ANKARA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

HALKALARDA ELEMANLARIN HIRANO TERSLERİ

Işıl BAYDAR

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ANKARA
2020

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

HALKALARDA ELEMANLARIN HIRANO TERSLERİ

Işıl BAYDAR

Ankara Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman : Doç. Dr. Burcu ÜNGÖR

Bu tez dört bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde çalışmanın amacı anlatılmaktadır. İkinci bölümde çalışma için gerekli temel tanımlar verilmektedir. Üçüncü bölümde halkalarda elemanların Hirano tersleri, kuvvetli Drazin tersleri ve Drazin tersleri arasındaki ilişkiler, çeşitli karakterizasyonlar ve Hirano terslerin bazı özellikleri verilmektedir. Dördüncü bölümde halkalarda elemanların genelleştirilmiş Hirano tersleri ile genelleştirilmiş Drazin tersler arasındaki ilişkiler araştırılmaktadır. Projektif-serbest halkalar üzerindeki matrislerin genelleştirilmiş Hirano tersler için bazı özellikleri incelenmektedir. Ayrıca genelleştirilmiş Hirano tersler için Cline formülü ve bu terslerin bazı özellikleri incelenmektedir.

Temmuz 2020, 47 sayfa

Anahtar Kelimeler : Drazin ters, genelleştirilmiş Drazin ters, kuvvetli Drazin ters, üstel sıfır, yarı üstel sıfır, Hirano ters, genelleştirilmiş Hirano ters

ABSTRACT

M.Sc. Thesis

HIRANO INVERSES OF ELEMENTS IN RINGS

Işıl BAYDAR

Ankara University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematics

Supervisor : Assoc. Prof. Dr. Burcu ÜNGÖR

This thesis consists of four chapters. The first chapter is the introduction of the thesis. In the second chapter, basic definitions which are necessary for the thesis are given. In the third chapter, the relations among Hirano inverses, strongly Drazin inverses and Drazin inverses in rings, various characterizations and some properties are given. In the fourth chapter, the relations between generalized Hirano inverses and generalized Drazin inverses in rings are investigated. Matrices over projective-free rings are studied for generalized Hirano inverses. Also Cline's formula for generalized Hirano inverses and some properties of these inverses are examined.

July 2020, 47 pages

Key Words : Drazin inverse, generalized Drazin inverse, strongly Drazin inverse, nilpotent, quasinilpotent, Hirano inverse, generelized Hirano inverse

ÖNSÖZ ve TEŞEKKÜR

Bu çalışmanın gerçekleştirilmesinde, değerli bilgi, birikim ve tecrübelerini benimle paylaşan, kendisine her danıştığımda beni sabırla dinleyip çözüm üreten, bu süreçte karşılaştığım her zorlukta yanımda olan, ilgisini, güler yüzünü ve samimiyetini benden esirgemeyen, yoluma ışık tutan değerli danışmanım, hocam Sayın Doç. Dr. Burcu ÜNGÖR'e (Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü); değerli zamanını tez çalışmama ayıran, araştırma konusunun seçimi ve yürütülmesi sırasında değerli bilimsel uyarı, düşünce ve önerilerinden yararlandığım ender bilim insanı kıymetli hocam Sayın Prof. Dr. Abdullah HARMANCI'ya (Hacettepe Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü); lisans eğitim sürecimden beri çalışmalarını ve özverisini kendime örnek aldığım yine çalışmam boyunca konu, kaynak, yöntem açısından yardımlarını esirgemeyen, desteğini her daim hissettiğim kıymetli hocam Sayın Prof. Dr. Sait HALICIOĞLU'na (Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü); çalışmalarım boyunca yardımlarını sakınmayan, yol gösteren, güvenini her zaman hissettiğim değerli hocam Sayın Arş. Gör. Tuğçe ÇALCI'ya (Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü); bu süreçte kahrımı çeken, maddi manevi beni destekleyen, her koşulda yanımda olan ve sevgilerini her an hissettiğim sevgili aileme gönülden teşekkür ederim.

Işıl BAYDAR

Ankara, Temmuz 2020

İÇİNDEKİLER

SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ

$\mathbb{N}$	Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{Q}$	Rasyonel sayılar cismi
$\mathbb{Z}$	Tamsayılar halkası
$\mathbb{C}$	Kompleks sayılar cismi
$\mathbb{Z}_n$	$\{\overline{0}, \overline{1}, ..., \overline{n-1}\}$
U^{-1}	U matrisinin çarpımsal tersi
$U(R)$	R halkasının bütün tersinir elemanlarının kümesi
$N(R)$	R halkasının bütün üstel sıfır elemanlarının kümesi
R^{qnil}	R halkasının bütün yarı üstel sıfır elemanlarının kümesi
$M_2(R)$	R halkası üzerindeki 2×2 tipindeki matrislerin halkası
$J(R)$	R halkasının Jacobson radikali
$\chi(A)$	A matrisinin karakteristik polinomu
$det(A)$	A matrisinin determinantı
$iz(A)$	A matrisinin izi
$comm(a)$	a nın merkezleyeni
$comm^2(a)$	a nın çift merkezleyeni
R^{stD}	R halkasının kuvvetli Drazin tersinir elemanlarının kümesi
R^{gD}	R halkasının genelleştirilmiş Drazin tersinir elemanlarının kümesi
R^H	R halkasının Hirano tersinir elemanlarının kümesi
a^D	a nın Drazin tersi
a^{stD}	a nın kuvvetli Drazin tersi
a^H	a nın Hirano tersi
a^{gD}	a nın genelleştirilmiş Drazin tersi
a^{gH}	a nın genelleştirilmiş Hirano tersi

1. GİRİŞ

R birimli bir halka olmak üzere, R halkasının bütün tersinir elemanlarının kümesi $U(R)$ ile gösterilsin. R halkasında $a \in R$ için $comm(a) = \{x \in R \mid xa = ax\}$ kümesine a nın *merkezleyeni* ve $comm^2(a) = \{x \in R \mid \text{her } y \in comm(a) \text{ için } xy = yx\}$ kümesine a nın *çift merkezleyeni* adı verilir. R halkasının *yarı üstel sıfır elemanlarının kümesi* $R^{qnil} = \{a \in R \mid \textit{her } x \in comm(a) \text{ için } 1 + ax \in U(R)\}$ olarak tanımlanmaktadır. Drazin (1958) halkalarda ve yarı gruplarda yeni bir genelleştirilmiş ters çeşidini tanımlamıştır. R halkasında $a \in R$ için $a - a^2b \in N(R)$, $ab = ba$ ve $bab = b$ olacak şekilde bir $b \in R$ mevcut ise a ya *Drazin terse* sahiptir denir, bu şartı sağlayan b ye de a nın *Drazin tersi* adı verilir. Bir elemanın Drazin tersi varsa tektir. Lay (1975), King (1977) Drazin ters kavramını kompleks Banach uzayları üzerinde tanımlı sınırlı lineer operatörler için ele almışlardır. Nashed ve Zhao (1992) Drazin ters kavramını kapalı lineer operatörler için incelemişlerdir ve tekil değer denklemleri ile kısmi diferensiyel operatörler üzerinde uygulamışlardır.

Bu yayınların motivasyonuyla, bu tezin üçüncü bölümünde Drazin tersin yeni bir sınıfı olan Hirano ters kavramı tanımlanmaktadır. Drazin ters ile Hirano ters arasındaki ilişki incelenmekte olup Drazin ters için sağlanan bazı özelliklerin Hirano ters için sağlanıp sağlanmadığı araştırılmaktadır. Ayrıca halkalarda bazı genelleştirilmiş tersler arasındaki ilişkiler verilmektedir.

Koliha (1996) kompleks Banach cebirlerinde genelleştirilmiş Drazin ters kavramını tanımlamıştır. Koliha ve Patricio (2002) halkalarda yarı kutuplu eleman ve genelleştirilmiş Drazin ters kavramlarını detaylı olarak incelemişlerdir. R halkasında $a \in R$ için $b \in comm^2(a)$, $b = b^2a$, $a - a^2b \in R^{qnil}$ olacak şekilde $b \in R$ mevcut ise a ya *genelleştirilmiş Drazin terse* sahiptir denir, bu şartı sağlayan b ye de a nın *genelleştirilmiş Drazin tersi* adı verilir.

Drazin terslerin ve genelleştirilmiş Drazin terslerin özellikleri Koliha (1996), Chen ve Sheibani (2018) tarafından detaylı bir şekilde ele alınmıştır. Ayrıca genelleştirilmiş Drazin tersler matris teorisi ve Banach cebirleri üzerinde (Cui ve Chen 2011), (Koliha 1996), (Koliha ve Patricio 2002), (Ying ve Chen 2012), (Zhuang vd. 2012) kaynaklarında kapsamlı bir şekilde ele alınmıştır.

Bu tezin dördüncü bölümünde genelleştirilmiş Drazin tersin bir sınıfı olan genelleştirilmiş Hirano ters kavramı tanımlanmaktadır. Halkalarda genelleştirilmiş Drazin ters ile genelleştirilmiş Hirano ters kavramı arasındaki ilişki incelenmektedir. Ayrıca genelleştirilmiş Drazin terslerin Banach cebirleri üzerinde sağladığı bazı özelliklerin genelleştirilmiş Hirano tersler üzerinde de sağlanıp sağlanmadığı araştırılmaktadır.

2. KURAMSAL TEMELLER

Bu bölümde tezde kullanılacak temel bilgiler verilecektir.

2.1 Temel Kavramlar

Tanım 2.1.1 R bir halka olsun. Eğer $e \in R$ için $e^2 = e$ sağlanıyor ise e ye *eşkare* (*idempotent*) eleman denir (Hungerford 1974).

Tanım 2.1.2 R bir halka ve $x \in R$ olsun. Eğer $x^n = 0$ olacak şekilde bir pozitif n tamsayısı varsa x e *üstel sıfır* (*nilpotent*) eleman denir (Hungerford 1974).

Tanım 2.1.3 R bir halka olsun. Eğer $x \in R$ için $x^3 = x$ sağlanıyor ise x e *eşküp* (*tripotent*) eleman denir (Mosic 2015).

Tanım 2.1.4 Bir R halkasının tüm maksimal ideallerinin kesişimine *Jacobson radikali* denir (Lam 1999).

Tanım 2.1.5 R bir halka ve $a \in R$ olsun. $comm(a) = \{x \in R \mid \ xa = ax\}$ kümesine a nın *merkezleyeni* denir (Hungerford 1974).

Tanım 2.1.6 R bir halka ve $a \in R$ olsun. $comm^2(a) = \{x \in R \mid \text{her } y \in comm(a) \text{ için } xy = yx\}$ kümesine a nın *çift merkezleyeni* denir (Koliha 1996).

Tanım 2.1.7 R bir halka olsun. $R^{qnil} = \{a \in R \mid \text{Her } x \in comm(a) \text{ için } 1 + ax \in U(R)\}$ kümesine R halkasının *yarı üstel sıfır* (*quasinilpotent*) elemanlarının kümesi denir (Koliha 1996).

Tanım 2.1.8 R bir halka ve $a \in R$ olsun. Eğer $p \in comm^2(a)$, $ap \in R^{qnil}$ ve $a + p \in U(R)$ olacak şekilde bir $p^2 = p \in R$ mevcut ise a elemanına *yarı kutuplu* (*quasipolar*) ve p eşkare elemanına da a nın *spektral eşkare* (*spectral idempotent*) elemanı denir (Koliha ve Patricio 2002).

Tanım 2.1.9 R bir halka ve $a \in R$ olsun. Eğer $e^2 = e \in R$ ve b üstel sıfır eleman olmak üzere $a = e + b$ ise o zaman a ya *üstel-temiz* (*nil-clean*) eleman denir. Eğer R halkasının her elemanı üstel-temiz ise R ye *üstel-temiz* (*nil-clean*) halka denir (Diesl 2013).

Tanım 2.1.10 R bir halka ve $a \in R$ olsun. Eğer $e^2 = e \in R$ ve b üstel sıfır eleman olmak üzere $a = e + b$ ve $eb = be$ ise o zaman a ya *kuvvetli üstel-temiz* (*strongly nil-clean*) eleman denir. R halkasının her elemanı kuvvetli üstel-temiz ise R ye *kuvvetli üstel-temiz* (*strongly nil-clean*) halka denir (Diesl 2013).

Tanım 2.1.11 $(A, \| \cdot \|)$ bir kompleks Banach uzayı olsun. Eğer

(1) her $x, y, z \in A$, $c \in \mathbb{C}$ için

$$(xy)z = x(yz)$$

$$(x + y)z = xz + yz, \quad x(y + z) = xy + xz$$

$$c(xy) = (cx)y = x(cy)$$

olacak biçimde $A \times A \to A$ ya tanımlı bir çarpma işlemi mevcut,

(2) her $x \in A$ için

$$ex = e = xe$$

ve

$$\| e \| = 1$$

olacak biçimde bir $e \in A$ mevcut ve

(3) her $x, y \in A$ için

$$\| xy \| \leq \| x \| \| y \|$$

ise o zaman $(A, \| \cdot \|)$ uzayına *Banach cebiri* (*Banach algebra*) denir (Rudin 1991).

Tanım 2.1.12 F bir sol R-modül olsun. Eğer F modülü, R nin kopyalarının bir direkt toplamına izomorf ise, yani her $i \in I$ için $R_i \cong R$ ve $F \cong \bigoplus_{i \in I} R_i$ olacak biçimde bir I indis kümesi varsa F ye *serbest* (*free*) sol R-modül denir (Anderson ve Fuller 1992).

Tanım 2.1.13 R değişmeli bir halka olsun. Eğer her sonlu üretilmiş projektif R-modül serbest ise R ye *projektif-serbest* (*projective-free*) halka denir (Lam 1999).

Tanım 2.1.14 R birimli ve değişmeli bir halka ve $S \subseteq R$ olsun. $1 \in S$ ve $0 \notin S$ olmak üzere $R_S = \{\frac{a}{s} \mid a \in R, s \in S\}$ halkasına R nin S ye göre *yerelleştirme halkası* (*localization ring*) denir (Chevalley 1943).

Lemma 2.1.15 R bir halka ve $a \in R$ olsun. Eğer $a^2 - a \in N(R)$ ise o zaman $f(a)^2 = f(a)$ ve $a - f(a) \in N(R)$ olacak biçimde bir $f(t) \in \mathbb{Z}[t]$ monik polinomu vardır (Chen ve Sheibani 2017).

Tanım 2.1.16 R bir halka ve $a \in R$ olsun. Eğer $a = e + f + w$ olacak biçimde $w \in N(R)$ ve $ef = fe$ olmak üzere e, f eşkare elemanları mevcut ise R halkasına *kuvvetli 2-üstel-temiz* (*2-nil-clean*) halka denir (Chen ve Sheibani 2017).

Lemma 2.1.17 R değişmeli bir halka olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler denktir:

(1) $A \in M_n(R)$ düzenli bir eleman ve $r \in R$ olmak üzere $UAV = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ olacak şekilde U,$V \in GL_n(R)$ vardır.

(2) $E^2 = E \in M_n(R)$ ve $r \in R$ olmak üzere $WEW^{-1} = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ olacak şekilde bir $W \in GL_n(R)$ vardır

(Chen 2011).

Tanım 2.1.18 R bir halka ve R nin bir ideali P olsun. Eğer R nin herhangi bir I ideali için $I^2 \subseteq P$ olması $I \subseteq P$ olmasını gerektiriyorsa P ye *yarı asal* (*semiprime*) ideal denir (Hungerford 1974).

Teorem 2.1.19 (**Cayley-Hamilton Teoremi**) F bir cisim ve V sonlu boyutlu bir F-vektör uzayı olsun.

(1) V üzerinde bir lineer dönüşüm T olsun. Bu durumda T nin karakteristik polinomu $f(x)$ olmak üzere $f(T) = 0$ dır.

(2) F üzerinde $n \times n$ tipinde bir matris A olsun. Bu durumda A nın karakteristik polinomu $f(x)$ olmak üzere $f(A) = 0$ dır

(Hoffman ve Kunze 1971).

Lemma 2.1.20 (**Jacobson Lemma**) R bir halka ve $a, b \in R$ olsun. O zaman, $1+ab$ nin tersinir olması için gerek ve yeter şart $1 + ba$ nın tersinir olmasıdır (Kaplansky 1980).

Tanım 2.1.21 R bir halka olsun. Eğer R nin her sonlu altkümesi sonlu çarpımsal bir yarı grup üretiyorsa R ye *yerel olarak sonlu halka* (*locally finite ring*) denir (Iskander 1975).

Tanım 2.1.22 R birimli ve değişmeli bir halka olsun. Eğer R bir tek maksimal ideale sahip ise R ye *yerel* (*local*) halka denir (Lam 2001).

Tanım 2.1.23 R bir halka olsun. Eğer her $x \in R$ için $x^n = x^{n+1}y$ olacak şekilde bir $n \in \mathbb{N}$ ve $y \in R$ varsa R halkasına *kuvvetli π-düzenli* (*strongly π-regular*) halka denir (Lam 2001).

2.2 Halkalarda Bazı Tersler

Tanım 2.2.1 R bir halka ve $a \in R$ olsun. Eğer $a - a^2b \in N(R)$, $ab = ba$ ve $b = bab$ olacak şekilde bir $b \in R$ mevcut ise a *Drazin terse* (*Drazin inverse*) sahiptir ve b ye a nın Drazin tersi denir. $b = a^D$ şeklinde gösterilir (Drazin 1958).

Tanım 2.2.2 R bir halka ve $a \in R$ olsun. Eğer $a - ab \in N(R)$, $ab = ba$ ve $bab = b$ olacak biçimde bir $b \in R$ mevcut ise a *kuvvetli Drazin terse* (*strongly Drazin inverse*) sahiptir ve b ye a nın kuvvetli Drazin tersi denir. $b = a^{stD}$ şeklinde gösterilir (Wang 2017).

Tanım 2.2.3 R bir halka ve $a \in R$ olsun. Eğer $b = bab$, $b \in comm^2(a)$ ve $a - a^2b \in R^{qnil}$ olacak şekilde bir $b \in R$ varsa a *genelleştirilmiş Drazin terse* (*generalized Drazin inverse*) sahiptir ve b ye a nın genelleştirilmiş Drazin tersi denir. $b = a^{gD}$ şeklinde gösterilir (Koliha 1996).

Lemma 2.2.4 (**Cline Formülü**) R bir halka ve $a, b \in R$ olsun. Eğer ab Drazin terse sahip ise o zaman ba Drazin terse sahiptir. Bu durumda ba nın Drazin tersi $(ba)^D = b((ab)^D)^2a$ dır (Cline 1965).

Lemma 2.2.5 (A, r) bir cebir ve $xy = yx$ olacak şekilde $x, y \in A$ olsun. O zaman $r(xy) \leq r(x)r(y)$ ve $r(x + y) \leq r(x) + r(y)$ dir (Kaniuth 2009).

Lemma 2.2.6 A bir Banach cebiri, $a^2b = aba$ ve $b^2a = bab$ olacak şekilde $a, b \in A$ olsun. O zaman, $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere

$$(a + b)^n = \sum_{i=0}^{n-1} C_{n-1}^{i}(a^{n-i}b^i + b^{n-i}a^i)$$

dir (Zou vd. 2017).

3. HALKALARDA ELEMANLARIN HIRANO TERSLERİ

3.1 Hirano Tersler İle Drazin Tersler Arasındaki İlişkiler

Bu kısımda Hirano ters kavramı tanımlanacak ve Drazin ters, kuvvetli Drazin ters, Hirano ters arasındaki ilişkiler incelenecektir.

Tanım 3.1.1 R bir halka ve $a \in R$ olsun. Eğer $a^2 - ab \in N(R)$, $ab = ba$ ve $b = bab$ olacak şekilde bir $b \in R$ mevcut ise a *Hirano terse* (*Hirano inverse*) sahiptir ve b ye a nın Hirano tersi denir. $b = a^H$ ile gösterilir (Chen ve Sheibani 2019a).

Teorem 3.1.2 R bir halka ve $a \in R$ olsun. Eğer a Hirano terse sahip ise o zaman a Drazin terse sahiptir (Chen ve Sheibani 2019a).

İspat: a Hirano terse sahip ve a nın Hirano tersi b olsun. O zaman $a^2 - ab \in N(R)$, $ab = ba$ ve $bab = b$ dir. O halde, $a^2 - a^2b^2 = a^2 - a(bab) = a^2 - ab \in N(R)$ ve buradan,

$$a^2(1 - a^2b^2) = (a^2 - a^2b^2)(1 - a^2b^2) \in N(R)$$

elde edilir ve $a(a - a^2b) = a^2(1 - a^2b^2) \in N(R)$ olduğundan

$$(a - a^2b)^2 = a(a - a^2b)(1 - ab) \in N(R)$$

dir. Böylece, $a - a^2b \in N(R)$ dir. Ayrıca a nın Hirano tersi b olduğundan $ab = ba$ ve $bab = b$ dir. Buradan a nın Drazin tersi b dir. □

Lemma 3.1.3 R bir halka ve M_R bir sağ R-modül olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler denktir:

(1) $\varphi \in End(M_R)$ kuvvetli üstel-temiz elemandır.

(2) $\chi^2\varphi = \chi$, $\chi\varphi = \varphi\chi$ ve $\varphi - \varphi\chi \in N(R)$ olacak biçimde bir $\chi \in End(M_R)$ vardır.

(3) $n \geq 1$ tamsayısı için $M = Ker((1 - \varphi)^n) \bigoplus Ker(\varphi^n)$ dir.

(4) A ile B φ-sabit ve $(1 - \varphi)|_A \in End(A_R)$ ile $\varphi|_B \in End(B_R)$ üstel sıfır olmak üzere $M = A \bigoplus B$ şeklinde bir ayrışıma sahiptir.

Bu durumda, $\varphi \in End(M_R)$ bir Drazin terse sahiptir (Wang 2017).

Lemma 3.1.4 R bir halka ve $a \in R$ olsun. O zaman a en fazla bir kuvvetli Drazin terse sahiptir ve eğer a nın kuvvetli Drazin tersi mevcut ise bu ters $comm^2(a)$ nın bir elemanıdır. (Wang 2017).

İspat: a nın kuvvetli Drazin tersi x olsun. O zaman $ax = xa$ ve $ax^2 = x$ dir. Buradan $(ax)^2 = axax = ax$ dir. $a - ax \in N(R)$ olduğundan

$$a(1 - ax) = (a - ax)(1 - ax) \in N(R)$$

dir. O halde a nın Drazin tersi x dir. a nın Drazin tersi tek ve $comm^2(a)$ nın bir elemanı olduğundan a nın kuvvetli Drazin tersi tektir ve $comm^2(a)$ nın bir elemanıdır.
$\square$

Sonuç 3.1.5 R bir halka ve $a \in R$ olsun. Eğer a nın Drazin tersi mevcut ise tektir.

Sonuç 3.1.6 R bir halka ve $a \in R$ olsun. O zaman a en fazla bir Hirano terse sahiptir ve eğer a nın Hirano tersi mevcut ise o zaman a nın Hirano tersi, a nın Drazin tersidir (Chen ve Sheibani 2019a).

İspat: a nın Hirano tersi x olsun. Teorem 3.1.2 gereğince a nın Drazin tersi x dir. Sonuç 3.1.5 gereğince a nın Drazin tersi tektir. O halde a en fazla bir Hirano terse sahiptir. $\square$

Lemma 3.1.7 R bir halka ve $a \in R$ olsun. a nın kuvvetli π-düzenli olması için gerek ve yeter şart $ab = ba$, $ab^2 = b$ ve $n \geq 1$ tamsayısı için $a^n = a^{n+1}b$ olmasıdır (Azumaya 1954).

Lemma 3.1.8 Yerel olarak sonlu halkalar kuvvetli π-düzenlidir (Huh vd. 2004).

Örnek 3.1.9 gereğince Drazin terse sahip her eleman Hirano terse sahip olmak zorunda değildir.

Örnek 3.1.9 $\mathbb{Z}_2$ halkası üzerinde 2×2 tipindeki her matris Drazin terse sahiptir, fakat $a = \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{1} \\ \bar{1} & \bar{1} \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{Z}_2)$ Hirano terse sahip değildir (Chen ve Sheibani 2019a).

İspat: $M_2(\mathbb{Z}_2)$ sonlu olduğundan $M_2(\mathbb{Z}_2)$ halkasının her elemanı Drazin terse sahiptir. Eğer $a = \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{1} \\ \bar{1} & \bar{1} \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{Z}_2)$ Hirano terse sahip ise Sonuç 3.1.6 gereğince a nın Hirano tersi $a^D = \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{1} & \bar{0} \end{pmatrix}$ dır. Fakat, $a^2 - aa^D = \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{1} & \bar{0} \end{pmatrix}$ - $\begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{1} \\ \bar{1} & \bar{1} \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{1} & \bar{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{1} \\ \bar{1} & \bar{1} \end{pmatrix}$ üstel sıfır değildir. Dolayısıyla $a = \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{1} \\ \bar{1} & \bar{1} \end{pmatrix}$ Hirano terse sahip değildir. □

Teorem 3.1.10 R bir halka ve $a \in R$ olsun. Eğer a kuvvetli Drazin terse sahip ise o zaman a Hirano terse sahiptir.

İspat: $a \in R$ kuvvetli Drazin terse sahip olsun. Bu durumda $ab = ba$, $bab = b$ ve $a - ab \in N(R)$ olacak şekilde bir $b \in R$ vardır. Buradan $a^2 - ab = a(a - b) = a(ab^2) = a^2 - a^2b^2 = (a - ab)(a + ab) \in N(R)$ dir. O halde a Hirano terse sahiptir. □

Örnek 3.1.11 gereğince Teorem 3.1.10 un karşıtı her zaman doğru değildir.

Örnek 3.1.11 $\mathbb{Z}_3$ halkasının her elemanı Hirano terse sahiptir, fakat $\bar{2} \in \mathbb{Z}_3$ kuvvetli Drazin terse sahip değildir (Chen ve Sheibani 2019a).

İspat: $\mathbb{Z}_3$ halkasının her elemanının Hirano terse sahip olduğunu göstermek için keyfi $a \in \mathbb{Z}_3$ için $ab = ba$, $bab = b$ ve $a^2 - ab \in \mathbb{Z}_3$ olacak biçimde bir $b \in \mathbb{Z}_3$ mevcut olduğu gösterilmelidir.

(i) $a = \bar{0} \in \mathbb{Z}_3$ için $b\bar{0}b = b$ olacağından $b = \bar{0}$ dır. Buradan $a^2 - ab = \bar{0} \in N(\mathbb{Z}_3)$ ve $ab = ba$ dır.

(ii) $a = \bar{1} \in \mathbb{Z}_3$ için $b\bar{1}b = b$ olması gerektiğinden $b^2 = b$ ve buradan $b = \bar{0}$ veya $b = \bar{1}$ dir. $b = \bar{1}$ için $a^2 - ab = \bar{1} - \bar{1} = \bar{0} \in N(\mathbb{Z}_3)$ dir. O halde $b = \bar{1}$ için $ab = ba$ ve $bab = b$ elde edilir.

(iii) $a = \bar{2} \in \mathbb{Z}_3$ için $b\bar{2}b = b$ olmalıdır. Buradan $b(\bar{2}b - \bar{1}) = \bar{0}$ olup $b = \bar{0}$ veya $b = \bar{2}$ dir. $b = \bar{2}$ için $ab = ba$ ve $a^2 - ab = \bar{1} - \bar{1} = \bar{0} \in N(\mathbb{Z}_3)$ elde edilir.

Bu durumda, $\mathbb{Z}_3$ ün her elemanı Hirano terse sahiptir.

$\bar{2} \in \mathbb{Z}_3$ kuvvetli Drazin terse sahip olsun. O halde $\bar{2} - \bar{2} \cdot \bar{2}^{stD} \in N(\mathbb{Z}_3)$ olmalıdır.

$\mathbb{Z}_3$ te tek üstel sıfır eleman $\bar{0}$ olduğundan $\bar{2} - \bar{2} \cdot \bar{2}^{stD} = \bar{0}$ ve buradan $\bar{2} = \bar{2} \cdot \bar{2}^{stD}$ dir. O halde $\bar{2}(\bar{1} - \bar{2}^{stD}) = \bar{0}$ dır. Buradan $\bar{2} \neq \bar{0}$ olduğundan $\bar{2}^{stD} = \bar{1}$ dir. Ayrıca $\bar{2}^{stD} = \bar{2}^{stD} \cdot \bar{2} \cdot \bar{2}^{stD}$ olduğundan $\bar{2}^{stD} = \bar{1}$ için $\bar{1} \neq \bar{2}$ olup çelişki elde edilir. Sonuç olarak, $\bar{2} \in \mathbb{Z}_3$ kuvvetli Drazin terse sahip değildir. $\square$

R bir halka olmak üzere aşağıdaki kapsama her zaman doğrudur.

$$R^{stD} \subset R^H \subset R^D.$$

Teorem 3.1.12 R bir halka ve $a \in R$ olsun. O zaman a nın Hirano terse sahip olması için gerek ve yeter şart a^2 nin kuvvetli Drazin terse sahip olmasıdır (Chen ve Sheibani 2019a).

İspat: a Hirano terse sahip olsun. Bu durumda $a^2 - ab \in N(R)$, $ab = ba$ ve $bab = b$ olacak şekilde bir $b \in R$ vardır. Bu yüzden, $a^2 - a^2b^2 = a^2 - a(bab) = a^2 - ab \in N(R)$, $a^2b^2 = b^2a^2$ ve $b^2a^2b^2 = b^2$ dir. Buradan, a^2 kuvvetli Drazin terse sahiptir.
Karşıt olarak a^2 kuvvetli Drazin terse sahip olsun. O halde $a^2 - a^2x \in N(R)$, $a^2x = xa^2$ ve $x = xa^2x$ olacak şekilde bir $x \in R$ vardır. $b = ax$ olsun. O zaman $a^2 - ab = a^2 - a^2x \in N(R)$, $ab = ba$ ve $bab = (ax)a(ax) = a(xa^2x) = ax = b$ dir. O halde a Hirano terse sahiptir. $\square$

3.2 Hirano Terse Sahip Elemanların Karakterizasyonları

Bu kısımda eşküp ve üstel sıfır elemanlar aracılığıyla halkalarda Hirano tersler karakterize edilecektir.

Teorem 3.2.1 R bir halka ve $a \in R$ olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler denktir:

(1) a Hirano terse sahiptir.

(2) $b = b^2a$, $a^2 - ab \in N(R)$ olacak şekilde bir $b \in comm^2(a)$ vardır.

(3) $a - a^3 \in N(R)$ dir

(Chen ve Sheibani 2019a).

İspat: (1) $\Rightarrow$ (3) a Hirano terse sahip olsun. Bu durumda $w := a^2 - ab \in N(R)$, $ab = ba$, $b = bab$ olacak şekilde bir $b \in R$ vardır. O halde, $a^2 = ab + w$ ve $(ab)w = ab(a^2 - ab) = aba^2 - abab = aa^2b - abab = a^2ab - abab = (a^2 - ab)ab = w(ab)$ dir. Bu yüzden, $a^2 - a^4 = (ab + w) - (ab + w)^2 = ab + w - ab - abw - wab - w^2 = (1 - 2ab - w)w \in N(R)$ dir. Dolayısıyla, $a(a - a^3) \in N(R)$ ve buradan $(a - a^3)^2 = a(a - a^3)(1 - a^2) \in N(R)$ dir. Sonuç olarak, $a - a^3 \in N(R)$ dir.
(3) $\Rightarrow$ (2) $a - a^3 \in N(R)$ olsun. O zaman $a^2 - a^4 = a(a - a^3) \in N(R)$ dir. Lemma 2.1.15 gereğince $w := a^2 - e \in N(R)$ ve $ae = ea$ olacak biçimde $e \in \mathbb{Z}[a^2]$ eşkare elemanı vardır. $c = (1 + w)^{-1}e$ olsun. O zaman $ac = ca$ ve

$$\begin{aligned} a^2c &= a^2(1 + w)^{-1}e \\ &= (1 + w)^{-1}e(a^2 + 1 - e) \\ &= (1 + w)^{-1}e(1 + w) \\ &= e \end{aligned}$$

dir. Buradan, $a^2 - a^2c = a^2 - e = w \in N(R)$ dir. Ayrıca $ca^2c = ce = c$ dir. $b = ac$ olsun. O halde $a^2 - ab \in N(R)$, $ab = ba$ ve $bab = (ac)a(ac) = (ca^2c)a = ca = b$ dir. $b = a(1 + a^2 - e)^{-1}e$ ve $e \in \mathbb{Z}[a^2]$ olduğundan $b \in comm^2(a)$ dır.
(2) $\Rightarrow$ (1) $comm^2(a) \subseteq comm(a)$ olduğundan ispat tamamlanır. □

Sonuç 3.2.2 R bir halka ve $a \in R$ olsun. Eğer a Hirano terse sahip ise o zaman a^D Hirano terse sahiptir (Chen ve Sheibani 2019a).

İspat: a Hirano terse sahip ve $b = a^D$ olsun. O zaman $w := a^2 - ab \in N(R)$, $ab = ba$ ve $bab = b$ dir. Teorem 3.2.1 gereğince, $a - a^3 \in N(R)$ dir.

$$\begin{aligned} b - b^3 &= b^2a - b^2(bab) \\ &= b^2a - b^3(a^2 - w) \\ &= b^2a - b^3a^2 + b^3w \\ &= b^2a - b(b^2a)a + b^3w \\ &= b^2a - (b^2a)ba + b^3w \\ &= b^3w \in N(R) \end{aligned}$$

dir. Teorem 3.2.1 gereğince, b Hirano terse sahiptir. □

Teorem 3.2.3 R bir halka olmak üzere $a \in R$ ve $2 \in U(R)$ olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler denktir:

(1) a Hirano terse sahiptir.

(2) $a - p \in N(R)$ olacak şekilde bir $p^3 = p \in comm^2(a)$ vardır.

(3) $a + e - f \in N(R)$ olacak şekilde $e, f \in comm^2(a)$ eşkare elemanları vardır

(Chen ve Sheibani 2019a).

İspat: (1) $\Rightarrow$ (3) a Hirano terse sahip olsun. Teorem 3.2.1 gereğince, $a - a^3 \in N(R)$ dir. $b = \dfrac{a^2 + a}{2}$ ve $c = \dfrac{a^2 - a}{2}$ olsun. O zaman

$$b^2 - b = \frac{1}{4}(a^4 + 2a^3 - a^2 - 2a) = \frac{1}{4}(a + 2)(a^3 - a),$$

$$c^2 - c = \frac{1}{4}(a^4 - 2a^3 - a^2 + 2a) = \frac{1}{4}(a - 2)(a^3 - a)$$

dır. O zaman $b - b^2, c - c^2 \in N(R)$ dir. Lemma 2.1.15 gereğince, $b - f$, $c - e \in N(R)$ olacak şekilde $e \in \mathbb{Z}[c]$ ve $f \in \mathbb{Z}[b]$ eşkare elemanları mevcuttur. Buradan, $a = b - c$ ve $b, c \in \mathbb{Z}[\frac{a}{2}]$ dir. Dolayısıyla, $a - f + e = (b - f) - (c - e) \in N(R)$ dir. O halde $e, f \in \mathbb{Z}[\frac{a}{2}] \subseteq comm^2(a)$ dır.
(3) $\Rightarrow$ (2) $p = f - e$ olsun. O zaman $a - p \in N(R)$ ve $ef = fe$ olduğundan $p^3 = (f - e)^3 = f - e = p$ dir.
(2) $\Rightarrow$ (1) Hipotezden $w := a - p \in N(R)$ olacak şekilde bir $p^3 = p \in comm^2(a)$ vardır. Bu yüzden, $a - a^3 = (p + w) - (p + w)^3 = w(1 - 3pw - 3p^2 - w^2) \in N(R)$ dir. Teorem 3.2.1 gereğince ispat tamamlanır. $\square$

Sonuç 3.2.4 R bir halka ve $2 \in U(R)$ olsun. O zaman $a \in R$ nin Hirano terse sahip olması için gerek ve yeter şart $a = b - c$ ve $bc = cb$ olacak şekilde $b, c \in R^{stD}$ var olmasıdır (Chen ve Sheibani 2019a).

İspat: a Hirano terse sahip olsun. Teorem 3.2.3 gereğince, $w := a + e - f \in N(R)$ olacak şekilde $e, f \in comm^2(a)$ eşkare elemanları vardır. Buradan $w \in \mathbb{Z}[\frac{a}{2}]$ olmak üzere $a = f - (e - w)$ dir. f eşkare eleman olduğundan f nin kuvvetli Drazin tersi kendisidir.
$d = (1 - w)^{-1}e$ olsun. O zaman,

$$\begin{aligned}(e - w)d &= (e - w)(1 - w)^{-1}e \\ &= (1 - w)^{-1}(e - ew)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= (1-w)^{-1}e(e-w) \\
&= d(e-w), \\
(e-w)-(e-w)d &= e-w-(e-w)(1-w)^{-1}e \\
&= e-w-(1-w)^{-1}(e-we) \\
&= e-w-(1-w)^{-1}(1-w)e \\
&= -w \in N(R)
\end{aligned}
$$

ve

$$
\begin{aligned}
d(e-w)d &= (1-w)^{-1}e(e-w)(1-w)^{-1}e \\
&= (1-w)^{-1}(e-ew)(1-w)^{-1}e \\
&= (1-w)^{-1}(1-w)e(1-w)^{-1}e \\
&= (1-w)^{-1}e \\
&= d
\end{aligned}
$$

dir. Buradan, $e-w \in R$ kuvvetli Drazin terse sahiptir. $b = f$ ve $c = e-w$ olsun. O halde $a = b-c$ ve $bc = cb$ dir.

Karşıt olarak $a = b-c$ ve $bc = cb$ olacak şekilde $b, c \in R^{stD}$ olsun. O zaman $w := b - bx \in N(R)$, $bx = xb$ ve $x = xbx$ olacak şekilde bir $x \in R$ vardır. Bu yüzden, $w(w-2b+1) = (w-2b+1)w$ olduğundan

$$
\begin{aligned}
b-b^2 &= bx - b^2 + w \\
&= b^2x^2 - b^2 + w \\
&= (w-b)^2 - b^2 + w \\
&= (w-2b+1)w \in N(R)
\end{aligned}
$$

dir. Benzer şekilde $w := c - cy \in N(R)$, $cy = yc$ ve $ycy = y$ olacak biçimde bir $y \in R$ vardır. Buradan, $w(w-2c+1) = (w-2c+1)w$ olduğundan

$$
\begin{aligned}
c-c^2 &= cy - c^2 + w \\
&= c^2y^2 - c^2 + w \\
&= (w-c)^2 - c^2 + w \\
&= (w-2c+1)w \in N(R)
\end{aligned}
$$

dir. Lemma 2.1.15 gereğince, $u = b-e$, $v = c-f \in N(R)$ olacak şekilde $e \in \mathbb{Z}[b]$ ve $f \in \mathbb{Z}[c]$ vardır. Buradan, $a = (e+u)-(f+v) = e-f+(u-v)$ dir. $bc = cb$ olduğundan e, f, u, v birbiriyle yer değiştirir. $(e-f)^3 = e-f$ olduğundan

$$
\begin{aligned}
a-a^3 &= e-f+u-v-((e-f)+(u-v))^3\\
&= e-f+u-v-[(e-f)^3+3(e-f)^2(u-v)+3(e-f)(u-v)^2+(u-v)^3]\\
&= u-v-3(e-f)^2(u-v)-3(e-f)(u-v)^2-(u-v)^3
\end{aligned}
$$

dir. $u, v \in N(R)$ ve $uv = vu$ olduğundan $u - v \in N(R)$ dir. O halde $a - a^3 \in N(R)$ dir. Teorem 3.2.1 gereğince a Hirano terse sahiptir. □

Sonuç 3.2.5 A bir Banach cebiri ve $a \in A$ olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler denktir:

(1) a Hirano terse sahiptir.

(2) $a - p \in N(A)$ olacak şekilde bir $p^3 = p \in comm^2(a)$ mevcuttur.

(3) $a + e - f \in N(A)$ olacak şekilde $e, f \in comm^2(a)$ eşkare elemanları vardır.

(4) $a = b - c$ ve $bc = cb$ olacak şekilde $b, c \in A^{stD}$ vardır

(Chen ve Sheibani 2019a).

Lemma 3.2.6 R bir halka olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler denktir:

(1) R bir kuvvetli 2-üstel-temiz halkadır.

(2) $a \in R$ için $a = e - f + w$ olacak şekilde birbiriyle değişmeli $e, f \in R$ eşkare elemanları ve $w \in N(R)$ vardır

(Chen ve Sheibani 2017).

İspat: (1) $\Rightarrow$ (2) $a \in R$ olsun. R kuvvetli 2-üstel-temiz bir halka olduğundan $1 - a = e + f + w$ olacak şekilde $e, f \in R$ eşkare elemanları ve $w \in N(R)$ vardır. Burada e, f ve w birbiriyle değişmelidir. O zaman $a = (1 - e) - f + (-w)$ olup istenilen elde edilir.
(2) $\Rightarrow$ (1) $a \in R$ olsun. Bu durumda $1 - a \in R$ olup hipotez gereğince $1 - a = e - f + w$ olacak şekilde birbiriyle değişmeli $e, f \in R$ eşkare elemanları ve $w \in N(R)$ mevcuttur. O zaman $a = (1-e)+f+(-w)$ olup a kuvvetli 2-üstel-temiz elemandır. Dolayısıyla R bir kuvvetli 2-üstel-temiz halkadır. □

Lemma 3.2.7 R bir halka olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler denktir:

(1) R bir kuvvetli 2-üstel-temiz halkadır.

(2) Her $a \in R$ için $a - a^3 \in N(R)$ dir

(Chen ve Sheibani 2017).

İspat: (1) $\Rightarrow$ (2) $a \in R$ olsun. Lemma 3.2.6 gereğince $a = f - g + w$ olacak şekilde birbiriyle değişmeli $f, g \in R$ eşkare elemanları ve $w \in N(R)$ vardır. $e = f - g$ olsun. $fg = gf$ olduğundan $e^3 = (f-g)^3 = f^3 - 3f^2g + 3fg^2 - g^3 = f - g = e$ ve $ae = ea$ dır. Buradan $a - a^3 = (e+w) - (e+w)^3 \in N(R)$ dir.
(2) $\Rightarrow$ (1) Hipotezden $6 = 2^3 - 2 \in N(R)$ dir. Ayrıca, $(a^2 - a) - (a^2 - a)^3$, $a^3 - a \in N(R)$ ve buradan $3a^2 - 3a \in N(R)$ dir. O halde $(-2a^2)^2 - (-2a^2) = 4a^4 + 2a^2 = (6a^4 - 2a^4) + 2a^2 = 6a^4 + 2a(a - a^3) \in N(R)$ dir. Buna ek olarak, $(a+2a^2)^2 - (a+2a^2) = a^2 + 4a^3 + 4a^4 - a - 2a^2 = (3a^2 - 3a) + 4(a^3 - a) + 6a + 4a(a^3 - a) \in N(R)$ dir. Lemma 2.1.15 gereğince $(-2a^2) - f(a)$,$(a + 2a^2) - g(a) \in N(R)$, $f(a) = f^2(a)$ ve $g(a) = g^2(a)$ olacak biçimde $f(t), g(t) \in \mathbb{Z}[t]$ vardır. Bu yüzden,

$$a - (f(a) + g(a)) = ((a + 2a^2 - g(a))) + ((-2a^2) - f(a)) \in N(R)$$

dir. Ayrıca, $af(a) = f(a)a$ ve $ag(a) = g(a)a$ dır. Böylece ispat tamamlanır. $\square$

Önerme 3.2.8 R bir halka olmak üzere R nin kuvvetli 2-üstel-temiz halka olması için gerek ve yeter şart R nin her elemanının Hirano terse sahip olmasıdır (Chen ve Sheibani 2019a).

İspat: R kuvvetli 2-üstel-temiz halka ve $a \in R$ olsun. Lemma 3.2.7 gereğince $a - a^3 \in N(R)$ dir. Buradan, Teorem 3.2.1 gereğince a Hirano terse sahiptir.
Karşıt olarak R nin her elemanı Hirano terse sahip ve $a \in R$ olsun. Teorem 3.2.1 gereğince $a - a^3 \in N(R)$ dir. O halde Lemma 3.2.7 gereğince ispat tamamlanır. $\square$

Sonuç 3.2.9 A bir Banach cebiri olmak üzere A nın kuvvetli 2-üstel-temiz olması için gerek ve yeter şart her $a \in A$ nın $bc = cb$ ve $b, c \in A^{stD}$ olmak üzere $a = b - c$ şeklinde olmasıdır (Chen ve Sheibani 2019a).

İspat: Sonuç 3.2.5 ve Önerme 3.2.8 gereğince elde edilir. $\square$

3.3 Çarpımsal Özellikler

Bu kısımda Cline Formülü Hirano tersler için genelleştirilecektir.

Teorem 3.3.1 *R bir halka ve $a, b, c \in R$ olsun. Eğer $aba = aca$ ise o zaman ac nin Hirano terse sahip olması için gerek ve yeter şart ba nın Hirano terse sahip olmasıdır* (Chen ve Sheibani 2019a).

İspat: ac Hirano terse sahip olsun. $n \in \mathbb{N}$ üzerine tümevarım yardımıyla,

$$(ba - (ba)^3)^{n+1} = b(ac - (ac)^3)^n(a - ababa)$$

olduğu ispatlanmalıdır.
$n = 1$ için,

$$\begin{aligned} ((ba - (ba)^3))^2 &= (ba - bababa)(ba - bababa) \\ &= b(a - ababa)ba(1 - baba) \\ &= b(aba - abababa)(1 - baba) \\ &= b(ac - acacac)(a - ababa) \\ &= b(ac - (ac)^3)(a - ababa) \end{aligned}$$

dır. $n \leq k$ $(k \geq 2)$ için doğru olsun. O zaman,

$$\begin{aligned} (ba - (ba)^3)^{k+1} &= ((ba - (ba)^3)^k(ba - (ba)^3) \\ &= b(ac - (ac)^3)^{k-1}(a - ababa)(ba - bababa) \\ &= b(ac - (ac)^3)k - 1(aca - acacaca)(1 - baba) \\ &= b(ac - (ac)^3)^k(a - ababa) \end{aligned}$$

dır. ac Hirano terse sahip olduğundan Teorem 3.2.1 gereğince $m \in \mathbb{N}$ için

$$(ac - (ac)^3)^m = 0$$

dır. O halde $ba - (ba)^3 \in N(R)$ dir. Teorem 3.2.1 gereğince ba Hirano terse sahiptir. Karşıt olarak ba Hirano terse sahip olsun. Benzer şekilde $n \in \mathbb{N}$ üzerine tümevarım uygulanarak ispat tamamlanır. □

Sonuç 3.3.2 *R bir halka ve $a, b \in R$ olsun. Eğer ab Hirano terse sahip ise o zaman ba Hirano terse sahiptir* (Chen ve Sheibani 2019a).

İspat: $aba = aba$ olduğundan Teorem 3.3.1 gereğince ispat tamamlanır. □

Teorem 3.3.3 R bir halka ve $a, b, c \in R$ olsun. Eğer $aba = aca$ ise o zaman her k pozitif tamsayısı için $(ac)^k$ nın Hirano terse sahip olması için gerek ve yeter şart $(ba)^k$ nın Hirano terse sahip olmasıdır (Chen ve Sheibani 2019a).

İspat: $(ac)^k$ Hirano terse sahip ve $k = 1$ olsun. O zaman Teorem 3.3.1 gereğince ba Hirano terse sahiptir. $k \geq 2$ olsun. $(ab)^k = (ac(ac)^{k-2})(ab)$ dir. $(ab)(ac(ac)^{k-2}) = (ac)^k$ Hirano terse sahip olduğundan Sonuç 3.3.2 gereğince $(ab)^k$ Hirano terse sahiptir. $(ab)^k = a(b(ab)^{k-1})$ olduğundan Sonuç 3.3.2 gereğince, $(b(ab)^{k-1})a$ Hirano terse sahip ve buradan $(ba)^k$ Hirano terse sahiptir.
Karşıt olarak $(ba)^k$ Hirano terse sahip ve $k = 1$ olsun. Teorem 3.3.1 gereğince ac Hirano terse sahiptir. $k \geq 2$ olsun. $(ba)^k = (b(ab)^{k-1})a$ olduğundan Sonuç 3.3.2 gereğince $a(b(ab)^{k-1}) = (ab)^k$ Hirano terse sahiptir. $(ab)^k = (ac(ac)^{k-2})(ab)$ dir. Ayrıca $(ab)(ac(ac)^{k-2}) = (ac)^k$ ve buradan $(ac)^k$ Hirano terse sahiptir. □

Teorem 3.3.4 R bir halka ve $a, b \in R$ olsun. Eğer a, b Hirano terse sahip ve $ab = ba$ ise o zaman ab Hirano terse sahiptir (Chen ve Sheibani 2019a).

İspat: a ve b Hirano terse sahip olsun. O halde Teorem 3.2.1 gereğince, $a - a^3$, $b - b^3 \in N(R)$ dir. $ab = ba$ olduğundan,

$$\begin{aligned} ab - (ab)^3 &= (a - a^3)(b - b^3) + ab^3 + a^3 b - a^3 b^3 - a^3 b^3 \\ &= (a - a^3)(b - b^3) + a^3(b - b^3) + b^3(a - a^3) \in N(R) \end{aligned}$$

dir. Teorem 3.2.1 gereğince ab Hirano terse sahiptir. □

Sonuç 3.3.5 R bir halka olsun. Eğer $a \in R$ Hirano terse sahip ise o zaman her $n \in \mathbb{N}$ için a^n Hirano terse sahiptir (Chen ve Sheibani 2019a).

İspat: Tümevarım ve Teorem 3.3.4 gereğince ispat tamamlanır. □

Örnek 3.3.6 gereğince Sonuç 3.3.5 in karşıtı doğru değildir.

Örnek 3.3.6 $\bar{3} \in \mathbb{Z}_5$ için $\bar{3} - \bar{3}^{\bar{3}} = \bar{4} \in \mathbb{Z}_5$ üstel sıfır değildir. Dolayısıyla Teorem 3.2.1 gereğince $\bar{3}$ Hirano terse sahip değildir, fakat $\bar{4} - \bar{4}^{\bar{3}} \in \mathbb{Z}_5$ üstel sıfır olduğundan $\bar{3}^{\bar{2}} = \bar{4} \in \mathbb{Z}_5$ Hirano terse sahiptir (Chen ve Sheibani 2019a).

Lemma 3.3.7 R bir halka olsun. Eğer ab Drazin terse sahip ise o zaman ba Drazin terse sahiptir ve $(ba)^D = b((ab)^D)^2a$ dır (Cline 1965).

Lemma 3.3.8 R bir halka olsun. Eğer ab kuvvetli Drazin terse sahip ise o zaman ba kuvvetli Drazin terse sahiptir (Wang 2017).

İspat: $\alpha = ab$ ve $\beta = ba$ olsun. O zaman $a\beta = \alpha a$ ve $\beta b = b\alpha$ dır. $\alpha(1-\alpha^{'}) \in N(R)$, $\alpha\alpha^{'} = \alpha^{'}\alpha$ ve $(\alpha^{'})^2\alpha = \alpha^{'}$ olacak şekilde bir $\alpha^{'} \in R$ olsun. Açık olarak, α nın Drazin tersi $\alpha^{'}$ dür. $x = b(\alpha^{'})^2a$ olsun. Lemma 3.3.7 gereğince β nın Drazin tersi x dir. O halde $\beta x = x\beta$, $x^2\beta = x$ dir. Ayrıca;

$$\begin{aligned}\beta - \beta x &= \beta - (\beta b)(\alpha^{'})^2a \\ &= \beta - b\alpha(\alpha^{'})^2a \\ &= \beta - (1-\alpha^{'})a\end{aligned}$$

dir. Buradan,

$$[b(1-\alpha^{'})a]^{n+1} = b(1-\alpha^{'})(\alpha - \alpha\alpha^{'})^n a = 0$$

dır. Böylece $\beta - \beta x \in N(R)$ dir. O halde β bir kuvvetli Drazin terse sahiptir ve $\beta^{'} = b(\alpha^{'})^2a$ dır. □

3.4 Hirano Terslerin Bazı Özellikleri

Bu kısımda Jacobson Lemma'sı Hirano tersler için genelleştirilecektir.

Teorem 3.4.1 R bir halka ve $a, b, c \in R$ olsun. Eğer $aba = aca$ ise o zaman $1 + ac$ nin Hirano terse sahip olması için gerek ve yeter şart $1 + ba$ nın Hirano terse sahip olmasıdır (Chen ve Sheibani 2019a).

İspat: $1 + ac$ Hirano terse sahip olsun. $n \in \mathbb{N}$ üzerine tümevarım uygulanarak,
$((1+ba) - (1+ba)^3)^{n+1} = b((1+ac) - (1+ac)^3)^n(-2a - 3aba - ababa)$
olduğu gösterilmelidir.
$n = 1$ için,

$$\begin{aligned}((1+ba) - (1+ba)^3)^2 &= (-2ba - 3baba - bababa)ba(-2 - 3ba - baba) \\ &= b(-2aba - 3ababa - abababa)(-2 - 3ba - baba) \\ &= b(-2ac - 3acac - acacac)(-2a - 3aba - ababa)\end{aligned}$$

$$= b((1+ac)-(1+ac)^3)(-2a-3aba-ababa)$$

dır.

$k \geq 2$ olsun ve $n \leq k$ için iddianın doğru olduğu kabul edilsin. O zaman,

$$\begin{aligned}((1+ba)-(1+ba)^3)^{k+1} &= ((1+ba)-(1+ba)^3)^k((1+ba)-(1+ba)^3) \\ &= b((1+ac)-(1+ac)^3)^k(-2a-3aba-ababa)\end{aligned}$$

dır. $1+ac$ Hirano terse sahip olduğundan Teorem 3.2.1 gereğince $(1+ac)-(1+ac)^3 \in N(R)$ dir. Yukarıdaki eşitlikten, $(1+ba)-(1+ba)^3 \in N(R)$ dir. Teorem 3.2.1 gereğince, $1+ba$ Hirano terse sahiptir.

Karşıt olarak $1+ba$ Hirano terse sahip olsun. Benzer şekilde $n=1$ için,

$$\begin{aligned}((1+ac)-(1+ac)^3)^2 &= (-2ac-3acac-acacac)ac(-2-3ac-acac) \\ &= c(-2aca-3acaca-acacaca)(-2-3ac-acac) \\ &= c(-2ab-3abab-ababab)(-2a-3aca-acaca) \\ &= c((1+ba)-(1-ba)^3)(-2a-3aca-acaca)\end{aligned}$$

dır. $k \geq 2$ olsun ve $n \leq k$ için iddianın doğruluğu kabul edilsin. O zaman,

$$\begin{aligned}((1+ac)-(1+ac)^3)^{k+1} &= ((1+ac)-(1+ac)^3)^k((1+ac)-(1+ac)^3) \\ &= c((1+ba)-(1+ba)^3)^k(-2a-3aba-ababa)\end{aligned}$$

dır. $1+ba$ Hirano terse sahip olduğundan Teorem 3.2.1 gereğince $(1+ba)-(1+ba)^3 \in N(R)$ dir. Yukarıdaki eşitlikten $(1+ac)-(1+ac)^3 \in N(R)$ dir. Teorem 3.2.1 gereğince $1+ac$ Hirano terse sahiptir. $\square$

Sonuç 3.4.2 R bir halka ve $a, b \in R$ olsun. O zaman $1+ab$ nin Hirano terse sahip olması için gerek ve yeter şart $1+ba$ nın Hirano terse sahip olmasıdır (Chen ve Sheibani 2019a).

İspat: $aba = aba$ eşitliği ve Teorem 3.4.1 gereğince ispat tamamlanır. $\square$

Önerme 3.4.3 R bir halka ve $a, b \in R$ olsun. Eğer a, b Hirano terse sahip ve $ab = ba = 0$ ise o zaman $a+b$ Hirano terse sahiptir (Chen ve Sheibani 2019a).

İspat: a ve b Hirano terse sahip olsun. Açık olarak, $ab^D = ab(b^D)^2 = 0$ ve $ba^D = ba(a^D)^2 = 0$ dır. Benzer şekilde $a^Db = (a^D)^2ab = 0$ ve $b^Da = (b^D)^2ba = 0$ dır. Buradan a, a^D, b, b^D birbiriyle yer değiştirir. Böylece,

$$(a^2-aa^D)(b^2-bb^D) = (b^2-bb^D)(a^2-aa^D)$$

dir. Ayrıca,

$$\begin{aligned}(a+b)(a^D+b^D)^2 &= (a+b)(a^D+b^D)(a^D+b^D)\\ &= (aa^D+ab^D+ba^D+bb^D)(a^D+b^D)\\ &= (aa^D+bb^D)(a^D+b^D)\\ &= a(a^D)^2+aa^Db^D+bb^Da^D+b(b^D)^2\\ &= a^D+b^D\end{aligned}$$

ve

$$(a+b)^2-(a+b)(a^D+b^D)=(a^2-aa^D)+(b^2-bb^D)\in N(R)$$

dir. O halde $a+b$ nin Hirano tersi a^D+b^D dir. Böylece $a+b$ Hirano terse sahiptir. □

Teorem 3.4.4 R bir halka ve $a,b\in R$ olsun. Eğer ab kuvvetli Drazin terse sahip ve $a^2=b^2=0$ ise o zaman $a+b$ Hirano terse sahiptir (Chen ve Sheibani 2019a).

İspat: ab kuvvetli Drazin terse sahip ve $a^2=b^2=0$ olsun. O zaman Lemma 3.3.8 gereğince ba kuvvetli Drazin terse sahiptir. $x=a(ba)^D+b(ab)(ab)^D$ olsun. $(a+b)x=x(a+b)$ ve $(a+b)x^2=x$ dir. Ayrıca,

$$(ab-(ab)(ab)^D)(ba-(ba)(ba)^D)=(ba-(ba)(ba)^D)(ab-(ab)(ab)^D)=0$$

olduğundan,

$$\begin{aligned}(a+b)^2-(a+b)x &= ab+ba-(ab)(ab)^D-(ba)(ba)^D\\ &= (ab-(ab)(ab)^D)+(ba-(ba)(ba)^D)\in N(R)\end{aligned}$$

dir. O halde $a+b$ Hirano terse sahiptir. □

R bir halka ve $a,b\in R$ olmak üzere Örnek 3.4.5 gereğince ab Hirano terse sahip iken $a+b$ Hirano terse sahip olmak zorunda değildir.

Örnek 3.4.5 $a=\begin{pmatrix}\bar{0}&\bar{1}\\ \bar{0}&\bar{0}\end{pmatrix}$, $b=\begin{pmatrix}\bar{0}&\bar{0}\\ \bar{2}&\bar{0}\end{pmatrix}\in M_2(\mathbb{Z}_3)$ olsun. $ab=\begin{pmatrix}\bar{2}&\bar{0}\\ \bar{0}&\bar{0}\end{pmatrix}$ için $(ab)^H=\begin{pmatrix}\bar{2}&\bar{0}\\ \bar{0}&\bar{0}\end{pmatrix}$ olup ab Hirano terse sahiptir. Fakat, $a+b=\begin{pmatrix}\bar{0}&\bar{1}\\ \bar{2}&\bar{0}\end{pmatrix}$ için

$(a+b)-(a+b)^3 = \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{1} \\ \bar{2} & \bar{0} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{2} \\ \bar{1} & \bar{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{2} \\ \bar{1} & \bar{0} \end{pmatrix}$ dir. $\begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{2} \\ \bar{1} & \bar{0} \end{pmatrix}^4 = \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{1} \end{pmatrix}$ olup $(a+b)-(a+b)^3 \notin N(R)$ dir. Teorem 3.2.1 gereğince $a+b$ Hirano terse sahip değildir (Chen ve Sheibani 2019a).

4. HALKALARDA ELEMANLARIN GENELLEŞTİRİLMİŞ HIRANO TERSLERİ

4.1 Genelleştirilmiş Hirano Tersler İle Genelleştirilmiş Drazin Tersler Arasındaki İlişkiler

Bu kısımda halkalarda bir elemanın genelleştirilmiş Hirano tersi tanımlanacaktır. Genelleştirilmiş Hirano tersler ile genelleştirilmiş Drazin tersler arasındaki ilişki incelenecektir.

Tanım 4.1.1 R bir halka ve $a \in R$ olsun. Eğer $b = bab$, $b \in comm^2(a)$ ve $a^2 - ab \in R^{qnil}$ olacak şekilde bir $b \in R$ varsa a *genelleştirilmiş Hirano terse* (*generalized Hirano inverse*) sahiptir ve b ye a nın genelleştirilmiş Hirano tersi denir. $b = a^{gH}$ ile gösterilir. (Chen ve Sheibani 2019b).

Lemma 4.1.2 R bir halka ve $a \in R^{qnil}$ olsun. Eğer $e^2 = e \in comm(a)$ ise o zaman $ae \in R^{qnil}$ dir (Chen ve Sheibani 2019b).

İspat: $e^2 = e \in comm(a)$ ve $x \in comm(ae)$ olsun. O zaman $xae = aex$ ve buradan $(exe)a = ex(ae) = eaex = aeex = aex = xaee = a(exe)$ olup $exe \in comm(a)$ dır. $a \in R^{qnil}$ ve $exe \in comm(a)$ olduğundan $1 - a(exe) \in U(R)$ dir ve buradan $1 - (ae)x \in U(R)$ olup ispat tamamlanır. □

Teorem 4.1.3 R bir halka ve $a \in R$ olsun. Eğer a genelleştirilmiş Hirano terse sahip ise o zaman a genelleştirilmiş Drazin terse sahiptir (Chen ve Sheibani 2019b).

İspat: a genelleştirilmiş Hirano terse sahip olsun. O zaman $a^2 - ax \in R^{qnil}$, $x \in comm^2(a)$ ve $xax = x$ olacak şekilde bir $x \in R$ vardır. $a \in comm(a)$ olduğundan $ax = xa$ dır. Buradan, $a^2 - a^2x^2 = a^2 - a(xax) = a^2 - ax \in R^{qnil}$ dir. Ayrıca $1 - a^2x^2 = 1 - ax \in R$ eşkare ve $1 - ax \in comm(a^2 - a^2x^2)$ olduğundan Lemma 4.1.2 gereğince,

$$a^2(1 - a^2x^2) = (a^2 - a^2x^2)(1 - a^2x^2) \in R^{qnil}$$

ve

$$a(a - a^2x) = a(a - a^2(ax^2)) = a^2(1 - a^2x^2) \in R^{qnil}$$

dir. Lemma 4.1.2 gereğince, $(a-a^2x)^2=a(a-a^2x)(1-ax) \in R^{qnil}$ dir. $y \in comm(a-a^2x)$ olsun. O zaman $y^2 \in comm(a-a^2x)^2$ dir. Bu yüzden, $1-(a-a^2x)^2y^2 \in U(R)$ dir. O halde $(1-(a-a^2x)y)(1+(a-a^2x)y) \in U(R)$ dir. Buradan $1-(a-a^2x)y \in U(R)$ ve $a-a^2x \in R^{qnil}$ dir. $ax = xa$ ve $xax = x$ olduğundan a genelleştirilmiş Drazin terse sahiptir. $\square$

Lemma 4.1.4 *R bir halka ve $a \in R$ yarı kutuplu bir eleman olsun. O zaman a için bir tek spektral eşkare eleman vardır ve bu eleman a^π ile gösterilir* (Koliha ve Patricio 2002).

İspat: a yarı kutuplu bir eleman, a nın spektral eşkare elamanları p ile q ve $b = (1-p)(a+p)^{-1}$ olsun. O zaman

$$\begin{aligned} 1-(1-p)q &= 1-(1-p)(a+p)(a+p)^{-1}q \\ &= 1-(1-p)a(a+p)^{-1}q \\ &= 1-(1-p)(a+p)^{-1}aq = 1-b(aq) \end{aligned}$$

olup $p \in comm^2(a)$ olduğundan $b \in comm(aq)$ ve $aq \in R^{qnil}$ olduğundan da $1-b(aq) \in U(R)$ dir. O zaman

$$1-(1-p)q = 1-(1-p)^2q^2 = (1-(1-p)q)(1+(1-p)q)$$

dır. $1-(1-p)q$ tersinir olduğundan $(1-p)q = 0$ ve buradan $q = pq$ elde edilir. Benzer şekilde, $c = (1-q)(a+q)^{-1}$ olsun.

$$\begin{aligned} 1-(1-q)p &= 1-(1-q)(a+q)(a+q)^{-1}p \\ &= 1-(1-q)a(a+q)^{-1}p \\ &= 1-(1-q)(a+q)^{-1}ap = 1-c(ap) \end{aligned}$$

dır. $q \in comm^2(a)$ olduğundan $c \in comm(ap)$ ve $ap \in R^{qnil}$ olmasından dolayı $1-c(ap) \in U(R)$ dir. O zaman,

$$1-(1-q)p = 1-(1-q)^2p^2 = (1-(1-q)p)(1+(1-q)p)$$

ve $1-(1-q)p$ tersinir olduğundan $(1-q)p = 0$ ve buradan $p = qp$ dir. O halde $p = qp = pq$ bulunur. O zaman $p = q$ olup a için bir tek spektral eşkare eleman vardır. $\square$

Lemma 4.1.5 R bir halka ve $a \in R$ olsun. a nın genelleştirilmiş Drazin terse sahip olması için gerek ve yeter şart a nın yarı kutuplu olmasıdır. Bu durumda a,

$$b = (a + a^{\pi})^{-1}(1 - a^{\pi}) = (1 - a^{\pi})(a + a^{\pi})^{-1}$$

şeklinde bir tek genelleştirilmiş Drazin terse sahiptir (Koliha ve Patricio 2002).

İspat: a yarı kutuplu bir eleman, a nın spektral eşkare elemanı p ve

$$b = (a + p)^{-1}(1 - p)$$

olsun. O zaman $b \in comm^2(a)$ ve $a \in comm(a)$ olduğundan $bab = ab^2$ dir. Ayrıca,

$$\begin{aligned} ab^2 &= a(1 - p)(a + p)^{-2} \\ &= (a + p)(1 - p)(a + p)^{-2} \\ &= (1 - p)(a + p)^{-1} \\ &= b \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} a^2b - a &= a^2(1 - p)(a + p)^{-1} - a \\ &= a(a + p)(a + p)^{-1}(1 - p) - a \\ &= a - ap - a \\ &= -ap \in R^{qnil} \end{aligned}$$

dir.

Karşıt olarak a genelleştirilmiş Drazin terse sahip olsun. a nın genelleştirilmiş Drazin tersi b ve $p = 1 - ab$ olsun. O zaman $p \in comm^2(a)$ ve $(1 - ab)^2 = (1 - ab)(1 - ab) = 1 - ab - ab + abab = 1 - ab - ab + ab = 1 - ab$ dir ve buradan $p^2 = p$ elde edilir. Son olarak $a + p \in U(R)$ olduğu gösterilmelidir. $ap = a - a^2b \in R^{qnil}$ ve

$$\begin{aligned} bp &= b(1 - ab) \\ &= b - bab \\ &= b - b \\ &= 0 \end{aligned}$$

olduğundan

$$\begin{aligned} (a + p)(b + p) &= ab + ap + bp + p \\ &= 1 - p + ap + p \\ &= 1 + ap \in U(R) \end{aligned}$$

dir. Böylece $a + p \in U(R)$ elde edilir. Ayrıca $(a + p)b = ab + pb = 1 - p + pb = 1 - p$

olduğundan $b = (a+p)^{-1}(1-p)$ dir. Lemma 4.1.4 gereğince a nın spektral eşkare elemanı tek olduğundan, a nın genelleştirilmiş Drazin tersi tektir. $\square$

Sonuç 4.1.6 R bir halka ve $a \in R$ olsun. Eğer a nın genelleştirilmiş Hirano tersi mevcut ise, a nın genelleştirilmiş Hirano tersi, a nın genelleştirilmiş Drazin tersidir (Chen ve Sheibani 2019b).

İspat: a genelleştirilmiş Hirano terse sahip olsun. Teorem 4.1.3 gereğince a genelleştirilmiş Drazin terse sahiptir ve dolayısıyla ispat tamamlanır. $\square$

Lemma 4.1.7 R bir halka ve $a \in R$ olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler denktir:

(1) a genelleştirilmiş Hirano terse sahiptir.

(2) $b = ba^2b$, $b \in comm^2(a)$, $a^2 - a^2b \in R^{qnil}$ olacak şekilde bir $b \in R$ vardır

(Chen ve Sheibani 2019b).

İspat: (1) $\Rightarrow$ (2) Hipotezden, $bab = b$, $b \in comm^2(a)$, $a^2 - ab \in R^{qnil}$ olacak şekilde bir $b \in R$ vardır. $a \in comm(a)$ olduğundan $ab = ba$ dır. Bu yüzden,

$$a^2 - a^2b = a^2 - a(bab) = a^2 - ab \in R^{qnil},\ b^2a^2b^2 = (bab)^2 = b^2$$

dir. $xa = ax$ olsun. O zaman $x \in comm(a)$ olup $bx = xb$ dir. Bu yüzden $b^2x = xb^2$ ve buradan $b^2 \in comm^2(a)$ dır.

(2) $\Rightarrow$ (1) Hipotezden, $ba^2b = b, b \in comm^2(a), a^2 - a^2b \in R^{qnil}$ olacak şekilde bir $b \in R$ vardır. Buradan, $a^2 - a(ab) = a^2 - a^2b \in R^{qnil}$ ve $(ab)a(ab) = a(ba^2b) = ab$ dir. $xa = ax$ olsun. O halde $xb = bx$ ve buradan $(ab)x = a(bx) = a(xb) = (ax)b = x(ab)$ dir. Bu yüzden, $ab \in comm^2(a)$ dır. Dolayısıyla a genelleştirilmiş Hirano terse sahiptir. $\square$

Teorem 4.1.8 R bir halka ve $a \in R$ olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler denktir:

(1) a genelleştirilmiş Hirano terse sahiptir.

(2) $a^2 - p \in R^{qnil}$ olacak şekilde bir $p^2 = p \in comm^2(a)$ vardır

(Chen ve Sheibani 2019b).

İspat: (1) $\Rightarrow$ (2) a genelleştirilmiş Hirano terse sahip olsun. Lemma 4.1.7 gereğince, $b = ba^2b, b \in comm^2(a), a - a^2b \in R^{qnil}$ olacak şekilde bir $b \in R$ vardır. $p = a^2b$ olsun. O zaman,

$$p^2 = (a^2b)(a^2b) = (aba)(aba) = (ab)a^2(ba) = a(ba^2b)a = aba = a^2b = p$$

olup $p^2 = p$ dir. $ax = xa$ olsun. O halde, $bx = xb$ ve buradan $xp = x(a^2b) = (a^2b)x$ olup $p \in comm^2(a)$ dır. Ayrıca, $a^2 - p \in R^{qnil}$ dir.

(2) $\Rightarrow$ (1) $a^2 - p \in R^{qnil}$ olacak şekilde bir $p^2 = p \in comm^2(a)$ olsun. $a^2 - p \in R^{qnil}$ olduğundan $a^2 + 1 - p \in U(R)$ dir. $e = 1 - p$, $b = (a^2 + 1 - p)^{-1}(1 - e)$ ve $ax = xa$ olsun. O zaman $px = xp$ ve $xa^2 = a^2x$ olup buradan $x(a^2 + 1 - p) = (a^2 + 1 - p)x$ dir. Dolayısıyla $x(ab) = (ab)x$ elde edilir ve buradan $ab \in comm^2(a)$ dır. Ayrıca,

$$\begin{aligned} a^2 - a(ab) &= a^2 - a^2(a^2 + 1 - p)^{-1}(1 - e) \\ &= a^2 - (a^2 + e)(a^2 + 1 - p)^{-1}(1 - e) \\ &= a^2 - p \in R^{qnil} \end{aligned}$$

dir. O halde $a^2 + e \in U(R)$ ve buradan,

$$\begin{aligned} (ab)a(ab) &= a^3(a^2 + 1 - p)^{-2}(1 - e) \\ &= a(a^2 + e)(a^2 + 1 - p)^{-2}(1 - e) \\ &= a(a^2 + e)^{-1}(1 - e) \\ &= ab \end{aligned}$$

dir. O halde a genelleştirilmiş Hirano terse sahiptir ve a nın genelleştirilmiş Hirano tersi ab dir. □

Sonuç 4.1.9 R bir halka ve $a \in R$ olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler denktir:

(1) a genelleştirilmiş Hirano terse sahiptir.

(2) $ab = (ab)^2$, $b \in comm^2(a)$, $a^2 - ab \in R^{qnil}$ olacak şekilde bir $b \in R$ vardır

(Chen ve Sheibani 2019b).

İspat: (1) $\Rightarrow$ (2) a genelleştirilmiş Hirano terse sahip olsun. O halde $a^2 - ab \in R^{qnil}$, $b \in comm^2(a)$ ve $bab = b$ olacak şekilde bir $b \in R$ vardır. $bab = b$ olduğundan $(ab)^2 = abab = ab$ dir.

(2) $\Rightarrow$ (1) $ab = (ab)^2$, $b \in comm^2(a)$, $a^2 - ab \in R^{qnil}$ olacak şekilde bir $b \in R$ ve $p = ab$ olsun. Eğer $xa = ax$ ise o zaman $bx = xb$ ve buradan $px = (ab)x = axb = x(ab) = xp$ dir. O halde $p \in comm^2(a)$ dır. $a^2 - p \in R^{qnil}$ olduğundan Teorem 4.1.8 gereğince ispat tamamlanır. $\square$

Sonuç 4.1.10 *A bir Banach cebiri ve $a \in A$ olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler denktir:*

(1) *a genelleştirilmiş Hirano terse sahiptir.*

(2) *$pa = ap$, $a^2 - p \in A^{qnil}$ olacak şekilde bir tek $p \in A$ eşkare elemanı vardır*

(Chen ve Sheibani 2019b).

İspat: (1) $\Rightarrow$ (2) a genelleştirilmiş Hirano terse sahip olsun. Teorem 4.1.8 gereğince $p \in comm^2(a)$, $a^2 - p \in A^{qnil}$ olacak şekilde bir $p \in A$ eşkare elemanı vardır. $qa = aq$, $a^2 - q \in A$ olacak şekilde bir q eşkare elemanı mevcut olsun. $e = 1 - p$ ve $f = 1 - q$ olsun. O zaman $a^2 + e = 1 + (a^2 - p) \in U(A)$ dır. Benzer şekilde $a^2 + f = 1 + (a^2 - q) \in U(A)$, $ef = fe$ ve $a^2 - p$, $a^2 - q \in A^{qnil}$ olduğundan $a^2e = a^2(1-p) = a^2 - a^2p = (a^2-p)(1-p) \in A^{qnil}$ ve $a^2f = a^2(1-q) = a^2 - a^2q = (a^2 - q)(1 - q) \in A^{qnil}$ dir. Ayrıca $c = (1 - e)(a^2 + e)^{-1}$ olmak üzere

$$\begin{aligned} 1 - (1-e)f &= 1 - (1-e)(a^2+e)^{-1}(a^2+e)f \\ &= 1 - (1-e)(a^2+e)^{-1}a^2f \\ &= 1 - ca^2f \end{aligned}$$

dir. $p \in comm^2(a)$ olduğundan $c \in comm(a^2f)$ dir. $a^2f \in A^{qnil}$ olduğundan $1 - ca^2f \in U(A)$ dır. Bu yüzden, $1-(1-e)f = 1-(1-e)^2f^2 = (1-(1-e)f)(1+(1-e)f)$ ve buradan $1 + (1 - e)f = 1$ dir. Buradan $f = ef$ dir. Benzer olarak $e = fe$ dir. Dolayısıyla $e = ef = fe = f$ ve böylece $p = 1 - e = 1 - f = q$ dur.
(2) $\Rightarrow$ (1) $pa = ap$, $a^2 - p \in A^{qnil}$ olacak şekilde bir tek $p \in A$ eşkare elemanı mevcut olsun. $a^2 - p \in A^{qnil}$ olduğundan $a^2 + 1 - p \in U(A)$ dır. $e = 1 - p$ ve $b = (a^2+1-p)^{-1}(1-e)$ olsun. Teorem 4.1.8 gereğince $b = bab$, $ba = ab$, $a^2 - ab \in A^{qnil}$ olacak şekilde bir $b \in A$ vardır. Teorem 4.1.3 gereğince $a - a^2b \in A^{qnil}$ dir. O halde $b = a^{gD}$ olup $b \in comm^2(a)$ dır. $\square$

4.2 Projektif-Serbest Halkalar Üzerindeki Matrisler

Bu kısımda projektif-serbest halkalar üzerinde 2×2 tipindeki bir matrisin ne zaman genelleştirilmiş Hirano terse sahip olduğu belirlenecektir.

Lemma 4.2.1 R değişmeli bir halka olsun. Bu durumda

$$M_2(R)^{qnil} = \{A \in M_2(R) \mid A^2 \in M_2(J(R))\}$$

dir (Wang ve Chen 2012).

Teorem 4.2.2 R projektif-serbest bir halka ve $A \in M_2(R)$ olsun. Eğer A genelleştirilmiş Hirano terse sahip ise o zaman

(1) $A^2 \in M_2(J(R))$ veya

(2) $(I_2 - A^2)^2 \in M_2(J(R))$ veya

(3) $\chi(A^2)$, biri $J(R)$ de diğeri $1 + J(R)$ de olan köklere sahiptir

(Chen ve Sheibani 2019b).

İspat: Teorem 4.1.8 gereğince, $A^2 = E + W$ olacak şekilde $E^2 = E \in comm^2(A)$ ve $W \in M_2(R)^{qnil}$ vardır. Lemma 2.1.17 göz önünde tutulursa $UEU^{-1} = 0$, I_2 veya $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ olacak biçimde bir $U \in GL_2(R)$ vardır. O zaman $A^2 \in M_2(R)^{qnil}$, $I_2 - A^2 \in M_2(R)^{qnil}$ veya $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ dır.

1.Durum: $A^2 \in M_2(R)^{qnil}$ olsun. O zaman $A \in M_2(R)^{qnil}$ dir. Dolayısıyla $A^2 \in M_2(J(R))$ dir.

2.Durum: $I_2 - A^2 \in M_2(R)^{qnil}$ olsun. O zaman $(I_2 - A^2)^2 \in M_2(J(R))$ dir.

3.Durum: $UEU^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ olacak biçimde bir $U \in GL_2(R)$ olsun. Buradan, $UA^2U^{-1} = UEU^{-1} + UWU^{-1}$ dir. $(UWU^{-1})^2 = UW^2U^{-1}$ ve $\lambda^2, \mu^2 \in J(R)$ olmak üzere $UW^2U^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda^2 & 0 \\ 0 & \mu^2 \end{pmatrix} \in M_2(J(R))$ dir. $J(R)$ yarı asal olduğundan $\lambda, \mu \in J(R)$ dir. O halde $UWU^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$ olacak şekilde $\lambda, \mu \in J(R)$ vardır.

Buradan, $UA^2U^{-1} = \begin{pmatrix} 1+\lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$ dir. Dolayısıyla $\chi(A^2)$, $J(R)$ de μ köküne ve $1 + J(R)$ de $1 + \lambda$ köküne sahiptir. $\square$

Sonuç 4.2.3 $A \in M_2(\mathbb{Z})$ olsun. O zaman A nın genelleştirilmiş Hirano terse sahip olması için gerek ve yeter şart

(1) $A^2 = 0$ veya

(2) $(I_2 - A^2)^2 = 0$ veya

(3) $A^2 = A^4$

olmasıdır (Chen ve Sheibani 2019b).

İspat: A genelleştirilmiş Hirano terse sahip olsun. $J(\mathbb{Z}) = 0$ olduğundan Teorem 4.2.2 gereğince,

1.Durum: $A^2 = 0$ dır.

2.Durum: $(I_2 - A^2)^2 = 0$ dır.

3.Durum: $\chi(A^2)$, 0 ve 1 köklerine sahiptir. Cayley Hamilton Teoremi gereğince, $A^2(A^2 - I_2) = 0$ ve buradan, $A^4 = A^2$ dir.

Karşıt olarak,

1.Durum: $A^2 = 0$ olsun. Bu durumda $A^2AA^2 = A^2$, $A^2 \in comm^2(A)$ ve $A^2 - AA^2 = 0 \in M_2(\mathbb{Z})^{qnil}$ olup A nın genelleştirilmiş Hirano tersi A^2 dir.

2.Durum: $(I_2 - A^2)^2 = 0$ olsun. O halde $I_2 - A^2 \in N(M_2(\mathbb{Z}))$ dir. Ayrıca $N(M_2(\mathbb{Z})) \subset M_2(\mathbb{Z})^{qnil}$ olduğundan $I_2 - A^2 \in M_2(\mathbb{Z})^{qnil}$ dir. Teorem 4.1.8 gereğince A genelleştirilmiş Hirano terse sahiptir.

3.Durum: $A^2 = A^4$ olsun. Bu durumda $A^2 - A^4 = 0$ olup buradan $A^2 - AA^3 = 0 \in M_2(\mathbb{Z})^{qnil}$ dir. Ayrıca $A^3AA^3 = A^4A^3 = A^2A^3 = AA^4 = AA^2 = A^3$ ve $A^3 \in comm^2(A)$ olduğundan A nın genelleştirilmiş Hirano tersi A^3 tür. $\square$

Örnek 4.2.4 $\mathbb{Z}_{(2)} = \{\frac{m}{n} \mid m, n \in \mathbb{Z}, (m, n) = 1, 2 \nmid n\}$ ve $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ olsun. O zaman $A \in M_2(\mathbb{Z}_{(2)})$ genelleştirilmiş Hirano terse sahip değildir (Chen ve Sheibani 2019b).

İspat: $J(\mathbb{Z}_{(2)}) = 2\mathbb{Z}_{(2)}$ olup $\mathbb{Z}_{(2)}$ değişmeli yerel halkadır. $A^2 = \begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{pmatrix}$ olduğundan A^2, $(I_2 - A^2)^2 \notin M_2(J(\mathbb{Z}_{(2)}))$ dir. Ayrıca $iz(A^2) = 29$ ve $det(A^2) = 4$ tür. $p(x) = x^2 - 29x + 4 \in \mathbb{Z}_{(2)}[x]$ olsun. $p^* = x^2 - 29x + 4 \in \mathbb{Q}[x]$ indirgenmezdir ve buradan $x^2 - 29x + 4 = 0$ denkleminin $\mathbb{Z}_{(2)}$ de çözümü yoktur. Bu yüzden, $x^2 - iz(A^2)x + det(A^2) = 0$ ın $\mathbb{Z}_{(2)}$ de çözümü yoktur. Teorem 4.2.2 gereğince $A \in M_2(\mathbb{Z}_{(2)})$ genelleştirilmiş Hirano terse sahip değildir. □

Lemma 4.2.5 *R projektif-serbest bir halka olsun. O zaman $A \in M_2(R)$ nin genelleştirilmiş Hirano terse sahip olması için gerek ve yeter şart*

(1) $det(A)$, $iz(A^2) \in J(R)$ veya

(2) $det(A^2) \in 1 + J(R)$, $iz(A^2) \in 2 + J(R)$ veya

(3) $det(A) \in J(R)$, $iz(A^2) \in J(R)$ ve $x^2 - iz(A^2)x + det(A^2) = 0$ denkleminin R içinde bir çözüme sahip olmasıdır

(Chen ve Sheibani 2019b).

Sonuç 4.2.6 *R projektif-serbest bir halka ve $A \in M_2(R)$ olsun. $\alpha, \beta \in J(R) \cup (1 + J(R))$ olmak üzere, eğer $\chi(A^2) = (t - \alpha)(t - \beta)$ ise o zaman A genelleştirilmiş Hirano terse sahiptir* (Chen ve Sheibani 2019b).

İspat: $\alpha, \beta \in J(R) \cup (1 + J(R))$ olmak üzere $\chi(A^2) = (t - \alpha)(t - \beta)$ olsun. Bu durumda $det(A^2) = \alpha\beta$ ve $iz(A^2) = \alpha + \beta$ dır.

1.Durum: $\alpha, \beta \in J(R)$ olsun. O zaman $det(A)$, $iz(A^2) \in J(R)$ dir.

2.Durum: $\alpha, \beta \in 1 + J(R)$ olsun. O zaman $det^2(A) \in 1 + J(R)$, $iz(A^2) \in 2 + J(R)$ dir.

3.Durum: $\alpha \in J(R)$, $\beta \in 1 + J(R)$ olsun. O zaman $det(A) \in J(R)$, $iz(A^2) \in 1 + J(R)$ dir.

4.Durum $\alpha \in 1 + J(R)$, $\beta \in J(R)$ olsun. O zaman $det(A) \in J(R)$, $iz(A^2) \in 1 + J(R)$ dir.

Bu yüzden Lemma 4.2.5 gereğince, A genelleştirilmiş Hirano terse sahiptir. □

Örnek 4.2.7 $\mathbb{Z}_{(2)} = \{\frac{m}{n} \mid m,n \in \mathbb{Z}, (m,n) = 1, 2 \nmid n\}$ ve $A = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{Z}_{(2)})$ olsun. O zaman $A \in M_2(\mathbb{Z}_{(2)})$ genelleştirilmiş Hirano terse sahiptir (Chen ve Sheibani 2019b).

İspat: $J(\mathbb{Z}_{(2)}) = 2\mathbb{Z}_{(2)}$ olup $\mathbb{Z}_{(2)}$ değişmeli bir yerel halkadır. $A^2 = \begin{pmatrix} 43 & 42 \\ 21 & 22 \end{pmatrix}$ dir. O zaman $det(A^2) = 64 \in J(\mathbb{Z}_{(2)})$, $iz(A^2) = 65 \in 1 + J(\mathbb{Z}_{(2)})$ dir. Dolayısıyla, $det(A) \in J(\mathbb{Z}_{(2)})$ ve $x^2 - iz(A^2)x + det^2(A) = 0$ denkleminin köklerinden biri 1 dir. Lemma 4.2.5 gereğince ispat tamamlanır. □

4.3 Cline Formülü

Bu kısımda Cline Formülü genelleştirilmiş Drazin terslerden genelleştirilmiş Hirano terslere genelleştirilecektir.

Lemma 4.3.1 R bir halka olmak üzere $a, b, c \in R$ ve $aba = aca$ olsun. O zaman, ac nin yarı üstel sıfır olması için gerek ve yeter şart ba nın yarı üstel sıfır olmasıdır (Lian ve Zeng 2016).

Teorem 4.3.2 R bir halka ve $a, b, c \in R$ olsun. Eğer $aba = aca$ ise o zaman ac nin genelleştirilmiş Hirano terse sahip olması için gerek ve yeter şart ba nın genelleştirilmiş Hirano terse sahip olmasıdır. Bu durumda, $(ba)^{gH} = b((ac)^{gH})^2 a$ ve $(ac)^{gH} = a((ba)^{gH})^2 c$ dir (Chen ve Sheibani 2019b).

İspat: ac genelleştirilmiş Hirano terse sahip ve $(ac)^{gH} = d$ olsun. $e = bd^2 a$ ve $f \in comm(ba)$ olsun. O zaman

$$fe = fb(dacd)^2 a = fb(dacddacd)a = fbacacd^4 a = babafcd^4 a = b(acafc)d^4 a$$

dır. Ayrıca,

$$\begin{aligned} ac(acafc) &= ababafc \\ &= afbabac \\ &= afbacac \\ &= abafcac \end{aligned}$$

$$= (acafc)ac$$

dir. $d \in comm^2(ac)$ olduğundan, $(acafc)d = d(acafc)$ dir. Buradan,

$$\begin{aligned} fe &= b(acafc)d^4a \\ &= bd^4(acafc)a \\ &= bd^4abafca \\ &= bd^4afbaca \\ &= bd^4afbaba \\ &= bd^4ababaf \\ &= bd^4acacaf \\ &= bd^2af \\ &= ef \end{aligned}$$

dir. Bu durumda, $e \in comm^2(ba)$ dır. O zaman

$$\begin{aligned} e(ba)e &= bd^2a(ba)bd^2a \\ &= bd^2ababacd^3a \\ &= bd^2(ac)^3d^3a \\ &= bd^2(acacac)d^3a \\ &= bd^2(acdacdacd)a \\ &= bd^2(acdacd)a \\ &= bd^2(acd)a \\ &= bddacda \\ &= bd^2a \\ &= e \end{aligned}$$

dir. $p = ac - acd^2$ olsun. O zaman,

$$\begin{aligned} pac &= (ac - acd^2)ac \\ &= acac - acd^2ac \\ &= acac - acdacd \\ &= acac - acd \\ &= (ac)^2 - acd \in R^{qnil} \end{aligned}$$

dir. Ayrıca,

$$(ba)^2 - bae = baba - babd^2a$$

$$
\begin{aligned}
&= baba - babdacdda \\
&= baba - babacd^2da \\
&= baca - bacacd^2da \\
&= b(ac - acd^2)a \\
&= bpa
\end{aligned}
$$

dır ve

$$abpa = ab(ac - acd^2)a = ac(ac - acd^2)a = acpa$$

olduğundan,

$$(pa)b(pa) = (pa)c(pa)$$

dır. Lemma 4.3.1 gereğince $bpa \in R^{qnil}$ dir. Buradan ba nın genelleştirilmiş Hirano tersi e dir ve genelleştirilmiş Hirano ters tek olduğundan $e = bd^2a = (ba)^{gH}$ dır, yani $(ba)^{gH} = b((ac)^{gH})^2a$ elde edilir.

Karşıt olarak ba genelleştirilmiş Hirano terse sahip olsun. Benzer şekilde ispat tamamlanır. □

Sonuç 4.3.3 R bir halka ve $a, b \in R$ olsun. Eğer ab genelleştirilmiş Hirano terse sahip ise o zaman ba da genelleştirilmiş Hirano terse sahiptir ve $(ba)^{gH} = b((ab)^{gH})^2a$ dır (Chen ve Sheibani 2019b).

İspat: $aba = aba$ olduğundan Teorem 4.3.2 gereğince ispat tamamlanır. □

Sonuç 4.3.4 R bir halka ve $a, b \in R$ olsun. k pozitif bir tamsayı olmak üzere eğer $(ab)^k$ genelleştirilmiş Hirano terse sahip ise o zaman $(ba)^k$ genelleştirilmiş Hirano terse sahiptir (Chen ve Sheibani 2019b).

İspat: $k = 1$ olsun. O halde Sonuç 4.3.3 gereğince ab nin genelleştirilmiş Hirano terse sahip olması için gerek ve yeter şart ba nın genelleştirilmiş Hirano terse sahip olmasıdır. $k \geq 2$ olsun. $(ab)^k = a(b(ab))^{k-1}$ olduğundan Sonuç 4.3.3 gereğince $(b(ab)^{k-1})a$ genelleştirilmiş Hirano terse sahiptir. Dolayısıyla $(ba)^k$ genelleştirilmiş Hirano terse sahiptir. □

Lemma 4.3.5 (A, r) bir Banach cebiri olmak üzere $a^2b = aba$ ve $b^2a = bab$ olacak şekilde $a, b \in A$ olsun. Bu durumda

(1) $r(a+b) \leq r(a) + r(b)$

(2) $r(ab) \leq r(a)r(b)$

dir (Zou vd. 2017).

İspat: (1) Keyfi $\alpha > r(a)$ ve $\beta > r(b)$ alınsın. $a_1 = \frac{1}{\alpha}a$ ve $b_1 = \frac{1}{\beta}b$ olsun. O zaman $r(a_1) < 1$ ve $r(b_1) < 1$ dir. Lemma 2.2.6 gereğince,

$$\begin{aligned}
\| (a+b)^{n+1} \| &= \| \sum_{i=0}^{n} C_n^i (a^{n+1-i} b^i + b^{n+1-i} a^i) \| \\
&= \| a \sum_{i=0}^{n} C_n^i a^{n-i} b^i + b \sum_{i=0}^{n} C_n^i b^{n-i} a^i \| \\
&\leq \| a \| \sum_{i=0}^{n} C_n^i \| a^{n-i} \| \| b^i \| + \| b \| + \sum_{i=0}^{n} C_n^i \| b^{n-i} \| \| a^i \| \\
&= (\| a \| + \| b \|) \sum_{i=0}^{n} C_n^i \| a^i \| \| b^{n-i} \| \\
&= (\| a \| + \| b \|) \sum_{i=0}^{n} C_n^i \alpha^i \beta^{n-i} \| a_1^i \| \| b_1^{n-i} \|
\end{aligned}$$

dir. Her n için $n = n_1 + n_2$ olacak şekilde $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ ve

$$\| a_1^{n_1} \| \| b_1^{n_2} \| = max \| a_1^i \| \| b_1^{n-i} \|$$

olsun. O zaman

$$\| (a+b)^{n+1} \| \leq (\| a \|) + (\| b \|)(\alpha + \beta)^n \| a_1^{n_1} \| \| b_1^{n_2} \|$$

dir. Buradan

$$r(a+b) = \lim_{n\to\infty} (\| (a+b)^{n+1} \|^{1/n+1})^{n+1/n} = \lim_{n\to\infty} \| (a+b)^{n+1} \|^{1/n}$$

$$\leq (\alpha + \beta \lim_{n\to\infty} (\| a \| + \| b \|)^{1/n}) \liminf_{n\to\infty} \| a_1^{n_1} \|^{1/n} \| b_1^{n_2} \|^{1/n}$$

$$= (\alpha+\beta)\liminf_{n\to\infty} \| a_1^{n_1} \|^{1/n} \| b_1^{n_2} \|^{1/n}$$

dır. Lemma 2.2.5 gereğince $r(a+b) \leq \alpha+\beta$ elde edilir. Dolayısıyla $r(a+b) \leq r(a)+r(b)$ dir.

(2) $a^2b = aba$ olsun. O zaman her $n \in \mathbb{N}$ için $(ab)^n = a^n b^n$ dir. Bu yüzden,

$$\| (ab)^n \|^{1/n} = \| a^n b^n \|^{1/n} \leq \| a^n \|^{1/n} \| b^n \|^{1/n}$$

dir. $n \to \infty$ olsun. O halde $r(ab) \leq r(a)r(b)$ dir. □

Lemma 4.3.6 *A bir Banach cebiri olmak üzere $a, b \in A$ ve $ab = ba$ olsun. Bu durumda*

(1) *Eğer $a, b \in A^{qnil}$ ise o zaman $a+b \in A^{qnil}$ dir.*

(2) *Eğer $a \in A^{qnil}$ veya $b \in A^{qnil}$ ise o zaman $ab \in A^{qnil}$ dir*

(Zhu vd. 2017).

İspat: Lemma 4.3.5 gereğince (1) ve (2) elde edilir. □

Teorem 4.3.7 *A bir Banach cebiri ve $a, b \in A$ olsun. Eğer a, b genelleştirilmiş Hirano terse sahip ve $ab = ba$ ise o zaman ab genelleştirilmiş Hirano terse sahiptir ve*

$$(ab)^{gH} = a^{gH} b^{gH}$$

dir (Chen ve Sheibani 2019b).

İspat: $a, b \in A$ genelleştirilmiş Hirano terse sahip ve $ab = ba$ olsun. $(ab)^{gH} = a^{gH}b^{gH}$ olduğunu ispatlamak için $a^{gH}b^{gH} \in comm(ab)$ ve $(ab)^2 - aba^{gH}b^{gH} \in A^{qnil}$ ve $a^{gH}b^{gH}aba^{gH}b^{gH} = a^{gH}b^{gH}$ olduğu gösterilmelidir.

$$a^{gH}aa^{gH} = a^{gH}, b^{gH}bb^{gH} = b^{gH}$$

olduğundan ve ayrıca $aa^{gH} = a^{gH}a$, $ab = ba$, $ab^{gH} = b^{gH}a$, $ba^{gH} = a^{gH}b$ ve $bb^{gH} = b^{gH}b$ olduğundan

$$a^{gH}b^{gH}aba^{gH}b^{gH} = a^{gH}b^{gH}$$

dır. Açık olarak, $a^{gH}b^{gH}ab = aba^{gH}b^{gH}$ dır. Ayrıca,

$$(ab)^2 - aba^{gH}b^{gH} = a^2(b^2 - bb^{gH}) + b^2(a^2 - aa^{gH}) - (a^2 - aa^{gH})(b^2 - bb^{gH})$$

dır. Buradan Lemma 4.3.6 gereğince $(ab)^2 - aba^{gH}b^{gH} \in A^{qnil}$ dir. □

Sonuç 4.3.8 A bir Banach cebiri olsun. Eğer $a \in A$ genelleştirilmiş Hirano terse sahip ise o zaman a^n genelleştirilmiş Hirano terse sahiptir ve her $n \in \mathbb{N}$ için $(a^n)^{gH} = (a^{gH})^n$ dir (Chen ve Sheibani 2019b).

İspat: n üzerine tümevarım uygulanarak Teorem 4.3.7 gereğince ispat tamamlanır. $\square$

Örnek 4.3.9 gereğince Sonuç 4.3.8 un karşıtı doğru değildir.

Örnek 4.3.9 $\bar{3} \in \mathbb{Z}_5$ genelleştirilmiş Hirano terse sahip değildir. Eğer $\bar{3}$ ün genelleştirilmiş Hirano tersi b ise o zaman $\bar{3}b^2 = b$ olup $b = \bar{0}$ veya $b = \bar{2}$ dir. Her iki durumda da $\bar{3}^2 - \bar{3}b$ yarı üstel sıfır değildir. Bu bir çelişkidir. Fakat, $\bar{3}^2 = \bar{4} \in \mathbb{Z}_5$ genelleştirilmiş Hirano terse sahiptir. Çünkü; $\bar{4}b^2 = b$ için $b = \bar{0}$ veya $b = \bar{1}$ dir. Buradan $b = \bar{1}$ için $\bar{4} \cdot \bar{1} = \bar{1} \cdot \bar{4}$ ve $\bar{4}^2 - \bar{4} \cdot \bar{1} = \bar{2} \in \mathbb{Z}_5^{qnil}$ dir (Chen ve Sheibani 2019b).

4.4 Genelleştirilmiş Hirano Terslerin Bazı Özellikleri

Bu kısımda Banach cebirinde genelleştirilmiş Hirano terslerin ek özellikleri incelenecektir.

Tanım 4.4.1 A bir Banach cebiri, $p^2 = p \in A$ ve $x \in A$ olmak üzere

$$x = pxp + px(1-p) + (1-p)xp + (1-p)x(1-p)$$

eşitliği

$$x = \begin{pmatrix} pxp & px(1-p) \\ (1-p)xp & (1-p)x(1-p) \end{pmatrix}_p$$

matrisi ile gösterilir (Chen ve Sheibani 2019b).

Lemma 4.4.2 A bir Banach cebiri olsun. $p^2 = p \in A$ ve $x, y \in A$ olmak üzere

$$x = \begin{pmatrix} a & c \\ 0 & b \end{pmatrix}_p, \; y = \begin{pmatrix} b & 0 \\ c & a \end{pmatrix}_{1-p}$$ şeklinde gösterilsin.

(1) Eğer $a \in (pAp)^{gD}$ ve $b \in ((1-p)A(1-p))^{gD}$ ise o zaman $x, y \in A^{gD}$ ve

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} (a^{gD})^{n+2} c b^n b^{\pi} + \sum_{n=0}^{\infty} a^{\pi} a^n c (b^{gD})^{n+2} - a^{gD} c b^{gD} \qquad (*)$$

olmak üzere

$$x^{gD} = \begin{pmatrix} a^{gD} & u \\ 0 & b^{gD} \end{pmatrix}_p, \; y^{gD} = \begin{pmatrix} b^{gD} & 0 \\ u & a^{gD} \end{pmatrix}_{1-p} \qquad (**)$$

şeklindedir.

(2) Eğer $x \in A^{gD}$ (sırasıyla $y \in A^{gD}$) ve $a \in (pAp)^{gD}$ ise o zaman $b \in ((1-p)A(1-p))^{gD}$ ve x^{gD} (sırasıyla y^{gD}) (*) ve (**) da verildiği şekildedir (Zou vd. 2017).

Lemma 4.4.3 A bir Banach cebiri ve $p^2 = p \in A$ olmak üzere

$$x = \begin{pmatrix} a & c \\ 0 & b \end{pmatrix}_p \text{ olsun.}$$

Eğer $a \in pAp$ ve $b \in (1-p)A(1-p)$ genelleştirilmiş Hirano terse sahip ise o zaman x genelleştirilmiş Hirano terse sahiptir (Chen ve Sheibani 2019b).

İspat: $a \in pAp$ ve $b \in (1-p)A(1-p)$ genelleştirilmiş Hirano terse sahip olsun. Bu durumda Teorem 4.1.3 gereğince a ve b genelleştirilmiş Drazin terse sahiptir ve buradan $a^2 - aa^{gD}, b^2 - bb^{gD} \in A^{qnil}$ dir. O halde Lemma 4.4.2 gereğince $e = \begin{pmatrix} a^{gD} & u \\ 0 & b^{gD} \end{pmatrix}_p \in comm^2(x)$, $e = e^2x$ ve $x - x^2e \in A^{qnil}$ olacak şekilde bir $u \in pA(1-p)$ bulunur. Buradan,

$$x^2 - xe = \begin{pmatrix} a^2 - aa^{gD} & ac + bc - au - cb^{gD} \\ 0 & b^2 - bb^{gD} \end{pmatrix}_p \text{ ve}$$

$v = ac + bc - au - cb^{gD}$ olmak üzere $x^2 - xe = \begin{pmatrix} a^2 - aa^{gD} & v \\ 0 & b^2 - bb^{gD} \end{pmatrix}_p$ dir. $ac = (pxp)(px(1-p)) = (pxp)(px - pxp) = 0$ ve $u \in pA(1-p)$ olduğundan, $v(a^2 - aa^{gD}) = aca^2 - acaa^{gD} + cba^2 - cbaa^{gD} - aua^2 + auaa^{gD} - cb^{gD}a^2 + cb^{gD}aa^{gD} = 0$ ve $v^2 = (ac + bc - au - cb^{gD})(ac + bc - au - cb^{gD}) = 0$ dır. $N(A) \subset A^{qnil}$ olduğundan $v \in A^{qnil}$ dir. Lemma 4.3.6 gereğince $a^2 - aa^{gD} + v \in A^{qnil}$ dir. Ayrıca

$$(b^2 - bb^{gD})((a^2 - aa^{gD}) + v) = 0$$

dır. Lemma 4.3.6 gereğince $a^2 - aa^{gD} + v + (b^2 - bb^{gD}) \in A^{qnil}$ dir. O halde $x^2 - xe \in A^{qnil}$ dir. Sonuç olarak, x genelleştirilmiş Hirano terse sahiptir. □

Lemma 4.4.4 A birimli bir kompleks Banach cebiri ve $b^\pi = 1 - bb^{gD}$ olmak üzere $b^\pi ab = b^\pi ba$ ve $a = ab^\pi$ olacak şekilde $a \in A^{qnil}$, $b \in A^{gD}$ olsun. O zaman $a+b \in A^{gD}$ ve

$$(a+b)^{gD} = b^{gD} + \sum_{n=0}^{\infty} (b^{gD})^{n+2} a(a+b)^n$$

dir (Cvetkovic-Ilic vd. 2006).

Lemma 4.4.5 A bir Banach cebiri olmak üzere $a \in A^{qnil}$ ve $b \in A$ genelleştirilmiş Hirano terse sahip olsun. $b^\pi = 1 - bb^{gH}$ olmak üzere eğer,

$$a = ab^\pi,\ b^\pi ba = b^\pi ab$$

ise o zaman $a+b$ genelleştirilmiş Hirano terse sahiptir ve

$$(a+b)^{gH} = b^{gH} + \sum_{n=0}^{\infty} (b^{gH})^{n+2} a(a+b)^n$$

dir (Chen ve Sheibani 2019b).

İspat: $a \in A^{qnil}$ ve $b \in A$ genelleştirilmiş Hirano terse sahip olsun.

1.Durum: $b \in A^{qnil}$ olsun. O zaman $b^\pi = 1 - bb^{gH}$ olmak üzere $(b^\pi)^2 = b^\pi$ dir. Ayrıca $b \in A^{qnil}$ olduğundan $b^\pi = 1 - bb^{gH} \in U(A)$ dır. O halde $b^\pi = 1$ ve $b^\pi ba = b^\pi ab$ olduğundan $ab = ba$ dır. Lemma 4.3.6 gereğince $a+b \in A^{qnil}$ ve $(a+b)^2 \in A^{qnil}$ dir. Teorem 4.1.8 gereğince $a+b$ genelleştirilmiş Hirano terse sahiptir.

2.Durum: $b \notin A^{qnil}$ olsun. Teorem 4.1.3 gereğince b genelleştirilmiş Drazin terse sahiptir ve buradan, $p = 1 - b^\pi$, $b_1 \in U(pAp)$,

$$\begin{aligned} b_2 &= (1-(1-b^\pi))b(1-(1-b^\pi)) \\ &= b^\pi b b^\pi \\ &= (1 - bb^{gH})b(1 - bb^{gH}) \\ &= b(1 - bb^{gH}) \\ &= b - bb^{gH}b \\ &= b - b^2 b^{gH} \in A^{qnil} \end{aligned}$$

olmak üzere

$$b = \begin{pmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & b_2 \end{pmatrix}_p, \; a = \begin{pmatrix} a_{11} & a_1 \\ a_{21} & a_2 \end{pmatrix}_p$$

dir. $a = ab^{\pi}$ olduğundan $a = a(1 - bb^{gH}) = a - abb^{gH}$ ve buradan $abb^{gH} = 0$ dır. O halde, $a_{11} = pap = (1 - b^{\pi})a(1 - b^{\pi}) = bb^{gH}abb^{gH} = 0$ ve $a_{21} = pa(1 - p) = (1 - b^{\pi})a(1 - (1 - b^{\pi})) = bb^{gH}abb^{gH} = 0$ olup

$$a + b = \begin{pmatrix} b_1 & a_1 \\ 0 & a_2 + b_2 \end{pmatrix}_p$$

elde edilir. $b^{\pi}ba = b^{\pi}ab$ ve

$$\begin{aligned} b_2 &= (1 - p)b(1 - p) \\ &= (1 - (1 - b^{\pi}))b(1 - (1 - b^{\pi})) \\ &= b^{\pi}bb^{\pi} \\ &= (1 - bb^{gH})b(1 - bb^{gH}) \\ &= b(1 - bb^{gH}) \\ &= b - bb^{gH}b \\ &= b - pb \\ &= b(1 - p) \\ &= b(1 - bb^{gH}) \\ &= bb^{\pi} \end{aligned}$$

olduğundan

$$\begin{aligned} a_2b_2 &= (1 - p)a(1 - p)bb^{\pi} \\ &= b^{\pi}ab^{\pi}bb^{\pi} \\ &= b^{\pi}ab^{\pi}b \\ &= b^{\pi}ab \\ &= b^{\pi}ba \\ &= bb^{\pi}a \\ &= bb^{\pi}ab^{\pi} \\ &= bb^{\pi}b^{\pi}ab^{\pi} \\ &= bb^{\pi}(1 - p)a(1 - p) \\ &= b_2a_2 \end{aligned}$$

dir. $ab^{\pi} = a \in A^{qnil}$ olduğundan Lemma 4.3.1 gereğince $a_2 = b^{\pi}ab^{\pi} = b^{\pi}a \in A^{qnil}$ dir. Lemma 4.3.6 gereğince $a_2 + b_2 \in A^{qnil}$ ve buradan $(a_2 + b_2)^2 \in A^{qnil}$

dir. Teorem 4.1.8 gereğince, $a_2 + b_2$ genelleştirilmiş Hirano terse sahiptir. $b \in A$ genelleştirilmiş Hirano terse sahip olduğundan $b_1 = pbp$ genelleştirilmiş Hirano terse sahiptir. Lemma 4.4.3 gereğince $a + b$ genelleştirilmiş Hirano terse sahiptir. Sonuç 4.1.6 ve Lemma 4.4.4 gereğince ispat tamamlanır. $\square$

Lemma 4.4.6 A birimli bir kompleks Banach cebiri, $a^\pi = 1 - aa^{gD}$ ve $b^\pi = 1 - bb^{gD}$ olmak üzere $a = ab^\pi$, $b^\pi ba^\pi$ ve $b^\pi a^\pi ba = b^\pi a^\pi ab$ olacak şekilde $a, b \in A^{gD}$ olsun. O zaman $a + b \in A^{qnil}$ ve

$$\begin{aligned}(a+b)^{gD} = &\left(b^{gD} + \sum_{n=0}^{\infty}(b^{gD})^{n+2}a(a+b)^n\right)a^\pi \\ &- \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}(b^{gD})^{n+2}(a+b)^n(a^{gD})^{k+2}b(a+b)^{k+1} \\ &+ \sum_{n=0}^{\infty}(b^{gD})^{n+2}a(a+b)^n a^{gD}b - \sum_{n=0}^{\infty} b^{gD}a(a^{gD})^{n+2}b(a+b)^n\end{aligned}$$

dir (Cvetkovic-Ilic vd. 2006).

Teorem 4.4.7 A bir Banach cebiri olsun. Eğer $a, b \in A$ genelleştirilmiş Hirano terse sahip ve $a^\pi = 1 - aa^{gH}$ ve $b^\pi = 1 - bb^{gH}$ olmak üzere $a = ab^\pi$, $b^\pi ba^\pi = b^\pi b$ ve $b^\pi a^\pi ba = b^\pi a^\pi ab$ ise o zaman $a + b$ genelleştirilmiş Hirano terse sahiptir ve

$$\begin{aligned}(a+b)^{gH} = &\left(b^{gH} + \sum_{n=0}^{\infty}(b^{gH})^{n+2}a(a+b)^n\right)a^\pi \\ &- \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}(b^{gH})^{n+2}a(a+b)^n(a^{gH})^{k+2}b(a+b)^{k+1} \\ &+ \sum_{n=0}^{\infty}(b^{gH})^{n+2}a(a+b)^n a^{gH}b - \sum_{n=0}^{\infty} b^{gH}a(a^{gH})^{n+2}b(a+b)^n\end{aligned}$$

dir (Chen ve Sheibani 2019b).

İspat: $a, b \in A$ genelleştirilmiş Hirano terse sahip olsun.

1.Durum: $b \in A^{qnil}$ olsun. O zaman $b^\pi = 1 - bb^{gH}$ eşkare eleman ve $1 - bb^{gH} \in U(A)$ dır. Buradan $b^\pi = 1$ dir. O halde Lemma 4.4.5 uygulanarak ispat tamamlanır.

2.Durum $b \notin A^{qnil}$ olsun. $b_1 \in U(pAp)$, $b_2 \in A^{qnil}$ olmak üzere

$$b = \begin{pmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & b_2 \end{pmatrix}_p, \quad a = \begin{pmatrix} a_{11} & a_1 \\ a_{21} & a_2 \end{pmatrix}_p$$

şeklindedir. $a = ab^\pi$ olduğundan $a_{11} = a_{21} = 0$ ve buradan

$$a + b = \begin{pmatrix} b_1 & a_1 \\ 0 & a_2 + b_2 \end{pmatrix}_p$$

dir.

$$a_2 = b^\pi a b^\pi = b^\pi a, \; b_2 = b^\pi b b^\pi = b^\pi b$$

ve

$$a_2^\pi = b^\pi - (b^\pi a)(b^\pi a)^{gH} = b^\pi - (b^\pi a)(b^\pi a^{gH}) = b^\pi a^\pi$$

elde edilir. Ek olarak,

$$(b^\pi)^2 = b^\pi, \; b^\pi - b^\pi a a^{gH} b^\pi = b^\pi(1 - aa^{gH})b^\pi$$

dir. Ayrıca $ap = 0$, $1 - aa^{gH} = 1 - a^{gH}a$ ve

$$(1 - a^{gH}a)b^\pi = (1 - a^{gH}a)(1 - p) = 1 - p - a^{gH}a = b^\pi - a^{gH}a \text{ dır.}$$

Dolayısıyla $b^\pi(1 - aa^{gH})b^\pi = b^\pi(b^\pi - a^{gH}a) = b^\pi - b^\pi aa^{gH} = b^\pi(1 - aa^{gH}) = b^\pi a^\pi$ elde edilir. Buradan,

$a_2^\pi a_2 b_2 = b^\pi a^\pi b^\pi a b^\pi b = b^\pi a^\pi b^\pi ab = b^\pi(1 - aa^{gH})b^\pi ab = (b^\pi - b^\pi aa^{gH}b^\pi)ab = b^\pi a^\pi ab$,

$a_2^\pi b_2 a_2 = b^\pi a^\pi b^\pi b b^\pi a = b^\pi a^\pi b^\pi ba = b^\pi(1 - aa^{gH})b^\pi ba = (b^\pi - b^\pi aa^{gH}b^\pi)ba = b^\pi a^\pi ba$

dır. O halde, $b^\pi a^\pi ab = b^\pi a^\pi ba$ olduğundan $a_2^\pi a_2 b_2 = a_2^\pi b_2 a_2$ dir. $a_2 + b_2 \in (1 - p)A(1 - p)$ genelleştirilmiş Hirano terse sahiptir. $b_1 = pbp$ genelleştirilmiş Hirano terse sahip olduğundan Lemma 4.4.3 gereğince $a + b$ genelleştirilmiş Hirano terse sahiptir. Sonuç 4.1.6 gereğince $(a + b)^{gH} = (a + b)^{gD}$, $a^{gH} = a^{gD}$ ve $b^{gH} = b^{gD}$ dir. Bu yüzden Lemma 4.4.6 gereğince ispat tamamlanır. □

Sonuç 4.4.8 A bir Banach cebiri ve $a, b \in A$ olsun. Eğer a, b genelleştirilmiş Hirano terse sahip ve $a^\pi = 1 - aa^{gH}$ ve $b^\pi = 1 - bb^{gH}$ olmak üzere

$$ab = ba, \; a = ab^\pi, \; b^\pi = ba^\pi = b^\pi b$$

ise o zaman $a + b$ genelleştirilmiş Hirano terse sahiptir ve $(a + b)^{gH} = b^{gH}$ dir

(Chen ve Sheibani 2019b).

Sonuç 4.4.9 A bir Banach cebiri ve $a, b \in A$ olsun. Eğer a, b genelleştirilmiş Hirano terse sahip ve $ab = ba = 0$ ise o zaman $a + b$ genelleştirilmiş Hirano terse sahiptir ve $(a+b)^{gH} = a^{gH} + b^{gH}$ dir (Chen ve Sheibani 2019b).

5. SONUÇ

Bu tezin üçüncü bölümünde Drazin tersin yeni bir sınıfı olan Hirano ters kavramı tanımlanmıştır. Drazin ters ile Hirano ters arasındaki ilişki incelenmekte olup Drazin ters için sağlanan bazı özelliklerin Hirano ters için sağlanıp sağlanmadığı araştırılmıştır. Ayrıca halkalarda bazı genelleştirilmiş tersler arasındaki ilişkiler verilmiştir. Bu tezin dördüncü bölümünde genelleştirilmiş Drazin tersin bir sınıfı olan genelleştirilmiş Hirano ters kavramı tanımlanmıştır. Halkalarda genelleştirilmiş Drazin ters ile genelleştirilmiş Hirano ters kavramı arasındaki ilişki incelenmiştir. Ayrıca genelleştirilmiş Drazin terslerin Banach cebirleri üzerinde sağladığı bazı özellikleri genelleştirilmiş Hirano tersler üzerinde de sağlanıp sağlanmadığı araştırılmıştır.

KAYNAKLAR

Anderson, F.W., Fuller, K.R. 1992. Rings and Categories of Modules. Springer-Verlag, 385, New York.

Azumaya, G. 1954. Strongly π-regular rings. J. Fac. Sci. Hokkaido Univ., 13(1); 34-39.

Chen, H. 2011. Rings Related To Stable Range Conditions. World Scientific, 680, New Jersey.

Chen, H., Sheibani, M. 2017. Strongly 2-nil-clean rings. J. Algebra Appl., 16(9); 1750178 1-12.

Chen, H., Sheibani, M. 2018. Generalized Drazin Inverses in a Ring. Filomat, 32(15); 5289-5295.

Chen, H., Sheibani, M. 2019b. Generalized Hirano inverses in rings. Comm. Algebra, 47(7); 2967-2978.

Chen, H., Sheibani, M. 2019a. On Hirano inverses in rings. Turkish J. Math., 43; 2049-2057.

Chevalley, C. 1943. On The Theory Of Local Rings. Ann. of Math., 44; 690-708.

Cline, R.E. 1965. An Application Of Representations For The Generalized Inverse Of A Matrix. Tech. Summary Rep., 592, Madison.

Cvetkovic-Ilic, D.S., Djordjevic, D.S., Wei, Y. 2006. Additive results for the generalized Drazin inverse in a Banach algebra. Linear Algebra Appl., 418(1); 53-61.

Diesl, A.J. 2013. Nil Clean Rings. J. Algebra, 383; 197-211.

Drazin, M.P. 1958. Pseudo-inverse in associative rings and semigroups. Amer. Math. Monthly, 65; 506-514.

Hoffman, K., Kunze, R. 1971. Linear Algebra. Prentice Hall, 415, New Jersey.

Hungerford, T.W. 1974. Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, 73, New York

Huh, C., Kim, N.K., Lee, Y. 2004. Examples of strongly π-regular rings. J. Pure Appl. Algebra, 189; 195-210.

Iskander, A.A. 1975. Locally Finite Ring Varieties. Proc. Amer. Math. Soc., 50; 28-32.

Kaniuth, E.A. 2009. A Course in Commutative Banach Algebras. Springer-Verlag, 362, New York.

Kaplansky, I. 1980. Jacobson's Lemma revisited. J. Algebra, 62; 473-476.

Koliha, J.J. 1996. A generalized Drazin inverse. Glasg. Math. J., 38; 367-381.

Koliha, J.J., Patricio, P. 2002. Elements of rings with equal spectral idempotents. J. Austral. Math. Soc., 72(1); 137-152.

Lam, T.Y 1999. Lectures on Modules and Rings. Springer-Verlag, 557, New York.

Lam, T.Y 2001. A first course in noncommutative rings. Springer-Verlag, 385, New York.

Lay, D.C. 1975. Spectral properties of generalized inverses of linear operators. SIAM J. Appl. Math., 29; 103-109.

Lian, H., Zeng, Q. 2016. An extension of Clines formula for a generalized Drazin inverse. Turk J. Math., 40; 161-165.

Mosic, D. 2015. Characterizations of k-potent elements in rings. Ann. Mat. Pura Appl., 194; 1157-1168.

Mosic, D. 2017. Extensions of Jacobson's Lemma for Drazin inverses. Aequationes Math., 91; 419-428.

Nashed, M.Z., Zhao, Y. 1992. The Drazin inverse for singular evolution equations and partial differential equations. World Sci. Ser. Appl. Anal., 1; 441-456.

Rudin, W. 1991. Functional Analysis. McGraw-Hill, 440, New York.

Wang, Z. 2017. A class of Drazin inverses in rings. Filomat, 31; 1781-1789.

Wang, Z., Chen, J. 2012. Pseudo Drazin inverses in associative rings and Banach algebras. Linear Algebra Appl., 437(6); 1332-1345.

Ying, Z., Chen, J. 2012. On quasipolar rings. Algebra Colloq., 19(4); 683-692.

Zhu, H., Mosic, D., Chen, J. 2017. Generalized Drazin invertibility of the product and sum of two elements in a Banach algebra and its applications. Turkish J. Math., 41; 548-563.

Zhuang, G., Chen, J., Cui, J. 2012. Jacobson's lemma for the generalized Drazin inverse, Linear Algebra Appl., 436(3); 742-746.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı	**:**	Işıl BAYDAR
Doğum Yeri	**:**	Ankara
Doğum Tarihi	**:**	05/12/1995
Medeni Hali	**:**	Bekar
Yabancı Dili	**:**	İngilizce

Eğitim Durumu

Lise	**:**	İbni Sina Anadolu Lisesi, Ankara (2013)
Lisans	**:**	Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü (2018)
Yüksek Lisans	**:**	Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı (2020)