m+1}^{\infty} \|(L_2 y)_n\| \\
&= \sum_{n=m+1}^{\infty} \|(A_{n-1} - I)\, y_{n-1} + B_n y_n + (A_n - I)\, y_{n+1}\| \\
&\leq 3c^2 \sum_{n=m+1}^{\infty} \left[\|(A_{n-1} - I)\|^2 + \|B_n\|^2 + \|(A_n - I)\|^2\right] \\
&\leq 3c^2 \left(\sum_{n=m+1}^{\infty} \|(A_{n-1} - I)\|^2 + \sum_{n=m+1}^{\infty} \|B_n\|^2 + \sum_{n=m+1}^{\infty} \|(A_n - I)\|^2 \right)
\end{aligned}$$

yazılır. $t = maks \left\{\|(A_{n-1} - I)\|, \|B_n\|, \|(A_n - I)\|\right\}$ olmak üzere son eşitsizlikten

$$\sum_{n=m+1}^{\infty} \|x_n\|^2 \leq 3k^2 t \sum_{n=m+1}^{\infty} \left[\|(A_n - I)\| + \|B_n\| + \|(A_n - I)\|\right]$$

yazılabilir. Burada $m \to \infty$ için limit alınırsa (3.11) koşulundan dolayı sağ taraf sıfıra gider. O halde L_2 kompakt operatördür. Dolayısıyla

$$\sigma_c(L) = \sigma_c(L_1)$$

gerçeklenir.

Şimdi $\sigma(L_1) = [-2, 2]$ olduğunu gösterelim. Sınırlı lineer selfadjoint L_1 operatörü için

$$\|L_1\| = \sup_{\|y\|=1} \langle L_1 y, y \rangle \tag{3.20}$$

gerçeklenir.

$$
\begin{aligned}
\langle L_1 y, y\rangle &= \sum_{n=1}^{\infty}\left[(L_1 y)_n, y\right]_E = \sum_{n=1}^{\infty}\left(y_{n-1}+y_{n+1}\right)\bar{y}_n \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} y_{n-1}\bar{y}_n + \sum_{n=1}^{\infty} y_{n+1}\bar{y}_n = \sum_{n=0}^{\infty} y_n\bar{y}_{n+1} + \sum_{n=1}^{\infty} y_{n+1}\bar{y}_n \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} y_n\bar{y}_{n+1} + \sum_{n=1}^{\infty} y_{n+1}\bar{y}_n \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} 2\,\mathrm{Re}\left(y_{n+1}\bar{y}_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \left|y_{n+1}\right|^2 + \left|y_n\right|^2 \\
&\leq 2\left\|y_n\right\|
\end{aligned}
$$

bulunur. Eşitsizliğin her iki yanında $\|y\| = 1$ üzerinden sup alınırsa

$$
\sup_{\|y\|=1} \langle L_1 y, y\rangle \leq 2
$$

elde edilir. Özel olarak $\psi_n \in \ell^2(\mathbb{N}, E)$ olmak üzere $\psi = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0...\right)$ için $\|\psi\| = 1$ üzerinden norm alınırsa

$$
\begin{aligned}
\sup_{\|\psi\|=1} \langle L_1\psi, \psi\rangle &\leq \sup_{\|\psi\|=1}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left|\psi_{n+1}\right|^2 + \left|\psi_n\right|^2\right) = 2 \\
\sup_{\|\psi\|=1} \langle L_1\psi, \psi\rangle &= 2
\end{aligned}
$$

olup $\|L_1\| = 2$ elde edilir. O halde $\sigma(L_1) = [-2, 2]$ dir.

Kompleks H Hilbert uzayı üzerinde sınırlı self adjoint lineer L_1 operatörünün rezidü spektrumu boştur yani $\sigma_r(L_1) = \varnothing$ dir. Ayrıca L_1 operatörünün özdeğeri bulunmadığından

$$
\sigma_c(L_1) = \sigma_c(L) = [-2, 2]
$$

elde edilir.

4. NON-SELFADJOİNT L OPERATÖRÜNÜN ÖZDEĞERLERİNİN ve SPEKTRAL TEKİLLİKLERİNİN YAPISI

$$A_{n-1}y_{n-1}+B_ny_n+A_ny_{n+1}=\lambda y_n \tag{4.1}$$

olmak üzere $\{A_n\}$ ve $\{B_n\}$ $n\in\mathbb{N}$ non-selfadjoint matris dizilerinin

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\left(\|I-A_n\|+\|B_n\|\right)<\infty \tag{4.2}$$

eşitsizliğini sağladığını kabul edelim. Burada I , E uzayı üzerindeki birim matrisi ve $\|,\|$ E uzayı üzerindeki matris normunu belirtmektedir.

Teorem 4.1 $\lambda=2\cos z$ $z\in\overline{C_+}$ olmak üzere denkleminin Jost çözümü

$$F_n(z)=T_ne^{inz}\left[I+\sum_{m=1}^{\infty}K_{nm}e^{imz}\right]\quad n\in\mathbb{N}\cup\{0\} \tag{4.3}$$

gösterimine sahiptir. Burada T_n ve K_{nm} matrsileri $\{A_n\}$ ve $\{B_n\}$ matrisleri ile ifade edilir.

İspat. (4.3) denklemi ile verilen $F_n(z)$ çözümü (4.1) denkleminde yerine yazıldığında

$$\begin{aligned}
&A_{n-1}\left\{T_ne^{i(n-1)z}\left[I+\sum_{m=1}^{\infty}K_{nm}e^{imz}\right]\right\}+B_n\left\{T_ne^{inz}\left[I+\sum_{m=1}^{\infty}K_{nm}e^{imz}\right]\right\}\\
&+A_n\left\{T_ne^{i(n+1)z}\left[I+\sum_{m=1}^{\infty}K_{nm}e^{imz}\right]\right\}\\
=\;&2\left(\frac{e^{inz}+e^{-inz}}{2}\right)\left\{T_ne^{inz}\left[I+\sum_{m=1}^{\infty}K_{nm}e^{imz}\right]\right\}
\end{aligned}$$

veya

$$
\begin{aligned}
& A_{n-1}\left\{T_n e^{i(n-1)z}\left[I+\sum_{m=1}^{\infty} K_{nm} e^{imz}\right]\right\}+B_n\left\{T_n e^{inz}\left[I+\sum_{m=1}^{\infty} K_{nm} e^{imz}\right]\right\} \\
& +A_n\left\{T_n e^{i(n+1)z}\left[I+\sum_{m=1}^{\infty} K_{nm} e^{imz}\right]\right\} \\
= \; & T_n e^{i(n+1)z}\left[I+\sum_{m=1}^{\infty} K_{nm} e^{imz}\right]+T_n e^{i(n-1)z}\left[I+\sum_{m=1}^{\infty} K_{nm} e^{imz}\right] \qquad (4.4)
\end{aligned}
$$

eşitliği elde edilir. (4.4) eşitliğinde e^{inz} terimlerinin katsayıları karşılaştırıldığında $e^{i(n-1)z}$ teriminin katsayılarından

$$A_{n-1}T_{n-1} = T_n$$

elde edilir. Buradan iterasyonla

$$T_n = \prod_{p=n}^{\infty} A_p^{-1} \qquad (4.5)$$

olarak bulunur. e^{inz} teriminin katsayılarından

$$A_{n-1}T_{n-1}K_{n-1,1} + B_nT_n = T_nK_{n1}$$

bulunur. Burada $A_{n-1}T_{n-1} = T_n$ oldugu dikkate alındığında

$$T_nK_{n-1,1} + B_nT_n = T_nK_{n1}$$

elde edilir. Eşitliğin her iki yanı soldan T_n^{-1} ile çarpılırsa

$$
\begin{aligned}
K_{n-1,1} + T_n^{-1} B_n T_n &= K_{n1} \\
K_{n-1,1} - K_{n1} &= -T_n^{-1} B_n T_n
\end{aligned}
$$

bulunur. Buradan iterasyonla

$$
K_{n1} = -\sum_{p=n+1}^{\infty} T_p^{-1} B_p T_p
$$

elde edilir. $e^{i(n+1)z}$ teriminin katsayılarından

$$
A_{n-1} T_{n-1} K_{n-1,2} \ + B_n T_n K_{n1} + \quad A_n T_{n+1} = T_n + T_n K_{n2}
$$

yine $\quad A_{n-1} T_{n-1} = T_n \ $ olduğu göz önüne alındığında

$$
T_n K_{n-1,2} + B_n T_n K_{n1} + \quad A_n T_{n+1} = T_n + T_n K_{n2}
$$

elde edilir. Eşitliğin her iki yanı soldan T_n^{-1} ile çarpılırsa

$$
\begin{aligned}
K_{n-1,2} + T_n^{-1} B_n T_n K_{n1} + T_n^{-1} A_n T_{n+1} &= I + K_{n2} \\
K_{n-1,2} - K_{n2} &= -T_n^{-1} B_n T_n K_{n1} - T_n^{-1} A_n T_{n+1} + I \\
&= -T_n^{-1} B_n T_n K_{n1} - T_n^{-1} A_n T_{n+1} T_n^{-1} T_n + T_n^{-1} T_n \\
&= -T_n^{-1} B_n T_n K_{n1} - T_n^{-1} A_n A_n T_n + T_n^{-1} I T_n \\
&= -T_n^{-1} B_n T_n K_{n1} + T_n^{-1} \left(I - A_n^2 \right) T_n
\end{aligned}
$$

elde edilir. Buradan iterasyonla

$$K_{n2} = -\sum_{p=n+1}^{\infty} T_p^{-1} B_p T_p K_{p1} + \sum_{p=n+1}^{\infty} T_P^{-1} \left(I - A_P^2\right) T_P$$

bulunur. Son olarak $e^{i(n+m-1)}$ teriminin katsayılarından

$$\begin{aligned} K_{nm} &= \sum_{p=n+1}^{\infty} T_P^{-1} \left(I - A_P^2\right) T_P K_{p+1,m-2} - \sum_{p=n+1}^{\infty} T_p^{-1} B_p T_p K_{p,m-1} + K_{n+1,m-2} \\ n &\in \mathbb{N} \cup \{0\} \quad m \in \mathbb{N} \end{aligned} \tag{4.6}$$

bulunur. (4.2) koşulundaki serinin yakınsak olmasından dolayı T_n tanımındaki sonsuz çarpım ve K_{nm} tanımındaki seriler mutlak yakınsaktır.

Teorem 4.2 $C > 0$ bir sabit, $\left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor$, $\frac{m}{2}$ sayısının tam kısmı olmak üzere, (4.2) koşulu altında

$$\|K_{nm}\| \leq C \sum_{p=n+\left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor}^{\infty} \left(\|I - A_p\| + \|B_p\|\right) \tag{4.7}$$

eşitsizliği sağlanır.

Teorem 4.3 Her $n \in \mathbb{N}$ için (4.3) ile verilen $F_n(z)$ Jost çözümü $\mathbb{C}_+$ bölgesinde analitik $\overline{C_+}$ üzerinde süreklidir.

İspat. e^{inz} fonksiyonu $\mathbb{C}_+$ de analitik olduğundan

$$\sum_{m=1}^{\infty} K_{nm} m e^{imz} \tag{4.8}$$

serisinin düzgün yakınsak olduğu her yerde (4.3) ile verilen $F_n(z)$ fonksiyonu analitik olacaktır.

$z = \varepsilon + i\tau$ ve $\tau > 0$ olmak üzere her $m \in \mathbb{N}$ için

$$\left\| K_{nm} m e^{imz} \right\| \leq cm \left| e^{-m\tau} \right|$$

olup

$$\sum_{m=1}^{\infty} m e^{-m\tau} \tag{4.9}$$

serisi yakınsak olduğundan Weiestrass testi gereğince (4.8) serisi $\mathbb{C}_+$ bölgesinde düzgün yakınsaktır. Ayrıca

$$\sum_{m=1}^{\infty} K_{nm} e^{imz} \tag{4.10}$$

serisinin genel terimi olan $K_{nm}e^{imz}$ terimi için $z \in \overline{C_+}$ olmak üzere

$$\left\| K_{nm} e^{imz} \right\| \leq \ \|K_{nm}\| \left| e^{imz} \right| \leq \ \|K_{nm}\| \left| e^{-m\tau} \right| \leq \|K_{nm}\|$$

eşitsizliği gerçeklenir ve

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \|K_{nm}\| &\leq c \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{p=n+\left[\frac{m}{2}\right]}^{\infty} \|I - A_p\| + \|B_p\| \\
&\leq c \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{p} \left\| I - A_{p+\left[\frac{m}{2}\right]} \right\| + \left\| B_{p+\left[\frac{m}{2}\right]} \right\| \\
&= c \sum_{p=1}^{\infty} p \left\| I - A_{p+\left[\frac{m}{2}\right]} \right\| + \left\| B_{p+\left[\frac{m}{2}\right]} \right\| \\
&= c \sum_{p=1}^{\infty} p \|I - A_p\| + \|B_p\| < \infty
\end{aligned}$$

olduğundan Weiestrass testi gereğince

$$\sum_{m=1}^{\infty} K_{nm} e^{imz}$$

serisi $\overline{C_+}$ üzerinde düzgün yakınsak ve e^{inz} fonksiyonları ile tanımlı fonksiyonlar $\overline{C_+}$ üzerinde sürekli olduğundan $F_n(z)$ Jost çözümü $\overline{C_+}$ üzerinde sürekli ve $\mathbb{C}_+$ üzerinde analitiktir.

Teorem 4.4 (4.1) denkleminin (4.3) ile verilen çözümü aşağıdaki asimptotik eşitlikleri gerçekler.

$$F_n(z) = e^{inz} [I + o(1)] \qquad z \in \overline{C_+} \quad n \to \infty \tag{4.11}$$

$$F_n(z) = T_n e^{inz} [I + o(1)] \qquad z \in \overline{C_+} \quad z = \varepsilon + i\tau \quad \tau \to \infty \tag{4.12}$$

İspat. (4.3) tanımından

$$\begin{aligned} F_n(z) &= T_n e^{inz} \left[I + \sum_{m=1}^{\infty} K_{nm} e^{imz} \right] \\ F_n(z) e^{-inz} &= T_n \left[I + \sum_{m=1}^{\infty} K_{nm} e^{imz} \right] \\ \lim_{n\to\infty} F_n(z) e^{-inz} &= \lim_{n\to\infty} T_n + \lim_{n\to\infty} \sum_{m=1}^{\infty} K_{nm} e^{imz} \end{aligned}$$

elde edilir.

$$T_n = \prod_{p=n}^{\infty} A_p^{-1} < \infty$$

olup yakınsak çarpımın kalan terimi I olduğundan $\lim\limits_{n\to\infty} T_n = I$ ve

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|K_{nm}\| < \infty$$

olduğundan $\lim\limits_{n\to\infty} \|K_{nm}\| = 0$ gerçeklenir. O halde

$$F_n(z)\, e^{-inz} = I + o(1) \quad z \in \overline{\mathbb{C}_+}\ n \to \infty$$

$$F_n(z) = e^{inz}\left[I + o(1)\right] \qquad z \in \overline{\mathbb{C}_+}\ n \to \infty$$

sağlanır.

$z = \varepsilon + i\tau \quad \tau > 0$ ve $m = 1, 2, 3...$ için

$$\left\|K_{nm}e^{imz}\right\| \leq \ \|K_{nm}\| \left|e^{imz}\right| \leq \ \|K_{nm}\| \left|e^{-m\tau}\right| \leq \|K_{nm}\|$$

eşitsizliği gerçeklendiğinden ve

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|K_{nm}\| < \infty$$

olduğundan dolayı

$$\sum_{m=1}^{\infty} K_{nm}e^{imz}$$

serisi $\mathbb{C}_+$ bölgesinde düzgün ve mutlak yakınsaktır.

Buna göre

$$\lim_{\tau\to\infty}\sum_{m=1}^{\infty}K_{nm}e^{imz}=\sum_{m=1}^{\infty}K_{nm}\quad\lim_{\tau\to\infty}e^{imz}=0$$

bulunur. Dolayısıyla

$$F_n(z)=T_n e^{inz}\left[I+o(1)\right]\quad z\in\mathbb{C}_+\;\; z=\varepsilon+i\tau\quad \tau\to\infty$$

asimptotik eşitliği elde edilir.

Teorem 4.5 (4.2) koşulu altında $\sigma_c(L)=[-2,2]$ dir.

İspat.

$$\begin{aligned}(\ell y)_n &= A_{n-1}y_{n-1}+B_n y_n+A_{n+1}y_{n+1}\\ (\ell_1 y)_n &= y_{n-1}+y_{n+1}\\ (\ell_2 y)_n &= (A_{n-1}-I)\ y_{n-1}+B_n y_n+(A_{n+1}-I)\,y_{n+1}\end{aligned}$$

fark ifadeleri ve $y_0=0$ sınır koşuluyla üretilen operatörler sırasıyla L, L_1 ve L_2 olmak üzere

$$L=L_1+L_2$$

yazılabileceği açıktır . Dolayısıyla Teorem 3.5 in ispatındaki benzer işlemler yapıldığında L_1 operatörünün self adjoint, L_2 operatörünün kompakt operatör olduğu elde edilebilir. O halde Weyl Kompakt Heyecanlandırma teoremi gereğince

$$\sigma_c(L_1)=\sigma_c(L)$$

sağlanacaktır.

Ayrıca L_1 operatörü için

$$\|L_1\| = \sup_{\|y\|=1} \langle L_1 y, y\rangle \tag{4.13}$$

gerçeklenir.

$$\begin{aligned}
\langle L_1 y, y\rangle &= \sum_{n=1}^{\infty} \left[(L_1 y)_n , y\right]_E = \sum_{n=1}^{\infty} (y_{n-1} + y_{n+1})\, \bar{y}_n \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} y_{n-1}\bar{y}_n + \sum_{n=1}^{\infty} y_{n+1}\bar{y}_n = \sum_{n=0}^{\infty} y_n\bar{y}_{n+1} + \sum_{n=1}^{\infty} y_{n+1}\bar{y}_n \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} y_n\bar{y}_{n+1} + \sum_{n=1}^{\infty} y_{n+1}\bar{y}_n \\
&= \sum_{n=o}^{\infty} 2\,\mathrm{Re}\,(y_{n+1}\bar{y}_n) \leq \sum_{n=o}^{\infty} |y_{n+1}|^2 + |y_n|^2 \\
&\leq 2\,\|y_n\|
\end{aligned}$$

bulunur. Eşitsizliğin her iki yanında $\|y\| = 1$ üzerinden sup alınırsa

$$\sup_{\|y\|=1} \langle L_1 y, y\rangle \leq 2$$

elde edilir. Özel olarak $\vartheta_n \in \ell^2(\mathbb{N}, E)$ olmak üzere $\vartheta = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0...\right)$ için $\|\vartheta\| = 1$ üzerinden norm alınırsa

$$\begin{aligned}
\sup_{\|\vartheta\|=1} \langle L_1\vartheta, \vartheta\rangle &\leq \sup_{\|\vartheta\|=1} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\vartheta_{n+1}|^2 + |\vartheta_n|^2\right) = 2 \\
\sup_{\|\vartheta\|=1} \langle L_1\vartheta, \vartheta\rangle &= 2
\end{aligned}$$

olup $\|L_1\| = 2$ elde edilir. O halde $\sigma(L_1) = [-2, 2]$ dir. Kompleks H Hilbert uzayı üzerinde sınırlı self adjoint linee operatörlerin rezidü spektrumu boştur yani $\sigma_r(L_1) = \varnothing$ dir.

Ayrıca L_1 operatörünün özdeğeri bulunmadığından

$$\sigma_c(L_1) = \sigma_c(L) = [-2, 2]$$

elde edilir.

$$f(z) = \det F_0(z) \quad z \in \overline{\mathbb{C}_+} \tag{4.14}$$

fonksiyonunu tanımlayalım. Burada $F_0(z)$, L operatörünün Jost fonksiyonudur. f fonksiyonu $\mathbb{C}_+$ da analitik $\overline{\mathbb{C}_+}$ da ise süreklidir. Ayrıca $f(z) = f(z + 2\pi)$ gerçeklenir. Şimdi

$$P_0 = \{z : z = \varepsilon + i\tau \quad 0 \le \varepsilon \le 2\pi \quad \tau > 0\}$$

$$P = P_0 \cup [0, 2\pi]$$

şeritlerini tanımlayalım. Loperatörünün özdeğerlerinin kümesi

$$\sigma_d(L) = \{\lambda : \lambda = 2\cos z \quad z \in P_0 \quad f(z) = 0\} \tag{4.15}$$

ve spektral tekilliklerinin sınıfı

$$\sigma_{ss}(L) = \{\lambda : \lambda = 2\cos z \quad z \in [0, 2\pi] \quad f(z) = 0\} \setminus \{0\} \tag{4.16}$$

şeklinde tanımlanır (Bairamov 2001).

Teorem 4.6 (4.2) koşulu altında

i) L operatörünün özdeğerleri kümesi sınırlıdır, en çok sayılabilir sayıdadır ve eğer varsa bu kümenin limit noktalari $[-2, 2]$ kapali aralığının elemanıdır.

ii) $\sigma_{ss}(L) \subset [-2, 2]$ ve $\sigma_{ss}(L)$ kümesinin Lebesgue ölçüsü sıfırdır.

İspat. i)

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\left\{\|I-A_n\|+\|B_n\|\right\} \quad <\infty$$

koşulu altında

$$F_0(z)=T_0\left[1+o(1)\right] \quad z\in\mathbb{C}_+^- \; z\in\varepsilon+i\tau \quad \tau\to\infty$$

olduğunu göstermiştik. O halde

$$f(z)=\det F_0(z)=\det T_0\left[1+o(1)\right] \qquad z\in P_0 \quad z=\varepsilon+i\tau \quad \tau\to\infty$$

sağlanır. $\det T_0\neq 0$ olduğundan P_0 yarı şeridindeki sıfırlarının kümesinin sınırlı olduğu görülür. f fonksiyonu $\mathbb{C}_+$ da analitik olup analitik fonksiyonların analitiklik bölgesi içindeki sıfırları ayrık olduğundan f fonksiyonun $\mathbb{C}_+$ daki sıfırları ayrıktır. f fonksiyonun P_0 yarı şeridindeki sıfırları sınırlı ve ayrık olduğundan en fazla sayılabilir sayıdadır. Ayrıca analitik bir fonksiyonun analitiklik bölgesi içindeki sıfırlarının limit noktası (eğer varsa) analitiklik bölgesinin sınırında yer alacağından f fonksiyonunun sıfırlarının limit noktası (eğer varsa) P_0 yarı şeridinin sınırı olan $[0,2\pi]$ aralığı içinde yer alir. $\lambda=2\cos z$ olmak üzere $z\in[0,2\pi]$ için $\lambda\in[-2,2]$ dir.

ii) $\sigma_{ss}(L)=\{\lambda;\;\; \lambda=2\cos z \;\; z\in[0,2\pi] \;\; f(z)=0\}\setminus\{0\}\subset[-2,2]$ olduğu açıktır. Ayrıca f fonksiyonu $\mathbb{C}_+$ da özdeş olarak sıfır olmayan analitik bir fonksiyon olup bu fonksiyonun reel sıfırlarının kümesi $\sigma_{ss}(L)$ sınıfına karşılık geldiğinden Privalov teoremi gereğince $\mu(\sigma_{ss}(L))=0$ gerçeklenir.

Teorem 4.7

$$\sup_{n\in\mathbb{N}}\left\{e^{\varepsilon n}\left(\|I-A_n\|+\|B_n\|\right)\right\}<\infty \quad \varepsilon>0 \tag{4.17}$$

koşulu altında L operatörü sonlu sayıda sonlu katlı özdeğere ve spektral tekilliğe sahiptir. (Yardımcı 2010)

İspat.

$$\| \ K_{nm}\| \le c \sum_{p=n+\left[\frac{m}{2}\right]}^{\infty} (\|I - A_P\| + \|B_P\|)$$

eşitsizliğinin sağlandığını göstermiştik.

$$\| \ K_{nm}\| \le c \sum_{p=\left[n+\frac{m}{2}\right]}^{\infty} e^{-\frac{\varepsilon p}{2}} e^{\frac{\varepsilon p}{2}} (\|I - A_P\| + \|B_P\|)$$

$e^{-\varepsilon p}$ azalan fonksiyon olduğundan en büyük değerini p nin en küçük değeri için alır.

$$\| \ K_{nm}\| \le c e^{-\frac{\varepsilon}{2}\left[n+\frac{m}{2}\right]} \sum_{p=\left[n+\frac{m}{2}\right]}^{\infty} e^{\frac{\varepsilon p}{2}} (\|I - A_P\| + \|B_P\|)$$

eşitsizliği elde edilir. (4.17) koşulunun sağlanması için

$$\begin{aligned} \|I - A_p\| &\le c.e^{-\frac{\varepsilon p}{2}} \\ \|B_P\| &< c.e-^{\frac{\varepsilon p}{2}} \end{aligned} \tag{4.18}$$

(4.18) deki eşitsizliklerin gerçeklenmesi gerekir. O halde

$$\begin{aligned} \| \ K_{nm}\| &\le c_1 e^{-\frac{\varepsilon}{2}\left[n+\frac{m}{2}\right]} \sum_{p=\left[n+\frac{m}{2}\right]}^{\infty} e^{\frac{\varepsilon p}{2}} e^{-\frac{\varepsilon p}{2}} e^{-\frac{\varepsilon p}{2}} \\ \| \ K_{nm}\| &\le C e^{-\frac{\varepsilon}{2}\left[n+\frac{m}{2}\right]} \end{aligned} \tag{4.19}$$

eşitsizlikleri sağlanır. (4.3) eşitliğinden

$$\frac{\partial}{\partial z} F_n(z) = T_n n e^{inz} \left[1 + \sum_{m=1}^{\infty} K_{nm} i m e^{imz} \right] \tag{4.20}$$

eşitliği elde edilir. Burada (4.19) eşitsizliği dikkate alındığında

$$\left|\sum_{m=1}^{\infty} K_{nm} ime^{imz}\right| \leq C \sum_{m=1}^{\infty} e^{-\frac{\varepsilon}{2}\left(n+\left[\frac{m}{2}\right]\right)} m \left|e^{imz}\right|$$
$$\leq Me^{-\frac{\varepsilon}{2}n} \sum_{m=1}^{\infty} me^{-m\left(\frac{\varepsilon}{4}+\operatorname{Im} z\right)} \tag{4.21}$$

elde edilir. (4.21) eşitsizliğinin sağ tarafındaki seri $\frac{\varepsilon}{4} + \operatorname{Im} z > 0$ için yakınsak olduğundan $\operatorname{Im} z > -\frac{\varepsilon}{4}$ bölgesinde de

$$\sum_{m=1}^{\infty} K_{nm} ime^{imz}$$

serisi Weierstrass Teoremi gereğince düzgün yakınsaktır. Böylece f fonksiyonunun analitiklik bölgesini $\operatorname{Im} z > -\frac{\varepsilon}{4}$ bölgesine analitik olarak devam ettirmiş olduk. Bu durumda f fonksiyonunun sıfırlarının limit noktaları reel eksen üzerinde olmalıdır ancak reel eksen analitiklik bölgesinin içinde kaldığından f fonksiyonunun sıfırlarının yani $\sigma_d(L)$ ve $\sigma_{ss}(L)$ kümelerinin limit noktalarının cümlesi boş olur . O halde Bolzano-Weierstrass teoremi gereğince verilen koşul altında $\sigma_d(L)$ ve $\sigma_{ss}(L)$ kümeleri sonlu sayıda elemana sahiptir. Ayrıca f fonksiyonu $\left\{z: z \in \mathbb{C}, \operatorname{Im} z > -\frac{\varepsilon}{4}\right\}$ bölgesinde analitik olduğundan P içindeki sıfırlarının katı sonludur. Benzer şekilde f fonksiyonunun sonsuz katlı sıfırı olsaydı analitiklik bölgesinin sınırında yani reel eksen üzerinde olacaktı fakat reel eksen artık analitiklik bölgesinin içinde olduğundan sonsuz katlı sıfırı bulunmayacaktır.

5. SONUÇ

Literatürde matris katsayılı operatörlerin spektral analizi yeteri kadar incelenmediğinden bu tür operatörlerin spektral analizinin öğrenilmesi önem arz etmektedir.Bundan dolayı bu tezde matris katsayılı selfadjoint fark operatörünün polinomiyal türden jost çözümleri elde edilmiş, bu çözümlerin asimptotikleri bulunmuş, analitik özellikleri öğrenlmiş, sürekli ve diskre spektrumu incelenmiştir. Aynı operatörün non-selfadjoint durumda spektral özellikleri elde edilmiş ve bu operatörün spektral tekilliğe sahip olduğu ifade edilmiştir. Son olarak non-selfadjoint durumdaki operatörün belirli bir koşul altında analitik devama sahip olduğu gösterilmiş ve bu durumda operatörün sonlu sayıda, sonlu katlı özdeğeri ve spektral tekilliği olduğu ispatlanmıştır.

KAYNAKLAR

Adivar, M. and Bairamov, E. 2001. Spectral properties of non-selfadjoint difference operators. J. Math. Anal. Appl. 261, 461-468.

Akhiezer, N. I. 1965. The classical moment problem and some related questions in analysis. New York.

Atkinson, F. V. 1964. Discrete and continuous boundary problems. New York, Academic Press.

Aygar, Y. and Bairamov, E. 2012. Jost solution and the spectral properties of the matrix-valued difference operators. Applied Mathematics and Computation 218, 9676-9681.

Bairamov, E., Krall, A. M. and Çakar, Ö. 2001. Non-seladjoint difference operators and Jacobi matrices with spectral singularities. Math. Nachr. 229, 5-14.

Bairamov, E. and Coşkun, C. 2004. Jost solutions and the spectrum of the system of difference equations. Appl. Math. Lett. 1039-1045.

Berezanski, Yu. M. 1968. Expansion in eigenfunctions of seladjoint operators. AMS Providence, R. I.

Dolzhenko, E. P. 1979. Boundary value uniqueness theorems for analytic functions. Math. Notes. 25, No; 6, p. p. 437-442.

Guseinov, G.S. 1976. The inverse problem of scattering theory for a second order difference equation. Sov. Math. Dokl. 230, 045-1048.

Lusternik, L. A. and Sobolev, V. J. 1968. Elements of functional analysis. Gordon and Breach. Science Publishers. New York

Yardımcı, Ş. 2010. A note on the spectral singularities of non-seladjoint matrix-valued difference operators. Journal of Computational and Applied Mathematics. 234, 3039-3042.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı **:** Emel YILDIRIM

Doğum Yeri **:** Ankara

Doğum Tarihi : 19 /09/1989

Medeni Hali **:** Bekar

Yabancı Dili **:** İngilizce

Eğitim Durumu (**Kurum ve Yıl**) **:**

Lise **:** Mimar Sinan Lisesi (2006)

Lisans **:** Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü (2011)

Yüksek Lisans : Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı (Eylül 2012 - Ocak 2014)