

ANKARA ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DOKTORA TEZİ

İNTEGRO FARK DENKLEMLERİNİN ZAYIF LİNEER OLMAYAN  
ANALİZİ

Musa Emre KAVGACI

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ANKARA  
2020

Her hakkı saklıdır

## TEZ ONAYI

Musa Emre KAVGACI tarafından hazırlanan " **İntegro Fark Denklemlerinin Zayıf Lineer Olmayan Analizi** " adlı tez çalışması 17/01/2020 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından **oybirliği**(~~veya oyçokluğu~~) ile Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda **DOKTORA TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

**Danışman:** Prof. Dr. Hüseyin BEREKETOĞLU



**Jüri Üyeleri:**

**Başkan:** Prof. Dr. Marat AKHMET  
Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Matematik Anabilim Dalı



**Üye** : Prof. Dr. Hüseyin BEREKETOĞLU  
Ankara Üniversitesi, Matematik Anabilim Dalı



**Üye** : Prof. Dr. Nuri ÖZALP  
Ankara Üniversitesi, Matematik Anabilim Dalı



**Üye** : Prof. Dr. Fatma KARAKOÇ  
Ankara Üniversitesi, Matematik Anabilim Dalı



**Üye** : Doç. Dr. Özgür Hakan AYDOĞMUŞ  
Ankara Sosyal Bilimler Üniversitesi, Ekonomi Anabilim Dalı



Yukarıdaki sonucu onaylarım

Prof. Dr. Özlem YILDIRIM  
Enstitü Müdürü

## ETİK

Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez içindeki bütün bilgilerin doğru ve tam olduğunu, bilgilerin üretilmesi aşamasında bilimsel etiğe uygun davrandığımı, yararlandığım bütün kaynakları atıf yaparak belirttiğimi beyan ederim.

17.01.2020



Musa Emre KAVGACI

# ÖZET

Doktora Tezi

## İNTEGRO FARK DENKLEMLERİNİN ZAYIF LİNEER OLMAYAN ANALİZİ

Musa Emre KAVGACI

Ankara Üniversitesi  
Fen Bilimleri Enstitüsü  
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Hüseyin BEREKETOĞLU

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır.

İlk bölüm giriş kısmına ayrılmıştır. Bu bölümde, matematiksel ekoloji alanında yapılan çalışmalardan bahsedilmiş ve tezde kullanılan bazı önemli tanım ve teoremlere yer verilmiştir.

İkinci bölümde, lojistik ve Ricker büyüme fonksiyonlu integro fark denklem modeli ve bir av-avcı sistemi için integro fark denklem sistemi modeli oluşturulmuştur.

Üçüncü bölümde ise, ortaya çıkan modellerin lineer kararlılık analizleri yapılarak, seçilen çekirdek fonksiyonları yardımıyla, çözümlerin davranışları incelenmiştir.

Dördüncü bölümde, zayıf lineer olmayan analiz yöntemi için gerekli olan çoklu-ölçek pertürbasyon metodundan bahsedilmiş ve zayıf lineer olmayan analiz yöntemiyle, ortaya çıkan genliklerin davranışı incelenmiştir.

Son bölümde ise bu tezde yapılan çalışmalar ve bu çalışmaların sonuçları ifade edilmiştir.

**Ocak 2020, 51 sayfa**

**Anahtar Kelimeler:** İntegro fark denklemleri, lokal olmayan etkileşimler, çatallanma, zayıf lineer olmayan analiz, desen oluşumu, kararlılık.

# ABSTRACT

Ph.D. Thesis

WEAKLY NONLINEAR ANALYSIS OF INTEGRO DIFFERENCE EQUATIONS

Musa Emre KAVGACI

Ankara University  
Graduate School of Natural and Applied Sciences  
Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Hüseyin BEREKETOĞLU

This thesis consists of five chapters.

The first chapter is devoted to the introduction. In this section, studies on mathematical ecology are mentioned and some important definitions and theorems used in the thesis are introduced.

In the second chapter, an integro-difference equation model with logistic and Ricker growth functions and integro-difference equations system model for a predator-prey system are created.

In the third chapter, linear stability analysis of the resulting models are done and the behavior of the solutions are examined with the help of selected kernel functions.

In the fourth chapter, the multiple-scale perturbation method which is necessary for the weakly nonlinear analysis method is mentioned and the behavior of the amplitudes that occur with the weakly nonlinear analysis method is examined.

In the last chapter, results and conclusion of the thesis are expressed.

**January 2020, 51 pages**

**Key Words:** Integro difference equations, nonlocal interactions, bifurcation, weakly nonlinear analysis, pattern formation, stability

## TEŞEKKÜR

Doktora eğitimim boyunca bilgi ve tecrübelerini benimle paylaşan, çalışmalarına ışık tutan ve bilim insanı olarak yetişmemde emeği olan değerli danışman hocam Sayın Prof. Dr. Hüseyin BEREKETOĞLU'na (Ankara Üniversitesi Matematik Anabilim Dalı) en içten saygı ve teşekkürlerimi sunarım. Ayrıca, bu çalışmanın ortaya çıkmasında emeği olan ve çalışmanın her aşamasında bilgilerini ve zamanını benden esirgemeyen, konu, kaynak ve yayın açısından bana yol gösteren tez izleme kurulu üyesi Sayın Doç. Dr. Özgür Hakan AYDOĞMUŞ'a (Ankara Sosyal Bilimler Üniversitesi Ekonomi Anabilim Dalı) teşekkürü bir borç bilirim. Tez izleme kurulu üyesi Sayın Prof. Dr. Fatma KARAKOÇ'a (Ankara Üniversitesi Matematik Anabilim Dalı) çalışmalarım boyunca vermiş olduğu destekten dolayı çok teşekkür ederim.

Çalışmalarım esnasında beni yalnız bırakmayan ve her zaman destek olan eşim ve hayat arkadaşım Emel YILDIRIM KAVGACI'ya çok teşekkür ederim.

Musa Emre KAVGACI  
Ankara, Ocak 2020

## İÇİNDEKİLER

TEZ ONAY SAYFASI	
ETİK.....	i
ÖZET.....	ii
ABSTRACT.....	iii
TEŞEKKÜR.....	iv
SİMGELER DİZİNİ.....	vi
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	vii
1. GİRİŞ.....	1
2. MODEL.....	11
2.1 İntegro Fark Denklemi.....	11
2.2 Lojistik Büyüme Fonksiyonu.....	13
2.3 Ricker Büyüme Fonksiyonu.....	14
2.4 İntegro Fark Denklem Sistemi.....	14
3. LİNEER ANALİZ.....	18
3.1 Linear Kararlılık Analizi.....	18
3.2 Tek Tür Modeli için Çekirdek Fonksiyonu ve Hesaplanan Sonuçlar	21
3.3 İntegro Fark Denklem Sisteminin Linear Analizi.....	24
3.4 Av-Avcı Modeli için Çekirdek Fonksiyonu ve Hesaplanan Sonuçlar	28
4. ZAYIF LİNEER OLMAYAN ANALİZ.....	32
4.1 Çoklu-Ölçek Pertürbasyon Metodu.....	32
4.2 İntegro Fark Denkleminin Zayıf Linear Olmayan Analizi.....	33
4.3 İntegro Fark Denklem Sistemlerinin Zayıf Linear Olmayan Analizi	41
5. TARTIŞMA VE SONUÇ.....	45
KAYNAKLAR.....	47
ÖZGEÇMİŞ.....	51

## SİMGELER DİZİNİ

$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
$\mathbb{Z}$	Tam sayılar kümesi
$\mathbb{N}$	Doğal sayılar kümesi
$\propto$	Orantılı
$\overline{A}$	$A$ nın eşleniği
$\ll$	Çok daha küçük
$\approx$	Yaklaşık olarak eşit
$\nabla^2$	Laplacian operatörü
$C[a, b]$	$[a, b]$ aralığında sürekli fonksiyonların kümesi



## ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 1.1 $x(n+1) = x^3(n)$ denkleminin sabit noktaları.....	4
Şekil 2.1 Kararlılık bölgesi.....	15
Şekil 2.2 $c = 1.5$ ve $r = 1$ .....	16
Şekil 2.3 $c = 2.1$ ve $r = 1$ .....	16
Şekil 2.4 $c = 1.25$ ve $r = 2.8$ .....	17
Şekil 3.1 Desen oluşumu bölgesi.....	22
Şekil 3.2 Lojistik büyüme fonksiyonlu modelin denge çözümü.....	23
Şekil 3.3 Ricker büyüme fonksiyonlu modelin denge çözümü.....	23
Şekil 3.4 Çatallanma bölgeleri.....	29
Şekil 3.5 $N_t$ ' nin dalga oluşumu.....	30
Şekil 3.6 $P_t$ ' nin dalga oluşumu.....	30
Şekil 3.7 Yayılma çekirdeği olmadığında sistemin grafiği.....	31
Şekil 4.1 Lojistik büyüme fonksiyonlu model için genlik seviyesi.....	39
Şekil 4.2 Ricker büyüme fonksiyonlu model için genlik seviyesi.....	39
Şekil 4.3 $K_{d,a}$ etkileşim çekirdeği ile lojistik fonksiyonlu modelin desen oluşumu..	40
Şekil 4.4 $K_{d,a}$ etkileşim çekirdeği ile Ricker fonksiyonlu modelin desen oluşumu...	41

## 1. GİRİŞ

Son zamanlarda matematiksel biyoloji ve ekoloji alanında birçok model ortaya konmuştur. Önemli araştırmaların ilgi odağı olan bu modeller, fark denklemleri yardımıyla ayrık zamanlı sistemlerde de çalışılmaya başlanmıştır. Bu çalışmalar neticesinde özellikle matematiksel biyoloji ve ekoloji alanları için önemli sonuçlar elde edilmiştir. Matematiksel ekoloji, nüfus artışı ve nüfusta meydana gelen dalgalanmaları araştıran popülasyon ekolojisinde önemli bir yere sahiptir. Modern matematiksel ekoloji alanındaki ilk orjinal çalışma, Lotka ve Volterra tarafından yapılmıştır (Lotka 1925, Volterra 1926). Lineer olmayan diferensiyel denklemler yardımıyla, av-avcı ve rekabet modelleri üzerinde çalışan Lotka ve Volterra, önemli sonuçlar elde etmiş ve bu sonuçlar neticesinde, av-avcı ve rekabet modelleri literatürde birçok çalışmanın konusu olmuştur (Maynard 1974, May 1976, 1977, Beverton ve Holt 1977, Kot 2001). Bitkiler ve hayvanlar, birçok karmaşık yapıdan meydana gelmektedir. Bundan dolayı fiziksel bilimlerde var olan yasalar, biyolojik bilimlerde yetersiz kalmaktadır. Örneğin, birçok hayvan türü hareket seçme yeteneğine sahiptir ve bu durum, bir sarkacın deterministik kurallara bağlı olan hareketinden daha farklıdır. Ayrıca, büyük veya küçük boyuttaki tüm organizmalar yayılarak, çevreleriyle etkileşime girmektedir. Bu yayılma, biyolojik bilimler açısından büyük önem arz etmektedir ve bu davranışı inceleyebilmek için farklı matematiksel modellere ihtiyaç duyulmuştur.

Fisher ve Kolmogorov'un popülasyon genetiğindeki öncü çalışmalarından bu yana, Turing gelişim biyolojisi alanında, Skellam (1951) ve Kierstead ve Slobodkin (1953) ekoloji dalında yayılmayı da göz önüne alarak canlıların kaynak rekabetini incelemiştir. Bu yayılma, sürekli zamanlı modellerde reaksiyon-difüzyon denklemleri ile formülize edilmiştir (Britton 1986, Conway and Smoller 1977, Fife 1979). Bir boyutlu en basit reaksiyon-difüzyon denklemi genel olarak

$$\partial_t u = D \partial_x^2 u + R(u)$$

şeklinde tanımlanır (Kolmogorov vd. 1937). Burada,  $u(x, t)$ ,  $x$  konum ve  $t$  zaman parametrelerine bağlı bir fonksiyon,  $D$  difüzyon katsayısı ve  $R$  ise, reaksiyon

terimidir.

Reaksiyon-difüzyon denklemlerinde difüzyonun kararsızlığa yol açtığı 1952 yılında Turing tarafından ortaya konmuştur. Turing yaptığı çalışmada, iki kimyasal bileşenli

$$\begin{cases} \frac{\partial A}{\partial t} = D_A \nabla^2 A + F(A, B), \\ \frac{\partial B}{\partial t} = D_B \nabla^2 B + G(A, B), \end{cases}$$

sisteminde difüzyonun olmaması durumunda yani,  $D_A = D_B = 0$  için bazı koşullar altında çözümlerin kararlı olduğunu göstermiş ve aynı türden etkileşimlerin difüzyon ile birlikte denge durumunu kararsız hale getirdiğini ve modelin bir desen oluşumu ortaya çıkardığını kanıtlamıştır. Segel ve Stoeckly (1972) ise bu düşüncüyü ekolojiye aktarmış ve reaksiyon-difüzyon denklemi yardımıyla bazı amiplerin davranışları hakkında önemli sonuçlar elde etmişlerdir.

Sürekli zamanlı sistemlerde desen oluşumuna sebep olan bir diğer önemli mekanizma ise lokal olmayan etkileşimlerdir. Bu etkileşimler Britton (1989, 1990) ve Gourley (2000) tarafından ele alınmıştır. Britton (1989) yaptığı çalışmada basit bir biyolojik popülasyon modelini,  $t$  zamani ve  $g * u$  konvolüsyonu göstermek üzere,

$$u_t = u(1 + \alpha u - (1 + \alpha)g * u) + \Delta u$$

formunda tanımlamıştır. Bu modelde,  $\alpha u$  terimi avantajlı lokal gruplaşmayı göstermektedir. Bu gruplaşmanın çeşitli sebepleri vardır. Birincisi, bazı hayvanların örneğin balık veya kuşların beraber hareket ederek avcılara karşı koruyucu bir önlem almalarıdır. İkincisi, bazı hayvanların gruplar halinde gezerek, birey başına düşen arama süresini azaltmak ve farklı gıda kaynakları sağlamalarıdır. Üçüncüsü ise, artan grup büyüklüğünün üreme başarısında artışa neden olmasıdır.  $-(1 + \alpha)g * u$  terimi ise, lokal olmayan etkileşimleri tanımlamaktadır. Ayrıca lokal olmayan etkileşim terimine sahip bir denklemin çözümlerinin kararsızlığı da birçok çalışmanın konusu olmuştur (Fuentes vd. 2003, 2004, Genieys vd. 2006, 2009, Perthame vd. 2007, Banarjee ve Volpert 2016). Lokal olmayan rekabet ve etkileşimlerin reaksiyon-difüzyon denklemlerindeki etkileri ise, Tanzy vd. (2013), Aydogmus (2015), Banerjee vd. (2017) tarafından araştırılmıştır.

Maalesef, ayrık zaman aralığında, iyi tanımlanmış büyüme ve dağılma evrelerine sahip organizmalar ile çalışırken reaksiyon-difüzyon denklemleri uygun değildir. Nite-

kim, Neubert vd. (1995) yaptıkları çalışmada bazı türlerin modellenmesinde reaksiyon-difüzyon denklemlerinin uygun olmadığını ileri sürmüşlerdir. Bundan dolayı, ayrık zaman aralığında reaksiyon-difüzyon denklemlerinin bir benzeri olan integro fark denklemleri kullanılmıştır. Kot ve Schaffer (1986) ve Hardin vd. (1988) integro fark denklemlerini popülasyon ekolojisi literatürüne kazandırmışlardır. Daha sonra, bu denklemler, türlerin davranışları ve hareketli dalgalar (travelling waves) açısından Kot (1992), yayılma ve istila bakımından Kot vd. (1996) ve desen oluşumu açısından ise Neubert vd. (1995) tarafından analiz edilmiştir. İntegro fark denklemlerini kullanarak rekabet ve etkileşimlerin denge noktasında yol açtığı kararsızlıkları incelemek, meydana gelen desen oluşumlarının genlikleri hakkında bilgi edinmek ve oluşabilecek çatallanmaları göstermek bu alanda önemli bir çalışma olacaktır.

Bu tezin ilk kısmında, lojistik ve Ricker büyüme fonksiyonuna sahip integro fark denklemi ve integro fark denklem sistemi modellerinden bahsedilecek ve daha sonra bu modellerin lineer kararlılık analizi yapılacaktır. İkinci kısmında ise, sürekli zamanlı sistemlerde iyi bilinen bir yöntem olan zayıf lineer olmayan analiz yöntemi kullanılarak ortaya çıkan desenlerin genlikleri hakkında bilgi edinilecek ve Stuart-Landau tipinde bir denklem bulunarak, çatallanma çeşitleri ve genlikler hakkında nümerik sonuçlar ortaya konacaktır. Zayıf lineer olmayan analiz yöntemi, 1958 ve 1960 yılında Stuart tarafından akışkanlar mekaniği alanında kullanılmış ve oluşan genliklerin denklemleri elde edilmiştir. Bu denklemler, Landau' nun 1944 yılında kullanmış olduğu yöntem ve terimlerle, Stuart tarafından geliştirilerek Stuart-Landau denklemi adını almıştır (Landau 1944, Stuart 1958, 1960). Bu denklem  $A$  genlik fonksiyonu olmak üzere,

$$\frac{dA}{dt} = \sigma A - \frac{1}{2}A|A|^2$$

biçiminde olup, çatallanma noktasının yakınındaki sistemin doğrusal olmayan bir salınım davranışını tanımlar.

Şimdi, bu tezde kullanılan bazı tanım ve teoremlerden bahsedilecektir.

**Tanım 1.1** Bir  $x : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$  fonksiyonu için  $\Delta$  fark operatörü veya  $x$  in birinci basamaktan farkı

$$\Delta x(n) = x(n+1) - x(n)$$

şeklinde tanımlanır (Kelley ve Peterson 1991).

**Tanım 1.2 (Denge Noktası)**

$$x(n+1) = f(x(n)) \quad (1.1)$$

denklemi için  $f(x^*) = x^*$  eşitliğini sağlayan  $x^*$  değerlerine (1.1) denkleminin denge noktaları veya sabit noktaları denir.

Başka bir deyişle,  $x(0) = x^*$  başlangıç noktası olmak üzere,

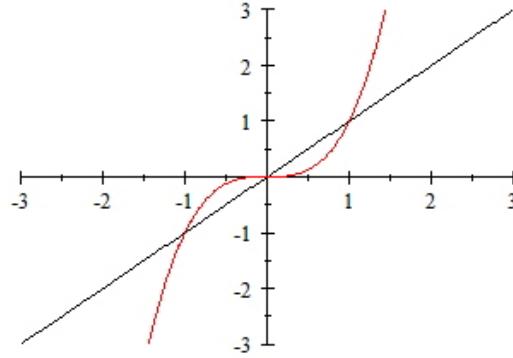
$$x(1) = f(x^*) = x^*, x(2) = f(x(1)) = f(x^*) = x^*, \dots$$

olup  $x^*$ , (1.1) in sabit çözümüdür (Elaydi 1999).

**Örnek 1.1**  $x(n+1) = x^3(n)$  denkleminin üç tane denge noktası vardır.  $f(x) = x^3$  olup,

$$f(x^*) = x^* \text{ veya } x^3 = x$$

den,  $x_1^* = 0$ ,  $x_2^* = -1$ ,  $x_3^* = 1$  dir (Şekil 1.1).



Şekil 1.1  $x(n+1) = x^3(n)$  denkleminin sabit noktaları

**Tanım 1.3 (Homojen denge çözümü)** Modele mekansal boyutun eklenmesiyle ortaya çıkan

$$u_{n+1}(x) = f(u_n(x))$$

denkleminin  $f(u^*(x)) = u^*(x)$  eşitliğini sağlayan  $u^*(x)$  değerlerine homojen denge çözümü denir.

**Tanım 1.4**  $x^*$ , (1.1) denkleminin bir sabit noktası olsun. Verilen bir  $\varepsilon > 0$  sayısına karşılık  $|x_0 - x^*| < \delta$  olduğunda her  $n > 0$  için  $|f^n(x_0) - x^*| < \varepsilon$  olacak şekilde bir  $\delta > 0$  varsa,  $x^*$  denge noktasına *kararlıdır* denir. Kararlı olmayan bir  $x^*$  denge noktasına *kararsızdır* denir (Elaydi 1999).

**Tanım 1.5**  $x^*$ , (1.1) denkleminin bir sabit noktası olsun.  $|x_0 - x^*| < \eta$  olduğu zaman,  $\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x_0) = x^*$  olacak şekilde bir  $\eta > 0$  varsa, (1.1) in  $x^*$  denge noktasına bir *atraktör* denir. Eğer  $\eta = \infty$  ise, o zaman  $x^*$  a (1.1) in bir *global atraktörü* denir (Elaydi 1999).

**Tanım 1.6**  $x^*$ , (1.1) denkleminin bir sabit noktası olsun.  $x^*$  kararlı ve bir atraktör ise, o zaman  $x^*$  denge noktasına *asimptotik kararlı denge noktası* denir.  $\eta = \infty$  ise,  $x^*$  bir *global asimptotik kararlı denge noktasıdır* (Elaydi 1999).

**Teorem 1.1**  $x^*$ , (1.1) fark denkleminin bir denge noktası ve  $f$ ,  $x^*$  da sürekli türevlenebilen bir fonksiyon olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler doğrudur:

- (i)  $|f'(x^*)| < 1$  ise,  $x^*$  asimptotik kararlıdır.
- (ii)  $|f'(x^*)| > 1$  ise,  $x^*$  kararsızdır.

**Teorem 1.2**  $x^*$ , (1.1) denkleminin bir denge noktası ve  $f'(x^*) = 1$  olsun. Bu durumda aşağıdaki durumlar sağlanır.

- (i)  $f''(x^*) \neq 0$  ise,  $x^*$  kararsızdır.
- (ii)  $f''(x^*) = 0$  ve  $f'''(x^*) > 0$  ise,  $x^*$  kararsızdır.
- (iii)  $f''(x^*) = 0$  ve  $f'''(x^*) < 0$  ise,  $x^*$  asimptotik kararlıdır.

**Tanım 1.7** (Schwarzian türevi)

$$Sf(x) = \frac{f'''(x)}{f'(x)} - \frac{3}{2} \left[ \frac{f''(x)}{f'(x)} \right]^2$$

şeklinde tanımlanan türeve *Schwarzian* türevi adı verilir (Elaydi 1999).

Eğer  $f'(x^*) = -1$  ise,

$$Sf(x^*) = -f'''(x^*) - \frac{3}{2}(f''(x^*))^2$$

dir.

**Teorem 1.3**  $x^*$ , (1.1) in denge noktası ve  $f'(x^*) = -1$  olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler sağlanır.

(i)  $Sf(x^*) < 0$  ise,  $x^*$  asimptotik kararlıdır.

(ii)  $Sf(x^*) > 0$  ise,  $x^*$  kararsızdır.

**Tanım 1.8**  $b$ ,  $f$  fonksiyonunun tanım kümesinde olsun.  $f^k(b) = b$  olacak şekilde bir  $k > 0$  tamsayısı varsa,  $b$  noktasına  $f$  fonksiyonunun veya (1.1) denkleminin bir *periyodik noktası* denir. Başka bir deyişle,

$$x(n+1) = g(x(n))$$

denkleminin denge noktasına *k-periyodik nokta* denir, burada  $g = f^k$  dır (Elaydi 1999).

**Teorem 1.4** (Schur-Cohn kriteri)

$$X(n+1) = F(X(n))$$

fark denklem sisteminin denge çözümü  $X^*$  olsun. Bu sistem  $U(n) = X(n) - X^*$  dönüşümü altında

$$U(n+1) = JU(n),$$

lineer sistemine indirgenir, burada,  $J$  matrisi  $X^*$  noktasında hesaplanmış Jacobiyen matrisidir. Bu matrisin özdeğerleri

$$\det(J - \lambda I) = 0$$

karakteristik denklemi ile bulunur. Bu denklemin karakteristik polinomu ise,  $a_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  reel sabitler olmak üzere,

$$p(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + \dots + a_n$$

dir. Bu karakteristik polinomun kökleri  $|\lambda| < 1$  ise, denge çözümü asimptotik kararlıdır (Jury 1964).

**Teorem 1.5** Özel olarak  $p(\lambda) = \lambda^2 + a_1\lambda + a_2$  polinomunun tüm  $\lambda$  özdeğerlerinin birim diskin içinde kalması için gerek ve yeter koşul

$$|a_1| < 1 + a_2 < 2$$

olmasıdır.

**Teorem 1.6** (Fredholm Alternatif teoremi)  $Ax = b$  matris denkleminin bir çözüme sahip olması için gerek ve yeter koşul  $A^T v = 0$  eşitliğini sağlayan her  $v$  vektörü için  $\langle b, v \rangle = 0$  olmasıdır.

Çatallanma kavramı aşağıdaki biçimde tanımlanabilir.

**Tanım 1.9** Bir parametredeki değişikliğe bağlı olarak bir sistemin veya denklemin denge noktasının davranışında meydana gelen değişiklik durumuna çatallanma denir.

Çatallanma konusunda ilk çalışma Fransız matematikçi Henri Poincare tarafından 1885 yılında yapılmış ve daha sonra bu konu Eberhard Hopf, Aleksandr Andronov vd. tarafından çalışılmıştır (Poincare 1885, Hopf 1942).

**Tanım 1.10** (Tırmık çatallanma)

Kritik çatallanma değeri geçilirken, bir kararsız ve iki kararlı denge noktası olmak üzere üç denge noktası meydana geliyorsa, bu tip çatallanmaya *süperkritik tırmık çatallanma* denir. Eğer bir kararlı ve iki kararsız denge noktası meydana geliyorsa, bu tip bir çatallanmaya da *subkritik tırmık çatallanma* denir.

**Tanım 1.11** (Transkritik çatallanma)

Bu çatallanma türünde biri kararlı ve diğeri kararsız olan iki denge noktası, çatallanma parametresi geçilirken kararlılık yapılarını değiştirirler. Yani, kararsız olan denge noktaları kararlı; kararlı olan denge noktası ise kararsız duruma gelir.

Mekansal boyutun eklenmesiyle oluşan modellerde, bireylerin hareket etme durumunun, uzayda ortaya çıkan herhangi bir heterojenliği homojenleştirme eğiliminde olduğu gözlenmiştir. Bu nedenle, rastgele difüzyonun mekansal olarak homojen çözümler ortaya çıkardığı düşünülmüştür. Ancak, Turing difüzyonunun tam aksi bir



etki gösterebileceğini keşfetmiştir. Difüzyon, yayılma kararsızlıkları veya Turing kararsızlıkları olarak adlandırılan homojen olmayan desen(örtüntü) oluşumlarına neden olabilir. Turing, reaksiyona giren ve yayılan kimyasal bileşenler arasındaki uygun etkileşimlerin, kararsız bir durumdan ortaya çıkan kararlı mekansal desen oluşumlarına yol açabileceğini göstermiştir. Bir reaksiyon-difüzyon sisteminde, homojen denge durumu difüzyonun yokluğunda kararlı fakat difüzyon mevcut olduğunda küçük mekansal pertürbasyonlarla kararsız duruma geliyorsa, Turing kararsızlığı olarak adlandırılan difüzyona bağlı kararsızlık sergiler.

Desen(örtüntü) oluşumu ekoloji ve biyoloji alanında birçok bilim insanı tarafından çalışılmıştır (Okubo ve Levin 2001, Murray 2013). Bazı hayvanların üzerindeki desenler, insan beyninin görsel korteksinde oluşan şerit oluşumları ve embriyo hücrelerinin gelişim aşamalarındaki oluşumlar desen oluşumlarına örnek olarak gösterilebilir. Murray hayvanların postları, leoparların üstündeki benekler, yılanların derileri ve kelebeklerin kanatlarındaki desenler gibi desen oluşumuna dair birçok uygulamadan bahsetmiştir (Murray 1993, 2003).

Bu tezde kullanılan diğer kavramlar aşağıda verilmiştir.

**Tanım 1.12** (Fourier Dönüşümü) Bir  $f$  fonksiyonu her sonlu  $[-L, L]$  aralığında parçalı sürekli ve  $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx$  integrali yakınsak olsun. Bu durumda,

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx$$

ifadesine,  $f$  fonksiyonun Fourier dönüşümü adı verilir (Bochner ve Chandrasekharan 1949).

**Tanım 1.13** (Ters Fourier Dönüşümü)  $\hat{f}(\omega)$  nın ters Fourier dönüşümü

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega x} d\omega$$

ile tanımlanan  $f(x)$  fonksiyonudur (Bochner ve Chandrasekharan 1949).

**Tanım 1.14** (Konvolüsyon)  $f$  ve  $g$  nin  $f * g$  konvolüsyonu

$$f(x) * g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\omega)g(x - \omega)d\omega$$

şeklinde tanımlanır (Bochner ve Chandrasekharan 1949).

**Teorem 1.7**  $\widehat{f}(\omega)$  ve  $\widehat{g}(\omega)$  sırasıyla,  $f(x)$  ve  $g(x)$  fonksiyonlarının Fourier dönüşümleri olmak üzere,  $f * g$  konvolüsyonunun Fourier dönüşümü  $\widehat{f}(\omega)\widehat{g}(\omega)$  çarpımına eşittir (Bochner ve Chandrasekharan 1949).

**Tanım 1.15**  $f$  fonksiyonu  $[a, b]$  aralığında  $n$  yinci basamaktan sürekli türevlenebilir olsun.  $f^{(n+1)}$ ,  $(a, b)$  aralığında mevcut ise,  $\varepsilon_0, \varepsilon \in (a, b)$  için

$$f(\varepsilon) = f(\varepsilon_0) + (\varepsilon - \varepsilon_0)f'(\varepsilon_0) + \dots + \frac{1}{n!}(\varepsilon - \varepsilon_0)^n f^{(n)}(\varepsilon_0) + R_{n+1}$$

dir. Burada,

$$R_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!}(\varepsilon - \varepsilon_0)^{n+1} f^{(n+1)}(\xi), \quad \xi \in (\varepsilon_0, \varepsilon).$$

dur.

**Teorem 1.8** (Ortalama Değer Teoremi)  $f$  fonksiyonu  $[a, b]$  aralığında sürekli ve  $(a, b)$  açık aralığında türevlenebilir olsun. Bu durumda,  $c \in (a, b)$  için

$$f(b) = f(a) + (b - a)f'(c)$$

dir.

Asimptotik yaklaşımları tanımlamak için, Bachmann–Landau sembollerini tanıtmak gerekir.

**Tanım 1.16**  $\varepsilon \geq \varepsilon_0$  iken  $|f(\varepsilon)| \leq k_0|\phi(\varepsilon)|$  olacak şekilde  $k_0$  ve  $\varepsilon_0$ , sabitleri var ise, bu durumda

$$f = O(\phi)$$

dir..

$$f = o(\phi)$$

eşitliğinin anlamı,  $\lim_{\varepsilon \rightarrow \varepsilon_0} (f/\phi) = 0$  demektir (Bachmann 1894).

**Teorem 1.9** Eğer,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow \varepsilon_0} \frac{f(\varepsilon)}{\phi(\varepsilon)} = L,$$

ise,  $\varepsilon \rightarrow \varepsilon_0$  için  $f = O(\phi)$  dir. Burada,  $-\infty < L < \infty$  dur. Eğer,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow \varepsilon_0} \frac{f(\varepsilon)}{\phi(\varepsilon)} = 0,$$

ise,  $\varepsilon \rightarrow \varepsilon_0$  için  $f = o(\phi)$  dir.

**Tanım 1.17**  $f(\varepsilon)$  ve  $\phi(\varepsilon)$  fonksiyonları verilsin,  $\varepsilon \rightarrow \varepsilon_0$  için  $f = \phi + o(\phi)$  olduğunda  $\phi(\varepsilon)$ 'a  $f(\varepsilon)$  nun asimptotik yaklaşımı denir ve  $f \sim \phi$  ile gösterilir (Holmes 2012).

Şimdi, asimptotik açılımlar için aşağıdaki tanımlar verilsin.

**Tanım 1.18**  $\forall m \in \mathbb{N}$  için  $\varepsilon \rightarrow \varepsilon_0$  iken, eğer,  $\phi_{m+1} = o(\phi_m)$  ise,  $\phi_1(\varepsilon), \phi_2(\varepsilon), \dots$  fonksiyonları asimptotik dizi oluşturur.

**Tanım 1.19** Eğer  $\phi_1(\varepsilon), \phi_2(\varepsilon), \dots$  asimptotik bir dizi ise,  $f(\varepsilon)$ ,  $n$  terimine göre asimptotik bir açılıma sahiptir ve  $\varepsilon \rightarrow \varepsilon_0$  olmak üzere,

$$f = \sum_{k=1}^m a_k \phi_k + o(\phi_m), \quad m = 1, 2, \dots, n$$

dir. Burada,  $a_k$  terimi  $\varepsilon$  dan bağımsızdır.

Böylece,  $\varepsilon \rightarrow \varepsilon_0$  olmak üzere,

$$f \sim a_1 \phi_1(\varepsilon) + a_2 \phi_2(\varepsilon) + \dots + a_n \phi_n(\varepsilon)$$

yazılabilir.

**Örnek 1.2**  $\varepsilon \ll 1$  olmak üzere,  $e^\varepsilon$  nun üç terimli açılımı, Taylor teoreminden aşağıdaki gibi elde edilebilir:

$$\begin{aligned} e^\varepsilon &= 1 + \varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon^2 + \frac{1}{3}\varepsilon^3 + \dots \\ &\sim 1 + \varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon^2. \end{aligned}$$

## 2. MODEL

Bu bölümde, lojistik ve Ricker büyüme fonksiyonlarına sahip bir tek türü modelleyen bir integro fark denklemi elde edilecek ve bu denklemde yer alan çekirdek fonksiyonlarının bazı özelliklerinden bahsedilecektir. Daha sonra ise, kararlılık teorisinin önemli uygulamalarından biri olan, aynı çevreyi paylaşan iki veya daha çok biyolojik nüfus arasındaki etkileşimi içeren av-avcı modeli için bir integro fark denklem sistemi ele alınacaktır.

### 2.1 İntegro Fark Denklemi

Fisher 1937 yılında yaptığı çalışmada, avantajlı genlerin yayılmasını açıklamak için

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \Delta v + v(1 - v) \quad (2.1)$$

denklemini kullanmıştır. Bir genin sıklığı, konum ve zamanın fonksiyonu olan  $v(x, t)$  ile gösterilmek üzere, burada  $\Delta = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$  olmak üzere, Laplacian bireylerin hareketliliğini modellemek için kullanılmıştır. Reaksiyon terimi olarak ise, lojistik büyüme fonksiyonu alınmıştır.

Reaksiyon-difüzyon denklemlerinin birçok özelliğine sahip ayrık zamanlı bir model Kot ve Schaffer tarafından ele alınmıştır (Kot ve Schaffer, 1986). Bu çalışmada, büyüme ve yayılmanın, yaşam döngüsünün farklı bir aşamasında meydana geldiği ve bireylerin yaşam döngüsünün geri kalanında nispeten hareketsiz olduğu varsayılmıştır. Bu birçok organizma için makul bir yaklaşımdır. Popülasyonun dağılımı için lineer bir operatör ve popülasyonun büyümesi için de lineer olmayan bir operatör birlikte ele alınabilir. Bu tezde öncelikle popülasyonun büyümesi lineer olmayan

$$u_{n+1} = f(u_n)$$

denklemi ile ifade edilir. Burada  $f$ , lojistik veya Ricker lojistik büyüme fonksiyonu olarak alınacaktır. Yukarıda verilen denklem bireylerin mekansal hareketlerini göz ardı eder. Dolayısıyla, uzaysal konum  $x$  ve zaman  $n$  ile gösterilmek üzere, popülasyondaki bireylerin yoğunluğu  $u_n(x)$  biçiminde ifade edilir. Yukarıda belirtildiği gibi, ilk aşama büyümenin olduğu  $u_n(x)$  den  $f(u_n(x))$  e dönüşümdür. İkinci

aşama ise, uzaysal karışmadır. Yani, bu aşamada yayılma meydana gelir ve bu aşama integral operatör ile modellenir. Bu modelde hareketliliği belirtmek için bir  $y$  konumunun komşuluğundan gelen bireylerin  $x$  konumunun komşuluğuna hareket etmesini tanımlayan bir olasılık çekirdeği  $K_1(x, y)$  olarak kullanılacaktır. Biyolojik bir bakış açısıyla, iki nokta arasındaki uzaklığın göç etme olasılığına bağlı, yani  $K_1(x, y) = K_1(x - y)$  olduğunu varsaymak makul olur. Böylece, bir integro-fark denklemi

$$u_{n+1}(x) = [K_1 * f(u_n)](x) = \int_{\mathbb{R}} K_1(x - y) f(u_n(y)) dy \quad (2.2)$$

olarak tanımlanır. Burada,  $K_1$  uzaklığa bağlı yayılma çekirdeğidir. (2.2) denklemi Lojistik ve Ricker fonksiyonları için, Kot ve Schaffer (1986) ve Kot (1992) tarafından çalışılmıştır.

Lokal olmayan etkileşimleri modelleyen Fisher denklemi aşağıdaki gibi verilmiş olup,

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \Delta v + v(1 - K_2 * v) \quad (2.3)$$

bu denklem desen oluşumu ve hareketli dalgaların incelenmesi açısından Britton, Gourley, Genieys, Fuentes gibi birçok yazar tarafından çalışılmıştır (Britton 1989, Gourley 2000, Genieys vd. 2006, Fuentes vd. 2003). Burada,  $K_2$  terimi, (2.2) denklemindeki konvolüsyon şeklinde tanımlanır ve lokal olmayan etkileşimi modeller. (2.3) denkleminin denge çözümü,  $K_2$  çekirdek fonksiyonunun Fourier dönüşümünün negatif değerler almasıyla kararsız hale gelir (Genieys vd. 2006). Yani, denge noktasını kararsız hale getiren lokal olmayan etkileşim terimidir.

Öncelikle, çekirdek fonksiyonları için bazı kabuller ele alınsın.  $\forall x \in \mathbb{R}$  ve  $j = 1, 2$  için

- $K_j(x) \geq 0$ , kompakt destekli\* ve parçalı sürekli,
- $K_j(x) = K_j(-x)$ , yani simetrik,
- $\int_{\mathbb{R}} K_j(x) dx = 1$

olsun.

Lokal olmayan etkileşim için aşağıdaki iki büyüme fonksiyonu ele alınacaktır.

\*sıfırdan farklı değer aldığı noktaların kapanışı kompakt küme olan fonksiyon

## 2.2 Lojistik Büyüme Fonksiyonu

Lojistik ismi Belçikalı matematikçi Pierre-François Verhulst tarafından verilmiştir. Lojistik ifadesi Yunanca da logistikos yani hesaplamadan gelmektedir. Lojistik fark denklemi ise, ilk olarak Maynard Smith 1968 ve May 1972 tarafından ele alınmıştır. Bu denklem

$$N_{t+1} = (1 + r)N_t - \frac{r}{K}N_t^2 \quad (2.4)$$

olmak üzere, burada  $K$ , çevrenin taşıma kapasitesini ve  $r$ , büyüme oranını göstermektedir.  $N_t$  ise,  $t$  zamanındaki nüfus seviyesidir. Bu denkleme

$$u_n = \frac{r/K}{1 + r}N_t$$

dönüşümü uygulanır ve sonrasında kolaylık açısından  $1 + r$  parametresi yerine  $r$  parametresi alınırsa,

$$u_{n+1} = ru_n(1 - u_n) \quad (2.5)$$

lojistik fark denklemi elde edilir. Böylece lokal olmayan etkileşim için  $K_2$  çekirdeği göz önüne alınırsa;

$$f_l(u, K_2 * u) = ru(1 - K_2 * u) \quad (2.6)$$

lojistik büyüme fonksiyonu bulunur.

(2.5) lojistik fark denkleminin iki denge noktası  $u_l^{**} = 0$  ve  $u_l^* = \frac{r-1}{r}$  olup, sıfırdan farklı denge noktası biyolojik olarak anlamlıdır.  $u_l^*$  denge noktası,  $1 < r \leq 3$  için asimptotik kararlıdır. Gerçekten,  $f(u) = ru(1 - u)$  için  $f'(u) = r - 2ru$  olup, Teorem 1.1 den

$$|f'(u_l^*)| = |r - 2r(\frac{r-1}{r})| = |-r + 2| < 1$$

olmalıdır. Buradan,  $-1 < -r + 2 < 1$  olup,  $1 < r < 3$  koşulu elde edilir. Ayrıca,  $r = 3$  ise,  $f'(u_l^*) = -1$  olup, Teorem 1.3 den,

$$\begin{aligned} Sf(u_l^*) &= -f'''(u_l^*) - \frac{3}{2}(f''(u_l^*))^2 \\ &= 0 - \frac{3}{2}(36) = -54 \\ &< 0 \end{aligned}$$

olup, denge noktası,  $r = 3$  için de asimptotik kararlıdır.

### 2.3 Ricker Büyüme Fonksiyonu

Ricker denklemi 1954 yılında W. E. Ricker tarafından ele alınmıştır (Ricker 1954).

Bu denklem

$$u_{t+1} = u_t e^{R \left(1 - \frac{u_t}{K}\right)} \quad (2.7)$$

olup, burada  $K$ , çevrenin taşıma kapasitesini ve  $R$ , büyüme oranını göstermektedir.  $u_t$  ise,  $t$  zamanındaki nüfus seviyesidir. Bu denklem kolaylık açısından,

$$u_{t+1} = u_t e^{R(1-u_t)}$$

şeklinde ifade edilebilir. Ricker fark denkleminin denge noktası ise,  $u_R^* = 1$  dir. Bu denge noktası  $0 < R \leq 2$  için asimptotik kararlıdır. Gerçekten,  $f(u) = u e^{R(1-u)}$  olmak üzere, Teorem 1.1 den  $|f'(u_R^*)| = |1 - R| < 1$  olmalıdır. Buradan,  $0 < R < 2$  elde edilir. Ayrıca,  $R = 2$  için  $f'(u_R^*) = -1$  olup, Teorem 1.3 den,

$$Sf(u_R^*) < 0$$

olup,  $u_R^* = 1$  denge noktası,  $R = 2$  için de asimptotik kararlıdır.

Lojistik büyüme fonksiyonuna benzer şekilde, lokal olmayan etkileşim için  $K_2$  çekirdeği göz önüne alınırsa;

$$f_R(u, K_2 * u) = u e^{R(1-K_2*u)} \quad (2.8)$$

Ricker büyüme fonksiyonu bulunur.

Bu büyüme fonksiyonları ve lokal olmayan etkileşim, (2.2) denklemi ile birlikte ele alınırsa,  $j = l, R$  için

$$u_{n+1} = K_1 * f_j(u_n, K_2 * u_n) \quad (2.9)$$

modeli elde edilir. Burada,  $K_1$  çekirdek fonksiyonu bireylerin yayılmasını ve  $K_2$  çekirdek fonksiyonu ise, lokal olmayan etkileşimleri yani kaynaklar için lokal olmayan rekabeti modeller.

### 2.4 İntegro Fark Denklem Sistemi

Bu kısımda, ayrık zamanlı jenerasyonlara sahip, birbirlerinin popülasyon dinamiklerini etkileyen, etkileşim halinde olan iki tür ele alınacaktır. Sürekli zamana sahip

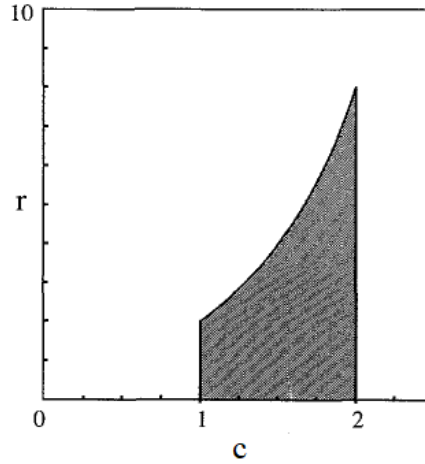
büyüme modellerinde olduğu gibi, ayırık zamanda da av-avcı, rekabet ve ortaklık gibi aynı temel etkileşim türleri vardır. Bu konular, geniş çapta incelenmiştir, ancak, iki tür durumunun ayırık zamanlı analogu, sürekli modeller kadar fazla ele alınmamıştır. Av-avcı modelleri için Hassel (1978), Neubert ve Kot (1992) tarafından önemli çalışmalar yapılmıştır.

Şimdi, birinci basamaktan av-avcı modeli için

$$\begin{cases} N_{t+1} = N_t e^{r(1-N_t-P_t)} \\ P_{t+1} = cN_t P_t \end{cases} \quad (2.10)$$

fark denklem sistemini göz önüne alınsın, burada  $N_t$  ve  $P_t$ ,  $t \in \mathbb{N}$  zamanındaki popülasyonlardır. Bu model, avcının yokluğunda,  $r > 2$  için yani yüksek bir av popülasyonu olması durumunda salınımlı veya kaotik davranış sergiler (May 1976, Kot ve Schaffer 1986).

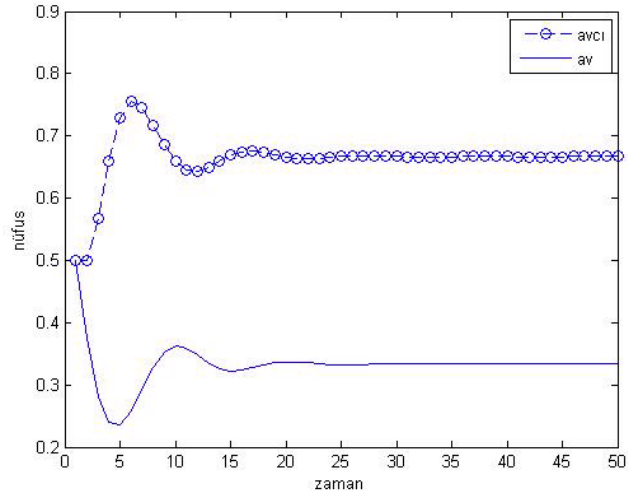
Avcının var olması durumunda ve yayılma olmadığında, Teorem 1.4 ve Teorem 1.5 yardımıyla sıfır olmayan denge noktasının yani,  $(N^*, P^*) = (\frac{1}{c}, 1 - \frac{1}{c})$ ,  $1 < c < 2$  ve  $0 < r < \frac{4c}{3-c}$  için asimptotik kararlı olduğu görülür (Şekil 2.1).



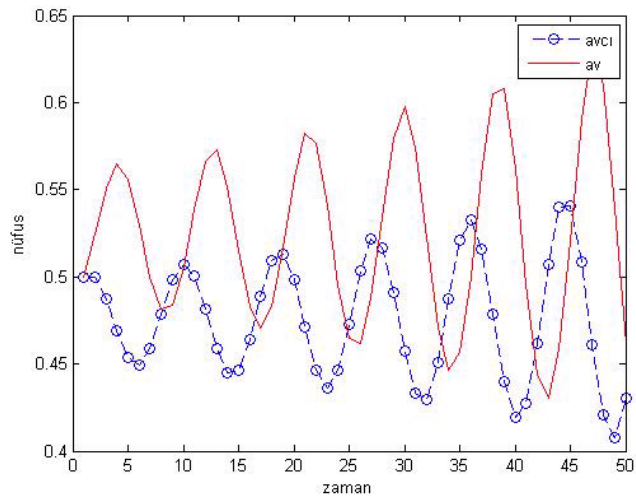
Şekil 2.1 Kararlılık bölgesi



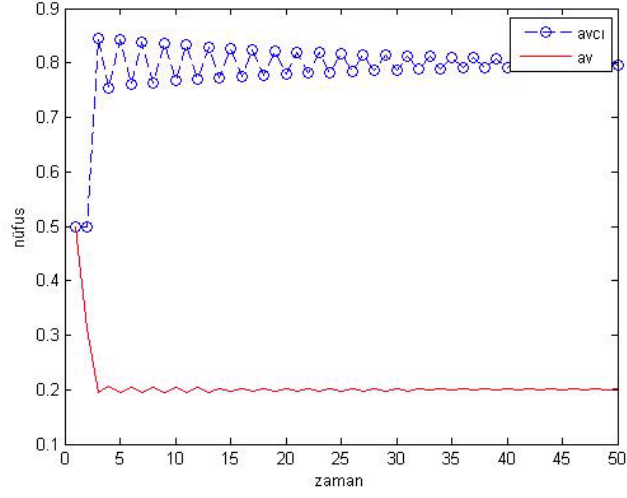
Parametreler seçildiğinde nüfus davranışları aşağıdaki grafiklerdeki gibi olur.



Şekil 2.2  $c = 1.5$  ve  $r = 1$



Şekil 2.3  $c = 2.1$  ve  $r = 1$



Şekil 2.4  $c = 1.25$ ,  $r = 2.8$

Bu sistem bireylerin konumsal hareketlerini ele almamaktadır. Dolayısıyla, bu hareketliliği tanımlamak için uzaysal konum  $x$  ve zaman  $t$  ile gösterilmek üzere,  $N_t(x)$  ve  $P_t(x)$  biçiminde ifade edilmektedir. Böylece aşağıdaki sistem yazılabilir:

$$\begin{cases} N_{t+1}(x) = K_1 * N_t e^{r(1-N_t-P_t)} \\ P_{t+1}(x) = cK_2 * N_t P_t. \end{cases} \quad (2.11)$$

Burada  $K_1$  ve  $K_2$  yayılma çekirdekleri olmak üzere, bir önceki kısımda çekirdek fonksiyonları için yapılan kabuller geçerlidir.

### 3. LİNEER ANALİZ

#### 3.1 Lineer Kararlılık Analizi

Bu kısımda, (2.9) denklemini lineerleştirmek için denge noktasının küçük bir pertürbasyonu:

$$u_n = u_i^* + \epsilon \xi_n, \quad i = l, R. \quad (3.1)$$

şeklinde ele alınacaktır. (2.9) denkleminde (2.6) lojistik büyüme fonksiyonu göz önüne alınır,

$$\begin{aligned} u_i^* + \epsilon \xi_{n+1} &= rK_1 * [(u_i^* + \epsilon \xi_n)(1 - K_2 * (u_i^* + \epsilon \xi_n))] \\ &= rK_1 * [(u_i^* + \epsilon \xi_n)(1 - u_i^* - \epsilon(K_2 * \xi_n))] \\ &= rK_1 * [u_i^* - u_i^{*2} - \epsilon u_i^* (K_2 * \xi_n) + \epsilon \xi_n - \epsilon u_i^* \xi_n - \epsilon^2 \xi_n (K_2 * \xi_n)] \end{aligned}$$

elde edilir. Bu eşitlikte

$$u_i^* = \frac{r-1}{r}$$

olduğundan

$$r = \frac{1}{1 - u_i^*}$$

olduğu göz önüne alınır,

$$\begin{aligned} u_i^* + \epsilon \xi_{n+1} &= \frac{1}{1 - u_i^*} [u_i^* - u_i^{*2} + \epsilon (-u_i^* K_1 * (K_2 * \xi_n) + (K_1 * \xi_n) - u_i^* (K_1 * \xi_n))] \\ u_i^* + \epsilon \xi_{n+1} &= u_i^* + \epsilon [-(r-1)K_1 * (K_2 * \xi_n) + K_1 * \xi_n] \end{aligned}$$

bulunur. Buradan

$$\xi_{n+1} = K_1 * [\xi_n - cK_2 * \xi_n] \quad (3.2)$$

lineer denklemi elde edilir. Burada,  $c = r - 1 \in (0, 2)$  dir.

Benzer biçimde, (2.9) denkleminde (2.8) Ricker büyüme fonksiyonu alınarak (3.1) pertürbasyonu uygulanırsa,

$$u_R^* + \epsilon \xi_{n+1} = K_1 * (u_R^* + \epsilon \xi_n) e^{R(1 - K_2 * (u_R^* + \epsilon \xi_n))}$$

olur. Bu denklemde  $u_R^* = 1$  olduğu dikkate alınarak, Taylor açılımı yapılırsa,

$$\begin{aligned}
1 + \epsilon \xi_{n+1} &= K_1 * [(1 + \epsilon \xi_n) (1 + R(1 - K_2 * (u_R^* + \epsilon \xi_n)))] \\
&= K_1 * [(1 + \epsilon \xi_n) (1 - \epsilon R(K_2 * \xi_n))] \\
&= K_1 * [1 - \epsilon R(K_2 * \xi_n) + \epsilon \xi_n - \epsilon^2 R \xi_n (K_2 * \xi_n)]
\end{aligned}$$

yazılabilir. Bu eşitlikten

$$1 + \epsilon \xi_{n+1} = 1 + \epsilon (K_1 * (-R K_2 * \xi_n) + \xi_n)$$

elde edilir ve buradan (3.2) denklemi bulunur; (3.2) denkleminde  $c = R \in (0, 2)$  dir. (3.2) denklemi  $D = [0, L]$  olmak üzere  $\forall n \in \mathbb{N}$  ve  $x \in D$  için periyodik sınır koşulu

$$\xi_n(x) = \xi_n(x + L)$$

altında ele alınsın.

Sonlu integrasyon sınırları, periyodik sınır koşulları ve sürekli çekirdeklere sahip lineer operatörler kompakt olduğundan (3.2) denklemi ile ifade edilen operatör self-adjointtir. Bundan dolayı, bu operatörün sıfır olmayan en az bir özdeğeri mevcuttur.

(3.2) denkleminin çözümü

$$\xi_n(x) = \lambda^n \tilde{\xi}(x) \quad (3.3)$$

formunda yazılabilir. Bu form (3.2) de yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned}
\lambda^{n+1} \tilde{\xi}(x) &= K_1 * [\lambda^n \tilde{\xi}(x) - c K_2 * \lambda^n \tilde{\xi}(x)] \\
\lambda \tilde{\xi}(x) &= K_1 * [\tilde{\xi}(x) - c K_2 * \tilde{\xi}(x)], \quad x \in [0, L]
\end{aligned} \quad (3.4)$$

elde edilir. Zamandan bağımsız özfonksiyonlar sınır koşullarını sağlar ve  $m \in \mathbb{Z}$  için  $k_m = \frac{2\pi m}{L}$  olmak üzere  $e^{ik_m x}$  şeklinde verilir. Böylece (3.2) denkleminin çözümü

$$\xi_n(x) = \sum_m c_m \lambda^n e^{ik_m x} \quad (3.5)$$

biçimindedir. Burada  $c_m$  katsayısı, zamandan bağımsız  $\tilde{\xi}(x)$  fonksiyonun başlangıç koşulunun Fourier açılımı ile hesaplanır. (3.5) eşitliği (3.2) de yerine yazılırsa,  $m \in \mathbb{Z}$  için

$$\lambda_m = \widehat{K}_1(k_m) \left(1 - c \widehat{K}_2(k_m)\right) \quad (3.6)$$

elde edilir.  $\widehat{K}_1(k_m)$  ve  $\widehat{K}_2(k_m)$ ,  $K_1$  ve  $K_2$  çekirdek fonksiyonlarının  $k_m$  de hesaplanmış Fourier dönüşümleridir.

$u_i^*$ ,  $i = r, R$  denge noktası için kararlılık koşulu

$$|\lambda| < 1$$

olmasıdır. O halde, denge noktasının kararsız olması için

$$\left| \widehat{K}_1(k_m) \right| \left| \left( 1 - c\widehat{K}_2(k_m) \right) \right| \geq 1$$

olmalıdır.  $K_1$  yayılma çekirdeği denge çözümünü kararlı duruma getirmeye çalışır. Burada,

$$\begin{aligned} \left| \widehat{K}_1(k_m) \right| &= \left| \int e^{ik_mx} K_1(x) dx \right| \\ &\leq \int |e^{ik_mx}| |K_1(x)| dx \end{aligned}$$

olup,  $|e^{ik_mx}| = |\cos(k_mx) + i \sin(k_mx)| \leq 1$  ve  $\int K_1(x) dx = 1$  olduğundan  $\left| \widehat{K}_1(k_m) \right| \leq 1$  elde edilir. Bazı  $m \in \mathbb{N}$  ler için

$$\left| \left( 1 - c\widehat{K}_2(k_m) \right) \right| \geq 1$$

dir. Yayılma çekirdeğinin tam formunu bilmeden desen (örüntü) oluşumunu gözlemlemek için kesin koşulları elde etmek mümkün değildir. Etkileşim çekirdeğinin Fourier dönüşümü bazı  $m \in \mathbb{N}$  ler için negatif değerler aldığından,

$$1 - c\widehat{K}_2(k_m) > 1$$

elde edilir. Böylece, (2.9) denkleminin denge noktasını kararsız hale getiren durum bazı  $m \in \mathbb{N}$  ler için

$$\widehat{K}_2(k_m) < 0$$

dır.

$c_0 \in (0, 2)$  en küçük sayı olmak üzere,

$$\max_{m \in \mathbb{Z}} |\lambda(c, k_m)| = |\lambda(c_0, k_{m_0})| = 1 \quad (3.7)$$

olacak şekilde bir  $k_{m_0}$  dalga sayısı var olsun.  $c_0$ ,  $c$  parametresinin kritik değeridir ve  $k_{m_0}$  da kritik dalga sayısıdır. Böylece aşağıdaki önerme verilebilir.

**Önerme 3.1**  $\widehat{K}_2(k_m) < 0$  ve (3.7) eşitliğini sağlayan bir  $c_0 \in (0, 2)$  var olsun. Eğer  $c \geq c_0$  olacak şekilde bir  $c$  sayısı varsa,  $|\lambda(c, k_{m_0})| \geq 1$  olur ve (2.9) denkleminin çözümleri "desen oluşumu" meydana getirir.

$|\lambda(c_0, k_{m_0})| = 1$  ise,  $\lambda(c_0, k_{m_0}) = \pm 1$  noktaları çatallanma noktalarıdır. Bu durumda Neubert vd. (1995) oluşabilecek çatallanmaları aşağıdaki şekilde ifade etmişlerdir:

- Eğer  $\lambda(c_0, k_{m_0}) = 1$  ise,  $c > c_0$  için  $\lambda(c, k_{m_0}) > 1$  olur ve denge çözümü kararlılığını kaybeder, böylece çatallanma meydana gelir. Bu çatallanmaya *artı-bir çatallanma* denir.
- Eğer  $\lambda(c_0, k_{m_0}) = -1$  ise,  $c > c_0$  için  $\lambda(c, k_{m_0}) < -1$  olur ve denge çözümü kararlılığını kaybederek iki periyotlu periyodik çözümler ortaya çıkar. Bu çatallanmaya da *eksi-bir çatallanma* denir.

### 3.2 Tek Tür Modeli için Çekirdek Fonksiyonu ve Hesaplanan Sonuçlar

Lokal olmayan Fisher denkleminin çözümlerinin,  $\widehat{K}_2(k_{m_0}) < 0$  için desen oluşumu meydana getirdiği Genieys vd. (2006) tarafından gösterilmiştir. Bu çalışmada düzgün simetrik çekirdekler kullanılmıştır (Aydogmus vd. 2017). Buradan bir düzgün simetrik çekirdek ailesi aşağıdaki gibi verilebilir:

$$K_d(x) = \begin{cases} \frac{1}{2d}, & |x| \leq d, \\ 0, & |x| > d, \end{cases}$$

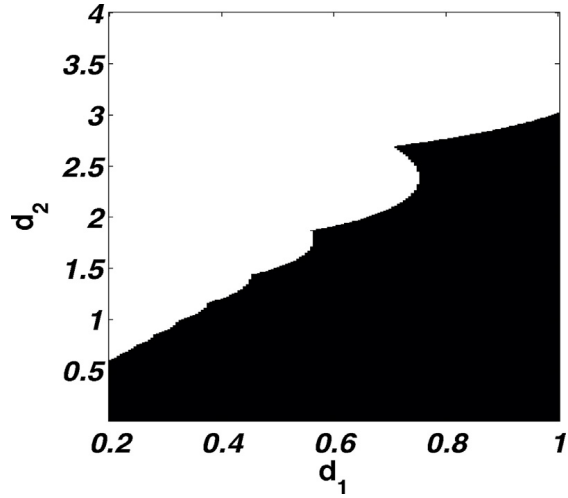
burada  $d$  parametresi,  $K$  çekirdek fonksiyonu için adım (basamak) aralığıdır (Segal vd. 2013). Gauss ya da Laplacian çekirdek aileleri, literatürde yaygın olarak kullanılan diğer popüler çekirdek fonksiyonlarından bazılarıdır. Bu çekirdek fonksiyonları Neubert vd. (1995), Kot ve Schaffer (1986), Kot (1992), Tanzy vd. (2013) gibi yazarlar tarafından ele alınmıştır. Bu iki çekirdek ailesinin aksine, eğer çekirdek simetrik ise, bu durumda  $K_d$  çekirdeğinin Fourier dönüşümü negatif değerler alır. Böylece düzgün simetrik çekirdek fonksiyonu, desen oluşumu için Önerme 1' deki gerekli koşulları sağlar.

Yukarıda belirtildiği gibi, eğer  $c_0 \in (0, 2)$  kritik değeri varsa, bu iki integro fark

denkleminin çözümleri desen oluşumu meydana getirir. Burada, düzgün çekirdek fonksiyonu için farklı başlangıç değerleri alınarak ve  $c_0$  kritik değeri bulunarak (3.7) optimizasyon problemi çözümlenir. Ayrıca, aşağıdaki parametre bölgesi alınarak bir sınır oluşturulabilir:

$$K_j = K_{d_j}, \quad 0.2 \leq d_1 \leq 1 \text{ ve } 0 < d_2 \leq 4.$$

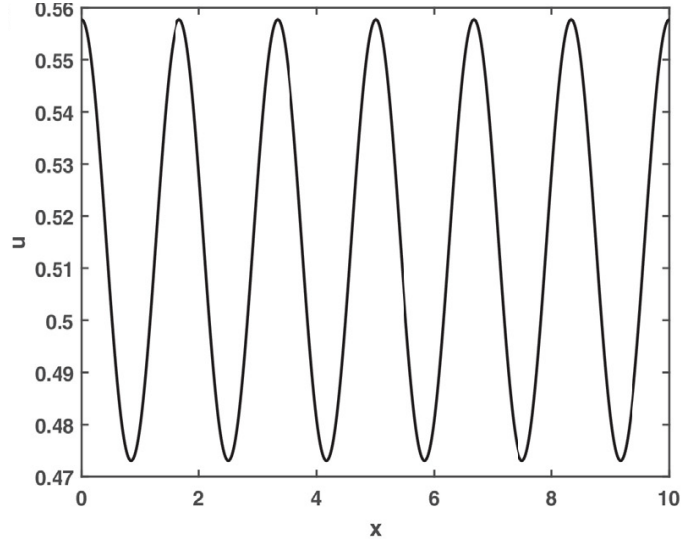
Bu parametre bölgesi (2.9) modeli için ele alınırsa, herhangi bir  $c > c_0$  kritik değerinin var olması durumunda  $u_j^*$  ve  $u_R^*$  denge çözümleri kararsız hala gelerek desen oluşumu meydana getirir (Şekil 3.1).



Şekil 3.1 Desen oluşumu bölgesi

Bu şekilde, beyaz bölge, desen oluşumunun meydana geldiği bölgedir ve bazı  $c_0 \in (0, 2)$  değerleri için  $c > c_0$  olacak biçimde  $c$  değerleri vardır. Lojistik büyüme fonksiyonu için (2.9) denkleminin denge çözümü aşağıdaki şekildeki duruma geçerek bir

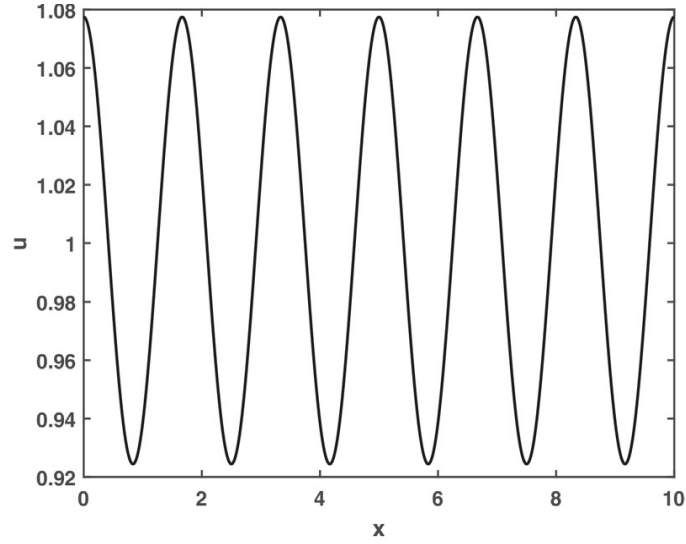
dalga oluşumu meydana getirir.



Şekil 3.2 Lojistik büyüme fonksiyonlu modelin  
denge çözümü

Burada, parametreler  $d_1 = 0.25$ ,  $d_2 = 1$  ve  $c_0 = 1.0613$  olarak seçilmiştir.

Ricker büyüme fonksiyonunun (2.9) modelinde ele alınmasıyla ve yukarıdaki parametrelerin aynıının seçilmesiyle aşağıdaki şekil ortaya çıkar.



Şekil 3.3 Ricker büyüme fonksiyonlu modelin  
denge çözümü

Bu nümerik simulasyonlarda lojistik ve Ricker büyüme fonksiyonları periyodik sınır koşulları altında ele alınmıştır. Her iki konvolüsyon terimi  $K_1 * u$  ve  $K_2 * u$  hız-



lı Fourier dönüşümü altında yaklaşık olarak hesaplanmıştır. Ayrıca, bu hesaplamalarda konum değişkeni kesikli hale getirilmiş ve değerler  $0 \leq x \leq L$  için  $\Delta x = 0.0001$  ve  $L = 10$  seçilmiştir. Şekil 3.2 ve Şekil 3.3 de başlangıç koşulu  $u_0 = 0.0001 \cos(k_{r_0}x)$  ve  $c = 1.0613$  dir. Yukarıda belirtilen çekirdek fonksiyonları için  $c_0$  parametresinin kritik değeri ise, 1.0581 dir. Yani,  $c > c_0$  olacak şekilde herhangi bir değer için  $u_0$  başlangıç koşulu altında çözümler hesaplanarak, çözümlerin dalgalı bir hale geldiği gösterilmiştir.

### 3.3 İntegro Fark Denklem Sisteminin Lineer Analizi

Bu kısımda, (2.11) integro fark denklem sistemi için lineer kararlılık analizi yapılacaktır. Neubert vd. (1995), bu sistemin lineer kararlılık analizini yapmışlardır. Öncelikle, sisteme denge noktası etrafında

$$\begin{cases} N_t = N^* + \epsilon \xi_t \\ P_t = P^* + \epsilon \mu_t \end{cases}$$

küçük bir pertürbasyon uygulanırsa,

$$\begin{cases} N^* + \epsilon \xi_{t+1} = K_1 * [(N^* + \epsilon \xi_t) e^{r(1-N^*-\epsilon \xi_t-P^*-\epsilon \mu_t)}] \\ P^* + \epsilon \mu_{t+1} = cK_2 * [(N^* + \epsilon \xi_t) (P^* + \epsilon \mu_t)] \end{cases},$$

elde edilir. Burada Taylor açılımı yapılp,  $(N^*, P^*) = (\frac{1}{c}, 1 - \frac{1}{c})$  olduğu dikkate alınırsa,

$$\begin{cases} \frac{1}{c} + \epsilon \xi_{t+1} = K_1 * \left[ \left( \frac{1}{c} + \epsilon \xi_t \right) \left( 1 + r \left( 1 - \frac{1}{c} - \epsilon \xi_t - 1 + \frac{1}{c} - \epsilon \mu_t \right) \right) \right] \\ 1 - \frac{1}{c} + \epsilon \mu_{t+1} = cK_2 * \left[ \left( \frac{1}{c} + \epsilon \xi_t \right) \left( 1 - \frac{1}{c} + \epsilon \mu_t \right) \right] \end{cases},$$

eşitlikleri elde edilir. Burada gerekli düzenlemeler yapıldığında  $r$  ve  $c$  parametreleri dağıtılırsa,

$$\begin{cases} \frac{1}{c} + \epsilon \xi_{t+1} = K_1 * \left[ \left( \frac{1}{c} + \epsilon \xi_t \right) \left( 1 + r - \frac{r}{c} - \epsilon r \xi_t - r + \frac{r}{c} - \epsilon r \mu_t \right) \right] \\ 1 - \frac{1}{c} + \epsilon \mu_{t+1} = K_2 * [(1 + \epsilon c \xi_t) (c - 1 + \epsilon c \mu_t)] \end{cases},$$

$$\begin{cases} \frac{1}{c} + \epsilon \xi_{t+1} = K_1 * \left[ \frac{1}{c} - \epsilon \frac{r}{c} \xi_t - \epsilon \frac{r}{c} \mu_t + \epsilon \xi_t - \epsilon^2 r \xi_t^2 - \epsilon^2 r \xi_t \mu_t \right] \\ 1 - \frac{1}{c} + \epsilon \mu_{t+1} = K_2 * \left[ 1 - \frac{1}{c} + \epsilon c \xi_t + \epsilon \mu_t - \epsilon \xi_t + \epsilon^2 c \xi_t \mu_t \right] \end{cases},$$

bulunur. Bu eşitliklerden,

$$\begin{cases} \frac{1}{c} + \epsilon \xi_{t+1} = \frac{1}{c} + K_1 * \left[ \epsilon \left(1 - \frac{r}{c}\right) \xi_t + \epsilon \left(-\frac{r}{c} \mu_t\right) \right] \\ 1 - \frac{1}{c} + \epsilon \mu_{t+1} = 1 - \frac{1}{c} + K_2 * [\epsilon(c-1) \xi_t + \epsilon \mu_t] \end{cases},$$

elde edilir ve böylece,

$$\begin{cases} \xi_{t+1} = K_1 * \left[ \left(1 - \frac{r}{c}\right) \xi_t - \frac{r}{c} \mu_t \right] \\ \mu_{t+1} = K_2 * [(c-1) \xi_t + \mu_t] \end{cases} \quad (3.8)$$

lineer sistemi yazılır.

O halde, yayılmanın olması durumunda aşağıdaki integro fark denklem sistemi yazılabilir,

$$\begin{cases} \xi_{t+1} = \int K_1(x-y) \left[ \left(1 - \frac{r}{c}\right) \xi_t(y) - \frac{r}{c} \mu_t(y) \right] dy \\ \mu_{t+1} = \int K_2(x-y) [(c-1) \xi_t(y) + \mu_t(y)] dy. \end{cases} \quad (3.9)$$

Bu problem  $\forall t \in \mathbb{N}$  ve  $x \in [0, L]$  için

$$\begin{pmatrix} \xi_t(x) \\ \mu_t(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_t(x+L) \\ \mu_t(x+L) \end{pmatrix} \quad (3.10)$$

sınır koşulu altında ele alınsın. (3.9) lineer sisteminin çözümü aşağıdaki formda yazılabilir:

$$\begin{pmatrix} \xi_t \\ \mu_t \end{pmatrix} = \lambda^t \begin{pmatrix} \tilde{\xi} \\ \tilde{\mu} \end{pmatrix}. \quad (3.11)$$

Yukardaki eşitlik (3.9) sisteminde yazılırsa, zamandan bağımsız

$$\begin{cases} \lambda \tilde{\xi} = K_1 * \left[ \left(1 - \frac{r}{c}\right) \tilde{\xi} - \frac{r}{c} \tilde{\mu} \right] \\ \lambda \tilde{\mu} = K_2 * [(c-1) \tilde{\xi} + \tilde{\mu}] \end{cases} \quad (3.12)$$

sistemi elde edilir.  $n \in \mathbb{Z}$  için  $k_n = \frac{2\pi n}{L}$  olmak üzere, (3.12) sisteminin periyodik sınır koşullarını sağlayan özdeğerleri  $e^{ik_n x}$  ile verilir. Fourier dönüşümü altında,

$$\lambda \begin{pmatrix} \tilde{\xi} \\ \tilde{\mu} \end{pmatrix} = K J \begin{pmatrix} \tilde{\xi} \\ \tilde{\mu} \end{pmatrix} \quad (3.13)$$

elde edilir. Burada,  $K = \begin{pmatrix} \widehat{K}_1 & 0 \\ 0 & \widehat{K}_2 \end{pmatrix}$  ve  $J = \begin{pmatrix} 1 - \frac{r}{c} & -\frac{r}{c} \\ c-1 & 1 \end{pmatrix}$  dir. Ayrıca,

$\widehat{K}_1(k_n)$  ve  $\widehat{K}_2(k_n)$ ,  $K_1$  ve  $K_2$  çekirdek fonksiyonlarının  $k_n$  noktasında hesaplanmış

Fourier dönüşümleridir. Eğer,  $KJ$  matrisinin bütün özdeğerleri birim diskin içinde kalıyorsa, sistemin denge noktası kararlıdır. (3.13) sisteminin karakteristik denklemi

$$\lambda^2 - \left( \widehat{K}_1 \left(1 - \frac{r}{c}\right) + \widehat{K}_2 \right) \lambda + \left( \widehat{K}_1 \widehat{K}_2 \left(1 - \frac{r}{c}\right) + \widehat{K}_1 \widehat{K}_2 \left(r - \frac{r}{c}\right) \right) = 0 \quad (3.14)$$

veya

$$\lambda^2 - iz(KJ)\lambda + \det(KJ) = 0 \quad (3.15)$$

olarak yazılabilir. Jury testi veya Schur-Cohn kriterinden aşağıdaki teorem verilebilir.

**Teorem 3.1**  $KJ$  matrisinin tüm özdeğerlerin birim diskin içinde kalması için gerek ve yeter koşul aşağıdaki şartların sağlanmasıdır:

$$1 - iz(KJ) + \det(KJ) > 0, \quad (3.16)$$

$$1 + iz(KJ) + \det(KJ) > 0, \quad (3.17)$$

$$1 - \det(KJ) > 0. \quad (3.18)$$

**İspat.** Teorem (1.5) den,  $|-iz(KJ)| < 1 + \det(KJ) < 2$  olmalıdır. Buradan,

$$|-iz(KJ)| < 1 + \det(KJ)$$

ve

$$1 + \det(KJ) < 2$$

koşulları ortaya çıkar. Gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$-1 - \det(KJ) < -iz(KJ) < 1 + \det(KJ)$$

$$-2 < 1 + \det(KJ) < 2$$

olup, (3.16), (3.17) ve (3.18) koşulları elde edilir. ■

Yayılmamanın olmaması durumunda, homojen denge çözümünün kararlı olması için gerek ve yeter koşul ise,

$$1 - iz(J) + \det(J) > 0,$$

$$1 + iz(J) + \det(J) > 0,$$

$$1 - \det(J) > 0,$$

şartlarının sağlanmasıdır. +1 çatallanması için (3.16) ifadesi ters çevrilirse, homojen denge çözümü kararlılığını kaybederek çatallanma meydana gelir. Bu çatallanma için aşağıdaki ifade yazılabilir.

$$Q_{+1}(k_n) = 1 - \widehat{K}_1(k_n) \left(1 - \frac{r}{c}\right) - \widehat{K}_2(k_n) + \widehat{K}_1(k_n)\widehat{K}_2(k_n) \left(1 + r - \frac{2r}{c}\right) \quad (3.19)$$

-1 çatallanması için ise, (3.17) ifadesi ters çevrilirse,

$$Q_{-1}(k_n) = 1 + \widehat{K}_1(k_n) \left(1 - \frac{r}{c}\right) + \widehat{K}_2(k_n) + \widehat{K}_1(k_n)\widehat{K}_2(k_n) \left(1 + r - \frac{2r}{c}\right) \quad (3.20)$$

yazılabilir. Neubert vd. (1995),

$$\begin{cases} N_{t+1}(x) = \int_{\Omega} K_1(x-y)f(N_t(y), P_t(y))dy, \\ P_{t+1}(x) = \int_{\Omega} K_2(x-y)f(N_t(y), P_t(y))dy, \end{cases}$$

sistemi için,

$$K = \begin{pmatrix} \widehat{K}_1 & 0 \\ 0 & \widehat{K}_2 \end{pmatrix} \text{ ve lineerleştirilmiş sistemin katsayı matrisi } J = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

olmak üzere, sınırsız bir aralık üzerinde çatallanma koşullarını aşağıdaki gibi vermişlerdir:

Çatallanma	$0 \leq \widehat{K}_1(k_n) \leq 1$ $0 \leq \widehat{K}_2(k_n) \leq 1$	$-1 \leq \widehat{K}_1(k_n) \leq 0$ $-1 \leq \widehat{K}_2(k_n) \leq 0$	$0 \leq \widehat{K}_1(k_n) \leq 1$ $-1 \leq \widehat{K}_2(k_n) \leq 0$
+1	$(a_{11}-1)(a_{22}-1) < 0$ $a_{12}a_{21} < 0$	$(a_{11}+1)(a_{22}+1) < 0$ $a_{12}a_{21} < 0$	$a_{11} > 1$ veya $a_{22} < 1$ $a_{12}a_{21} < 0$
-1	$(a_{11}+1)(a_{22}+1) < 0$ $a_{12}a_{21} < 0$	$(a_{11}-1)(a_{22}-1) < 0$ $a_{12}a_{21} < 0$	$a_{11} < 1$ veya $a_{22} > 1$ $a_{12}a_{21} < 0$
Hopf	imkansız	imkansız	imkansız.

### 3.4 Av-Avcı Modeli için Çekirdek Fonksiyonu ve Hesaplanan Sonuçlar

Kararsızlık hakkında yorum yapabilmek için çekirdek fonksiyonunun seçilmesi önem taşımaktadır. Kot 1989 yılında yaptığı çalışmada çekirdek fonksiyonlarını

$$\begin{aligned}K_1(x-y) &= \frac{1}{2}\alpha \exp(-\alpha|x-y|) \\K_2(x-y) &= \frac{1}{2}\beta \exp(-\beta|x-y|)\end{aligned}$$

biçiminde seçmiştir (Kot 1989). Burada, bu çekirdeklerin hesaplanmış Fourier dönüşümleri ise,

$$\begin{aligned}\widehat{K}_1 &= \frac{\alpha^2}{\alpha^2 + \omega^2} \\ \widehat{K}_2 &= \frac{\beta^2}{\beta^2 + \omega^2}\end{aligned}$$

şeklinindedir. Bu çekirdek fonksiyonları, doğada bulunan çok basık yayılma dağılımlarının tipik örnekleridir. Wolfenbarger (1946, 1959) bu formdaki yayılmaların durumlarıyla ilgili çalışmalar yapmıştır. Yukarıdaki çekirdek fonksiyonu (2.11) sisteminde yazıldığında ve parametreler  $\alpha = 8$  ve  $\beta = 0.8$  olarak seçildiğinde,  $r = 3.1$  ve  $c = 1.5$  için sistemin denge çözümü kararlılığını kaybeder.

Neubert vd. (1995) ise, yaptıkları çalışmada, çekirdek fonksiyonlarını

$$\begin{aligned}K_1(x-y) &= \frac{1}{2}\alpha^2|x-y| \exp(-\alpha|x-y|) \\K_2(x-y) &= \frac{1}{2}\beta \exp(-\beta|x-y|)\end{aligned}$$

şeklinde seçerek,  $\alpha = 1.3$  ve  $\beta = 10$  parametreleri ve  $r = 0.9$ ,  $c = 1.75$  için (2.11) sisteminin denge çözümünün kararlılığını kaybettiğini göstermişlerdir. Çekirdek fonksiyonu

$$K_{d_j}(x) = \begin{cases} \frac{1}{2d_j}, & |x| \leq d_j \\ 0, & |x| > d_j, \end{cases}, j = 1, 2,$$

seçilirse, burada  $d_j$  çekirdek fonksiyonun lokal olmayan uzaklığını tanımlamak üzere, bu çekirdek fonksiyonunun Fourier dönüşümü

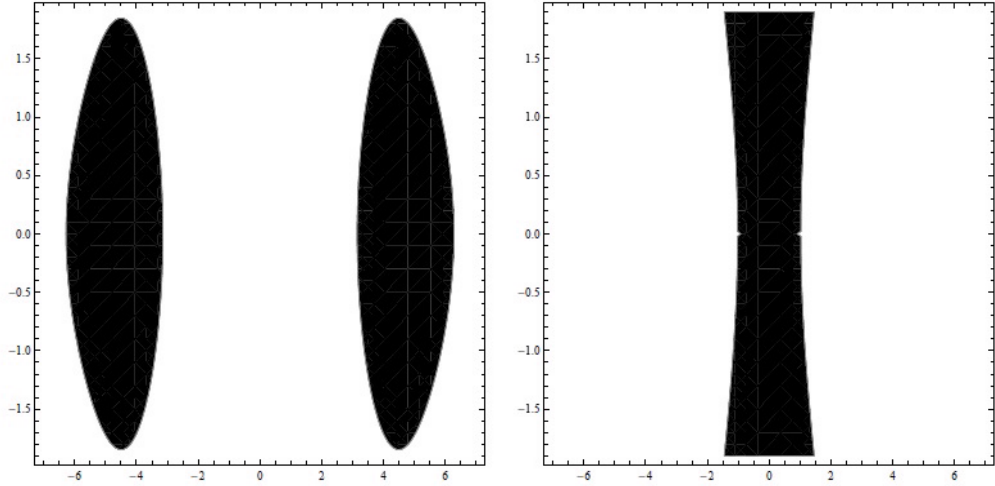
$$\widehat{K}(k_m) = \frac{1}{2d_j} \int_{-d}^d \cos(k_mx) dx = \frac{1}{k_md_j} \sin(k_md_j)$$

dir.  $d_1 = 1$ ,  $d_2 = 0.1$  için  $r$  parametresi  $r = 2$  olarak sabitlendiğinde ve  $c_0 \in (1, 2)$ ,  $c$  parametresinin kritik değeri olmak üzere,  $c_0 = 1.0659$  çatallanma parametresidir.  $c > c_0$  için (2.11) sisteminin denge çözümü kararlılığını kaybederek desen oluşumu meydana getirir. Burada, öyle bir  $k_{m_0}$  vardır ki,  $c_0 \in (1, 2)$  olmak üzere,

$$\min_{n \in \mathbb{Z}^+} \left\{ 1 - \widehat{K}_1(k_{m_0}) \left(1 - \frac{2}{c}\right) - \widehat{K}_2(k_{m_0}) + \widehat{K}_1(k_{m_0}) \widehat{K}_2(k_{m_0}) \left(3 - \frac{4}{c}\right) \right\} = 0$$

eşitliğini sağlar.

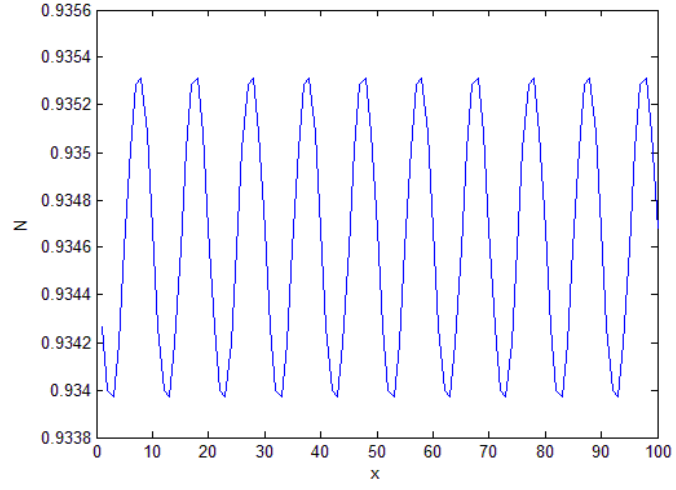
$c = 1.8$  ve  $r = 5.4$  parametreleri için,  $+1$  ve  $-1$  çatallanmalarının meydana geldiği bölge siyah ile gösterilmek üzere, aşağıdaki grafikler elde edilir.  $w_1 = \frac{2\pi n}{L}d_1$  ve  $w_2 = \frac{2\pi n}{L}d_2$  olmak üzere,  $w_1 - w_2$  koordinat düzlemi için, sol paneldeki grafikteki siyah bölge  $+1$  çatallanmasının olduğu bölgedir, aynı düzlem için sağdaki grafikteki siyah bölge ise,  $-1$  çatallanmasının olduğu bölgedir.



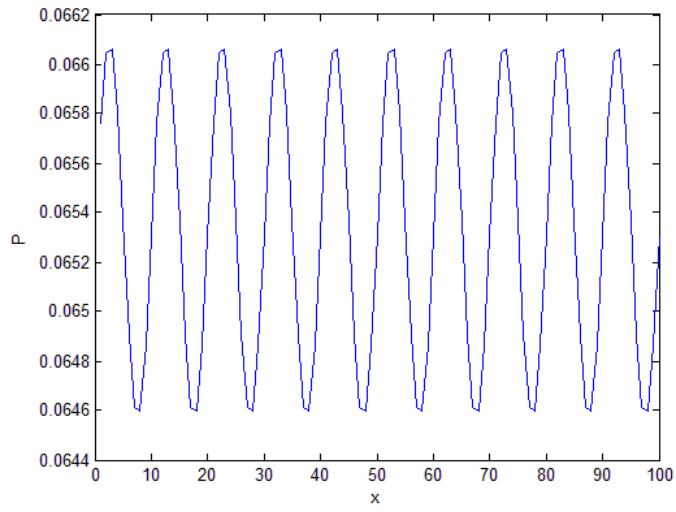
Şekil 3.4 Çatallanma bölgeleri

Ayrıca,  $c = 1.07$  ve  $r = 2$  için,  $d_1 = 1$  ve  $d_2 = 0.1$  parametre bölgesinde,  $N_0 = 1/c_0 + 0.01\cos(k_{m_0}x)$  ve  $P_0 = 1 - 1/c_0 + 0.01\sin(k_{m_0}x)$  başlangıç koşulları altında

aşğıdaki grafikler elde edilir.

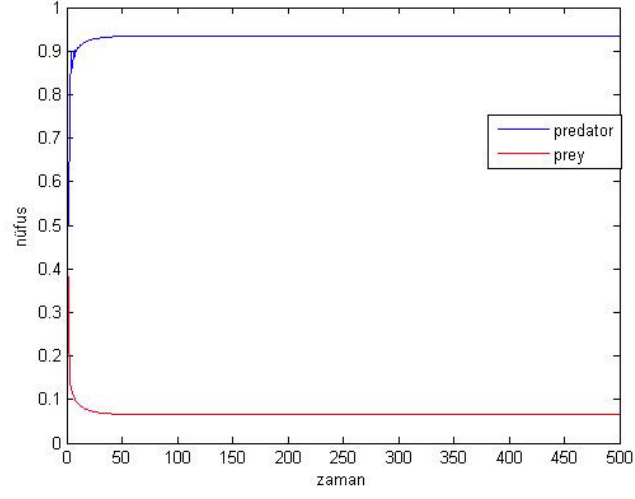


Şekil 3.5  $N_t'$  nin dalga oluşumu



Şekil 3.6  $P_t'$  nin dalga oluşumu

Aynı  $r$  ve  $c$  parametreleri için 500 iterasyon yapıldığında, yayılma çekirdeğinin olmadığı sistemin grafiği ise, aşağıdaki gibi elde edilir.



Şekil 3.7 Yayılma çekirdeği olmadığı sistemin grafiği



## 4. ZAYIF LİNEER OLMAYAN ANALİZ

Lineer kararlılık analizi küçük bir zaman aralığında ve çok küçük pertürbasyonlar için geçerlidir. Kararsız yapıların büyüme davranışlarını analiz etmek için lineer olmayan terimler de göz önüne alınmalıdır. Bu terimleri incelemek için zayıf lineer olmayan analiz yöntemine ihtiyaç duyulmaktadır. Zayıf lineer analize geçmeden önce, kullanılacak pertürbasyon analizi için çok önemli bir kavram olan çoklu-ölçek (multiple scales) metodundan bahsetmek gerekir.

### 4.1 Çoklu-Ölçek Pertürbasyon Metodu

Çözümlerin aynı anda farklı ölçeklere bağlı olduğu problemler için çoklu ölçek yöntemi gereklidir. Bu yöntem fark denklemleri için 1977 yılında Hoppenstead ve Miranker (1977) tarafından geliştirilmiştir. Son yıllarda ise, bu pertürbasyon yöntemi yine fark denklemleri için Van Horssen tarafından büyük bir problem sınıfına uygulanabilecek biçimde sunulmuştur (Van Horssen 2008, Van Horssen ve Ter Brake 2008, Rafei ve Van Horssen 2012). Bu pertürbasyon yönteminde hızlı ve yavaş zaman ölçeği birlikte ele alınmıştır. Basit bir fark denkleminin  $x_n$  çözümü hızlı zaman ölçeğinde  $n$  ye ve yavaş zaman ölçeğinde ise,  $s = \epsilon n$  değişkenlerine bağlıdır. Böylece, basit bir fark denkleminde  $x_{n+1}$  yerine,

$$x(n+1, \epsilon(n+1)) = x(n+1, s + \epsilon)$$

yazılabilir. Bu ifadenin Taylor açılımı,

$$x(n+1, s + \epsilon) = x(n+1, s) + \epsilon \frac{\partial x}{\partial s}(n+1, s) + O(\epsilon^2)$$

şeklindedir. Subramanian ve Krishnan (1979) tarafından iki önemli iterasyon ölçeği için pertürbasyon

$$x_{n+1} - x_n = \Delta x(n, s) = \Delta_n x(n, s) + \epsilon \Delta_s x(n, s)$$

şeklinde tanımlanmıştır. Burada,

$$\Delta_n x(n, s) = x(n+1, s) - x(n, s) \text{ ve } \Delta_s x(n, s) = x(n, s + \epsilon) - x(n, s)$$

dir. Holmes (2012) ise, yavaş zaman ölçeğinde çözümü açılımını

$$y_n \sim \tilde{y}_0(n, s) + \epsilon \tilde{y}_1(n, s) + \dots$$

biçiminde ifade etmiştir. Burada,  $s = \epsilon n$  dir. Bununla birlikte,

$$\begin{aligned} y_{n+1} &\sim \tilde{y}_0(n+1, s+\epsilon) + \epsilon \tilde{y}_1(n+1, s+\epsilon) + \dots \\ &\sim \tilde{y}_0(n+1, s) + \epsilon [\tilde{y}_1(n+1, s) + \partial_s \tilde{y}_0(n+1, s)] + \dots \end{aligned}$$

dir.

## 4.2 İntegro Fark Denkleminin Zayıf Lineer Olmayan Analizi

$\lambda(c_0, k_{m_0}) = 1$  için  $c_0$ ,  $c$  parametresinin kritik değeri olsun.

$$u_{n+1}(x) = K_1 * [cu_n(x)(1 - K_2 * u_n(x))] \quad (4.1)$$

denkleminin çözümü aşağıdaki formda ifade edilebilir:

$$u \propto (\lambda^n \exp(ik_{m_0}x) + e.k.) \quad (4.2)$$

burada  $e.k.$  eşlenik kompleksi ve  $i = \sqrt{-1}$  kompleks sayısını ifade etmektedir. Şimdi,  $c_0$  kritik değeri etrafında pertürbasyon analizi yapalım:

$$c = c_0 + \epsilon^2 \nu, \quad 0 < \epsilon \ll 1, \quad \nu = \pm 1. \quad (4.3)$$

Yukarıdaki pertürbasyon ve ortalama değer teoremi kullanılarak

$$\lambda(c, k_{m_0}) = 1 + \nu \epsilon^2 \lambda'(c_*, k_{m_0}), \quad c_* \in (c_0, c) \quad (4.4)$$

elde edilir. Bu eşitlik (4.2) de yerine yazılırsa;

$$\begin{aligned} \lambda^n \exp(ik_{m_0}x) &= \exp(ik_{m_0}x + n \ln \lambda(c, k_{m_0})) \\ &= \exp(ik_{m_0}x + n \ln(1 + \epsilon^2 \nu \lambda')) \end{aligned}$$

olduğu görülür ve Taylor açılımından,

$$\begin{aligned} &\approx \exp(ik_{m_0}x + n(\epsilon^2 \nu \lambda')) \\ &\approx A(\epsilon^2 n) \exp(ik_{m_0}x) \end{aligned} \quad (4.5)$$

elde edilir. Burada genlik  $A$ ,  $\tau = \epsilon^2 n$  yavaş zamanın bir fonksiyonudur. Bu analizde hızlı ve yavaş zaman skalası yani  $n$  ve  $\tau$  birlikte ele alınacaktır. Holmes (2012)'un çalışmasından faydalanarak,  $u$  çözümününün  $\tau$  yu içeren açılımı

$$u_n(x) = u_0(n, \tau, x) + \epsilon u_1(n, \tau, x) + \epsilon^2 u_2(n, \tau, x) + \dots \quad (4.6)$$

şeklinde ifade edilir.

Burada, lojistik denklemin  $1 < c < 3$  için kararlı olan  $u^* = \frac{c-1}{c}$  denge noktasının çekirdeklerle etkileşime girmesi durumunda kararlılık durumunu incelenecektir. Ricker denklemi için ise,  $u^* = 1$  denge çözümü ve  $r_0$ , kritik parametre değeri olmak üzere,  $0 < r < 2$  için kararlı olan denge noktasının yine çekirdeklerle etkileşime girdiğinde kararlılık durumu araştırılmıştır.

Belirtmek gerekir ki, uzaysal homojen sabit çözümün ( $u^*(x)$ ) kararlılığı,  $c$  (veya  $r$ ) parametresine bağlıdır. Bu nedenle,  $c$  parametresinin pertürbasyonu  $u^*$  denge çözümününün de pertürbasyonuna neden olacaktır. Dolayısıyla,  $u^*$  denge çözümününün bir pertürbasyonu

$$\begin{aligned} u^* &= \frac{c_0 - 1}{c_0} + \frac{du^*}{dc} \Big|_{c=c_0} + \frac{d^2 u^*}{dc^2} \Big|_{c=c_0} + \dots \\ &= u_0 + \frac{\epsilon^2 \nu}{c_0^2} + O(\epsilon^4) \end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir. Burada,  $u_0 = \frac{c_0 - 1}{c_0}$  dir.

Şimdi, lineer dalgaların ailesi

$$E_m = \exp(imk_{m_0}x)$$

olarak ele alınsın. Böylece, (4.1) denkleminin çözümü

$$u(n, \tau, x) = u_0 + \frac{\epsilon^2 \nu}{c_0^2} + \epsilon u_1(n, \tau, x) + \epsilon^2 u_2(n, \tau, x) \quad (4.7)$$

şeklinde inşa edilebilir. Burada,

$$u_1 = A(\tau)E_1 + \bar{A}(\tau)E_{-1} \text{ ve } u_2 = A_0(\tau) + A_2E_2 + \bar{A}_2E_{-2}. \quad (4.8)$$

dir. Genelliği bozmadan  $A_0$ 'ın reel olduğu kabul edilsin. Dolayısıyla, bu analizde  $A_0$  teriminin kompleks konjügesi göz önüne alınmamaktadır.

Ricker büyüme fonksiyonlu denklem için ise, denge noktası  $r = 1$  olduğundan, bu denklemin çözümü

$$u(n, \tau, x) = 1 + \epsilon u_1(n, \tau, x) + \epsilon^2 u_2(n, \tau, x)$$

olarak inşa edilebilir. Burada,  $u_1$  ve  $u_2$ , (4.8) deki gibidir.

(4.1) denkleminde pertürbasyon analizini uygulamak için önce  $u_{n+1}$  teriminin açılımından (Holmes, 2012) ve (4.7) eşitliğinden,

$$\begin{aligned} u_{n+1}(x) &= u(n+1, \tau + \epsilon^2, x) \\ &= u_0 + \frac{\epsilon^2 \nu}{c_0^2} + \epsilon u_1(n+1, \tau, x) + \epsilon^2 u_2(n+1, \tau, x) \\ &\quad + \epsilon^3 \partial_\tau u_1(n+1, \tau, x) + O(\epsilon^4) \end{aligned} \quad (4.9)$$

ve

$$\begin{aligned} u_{n+1}(x) &= cK_1 * \left( u_0 + \frac{\epsilon^2 \nu}{c_0^2} + \epsilon u_1(n, \tau, x) + \epsilon^2 u_2(n, \tau, x) \right) \\ &\quad \cdot \left[ 1 - K_2 * \left( u_0 + \frac{\epsilon^2 \nu}{c_0^2} + \epsilon u_1(n, \tau, x) + \epsilon^2 u_2(n, \tau, x) \right) \right] \end{aligned} \quad (4.10)$$

elde edilir. Bu denklemin işlemleri açılmadan önce bazı bilgilere ihtiyaç vardır. Çekirdek fonksiyonları için aşağıdaki gösterimler tanımlansın:

$$\widehat{K}_1(nk_{m_0}) = \widehat{K}_{1n} \text{ ve } \widehat{K}_2(nk_{m_0}) = \widehat{K}_{2n}.$$

Buna ek olarak, belirtmek gerekir ki  $K_j$ ,  $j = 1, 2$ . simetrik çekirdek fonksiyonudur. Yani;

$$\widehat{K}_{i(-n)} = \widehat{K}_{in}$$

dir. Ayrıca,  $n \in \mathbb{Z}$  ve  $j = 1, 2$  için

$$K_j * E_n = \widehat{K}_{jn} E_n$$

eşitliği kullanılabilir.

Böylece, (4.9) denkleminde, (4.8) eşitliği yerine yazılırsa ve çoklu-ölçek pertürbasyon metodu uygulanırsa, (4.10) eşitliğinin sol tarafı

$$\begin{aligned} u_{n+1}(x) &= u_0 + \frac{\epsilon^2 \nu}{c_0^2} + \epsilon [A(\tau)E_1 + \overline{A}(\tau)E_{-1} + \epsilon^2(A_\tau E_1 + \overline{A}_\tau E_{-1})] \\ &\quad + \epsilon^2 [A_0 + A_2(\tau)E_2 + \overline{A}_2(\tau)E_{-2}] + \epsilon^3 [A_\tau E_1 + \overline{A}_\tau E_{-1}] + O(\epsilon^4) \end{aligned}$$

şeklinde bulunur. (4.10) eşitliğinin sağ tarafı ise, (4.8) in yerlerine yazılmasıyla,

$$\begin{aligned}
u_{n+1}(x) &= (c_0 + \epsilon^2\nu)K_1 * [u_0 + \frac{\epsilon^2\nu}{c_0^2} + \epsilon(A(\tau)E_1 + \bar{A}(\tau)E_{-1}) + \epsilon^2(A_0 + A_2(\tau)E_2 \\
&\quad + \bar{A}_2(\tau)E_{-2})]. [1 - K_2 * (u_0 + \frac{\epsilon^2\nu}{c_0^2} + \epsilon(A(\tau)E_1 + \bar{A}(\tau)E_{-1}) \\
&\quad + \epsilon^2(A_0 + A_2(\tau)E_2 + \bar{A}_2(\tau)E_{-2})]
\end{aligned}$$

şeklinde elde edilir. Buradan gerekli işlemler yapılırsa,

$$\begin{aligned}
u_{n+1}(x) &= c_0(u_0 - u_0^2) - \epsilon^2(u_0 \frac{\nu}{c_0}) - \epsilon c_0 u_0 (A\hat{K}_{21}\hat{K}_{11}E_1 + \bar{A}\hat{K}_{21}\hat{K}_{11}E_{-1}) \\
&\quad - \epsilon^2 c_0 u_0 (A_0 + A_2\hat{K}_{22}\hat{K}_{12}E_2 + \bar{A}_2\hat{K}_{22}\hat{K}_{12}E_{-2}) + \epsilon^2 \frac{\nu}{c_0} - \epsilon^2 u_0 \frac{\nu}{c_0} \\
&\quad + \epsilon c_0 (1 - u_0) (A\hat{K}_{11}E_1 + \bar{A}\hat{K}_{11}E_{-1}) - \epsilon^2 c_0 (A^2\hat{K}_{21}\hat{K}_{12}E_2 + 2|A|^2\hat{K}_{21} \\
&\quad + \bar{A}^2\hat{K}_{21}\hat{K}_{12}E_{-2}) + \epsilon^2 c_0 (1 - u_0) (A_0 + A_2\hat{K}_{12}E_2 + \bar{A}_2\hat{K}_{12}E_{-2}) \\
&\quad + \epsilon^2 \nu (u_0 - u_0^2) - \epsilon^3 [\frac{\nu}{c_0} (A\hat{K}_{21}E_1 + k.k.) + \frac{\nu}{c_0} (A\hat{K}_{11}E_1 + k.k.) \\
&\quad + c_0 A A_0 \hat{K}_{11}E_1 + c_0 A A_2 \hat{K}_{22}\hat{K}_{13}E_3 + c_0 A \bar{A}_2 \hat{K}_{22}\hat{K}_{11}E_{-1} + c_0 A_0 \bar{A} \hat{K}_{11}E_{-1} \\
&\quad + c_0 \bar{A} A_2 \hat{K}_{22}\hat{K}_{11}E_1 + c_0 A \bar{A}_2 \hat{K}_{21}\hat{K}_{13}E_{-3} + c_0 A_0 A \hat{K}_{21}\hat{K}_{11}E_1 \\
&\quad + c_0 A_0 \bar{A} \hat{K}_{21}\hat{K}_{11}E_{-1} + c_0 A_2 A \hat{K}_{21}\hat{K}_{13}E_3 + c_0 \bar{A} A_2 \hat{K}_{21}\hat{K}_{11}E_1 \\
&\quad + c_0 \bar{A}_2 A \hat{K}_{21}\hat{K}_{11}E_{-1} + c_0 \bar{A}_2 \bar{A} \hat{K}_{21}\hat{K}_{13}E_{-3}] + O(\epsilon^4)
\end{aligned}$$

sonucu bulunur. Böylece, sağ ve sol tarafların eşitlenmesiyle,

$O(\epsilon)$  seviyesinde

$$\left[ \hat{K}_{11} \left( A + (1 - c_0) A \hat{K}_{21} \right) - A \right] E_1 + k.k. = 0 \quad (4.11)$$

eşitliği elde edilir. (4.11) denklemi lineerleştirilmiş denklemde çözümlerin yazılmasıyla da elde edilebilir.

$O(\epsilon^2)$  seviyesinde ise,

$$\begin{aligned}
0 &= \left[ \hat{K}_{12} \left( A_2 - c_0 \hat{K}_{21} A^2 + (1 - c_0) A_2 \hat{K}_{22} \right) - A_2 \right] E_2 + k.k. \\
&\quad + 2A_0 - c_0 A_0 - 2c_0 |A|^2 \hat{K}_{21} - A_0
\end{aligned} \quad (4.12)$$

eşitliği elde edilir. Burada,  $|A|$ ,  $A$  nın normudur. (4.12) denkleminde  $E_{\pm 2}$  ve  $E_0$  terimlerinin katsayıları sıfıra eşitlenirse;

$$A_0 = \frac{2c_0}{1 - c_0} \hat{K}_{21} |A|^2 \quad (4.13)$$

ve

$$A_2 = \frac{c_0 \widehat{K}_{21} \widehat{K}_{12}}{\widehat{K}_{12} + (1 - c_0) \widehat{K}_{12} \widehat{K}_{22} - 1} A^2 \quad (4.14)$$

yazılabilir.

$O(\epsilon^3)$  seviyesinde  $E_1$  teriminin katsayısından ise,

$$\widehat{K}_{11} \left( -\nu A \widehat{K}_{21} - c_0 (1 + \widehat{K}_{21}) A_0 A - c_0 (\widehat{K}_{21} + \widehat{K}_{22}) \bar{A} A_2 \right) - A_\tau = 0 \quad (4.15)$$

olduğu görülür. Böylece, (4.13), (4.14) ve (4.15) eşitlikleri kullanılarak,

$$A_\tau = \nu \Phi A + \Psi A |A|^2 \quad (4.16)$$

Stuart-Landau tipinde bir denklem elde edilir. Burada,

$$\Phi = -\widehat{K}_{11} \widehat{K}_{21} \text{ ve } \Psi = c_0^2 \widehat{K}_{11} \widehat{K}_{21} \left( \frac{\widehat{K}_{12} (\widehat{K}_{21} + \widehat{K}_{22})}{(c_0 - 1) \widehat{K}_{22} \widehat{K}_{12} - \widehat{K}_{12} + 1} + \frac{2(1 + \widehat{K}_{21})}{c_0 - 1} \right) \quad (4.17)$$

dir. (4.16) denkleminde  $\Phi$ ,  $\Psi$  katsayıları reeldir. Başlangıç genliği  $A(0)$  reel olmak koşulu ile  $A$  genliği reel alınabilir. Dolayısıyla, (4.16) denklemini

$$\frac{dA}{d\tau} = \nu \Phi A + \Psi A^3 \quad (4.18)$$

şeklinde ifade edilebilir.

Benzer işlemler, Ricker büyüme fonksiyonlu integro fark denklemi için yapılırsa,  $O(\epsilon)$  seviyesinde (4.11) lineer denklemi elde edilir.  $\epsilon^2$  li terimlerin eşitlenmesiyle ise,  $O(\epsilon^2)$  ve  $O(\epsilon^3)$  için

$$A_2 = \frac{r_0 \widehat{K}_{12} \widehat{K}_{21} (2 - r_0 \widehat{K}_{21})}{2(\widehat{K}_{12} - r_0 \widehat{K}_{12} \widehat{K}_{22} - 1)} A^2 \text{ ve } A_0 = \widehat{K}_{21} (r_0 \widehat{K}_{21} - 2) |A|^2$$

olup, ayrıca

$$\begin{aligned} A_\tau = & -\nu \widehat{K}_{21} A - r_0 (1 - r_0 \widehat{K}_{21} + \widehat{K}_{21}) A A_0 + r_0 (r_0 \widehat{K}_{21} \widehat{K}_{22} - \widehat{K}_{22} - \widehat{K}_{21}) A_2 A \\ & + r_0^2 \widehat{K}_{21} (3 - r_0 \widehat{K}_{21}) \frac{A^3}{2} \end{aligned}$$

elde edilir. (4.18) denklemindeki parametreler ise,

$$\begin{aligned} c_r = & (1 - r_0 \widehat{K}_{21} + \widehat{K}_{21}) (2 - r_0 \widehat{K}_{21}) \\ & + (r_0 \widehat{K}_{21} \widehat{K}_{22} - \widehat{K}_{22} - \widehat{K}_{21}) \frac{r_0 \widehat{K}_{12} (2 - r_0 \widehat{K}_{21})}{2(\widehat{K}_{12} - r_0 \widehat{K}_{12} \widehat{K}_{22} - 1)} + r_0 \widehat{K}_{21} \frac{3 - r_0 \widehat{K}_{21}}{2} \end{aligned}$$

olmak üzere,

$$\Phi = -\widehat{K}_{11}\widehat{K}_{21} \text{ ve } \Psi = r_0\widehat{K}_{11}\widehat{K}_{21}c_r$$

dir.

(4.18) denkleminin sabit çözümleri (denge noktaları)

$$A^* = 0 \text{ ve } A^{**} = \pm\sqrt{-\nu\Phi/\Psi}$$

dir.

$$f(A) = \nu\Phi A + \Psi A^3 \text{ ve } f'(A) = \nu\Phi + 3\Psi A^2$$

olduğundan,  $A^* = 0$  sabit çözümü için  $f'(0) = \nu\Phi$  dir. (Not:  $\Phi = -\widehat{K}_{11}\widehat{K}_{21} > 0$  dir.)

$A^{**} = \pm\sqrt{-\nu\Phi/\Psi}$  sabit çözümleri için ise,  $f'(\pm\sqrt{-\nu\Phi/\Psi}) = -2\nu\Phi$  dir.  $A^{**}$  çözümlerinin reel olması için  $-\nu/\Psi > 0$  olması gerekir. Başlangıçta  $\nu = \pm 1$  olduğu kabul edildiğinden 2 tip çatallanma ortaya çıkar. Eğer,

$\nu = 1$  ise, 1 kararsız, 2 kararlı denge noktası oluşur. Yani, supercritical pitchfork çatallanma meydana gelir.

$\nu = -1$  ise, 1 kararlı, 2 kararsız denge noktası oluşur. Yani, subcritical çatallanma meydana gelir.

Seçilen parametrelerden  $\Psi < 0$  olduğu görülür. Dolayısıyla,  $\nu = 1$  olmalıdır. Böylece, lojistik büyüme fonksiyonlu modelin desenlerinin genlik fonksiyonları için, sadece süperkritik pitchfork çatallanması elde edilir. Bu model için,  $c_0$  ın sağında kararlı bir  $\epsilon A_1$  dalı ortaya çıkar. Bu sonuçları nümerik olarak doğrulayabilmek için, bu modelin çözümlerinin genliği, yeterince büyük  $t^*$  için

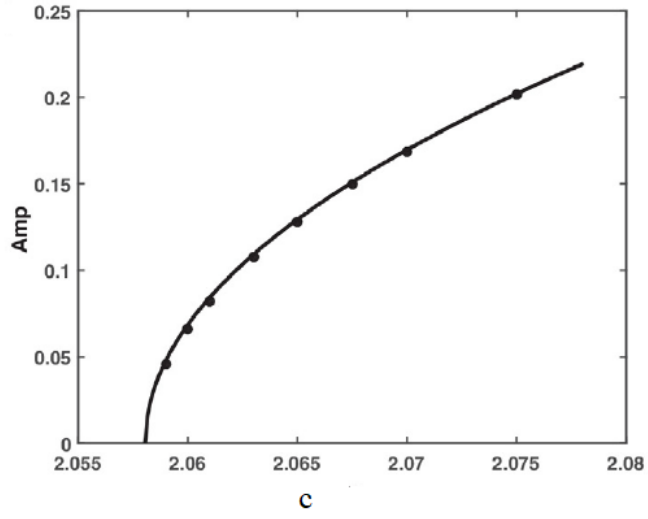
$$Amp = \max_{x \in D} \{u(x, t^*)\} - \min_{x \in D} \{u(x, t^*)\} \quad (4.19)$$

şeklinde tanımlansın. (4.7) pertürbasyonunun ilk iki terimi (4.19) da ele alınırsa,

$$\begin{aligned} Amp &= 1 + \max\{AE_1 + \overline{AE}_{-1}\} - 1 - \min\{AE_1 + \overline{AE}_{-1}\} \\ &= 4\epsilon A_1 \end{aligned}$$

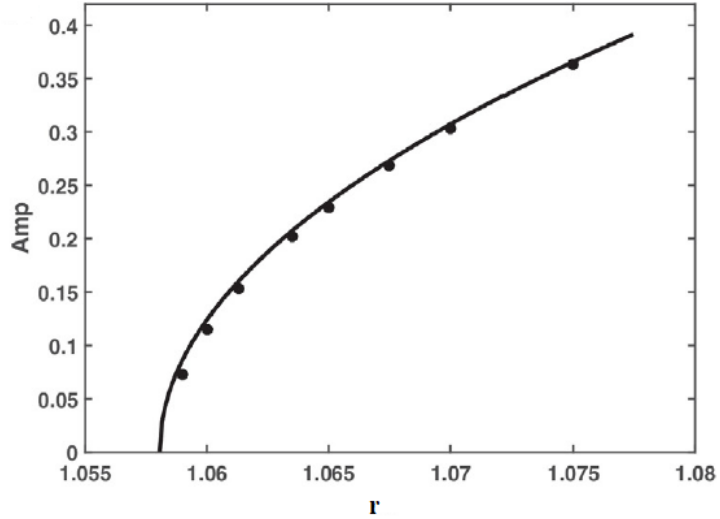
elde edilir. Yukarıda tanımlanan  $Amp$  fonksiyonunun niceliği, nümerik gözlemlerle karşılaştırılırsa,  $d_1 = 0.25$  ve  $d_2 = 1$  alınarak, lojistik model için durağan dalgaların

genlik seviyelerinin grafiği aşağıdaki gibi ortaya çıkar:



şekil 4.1 Lojistik büyüme fonksiyonlu model için  
genlik seviyesi

Aynı parametrelerle Ricker modeli için genlik seviyelerinin grafiği aşağıdaki gibidir.



şekil 4.2 Ricker büyüme fonksiyonlu model için  
genlik seviyesi

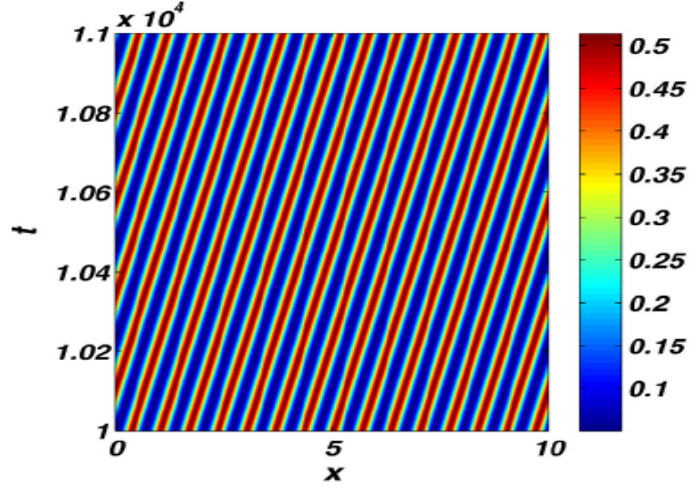
Hareketli dalgaların oluşturduğu desen ise, en st seviyesi kırmızı en alt seviyesi



mavi renk ile gösterilmek üzere ve etkileşim çekirdeğinde  $d = 0.45$ ,  $a = 0.05$  alınarak, parametreler  $d_1 = 0.1$  ve  $c = 1.3$  seçildiğinde lojistik büyüme fonksiyonlu modelde aşağıdaki desen oluşumu ortaya çıkar. Bu nümerik hesaplamalarda çekirdek fonksiyonu

$$K_{d,a}(x) = \begin{cases} \frac{1}{2d}, & |x - a| \leq d \\ 0, & |x - a| > d \end{cases}$$

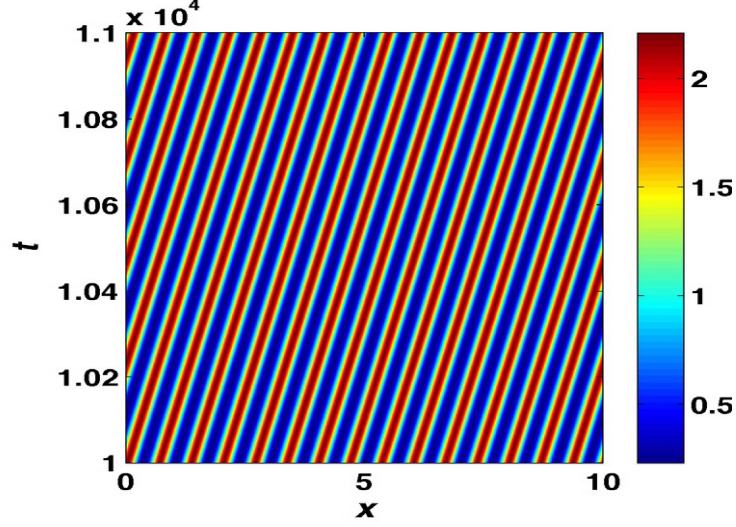
biçiminde alınmıştır.



Şekil 4.3  $K_{d,a}$  etkileşim çekirdeği ile lojistik fonksiyonlu modelin desen oluşumu

Aynı parametreler seçilerek, Ricker büyüme fonksiyonlu modelde ise, aşağıdaki grafik

ortaya çıkar.



Şekil 4.4  $K_{d,a}$  etkileşim çekirdeği ile Ricker fonksiyonlu modelin desen oluşumu

### 4.3 İntegro Fark Denklem Sistemlerinin Zayıf Lineer Olmayan Analizi

$c_0$ ,  $\lambda(c_0, k_{m_0}) = 1$  için  $c$  parametresinin kritik değeri olsun. (2.11) sisteminin bir çözümü aşağıdaki formda ifade edilebilir:

$$\begin{pmatrix} N_t \\ P_t \end{pmatrix} \propto (\lambda^t \exp(ik_m x) + e.k.) \quad (4.20)$$

burada  $e.k.$  eşlenik kompleksi ve  $i = \sqrt{-1}$  kompleks sayısını ifade etmektedir.  $c_0$  kritik değeri komşuluğunda pertürbasyon analizi uygulanırsa:

$$c = c_0 + \varepsilon^2 \nu, \quad 0 < \varepsilon \ll 1, \quad \nu = \pm 1$$

olmak üzere,  $\lambda(c, k_{m_0})$  özdeğerinin  $c_0$  komşuluğunda Taylor seri açılımı

$$\lambda(c, k_{m_0}) = \lambda(c_0, k_{m_0}) + \frac{\partial \lambda(c_0, k_{m_0})}{\partial c} \varepsilon^2 \nu + O(\varepsilon^4)$$

şeklinde elde edilir. Bu eşitlik (4.20) nin sağ tarafında yerine yazılırsa;

$$\begin{aligned} \lambda^t \exp(ik_{m_0} x) &= \exp \left( ik_{m_0} x + t \ln \left( 1 + \nu \varepsilon^2 \frac{\partial \lambda(c_0, k_{m_0})}{\partial c} \right) \right) \\ &= \exp \left( ik_{m_0} x + t \nu \varepsilon^2 \frac{\partial \lambda(c_0, k_{m_0})}{\partial c} \right) \\ &\approx \exp(ik_{m_0} x) A(\varepsilon^2 t) \end{aligned}$$

elde edilir. Burada,  $A$ ,  $\tau = \varepsilon^2 t$  yavaş zamanın bir fonksiyonudur. Bu analizde hızlı ve yavaş zaman skalası yani  $t$  ve  $\tau$  birlikte ele alınacaktır.  $W_t(x) = \begin{pmatrix} N_t(x) \\ P_t(x) \end{pmatrix}$  olmak üzere, (2.11) sisteminin çözümü aşağıdaki açılıma sahiptir.

$$W_t(x) = W_0 + \varepsilon W_1(t, \tau, x) + \varepsilon^2 W_2(t, \tau, x) + \dots \quad (4.21)$$

Belirtmek gerekir ki, mekansal homojen sabit çözümün yani  $W^*(x)$  in kararlılığı,  $c$  parametresine bağlıdır. Bu nedenle,  $c$  parametresinin pertürbasyonu,  $W^*$  denge çözümünün de pertürbasyonuna neden olacaktır. Dolayısıyla,  $W^*$  denge çözümünün bir pertürbasyonu

$$W^* = W_0 + \varepsilon^2 D \frac{\nu}{c_0^2} + O(\varepsilon^4)$$

şeklinde yazılabilir. Burada,  $D = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$  ve  $W_0 = \begin{pmatrix} \frac{1}{c_0} \\ 1 - \frac{1}{c_0} \end{pmatrix}$  dir.

(2.11) sisteminin çözümü

$$W(t, \tau, x) = W_0 + \varepsilon^2 D \frac{\nu}{c_0^2} + \varepsilon W_1(t, \tau, x) + \varepsilon^2 W_2(t, \tau, x)$$

şeklinde inşa edilebilir. Burada,  $W_1(t, \tau, x) = A(\tau)\rho E_1 + \tilde{A}(\tau)\rho E_{-1}$  olup,  $\rho \in Ker(KJ - I)$  ve  $W_2(t, \tau, x) = A^2(W_{20} + W_{22}E_2)$  dir. Burada,  $\rho$  vektörü aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır:

$$\rho = \begin{pmatrix} 1 \\ M \end{pmatrix}, \quad M = \frac{1 - \hat{K}_1(1 - r/c)}{(-r/c)\hat{K}_1} = \frac{\hat{K}_2(c - 1)}{1 - \hat{K}_2}$$

ve  $\varphi \in Ker(KJ - I)^\dagger$  olmak üzere,

$$\varphi = \begin{pmatrix} 1 \\ M_2 \end{pmatrix} E_1, \quad M_2 = \frac{(c - 1)\hat{K}_2}{\hat{K}_1(1 - \frac{r}{c}) - 1} = \frac{1 - \hat{K}_2}{(r/c)\hat{K}_1}.$$

$$\begin{aligned} W_{n+1} &= W(t + 1, \tau + \varepsilon^2, x) \\ &= W_0 + \varepsilon^2 D \frac{\nu}{c_0^2} + \varepsilon W_1(t + 1, \tau, x) \\ &\quad + \varepsilon^2 W_2(t + 1, \tau, x) + \varepsilon^3 \partial_\tau W_1(t + 1, \tau, x) + O(\varepsilon^4) \end{aligned} \quad (4.22)$$

(4.21)'in (2.11) sisteminde yerine yazılmasıyla ve (4.22) açılımının kullanılmasıyla, aşağıdaki ifadeler bulunur:

$O(\varepsilon)$  seviyesinde

$$(KJ - I)A(\tau)\rho E_1 + k.k. = 0 \quad (4.23)$$

lineer denklemi elde edilir.  $W_1$  çözümünün sistemde yerine yazılmasıyla,  $O(\varepsilon^2)$  seviyesinde

$$(KJ - I)W_2 = F \quad (4.24)$$

denklemi elde edilir. Burada,

$$F = \begin{pmatrix} -r(1+M)\widehat{K}_{12} \\ c_0M\widehat{K}_{22} \end{pmatrix} A^2 E_2 + \begin{pmatrix} -2r(1+M) \\ 2c_0M \end{pmatrix} |A|^2$$

biçimindedir. (4.24) denkleminin bir çözümü olabilmesi için Fredholm alternatif teoreminden,  $\langle F, \varphi \rangle = 0$  olmalıdır. Gambino vd. (2012) ve Han ve Dai (2017) nin çalışmalarından yararlanarak bir bilinear operatör oluşturabiliriz.  $x = (x^u, x^v)$  ve  $y = (y^u, y^v)$  olmak üzere, bir bilinear operatör

$$Q_J(x, y) = \begin{pmatrix} 2\gamma_{12}x^u y^u - 2\gamma_{21}x^u y^v + 2\gamma_{11}x^v y^u \\ \gamma_{21}(x^u y^v + x^v y^u) \end{pmatrix}$$

şeklinde olup,  $J = \begin{pmatrix} \frac{1}{c_0}\gamma_{11} & \frac{1}{c_0}\gamma_{12} \\ \frac{c_0-1}{c_0}\gamma_{21} & \frac{c_0-1}{c_0}\gamma_{22} \end{pmatrix}$  dir.

Ayrıca,

$$W_2 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} A^2 E_2 + \begin{pmatrix} z_0 \\ t_0 \end{pmatrix} A^2$$

şeklinindedir.  $O(\varepsilon^3)E_1$  terimlerinin katsayılarının eşitlenmesiyle aşağıdaki denklem elde edilir.

$$(KJ - I)W_3 = G, \quad (4.25)$$

burada,

$$G = \left( \frac{dA}{d\tau}\rho + AG_1^{(1)} + A^3G_1^{(3)} \right) E_1$$

ve

$$G_1^{(1)} = \begin{pmatrix} \frac{r\nu}{c_0^2}(1+M)\widehat{K}_{11} \\ \nu\widehat{K}_{21} \end{pmatrix} \text{ ve } G_1^{(3)} = \begin{pmatrix} r(t_0 + 2z_0 + 2x_0 + y_0 + z_0M + x_0M)\widehat{K}_{11} \\ -c_0(t_0 + y_0 + x_0M + z_0M)\widehat{K}_{21} \end{pmatrix}$$

dir. (4.25) denkleminin çözüme sahip olması için  $\langle G, \varphi \rangle = 0$  koşulu sağlanmalıdır. Böylece bulunan eşitliklerden

$$\frac{dA}{d\tau} = \Phi A - \Psi A^3$$

Stuart-Landau denklemi elde edilir. Burada,

$$\Phi = -\frac{\langle G_1^{(1)}, \varphi \rangle}{\langle \rho, \varphi \rangle} \text{ ve } \Psi = \frac{\langle G_1^{(3)}, \varphi \rangle}{\langle \rho, \varphi \rangle}$$

şeklindedir.

## 5. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu tezde, integro fark denklemleri lojistik ve Ricker büyüme fonksiyonuyla birlikte ele alınarak, bireylerin hem hareketleri hem de etkileşimleri olasılık çekirdek fonksiyonları yardımıyla incelenmiştir. Bu iki modelde de, lokal olmayan terimler lokal olmayan uzaklık parametresine bağlı olarak ele alınmış ve denge çözümünün hangi koşullarda kararsız duruma geçerek desen oluşumu meydana getirdiği gösterilmiştir. Yayılma ve etkileşimin olmadığı durumlarda, denge çözümü kararlı bir yapıdayken, yayılma ve lokal olmayan bir etkileşim fonksiyonuyla, aynı parametreler için denge çözümünün kararsız hale geldiği görülmüştür. Lojistik ve Ricker büyüme fonksiyonlu integro-fark denklemi modelinde bu kararsız yapıyı ortaya çıkaran terimin lokal olmayan etkileşim çekirdeği olduğu ortaya konmuştur. Elde edilen koşullar, bilgisayar hesaplamalarıyla doğrulanmıştır. Benzer olarak, integro-fark denklem sistemi için de hangi koşullarda denge çözümünün kararsız hale geldiği gösterilmiştir. Lineer kararlılık analizi yardımıyla elde edilen bu sonuçlar, grafiklerle desteklenmiştir.

Denge çözümü kararlı yapıdan kararsız bir yapıya geçerken dalgalı bir hareket meydana gelmektedir. Bu dalgalı yapıdaki genliklerin davranışlarını incelemek için ise, zayıf lineer olmayan analiz yöntemi kullanılmıştır. Zayıf lineer olmayan analiz yönteminden önce, çoklu-ölçekli pertürbasyon metodundan bahsedilmiştir. Bu yöntem, hem sürekli bir yapı hem de ayrık bir yapı içeren bir fonksiyona uygulanmıştır. Böylece, çözümlerin lineer olmayan terimleri göz önüne alınarak, ortaya çıkan genliklerin bir denklemi elde edilmiştir. Bu denklemin çözümlerinin ise, bazı koşullarda süperkritik bir çatallanma meydana getirdiği görülmüştür.

Sürekli zamanlı modellerde sıkça kullanılan zayıf lineer olmayan analiz metodu, ilk defa ayrık zamanlı bir modelde kullanılmış olup, ortaya önemli sonuçlar çıkmıştır.

Bu tez, integro-fark denklemleri alanında yapılan ilk Türkçe çalışma olup, integro-fark denklemlerinin zayıf lineer olmayan analizi açısından yapılan ilk kapsamlı çalışmadır. Böylece, bu alanda inceleme yapmak isteyen kişilere yardımcı olacağı ve bundan sonra yapılacak olan çalışmalara yol gösterici bir kaynak olacağı düşünülmektedir. Bu çalışmada ele alınan integro-fark denklem sisteminin de zayıf lineer olmayan

analizi yapılarak veya iki boyutlu bir konum uzayında çalışılarak, bu konu geliştirilebilir ve birçok yeni çalışma ortaya çıkabilir.

## KAYNAKLAR

- Aydogmus, O. 2015. Patterns and transitions to instability in an intraspecific competition model with nonlocal diffusion and interaction, *Math. Model. Nat. Phenom.* 10, 17-29.
- Aydogmus, O., Kang, Y., Kavgaci, M. E. and Bereketoğlu, H. 2017. Dynamical effects of nonlocal interactions in discrete-time growth-dispersal models with logistic-type nonlinearities, *Ecol. Complexity.* 31, 88-95.
- Bachmann, P. 1894. *Die Analytische Zahlentheorie*, Teubner, Leipzig, 494pp.
- Banerjee, M., Vougalter, V. and Volpert, V. 2017. Doublynonlocal reaction-diffusion equation and the emergence of species, *Appl. Math. Model.* 42,591-599.
- Banerjee, M. and Volpert, V. 2016a. Prey-predator model with a nonlocal consumption of prey, *Chaos* 26, 083120.
- Beverton, R. J. H. and Holt, S. J. 1957. On the dynamics of exploited fish populations, *Fishery Investigations, Series II*, 19, 1-533.
- Britton, N. 1986. *Reaction-Diffusion Equations and Their Applications to Biology*, Academic Press, London, 277pp.
- Britton, N. 1989. Aggregation and the competitive exclusion principle, *J. Theoret. Biol.* 136, 57-66.
- Britton, N. 1990. Spatial structures and periodic travelling waves in an integro-differential reaction-diffusion population model, *SIAM J. Appl. Math.* 50, 1663-1688.
- Bochner, S. and Chandrasekharan, K. 1949. *Fourier Transforms*, Princeton University Press, London, 219pp.
- Conway, E. D. and Smoller J. A. 1977. Diffusion and the predator-prey interaction, *SIAM J. Appl. Math.* 33, 673-686.
- Doebeli, M. 1995. Dispersal and dynamic, *Theor. Popul. Biol.* 47, 82-106.
- Eftimie, R., de Vries, G. and Lewis, M. 2009. Weakly nonlinear analysis of a hyperbolic model for animal group formation, *J. Math. Biol.* 59, 37-74.
- Elaydi, S. 1999. *An Introduction to Difference Equations*. Springer-Verlag, New York. 539pp.
- Fife, P. C. 1979. *Mathematical Aspects of Reacting and Diffusing Systems*, Lecture Notes in Biomathematics. Vol. 28. Springer-Verlag, New York. 185pp.
- Fisher, R.A. 1937. The wave of advance of advantageous genes, *Ann. Eugenics.* 7, 355-369.



- Fuentes, M., Kuperman, M. and Kenkre, V. 2003. Nonlocal interaction effects on pattern formation in population dynamics, *Phys. Rev. Lett.* 91, 158104.
- Fuentes, M., Kuperman, M. and Kenkre, V. 2004. Analytical considerations in the study of spatial patterns arising from nonlocal interaction effects, *J. Phys. Chem. B.* 108, 10505-10508.
- Gambino, G., Lombardo, M.C. and Sammartino, M. 2012. Turing instability and traveling fronts for a nonlinear reaction-diffusion system with cross-diffusion, *Math. Comput. Simulation* 82, 1112-1132.
- Genieys, S., Volpert, V. and Auger, P. 2006. Pattern and waves for a model in population dynamics with nonlocal consumption of resources, *Math. Model. Nat. Phenom.* 1, 63-80.
- Genieys, S., Bessonov, N. and Volpert, V. 2009. Mathematical model of evolutionary branching, *Math. Comput. Model.* 49, 2109-2115.
- Gourley, S. A. 2000. Travelling front solutions of a nonlocal Fisher equation, *J. Math. Biol.* 41, 272-284.
- Han, R. and Dai, B. 2017. Cross-diffusion-driven Turing instability and weakly nonlinear analysis of Turing patterns in a uni-directional consumer-resource system, *Bound. Value Probl.* 2017:125.
- Hardin, D.P., Takac, P. and Webb, G.F. 1988. Asymptotic properties of a continuous-space discrete-time population model in a random environment, *J. Math. Biol.* 26, 361-374.
- Hassell, M. P. 1978. *The Dynamics of Arthropod Predator-Prey Systems*. Princeton, N.J., Princeton University Press, viii + 237pp.
- Holmes, M.H. 2012. *Introduction to Perturbation Methods*, vol. 20. Springer Science& Business Media.
- Hopf, E. 1942. Abzweigung einer periodischen Lösung von einer stationären Lösung eines Differentialsystems, *Ber. Math.-Phys. Kl. Sachs, Acad. Wiss. Leipzig* 94, 1-22.
- Hoppenstead, F. C. and Miranker W. L. 1977. Multitime methods for system of difference equations, *Studies in Appl. Math.*, 56, 273-289.
- Jury, E. I. 1964. *Theory and Applications of the Z Transform*. John Wiley&Sons, New York.
- Kelley, W. G. and Peterson, A. C. 1991. *Difference Equations An Introduction with Applications*. Academic, New York. 403 pp.
- Kierstead, H. and Slobodkin, L. B. 1953. The size of water masses containing plankton bloom, *J. Mar. Res.* 12, 141-147.

- Kolmogorov A. N., Petrovskii I. G. and Piskunov N. S. 1937. Etude de la diffusion avec croissance de la quantité de matière et son application à un problème biologique, *Moscow Univ. Math. Bull.* 1, 1-25.
- Kot M., Lewis M. and van den Driessche P. 1996. Dispersal data and the spread of invading organisms, *Ecology*. 77(7), 2027-2042.
- Kot, M. and Schaffer, W. M. 1986. Discrete-time growth-dispersal models, *Math. Bio. Sci.* 80, 109-136.
- Kot, M. 1989. Diffusion-driven period-doubling bifurcations, *BioSystems* 22, 279-287.
- Kot, M. 1992. Discrete-time travelling waves: ecological examples, *J. Math. Biol.* 30, 413-436.
- Kot, M. 2001. *Elements of Mathematical Ecology*, Cambridge Univ. Press, Cambridge. 442pp.
- Landau, L. 1944. Stability of tangential discontinuities in compressible fluid, *Dokl. Akad. Nauk SSSR.* 44, 139-141.
- Lotka, A.J. 1925. *Elements of Physical Biology*, Williams and Wilkins Co., Baltimore. 460pp.
- May, R. M. 1973. On relationships among various types of population models, *The American Naturalist*, Vol. 107, No. 953, pp. 46-57.
- May, R. M. 1976. Simple mathematical models with very complicated dynamics, *Nature*. 261, 459-467.
- Maynard, S. J. 1974. *Models in Ecology*, Cambridge, London, New York. 152pp.
- Murray, J. D. 1993. *Mathematical Biology*, Springer-Verlag, Berlin. 767pp.
- Murray, J. D. 2003. *Mathematical Biology II: Spatial Models and Biomedical Applications*, Third Edition, Springer-Verlag, New York. 811pp.
- Neubert, M.G., Kot, M. and Lewis, M.A. 1995. Dispersal and pattern formation in a discrete-time predator-prey model, *Theor. Popul. Biol.* 48, 7-43.
- Okubo, A. and Levin, S. A. 2001. *Diffusion and Ecological Problems: Modern Perspectives*, Second Edition, Springer, New York. 467pp.
- Perthame, B. and Génieys, S. 2007. Concentration in the nonlocal Fisher equation: the Hamilton-Jacobi limit, *Math. Model. Nat. Phenom.* 2, 135-151.
- Poincaré, H. 1885. L'Équilibre d'une masse fluide animée d'un mouvement de rotation, *Acta Mathematica*, vol.7, pp. 259-380.
- Rafei, M. and Van Horssen, W. T. 2012. Solving systems of nonlinear difference equations by the multiple scales perturbation method, *Nonlinear Dyn.* 69:1509-1516.

- Ricker, W. E. 1954. Stock and recruitment, *Journal of the Fisheries Research Board of Canada*, 11: 559–623.
- Segal, B., Volpert, V. and Bayliss, A. 2013. Pattern formation in a model of competing populations with nonlocal interactions. *Physica D: Nonlinear Phenom.* 253, 12–22.
- Segel, L.A. and Stoeckly, B. 1972. Instability of a layer of chemotactic cells, attractant and degrading enzyme, *J. Theor. Biol.* 37, 561–585.
- Skellam, J. G. 1951. Random dispersal in theoretical populations, *Biometrika* 38, 196-218.
- Stuart, J. 1958. On the non-linear mechanics of hydrodynamic stability, *Journal of Fluid Mechanics* 4, 1-21.
- Stuart, J. 1960. On the non-linear mechanism of wave disturbances in stable and unstable parallel flows. part i. *Journal of Fluid Mechanics* 9, 152-171.
- Subramanian, R. and Krishnan, A. 1979. Non-linear discrete time systems analysis by mutiple time perturbation techniques, *J. of Sound and Vibration*, 63, 325-335.
- Tanzy, M., Volpert, V., Bayliss, A. and Nehrkorn, M. 2013. Stability and pattern formation for competing populations with asymmetric nonlocal coupling, *Math. Biosci.* 246, 14–26.
- Turing, A.M. 1952. The chemical basis of morphogenesis, *Philos. Trans. R. Soc. London B*, 237, 37-72.
- Van Horsen, W.T. 2008. On a reformulation of the multiple scales perturbation method for difference equations, ENOC-2008, Saint Petersburg, Russia, June, 30–July, 4.
- Van Horsen, W.T. and Ter Brake, M.C. 2009. On the multiple scales perturbation method for difference equations, *Nonlinear Dyn.* 55: 401-418.
- Volterra, V. 1926. *Variazioni e fluttuazioni del numero d'individui in specie animali conviventi.* Memor ccad Lincei, Ser. 6.
- Wolfenbarger, D.O. 1946. Dispersion of small organisms, *Am. Midland Natur.* 35, 1-152.
- Wolfenbarger, D.O. 1959. Dispersion of small organisms, incidence of viruses and pollen; dispersion of fungus, spores, and insects, *Lloydia* 22, 1-106.

## ÖZGEÇMİŞ

**Adı Soyadı** : Musa Emre KAVGACI

**Doğum Yeri** : ANKARA

**Doğum Tarihi** : 03/08/1988

**Medeni Hali** : Evli

**Yabancı Dili** : İngilizce

### **Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl):**

**Lise** : Özel Evrensel Fen Lisesi (2006)

**Lisans** : Ankara Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü  
(2006-2010)

**Yüksek Lisans** : Ankara Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik  
Anabilim Dalı (2012-2014)

**Çalıştığı Kurum/Kurumlar ve Yıl:** Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi  
Matematik Bölümü (2011- )

### **SCI Yayınları:**

-H. BEREKETOGLU, M. E. KAVGACI and G. S. OZTEPE, Asymptotic convergence of solutions of a scalar  $q$ -difference equation with double delays. *Acta Math. Hungar.*, 148(2), 279-293 (2016)

-O. AYDOGMUŞ, Y. KANG, M. E. KAVGACI and H. BEREKETOGLU, Dynamical effects of nonlocal interactions in discrete-time growth-dispersal models with logistic-type nonlinearities. *Ecol. Complexity*, 31, 88-95 (2017)

### **Diğer Yayınları:**

-M. E. KAVGACI, Oscillation of nonlinear fourth-order difference equations with middle term. *Commun. Fac. Sci. Univ. Ank. Sér. A1 Math. Stat.* 67, no. 2, 291–297 (2018)