ANKARA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DOKTORA TEZİ

LİNEER OLMAYAN İNTEGRAL OPERATÖR AİLESİNİN YAKINSAKLIĞI

Özge ÖZALP GÜLLER

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ANKARA
2019

TEZ ONAYI

Özge ÖZALP GÜLLER tarafından hazırlanan " **Lineer Olmayan İntegral Operatör Ailesinin Yakınsaklığı**" adlı tez çalışması 26/09/2019 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından **oy birliği~~(veya oy çokluğu)~~** ile Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda **DOKTORA TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Danışman: Prof. Dr. Ertan İBİKLİ

Jüri Üyeleri:

Başkan: Prof. Dr. İsmet YÜKSEL
Gazi Üniversitesi, Matematik Anabilim Dalı

Üye : Prof. Dr. Ertan İBİKLİ
Ankara Üniversitesi, Matematik Anabilim Dalı

Üye : Prof. Dr. İbrahim BÜYÜKYAZICI
Ankara Üniversitesi, Matematik Anabilim Dalı

Üye : Doç. Dr. Cüneyt ÇEVİK
Gazi Üniversitesi, Matematik Anabilim Dalı

Üye : Doç. Dr. Sezgin SUCU
Ankara Üniversitesi, Matematik Anabilim Dalı

Yukarıdaki sonucu onaylarım

Prof. Dr. Özlem YILDIRIM
Enstitü Müdürü

ETİK

Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez içindeki bütün bilgilerin doğru ve tam olduğunu, bilgilerin üretilmesi aşamasında bilimsel etiğe uygun davrandığımı, yararlandığım bütün kaynakları atıf yaparak belirttiğimi beyan ederim.

26/09/2019

Özge ÖZALP GÜLLER

ÖZET

Doktora Tezi

LİNEER OLMAYAN İNTEGRAL OPERATÖR AİLESİNİN YAKINSAKLIĞI

Özge ÖZALP GÜLLER

Ankara Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Ertan İBİKLİ

Bu tez çalışması beş bölümden oluşmaktadır.

Tezin ilk bölümü, giriş kısmına ayrılmıştır.

İkinci bölümde, tez çalışmasında gerekli olan bazı temel kavramlar, tanımlar ve teoremler verilmiştir.

Üçüncü bölüm, iki kesime ayrılmıştır. İlk kesimde, sonlu toplam içeren lineer olmayan integral operatörlerinin noktasal yakınsaklığı incelenmiştir. İkinci kesimde de, sonsuz toplam içeren lineer olmayan integral operatörlerinin noktasal yakınsaklığı incelenmiştir.

Dördüncü bölümde, sonlu toplam içeren iki katlı lineer olmayan integral operatörlerinin noktasal yakınsaklığı incelenmiştir.

Son bölümde, tezde elde edilen sonuçlar tartışılmıştır.

Eylül 2019, 103 sayfa

Anahtar Kelimeler: Lineer olmayan integral operatörler, Lebesgue noktası, $\mu-$genelleştirilmiş Lebesgue noktası

ABSTRACT

Ph.D. Thesis

CONVERGENCE OF NONLINEAR INTEGRAL OPERATOR FAMILY

Özge ÖZALP GÜLLER

Ankara University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Ertan İBİKLİ

This thesis consists of five chapters.

The first chapter of the thesis is devoted to the introduction.

The second chapter contains some basic notions, definitions and theorems which are needed in the thesis.

The third chapter is divided into two parts. In the first part, the pointwise convergence of nonlinear integral operators containing finite sum is examined. In the second part, the pointwise convergence of nonlinear integral operators with infinite sum is examined.

In the fourth chapter, the pointwise convergence of nonlinear double integral operators containing finite sum is examined.

In the last chapter, the results obtained in the thesis are discussed.

September 2019, 103 pages

Key Words: Nonlinear Integral Operators, Lebesgue Point, $\mu-$generalized Lebesgue Point.

TEŞEKKÜR

Bu tez çalışmasının oluşmasında beni yönlendiren, araştırmalarımın her aşamasında bilgi, öneri ve yardımlarını esirgemeyerek çalışmanın ilerlemesinde katkıda bulunan danışman hocam Sayın Prof. Dr. Ertan İBİKLİ'ye (Ankara Üniversitesi Matematik Anabilim Dalı), çalışma süresince yol gösteren ve her aşamasında destek olan Sayın Dr. Öğr. Üyesi Gümrah UYSAL'a ve hayatım boyunca beni her zaman destekleyen, yanımda olan aileme ve sevgili eşim Müjdat Güller'e en içten duygularımla teşekkür ederim.
Bu tez "TÜBİTAK-2228-B Yüksek Lisans Öğrencileri için Doktora Burs Programı" tarafından desteklenmiştir.

Özge ÖZALP GÜLLER
Ankara, Eylül 2019

İÇİNDEKİLER

SİMGELER DİZİNİ

$\mathbb{N}$	Doğal Sayılar Kümesi
$\mathbb{R}$	Reel Sayılar Kümesi
(a,b)	Reel sayılar kümesinin keyfi sonlu açık aralığı
$D=(a,b)\times(c,d)$	$\mathbb{R}^2$ üzerinde açık bölge
Λ	Negatif olmayan reel sayıları içeren boştan farklı olan bir indis kümesi
$K_{\lambda,m}$	T_λ operatörünün çekirdek fonksiyonu
$H_{\gamma,m}$	Ψ_γ operatörünün çekirdek fonksiyonu
$\widetilde{K}_{\lambda,m}$	U_λ operatörünün çekirdek fonksiyonu
$\bigvee_a^b(g)$	g fonksiyonunun, $[a,b]$ aralığı üzerindeki toplam salınımı
V_m ve $\widetilde{V}_m$	Özel olarak tanımlanan salınım fonksiyonları

1. GİRİŞ

Lineer integral denklemlerinin çalışılmasının ardından lineer integral operatörleri ile ilgili olarak Fourier serileri ve Fourier integralleri teorisi, yaklaşım teorisi, toplanabilirlik teorisi, integral ve diferansiyel denklemlerin çözülmesini ve bunların uygulamasını içeren birçok alanda çalışmalar yapılmıştır. İntegral ve diferansiyel denklemlerdeki uygulamalar kısa sürede lineer operatörlerin sınırlarını aşmıştır. Bununla birlikte, yaklaşım teorisinde uygulamalar lineer operatörler ile sınırlıydı. Çünkü integral operatörünün singülerlik kavramı lineerliği ile yakından ilişkiliydi (Bardaro vd. 2003).

Zamanla singülerlik kavramı, lineer olmayan integral operatörlerinin de durumunu kapsayacak şekilde genişletildi (Musielak 1983). Lineer olmayan integral operatörlerinin, yaklaşım teorisi ve ilgili konularda oynadığı role ilişkin araştırmalara ayrılmış bir dizi makale ortaya çıkmıştır. Bu çalışmaları yapanlara örnek olarak Musielak (1983, 1991, 1993), Vinti ve Angeloni (2005) verilebilir. Örneğin, Butzer ve Jansche (1998) lineer olmayan örnekleme tipi operatörler aracılığıyla sinyallerin oluşturulması, bazı sinyaller sınıfının işlenmesi için uygun olan lineer olmayan modelleri tanımlamıştır (Bardaro vd. 2003). Bu yalnızca matematiksel açıdan değil, aynı zamanda mühendislikteki uygulamalar için de büyük ilgi uyandırmıştır.

Yaklaşımlar teorisinin amacı, keyfi herhangi bir fonksiyonun daha iyi özelliklere sahip olan basit ve kullanışlı fonksiyonlar cinsinden bir gösterimini elde etmektir. Bu nedenle verilen keyfi bir fonksiyonun, kendisinden daha iyi ve basit özellikleri olan fonksiyon dizileri ile gösterilmesinin uygunluğunun araştırılması, yaklaşımlar teorisi için önemli bir problem olarak karşımıza çıkmaktadır. Bu iyi özelliklere fonksiyonların türevlenebilmeleri, integrallenebilmeleri, süreklilikleri ve polinom olmaları örnek olarak verilebilir.

Alman matematikçi Weierstrass (1885), kapalı ve sınırlı aralıkta sürekli bir fonksiyona polinomlar yardımıyla yaklaşılabileceğini ispatlamıştır. Sürekli fonksiyonlar sınıfında toplam biçimindeki operatörlerle yaklaşım ile ilgili çok sayıda makale yayımlanmıştır.

İntegrallenebilir fonksiyonlar sınıfında ise, fonksiyonların sürekli olmayanları da göz önüne alınırsa, bu sınıftan alınan bir fonksiyona yakınsayan diziyi veya aileyi, bir integral operatörler dizisi veya ailesi biçiminde almanın daha uygun olduğu görülmektedir. Bir f fonksiyonuna yaklaşan dizi olarak, lineer pozitif operatörlerin yardımıyla oluşturulan dizi ele alınabilir.

İntegrallenebilen fonksiyonlar sınıfı üzerinde lineer bir integral operatörü, $x \in D \subset \mathbb{R}$ noktası için

$$T(f;x) = \int_D f(s)K(s;x)ds$$

biçiminde verilebilir. Burada, $K(s;x)$ fonksiyonu D bölgesinde s değişkenine bağlı bir fonksiyondur ve bu $K(s;x)$ fonksiyonuna, integral operatörünün çekirdeği adı verilir.

$x \in D$ noktası ve $\Lambda \neq \emptyset$ indis kümesi olmak üzere $\lambda \in \Lambda$ reel sayısı için $K_\lambda(s;x)$ çekirdekler ailesi ele alınırsa

$$T_\lambda(f;x) = \int_D f(s)K_\lambda(s;x)ds$$

şeklinde olan integral operatörler ailesi elde edilir. Bu tip operatörler ile ilgili olan çalışmalara örnek olarak Faddeev (1936), Tandori (1954), Mamedov (1961), Taberski (1962a), Gadjiev (1968), Rydzewska (1973), Sikkema (1983) ve Esen (2002) verilebilir. Ayrıca, özel olarak $\lambda \in \Lambda$ reel sayısı ve $x \in D$ noktası için $K_\lambda(s;x)$ çekirdekler ailesi, $K_\lambda(s;x) = L_\lambda(s-x)$ olarak seçilirse

$$T_\lambda(f;x) = \int_D f(s)L_\lambda(s-x)ds$$

biçiminde konvolüsyon tipli integral operatör ailesi elde edilir. Konvolüsyon tipli integral operatörler ailesi, yaklaşımlar teorisinde önemli bir yere sahiptir. Çünkü bu tip integral operatörler, $L_\lambda(s-x)$ çekirdek fonksiyonunun iyi özelliklerini, konvolüsyon işlemi ile elde edilen fonksiyona aynı şekilde taşırlar. Yaklaşımlar teorisinde, bu tip operatörleri ilk kullanan matematikçiler Fejer (1900), Fatou (1906), Lebesgue (1909) ve Zygmund (1959) dur. Bu matematikçiler D bölgesini, $\Lambda \neq \emptyset$ indis kümesini ve $L_\lambda(s-x)$ ile verilen çekirdek fonksiyonunu özel olarak seçerek, konvolüsyon tipli integral operatörleri yardımıyla integrallerin özelliklerini incelemenin yanı sıra bazı yaklaşım problemlerinin çözümleri için de yeter koşulları elde etmişlerdir.

Taberski (1964), Lebesgue integrallenebilen tüm reel değerli fonksiyonlar sınıfı üzerindeki yaklaşım problemini, $D =< a, b > \times < c, d >$ dikdörtgensel bölgesinde $(x, y) \in D$ noktaları için

$$T_\lambda(f; x, y) = \iint\limits_D f(s, t)K(s - x, t - y; \lambda)dtds$$

şeklinde üç parametreye bağlı iki katlı singüler integral operatör ailesi yardımı ile vermiştir. Burada, $K(s - x, t - y; \lambda)$ fonksiyonu $D \times D$ bölgesinde s ve t değişkenlerine bağlı bir fonksiyondur. Bu çalışmadan sonra Siudut (1988, 1989) ve Taberski (1962b, 1964), üç parametreye bağlı iki katlı singüler integral operatör ailesi için yakınsaklık ile ilgili olan teoremleri periyodik olmayan durumda da incelemiştir. Ayrıca, üç parametreye bağlı iki katlı singüler integral operatör ailesi için çeşitli teoremler ispatlamıştır. Daha sonra Karslı ve Ibikli (2005, 2007), Yılmaz (2011), Yılmaz vd. (2011), Uysal (2016) ve Yıldırım (2019) da benzer çalışmalar yapmıştır. Lineer operatörler ailesinin yaklaşımı ile ilgili çokça çalışmalar olmasına rağmen bugüne kadar lineer olmayan (nonlineer) integral operatörler ailesinin yaklaşımı çok fazla araştırılmamıştır. Musielak (1983), $x \in \mathbb{R}$ ve $\lambda \in \Lambda$ reel sayısı için

$$T_\lambda(f; x) = \int\limits_{\mathbb{R}} K_\lambda(s, x, f(s))ds$$

biçiminde lineer olmayan integral operatörlerinin yaklaşımını incelemiştir. Bu konu ile ilgili daha sonra yapılan çalışmalara örnek olarak Swiderski ve Wachnicki (2000), Bardaro vd. (2003), Vinti ve Angeloni (2005), Karslı (2008, 2013), Yılmaz (2016, 2018), Uysal vd. (2017) çalışmaları verilebilir.

Ayrıca, Almali (2017)

$$T_\lambda(f; x) = \sum_{m=1}^{N} \int\limits_a^b [f(t)]^m K_{\lambda,m}(t; x)dt$$

biçiminde lineer olmayan integral operatör ailesinin yakınsaklığı ile ilgili bir çalışma yapmıştır. Burada, $x_0 \in (a, b)$ noktası, $T_\lambda(f, x)$ operatörünün Lebesgue noktası ve

$$C_m = \lim_{\lambda \to \infty} \int\limits_a^b K_{\lambda,m}(t; x)dt$$

olmak üzere

$$\lim_{\lambda\to\infty} T_\lambda(f;x) = \sum_{m=1}^{N} C_m f^m(x_0)$$

olduğu gösterilmiştir. Daha sonra Almali (2017), sonlu toplam içeren bu operatörü sonsuz toplam şeklinde alarak yine aynı nokta da integral operatörünün yakınsaklığını incelemiştir.

Bu bilgiler ışığında, bu tez çalışmasında da öncelikle gerekli tanım ve teoremlere yer verilmiştir. Ayrıca, fonksiyonların süreklilik noktalarında yaklaşım çokça çalışıldığından yeni çalışma alanları açmak için başka karakteristik noktalar tanımlanmıştır. Bu çalışmada da, aşağıda verilen lineer olmayan operatörlerin yakınsaklığı, karakteristik noktalardan biri olan $\mu-$genelleştirilmiş Lebesgue noktasındaki noktasal yakınsaklıkları incelenmiştir.

Tez çalışmasının ikinci bölümünün ilk kesiminde, öncelikle $g \in L_1(a,b)$ fonksiyonu, $\lambda \in \Lambda$ reel sayısı ve $x \in (a,b)$ noktası için

$$T_\lambda(g;x) = \int_a^b \sum_{m=1}^{n} g^m(s) K_{\lambda,m}(s;x)ds$$

biçiminde sonlu toplam içeren lineer olmayan integral operatörünün noktasal yakınsaklığı, $\mu-$genelleştirilmiş Lebesgue noktasında araştırılmıştır. Ardından, $T_\lambda(g;x)$ integral operatörünün noktasal yakınsaklığı, (a,b) aralığı yerine reel sayılar kümesi alınarak $g \in L_p(\mathbb{R})$ fonksiyonu için de incelenmiştir.

Burada, $\Lambda \neq \emptyset$ kümesi, negatif olmayan λ reel sayılarını içeren bir indis kümesidir ve (a,b) aralığı, $\mathbb{R}$ nin sonlu keyfi açık aralığıdır. Ayrıca, $K_{\lambda,m} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_0^+$ fonksiyonu, $\lambda \in \Lambda$ reel sayısı olmak üzere özellikleri önceden verilmiş bir çekirdek fonksiyonu ve $m = 1, 2, ..., n$ için g^m fonksiyonu ise g fonksiyonunun $m - inci$ kuvvetidir.

Bu bölümünün ikinci kesiminde, ilk olarak $1 \leq p < \infty$ olmak üzere $g \in L_p(a,b)$ fonksiyonu, $\gamma \in \Gamma$ reel sayısı ve $x \in (a,b)$ noktası için

$$\Psi_\gamma(g;x) = \sum_{m=1}^{\infty} \int_a^b g^m(s) H_{\gamma,m}(s-x)ds$$

biçiminde konvolüsyon tipli sonsuz toplam içeren lineer olmayan integral operatörünün noktasal yakınsaklığı, $\mu-$genelleştirilmiş Lebesgue noktasında incelenmiştir. Ardından, $\Psi_\gamma(g;x)$ integral operatörünün noktasal yakınsaklığı $1 \leq p < \infty$ olmak üzere

(a, b) aralığı yerine reel sayılar kümesi alınarak $g \in L_p(\mathbb{R})$ fonksiyonu için de araştırılmıştır.

Burada, $\Gamma \neq \emptyset$ kümesi, negatif olmayan γ reel sayılarını içeren bir indis kümesidir ve (a, b) aralığı, $\mathbb{R}$ nin sonlu keyfi açık aralığıdır. Ayrıca, $H_{\gamma,m} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu, $\gamma \in \Gamma$ reel sayısı olmak üzere özellikleri önceden verilmiş bir çekirdek fonksiyonu ve $m = 1, 2, ...$ için g^m fonksiyonu ise g fonksiyonunun $m - inci$ kuvvetidir.

Çalışmanın en son bölümünde de, $D = (a, b) \times (c, d)$ dikdörtgensel bölgesi, $\mathbb{R}^2$ nin sonlu keyfi bir açık bölgesi olmak üzere $g \in L_1(D)$ fonksiyonu, $\lambda \in \Lambda$ reel sayısı ve $(x, y) \in D$ noktaları için

$$U_\lambda(g; x, y) = \sum_{m=1}^{n} \int_a^b \int_c^d [g(s, t)]^m \widetilde{K}_{\lambda,m}(s, t; x, y) dt ds$$

biçiminde sonlu toplam içeren iki katlı lineer olmayan integral operatörünün noktasal yakınsaklığı, $\mu-$genelleştirilmiş Lebesgue noktasında araştırılmıştır. Ayrıca, $\widetilde{K}_{\lambda,m} : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}_0^+$ çekirdek fonksiyonu, $\lambda \in \Lambda$ reel sayısı olmak üzere özellikleri önceden verilmiş bir fonksiyon ve $m = 1, 2, ..., n$ için g^m fonksiyonu, g fonksiyonunun $m-inci$ kuvvetidir.

Burada, dikkat edilirse $m = 1$ durumunda operatörler lineer integral operatörlere dönüşmektedir. İki katlı integral operatörünün lineer durumu Yılmaz (2016) tarafından incelenmiştir. Bu çalışmada $m = 1, 2, ..., n$ için olan genel durumu araştırılmıştır.

Şimdi, öncelikle tez çalışmamız için gerekli olan tanım, teorem ve önermeleri verelim. Ardından yukarıda verilen çekirdek fonksiyonlarını tanımlayalım ve verilen operatörlerin noktasal yakınsamalarını karakteristik nokta olan $\mu-$genelleştirilmiş Lebesgue noktasında inceleyelim.

2. KURAMSAL TEMELLER

Bu bölümde, tez çalışmamıza yardımcı olacak gerekli bazı tanım, teorem ve önermelere yer verilecektir.

Tanım 2.1 D kümesi, $\mathbb{R}^n$ nin sınırlı alt kümesi (veya $D = \mathbb{R}^n$) ve h fonksiyonu, bu küme üzerinde tanımlı Lebesgue anlamında ölçülebilir bir fonksiyon olsun. Bu takdirde, $p \geq 1$ için

$$\int_D |h(x)|^p \, dx < \infty$$

şartını sağlayan Lebesgue anlamında integrallebilir fonksiyonlar uzayına, $L_p(D)$ uzayı denir. $1 \leq p < \infty$ olduğunda, bu uzaydaki norm

$$\|h\|_{L_p(D)} = \left(\int_D |h(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

şeklinde tanımlanır (Stein ve Weiss 1971).

Teorem 2.1 p_1 ve p_2 pozitif iki gerçel sayı ve p_2, p_1' in eşlenik sayısı olsun. Yani $1 < p_1, p_2 < \infty$ olmak üzere

$$\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} = 1$$

sağlansın. O halde $h_1 \in L_{p_1}(\beta_1, \beta_2)$ ve $h_2 \in L_{p_2}(\beta_1, \beta_2)$ için

$$\int_{\beta_1}^{\beta_2} |h_1(x)h_2(x)| \, dx \leq \left(\int_{\beta_1}^{\beta_2} |h_1(x)|^{p_1} \, dx \right)^{\frac{1}{p_1}} \left(\int_{\beta_1}^{\beta_2} |h_2(x)|^{p_2} \, dx \right)^{\frac{1}{p_2}}$$

veya

$$\|h_1 h_2\|_{L_1(\beta_1,\beta_2)} \leq \|h_1\|_{L_{p_1}(\beta_1,\beta_2)} \|h_2\|_{L_{p_2}(\beta_1,\beta_2)}$$

eşitsizliğine *Hölder eşitsizliği* denir (Shalit 2017).

Teorem 2.2 p_1 ve p_2 pozitif iki gerçel sayı ve p_2, p_1' in eşlenik sayısı olsun. Yani $1 < p_1, p_2 < \infty$ olmak üzere

$$\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} = 1$$

sağlansın. O halde $\alpha_1, \alpha_2, ...$ ve $\xi_1, \xi_2, ...$ şeklinde tanımlanan sonlu veya sonsuz herhangi diziler için

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n \xi_n| \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|^{p_1} \right)^{\frac{1}{p_1}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n|^{p_2} \right)^{\frac{1}{p_2}}$$

eşitsizliğine *Hölder eşitsizliği* denir (Shalit 2017).

Lemma 2.1 α_1 ve α_2 reel sayı olmak üzere, n doğal sayısı için

$$(\alpha_1^n - \alpha_2^n) = (\alpha_1 - \alpha_2) \left(\alpha_1^{n-1} + \alpha_1^{n-2} \alpha_2 + ... + \alpha_1 \alpha_2^{n-2} + \alpha_2^{n-1} \right)$$

eşitliği gerçeklenir (Spivak 1994).

Lemma 2.2 α_1 ve α_2 pozitif reel sayılar olsun. Bu durumda, $1 \leq p < \infty$ olmak üzere

$$(\alpha_1 + \alpha_2)^p \leq 2^p (\alpha_1^p + \alpha_2^p)$$

eşitsizliği sağlanır (Rudin 1987).

Şimdi, tek değişkenli fonksiyonlar için sınırlı salınım ve Stieltjes integrali ile ilgili olan bazı tanım, teorem ve sonuçları verelim.

Tanım 2.2 (Sınırlı Salınımlı Fonksiyon) h fonksiyonu, $[\beta_1, \beta_2]$ aralığı üzerinde tanımlı reel değerli bir fonksiyon olsun. $P = \{\xi_0,\ \xi_1, ..., \xi_n\}$, $[\beta_1, \beta_2]$ aralığının bir parçalanması ve $\mathcal{P}$ de bu aralığın tüm P parçalanmalarının kümesi olsun. h fonksiyonunun, $[\beta_1, \beta_2]$ aralığı üzerindeki toplam salınımı

$$\bigvee_{\beta_1}^{\beta_2} (h) = \sup_{P \in \mathcal{P}} \sum_{k=1}^{n} \left| h(\xi_k) - h(\xi_{k-1}) \right|$$

genişletilmiş reel sayıdır ve

$$\bigvee_{\beta_1}^{\beta_2} (h) < \infty$$

ise (yani toplam salınımı sonlu oluyorsa) h fonksiyonu, $[\beta_1, \beta_2]$ aralığı üzerinde *sınırlı salınımlıdır* denir (Natanson 1964).

Tanım 2.3 $[\beta_1, \beta_2]$ aralığı üzerinde tanımlı monoton artan (monoton azalan) bir fonksiyon sınırlı salınımlıdır (Natanson 1964).

Gerçekten de h fonksiyonu, $[\beta_1, \beta_2]$ aralığı üzerinde artan bir fonksiyon olduğunda $[\beta_1, \beta_2]$ aralığının herhangi bir $P = \{\xi_0,\ \xi_1, ..., \xi_n\}$ parçalanması için

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} \left|h(\xi_k) - h(\xi_{k-1})\right| &= \sum_{k=1}^{n} \left(h(\xi_k) - h(\xi_{k-1})\right) \\ &= h(\xi_n) - h(\xi_0) \\ &= h(\beta_2) - h(\beta_1)\end{aligned}$$

gerçeklenir. O halde

$$\bigvee_{\beta_1}^{\beta_2}(h) = h(\beta_2) - h(\beta_1) < \infty$$

olduğundan h fonksiyonu, $[\beta_1, \beta_2]$ aralığı üzerinde sınırlı salınımlı bir fonksiyondur. Örneğin, $h(x) = x^2$ fonksiyonu $[0, 1]$ aralığı üzerinde sınırlı salınımlı bir fonksiyondur. Gerçekten,

$$P = \left\{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, ..., 1\right\}$$

parçalanmasını düşünelim. $[0, 1]$ aralığı üzerinde h fonksiyonu monoton artan bir fonksiyon olduğu için

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} \left|h(\xi_k) - h(\xi_{k-1})\right| &= \sum_{k=1}^{n} \left(\xi_k^2 - \xi_{k-1}^2\right) \\ &= \left(\xi_1^2 - \xi_0^2\right) + \left(\xi_2^2 - \xi_1^2\right) + ... + \left(\xi_n^2 - \xi_{n-1}^2\right) \\ &= 1\end{aligned}$$

eşitliği sağlanır ve

$$\bigvee_{0}^{1}(h) = 1 < \infty$$

olduğundan h fonksiyonu sınırlı salınımlı bir fonksiyondur.

Önerme 2.1 h fonksiyonu, $[\beta_1, \beta_2]$ aralığı üzerinde sınırlı salınımlı bir fonksiyon ise $\alpha \in (\beta_1, \beta_2)$ için h fonksiyonu, $[\beta_1, \alpha]$ ve $[\alpha, \beta_2]$ aralıkları üzerinde de sınırlı salınımlı bir fonksiyon olur. Ayrıca,

$$\bigvee_{\beta_1}^{\beta_2}(h) = \bigvee_{\beta_1}^{\alpha}(h) + \bigvee_{\alpha}^{\beta_2}(h)$$

özelliği sağlanır (Natanson 1964).

Teorem 2.3 $[\beta_1, \beta_2]$ aralığı üzerinde sınırlı salınımlı bir fonksiyon iki artan fonksiyonun farkı biçiminde yazılabilir (Natanson 1964).

Şimdi, sınırlı salınımlı fonksiyonlar ile ilgili aşağıdaki önemli sonuçları verelim.

Sonuç 2.1 $[\beta_1, \beta_2]$ aralığı üzerinde sınırlı salınımlı bir fonksiyon hemen hemen her yerde yani ölçüsü sıfır olan kümenin dışında türevlenebilirdir (Kolmogorov ve Fomin 1975).

Sonuç 2.2 h fonksiyonu, $[\beta_1, \beta_2]$ aralığı üzerinde Lebesgue anlamında integrallenebilir fonksiyon ise $x \in [\beta_1, \beta_2]$ noktası için

$$H(x) = \int_{\beta_1}^{x} h(t)dt$$

şeklindeki belirsiz integral fonksiyonu, $[\beta_1, \beta_2]$ aralığı üzerinde sınırlı salınımlıdır (Kolmogorov ve Fomin 1975).

Gerçekten de, h fonksiyonu, $[\beta_1, \beta_2]$ aralığı üzerinde Lebesgue anlamında integrallenebilir fonksiyon olduğundan $|h|$ fonksiyonu da $[\beta_1, \beta_2]$ aralığı üzerinde Lebesgue anlamında integrallenebilir bir fonksiyondur yani $|h| \in L_1([\beta_1, \beta_2])$ gerçeklenir. Ayrıca, $P = \{\xi_0,\ \xi_1, ..., \xi_n\}$, $[\beta_1, \beta_2]$ aralığının bir parçalanması ve $\mathcal{P}$ de bu aralığın tüm P parçalanmalarının kümesi olmak üzere $P \in \mathcal{P}$ olsun. O halde

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \left|H(\xi_k) - H(\xi_{k-1})\right| &= \sum_{k=1}^{n} \left| \int_{\beta_1}^{\xi_k} h(t)dt - \int_{\beta_1}^{\xi_{k-1}} h(t)dt \right| \\
&\leq \sum_{k=1}^{n} \int_{\xi_{k-1}}^{\xi_k} |h(t)|\, dt \\
&= \int_{\beta_1}^{\beta_2} |h(t)|\, dt < \infty
\end{aligned}$$

olduğundan H fonksiyonu sınırlı salınımlıdır.

Tanım 2.4 (Mutlak Süreklilik) $(\alpha_1, \gamma_1), ..., (\alpha_n, \gamma_n)$, $[\beta, \eta] \subset \mathbb{R}$' nin ikişerli ayrık, açık ve sonlu sayı da alt aralıkları olsun. Eğer aralık sisteminin seçiliminden bağımsız olarak her $\epsilon > 0$ için

$$\sum_{k=1}^{n}(\gamma_k - \alpha_k) < \delta \Longrightarrow \sum_{k=1}^{n}|h(\gamma_k) - h(\alpha_k)| < \epsilon$$

olacak şekilde $\delta > 0$ bulunabiliyorsa $h : [\beta, \eta] \to \mathbb{R}$ fonksiyonuna mutlak süreklidir denir (Kolmogorov ve Fomin 1975).

Uyarı 2.1 İntegrallenebilir bir fonksiyonun belirsiz integrali mutlak süreklidir. Mutlak sürekli bir fonksiyon sınırlı salınımlıdır ve bu yüzden hemen her yerde türevlidir (Kolmogorov ve Fomin 1975).

Şimdi, Riemann integralinin bir genellemesi olan Stieltjes integralinin, tek değişkenli fonksiyonlar için olan tanımını ve ardından bazı temel teoremlerini verelim.

Tanım 2.5 (Stieltjes İntegrali) h_1 ve h_2 fonksiyonları, $[\beta_1, \beta_2]$ aralığı üzerinde tanımlı ve sınırlı reel değerli fonksiyonlar olsun. $[\beta_1, \beta_2]$ aralığının bir P parçalanması

$$\beta_1 = x_0 < x_1 < ... < x_{n-1} < x_n = \beta_2$$

biçiminde verilsin ve $k = 1, 2, ..., n$ için $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ olmak üzere

$$S(h_1, h_2, P) = \sum_{k=1}^{n} h_1(\xi_k)\,[h_2(x_k) - h_2(x_{k-1})]$$

toplamını oluşturalım. ξ_k noktalarının seçiminden ve parçalanma metodundan bağımsız olarak $\tau = \max(x_k - x_{k-1}) \to 0$ iken $S(h_1, h_2, P)$ toplamının sonlu bir I limiti var ise bu I limitine h_1 fonksiyonunun h_2 fonksiyonuna göre *Stieltjes integrali* denir. Yani

$$\lim_{\|P\|\to 0} S(h_1, h_2, P) = \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} h_1(\xi_k)\,[h_2(x_k) - h_2(x_{k-1})] = I$$

sonlu limitine yakınsıyorsa $(\mathbf{S})\int_{\beta_1}^{\beta_2} h_1(x)dh_2(x) \left(\text{veya } \int_{\beta_1}^{\beta_2} h_1(x)dh_2(x) \right)$ mevcuttur denir (Natanson 1964).

Burada, özel olarak $h_2(x) = x$ alındığında Stieltjes integralinin özel bir hali olan Riemann integraline dönüştüğü görülür.

Teorem 2.4 h_1 fonksiyonu, $[\beta_1, \beta_2]$ aralığı üzerinde sürekli bir fonksiyon olmak üzere h_2 fonksiyonunun $[\beta_1, \beta_2]$ aralığının her noktasındaki türevi Riemann integrallenebilen bir fonksiyon ise

$$(\mathbf{S})\int_{\beta_1}^{\beta_2} h_1(x)dh_2(x) = (\mathbf{R})\int_{\beta_1}^{\beta_2} h_1(x)h_2'(x)dx$$

gerçeklenir.

Örneğin, h_1 ve h_2 fonksiyonları $h_1(x) = e^x$ ve $h_2(x) = x^2$ biçiminde tanımlansın. $[0, 1]$ aralığı üzerinde h_1 fonksiyonu sürekli ve h_2 fonksiyonu Riemann integrallenebilir olduğundan

$$(\mathbf{S})\int_{0}^{1} e^x d(x^2) = (\mathbf{R})\int_{0}^{1} e^x(2x)dx$$

sağlanır.

Teorem 2.5 h_1 fonksiyonu $[\beta_1, \beta_2]$ aralığı üzerinde Lebesgue anlamında integrallenebilir ve H fonksiyonu yine bu aralık üzerinde tanımlı h_2 fonksiyonun belirsiz integrali ise

$$(\mathbf{L})\int_{\beta_1}^{\beta_2} h_1(x)h_2(x)dx = (\mathbf{S})\int_{\beta_1}^{\beta_2} h_1(x)dH(x)$$

eşitliği sağlanır (Hobson 1921).

Teorem 2.6 h_1 ve h_2 fonksiyonları, $[\beta_1, \beta_2]$ aralığı üzerinde tanımlı olsun. Bu takdirde, h_1 fonksiyonu sürekli ve h_2 fonksiyonu sınırlı salınımlı bir fonksiyon ise h_1 fonksiyonunun, h_2 fonksiyonuna göre Stieltjes integrali vardır ve

$$\left|(\mathbf{S})\int_{\beta_1}^{\beta_2} h_1(x)dh_2(x)\right| \leq \left(\max_{x\in[\beta_1,\beta_2]} |h_1(x)|\right) \bigvee_{\beta_1}^{\beta_2}(h_2)$$

eşitsizliği sağlanır (Natanson 1964).

Teorem 2.7 h_1 ve h_2 fonksiyonları, $[\beta_1, \beta_2]$ aralığı üzerinde tanımlı olsun. O halde, $M > 0$ için $|h_1(x)| \leq M$ olmak üzere h_1 fonksiyonunun, h_2 fonksiyonuna göre Stieltjes integrali var ise

$$\left|(\mathbf{S})\int_{\beta_1}^{\beta_2} h_1(x)dh_2(x)\right| \leq M\left(h_2(\beta_2) - h_2(\beta_1)\right)$$

eşitsizliği sağlanır (Natanson 1964).

Tek değişkenli fonksiyonların Stieltjes integrali için olan kısmi integrasyon formülü aşağıdaki şekilde verilir.

Teorem 2.8 $[\beta_1, \beta_2]$ aralığı üzerinde ortak bir süreksizlik noktası olmayan sınırlı h_1 ve h_2 fonksiyonları için h_1 fonksiyonunun, h_2 fonksiyonuna göre Stieltjes integrali var ise h_2 fonksiyonunun da h_1 fonksiyonuna göre Stieltjes integrali vardır ve

$$(\mathbf{S})\int_{\beta_1}^{\beta_2} h_1(x)dh_2(x) = h_1(b)h_2(b) - h_1(a)h_2(a) - (\mathbf{S})\int_{\beta_1}^{\beta_2} h_2(x)dh_1(x)$$

eşitliği sağlanır (Natanson 1964).

Şimdi, iki değişkenli fonksiyonlar için sınırlı salınım, Stieltjes integral tanımını ve gerekli bazı temel teoremleri verelim.

Tanım 2.6 h_1 ve h_2 fonksiyonları, $D = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ dikdörtgensel bölge üzerinde tanımlı iki fonksiyon ve h_2 fonksiyonu bu dikdörtgensel bölge üzerinde sınırlı bir fonksiyon olsun. D bölgesinin bir P parçalanması,

$$\begin{aligned} a_1 &= \alpha_0 < \alpha_1 < ... < \alpha_i < ... < \alpha_{m-1} < \alpha_m = b_1 \\ a_2 &= \xi_0 < \xi_1 < ... < \xi_j < ... < \xi_{n-1} < \xi_n = b_2 \end{aligned}$$

biçiminde ifade edilsin. Ayrıca, $i = 1, 2, ..., m$ ve $j = 1, 2, ..., n$ için $\Delta h_2(\alpha_i, \xi_j)$ ifadesi

$$\Delta h_2(\alpha_i, \xi_j) = h_2(\alpha_{i-1}, \xi_{j-1}) - h_2(\alpha_{i-1}, \xi_j) - h_2(\alpha_i, \xi_{j-1}) + h_2(\alpha_i, \xi_j)$$

olmak üzere $\alpha_{i-1} \le x_{ij} \le \alpha_i$ ve $\xi_{j-1} \le y_{ij} \le \xi_j$ eşitsizliklerini sağlayan x_{ij}, y_{ij} reel sayıları için $\widehat{S}(h_1, h_2, P)$ toplamı

$$\widehat{S}(h_1, h_2, P) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} h_1(x_{ij}, y_{ij})\Delta h_2(\alpha_i, \xi_j)$$

şeklinde verilsin. Bu takdirde, D bölgesinin tüm parçalanmalarının normu sıfıra yaklaştığında eğer $\widehat{S}(h_1, h_2, P)$ toplamı da sonlu bir $\widehat{I}$ limitine yakınsıyor ise bu $\widehat{I}$ limite h_1 fonksiyonunun, h_2 fonksiyonuna göre *Stieltjes integrali* denir ve bu integral

$$\widehat{I} = (\mathbf{S})\int_{a_1}^{b_1}\int_{a_2}^{b_2} h_1(x, y)d_y d_x(h_2(x, y))$$

biçiminde gösterilir (Frechet 1910, Clarkson 1933, Lenze 1989, Taberski 1964).

Tanım 2.7 $D = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ dikdörtgensel bölgesi için bir P parçalanması

$$\begin{aligned} a_1 &= \alpha_0 < \alpha_1 < ... < \alpha_i < ... < \alpha_{m-1} < \alpha_m = b_1 \\ a_2 &= \xi_0 < \xi_1 < ... < \xi_j < ... < \xi_{n-1} < \xi_n = b_2 \end{aligned}$$

biçiminde ve $\mathcal{P}$ de, D bölgesi üzerindeki tüm P parçalanmalarının kümesi olsun. O halde $h_1 : D \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olmak üzere

$$V_D(h_1) = \sup_{P \in \mathcal{P}} \left(\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \left| \Delta h_1(\alpha_i, \xi_j) \right| \right)$$

ifadesine h_1 fonksiyonunun D bölgesindeki *toplam salınımı* denir ve

$$V_D(h_1) = \bigvee_{a_1}^{b_1} \bigvee_{a_2}^{b_2} (h_1)$$

olarak ifade edilir. Ayrıca, $V_D(h_1)$ ifadesi, $D = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ dikdörtgensel bölgesi üzerindeki tüm $P \in \mathcal{P}$ parçalanmaları için düzgün sınırlı ise h_1 fonksiyonu verilen D dikdörtgensel bölgesi üzerinde *sınırlı salınımlıdır* denir (Frechet 1910, Clarkson 1933, Lenze 1989, Taberski 1964).

İki katlı integraller için kısmi integrasyon formülü aşağıdaki şekilde vermistir.

Teorem 2.9 $D = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ dikdörtgensel bölge olmak üzere h_1 fonksiyonu, $< a_1, b_1 >$ aralığı içinde $y = a_2$ ve $y = b_2$ noktaları için ve $< a_2, b_2 >$ aralığı içinde de $x = a_1$ ve $x = b_2$ noktaları için h_2 fonksiyonuna göre Stieltjes integrallenebilir olsun. O halde, D bölgesi üzerinde h_2 fonksiyonu, h_1 fonksiyonuna göre Stieltjes integrallenebilirdir ve

$$\begin{aligned} (\mathbf{S})\int_{a_1}^{b_1}\int_{a_2}^{b_2} h_2(x,y) d_y d_x (h_1(x,y)) &= (\mathbf{S})\int_{a_1}^{b_1}\int_{a_2}^{b_2} h_1(x,y) d_y d_x (h_2(x,y)) \\ &+ \int_{a_1}^{b_1} h_1(x,a_2) d_x (h_2(x,a_2)) - \int_{a_1}^{b_1} h_1(x,b_2) d_x (h_2(x,b_2)) \\ &+ \int_{a_2}^{b_2} h_1(a_1,y) d_y (h_2(a_1,y)) - \int_{a_2}^{b_2} h_1(x,b_1) d_y (h_2(x,b_1)) + \widetilde{C} \end{aligned}$$

eşitliği sağlanır. Burada, $\widetilde{C}$ ifadesi

$$\widetilde{C} = h_1(a_1,a_2)h_2(a_1,a_2) - h_1(b_1,a_2)h_2(b_1,a_2) - h_1(a_1,b_2)h_2(a_1,b_2) + h_1(b_1,b_2)h_2(b_1,b_2)$$

şeklindedir (Hobson 1921, Taberski 1964).

Tanım 2.8 $D = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ dikdörtgensel bölge üzerinde, $h_1 : D \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $\alpha_1 \leq \xi_1$, $\alpha_2 \leq \xi_2$ koşulunu sağlayan her (α_1, α_2), $(\xi_1, \xi_2) \in D$ noktaları için

$$h_1(\alpha_1, \alpha_2) - h_1(\xi_1, \alpha_2) - h_1(\alpha_1, \xi_2) + h_1(\xi_1, \xi_2) \geq 0$$

eşitsizliği sağlanıyorsa, h_1 fonksiyonu D dikdörtgensel bölge üzerinde ikili monoton artandır denir. Benzer şekilde, aynı şartlar altında

$$h_1(\alpha_1, \alpha_2) - h_1(\xi_1, \alpha_2) - h_1(\alpha_1, \xi_2) + h_1(\xi_1, \xi_2) \leq 0$$

eşitsizliği sağlanıyorsa, h_1 fonksiyonu D dikdörtgensel bölge üzerinde ikili monoton azalandır denir (Lenze 1989, Taberski 1964, Ghorpade ve Limaye 2010).

Teorem 2.10 $D = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ dikdörtgensel bölge üzerinde h_1 fonksiyonu Lebesgue integrallenebilir ve h_2 fonksiyonu ise sınırlı salınımlı bir fonksiyon olsun. Ayrıca, $< a_1, b_1 >$ ve $< a_2, b_2 >$ aralıkları içinde sırasıyla $h_2(x, a_2)$ fonksiyonu (veya $h_2(x, b_2)$) ve $h_2(a_1, y)$ fonksiyonu (veya $h_2(b_1, y)$) sınırlı salınımlı veya sürekli fonksiyonlar olsun. Bu takdirde, $h_1 h_2 \in L_1(D)$ olmak üzere, h_2 fonksiyonu D bölgesi üzerinde

$$H(x, y) = (\mathbf{L}) \int_{a_1}^{x} \int_{a_2}^{y} h_1(k, l) dl dk$$

fonksiyonuna göre Stieltjes integrallenebilirdir denir ve

$$(\mathbf{S}) \int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} h_2(x, y) d_y d_x (H(x, y)) = (\mathbf{L}) \int_{a_1}^{b_1} \left(\int_{a_2}^{b_2} h_2(x, y) h_1(x, y) dy \right) dx$$

eşitliği gerçeklenir (Taberski 1964).

Şimdi integral operatörler ailesi ile ilgili tanımları verelim.

Tanım 2.9 (Operatör) X_1 fonksiyon uzayından alınan herhangi bir g_1 fonksiyonuna, X_2 fonksiyon uzayında bir g_2 fonksiyonunu karşılık sağlayan bir $\widetilde{L}$ kuralı varsa, buna X_1 fonksiyon uzayında bir *operatördür* denir ve $\widetilde{L}(g_1; x) = g_2(x)$ şeklinde gösterilir (Hacıyev ve Hacısalihoğlu 1995).

Eğer X_1 fonksiyon uzayı lineer bir uzay ise aşağıdaki lineer operatör tanımı verilebilir.

Tanım 2.10 (Lineer Operatör) X_1 ve X_2 lineer fonksiyonlar uzayı ve

$$\widetilde{L} : X_1 \to X_2$$

bir operatör olsun. O halde g_1 ve g_2 fonksiyonları X_1 fonksiyon uzayında herhangi fonksiyonlar olmak üzere, $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ için

$$\widetilde{L}(\alpha_1 g_1 + \alpha_2 g_2; x) = \alpha_1 \widetilde{L}(g_1; x) + \alpha_2 \widetilde{L}(g_2; x)$$

şartı sağlanıyorsa, bu takdirde $\widetilde{L}$ operatörüne *lineer operatör* denir (Hacıyev ve Hacısalihoğlu 1995).

Lebesgue anlamında integrallenebilir olan bir fonksiyon, ölçümü sıfır olan kümenin dışında tanımlandığından dolayı integrallenebilir fonksiyonlara yakınsayan dizileri bir integral şeklinde almanın daha uygun olduğu görülmektedir. Bu yüzden lineer integral operatörler devreye girmiştir.

Tanım 2.11 (Lineer İntegral Operatör) X lineer fonksiyonlar uzayı, $D \subset \mathbb{R}$ kümesi üzerinde tanımlı olan Lebesgue anlamında integrallenebilir fonksiyonlar uzayı olsun ve bu uzay $L(D)$ ile gösterilsin. Bu uzayda dönüşüm yapan lineer bir integral operatörü, $f \in X$ fonksiyonu ve $x \in D$ noktası için

$$T(f; x) = \int_D f(s) K(s; x) ds$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada, $K(s; x)$ fonksiyonu özellikleri önceden belli ve D üzerinde tanımlı s değişkenine bağlı bir fonksiyondur. $T(f; x)$ integral operatörünün özelliklerini belirleyen bu $K(s; x)$ fonksiyonuna integral operatörünün *çekirdeği* denir (Hacıyev ve Hacısalihoğlu 1995).

Özel olarak $K(s; x)$ çekirdek fonksiyonu $K(s; x) = L(s - x)$ olarak alınırsa, $f \in X$ fonksiyonu ve $x \in D \subset \mathbb{R}$ noktası için

$$T(f; x) = \int_D f(s) L(s - x) ds$$

biçimindeki integral operatörlere *konvolüsyon tipli lineer integral operatör* adı verilir. $\Lambda \neq \emptyset$ kümesi, negatif olmayan λ reel sayılarını içeren bir indis kümesi ve λ_0, bu kümenin bir yığılma noktası olsun. $\lambda \in \Lambda$ reel sayısı ve $x \in D$ noktası için

$$T_\lambda(f;x) = \int_D f(s)K_\lambda(s;x)ds$$

integraline *integral operatörler ailesi* denir. Burada, Λ indis kümesi $\mathbb{N}$ olarak alınırsa bu durumda *integral operatörler dizisi* elde edilir.

Musielak (1983), konvolüsyon tipli lineer integral operatörler ailesini genelleyerek $\lambda \in \Lambda$ reel sayısı ve $y \in G$ noktası için

$$T_\lambda f(y) = \int_G K_\lambda(x-y, f(x))dx$$

biçiminde integral operatörler tanımlamıştır. K_λ fonksiyonu $K_\lambda : G \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ şeklinde tanımlı olmak üzere, bu tip integral operatörler ailesine, *lineer olmayan (nonlineer) integral operatörler ailesi* denir.

Şimdi, $D \subset \mathbb{R}$ kümesi üzerinde s değişkenine bağlı olan $K_\lambda(s;x)$ fonksiyonunun hangi şartlar altında çekirdek fonksiyonu olduğunu verelim.

Tanım 2.12 Λ kümesi, negatif olmayan λ reel sayılarını içeren bir indis kümesi ve λ_0 ise bu indis kümesinin bir yığılma noktası olsun. $D \subset \mathbb{R}$ kümesi üzerinde, $\{K_\lambda(s;x)\}$ fonksiyon sınıfı

a) Her bir $\lambda \in \Lambda \subset \mathbb{R}_0^+$ reel sayısı ve tüm $s \in D$ noktaları için $K_\lambda \in L_1(D)$,

b) Her bir $\lambda \in \Lambda \subset \mathbb{R}_0^+$ reel sayısı ve tüm $s \in D$ noktaları için

$$\lim_{\lambda \to \lambda_0} \left(\int_D K_\lambda(s;x)ds \right) = C < \infty$$

şartlarını sağladığı takdirde, $\{K_\lambda(s;x)\}$ fonksiyon sınıfına *çekirdek* denir (Butzer ve Nessel 1971).

Tanım 2.13 Λ kümesi, negatif olmayan λ reel sayılarını içeren bir indis kümesi ve λ_0 ise bu indis kümesinin bir yığılma noktası olsun. $D \subset \mathbb{R}$ kümesi üzerinde, $\{K_\lambda(s;x)\}$ çekirdek ailesi

a) Her bir $\lambda \in \Lambda \subset \mathbb{R}_0^+$ reel sayısı ve tüm $s \in D$ noktaları için

$$\int\limits_D |K_\lambda(s;x)|\, ds \leq C < \infty$$

olacak şekilde bir C pozitif reel sayısı vardır.

b) Her $\delta > 0$ için

$$\lim_{\lambda \to \lambda_0} \left(\sup_{\delta \leq |s|} |K_\lambda(s;x)| \right) = 0$$

şartlarını sağladığı takdirde bu çekirdeğe, *yaklaşık birim operatörü* denir (Butzer ve Nessel 1971).

Yaklaşımlar teorisinde integrallenebilen fonksiyonlara yaklaşım, $D \subset \mathbb{R}$ bölgesinin süreklilik noktalarında çokça araştırıldığından diğer karakteristik noktalarda yaklaşım araştırılır.

Şimdi, bu karakteristik noktalardan bazılarının tanımlarını verelim.

Tanım 2.14 (Lebesgue Noktası) g fonksiyonu, $D = [\beta_1, \beta_2] \subset \mathbb{R}$ üzerinde Lebesgue integrallenebilir bir fonksiyon olsun. Bu durumda, $\widetilde{h} > 0$ için

$$\lim_{\widetilde{h} \to 0} \frac{1}{\widetilde{h}} \int\limits_{y_0}^{y_0 \pm \widetilde{h}} |g(z) - g(y_0)|\, dz = 0$$

eşitliğinin sağlandığı $y_0 \in D$ noktasına g fonksiyonunun *Lebesgue noktası* denir (Natanson 1940).

Tanım 2.15 (Genelleştirilmiş Lebesgue Noktası) g fonksiyonu, $D = [\beta_1, \beta_2] \subset \mathbb{R}$ üzerinde Lebesgue integrallenebilir bir fonksiyon olsun. Bu durumda, $\widetilde{h} > 0$ ve $0 < \xi < 1$ için

$$\lim_{\widetilde{h} \to 0} \frac{1}{\widetilde{h}^{\xi+1}} \int\limits_{y_0}^{y_0 \pm \widetilde{h}} |g(z) - g(y_0)|\, dz = 0$$

eşitliğinin sağlandığı $y_0 \in D$ noktasına g fonksiyonunun *genelleştirilmiş Lebesgue noktası* denir (Mamedov 1965b, Mamedov 1967).

Tanım 2.16 ($\mu-$Genelleştirilmiş Lebesgue Noktası) g fonksiyonu, $D = (\beta_1, \beta_2) \subset \mathbb{R}$ üzerinde tanımlı bir fonksiyon olsun. Eğer $1 \leq p < \infty$ olmak üzere $g \in L_p(D)$ ise bu durumda, $\widetilde{h}>0$ için

$$\lim_{\widetilde{h}\to 0}\left(\frac{1}{\mu(\widetilde{h})}\int\limits_{y_0}^{y_0\pm\widetilde{h}}|g(z)-g(y_0)|^p\,dz\right)^{\frac{1}{p}}=0$$

eşitliğinin sağlandığı $y_0\in D$ noktasına g fonksiyonunun $\mu-$*genelleştirilmiş Lebesgue noktası* denir (Rydzewska 1973).

Burada, $\mu:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ fonksiyonu $\mu(0)=0$ şartını sağlayan, $(0,\beta_2-\beta_1)$ aralığında mutlak sürekli ve artan bir fonksiyondur.
Şimdi, singüler integraller için önemli rol oynayan Natanson (1960), Taberski (1962) ve Gadjiev (1968) tarafından verilen bazı lemmaları verelim.

Lemma 2.3 (Natanson Lemması) $[\beta_1,\beta_2]$ aralığı üzerinde tanımlı integrallenebilir olan g_1 fonksiyonu,

$$M=\sup_{0<h\le\beta_2-\beta_1}\left|\frac{1}{h}\int\limits_{\beta_1}^{\beta_1+h}g_1(s)ds\right|<\infty$$

eşitsizliğini sağlasın. Ayrıca, $[\beta_1,\beta_2]$ aralığı üzerinde tanımlı g_2 fonksiyonu ise negatif olmayan, integrallenebilen ve azalan bir fonksiyon olsun. Bu durumda,

$$\int\limits_{\beta_1}^{\beta_2}g_1(s)g_2(s)ds$$

integrali mevcuttur ve

$$\left|\int\limits_{\beta_1}^{\beta_2}g_1(s)g_2(s)ds\right|\le M\int\limits_{\beta_1}^{\beta_2}g_2(s)ds$$

eşitsizliği gerçeklenir (Natanson 1960).

Natanson Lemması'nın genellemesi olan lemmalar ise, 1962 yılında Taberski ve 1968 yılında da Gadjiev tarafından aşağıdaki şekilde ifade edilmiştir.

Lemma 2.4 Her $<\beta_1+\eta,\beta_2>$ $(0<\eta<\beta_2-\beta_1)$ aralığı üzerinde sınırlı salınımlı φ fonksiyonu için

$$\upsilon(t)=\begin{cases}\bigvee\limits_{t}^{\beta_2}\varphi(s) & ,\quad \beta_1\le t<\beta_2\\ 0 & ,\quad t=\beta_2\end{cases}$$

olduğunda $\int\limits_{\beta_1}^{\beta_2} \upsilon(t)dt < \infty$ sağlansın. Bu durumda, $g \in L_1 < \beta_1, \beta_2 >$ olmak üzere

$$M = \sup_{0<h\leq\beta_2-\beta_1} \left| \frac{1}{h} \int\limits_{\beta_1}^{\beta_1+h} g(s)ds \right| < \infty$$

eşitsizliği sağlandığı takdirde

$$I = \int\limits_{\beta_1^+}^{\beta_2} g(s)\varphi(s)ds$$

integrali mevcuttur ve

$$|I| \leq M \int\limits_{\beta_1}^{\beta_2} \left[\upsilon(t) + |\varphi(\beta_2)|\right] dt$$

eşitsizliği gerçeklenir (Taberski 1962).

Lemma 2.5 $[0, \beta_2 - \beta_1]$ aralığı üzerinde tanımlı μ fonksiyonu, $\mu(0) = 0$ şartını sağlayan artan, mutlak sürekli bir fonksiyon ve φ fonksiyonu ise, her $< \beta_1 + \eta, \beta_2 >$ $(0 < \eta < \beta_2 - \beta_1)$ aralığı üzerinde sınırlı salınımlı bir fonksiyon olsun. Ayrıca, $\beta_1 \leq s < \beta_2$ için

$$\upsilon(s) = \underset{s\leq t\leq\beta_2}{\mathrm{var}} \varphi(t)$$

olmak üzere

$$\int\limits_{\beta_1}^{\beta_2} \left[\mu(s-\beta_1)\right]_s' \upsilon(s)ds < \infty$$

şartını sağlasın. Bu takdirde,

$$M = \sup_{0<h\leq\beta_2-\beta_1} \tfrac{1}{\mu(h)} \left| \int\limits_{\beta_1}^{\beta_1+h} g(s)ds \right| < \infty \quad , \quad g \in L_1 < \beta_1, \beta_2 >$$

koşulu sağlanırsa,

$$\left| \int\limits_{\beta_1^+}^{\beta_2} g(s)\varphi(t)dt \right| \leq M \int\limits_{\beta_1}^{\beta_2} \left[\upsilon(s) + |\varphi(\beta_2)|\right] \left[\mu(s-\beta_1)\right]_s' ds$$

eşitsizliği gerçeklenir (Gadjiev 1968).

Bölüm 3 ve Bölüm 4 verilen teoremler, bu bölümde verilen kuramsal temel kavramlar ışığı altında ispatlanmıştır.
Şimdi, sonlu toplam içeren lineer olmayan tek katlı integral operatörlerinin ve sonsuz toplam içeren lineer olmayan tek katlı integral operatörlerinin, $\mu-$genelleştirlmiş Lebesgue noktasındaki noktasal yakınsaklığını incelediğimiz teoremlerin ifade ve ispatlarını verelim.

3. ÖZEL TİPLİ İNTEGRAL OPERATÖRLERİN NOKTASAL YAKINSAKLIĞI

3.1 Sonlu Toplam İçeren Lineer Olmayan İntegral Operatörlerin Noktasal Yakınsaklığı

Bu kesimde, A_1 sınıfı adını verdiğimiz yeni bir çekirdek sınıfının tanımı verildikten sonra aşağıdaki sonlu toplam içeren lineer olmayan integral operatörünün $\mu-$genelleştirilmiş Lebesgue noktasındaki noktasal yakınsaklığı araştırılmıştır.

$$T_\lambda(g;x) = \int_a^b \left(\sum_{m=1}^{n} g^m(s) K_{\lambda,m}(s;x) \right) ds, \quad \lambda \in \Lambda, \ x \in (a,b)$$

operatöründe g fonksiyonu, (a,b) üzerinde Lebesgue integrallenebilir bir fonksiyon ve $\Lambda \neq \emptyset$ kümesi, negatif olmayan λ reel sayılarını içeren bir indis kümesidir. Burada, (a,b) aralığı, $\mathbb{R}$ nin sonlu keyfi açık bir aralığıdır ve $\lambda \in \Lambda$ reel sayısı olmak üzere $K_{\lambda,m}(s;x)$ çekirdek fonksiyonu, $K_{\lambda,m} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_0^+$ şeklinde tanımlıdır. Ayrıca, $m = 1,2,...,n$ için g^m fonksiyonu, g fonksiyonunun $m-inci$ kuvvetidir.

Şimdi $K_{\lambda,m}$ çekirdek fonksiyonu için A_1 sınıfı tanımını verelim ve daha sonra da bu şartlar altında $T_\lambda(g;x)$ integral operatörünün noktasal yakınsaklığını inceleyelim.

Tanım 3.1 (A_1 sınıfı) $\Lambda \neq \emptyset$ bir indis kümesi ve λ_0, bu kümenin bir yığılma noktası olsun. $m = 1,2,...,n$ (n sonlu bir doğal sayı) için $\{K_{\lambda,m}\}_{\lambda\in\Lambda}$, $K_{\lambda,m}(s;x)$ integrallenebilen fonksiyonlardan oluşan bir aile olmak üzere, $K_{\lambda,m} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_0^+$ çekirdek fonksiyonu aşağıdaki şartları sağladığı takdirde $K_{\lambda,m}(s;x)$ çekirdek fonksiyonuna A_1 *sınıfındandır* denir:

a) C_m pozitif reel sayı olmak üzere herhangi sabit x reel sayısı ve $m = 1,2,...,n$ için

$$\lim_{\lambda\to\lambda_0} \left| \int_{-\infty}^{\infty} K_{\lambda,m}(s;x)ds - C_m \right| = 0.$$

b) Herhangi sabit x reel sayısı ve her ξ pozitif sayısı için

$$\lim_{\lambda\to\lambda_0} \left[\sup_{|x-s|>\xi} K_{\lambda,m}(s;x) \right] = 0.$$

c) Herhangi sabit x reel sayısı ve her ξ pozitif sayısı için

$$\lim_{\lambda\to\lambda_0} \int\limits_{|x-s|>\xi} K_{\lambda,m}(s;x)ds = 0.$$

d) Herhangi sabit $x \in \mathbb{R}$ ve $0 < \delta_0 \leq \delta_1$ reel sayısı olmak üzere s nin bir fonksiyonu olarak herhangi bir $\lambda \in \Lambda$ için $K_{\lambda,m}(s;x)$ çekirdek fonksiyonu, $(x-\delta_0, x)$ aralığı üzerinde azalmayan bir fonksiyon ve $(x, x+\delta_0)$ aralığı üzerinde ise artmayan bir fonksiyondur.

Bu bölümde ispatlanan Teorem 3.1 ve Teorem 3.2 için $K_{\lambda,m}(s;x)$ çekirdek fonksiyonu, A_1 sınıfında kabul edilmiştir.

Teorem 3.1 $x_0 \in (a,b)$ noktası, $g \in L_1(a,b)$ fonksiyonunun $\mu-$genelleştirilmiş Lebesgue noktası ve g fonksiyonu, (a,b) aralığı üzerinde sınırlı bir fonksiyon ise bu takdirde $\Lambda \neq \emptyset$, negatif olmayan λ reel sayılarını içeren bir indis kümesi ve λ_0, bu kümenin bir yığılma noktası olmak üzere $0 < \delta \leq \delta_0$ reel sayısı için $\lambda \to \lambda_0$ iken

$$\sum_{m=1}^{n} \left(\int\limits_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} K_{\lambda,m}(s;x_0) \left| \{\mu(|x_0-s|)\}_s' \right| ds \right)$$

fonksiyonunun sınırlı olduğu Z kümesi üzerinde

$$\lim_{\lambda\to\lambda_0} T_\lambda(g;x_0) = \sum_{m=1}^{n} C_m g^m(x_0)$$

gerçeklenir.

Burada, $m = 1, 2, ..., n$ olmak üzere g^m fonksiyonu, g fonksiyonunun $m-inci$ kuvvetidir.

İspat. $x_0 \in (a,b)$ noktası, $g \in L_1(a,b)$ fonksiyonunun $\mu-$genelleştirilmiş Lebesgue noktası ve g fonksiyonu, (a,b) aralığı üzerinde sınırlı bir fonksiyon olsun. Burada, $x_0 \in (a,b)$ noktası için $T_\lambda(g;x_0)$ operatörü ile $\sum\limits_{m=1}^{n} C_m g^m(x_0)$ toplamı arasındaki farkın limitinin sıfıra gittiğini göstermeliyiz. Kabul edelim ki

$$I_\lambda = \left| T_\lambda(g;x_0) - \sum_{m=1}^{n} C_m g^m(x_0) \right|$$

olsun. Hipotez gereği $x_0 \in (a,b)$ noktası, $g \in L_1(a,b)$ fonksiyonunun $\mu-$genelleştirilmiş Lebesgue noktası olduğundan limit tanımı gereği her $\varepsilon > 0$ için bir $0 < \delta < \delta_0$ var öyle ki tüm $0 < \widetilde{h} \leq \delta < \delta_0$ için

$$\int\limits_{x_0-\widetilde{h}}^{x_0} |g(s) - g(x_0)|\, ds < \varepsilon\mu(\widetilde{h}) \tag{3.1}$$

ve

$$\int\limits_{x_0}^{x_0+\widetilde{h}} |g(s) - g(x_0)|\, ds < \varepsilon\mu(\widetilde{h}) \tag{3.2}$$

eşitsizlikleri sağlanır.

Şimdi, öncelikle $m = 1, ..., n$ için

$$g_1^m(s) = \begin{cases} g^m(s) & , \quad s \in (a,b) \\ 0 & , \quad s \in \mathbb{R}\backslash(a,b) \end{cases} \tag{3.3}$$

fonksiyonunu tanımlayalım. (3.3) ile verilen g_1^m fonksiyonu tanımı yardımıyla, I_λ ifadesine

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(\sum_{m=1}^{n} g_1^m(x_0) K_{\lambda,m}(s;x_0) \right) ds$$

integrali eklenip çıkarılırsa,

$$\begin{aligned} I_\lambda &= \left| T_\lambda(g;x_0) - \sum_{m=1}^{n} C_m g^m(x_0) \right| \\ &= \left| \int\limits_{a}^{b} \left(\sum_{m=1}^{n} g^m(s) K_{\lambda,m}(s;x_0) \right) ds - \sum_{m=1}^{n} C_m g^m(x_0) \right| \\ &= \left| \int\limits_{a}^{b} \left(\sum_{m=1}^{n} g^m(s) K_{\lambda,m}(s;x_0) \right) ds - \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(\sum_{m=1}^{n} g_1^m(x_0) K_{\lambda,m}(s;x_0) \right) ds \right. \\ &\quad \left. + \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(\sum_{m=1}^{n} g_1^m(x_0) K_{\lambda,m}(s;x_0) \right) ds - \sum_{m=1}^{n} C_m g^m(x_0) \right| \end{aligned}$$

eşitliği bulunur. Bu son eşitlikte, g_1^m fonksiyonunun bulunduğu ilk integralin sınırı iki kısma ayrılırsa,

$$\begin{aligned} I_\lambda &= \left| \int\limits_{a}^{b} \sum_{m=1}^{n} g^m(s) K_{\lambda,m}(s;x_0) ds - \int\limits_{a}^{b} \sum_{m=1}^{n} g_1^m(x_0) K_{\lambda,m}(s;x_0) ds \right. \\ &\quad - \int\limits_{\mathbb{R}\backslash(a,b)} \sum_{m=1}^{n} g_1^m(x_0) K_{\lambda,m}(s;x_0) ds \\ &\quad \left. + \int\limits_{-\infty}^{\infty} \sum_{m=1}^{n} g_1^m(x_0) K_{\lambda,m}(s;x_0) ds - \sum_{m=1}^{n} C_m g^m(x_0) \right| \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Bulunan bu eşitlik, (3.3) ile verilen g_1^m fonksiyonu tanımı yardımıyla

$$\begin{aligned} I_\lambda &= \left| \int\limits_a^b \left(\sum_{m=1}^n g^m(s) K_{\lambda,m}(s;x_0) \right) ds - \int\limits_a^b \left(\sum_{m=1}^n g^m(x_0) K_{\lambda,m}(s;x_0) \right) ds \right. \\ &\quad - \int\limits_{\mathbb{R}\setminus(a,b)} \left(\sum_{m=1}^n g^m(x_0) K_{\lambda,m}(s;x_0) \right) ds \\ &\quad \left. + \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(\sum_{m=1}^n g^m(x_0) K_{\lambda,m}(s;x_0) \right) ds - \sum_{m=1}^n C_m g^m(x_0) \right| \end{aligned}$$

biçiminde yazılabilir. Bu eşitlikte, n sonlu sayı olduğundan toplam ile integral yer değiştirilir ve gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$\begin{aligned} I_\lambda &= \left| \int\limits_a^b \left(\sum_{m=1}^n \left[g^m(s) - g^m(x_0) \right] K_{\lambda,m}(s;x_0) \right) ds - \sum_{m=1}^n g^m(x_0) \int\limits_{\mathbb{R}\setminus(a,b)} K_{\lambda,m}(s;x_0) ds \right. \\ &\quad \left. + \sum_{m=1}^n g^m(x_0) \left[\int\limits_{-\infty}^{\infty} K_{\lambda,m}(s;x_0) ds - C_m \right] \right| \end{aligned}$$

eşitliği bulunur. Son olarak, mutlak değer fonksiyonunun özelliği kullanılıp ifade büyütülürse

$$\begin{aligned} I_\lambda &\le \int\limits_a^b \left(\sum_{m=1}^n \left| g^m(s) - g^m(x_0) \right| K_{\lambda,m}(s;x_0) \right) ds + \sum_{m=1}^n \left| g^m(x_0) \right| \int\limits_{\mathbb{R}\setminus(a,b)} K_{\lambda,m}(s;x_0) ds \\ &\quad + \sum_{m=1}^n \left| g^m(x_0) \right| \left| \int\limits_{-\infty}^{\infty} K_{\lambda,m}(s;x_0) ds - C_m \right| \end{aligned}$$

eşitsizliği yazılabilir. Şimdi, son eşitsizliğin sağ tarafında elde edilen ifadelere sırasıyla

$$\begin{aligned} I_1 &= \int\limits_a^b \left(\sum_{m=1}^n \left| g^m(s) - g^m(x_0) \right| K_{\lambda,m}(s;x_0) \right) ds, \\ I_2 &= \sum_{m=1}^n \left| g^m(x_0) \right| \int\limits_{\mathbb{R}\setminus(a,b)} K_{\lambda,m}(s;x_0) ds \end{aligned}$$

ve

$$I_3 = \sum_{m=1}^n \left| g^m(x_0) \right| \left| \int\limits_{-\infty}^{\infty} K_{\lambda,m}(s;x_0) ds - C_m \right|$$

diyelim ve daha sonra da λ, λ_0 yaklaşırken I_1, I_2, I_3 ifadelerinin de *sıfıra* yaklaştığını gösterelim.

Öncelikle I_2 ifadesini ele alalım. A_1 sınıfının (c) şartı, yani her $\xi > 0$ için

$$\lim_{\lambda\to\lambda_0} \int\limits_{|x-s|>\xi} K_{\lambda,m}(s;x)ds = 0$$

olduğu dikkate alınırsa

$$\begin{aligned}\lim_{\lambda\to\lambda_0}(I_2) &= \lim_{\lambda\to\lambda_0}\left(\sum_{m=1}^{n}|g^m(x_0)| \int\limits_{\mathbb{R}\setminus(a,b)} K_{\lambda,m}(s;x_0)ds\right)\\ &= 0\end{aligned}$$

eşitliğinin sağlandığı görülür.

I_3 ifadesinde de, A_1 sınıfının (a) şartı olan

$$\lim_{\lambda\to\lambda_0}\left|\int\limits_{-\infty}^{\infty} K_{\lambda,m}(s;x)ds - C_m\right| = 0$$

eşitliği göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned}\lim_{\lambda\to\lambda_0}(I_3) &= \lim_{\lambda\to\lambda_0}\left(\sum_{m=1}^{n}|g^m(x_0)| \left|\int\limits_{-\infty}^{\infty} K_{\lambda,m}(s;x_0)ds - C_m\right|\right)\\ &= 0\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Sonuç olarak, I_2 ve I_3 ifadeleri için $\lambda \to \lambda_0$ iken $(I_2) \to 0$ ve $(I_3) \to 0$ olduğu görülür.

Şimdi, I_1 integralini hesaplayalım. İlk olarak, $0 < \delta < \delta_0$ reel sayısı için I_1 integralinin sınırını aşağıdaki şekilde dört parçaya ayıralım.

$$
\begin{aligned}
I_1 &= \int_a^b \sum_{m=1}^{n} |g^m(s) - g^m(x_0)| \, K_{\lambda,m}(s;x_0) ds \\
&= \int_a^{x_0-\delta} \left(\sum_{m=1}^{n} |g^m(s) - g^m(x_0)| \, K_{\lambda,m}(s;x_0) \right) ds \\
&\quad + \int_{x_0-\delta}^{x_0} \left(\sum_{m=1}^{n} |g^m(s) - g^m(x_0)| \, K_{\lambda,m}(s;x_0) \right) ds \\
&\quad + \int_{x_0}^{x_0+\delta} \left(\sum_{m=1}^{n} |g^m(s) - g^m(x_0)| \, K_{\lambda,m}(s;x_0) \right) ds \\
&\quad + \int_{x_0+\delta}^{b} \left(\sum_{m=1}^{n} |g^m(s) - g^m(x_0)| \, K_{\lambda,m}(s;x_0) \right) ds
\end{aligned}
$$

ve sırasıyla bu integrallere

$$
I_{11} = \int_a^{x_0-\delta} \left(\sum_{m=1}^{n} |g^m(s) - g^m(x_0)| \, K_{\lambda,m}(s;x_0) \right) ds,
$$

$$
I_{12} = \int_{x_0-\delta}^{x_0} \left(\sum_{m=1}^{n} |g^m(s) - g^m(x_0)| \, K_{\lambda,m}(s;x_0) \right) ds,
$$

$$
I_{13} = \int_{x_0}^{x_0+\delta} \left(\sum_{m=1}^{n} |g^m(s) - g^m(x_0)| \, K_{\lambda,m}(s;x_0) \right) ds
$$

ve

$$
I_{14} = \int_{x_0+\delta}^{b} \left(\sum_{m=1}^{n} |g^m(s) - g^m(x_0)| \, K_{\lambda,m}(s;x_0) \right) ds
$$

diyelim. Burada, öncelikle I_{11} ve I_{14} integrallerini daha sonra da I_{12} ve I_{13} integrallerini hesaplayalım.

I_{11} integralinde, n sonlu sayı olduğundan toplam ile integral yer değiştirilirse,

$$
\begin{aligned}
I_{11} &= \int_a^{x_0-\delta} \left(\sum_{m=1}^{n} |g^m(s) - g^m(x_0)| \, K_{\lambda,m}(s;x_0) \right) ds \\
&= \sum_{m=1}^{n} \left(\int_a^{x_0-\delta} |g^m(s) - g^m(x_0)| \, K_{\lambda,m}(s;x_0) ds \right)
\end{aligned}
$$

eşitliği elde edilir. A_1 sınıfının (d) şartından dolayı $K_{\lambda,m}(s;x)$ çekirdek fonksiyonu her bir $\lambda \in \Lambda$ için s nin bir fonksiyonu olarak $(x-\delta_0, x)$ aralığı üzerinde azalmayan bir fonksiyon olduğundan,

$$\begin{aligned} I_{11} &= \sum_{m=1}^{n}\left(\int_{a}^{x_0-\delta}\left|g^m(s)-g^m(x_0)\right| K_{\lambda,m}(s;x_0)ds\right) \\ &\leq \sum_{m=1}^{n} K_{\lambda,m}(x_0-\delta;x_0)\int_{a}^{x_0-\delta}\left|g^m(s)-g^m(x_0)\right| ds \end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir. Mutlak değer fonksiyonunun özelliği ve norm tanımı kullanılırsa, I_{11} integrali için

$$\begin{aligned} I_{11} &\leq \sum_{m=1}^{n} K_{\lambda,m}(x_0-\delta;x_0)\int_{a}^{x_0-\delta}\left|g^m(s)-g^m(x_0)\right| ds \\ &\leq \sum_{m=1}^{n} K_{\lambda,m}(x_0-\delta;x_0)\left\{\int_{a}^{x_0-\delta}\left|g^m(s)\right| ds+\int_{a}^{x_0-\delta}\left|g^m(x_0)\right| ds\right\} \\ &\leq \sum_{m=1}^{n} K_{\lambda,m}(x_0-\delta;x_0)\left\{\left\|g^m\right\|_{L_1(a,b)}+\left|g^m(x_0)\right|(b-a)\right\} \end{aligned} \tag{3.4}$$

eşitsizliği elde edilir.

Şimdi, benzer şekilde I_{14} integralini hesaplayalım. n sonlu sayı olduğundan integral ile toplam yer değiştirilirse

$$\begin{aligned} I_{14} &= \int_{x_0+\delta}^{b}\left(\sum_{m=1}^{n}\left|g^m(s)-g^m(x_0)\right| K_{\lambda,m}(s;x_0)\right)ds \\ &= \sum_{m=1}^{n}\left(\int_{x_0+\delta}^{b}\left|g^m(s)-g^m(x_0)\right| K_{\lambda,m}(s;x_0)ds\right) \end{aligned}$$

eşitliği bulunur. Ardından A_1 sınıfının (d) şartı dikkate alınırsa, $K_{\lambda,m}(s;x)$ çekirdek fonksiyonu her bir $\lambda \in \Lambda$ için s nin bir fonksiyonu olarak $(x, x+\delta_0)$ aralığı üzerinde artmayan bir fonksiyon olduğundan,

$$\begin{aligned} I_{14} &= \sum_{m=1}^{n}\left(\int_{x_0+\delta}^{b}\left|g^m(s)-g^m(x_0)\right| K_{\lambda,m}(s;x_0)ds\right) \\ &\leq \sum_{m=1}^{n} K_{\lambda,m}(x_0+\delta;x_0)\int_{x_0+\delta}^{b}\left|g^m(s)-g^m(x_0)\right| ds \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Bu son eşitsizlikte, mutlak değer fonksiyonunun özelliği ve norm tanımı kullanılırsa I_{14} integrali için

$$\begin{aligned} I_{14} &\leq \sum_{m=1}^{n} K_{\lambda,m}(x_0+\delta;x_0) \int\limits_{x_0+\delta}^{b} |g^m(s)-g^m(x_0)|\,ds \\ &\leq \sum_{m=1}^{n} K_{\lambda,m}(x_0+\delta;x_0) \left\{ \int\limits_{x_0+\delta}^{b} |g^m(s)|\,ds + \int\limits_{x_0+\delta}^{b} |g^m(x_0)|\,ds \right\} \\ &\leq \sum_{m=1}^{n} K_{\lambda,m}(x_0+\delta;x_0) \left\{ \|g^m\|_{L_1(a,b)} + |g^m(x_0)|\,(b-a) \right\} \end{aligned} \tag{3.5}$$

eşitsizliği bulunur. Sonuç olarak, (3.4) ve (3.5) ifadelerinde bulunan

$$I_{11} \leq \sum_{m=1}^{n} K_{\lambda,m}(x_0-\delta;x_0) \left\{ \|g^m\|_{L_1(a,b)} + |g^m(x_0)|\,(b-a) \right\}$$

ve

$$I_{14} \leq \sum_{m=1}^{n} K_{\lambda,m}(x_0+\delta;x_0) \left\{ \|g^m\|_{L_1(a,b)} + |g^m(x_0)|\,(b-a) \right\}$$

eşitsizlikleri için A_1 sınıfının (b) şartı ve g fonksiyonunun sınırlılığı göz önüne alınırsa, $\lambda \to \lambda_0$ iken $(I_{11}) \to 0$ ve $(I_{14}) \to 0$ olduğu görülür.

Şimdi de sırasıyla I_{12} ve I_{13} integrallerini $\mu-$genelleştirilmiş Lebesgue noktası tanımını kullanarak inceleyelim.

(3.1) ve (3.2) eşitsizliklerinin sağlandığını göz önüne alarak

$$F(s) = \int\limits_{s}^{x_0} |g(z)-g(x_0)|\,dz \tag{3.6}$$

ve

$$G(s) = \int\limits_{x_0}^{s} |g(z)-g(x_0)|\,dz \tag{3.7}$$

fonksiyonlarını tanımlayalım. Burada, $\delta > 0$ olmak üzere, $x_0 - s \leq \delta$ iken

$$|F(s)| \leq \varepsilon\mu(x_0-s) \tag{3.8}$$

eşitsizliği ve $s - x_0 \leq \delta$ iken

$$|G(s)| \leq \varepsilon\mu(s-x_0) \tag{3.9}$$

eşitsizliği sağlanır.

Şimdi, yukarıda verilen tanımlar yardımıyla I_{12} ve I_{13} integrallerini inceleyelim. Öncelikle Lemma 2.1 deki eşitlik ve g fonksiyonunun sınırlılığı kullanılırsa, $B_m > 0$ sonlu reel sayısı olmak üzere $m = 1, ..., n$ için

$$|g^m(s) - g^m(x_0)| \leq B_m |g(s) - g(x_0)|$$

eşitsizliği yazılabilir. Bu eşitsizlik yardımıyla I_{12} integrali için

$$\begin{aligned} |I_{12}| &= \left| \sum_{m=1}^{n} \left(\int_{x_0-\delta}^{x_0} |g^m(s) - g^m(x_0)| K_{\lambda,m}(s;x_0) ds \right) \right| \\ &\leq \left| \sum_{m=1}^{n} \left(\int_{x_0-\delta}^{x_0} B_m |g(s) - g(x_0)| K_{\lambda,m}(s;x_0) ds \right) \right| \\ &= \left| \sum_{m=1}^{n} \left(B_m \int_{x_0-\delta}^{x_0} |g(s) - g(x_0)| K_{\lambda,m}(s;x_0) ds \right) \right| \end{aligned}$$

eşitsizliği ve I_{13} integrali için de

$$\begin{aligned} |I_{13}| &= \left| \sum_{m=1}^{n} \left(\int_{x_0}^{x_0+\delta} |g^m(s) - g^m(x_0)| K_{\lambda,m}(s;x_0) ds \right) \right| \\ &\leq \left| \sum_{m=1}^{n} \left(\int_{x_0}^{x_0+\delta} B_m |g(s) - g(x_0)| K_{\lambda,m}(s;x_0) ds \right) \right| \\ &= \left| \sum_{m=1}^{n} \left(B_m \int_{x_0}^{x_0+\delta} |g(s) - g(x_0)| K_{\lambda,m}(s;x_0) ds \right) \right| \end{aligned}$$

eşitsizliğinin sağlandığı görülür. Ardından

$$|I_{12}| \leq \left| \sum_{m=1}^{n} B_m \left(\int_{x_0-\delta}^{x_0} |g(s) - g(x_0)| K_{\lambda,m}(s;x_0) ds \right) \right|$$

eşitsizliği için $K_{\lambda,m}(s;x_0)$ çekirdek fonksiyonu integrallenebilen, monoton bir fonksiyon ve (3.6) ile tanımlanan $F(s)$ fonksiyonu integrallenebilir bir fonksiyonun belirsiz integrali olduğundan Teorem 2.5 gereği, $F(s)$ fonksiyonuna göre Stieltjes integrallenebilirdir. Bundan dolayı (3.6) ile tanımlanan $F(s)$ fonksiyonunun diferansiyeli kullanılırsa,

$$|I_{12}| \leq \sum_{m=1}^{n} B_m \left[(\mathbf{S}) \int_{x_0-\delta}^{x_0} K_{\lambda,m}(s;x_0) |dF(s)| \right]$$

eşitsizliği yazılabilir. Bu son eşitsizliğin sağ tarafındaki Stieltjes integraline kısmi integrasyon uygulanırsa

$$\begin{aligned}
|I_{12}| &\leq \sum_{m=1}^{n} B_m \left\{ \left[K_{\lambda,m}(s;x_0)\,|F(s)| \right] \Big|_{x_0-\delta}^{x_0} - \int_{x_0-\delta}^{x_0} |F(s)| \left(\frac{d}{ds} \left(K_{\lambda,m}(s;x_0) \right) \right) ds \right\} \\
&= \sum_{m=1}^{n} B_m \left\{ K_{\lambda,m}(x_0;x_0)\,|F(x_0)| - K_{\lambda,m}(x_0-\delta;x_0)\,|F(x_0-\delta)| \right. \\
&\quad \left. - \int_{x_0-\delta}^{x_0} |F(s)| \left(\frac{d}{ds} \left(K_{\lambda,m}(s;x_0) \right) \right) ds \right\} \qquad (3.10)
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Daha sonra (3.8) eşitsizliğinde $s = x_0$ alınır ve $\mu(0) = 0$ eşitliği kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
|F(x_0)| &\leq \varepsilon\mu(x_0 - x_0) \\
&= \varepsilon\mu(0) \\
&= 0
\end{aligned}$$

olduğu görülür ve bulunan bu ifade (3.10) eşitsizliğinde yerine yazılırsa

$$|I_{12}| \leq \sum_{m=1}^{n} B_m \left\{ -K_{\lambda,m}(x_0-\delta;x_0)\,|F(x_0-\delta)| - \int_{x_0-\delta}^{x_0} |F(s)| \left(\frac{d}{ds} \left(K_{\lambda,m}(s;x_0) \right) \right) ds \right\}$$

eşitsizliği elde edilir. Burada, $K_{\lambda,m}(s;x_0)$ çekirdek fonksiyonu, $(x_0-\delta, x_0)$ aralığında azalmayan bir fonksiyon olduğundan diferansiyeli pozitif olacaktır. Ayrıca, (3.8) eşitsizliğinde $s = x_0 - \delta$ alınırsa,

$$\begin{aligned}
|F(x_0-\delta)| &\leq \varepsilon\mu(x_0 - x_0 + \delta) \\
&= \varepsilon\mu(\delta)
\end{aligned}$$

eşitsizliğinin sağlandığı görülür. Bu ifade son eşitsizlikte yerine yazılırsa, sonuç olarak

$$|I_{12}| \leq \varepsilon \sum_{m=1}^{n} B_m \left\{ -K_{\lambda,m}(x_0-\delta;x_0)\mu(\delta) - \int_{x_0-\delta}^{x_0} \mu(x_0-s) \left(\frac{d}{ds} \left(K_{\lambda,m}(s;x_0) \right) \right) ds \right\} \qquad (3.11)$$

eşitsizliği elde edilir. Şimdi, (3.11) eşitsizliğinin sağ tarafındaki integrale tekrar kısmi integrasyon uygulayalım. Bu takdirde,

$$\begin{aligned} |I_{12}| &\leq \varepsilon \sum_{m=1}^{n} B_m \{ -K_{\lambda,m}(x_0-\delta;x_0)\mu(\delta) \\ &\quad - \left(K_{\lambda,m}(s;x_0)\mu(x_0-s)|_{x_0-\delta}^{x_0} - \int_{x_0-\delta}^{x_0} K_{\lambda,m}(s;x_0)\{\mu(x_0-s)\}_s' \, ds \right) \right\} \end{aligned}$$

eşitsizliği bulunur. Son olarak, bu eşitsizlikte integral sınırları yerine koyulup, $\mu(0) = 0$ olduğu dikkate alınırsa, I_{12} integrali için

$$|I_{12}| \leq \varepsilon \sum_{m=1}^{n} B_m \left(\int_{x_0-\delta}^{x_0} K_{\lambda,m}(s;x_0) \left| \{\mu(x_0-s)\}_s' \right| ds \right) \tag{3.12}$$

eşitsizliği yazılabilir.

Benzer şekilde I_{13} integralini, (3.7) ile tanımlanan $G(s)$ fonksiyonu yardımıyla hesaplayalım.

$K_{\lambda,m}(s;x_0)$ çekirdek fonksiyonu integrallenebilen, monoton bir fonksiyon ve (3.7) ile tanımlanan $G(s)$ fonksiyonu integrallenebilir bir fonksiyonun belirsiz integrali olduğundan Teorem 2.5 gereği, $G(s)$ fonksiyonuna göre Stieltjes integrallenebilirdir. Bundan dolayı (3.7) ile tanımlanan $G(s)$ fonksiyonunun diferansiyeli kullanılırsa,

$$\begin{aligned} |I_{13}| &\leq \left| \sum_{m=1}^{n} B_m \left(\int_{x_0}^{x_0+\delta} |g(s)-g(x_0)| \, K_{\lambda,m}(s;x_0) ds \right) \right| \\ &\leq \sum_{m=1}^{n} B_m \left[(\mathbf{S}) \int_{x_0}^{x_0+\delta} K_{\lambda,m}(s;x_0) \, |dG(s)| \right] \end{aligned}$$

eşitsizliği yazılabilir. Bu eşitsizlikteki Stieltjes integraline kısmi integrasyon uygulanırsa,

$$\begin{aligned} |I_{13}| &\leq \sum_{m=1}^{n} B_m \left\{ [K_{\lambda,m}(s;x_0) \, |G(s)|] \, |_{x_0}^{x_0+\delta} + \int_{x_0}^{x_0+\delta} |G(s)| \left(\frac{d}{ds}\left(-K_{\lambda,m}(s;x_0)\right) \right) ds \right\} \\ &= \sum_{m=1}^{n} B_m \{ K_{\lambda,m}(x_0+\delta;x_0) \, |G(x_0+\delta)| - K_{\lambda,m}(x_0;x_0) \, |G(x_0)| \\ &\quad + \int_{x_0}^{x_0+\delta} |G(s)| \left(\frac{d}{ds}\left(-K_{\lambda,m}(s;x_0)\right) \right) ds \right\} \end{aligned} \tag{3.13}$$

eşitsizliği elde edilir. (3.9) eşitsizliğinde $s = x_0$ alınır ve $\mu(0) = 0$ olduğu kullanılırsa,

$$\begin{aligned} |G(x_0)| &\leq \varepsilon\mu(x_0 - x_0) \\ &= \varepsilon\mu(0) \\ &= 0 \end{aligned}$$

olduğu görülür ve bulunan bu ifade (3.13) eşitsizliğinde yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} |I_{13}| \leq & \sum_{m=1}^{n} B_m \{K_{\lambda,m}(x_0+\delta; x_0) \,|G(x_0+\delta)| \\ & + \int_{x_0}^{x_0+\delta} |G(s)| \left(\frac{d}{ds}\left(-K_{\lambda,m}(s;x_0)\right)\right) ds \right\} \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Burada, $K_{\lambda,m}(s; x_0)$ çekirdek fonksiyonunun, $(x_0, x_0+\delta)$ aralığında artmayan bir fonksiyon olduğu dikkate alınırsa, aynı aralıkta $-K_{\lambda,m}(s; x_0)$ çekirdek fonksiyonunun azalmayan bir fonksiyon olduğu görülür ve bu yüzden $-K_{\lambda,m}(s; x_0)$ çekirdek fonksiyonunun diferansiyeli pozitif olur. Ayrıca, (3.9) eşitsizliğinde $s = x_0 + \delta$ alınırsa,

$$\begin{aligned} |G(x_0+\delta)| &\leq \varepsilon\mu(x_0+\delta-x_0) \\ &= \varepsilon\mu(\delta) \end{aligned}$$

eşitsizliği yazılabilir. Bu ifade son eşitsizlikte yerine yazılırsa, I_{13} integrali için

$$\begin{aligned} |I_{13}| \leq & \ \varepsilon\sum_{m=1}^{n} B_m \{K_{\lambda,m}(x_0+\delta; x_0)\mu(\delta) \\ & + \int_{x_0}^{x_0+\delta} \mu(s-x_0) \left(\frac{d}{ds}\left(-K_{\lambda,m}(s;x_0)\right)\right) ds \right\} \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Şimdi, bu son eşitsizliğin sağ tarafındaki integrale tekrar kısmi integrasyon uygulayalım. Bu takdirde,

$$\begin{aligned} |I_{13}| \leq & \ \varepsilon\sum_{m=1}^{n} B_m \{K_{\lambda,m}(x_0+\delta; x_0)\mu(\delta) \\ & -K_{\lambda,m}(s;x_0)\mu(s-x_0)|_{x_0}^{x_0+\delta} + \int_{x_0}^{x_0+\delta} K_{\lambda,m}(s;x_0)\left\{\mu(s-x_0)\right\}_s' ds \right\} \end{aligned}$$

eşitsizliğinin sağlandığı görülür. Daha sonra integral sınırları yerine koyulup, $\mu(0) = 0$ olduğu kullanılırsa, sonuç olarak I_{13} integrali için

$$|I_{13}| \leq \varepsilon \sum_{m=1}^{n} B_m \left(\int_{x_0}^{x_0+\delta} K_{\lambda,m}(s;x_0) \left| \{\mu(s-x_0)\}_s' \right| ds \right) \tag{3.14}$$

eşitsizliği bulunur. Son olarak, $B = \max\{B_1, ..., B_n\}$ olmak üzere I_{12} ve I_{13} integralleri için bulunan (3.12) ve (3.14) eşitsizliklerini birleştirirsek

$$|I_{12}| + |I_{13}| \leq \varepsilon B \sum_{m=1}^{n} \left(\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} K_{\lambda,m}(s;x_0) \left| \{\mu(|x_0-s|)\}_s' \right| ds \right)$$

eşitsizliği elde edilir. Bu eşitsizliğin sağ tarafındaki ifadenin hipotezden sınırlı olduğu dikkate alınırsa istenilen sonuca varırız.

Yani, $x_0 \in (a,b)$ noktası, $g \in L_1(a,b)$ fonksiyonunun $\mu-$genelleştirilmiş Lebesgue noktası ve g fonksiyonu, (a,b) aralığı üzerinde sınırlı bir fonksiyon ise bu takdirde $\lambda \to \lambda_0$ iken

$$\sum_{m=1}^{n} \left(\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} K_{\lambda,m}(s;x_0) \left| \{\mu(|x_0-s|)\}_s' \right| ds \right)$$

fonksiyonunun sınırlı olduğu Z kümesi üzerinde

$$\lim_{\lambda \to \lambda_0} T_\lambda(g;x_0) = \sum_{m=1}^{n} C_m g^m(x_0)$$

gerçeklenir.

Sonuç olarak istenilen elde edilmiştir ve ispat tamamlanmıştır. ■

Teorem 3.1 de özel olarak (a,b) aralığı yerine $\mathbb{R}$ alınırsa, bu durumda Teorem 3.1 aşağıdaki şekilde ifade ve ispat edilir.

Teorem 3.2 $x_0 \in \mathbb{R}$ noktası, $g \in L_1(\mathbb{R})$ fonksiyonunun $\mu-$genelleştirilmiş Lebesgue noktası ve g fonksiyonu, $\mathbb{R}$ üzerinde sınırlı bir fonksiyon ise bu takdirde $\Lambda \neq \emptyset$, negatif olmayan λ reel sayılarını içeren bir indis kümesi ve λ_0, bu kümenin bir yığılma noktası olmak üzere $0 < \delta \leq \delta_0$ reel sayısı için $\lambda \to \lambda_0$ iken,

$$\sum_{m=1}^{n} \left(\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} K_{\lambda,m}(s;x_0) \left| \{\mu(|x_0-s|)\}_s' \right| ds \right)$$

fonksiyonunun sınırlı olduğu Z' kümesi üzerinde

$$\lim_{\lambda\to\lambda_0} T_\lambda(g;x_0) = \sum_{m=1}^{n} C_m g^m(x_0)$$

gerçeklenir.

Burada, $m = 1, 2, ..., n$ olmak üzere g^m fonksiyonu, g fonksiyonunun $m-inci$ kuvvetidir.

İspat. Teorem 3.1 'e benzer şekilde, $\mathbb{R}$ üzerinde

$$J_\lambda = \left| T_\lambda(f;x_0) - \sum_{m=1}^{n} C_m g^m(x_0) \right|$$

farkına bakalım. $x_0 \in \mathbb{R}$ noktası olmak üzere J_λ farkı,

$$\begin{aligned}
J_\lambda &= \left| T_\lambda(g;x_0) - \sum_{m=1}^{n} C_m g^m(x_0) \right| \\
&= \left| \int_{-\infty}^{\infty} \left(\sum_{m=1}^{n} g^m(s) K_{\lambda,m}(s;x_0) \right) ds - \sum_{m=1}^{n} C_m g^m(x_0) \right| \\
&= \left| \int_{-\infty}^{\infty} \left(\sum_{m=1}^{n} g^m(s) K_{\lambda,m}(s;x_0) \right) ds - \int_{-\infty}^{\infty} \left(\sum_{m=1}^{n} g^m(x_0) K_{\lambda,m}(s;x_0) \right) ds \right. \\
&\quad \left. + \int_{-\infty}^{\infty} \left(\sum_{m=1}^{n} g^m(x_0) K_{\lambda,m}(s;x_0) \right) ds - \sum_{m=1}^{n} C_m g^m(x_0) \right|
\end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir. Bu eşitlikte, n sonlu sayı olduğundan toplam ile integral yer değiştirilir ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$J_\lambda = \left| \int_{-\infty}^{\infty} \left(\sum_{m=1}^{n} \left[g^m(s) - g^m(x_0) \right] K_{\lambda,m}(s;x_0) \right) ds + \sum_{m=1}^{n} g^m(x_0) \left[\int_{-\infty}^{\infty} K_{\lambda,m}(s;x_0) ds - C_m \right] \right|$$

eşitliği bulunur. Daha sonra mutlak değer fonksiyonunun özelliği kullanılıp ifade büyütülürse,

$$J_\lambda \leq \int_{-\infty}^{\infty} \left(\sum_{m=1}^{n} \left| g^m(s) - g^m(x_0) \right| K_{\lambda,m}(s;x_0) \right) ds + \sum_{m=1}^{n} \left| g^m(x_0) \right| \left| \int_{-\infty}^{\infty} K_{\lambda,m}(s;x_0) ds - C_m \right|$$

eşitsizliği yazılabilir. Bu son eşitsizliğin, sağ tarafında elde edilen ifadelere sırasıyla

$$J_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\sum_{m=1}^{n} \left| g^m(s) - g^m(x_0) \right| K_{\lambda,m}(s;x_0) \right) ds$$

ve

$$J_2 = \sum_{m=1}^{n} |g^m(x_0)| \left| \int_{-\infty}^{\infty} K_{\lambda,m}(s;x_0)ds - C_m \right|$$

diyelim ve sonra da λ, λ_0 yaklaşırken J_1, J_2 ifadelerinin ise *sıfıra* yaklaştığını gösterelim.

Öncelikle, J_2 ifadesini inceleyelim. A_1 sınıfının (a) şartı olan

$$\lim_{\lambda \to \lambda_0} \left| \int_{-\infty}^{\infty} K_{\lambda,m}(s;x)ds - C_m \right| = 0$$

eşitliği kullanılırsa

$$\begin{aligned} \lim_{\lambda \to \lambda_0} (J_2) &= \lim_{\lambda \to \lambda_0} \left(\sum_{m=1}^{n} |g^m(x_0)| \left| \int_{-\infty}^{\infty} K_{\lambda,m}(s;x_0)ds - C_m \right| \right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

olduğu görülür. Bu durumda J_2 ifadesi için $\lambda \to \lambda_0$ iken $(J_2) \to 0$ elde edilir.

Şimdi, J_1 integralini hesaplayalım. Bunun için $0 < \delta < \delta_0$ reel sayısı olmak üzere J_1 integralini

$$\begin{aligned} J_1 &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\sum_{m=1}^{n} |g^m(s) - g^m(x_0)| \, K_{\lambda,m}(s;x_0) \right) ds \\ &= \int_{-\infty}^{x_0-\delta} \left(\sum_{m=1}^{n} |g^m(s) - g^m(x_0)| \, K_{\lambda,m}(s;x_0) \right) ds \\ &+ \int_{x_0-\delta}^{x_0} \left(\sum_{m=1}^{n} |g^m(s) - g^m(x_0)| \, K_{\lambda,m}(s;x_0) \right) ds \\ &+ \int_{x_0}^{x_0+\delta} \left(\sum_{m=1}^{n} |g^m(s) - g^m(x_0)| \, K_{\lambda,m}(s;x_0) \right) ds \\ &+ \int_{x_0+\delta}^{\infty} \left(\sum_{m=1}^{n} |g^m(s) - g^m(x_0)| \, K_{\lambda,m}(s;x_0) \right) ds \end{aligned}$$

şeklinde dört parçaya ayıralım. Sırasıyla bu integrallere

$$J_{11} = \int_{-\infty}^{x_0-\delta} \left(\sum_{m=1}^{n} |g^m(s) - g^m(x_0)| \, K_{\lambda,m}(s;x_0) \right) ds,$$

$$J_{12} = \int_{x_0-\delta}^{x_0} \left(\sum_{m=1}^{n} \left| g^m(s) - g^m(x_0) \right| K_{\lambda,m}(s;x_0) \right) ds,$$

$$J_{13} = \int_{x_0}^{x_0+\delta} \left(\sum_{m=1}^{n} \left| g^m(s) - g^m(x_0) \right| K_{\lambda,m}(s;x_0) \right) ds$$

ve

$$J_{14} = \int_{x_0+\delta}^{\infty} \left(\sum_{m=1}^{n} \left| g^m(s) - g^m(x_0) \right| K_{\lambda,m}(s;x_0) \right) ds$$

diyelim. Burada, ilk önce J_{11} ve J_{14} integrallerini daha sonra da J_{12} ve J_{13} integrallerini hesaplayalım.

J_{11} integralinde, n sonlu sayı olduğundan toplam ile integral yer değiştirilirse,

$$\begin{aligned} J_{11} &= \int_{-\infty}^{x_0-\delta} \left(\sum_{m=1}^{n} \left| g^m(s) - g^m(x_0) \right| K_{\lambda,m}(s;x_0) \right) ds \\ &= \sum_{m=1}^{n} \left(\int_{-\infty}^{x_0-\delta} \left| g^m(s) - g^m(x_0) \right| K_{\lambda,m}(s;x_0) ds \right) \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Daha sonra bu eşitlikte, önce mutlak değer fonksiyonunun özelliği kullanılıp, sonra da $K_{\lambda,m}(s;x)$ çekirdek fonksiyonunun, A_1 sınıfının (d) şartından dolayı her bir $\lambda \in \Lambda$ için s nin bir fonksiyonu olarak $(x-\delta_0, x)$ aralığı üzerinde azalmayan bir fonksiyon olduğu göz önüne alınırsa,

$$\begin{aligned} J_{11} &= \sum_{m=1}^{n} \left(\int_{-\infty}^{x_0-\delta} \left| g^m(s) - g^m(x_0) \right| K_{\lambda,m}(s;x_0) ds \right) \\ &= \sum_{m=1}^{n} \left(\int_{-\infty}^{x_0-\delta} \left| g^m(s) \right| K_{\lambda,m}(s;x_0) ds \right) + \sum_{m=1}^{n} \left(\int_{-\infty}^{x_0-\delta} \left| g^m(x_0) \right| K_{\lambda,m}(s;x_0) ds \right) \\ &\leq \sum_{m=1}^{n} K_{\lambda,m}(x_0-\delta;x_0) \int_{-\infty}^{x_0-\delta} \left| g^m(s) \right| ds + \sum_{m=1}^{n} \left| g^m(x_0) \right| \int_{-\infty}^{x_0-\delta} K_{\lambda,m}(s;x_0) ds \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Burada, son olarak norm tanımı kullanılırsa, J_{11} integrali için

$$J_{11} \leq \sum_{m=1}^{n} K_{\lambda,m}(x_0-\delta;x_0) \left\| g^m \right\|_{L_1(\mathbb{R})} + \sum_{m=1}^{n} \left| g^m(x_0) \right| \int_{-\infty}^{x_0-\delta} K_{\lambda,m}(s;x_0) ds$$

eşitsizliği bulunur.

Şimdi, benzer şekilde J_{14} integralini hesaplayalım. n sonlu sayı olduğundan integral ile toplam yer değiştirilirse

$$\begin{aligned} J_{14} &= \int\limits_{x_0+\delta}^{\infty} \left(\sum_{m=1}^{n} |g^m(s) - g^m(x_0)| \, K_{\lambda,m}(s;x_0) \right) ds \\ &= \sum_{m=1}^{n} \left(\int\limits_{x_0+\delta}^{\infty} |g^m(s) - g^m(x_0)| \, K_{\lambda,m}(s;x_0) ds \right) \end{aligned}$$

eşitliği bulunur. Önce mutlak değer fonksiyonunun özelliği, daha sonra da A_1 sınıfının (d) şartı yani, $K_{\lambda,m}(s;x)$ çekirdek fonksiyonunun her bir $\lambda \in \Lambda$ için s nin bir fonksiyonu olarak $(x, x+\delta_0)$ aralığı üzerinde artmayan bir fonksiyon olduğu dikkate alınırsa,

$$\begin{aligned} J_{14} &= \sum_{m=1}^{n} \left(\int\limits_{x_0+\delta}^{\infty} |g^m(s) - g^m(x_0)| \, K_{\lambda,m}(s;x_0) ds \right) \\ &= \sum_{m=1}^{n} \left(\int\limits_{x_0+\delta}^{\infty} |g^m(s)| \, K_{\lambda,m}(s;x_0) ds \right) + \sum_{m=1}^{n} \left(\int\limits_{x_0+\delta}^{\infty} |g^m(x_0)| \, K_{\lambda,m}(s;x_0) ds \right) \\ &\leq \sum_{m=1}^{n} K_{\lambda,m}(x_0+\delta;x_0) \int\limits_{x_0+\delta}^{\infty} |g^m(s)| \, ds + \sum_{m=1}^{n} |g^m(x_0)| \int\limits_{x_0+\delta}^{\infty} K_{\lambda,m}(s;x_0) ds \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Bu son eşitsizlikte, norm tanımı kullanılırsa J_{14} integrali için

$$J_{14} \leq \sum_{m=1}^{n} K_{\lambda,m}(x_0+\delta;x_0) \, \|g^m\|_{L_1(\mathbb{R})} + \sum_{m=1}^{n} |g^m(x_0)| \int\limits_{x_0+\delta}^{\infty} K_{\lambda,m}(s;x_0) ds$$

eşitsizliği bulunur.

Sonuç olarak, J_{11} ve J_{14} integralleri için

$$J_{11} \leq \sum_{m=1}^{n} K_{\lambda,m}(x_0-\delta;x_0) \, \|g^m\|_{L_1(\mathbb{R})} + \sum_{m=1}^{n} |g^m(x_0)| \int\limits_{-\infty}^{x_0-\delta} K_{\lambda,m}(s;x_0) ds \qquad (3.15)$$

ve

$$J_{14} \leq \sum_{m=1}^{n} K_{\lambda,m}(x_0+\delta;x_0) \, \|g^m\|_{L_1(\mathbb{R})} + \sum_{m=1}^{n} |g^m(x_0)| \int\limits_{x_0+\delta}^{\infty} K_{\lambda,m}(s;x_0) ds \qquad (3.16)$$

eşitsizlikleri elde edilir.

Şimdi, J_{12} ve J_{13} integrallerini inceleyelim. J_{12} ve J_{13} integralleri için, $\mu-$genelleştirilmiş Lebesgue noktası tanımı yardımıyla Teorem 3.1' e benzer şekilde inceleme yapılırsa,

$$|J_{12}| \leq \varepsilon \sum_{m=1}^{n} B_m \left(\int_{x_0-\delta}^{x_0} K_{\lambda,m}(s;x_0) \left| \{\mu(x_0 - s)\}_s^{'} \right| ds \right) \tag{3.17}$$

ve

$$|J_{13}| \leq \varepsilon \sum_{m=1}^{n} B_m \left(\int_{x_0}^{x_0+\delta} K_{\lambda,m}(s;x_0) \left| \{\mu(s - x_0)\}_s^{'} \right| ds \right) \tag{3.18}$$

eşitsizlikleri bulunur. Daha sonra, $B = \max\{B_1, ..., B_n\}$ olmak üzere (3.17) ve (3.18) eşitsizliklerinde bulunan J_{12} ve J_{13} integrallerini birleştirirsek

$$|J_{12}| + |J_{13}| \leq \varepsilon B \sum_{m=1}^{n} \left(\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} K_{\lambda,m}(s;x_0) \left| \{\mu(|x_0 - s|)\}_s^{'} \right| ds \right) \tag{3.19}$$

eşitsizliği şeklinde yazılabilir. Sonuç olarak, (3.15), (3.16) ve (3.19) eşitsizliklerinden J_λ ifadesi için

$$\begin{aligned} J_\lambda \leq & \sum_{m=1}^{n} K_{\lambda,m}(x_0 - \delta; x_0) \|g^m\|_{L_1(\mathbb{R})} + \sum_{m=1}^{n} |g^m(x_0)| \int_{-\infty}^{x_0-\delta} K_{\lambda,m}(s;x_0) ds \\ & + \sum_{m=1}^{n} K_{\lambda,m}(x_0 + \delta; x_0) \|g^m\|_{L_1(\mathbb{R})} + \sum_{m=1}^{n} |g^m(x_0)| \int_{x_0+\delta}^{\infty} K_{\lambda,m}(s;x_0) ds \\ & + \varepsilon B \sum_{m=1}^{n} \left(\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} K_{\lambda,m}(s;x_0) \left| \{\mu(|x_0 - s|)\}_s^{'} \right| ds \right) \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Bu son eşitsizlikte, g fonksiyonunun sınırlılığı ve verilen hipotez kullanılırsa istenilen ispat elde edilir ve

$$\lim_{\lambda \to \lambda_0} T_\lambda(g; x_0) = \sum_{m=1}^{n} C_m g^m(x_0)$$

olduğu görülür.

Sonuç olarak istenilen elde edilmiştir ve ispat tamamlanmıştır. ■

Yani, özel olarak alınan (a, b) aralığı yerine daha genel aralık olan reel sayılar kümesi alınsa bile aynı şartlar altında yakınsamanın sağlandığı görülür.

Bu kesimdeki çalışmalarımız *"On singular integral operators involving power nonlinearity"* adı ile makale olarak yayınlanmıştır.

3.2 Sonsuz Toplam İçeren Lineer Olmayan İntegral Operatörlerin Noktasal Yakınsaklığı

Bu kesimde, A_2 sınıfı adını verdiğimiz yeni bir çekirdek sınıfının tanımı verildikten sonra aşağıdaki sonsuz toplam içeren lineer olmayan integral operatörünün $\mu-$genelleştirilmiş Lebesgue noktasındaki noktasal yakınsaklığı araştırılmıştır.

$$\Psi_\gamma(g;x) = \sum_{m=1}^{\infty} \left(\int_a^b g^m(s) H_{\gamma,m}(s-x)dt \right), \quad \gamma \in \Gamma, \quad x \in (a,b)$$

operatöründe, $g \in L_p(a,b)$ $(1 \le p < \infty)$ fonksiyonu ve $\Gamma \neq \emptyset$, negatif olmayan γ reel sayılarını içeren bir indis kümesidir.

Burada, (a,b) aralığı $\mathbb{R}$ nin sonlu keyfi açık bir aralığıdır ve $H_{\gamma,m}$ çekirdek fonksiyonu, $\gamma \in \Gamma$ reel sayısı için $H_{\gamma,m} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ şeklinde tanımlıdır. Ayrıca, $m = 1, 2, ...$ olmak üzere g^m fonksiyonu, g fonksiyonunun $m - inci$ kuvvetidir.

Şimdi, $H_{\gamma,m}$ çekirdek fonksiyonu için A_2 sınıfı tanımını verelim ve daha sonra da $\Psi_\gamma(f;x)$ integral operatörünün noktasal yakınsaklığını inceleyelim.

Uyarı 3.1 (a,b) aralığı, reel sayıların herhangi bir sınırlı aralığı olmak üzere her bir $x \in (a,b)$ noktası ve $\gamma \in \Gamma$ için $(g^m(s)H_{\gamma,m}(s-x))$ fonksiyonlar dizisi, (a,b) aralığı üzerinde hemen hemen her yerde ölçülebilir fonksiyonlar dizisi olsun. Eğer her bir $x \in (a,b)$ noktası ve $\gamma \in \Gamma$ için

$$\sum_{m=1}^{\infty} \left(\int_a^b |g^m(s)H_{\gamma,m}(s-x)| \, ds \right) < \infty$$

ise o halde $\sum\limits_{m=1}^{\infty} g^m(s)H_{\gamma,m}(s-x)$ serisi hemen hemen her s için $L_1(a,b)$ deki bir fonksiyona yakınsar ve

$$\sum_{m=1}^{\infty} \left(\int_a^b g^m(s)H_{\gamma,m}(s-x)ds \right) = \int_a^b \left(\sum_{m=1}^{\infty} g^m(s)H_{\gamma,m}(s-x) \right) ds$$

sağlanır (Rudin 1987).

Tanım 3.2 (A_2 sınıfı) $\Gamma \neq \emptyset$, negatif olmayan γ reel sayılarını içeren bir indis kümesi ve γ_0, Γ indis kümesinin yığılma noktası olsun. $m = 1, 2, ...$ için $\{H_{\gamma,m}\}_{\gamma \in \Gamma}$,

$H_{\gamma,m} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ integrallenebilen fonksiyonlardan oluşan bir aile olmak üzere $H_{\gamma,m}$ çekirdek fonksiyonuna aşağıdaki şartları sağladığı takdirde A_2 *sınıfındandır* denir:

a) $\gamma \in \Gamma$ noktalar seçiminden bağımsız, I_m pozitif sonlu reel sayıları için

$$\sum_{m=1}^{\infty} I_m < \infty$$

olmak üzere

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_{\gamma,m}(s)ds = I_m.$$

b) Her $\xi > 0$ noktası için,

$$\lim_{\gamma \to \gamma_0} \left[\sum_{m=1}^{\infty} \left[\sup_{|s|>\xi} |H_{\gamma,m}(s)| \right] \right] = 0.$$

c) Her $\xi > 0$ noktası için,

$$\lim_{\gamma \to \gamma_0} \left[\sum_{m=1}^{\infty} \left[\int_{|s|>\xi} |H_{\gamma,m}(s)| \, ds \right] \right] = 0.$$

d) $0 < \delta_0 \leq \delta_1$ reel sayısı ve $m = 1, \ldots$ olmak üzere herhangi bir $\gamma \in \Gamma$ için $H_{\gamma,m}(s)$ çekirdek fonksiyonu, $(-\delta_0, 0)$ aralığı üzerinde azalmayan bir fonksiyon ve $(0, \delta_0)$ aralığı üzerinde ise artmayan bir fonksiyondur. Burada, δ_0 ve δ_1 pozitif reel sayıdır.

Bu kesimde ispatlanan Teorem 3.3 ve Teorem 3.4 için $H_{\gamma,m}$ çekirdek fonksiyonu, A_2 sınıfında kabul edilmiştir.

Teorem 3.3 $x_0 \in (a,b)$ noktası, $g \in L_p(a,b)$ $(1 \leq p < \infty)$ fonksiyonunun $\mu-$genelleştirilmiş Lebesgue noktası ve g fonksiyonu, $\sup\limits_{s \in (a,b)} |g(s)| = A$ $(A \in (0,1))$ olmak üzere (a,b) aralığı üzerinde sınırlı bir fonksiyon ve her bir sabit $1 \leq p < \infty$ değeri için $\sup\limits_{m \in \mathbb{N}} (m^p A^p)$ ifadesi sonlu olsun. Bu takdirde $\Gamma \neq \emptyset$, negatif olmayan γ reel sayılarını içeren bir indis kümesi ve γ_0, bu kümenin bir yığılma noktası olmak üzere $(x,\gamma) \to (x_0, \gamma_0)$ ve $0 < \delta < \delta_0$ iken

$$\sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} |H_{\gamma,m}(s-x)| \left| \{\mu(|x_0 - s|)\}_s' \right| ds + 2 \, |H_{\gamma,m}(0)| \, \mu(|x_0 - x|) \right\}$$

fonksiyonunun sınırlı olduğu T kümesi üzerinde

$$\lim_{(x,\gamma)\to(x_0,\gamma_0)} \Psi_\gamma(g;x) = \sum_{m=1}^{\infty} I_m g^m(x_0)$$

gerçeklenir.

Burada, $m = 1, ...$ olmak üzere g^m fonksiyonu, g fonksiyonunun $m-inci$ kuvvetidir.

İspat. $x_0 \in (a,b)$ noktası, $g \in L_p(a,b)$ $(1 \le p < \infty)$ fonksiyonunun $\mu-$genelleştirilmiş Lebesgue noktası ve g fonksiyonu, $\sup\limits_{s\in(a,b)} |g(s)| = A$ olmak üzere (a,b) aralığı üzerinde sınırlı bir fonksiyon olsun. $x_0 \in (a,b)$ için $\Psi_\gamma(f;x)$ operatörü ile $\sum\limits_{m=1}^{\infty} I_m g^m(x_0)$ toplamı arasındaki farkın limitinin *sıfıra* gittiğini göstermeliyiz. Burada, dikkat edilirse A_2 sınıfının (a) şartından ve teoremde verilen hipotezden dolayı $\sum\limits_{m=1}^{\infty} I_m g^m(x_0)$ toplamı sonlu bir toplamdır.

Kabul edelim ki $0 < \delta < \delta_0$ için $x_0 + \delta < b$, $x_0 - \delta > a$ ve $0 < x_0 - x < \frac{\delta}{2}$ olsun.

Şimdi, $p = 1$ olma durumunu ve $1 < p < \infty$ durumunu ayrı ayrı ispatlayalım.

Öncelikle, $p = 1$ olmak üzere $g \in L_1(a,b)$ olduğunu kabul edelim.

$$\sigma_\gamma = \left| \Psi_\gamma(g;x) - \sum_{m=1}^{\infty} I_m g^m(x_0) \right|$$

olsun. Kesim 3.1 de, (3.3) ile verilen g_1^m fonksiyonu tanımı yardımıyla

$$\sum_{m=1}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} g_1^m(x_0) H_{\gamma,m}(s-x)ds \right)$$

sonsuz toplamı σ_γ ifadesine eklenip çıkarılırsa,

$$\begin{aligned}
\sigma_\gamma &= \left| \Psi_\gamma(g;x) - \sum_{m=1}^{\infty} I_m g^m(x_0) \right| \\
&= \left| \sum_{m=1}^{\infty} \left(\int_a^b g^m(s) H_{\gamma,m}(s-x)ds \right) - \sum_{m=1}^{\infty} I_m g^m(x_0) \right| \\
&= \left| \sum_{m=1}^{\infty} \left(\int_a^b g^m(s) H_{\gamma,m}(s-x)ds \right) - \sum_{m=1}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} g_1^m(x_0) H_{\gamma,m}(s-x)ds \right) \right. \\
&\quad \left. + \sum_{m=1}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} g_1^m(x_0) H_{\gamma,m}(s-x)ds \right) - \sum_{m=1}^{\infty} I_m g^m(x_0) \right|
\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Bu son eşitlikte, (3.3) ile verilen g_1^m fonksiyonu tanımı kullanılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$\begin{aligned}
\sigma_\gamma &= \left| \sum_{m=1}^{\infty} \left(\int_a^b g^m(s) H_{\gamma,m}(s-x)ds \right) - \sum_{m=1}^{\infty} \left(\int_a^b g^m(x_0) H_{\gamma,m}(s-x)ds \right) \right. \\
&\quad - \sum_{m=1}^{\infty} \left(\int_{\mathbb{R}\setminus(a,b)} g^m(x_0) H_{\gamma,m}(s-x)ds \right) \\
&\quad \left. + \sum_{m=1}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} g^m(x_0) H_{\gamma,m}(s-x)ds \right) - \sum_{m=1}^{\infty} I_m g^m(x_0) \right| \\
&= \left| \sum_{m=1}^{\infty} \left(\int_a^b \left(g^m(s) - g^m(x_0)\right) H_{\gamma,m}(s-x)ds \right) - \sum_{m=1}^{\infty} \left(\int_{\mathbb{R}\setminus(a,b)} g^m(x_0) H_{\gamma,m}(s-x)ds \right) \right. \\
&\quad \left. + \sum_{m=1}^{\infty} g^m(x_0) \left(\int_{-\infty}^{\infty} H_{\gamma,m}(s-x)ds - I_m \right) \right|
\end{aligned}$$

eşitliği bulunur. Daha sonra, mutlak değer fonksiyonunun özelliği kullanılır ve bu ifade büyütülürse,

$$\begin{aligned}
\sigma_\gamma &\leq \sum_{m=1}^{\infty} \left(\int_a^b |g^m(s) - g^m(x_0)| \, |H_{\gamma,m}(s-x)| \, ds \right) \\
&\quad + \sum_{m=1}^{\infty} \left(\int_{\mathbb{R}\setminus(a,b)} |g^m(x_0)| \, |H_{\gamma,m}(s-x)| \, ds \right) \\
&\quad + \sum_{m=1}^{\infty} |g^m(x_0)| \left| \int_{-\infty}^{\infty} H_{\gamma,m}(s-x)ds - I_m \right|
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Şimdi, bu son eşitsizliğin sağ tarafındaki ifadelere sırasıyla

$$\begin{aligned}
\sigma_1 &= \sum_{m=1}^{\infty} \left(\int_a^b |g^m(s) - g^m(x_0)| \, |H_{\gamma,m}(s-x)| \, ds \right), \\
\sigma_2 &= \sum_{m=1}^{\infty} |g^m(x_0)| \int_{\mathbb{R}\setminus(a,b)} |H_{\gamma,m}(s-x)| \, ds, \\
\sigma_3 &= \sum_{m=1}^{\infty} |g^m(x_0)| \left| \int_{-\infty}^{\infty} H_{\gamma,m}(s-x)ds - I_m \right|
\end{aligned}$$

diyelim ve ardından σ_1, σ_2 ve σ_3 integrallerini hesaplayalım.

Öncelikle, σ_2 integralini inceleyelim. Verilen hipotezden dolayı

$$\sup_{m\in\mathbb{N}} |g^m(x_0)| \leq \sup_{m\in\mathbb{N}} (mA^m) < \infty$$

eşitsizliği göz önüne alınırsa,

$$\begin{aligned}
\sigma_2 &= \sum_{m=1}^{\infty} |g^m(x_0)| \int\limits_{\mathbb{R}\setminus(a,b)} |H_{\gamma,m}(s-x)|\, ds \\
&\leq \sum_{m=1}^{\infty} \left[\sup_{m\in\mathbb{N}} (mA^m)\right] \left(\int\limits_{\mathbb{R}\setminus(a,b)} |H_{\gamma,m}(s-x)|\, ds \right)
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Daha sonra, A_2 sınıfının (c) şartı olan her $\xi > 0$ noktası için,

$$\lim_{\gamma\to\gamma_0} \left[\sum_{m=1}^{\infty} \left[\int\limits_{|s|>\xi} |H_{\gamma,m}(s)|\, ds \right] \right] = 0$$

ve $\sup\limits_{m\in\mathbb{N}} (mA^m) < \infty$ olduğu dikkate alınırsa x noktası x_0 noktasına, γ noktasıda γ_0 noktasına yaklaşırken σ_2 integrali için,

$$\begin{aligned}
\lim_{(x,\gamma)\to(x_0,\gamma_0)} (\sigma_2) &= \lim_{(x,\gamma)\to(x_0,\gamma_0)} \left(\sum_{m=1}^{\infty} |g^m(x_0)| \int\limits_{\mathbb{R}\setminus(a,b)} |H_{\gamma,m}(s-x)|\, ds \right) \\
&\leq \lim_{(x,\gamma)\to(x_0,\gamma_0)} \left(\sum_{m=1}^{\infty} \left[\sup_{m\in\mathbb{N}} (mA^m)\right] \left(\int\limits_{\mathbb{R}\setminus(a,b)} |H_{\gamma,m}(s-x)|\, ds \right)\right) \\
&= 0
\end{aligned}$$

bulunur.

Şimdi, σ_3 integralini inceleyelim. A_2 sınıfının (a) şartından, I_m pozitif sonlu reel sayılar ve $\sum\limits_{m=1}^{\infty} I_m < \infty$ olmak üzere

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_{\gamma,m}(s)ds = I_m$$

ve $\sup\limits_{m\in\mathbb{N}}(mA^m) < \infty$ olduğu dikkate alınırsa, σ_3 integrali için

$$\begin{aligned}
\lim_{(x,\gamma)\to(x_0,\gamma_0)}(\sigma_3) &= \lim_{(x,\gamma)\to(x_0,\gamma_0)}\left(\sum_{m=1}^{\infty}|g^m(x_0)|\left|\int_{-\infty}^{\infty}H_{\gamma,m}(s-x)ds - I_m\right|\right) \\
&\leq \lim_{(x,\gamma)\to(x_0,\gamma_0)}\left(\sum_{m=1}^{\infty}\left[\sup_{m\in\mathbb{N}}(mA^m)\right]\left|\int_{-\infty}^{\infty}H_{\gamma,m}(s-x)ds - I_m\right|\right) \\
&= 0
\end{aligned}$$

elde edilir. Sonuç olarak, σ_2 ve σ_3 integralleri incelendiğinde $(x,\gamma)\to(x_0,\gamma_0)$ iken $(\sigma_2)\to 0$ ve $(\sigma_3)\to 0$ gerçeklenir.

Şimdi, σ_1 integrali için de x noktası x_0 noktasına, γ noktasıda γ_0 noktasına yaklaşırken σ_1 integralinin *sıfıra* yaklaştığını gösterelim.

$$\sigma_1 = \sum_{m=1}^{\infty}\int_a^b |g^m(s)-g^m(x_0)|\,|H_{\gamma,m}(s-x)|\,ds$$

integralini, δ reel sayısı olmak üzere $0<\delta<\delta_0$ için aşağıdaki gibi dört kısma ayıralım.

$$\begin{aligned}
\sigma_1 = \sum_{m=1}^{\infty}\Bigg\{ &\int_a^{x_0-\delta} |g^m(s)-g^m(x_0)|\,|H_{\gamma,m}(s-x)|\,ds \\
&+ \int_{x_0-\delta}^{x_0} |g^m(s)-g^m(x_0)|\,|H_{\gamma,m}(s-x)|\,ds \\
&+ \int_{x_0}^{x_0+\delta} |g^m(s)-g^m(x_0)|\,|H_{\gamma,m}(s-x)|\,ds \\
&+ \int_{x_0+\delta}^{b} |g^m(s)-g^m(x_0)|\,|H_{\gamma,m}(s-x)|\,ds \Bigg\}
\end{aligned}$$

olsun. Şimdi, sırasıyla bu integrallere

$$\begin{aligned}
\sigma_{11} &= \sum_{m=1}^{\infty}\left(\int_{a}^{x_0-\delta}|g^m(s)-g^m(x_0)|\,|H_{\gamma,m}(s-x)|\,ds\right),\\
\sigma_{12} &= \sum_{m=1}^{\infty}\left(\int_{x_0-\delta}^{x_0}|g^m(s)-g^m(x_0)|\,|H_{\gamma,m}(s-x)|\,ds\right),\\
\sigma_{13} &= \sum_{m=1}^{\infty}\left(\int_{x_0}^{x_0+\delta}|g^m(s)-g^m(x_0)|\,|H_{\gamma,m}(s-x)|\,ds\right),\\
\sigma_{14} &= \sum_{m=1}^{\infty}\left(\int_{x_0+\delta}^{b}|g^m(s)-g^m(x_0)|\,|H_{\gamma,m}(s-x)|\,ds\right)
\end{aligned}$$

diyelim ve daha sonra her bir integrali ayrı ayrı hesaplayalım.

σ_{11} integrali için, A_2 sınıfının (d) şartı kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
\sigma_{11} &= \sum_{m=1}^{\infty}\left(\int_{a}^{x_0-\delta}|g^m(s)-g^m(x_0)|\,|H_{\gamma,m}(s-x)|\,ds\right)\\
&\leq \sum_{m=1}^{\infty}\left[\sup_{|u|>\frac{\delta}{2}}|H_{\gamma,m}(u)|\right]\int_{a}^{x_0-\delta}|g^m(s)-g^m(x_0)|\,ds
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Bu son eşitsizlikte, mutlak değer fonksiyonunun ve supremumun özelliği kullanılır, ardından ifade büyütülürse

$$\sigma_{11}\leq\sum_{m=1}^{\infty}\left[\sup_{|u|>\frac{\delta}{2}}|H_{\gamma,m}(u)|\right]\sup_{m\in\mathbb{N}}\left\{\int_{a}^{x_0-\delta}|g^m(s)|\,ds+\int_{a}^{x_0-\delta}|g^m(x_0)|\,ds\right\}$$

eşitsizliği bulunur. Son olarak, hipotezden

$$\sup_{m\in\mathbb{N}}|g^m(x_0)|\leq\sup_{m\in\mathbb{N}}(mA^m)<\infty$$

olduğu dikkate alınırsa,

$$\begin{aligned}
\sigma_{11} &\leq \sum_{m=1}^{\infty}\left[\sup_{|u|>\frac{\delta}{2}}|H_{\gamma,m}(u)|\right]\left\{\sup_{m\in\mathbb{N}}\|g^m\|_{L_1(a,b)}+(b-a)\sup_{m\in\mathbb{N}}(mA^m)\right\}\\
&\leq \sum_{m=1}^{\infty}\left[\sup_{|u|>\frac{\delta}{2}}|H_{\gamma,m}(u)|\right]\left\{(b-a)\sup_{m\in\mathbb{N}}(mA^m)+(b-a)\sup_{m\in\mathbb{N}}(mA^m)\right\}\\
&= 2(b-a)\left(\sum_{m=1}^{\infty}\left[\sup_{|u|>\frac{\delta}{2}}|H_{\gamma,m}(u)|\right]\left\{\sup_{m\in\mathbb{N}}(mA^m)\right\}\right)
\end{aligned}$$

eşitsizliğinin sağlandığı görülür.

Şimdi, benzer şekilde σ_{14} integralini inceleyelim.

$$\sigma_{14} = \sum_{m=1}^{\infty} \left(\int_{x_0+\delta}^{b} |g^m(s) - g^m(x_0)| \, |H_{\gamma,m}(s-x)| \, ds \right)$$

ifadesine A_2 sınıfının (d) şartı uygulanırsa,

$$\sigma_{14} \leq \sum_{m=1}^{\infty} \left[\sup_{|u|>\frac{\delta}{2}} |H_{\gamma,m}(u)| \right] \int_{x_0+\delta}^{b} |g^m(s) - g^m(x_0)| \, ds$$

eşitsizliği elde edilir. Bu son eşitsizlikte, mutlak değer fonksiyonunun ve supremumun özelliği kullanılır, ardından ifade büyütülürse

$$\sigma_{14} \leq \sum_{m=1}^{\infty} \left[\sup_{|u|>\frac{\delta}{2}} |H_{\gamma,m}(u)| \right] \sup_{m\in\mathbb{N}} \left\{ \int_{x_0+\delta}^{b} |g^m(s)| \, ds + \int_{x_0+\delta}^{b} |g^m(x_0)| \, ds \right\}$$

eşitsizliği bulunur. Daha sonra, hipotezden

$$\sup_{m\in\mathbb{N}} |g^m(x_0)| \leq \sup_{m\in\mathbb{N}} (mA^m) < \infty$$

olduğu göz önüne alınırsa,

$$\begin{aligned}
\sigma_{14} &\leq \sum_{m=1}^{\infty} \left[\sup_{|u|>\frac{\delta}{2}} |H_{\gamma,m}(u)| \right] \left\{ \sup_{m\in\mathbb{N}} \|g^m\|_{L_1(a,b)} + (b-a) \sup_{m\in\mathbb{N}} (mA^m) \right\} \\
&\leq \sum_{m=1}^{\infty} \left[\sup_{|u|>\frac{\delta}{2}} |H_{\gamma,m}(u)| \right] \left\{ (b-a) \sup_{m\in\mathbb{N}} (mA^m) + (b-a) \sup_{m\in\mathbb{N}} (mA^m) \right\} \\
&= 2(b-a) \left(\sum_{m=1}^{\infty} \left[\sup_{|u|>\frac{\delta}{2}} |H_{\gamma,m}(u)| \right] \left\{ \sup_{m\in\mathbb{N}} (mA^m) \right\} \right)
\end{aligned}$$

olduğu görülür. Sonuç olarak, A_2 sınıfının (b) şartı olan her $\xi > 0$ noktası için,

$$\lim_{\gamma\to\gamma_0} \left[\sum_{m=1}^{\infty} \left[\sup_{|s|>\xi} |H_{\gamma,m}(s)| \right] \right] = 0$$

eşitliğinden ve teoremde verilen hipotezden dolayı $(x,\gamma) \to (x_0,\gamma_0)$ iken σ_{11} ve σ_{14} integrallerinin *sıfıra* yaklaştığı, yani

$$\lim_{(x,\gamma)\to(x_0,\gamma_0)} (\sigma_{11}) = 0 \qquad \text{ve} \qquad \lim_{(x,\gamma)\to(x_0,\gamma_0)} (\sigma_{14}) = 0$$

olduğu görülür.

Şimdi, σ_{12} ve σ_{13} integrallerini hesaplayalım.

Öncelikle, Lemma 2.1 de verilen eşitlik ve (a,b) aralığında g fonksiyonunun sınırlılığı kullanılırsa, $m^p A^{(m-1)p} > 0$ sonlu reel sayılar olmak üzere $m = 1, 2, ...$ için

$$\begin{aligned} |g^m(s) - g^m(x_0)|^p &= \left|(g(s) - g(x_0)) \left(g(s)^{m-1} + g(s)^{m-2} g(x_0) + ... + g(x_0)^{m-1}\right)\right|^p \\ &\leq m^p A^{(m-1)p} \left|g(s) - g(x_0)\right|^p \end{aligned} \tag{3.20}$$

eşitsizliği yazılabilir. Burada, $p = 1$ durumunu incelediğimizden dolayı, (3.20) eşitsizliği

$$|g^m(s) - g^m(x_0)| \leq m A^{(m-1)} \left|g(s) - g(x_0)\right|$$

biçiminde ifade edilebilir. O halde, bu son eşitsizlik yardımıyla, σ_{12} ve σ_{13} integralleri için

$$\begin{aligned} \sigma_{12} &= \sum_{m=1}^{\infty} \left(\int_{x_0-\delta}^{x_0} |g^m(s) - g^m(x_0)| \left|H_{\gamma,m}(s-x)\right| ds \right) \\ &\leq \sum_{m=1}^{\infty} m A^{(m-1)} \left(\int_{x_0-\delta}^{x_0} |g(s) - g(x_0)| \left|H_{\gamma,m}(s-x)\right| ds \right) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \sigma_{13} &= \sum_{m=1}^{\infty} \left(\int_{x_0}^{x_0+\delta} |g^m(s) - g^m(x_0)| \left|H_{\gamma,m}(s-x)\right| ds \right) \\ &\leq \sum_{m=1}^{\infty} m A^{(m-1)} \left(\int_{x_0}^{x_0+\delta} |g(s) - g(x_0)| \left|H_{\gamma,m}(s-x)\right| ds \right) \end{aligned}$$

eşitsizlikleri yazılabilir. Şimdi, bulduğumuz bu eşitsizlikteki son toplamlara sırasıyla,

$$\sigma_{121} = \sum_{m=1}^{\infty} m A^{(m-1)} \left(\int_{x_0-\delta}^{x_0} |g(s) - g(x_0)| \left|H_{\gamma,m}(s-x)\right| ds \right),$$

$$\sigma_{131} = \sum_{m=1}^{\infty} m A^{(m-1)} \left(\int_{x_0}^{x_0+\delta} |g(s) - g(x_0)| \left|H_{\gamma,m}(s-x)\right| ds \right)$$

diyelim ve ardından σ_{121} ve σ_{131} integrallerini $\mu-$genelleştirilmiş Lebesgue noktası tanımı yardımıyla hesaplayalım.

$x_0 \in (a,b)$ noktası, $g \in L_1(a,b)$ fonksiyonunun $\mu-$genelleştirilmiş Lebesgue noktası olduğundan tanımı gereği her $\varepsilon > 0$ için en az bir $0 < \delta < \delta_0$ var öyle ki tüm

$0 < \widetilde{h} \leq \delta < \delta_0$ için (3.1) ve (3.2) eşitsizlikleri ile (3.6) ve (3.7) eşitliklerinin sağlandığını biliyoruz. O halde

$$|\sigma_{121}| = \left| \sum_{m=1}^{\infty} mA^{(m-1)} \left(\int_{x_0-\delta}^{x_0} |g(s) - g(x_0)| \, |H_{\gamma,m}(s-x)| \, ds \right) \right|$$

eşitsizliğinde $g \in L_1(a,b)$ olmak üzere $H_{\gamma,m}(s)$ çekirdek fonksiyonu integrallenebilen, monoton bir fonksiyon ve (3.6) ile tanımlanan $F(s)$ fonksiyonu integrallenebilir bir fonksiyonun belirsiz integrali olduğundan Teorem 2.5 gereği, $F(s)$ fonksiyonuna göre Stieltjes integrallenebilirdir. Bundan dolayı (3.6) ile tanımlanan $F(s)$ fonksiyonunun diferansiyeli kullanılırsa,

$$|\sigma_{121}| = \left| \sum_{m=1}^{\infty} mA^{(m-1)} \left[(\mathbf{S}) \int_{x_0-\delta}^{x_0} |H_{\gamma,m}(s-x)| \, d\left[-F(s)\right] \right] \right|$$

eşitsizliği elde edilir. Bu eşitsizliğin sağ tarafında bulunan Stieltjes integraline kısmi integrasyon uygulanırsa

$$\begin{aligned} |\sigma_{121}| \leq & \sum_{m=1}^{\infty} mA^{(m-1)} \left\{ \left[- |H_{\gamma,m}(s-x)| \, |F(s)| \right] \Big|_{x_0-\delta}^{x_0} \right. \\ & \left. + \int_{x_0-\delta}^{x_0} |F(s)| \left(\frac{\partial}{\partial s} |H_{\gamma,m}(s-x)| \right) ds \right\} \\ = & \sum_{m=1}^{\infty} mA^{(m-1)} \left\{ - |H_{\gamma,m}(x_0-x)| \, |F(x_0)| + |H_{\gamma,m}(x_0-\delta-x)| \, |F(x_0-\delta)| \right. \\ & \left. + \int_{x_0-\delta}^{x_0} |F(s)| \left(\frac{\partial}{\partial s} |H_{\gamma,m}(s-x)| \right) ds \right\} \end{aligned} \qquad (3.21)$$

eşitsizliği gerçeklenir. Daha sonra, (3.8) eşitsizliğinde $s = x_0$ alınır ve $\mu(0) = 0$ olduğu dikkate alınırsa, $|F(x_0)| = 0$ bulunur. Bu ifade, (3.21) eşitsizliğinde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} |\sigma_{121}| \leq & \sum_{m=1}^{\infty} mA^{(m-1)} \left\{ |H_{\gamma,m}(x_0-\delta-x)| \, |F(x_0-\delta)| \right. \\ & \left. + \int_{x_0-\delta}^{x_0} |F(s)| \left(\frac{\partial}{\partial s} |H_{\gamma,m}(s-x)| \right) ds \right\} \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Ayrıca, (3.8) eşitsizliğinde $s = x_0 - \delta$ alınırsa, $|F(x_0-\delta)| \leq \varepsilon\mu(\delta)$ eşitsizliğinin sağladığı görülür. Bulunan bu ifade son eşitsizlikte yerine yazılırsa, sonuç olarak

$$
\begin{aligned}
|\sigma_{121}| \;\leq\; & \varepsilon \sum_{m=1}^{\infty} m A^{(m-1)} \left\{ \left| H_{\gamma,m}(x_0-\delta-x) \right| \mu(\delta) \right. \\
& \left. + \int\limits_{x_0-\delta}^{x_0} \mu(x_0-s) \left(\frac{\partial}{\partial s} \left| H_{\gamma,m}(s-x) \right| \right) ds \right\}
\end{aligned} \tag{3.22}
$$

eşitsizliği bulunur. Şimdi,

$$
V_m(s) = \begin{cases} \bigvee\limits_{x_0-x-\delta}^{s} H_{\gamma,m}(t) & , \quad x_0-x-\delta < s \leq x_0-x \\ \quad 0 & , \quad s = x_0-x-\delta \end{cases} \tag{3.23}
$$

biçiminde salınım fonksiyonu tanımlayalım.

(3.22) eşitsizliği, (3.23) ile tanımladığımız salınım fonksiyonu tanımı yardımıyla

$$
\begin{aligned}
|\sigma_{121}| \;\leq\; & \varepsilon \sum_{m=1}^{\infty} m A^{(m-1)} \left\{ \left| H_{\gamma,m}(x_0-\delta-x) \right| \mu(\delta) \right. \\
& \left. + \int\limits_{x_0-x-\delta}^{x_0-x} \mu(x_0-x-s) dV_m(s) \right\}
\end{aligned}
$$

şeklinde yazılabilir. Daha sonra, bu eşitsizliğin sağ tarafındaki integrale kısmi integrasyon uygulanırsa,

$$
\begin{aligned}
|\sigma_{121}| \;\leq\; & \varepsilon \sum_{m=1}^{\infty} m A^{(m-1)} \left\{ \left| H_{\gamma,m}(x_0-\delta-x) \right| \mu(\delta) \right. \\
& \left. + V_m(s)\mu(x_0-x-s)\Big|_{x_0-x-\delta}^{x_0-x} + \int\limits_{x_0-x-\delta}^{x_0-x} V_m(s) \left\{ \mu(x_0-x-s) \right\}_s' ds \right)
\end{aligned}
$$

eşitsizliğinin sağlandığı görülür. Burada, integral sınırları yerine yazılırsa, σ_{121} için

$$
\begin{aligned}
|\sigma_{121}| \;\leq\; & \varepsilon \sum_{m=1}^{\infty} m A^{(m-1)} \left\{ \left| H_{\gamma,m}(x_0-\delta-x) \right| \mu(\delta) + V_m(x_0-x)\mu(x_0-x-x_0+x) \right. \\
& \left. - V_m(x_0-\delta-x)\mu(x_0-x-x_0+x+\delta) + \int\limits_{x_0-x-\delta}^{x_0-x} V_m(s) \left\{ \mu(x_0-x-s) \right\}_s' ds \right\} \\
= \; & \varepsilon \sum_{m=1}^{\infty} m A^{(m-1)} \left\{ \left| H_{\gamma,m}(x_0-\delta-x) \right| \mu(\delta) + V_m(x_0-x)\mu(0) \right. \\
& \left. - V_m(x_0-\delta-x)\mu(\delta) + \int\limits_{x_0-x-\delta}^{x_0-x} V_m(s) \left\{ \mu(x_0-x-s) \right\}_s' ds \right\}
\end{aligned}
$$

eşitsizliği bulunur. (3.23) ile tanımlanan salınım fonksiyonu tanımından $V_m(x_0-\delta-x)=0$ gerçeklendiği görülür. Ayrıca, $\mu(0)=0$ olduğu dikkate alınıp, gerekli sadeleştirmeler yapılırsa

$$\begin{aligned}|\sigma_{121}| \;\le\;& \varepsilon\sum_{m=1}^{\infty} mA^{(m-1)}\left\{|H_{\gamma,m}(x_0-\delta-x)|\,\mu(\delta)\right.\\ &\left.+\int\limits_{x_0-x-\delta}^{x_0-x} V_m(s)\left\{\mu(x_0-x-s)\right\}_s' ds\right\}\end{aligned}$$

eşitsizliği sağlanır. Şimdi, integral sınırını aşağıdaki şekilde iki kısma ayıralım.

$$\begin{aligned}|\sigma_{121}| \;\le\;& \varepsilon\sum_{m=1}^{\infty} mA^{(m-1)}\left\{|H_{\gamma,m}(x_0-\delta-x)|\,\mu(\delta)\right.\\ &\left.+\left(\int\limits_{x_0-x-\delta}^{0}+\int\limits_{0}^{x_0-x}\right) V_m(s)\left\{\mu(x_0-x-s)\right\}_s' ds\right\}\end{aligned}$$

olsun. (3.23) ile tanımlanan V_m salınım fonksiyonu tanımı yardımıyla

$$\begin{aligned}|\sigma_{121}| \;\le\;& \varepsilon\sum_{m=1}^{\infty} mA^{(m-1)}\left\{|H_{\gamma,m}(x_0-\delta-x)|\,\mu(\delta)\right.\\ &+\int\limits_{x_0-x-\delta}^{0}\left(\bigvee_{x_0-x-\delta}^{s}|H_{\gamma,m}(t)|\right)\left\{\mu(x_0-x-s)\right\}_s' ds\\ &\left.+\int\limits_{0}^{x_0-x}\left(\bigvee_{x_0-x-\delta}^{s}|H_{\gamma,m}(t)|\right)\left\{\mu(x_0-x-s)\right\}_s' ds\right\}\end{aligned}$$

eşitsizliği yazılabilir. Bu son eşitsizliğin sağ tarafında bulunan ilk integralin integrasyon bölgesinde yani $x_0-x-\delta\le s\le 0$ aralığındaki her s için $H_{\gamma,m}(s)$ çekirdek fonksiyonu azalmayan iken, ikinci integralin integrasyon bölgesinde yani $0\le s\le x_0-x$ aralığındaki her s için ise $H_{\gamma,m}(s)$ çekirdek fonksiyonu, $s=0$ durumunda $(x_0-x-\delta,0)$ aralığında azalmayan, $s=x_0-x$ durumunda da $(x_0-x-\delta,0)$ aralığında azalmayan, $(0,x_0-x)$ aralığında artmayan bir fonksiyon olduğu dikkate alınırsa,

$$
\begin{aligned}
|\sigma_{121}| \;\leq\; & \varepsilon\sum_{m=1}^{\infty} mA^{(m-1)}\left\{ |H_{\gamma,m}(x_0-\delta-x)|\,\mu(\delta) \right. \\
& + \int\limits_{x_0-x-\delta}^{0}\left(\bigvee_{x_0-x-\delta}^{s}|H_{\gamma,m}(t)|\right)\{\mu(x_0-x-s)\}_s^{'}\,ds \\
& \left. + \int\limits_{0}^{x_0-x}\left(\bigvee_{x_0-x-\delta}^{0}|H_{\gamma,m}(t)| + \bigvee_{0}^{s}|H_{\gamma,m}(t)|\right)\{\mu(x_0-x-s)\}_s^{'}\,ds \right\}
\end{aligned}
$$

eşitsizliğinin sağlandığı görülür. Salınım fonksiyonun özelliği kullanılırsa

$$
\begin{aligned}
|\sigma_{121}| \;\leq\; & \varepsilon\sum_{m=1}^{\infty} mA^{(m-1)}\left\{ |H_{\gamma,m}(x_0-\delta-x)|\,\mu(\delta) \right. \\
& + \int\limits_{x_0-x-\delta}^{0}\left(|H_{\gamma,m}(s)| - |H_{\gamma,m}(x_0-x-\delta)|\right)\{\mu(x_0-x-s)\}_s^{'}\,ds \\
& + \int\limits_{0}^{x_0-x}\left(|H_{\gamma,m}(0)| - |H_{\gamma,m}(x_0-x-\delta)|\right. \\
& \left. \left. + |H_{\gamma,m}(0)| - |H_{\gamma,m}(s)|\right)\{\mu(x_0-x-s)\}_s^{'}\,ds \right\}
\end{aligned}
$$

eşitsizliği sağlanır. Gerekli düzenlemeler yapılır ve ifade büyütülürse, sonuç olarak

$$
\begin{aligned}
|\sigma_{121}| \;\leq\; & \varepsilon\sum_{m=1}^{\infty} mA^{(m-1)}\left\{ |H_{\gamma,m}(x_0-\delta-x)|\,\mu(\delta) + 2\,|H_{\gamma,m}(0)|\,\mu(|x_0-x|) \right. \\
& \left. - |H_{\gamma,m}(x_0-x-\delta)|\,\mu(\delta) + \int\limits_{x_0-x-\delta}^{x_0-x}|H_{\gamma,m}(s)|\,\{\mu(x_0-x-s)\}_s^{'}\,ds \right\} \\
= \;& \varepsilon\sum_{m=1}^{\infty} mA^{(m-1)}\left\{ 2\,|H_{\gamma,m}(0)|\,\mu(|x_0-x|) \right. \\
& \left. + \int\limits_{x_0-\delta}^{x_0}|H_{\gamma,m}(s-x)|\,\{\mu(x_0-s)\}_s^{'}\,ds \right\} \qquad (3.24)
\end{aligned}
$$

eşitsizliği bulunur.

Şimdi, benzer şekilde (3.7) ile tanımlanan $G(s)$ fonksiyonu yardımıyla σ_{131} integralini hesaplayalım.

$$
|\sigma_{131}| = \left|\sum_{m=1}^{\infty} mA^{(m-1)}\left(\int\limits_{x_0}^{x_0+\delta}|g(s)-g(x_0)|\,|H_{\gamma,m}(s-x)|\,ds\right)\right|
$$

eşitliği için $g \in L_1(a,b)$ olmak üzere $H_{\gamma,m}(s)$ çekirdek fonksiyonu integrallebilen, monoton bir fonksiyon ve (3.7) ile tanımlanan $G(s)$ fonksiyonu integrallenebilir bir fonksiyonun belirsiz integrali olduğundan Teorem 2.5 gereği, $G(s)$ fonksiyonuna göre Stieltjes integrallenebilirdir. Bundan dolayı (3.7) ile tanımlanan $G(s)$ fonksiyonunun diferansiyeli kullanılırsa,

$$|\sigma_{131}| \leq \sum_{m=1}^{\infty} mA^{(m-1)} \left[(\mathbf{S}) \int_{x_0}^{x_0+\delta} |H_{\gamma,m}(s-x)| \, |dG(s)| \right]$$

eşitsizliği bulunur. Bu son eşitsizliğin, sağ tarafında bulunan Stieltjes integraline kısmi integrasyon uygulanırsa,

$$\begin{aligned} |\sigma_{131}| &\leq \sum_{m=1}^{\infty} mA^{(m-1)} \left\{ |H_{\gamma,m}(s-x)| \, |G(s)| \, \Big|_{x_0}^{x_0+\delta} \right. \\ &\quad \left. + \int_{x_0}^{x_0+\delta} |G(s)| \left(\frac{\partial}{\partial s} \left(- |H_{\gamma,m}(s-x)| \right) \right) ds \right\} \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} mA^{(m-1)} \left\{ |H_{\gamma,m}(x_0+\delta-x)| \, |G(x_0+\delta)| - |H_{\gamma,m}(x_0-x)| \, |G(x_0)| \right. \\ &\quad \left. + \int_{x_0}^{x_0+\delta} |G(s)| \left(\frac{\partial}{\partial s} \left(- |H_{\gamma,m}(s-x)| \right) \right) ds \right\} \end{aligned}$$

eşitsizliği yazılabilir. (3.9) eşitsizliğinde $s = x_0$ alınır ve $\mu(0) = 0$ olduğu kullanılırsa, $|G(x_0)| = 0$ olduğu görülür ve bu ifade son eşitsizlikte yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} |\sigma_{131}| &\leq \sum_{m=1}^{\infty} mA^{(m-1)} \left\{ |H_{\gamma,m}(x_0+\delta-x)| \, |G(x_0+\delta)| \right. \\ &\quad \left. + \int_{x_0}^{x_0+\delta} |G(s)| \left(\frac{\partial}{\partial s} \left(- |H_{\gamma,m}(s-x)| \right) \right) ds \right\} \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Ayrıca, (3.9) eşitsizliğinde $s = x_0 + \delta$ alınırsa, $|G(x_0+\delta)| \leq \varepsilon\mu(\delta)$ eşitsizliğinin sağlandığı görülür. Bu ifade de yerine yazılırsa, sonuç olarak

$$\begin{aligned} |\sigma_{131}| &\leq \varepsilon \sum_{m=1}^{\infty} mA^{(m-1)} \left\{ |H_{\gamma,m}(x_0+\delta-x)| \, \mu(\delta) \right. \\ &\quad \left. + \int_{x_0}^{x_0+\delta} \mu(s-x_0) \left(\frac{\partial}{\partial s} \left(- |H_{\gamma,m}(s-x)| \right) \right) ds \right\} \end{aligned}$$

eşitsizliği bulunur. Şimdi,

$$\widetilde{V}_m(s) = \begin{cases} \bigvee\limits_{s}^{x_0-x+\delta} H_{\gamma,m}(t) & , \quad x_0 - x \leq s < x_0 - x + \delta \\ 0 & , \qquad s = x_0 - x + \delta \end{cases} \tag{3.25}$$

biçiminde yeni bir salınım fonksiyonu daha tanımlayalım. σ_{131} integrali, (3.25) ile tanımlanan salınım fonksiyonu tanımı yardımıyla

$$\begin{aligned} |\sigma_{131}| \leq \; & \varepsilon \sum_{m=1}^{\infty} m A^{(m-1)} \Bigg\{ |H_{\gamma,m}(x_0+\delta-x)| \, \mu(\delta) \\ & + \int\limits_{x_0-x}^{x_0-x+\delta} \mu(s-x_0+x) \left(\frac{\partial}{\partial s} \left(-\widetilde{V}_m(s) \right) \right) ds \Bigg\} \end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir. Bu son eşitsizliğin sağ tarafındaki integrale kısmi integrasyon uygulanırsa,

$$\begin{aligned} |\sigma_{131}| \leq \; & \varepsilon \sum_{m=1}^{\infty} m A^{(m-1)} \Bigg\{ |H_{\gamma,m}(x_0+\delta-x)| \, \mu(\delta) \\ & - \widetilde{V}_m(s) \mu(s-x_0+x) \Big|_{x_0-x}^{x_0-x+\delta} + \int\limits_{x_0-x}^{x_0-x+\delta} \widetilde{V}_m(s) \left\{ \mu(s-x_0+x) \right\}_s' ds \Bigg\} \end{aligned}$$

eşitsizliğinin sağlandığı görülür. İntegral sınırları yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} |\sigma_{131}| \leq \; & \varepsilon \sum_{m=1}^{\infty} m A^{(m-1)} \Bigg\{ |H_{\gamma,m}(x_0+\delta-x)| \, \mu(\delta) \\ & - \widetilde{V}_m(x_0-x+\delta) \mu(x_0-x+\delta-x_0+x) \\ & + \widetilde{V}_m(x_0-x) \mu(x_0-x-x_0+x) \\ & + \int\limits_{x_0-x}^{x_0-x+\delta} \widetilde{V}_m(s) \left\{ \mu(s-x_0+x) \right\}_s' ds \Bigg\} \end{aligned}$$

eşitsizliği bulunur. (3.25) ile tanımlanan salınım fonksiyonu tanımından $\widetilde{V}_m(x_0 - x + \delta) = 0$ gerçeklendiği görülür. Ayrıca, $\mu(0) = 0$ olduğu dikkate alınıp, gerekli sadeleştirmeler yapılırsa, σ_{131} integrali için

$$\begin{aligned} |\sigma_{131}| \leq \; & \varepsilon \sum_{m=1}^{\infty} m A^{(m-1)} \Bigg\{ |H_{\gamma,m}(x_0+\delta-x)| \, \mu(\delta) \\ & + \int\limits_{x_0-x}^{x_0-x+\delta} \widetilde{V}_m(s) \left\{ \mu(s-x_0+x) \right\}_s' ds \Bigg\} \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Ardından, (3.25) ile tanımlanan salınım fonksiyonu tanımı kullanılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$
\begin{aligned}
|\sigma_{131}| &\leq \varepsilon \sum_{m=1}^{\infty} mA^{(m-1)} \Bigg\{ |H_{\gamma,m}(x_0+\delta-x)|\,\mu(\delta) \\
&\quad + \int_{x_0-x}^{x_0-x+\delta} \left[\bigvee_{s}^{x_0-x+\delta} |H_{\gamma,m}(t)| \right] \{\mu(s-x_0+x)\}_s^{'}\, ds \Bigg\} \\
&= \varepsilon \sum_{m=1}^{\infty} mA^{(m-1)} \Bigg\{ |H_{\gamma,m}(x_0+\delta-x)|\,\mu(\delta) \\
&\quad + \int_{x_0}^{x_0+\delta} \left[\bigvee_{s}^{x_0+\delta} |H_{\gamma,m}(t-x)| \right] \{\mu(s-x_0)\}_s^{'}\, ds \Bigg\}
\end{aligned}
$$

eşitsizliğinin sağladığı görülür. $x_0 \leq s \leq x_0+\delta$ aralığındaki tüm s ler için (3.25) ile tanımlanan salınım fonksiyonunun tanımı dikkate alınırsa,

$$
\begin{aligned}
|\sigma_{131}| &\leq \varepsilon \sum_{m=1}^{\infty} mA^{(m-1)} \Bigg\{ |H_{\gamma,m}(x_0+\delta-x)|\,\mu(\delta) \\
&\quad + \int_{x_0}^{x_0+\delta} \left[|H_{\gamma,m}(s-x)| - |H_{\gamma,m}(x_0+\delta-x)| \right] \{\mu(s-x_0)\}_s^{'}\, ds \Bigg\} \\
&= \varepsilon \sum_{m=1}^{\infty} mA^{(m-1)} \Bigg\{ |H_{\gamma,m}(x_0+\delta-x)|\,\mu(\delta) - |H_{\gamma,m}(x_0+\delta-x)|\,\mu(\delta) \\
&\quad + \int_{x_0}^{x_0+\delta} |H_{\gamma,m}(s-x)|\, \{\mu(s-x_0)\}_s^{'}\, ds \Bigg\} \\
&= \varepsilon \sum_{m=1}^{\infty} mA^{(m-1)} \int_{x_0}^{x_0+\delta} |H_{\gamma,m}(s-x)|\, \{\mu(s-x_0)\}_s^{'}\, ds \qquad (3.26)
\end{aligned}
$$

eşitsizliği yazılabilir. Sonuç olarak, σ_{121} ve σ_{131} integralleri için bulunan (3.24) ve (3.26) eşitsizliklerini birleştirirsek

$$
\begin{aligned}
|\sigma_{121}| + |\sigma_{131}| &\leq \varepsilon \sup_{m\in\mathbb{N}} \left(mA^{(m-1)} \right) \sum_{m=1}^{\infty} \Bigg\{ \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} |H_{\gamma,m}(s-x)| \left| \{\mu(|x_0-s|)\}_s^{'} \right| ds \\
&\quad + 2\,|H_{\gamma,m}(0)|\,\mu(|x_0-x|) \}
\end{aligned}
$$

eşitsizliği elde edilir. Bu eşitsizliğin sağ tarafındaki ifadenin hipotez gereği sınırlı olduğu göz önüne alınırsa istenilen elde edilir. Yani, $p=1$ durumunda $g \in L_1(a,b)$

için

$$\lim_{(x,\gamma)\to(x_0,\gamma_0)} \Psi_\gamma(g;x) = \sum_{m=1}^{\infty} I_m g^m(x_0)$$

eşitliğinin sağladığı görülür ve ispat tamamlanır.

Şimdi, aynı teoremin $1 < p < \infty$ için $g \in L_p(a,b)$ durumunda yaklaşımını ispatlayalım. $x_0 \in (a,b)$ noktası, $1 < p < \infty$ için $g \in L_p(a,b)$ fonksiyonunun $\mu-$genelleştirilmiş Lebesgue noktası olduğundan her $\varepsilon > 0$ için en az bir $0 < \delta < \delta_0$ var öyle ki tüm $0 < \widetilde{h} \leq \delta < \delta_0$ için

$$\int_{x_0-\widetilde{h}}^{x_0} |g(s) - g(x_0)|^p \, ds \leq \varepsilon^p \mu\left(\widetilde{h}\right) \tag{3.27}$$

ve

$$\int_{x_0}^{x_0+\widetilde{h}} |g(s) - g(x_0)|^p \, ds \leq \varepsilon^p \mu\left(\widetilde{h}\right) \tag{3.28}$$

eşitsizlikleri sağlanır. $p = 1$ durumuna benzer şekilde (3.3) ile verilen g_1^m fonksiyonu tanımı yardımıyla $\sigma_\gamma = \left|\Psi_\gamma(g;x) - \sum_{m=1}^{\infty} I_m g^m(x_0)\right|$ farkına gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned}
\sigma_\gamma &= \left|\Psi_\gamma(g;x) - \sum_{m=1}^{\infty} I_m g^m(x_0)\right| \\
&\leq \sum_{m=1}^{\infty} \left(\int_a^b |g^m(s) - g^m(x_0)| \, |H_{\gamma,m}(s-x)| \, ds \right) \\
&\quad + \sum_{m=1}^{\infty} \left(\int_{\mathbb{R}\ \setminus (a,b)} |g^m(x_0)| \, |H_{\gamma,m}(s-x)| \, ds \right) \\
&\quad + \sum_{m=1}^{\infty} |g^m(x_0)| \left| \int_{\mathbb{R}} H_{\gamma,m}(s-x) ds - I_m \right|
\end{aligned}$$

eşitsizliğinin sağladığı görülür. Ardından, Lemma 2.2 dikkate alınırsa σ_γ ifadesi için

$$\begin{aligned}\sigma_\gamma^p &\leq 2^p \left(\sum_{m=1}^{\infty} \int_a^b |g^m(s) - g^m(x_0)| \, |H_{\gamma,m}(s-x)| \, ds \right. \\ &\left. + \sum_{m=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}\setminus(a,b)} |g^m(x_0)| \, |H_{\gamma,m}(s-x)| \, ds \right)^p \\ &+ 2^p \left(\sum_{m=1}^{\infty} |g^m(x_0)| \left| \int_{-\infty}^{\infty} H_{\gamma,m}(s-x) ds - I_m \right| \right)^p\end{aligned}$$

eşitsizliği yazılabilir. Bulunan bu eşitsizliğe bir kez daha Lemma 2.2 uygulanırsa

$$\begin{aligned}\sigma_\gamma^p &\leq 2^{2p} \left(\sum_{m=1}^{\infty} \left(\int_a^b |g^m(s) - g^m(x_0)| \, |H_{\gamma,m}(s-x)| \, ds \right) \right)^p \\ &+ 2^{2p} \left(\sum_{m=1}^{\infty} |g^m(x_0)| \int_{\mathbb{R}\setminus(a,b)} |H_{\gamma,m}(s-x)| \, ds \right)^p \\ &+ 2^p \left(\sum_{m=1}^{\infty} |g^m(x_0)| \left| \int_{-\infty}^{\infty} H_{\gamma,m}(s-x) ds - I_m \right| \right)^p\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Bu son eşitsizliğin sağ tarafındaki ifadelere sırasıyla

$$\begin{aligned}\nu_1 &= \left(\sum_{m=1}^{\infty} \left(\int_a^b |g^m(s) - g^m(x_0)| \, |H_{\gamma,m}(s-x)| \, ds \right) \right)^p, \\ \nu_2 &= \left(\sum_{m=1}^{\infty} |g^m(x_0)| \int_{\mathbb{R}\setminus(a,b)} |H_{\gamma,m}(s-x)| \, ds \right)^p\end{aligned}$$

ve

$$\nu_3 = \left(\sum_{m=1}^{\infty} |g^m(x_0)| \left| \int_{\mathbb{R}} H_{\gamma,m}(s-x) ds - I_m \right| \right)^p$$

diyelim ve daha sonra da ν_1, ν_2 ve ν_3 integrallerini hesaplayalım.

Öncelikle, ν_2 ve ν_3 integrallerini inceleyelim. A_2 sınıfının (c) şartından dolayı

$$\begin{aligned}\lim_{(x,\gamma)\to(x_0,\gamma_0)}(\nu_2) &= \lim_{(x,\gamma)\to(x_0,\gamma_0)}\left(\sum_{m=1}^{\infty}|g^m(x_0)|\int\limits_{\mathbb{R}\setminus(a,b)}|H_{\gamma,m}(s-x)|\,ds\right)^p \\ &\leq \left(\lim_{(x,\gamma)\to(x_0,\gamma_0)}\sum_{m=1}^{\infty}\left[\sup_{m\in\mathbb{N}}(mA^m)\right]\left(\int\limits_{\mathbb{R}\setminus(a,b)}|H_{\gamma,m}(s-x)|\,ds\right)\right)^p \\ &= 0\end{aligned}$$

olduğu görülür ve A_2 sınıfının (a) şartından ise

$$\begin{aligned}\lim_{(x,\gamma)\to(x_0,\gamma_0)}(\nu_3) &= \lim_{(x,\gamma)\to(x_0,\gamma_0)}\left(\sum_{m=1}^{\infty}|g^m(x_0)|\left|\int_{-\infty}^{\infty}H_{\gamma,m}(s-x)ds-I_m\right|\right)^p \\ &\leq \left(\lim_{(x,\gamma)\to(x_0,\gamma_0)}\sum_{m=1}^{\infty}\left[\sup_{m\in\mathbb{N}}(mA^m)\right]\left|\int_{-\infty}^{\infty}H_{\gamma,m}(s-x)ds-I_m\right|\right)^p \\ &= 0\end{aligned}$$

elde edilir. Sonuç olarak, ν_2 ve ν_3 integralleri için $(x,\gamma)\to(x_0,\gamma_0)$ iken $(\nu_2)\to 0$ ve $(\nu_3)\to 0$ sağlanır.

Şimdi, ν_1 integralini ele alalım. ν_1 integralinin $(x,\gamma)\to(x_0,\gamma_0)$ iken *sıfıra* yaklaştığını gösterelim.

$$\nu_1 = \left(\sum_{m=1}^{\infty}\left(\int_a^b |g^m(s)-g^m(x_0)|\,|H_{\gamma,m}(s-x)|\,ds\right)\right)^p$$

eşitliğindeki integrale Teorem 2.1 ile verilen Hölder eşitsizliği uygulanırsa

$$\nu_1 \leq \left(\sum_{m=1}^{\infty}\left(\int_a^b |g^m(s)-g^m(x_0)|^p\,|H_{\gamma,m}(s-x)|\,ds\right)^{\frac{1}{p}}\times\left(\int_{-\infty}^{\infty}|H_{\gamma,m}(s)|\,ds\right)^{\frac{1}{q}}\right)^p$$

eşitsizliği bulunur. Ardından, bu son eşitsizlikteki sonsuz toplama Teorem 2.2 ile verilen Hölder eşitsizliği uygulanırsa

$$\begin{aligned}\nu_1 &\leq \left(\left(\sum_{m=1}^{\infty}\int_a^b |g^m(s)-g^m(x_0)|^p\,|H_{\gamma,m}(s-x)|\,ds\right)^{\frac{1}{p}}\times\left(\sum_{m=1}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|H_{\gamma,m}(s)|\,ds\right)^{\frac{1}{q}}\right)^p \\ &= \left(\sum_{m=1}^{\infty}\int_a^b |g^m(s)-g^m(x_0)|^p\,|H_{\gamma,m}(s-x)|\,ds\right)\times\left(\sum_{m=1}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|H_{\gamma,m}(s)|\,ds\right)^{\frac{p}{q}}\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir ve bu eşitsizlikteki ilk toplama

$$\nu_{11} = \sum_{m=1}^{\infty} \int_a^b |g^m(s) - g^m(x_0)|^p \, |H_{\gamma,m}(s-x)| \, ds$$

diyelim. Burada, $\sum_{m=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |H_{\gamma,m}(s)| \, ds$ ifadesi A_2 sınıfının (a) şartından dolayı sonludur ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ sağlanır. Şimdi, δ reel sayısı olmak üzere $0 < \delta < \delta_0$ için ν_{11} integralini aşağıdaki gibi dört kısma ayıralım.

$$\begin{aligned} \nu_{11} \;=\; & \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \int_a^{x_0-\delta} |g^m(s) - g^m(x_0)|^p \, |H_{\gamma,m}(s-x)| \, ds \right. \\ & + \int_{x_0-\delta}^{x_0} |g^m(s) - g^m(x_0)|^p \, |H_{\gamma,m}(s-x)| \, ds \\ & + \int_{x_0}^{x_0+\delta} |g^m(s) - g^m(x_0)|^p \, |H_{\gamma,m}(s-x)| \, ds \\ & \left. + \int_{x_0+\delta}^{b} |g^m(s) - g^m(x_0)|^p \, |H_{\gamma,m}(s-x)| \, ds \right\} \end{aligned}$$

olsun ve sırasıyla bu integralleri

$$\begin{aligned} \nu_{111} &= \sum_{m=1}^{\infty} \left(\int_a^{x_0-\delta} |g^m(s) - g^m(x_0)|^p \, |H_{\gamma,m}(s-x)| \, ds \right), \\ \nu_{121} &= \sum_{m=1}^{\infty} \left(\int_{x_0-\delta}^{x_0} |g^m(s) - g^m(x_0)|^p \, |H_{\gamma,m}(s-x)| \, ds \right), \\ \nu_{131} &= \sum_{m=1}^{\infty} \left(\int_{x_0}^{x_0+\delta} |g^m(s) - g^m(x_0)|^p \, |H_{\gamma,m}(s-x)| \, ds \right), \\ \nu_{141} &= \sum_{m=1}^{\infty} \left(\int_{x_0+\delta}^{b} |g^m(s) - g^m(x_0)|^p \, |H_{\gamma,m}(s-x)| \, ds \right) \end{aligned}$$

biçiminde ifade edelim. Daha sonra da ν_{111}, ν_{121}, ν_{131} ve ν_{141} integrallerini hesaplayalım.

Öncelikle, ν_{111} integralini inceleyelim. ν_{111} integrali için A_2 sınıfının (d) şartı kullanılır ve ifade büyütülürse,

$$\begin{aligned}\nu_{111} &= \sum_{m=1}^{\infty}\left(\int\limits_{a}^{x_0-\delta}|g^m(s)-g^m(x_0)|^p\,|H_{\gamma,m}(s-x)|\,ds\right)\\ &\leq \sum_{m=1}^{\infty}\left[\sup_{|u|>\frac{\delta}{2}}|H_{\gamma,m}(u)|\right]\int\limits_{a}^{x_0-\delta}|g^m(s)-g^m(x_0)|^p\,ds\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Bu son eşitsizlikte, önce Lemma 2.2 ve daha sonra supremumun özelliği kullanılıp ifade büyütülürse, ν_{111} integrali için

$$\nu_{111}\leq 2^p\sum_{m=1}^{\infty}\left[\sup_{|u|>\frac{\delta}{2}}|H_{\gamma,m}(u)|\right]\sup_{m\in\mathbb{N}}\left\{\int\limits_{a}^{x_0-\delta}|g^m(s)|^p\,ds+\int\limits_{a}^{x_0-\delta}|g^m(x_0)|^p\,ds\right\}$$

eşitsizliği bulunur. Son olarak, verilen teoremin hipotezinden

$$\sup_{m\in\mathbb{N}}|g^m(x_0)|\leq\sup_{m\in\mathbb{N}}(mA^m)<\infty$$

olduğu dikkate alınırsa,

$$\begin{aligned}\nu_{111} &\leq 2^p\sum_{m=1}^{\infty}\left[\sup_{|u|>\frac{\delta}{2}}|H_{\gamma,m}(u)|\right]\left\{\sup_{m\in\mathbb{N}}\|g^m\|_{L_p(a,b)}+(b-a)\sup_{m\in\mathbb{N}}(mA^m)\right\}\\ &\leq 2^p\sum_{m=1}^{\infty}\left[\sup_{|u|>\frac{\delta}{2}}|H_{\gamma,m}(u)|\right]\left\{(b-a)\sup_{m\in\mathbb{N}}(mA^m)+(b-a)\sup_{m\in\mathbb{N}}(mA^m)\right\}\\ &= 2^{p+1}(b-a)\left(\sum_{m=1}^{\infty}\left[\sup_{|u|>\frac{\delta}{2}}|H_{\gamma,m}(u)|\right]\left\{\sup_{m\in\mathbb{N}}(mA^m)\right\}\right)\end{aligned} \tag{3.29}$$

eşitsizliğinin sağlandığı görülür.

Şimdi, benzer şekilde ν_{141} integralini inceleyelim.

$$\nu_{141}=\sum_{m=1}^{\infty}\left(\int\limits_{x_0+\delta}^{b}|g^m(s)-g^m(x_0)|^p\,|H_{\gamma,m}(s-x)|\,ds\right)$$

ifadesine A_2 sınıfının (d) şartı uygulanır ve ifade büyütülürse,

$$\nu_{141}\leq\sum_{m=1}^{\infty}\left[\sup_{|u|>\frac{\delta}{2}}|H_{\gamma,m}(u)|\right]\int\limits_{x_0+\delta}^{b}|g^m(s)-g^m(x_0)|^p\,ds$$

eşitsizliği elde edilir. Bu son eşitsizlikte önce Lemma 2.2 ve daha sonra supremumun özelliği kullanılıp ifade büyütülürse, ν_{141} integrali için de

$$\begin{aligned}
\nu_{141} &\leq 2^p \sum_{m=1}^{\infty}\left[\sup_{|u|>\frac{\delta}{2}}|H_{\gamma,m}(u)|\right]\sup_{m\in\mathbb{N}}\left\{\int_{x_0+\delta}^{b}|g^m(s)|^p\,ds+\int_{x_0+\delta}^{b}|g^m(x_0)|^p\,ds\right\}\\
&\leq 2^p \sum_{m=1}^{\infty}\left[\sup_{|u|>\frac{\delta}{2}}|H_{\gamma,m}(u)|\right]\left\{\sup_{m\in\mathbb{N}}\|g^m\|_{L_p(a,b)}+(b-a)\sup_{m\in\mathbb{N}}(mA^m)\right\}\\
&\leq 2^{p+1}(b-a)\left(\sum_{m=1}^{\infty}\left[\sup_{|u|>\frac{\delta}{2}}|H_{\gamma,m}(u)|\right]\left\{\sup_{m\in\mathbb{N}}(mA^m)\right\}\right) \qquad (3.30)
\end{aligned}$$

eşitsizliği bulunur. Sonuç olarak, ν_{111} ve ν_{141} integralleri için bulunan (3.29) ve (3.30) eşitsizliklerinde A_2 sınıfının (b) şartı olan her $\xi > 0$ noktası için,

$$\lim_{\gamma\to\gamma_0}\left[\sum_{m=1}^{\infty}\left[\sup_{|s|>\xi}|H_{\gamma,m}(s)|\right]\right]=0$$

eşitliği ve f fonksiyonunun sınırlılığı dikkate alınırsa x noktası x_0 noktasına, γ noktasıda γ_0 noktasına yaklaşırken ν_{111} ve ν_{141} integrallerinin de *sıfıra* yaklaştığı görülür. Yani,

$$\lim_{(x,\gamma)\to(x_0,\gamma_0)}(\nu_{111})=0 \qquad \text{ve} \qquad \lim_{(x,\gamma)\to(x_0,\gamma_0)}(\nu_{141})=0$$

olduğu görülür.

Şimdi, ν_{121} ve ν_{131} integrallerini hesaplayalım. ν_{121} ve ν_{131} integralleri için öncelikle Lemma 2.1 göz önüne alınırsa,

$$\begin{aligned}
\nu_{121} &= \sum_{m=1}^{\infty}\left(\int_{x_0-\delta}^{x_0}|g^m(s)-g^m(x_0)|^p\,|H_{\gamma,m}(s-x)|\,ds\right)\\
&\leq \sum_{m=1}^{\infty}m^pA^{(m-1)p}\left(\int_{x_0-\delta}^{x_0}|g(s)-g(x_0)|^p\,|H_{\gamma,m}(s-x)|\,ds\right)
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\nu_{131} &= \sum_{m=1}^{\infty}\left(\int_{x_0}^{x_0+\delta}|g^m(s)-g^m(x_0)|^p\,|H_{\gamma,m}(s-x)|\,ds\right)\\
&\leq \sum_{m=1}^{\infty}m^pA^{(m-1)p}\left(\int_{x_0}^{x_0+\delta}|g(s)-g(x_0)|^p\,|H_{\gamma,m}(s-x)|\,ds\right)
\end{aligned}$$

eşitsizlikleri yazılabilir. Bu son iki eşitsizliğin sağ tarafındaki toplamlara sırasıyla

$$\nu_{1211} = \sum_{m=1}^{\infty} m^p A^{(m-1)p} \left(\int\limits_{x_0-\delta}^{x_0} |g(s) - g(x_0)|^p \, |H_{\gamma,m}(s-x)| \, ds \right)$$

ve

$$\nu_{1311} = \sum_{m=1}^{\infty} m^p A^{(m-1)p} \left(\int\limits_{x_0}^{x_0+\delta} |g(s) - g(x_0)|^p \, |H_{\gamma,m}(s-x)| \, ds \right)$$

diyelim. Ardından, ν_{1211} ve ν_{1311} integrallerini $\mu-$genelleştirilmiş Lebesgue noktası tanımı yardımıyla hesaplayalım.

(3.27) ve (3.28) eşitsizliklerin sağlandığını göz önüne alarak

$$\widetilde{F}(s) = \int\limits_{s}^{x_0} |g(z) - g(x_0)|^p \, dz \tag{3.31}$$

ve

$$\widetilde{G}(s) = \int\limits_{x_0}^{s} |g(z) - g(x_0)|^p \, dz \tag{3.32}$$

fonksiyonlarını tanımlayalım. Burada, $\delta > 0$ olmak üzere $x_0 - s \leq \delta$ iken

$$\left| \widetilde{F}(s) \right| \leq \varepsilon^p \mu(x_0 - s) \tag{3.33}$$

eşitsizliği ve $s - x_0 \leq \delta$ iken ise

$$\left| \widetilde{G}(s) \right| \leq \varepsilon^p \mu(s - x_0) \tag{3.34}$$

eşitsizliği sağlanır. O halde,

$$|\nu_{1211}| = \left| \sum_{m=1}^{\infty} m^p A^{(m-1)p} \left(\int\limits_{x_0-\delta}^{x_0} |g(s) - g(x_0)|^p \, |H_{\gamma,m}(s-x)| \, ds \right) \right|$$

eşitliği için $H_{\gamma,m}(s)$ çekirdek fonksiyonu integrallenebilen, monoton bir fonksiyon ve (3.31) ile tanımlanan $\widetilde{F}(s)$ fonksiyonu integrallenebilir bir fonksiyonun belirsiz integrali olduğundan Teorem 2.5 gereği, $\widetilde{F}(s)$ fonksiyonuna göre Stieltjes integrallenebilirdir. Bundan dolayı (3.31) ile tanımlanan $\widetilde{F}(s)$ fonksiyonunun diferansiyeli kullanılırsa,

$$|\nu_{1211}| \leq \sum_{m=1}^{\infty} m^p A^{(m-1)p} \left[-(\mathbf{S}) \int\limits_{x_0-\delta}^{x_0} |H_{\gamma,m}(s-x)| \left| d\widetilde{F}(s) \right| \right]$$

eşitsizliği elde edilir. Bu son eşitsizliğin sağ tarafındaki Stieltjes integraline kısmi integrasyon uygulanırsa

$$\begin{aligned}
|\nu_{1211}| &\leq \sum_{m=1}^{\infty} m^p A^{(m-1)p} \left\{ \left[-\left|H_{\gamma,m}(s-x)\right| \left|\widetilde{F}(s)\right| \right] \Big|_{x_0-\delta}^{x_0} \right. \\
&\quad \left. + \int\limits_{x_0-\delta}^{x_0} \left|\widetilde{F}(s)\right| \left(\frac{\partial}{\partial s} \left|H_{\gamma,m}(s-x)\right| \right) ds \right\} \\
&= \sum_{m=1}^{\infty} m^p A^{(m-1)p} \left\{ -\left|H_{\gamma,m}(x_0-x)\right| \left|\widetilde{F}(x_0)\right| \right. \\
&\quad + \left|H_{\gamma,m}(x_0-\delta-x)\right| \left|\widetilde{F}(x_0-\delta)\right| \\
&\quad \left. + \int\limits_{x_0-\delta}^{x_0} \left|\widetilde{F}(s)\right| \left(\frac{\partial}{\partial s} \left|H_{\gamma,m}(s-x)\right| \right) ds \right\}
\end{aligned}$$

eşitsizliği yazılabilir. (3.33) eşitsizliğinde $s = x_0$ alınır ve $\mu(0) = 0$ olduğu kullanılırsa, $\left|\widetilde{F}(x_0)\right| = 0$ sağlanır. Bulunan bu ifade, son eşitsizlikte yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
|\nu_{1211}| &\leq \sum_{m=1}^{\infty} m^p A^{(m-1)p} \left\{ \left|H_{\gamma,m}(x_0-\delta-x)\right| \left|\widetilde{F}(x_0-\delta)\right| \right. \\
&\quad \left. + \int\limits_{x_0-\delta}^{x_0} \left|\widetilde{F}(s)\right| \left(\frac{\partial}{\partial s} \left|H_{\gamma,m}(s-x)\right| \right) ds \right\}
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Ayrıca, yine (3.33) eşitsizliğinde $t = x_0 - \delta$ alınırsa, $\left|\widetilde{F}(x_0-\delta)\right| \leq \varepsilon^p \mu(\delta)$ eşitsizliğinin gerçeklendiği görülür. Sonuç olarak,

$$\begin{aligned}
|\nu_{1211}| &\leq \varepsilon^p \sum_{m=1}^{\infty} m^p A^{(m-1)p} \left\{ \left|H_{\gamma,m}(x_0-\delta-x)\right| \mu(\delta) \right. \\
&\quad \left. + \int\limits_{x_0-\delta}^{x_0} \mu(x_0-s) \left(\frac{\partial}{\partial s} \left|H_{\gamma,m}(s-x)\right| \right) ds \right\}
\end{aligned}$$

eşitsizliği bulunur. Şimdi, (3.23) ile tanımlanan V_m salınım fonksiyonunun tanımını kullanalım. O halde, $p = 1$ durumuna benzer işlemler uygulanırsa ν_{1211} integrali için,

$$
\begin{aligned}
|\nu_{1211}| &\leq \varepsilon^p \sum_{m=1}^{\infty} m^p A^{(m-1)p} \left\{ |H_{\gamma,m}(x_0-\delta-x)| \, \mu(\delta) \right. \\
&\quad \left. + \int\limits_{x_0-x-\delta}^{x_0-x} \mu(x_0-x-s) \left(\frac{\partial}{\partial s} (V_m(s)) \right) ds \right\} \\
&= \varepsilon^p \sum_{m=1}^{\infty} m^p A^{(m-1)p} \left\{ 2\, |H_{\gamma,m}(0)| \, \mu(|x_0-x|) \right. \\
&\quad \left. + \int\limits_{x_0-\delta}^{x_0} |H_{\gamma,m}(s-x)| \left\{ \mu(x_0-s) \right\}_s' ds \right\} \qquad (3.35)
\end{aligned}
$$

eşitsizliği bulunur.

Şimdi, benzer şekilde (3.32) ile verilen $\widetilde{G}(s)$ fonksiyonu tanımı yardımıyla ν_{1311} integrali hesaplayalım. $H_{\gamma,m}(s)$ çekirdek fonksiyonu integrallenebilen, monoton bir fonksiyon ve (3.32) ile tanımlanan $\widetilde{G}(s)$ fonksiyonu integrallenebilir bir fonksiyonun belirsiz integrali olduğundan Teorem 2.5 gereği, $\widetilde{G}(s)$ fonksiyonuna göre Stieltjes integrallenebilirdir. Bundan dolayı, (3.32) ile tanımlanan $\widetilde{G}(s)$ fonksiyonunun diferansiyeli kullanılırsa,

$$
\begin{aligned}
|\nu_{1311}| &= \left| \sum_{m=1}^{\infty} m^p A^{(m-1)p} \left(\int\limits_{x_0}^{x_0+\delta} |g(s)-g(x_0)|^p \, |H_{\gamma,m}(s-x)| \, ds \right) \right| \\
&\leq \sum_{m=1}^{\infty} m^p A^{(m-1)p} \left((\mathbf{S}) \int\limits_{x_0}^{x_0+\delta} |H_{\gamma,m}(s-x)| \left| d\widetilde{G}(s) \right| \right)
\end{aligned}
$$

eşitsizliği bulunur. Bu eşitsizlikteki Stieltjes integraline, kısmi integrasyon uygulanırsa,

$$\begin{aligned}
|\nu_{1311}| &\leq \sum_{m=1}^{\infty} m^p A^{(m-1)p} \left\{ \left[|H_{\gamma,m}(s-x)| \left| \widetilde{G}(s) \right| \right] |_{x_0}^{x_0+\delta} \right. \\
&\quad \left. + \int\limits_{x_0}^{x_0+\delta} \left| \widetilde{G}(s) \right| \left(\frac{\partial}{\partial s} \left(- |H_{\gamma,m}(s-x)| \right) \right) ds \right\} \\
&= \sum_{m=1}^{\infty} m^p A^{(m-1)p} \left\{ |H_{\gamma,m}(x_0+\delta-x)| \left| \widetilde{G}(x_0+\delta) \right| \right. \\
&\quad - |H_{\gamma,m}(x_0-x)| \left| \widetilde{G}(x_0) \right| \\
&\quad \left. + \int\limits_{x_0}^{x_0+\delta} \left| \widetilde{G}(s) \right| \left(\frac{\partial}{\partial s} \left(- |H_{\gamma,m}(s-x)| \right) \right) ds \right\}
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. (3.34) eşitsizliğinde, $s = x_0$ alınır ve $\mu(0) = 0$ olduğu kullanılırsa, $\left| \widetilde{G}(x_0) \right| = 0$ sağlanır. Bulunan bu ifade, son eşitsizlikte yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
|\nu_{1311}| &\leq \sum_{m=1}^{\infty} m^p A^{(m-1)p} \left\{ |H_{\gamma,m}(x_0+\delta-x)| \left| \widetilde{G}(x_0+\delta) \right| \right. \\
&\quad \left. + \int\limits_{x_0}^{x_0+\delta} \left| \widetilde{G}(s) \right| \left(\frac{\partial}{\partial s} (- |H_{\gamma,m}(s-x)| \right) ds \right\}
\end{aligned}$$

eşitsizliği bulunur ve yine (3.34) eşitsizliğinde $s = x_0 + \delta$ alınırsa, $\left| \widetilde{G}(x_0+\delta) \right| \leq \varepsilon^p \mu(\delta)$ eşitsizliğinin sağlandığı görülür ve sonuç olarak

$$\begin{aligned}
|\nu_{1311}| &\leq \varepsilon^p \sum_{m=1}^{\infty} m^p A^{(m-1)p} \left\{ |H_{\gamma,m}(x_0+\delta-x)| \mu(\delta) \right. \\
&\quad \left. + \int\limits_{x_0}^{x_0+\delta} \mu(s-x_0) \left(\frac{\partial}{\partial s} \left(- |H_{\gamma,m}(s-x)| \right) \right) ds \right\}
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Son olarak, (3.25) ile verilen $\widetilde{V}_m$ salınım fonksiyonu tanımı kullanılır ve $p = 1$ durumuna benzer işlemler uygulanırsa ν_{1311} integrali için

$$\begin{aligned}
|\nu_{1311}| &\leq \varepsilon^p \sum_{m=1}^{\infty} m^p A^{(m-1)p} \left\{ |H_{\gamma,m}(x_0+\delta-x)| \mu(\delta) \right. \\
&\quad \left. + \int\limits_{x_0-x}^{x_0-x+\delta} \mu(s-x_0+x) \left(\frac{\partial}{\partial s} \left(-\widetilde{V}_m(s) \right) \right) ds \right\} \\
&= \varepsilon^p \sum_{m=1}^{\infty} m^p A^{(m-1)p} \left(\int\limits_{x_0}^{x_0+\delta} |H_{\gamma,m}(s-x)| \left\{ \mu(s-x_0) \right\}_s' ds \right) \qquad (3.36)
\end{aligned}$$

eşitsizliğinin sağlandığı görülür. ν_{1211} ve ν_{1311} integralleri için bulunan (3.35) ve (3.36) eşitsizlikleri birleştirilirse

$$\begin{aligned} |\nu_{1211}|+|\nu_{1311}| \quad \leq \quad & \varepsilon^p \sup_{m\in\mathbb{N}}\left(m^p A^{(m-1)p}\right)\sum_{m=1}^{\infty}\left\{\int\limits_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}|H_{\gamma,m}(s-x)|\left|\{\mu(|x_0-s|)\}_s^{'}\right|ds\right. \\ & \left. +2\left|H_{\gamma,m}(0)\right|\mu(|x_0-x|)\right\} \end{aligned}$$

eşitsizliği yazılabilir. Bu son eşitsizliğin sağ tarafındaki ifadenin hipotez gereği sınırlı olduğu dikkate alınırsa istenilen sonuca varırız. Sonuç olarak, $1 \leq p < \infty$ durumunda $g \in L_p(a,b)$ fonksiyonu için

$$\lim_{(x,\gamma)\to(x_0,\gamma_0)}\Psi_\gamma(g;x)=\sum_{m=1}^{\infty}I_m g^m(x_0)$$

yaklaşımı elde edilir.

Teorem 3.3, $0<|x_0-x|<\frac{\delta}{2}$ ifadesinin $0<x_0-x<\frac{\delta}{2}$ durumu için ispatlanmıştır. Diğer durumda benzer şekilde elde edilmektedir.

Sonuç olarak istenilen elde edilmiştir ve ispat tamamlanmıştır. ■

Teorem 3.3 de özel olarak (a,b) aralığı yerine $\mathbb{R}$ alınırsa, bu durumda Teorem 3.3 aşağıdaki şekilde ifade ve ispat edilir.

Teorem 3.4 $x_0 \in \mathbb{R}$ noktası, $g \in L_p(\mathbb{R})$ $(1 \leq p < \infty)$ fonksiyonunun $\mu-$genelleştirilmiş Lebesgue noktası ve g fonksiyonu, $\sup\limits_{s\in\mathbb{R}}|g(s)| = B$ $(B \in (0,1))$ olmak üzere $\mathbb{R}$ üzerinde sınırlı bir fonksiyon ve her bir sabit $1 \leq p < \infty$ değeri için $\sup\limits_{m\in\mathbb{N}}(m^p B^{mp})$ ve $\sup\limits_{m\in\mathbb{N}}\|g^m\|^p_{L_p(\mathbb{R})}$ ifadeleri sonlu olsun. Bu takdirde $\Gamma \neq \emptyset$, negatif olmayan γ reel sayılarını içeren bir indis kümesi ve γ_0, bu kümenin bir yığılma noktası olmak üzere $(x,\gamma)\to(x_0,\gamma_0)$ ve $0<\delta<\delta_0$ iken

$$\sum_{m=1}^{\infty}\left\{\int\limits_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}|H_{\gamma,m}(s-x)|\left|\{\mu(|x_0-s|)\}_s^{'}\right|ds+2\left|H_{\gamma,m}(0)\right|\mu(|x_0-x|)\right\}$$

fonksiyonunun sınırlı olduğu $T^{'}$ kümesi üzerinde

$$\lim_{(x,\gamma)\to(x_0,\gamma_0)}\Psi_\gamma(g;x)=\sum_{m=1}^{\infty}I_m g^m(x_0)$$

gerçeklenir.

Burada, $m=1,...$ olmak üzere g^m fonksiyonu, g fonksiyonunun $m-inci$ kuvvetidir.

İspat. $x_0 \in \mathbb{R}$ noktası, $g \in L_p(\mathbb{R})$ $(1 \leq p < \infty)$ fonksiyonunun $\mu-$genelleştirilmiş Lebesgue noktası ve g fonksiyonu, $\sup\limits_{s\in\mathbb{R}} |g(s)| = B$ olmak üzere $\mathbb{R}$ üzerinde sınırlı bir fonksiyon olsun. Şimdi, $p = 1$ ve $1 < p < \infty$ durumlarını ayrı ayrı inceleyelim. Kabul edelim ki $0 < \delta < \delta_0$ için $x_0 + \delta < b$, $x_0 - \delta > a$ ve $0 < x_0 - x < \frac{\delta}{2}$ olsun. Öncelikle, $p = 1$ olmak üzere $g \in L_1(\mathbb{R})$ olduğunu kabul edelim.

$$\omega_\gamma = \left| \Psi_\gamma(g;x) - \sum_{m=1}^{\infty} I_m g^m(x_0) \right|$$

olsun.

$$\begin{aligned}
\omega_\gamma &= \left| \Psi_\gamma(g;x) - \sum_{m=1}^{\infty} I_m g^m(x_0) \right| \\
&= \left| \sum_{m=1}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} g^m(s) H_{\gamma,m}(s-x) ds \right) - \sum_{m=1}^{\infty} I_m g^m(x_0) \right| \\
&= \left| \sum_{m=1}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} g^m(s) H_{\gamma,m}(s-x) ds \right) - \sum_{m=1}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} g^m(x_0) H_{\gamma,m}(s-x) ds \right) \right. \\
&\quad \left. + \sum_{m=1}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} g^m(x_0) H_{\gamma,m}(s-x) ds \right) - \sum_{m=1}^{\infty} I_m g^m(x_0) \right|
\end{aligned}$$

eşitliği yazılabilir. Bu eşitlikte gerekli düzenlemeler yapılır, daha sonra mutlak değer fonksiyonunun özelliği kullanılırsa

$$\begin{aligned}
\omega_\gamma \leq & \sum_{m=1}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |g^m(s) - g^m(x_0)| \, |H_{\gamma,m}(s-x)| \, ds \right) \\
& + \sum_{m=1}^{\infty} |g^m(x_0)| \left| \int_{-\infty}^{\infty} H_{\gamma,m}(s-x) ds - I_m \right|
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Bu son eşitsizliğin sağ tarafında elde edilen ifadelere sırasıyla

$$\omega_1 = \sum_{m=1}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |g^m(s) - g^m(x_0)| \, |H_{\gamma,m}(s-x)| \, ds \right)$$

ve

$$\omega_2 = \sum_{m=1}^{\infty} |g^m(x_0)| \left| \int_{-\infty}^{\infty} H_{\gamma,m}(s-x) ds - I_m \right|$$

diyelim ve sonra da x, x_0 ve γ, γ_0 yaklaşırken $\omega_1$ve ω_2 ifadelerinin ise *sıfıra* yaklaştığını gösterelim.

ω_2 integrali için, A_2 sınıfının (a) şartı ve hipotezden,

$$\sup_{m\in\mathbb{N}} |g^m(x_0)| \leq \sup_{m\in\mathbb{N}} (mB^m) < \infty$$

eşitsizliği göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned}
\lim_{(x,\gamma)\to(x_0,\gamma_0)} (\omega_2) &= \lim_{(x,\gamma)\to(x_0,\gamma_0)} \left(\sum_{m=1}^{\infty} |g^m(x_0)| \left| \int_{-\infty}^{\infty} H_{\gamma,m}(s-x)ds - I_m \right| \right) \\
&\leq \lim_{(x,\gamma)\to(x_0,\gamma_0)} \left(\sum_{m=1}^{\infty} \left[\sup_{m\in\mathbb{N}} (mB^m) \right] \left| \int_{-\infty}^{\infty} H_{\gamma,m}(s-x)ds - I_m \right| \right) \\
&= 0
\end{aligned}$$

elde edilir. Sonuç olarak, ω_2 integralinin $(x,\gamma) \to (x_0,\gamma_0)$ iken $(\omega_2) \to 0$ olduğu görülür.

Şimdi, ω_1 integrali için de $(x,\gamma) \to (x_0,\gamma_0)$ iken ω_1 integralinin *sıfıra* yaklaştığını gösterelim. ω_1 integralini,

$$\begin{aligned}
\omega_1 &= \sum_{m=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |g^m(s) - g^m(x_0)| \, |H_{\gamma,m}(s-x)| \, ds \\
&= \sum_{m=1}^{\infty} \Bigg\{ \int_{-\infty}^{x_0-\delta} |g^m(s) - g^m(x_0)| \, |H_{\gamma,m}(s-x)| \, ds \\
&\quad + \int_{x_0-\delta}^{x_0} |g^m(s) - g^m(x_0)| \, |H_{\gamma,m}(s-x)| \, ds \\
&\quad + \int_{x_0}^{x_0+\delta} |g^m(s) - g^m(x_0)| \, |H_{\gamma,m}(s-x)| \, ds \\
&\quad + \int_{x_0+\delta}^{\infty} |g^m(s) - g^m(x_0)| \, |H_{\gamma,m}(s-x)| \, ds \Bigg\}
\end{aligned}$$

şeklinde dört parçaya ayıralım. Sırasıyla bu integrallere

$$\omega_{11} = \sum_{m=1}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{x_0-\delta} |g^m(s) - g^m(x_0)| \, |H_{\gamma,m}(s-x)| \, ds \right),$$

$$\omega_{12} = \sum_{m=1}^{\infty} \left(\int_{x_0-\delta}^{x_0} |g^m(s) - g^m(x_0)| \, |H_{\gamma,m}(s-x)| \, ds \right),$$

$$\omega_{13} = \sum_{m=1}^{\infty} \left(\int_{x_0}^{x_0+\delta} |g^m(s) - g^m(x_0)| \, |H_{\gamma,m}(s-x)| \, ds \right)$$

ve

$$\omega_{14} = \sum_{m=1}^{\infty} \left(\int_{x_0+\delta}^{\infty} |g^m(s) - g^m(x_0)| \, |H_{\gamma,m}(s-x)| \, ds \right)$$

diyelim. Öncelikle ω_{11} ve ω_{14} integrallerini daha sonra da ω_{12} ve ω_{13} integrallerini hesaplayalım.

ω_{11} integrali için önce mutlak değer fonksiyonunun özelliği sonra da A_2 sınıfının (d) şartı olan $H_{\gamma,m}(s)$ çekirdek fonksiyonunun her bir $\gamma \in \Gamma$ için s nin bir fonksiyonu olarak $(-\delta_0, 0)$ aralığı üzerinde azalmayan bir fonksiyon olduğu göz önüne alınırsa,

$$\begin{aligned}
\omega_{11} &= \sum_{m=1}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{x_0-\delta} |g^m(s) - g^m(x_0)| \, |H_{\gamma,m}(s-x)| \, ds \right) \\
&\leq \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{x_0-\delta} |g^m(s)| \, |H_{\gamma,m}(s-x)| \, ds + \int_{-\infty}^{x_0-\delta} |g^m(x_0)| \, |H_{\gamma,m}(s-x)| \, ds \right\} \\
&\leq \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \left[\sup_{|u|>\frac{\delta}{2}} |H_{\gamma,m}(u)| \right] \int_{-\infty}^{x_0-\delta} |g^m(s)| \, ds + \sup_{m\in\mathbb{N}} (mB^m) \int_{-\infty}^{x_0-\delta} |H_{\gamma,m}(s-x)| \, ds \right\}
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Son olarak, norm tanımı kullanılırsa ω_{11} integrali için

$$\omega_{11} \leq \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \left[\sup_{|u|>\frac{\delta}{2}} |H_{\gamma,m}(u)| \right] \sup_{m\in\mathbb{N}} \|g^m\|_{L_1(\mathbb{R})} + \sup_{m\in\mathbb{N}} (mB^m) \int_{-\infty}^{x_0-\delta} |H_{\gamma,m}(s-x)| \, ds \right\} \tag{3.37}$$

eşitsizliği yazılabilir.

Şimdi, benzer şekilde ω_{14} integralini hesaplayalım. ω_{14} integrali için önce mutlak değer fonksiyonunun özelliği daha sonra da A_2 sınıfının (d) şartı olan $H_{\gamma,m}(s)$ çekirdek fonksiyonu her bir $\gamma \in \Gamma$ için s nin bir fonksiyonu olarak $(0, \delta_0)$ aralığı üzerinde artmayan bir fonksiyon olduğu dikkate alınırsa

$$\begin{aligned}
\omega_{14} &= \sum_{m=1}^{\infty}\left(\int_{x_0+\delta}^{\infty}|g^m(s)-g^m(x_0)|\,|H_{\gamma,m}(s-x)|\,ds\right)\\
&= \sum_{m=1}^{\infty}\left\{\int_{x_0+\delta}^{\infty}|g^m(s)|\,|H_{\gamma,m}(s-x)|\,ds+\int_{x_0+\delta}^{\infty}|g^m(x_0)|\,|H_{\gamma,m}(s-x)|\,ds\right\}\\
&\leq \sum_{m=1}^{\infty}\left\{\left[\sup_{|u|>\frac{\delta}{2}}|H_{\gamma,m}(u)|\right]\int_{x_0+\delta}^{\infty}|g^m(s)|\,ds+\sup_{m\in\mathbb{N}}(mB^m)\int_{x_0+\delta}^{\infty}|H_{\gamma,m}(s-x)|\,ds\right\}
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Bu son eşitsizlikte, norm tanımı kullanılırsa ω_{14} integrali için

$$\omega_{14}\leq\sum_{m=1}^{\infty}\left\{\left[\sup_{|u|>\frac{\delta}{2}}|H_{\gamma,m}(u)|\right]\sup_{m\in\mathbb{N}}\|g^m\|_{L_1(\mathbb{R})}+\sup_{m\in\mathbb{N}}(mB^m)\int_{x_0+\delta}^{\infty}|H_{\gamma,m}(s-x)|\,ds\right\} \tag{3.38}$$

eşitsizliği bulunur.

Şimdi, ω_{12} ve ω_{13} integrallerini inceleyelim. $\mu-$genelleştirilmiş Lebesgue noktası tanımı yardımıyla, ω_{12} ve ω_{13} integralleri Teorem 3.3' e benzer şekilde incelenirse,

$$|\omega_{12}|\leq\varepsilon\sum_{m=1}^{\infty}mB^{(m-1)}\left\{2\,|H_{\gamma,m}(0)|\,\mu(|x_0-x|)+\int_{x_0-\delta}^{x_0}|H_{\gamma,m}(s-x)|\,\{\mu(x_0-s)\}_s'\,ds\right\} \tag{3.39}$$

ve

$$|\omega_{13}|\leq\varepsilon\sum_{m=1}^{\infty}mB^{(m-1)}\left(\int_{x_0}^{x_0+\delta}|H_{\gamma,m}(s-x)|\left|\{\mu(s-x_0)\}_s'\right|ds\right) \tag{3.40}$$

eşitsizlikleri bulunur. Ardından, (3.39) ve (3.40) eşitsizlikleri birleştirilir ve gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$\begin{aligned}
|\omega_{12}|+|\omega_{13}| \;\leq\; & \varepsilon\sup_{m\in\mathbb{N}}\left(mB^{(m-1)}\right)\sum_{m=1}^{\infty}\left\{\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}|H_{\gamma,m}(s-x)|\left|\{\mu(|x_0-s|)\}_s'\right|ds\right.\\
&\left.+2\,|H_{\gamma,m}(0)|\,\mu(|x_0-x|)\right\} \qquad (3.41)
\end{aligned}$$

eşitsizliği yazılabilir. Sonuç olarak, (3.37), (3.38) ve (3.41) eşitsizliklerinden

$$\begin{aligned}
\omega_\gamma \;\; \leq \;\; & \sum_{m=1}^{\infty}\left\{\left[\sup_{|u|>\frac{\delta}{2}}|H_{\gamma,m}(u)|\right]\sup_{m\in\mathbb{N}}\|g^m\|_{L_1(\mathbb{R})}+\sup_{m\in\mathbb{N}}(mB^m)\int\limits_{-\infty}^{x_0-\delta}|H_{\gamma,m}(s-x)|\,ds\right\} \\
& +\sum_{m=1}^{\infty}\left\{\left[\sup_{|u|>\frac{\delta}{2}}|H_{\gamma,m}(u)|\right]\sup_{m\in\mathbb{N}}\|g^m\|_{L_1(\mathbb{R})}+\sup_{m\in\mathbb{N}}(mB^m)\int\limits_{x_0+\delta}^{\infty}|H_{\gamma,m}(s-x)|\,ds\right\} \\
& +\varepsilon\sup_{m\in\mathbb{N}}\left(mB^{(m-1)}\right)\sum_{m=1}^{\infty}\left\{\int\limits_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}|H_{\gamma,m}(s-x)|\left|\{\mu(|x_0-s|)\}_s^{'}\right|ds\right. \\
& +2\,|H_{\gamma,m}(0)|\,\mu(|x_0-x|)\}
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Bu son eşitsizlikte, g fonksiyonunun sınırlılığı ve verilen hipotez kullanılırsa, $p=1$ için istenilen ispat elde edilir.

Şimdi, aynı teoremin $1<p<\infty$ için $g\in L_p(\mathbb{R})$ durumunda yaklaşımını inceleyelim. $p=1$ durumuna benzer şekilde, $\omega_\gamma=\left|\Psi_\gamma(g;x)-\sum\limits_{m=1}^{\infty}I_m g^m(x_0)\right|$ farkına gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned}
\omega_\gamma \;\; = \;\; & \left|\Psi_\gamma(g;x)-\sum_{m=1}^{\infty}I_m g^m(x_0)\right| \\
\leq \;\; & \sum_{m=1}^{\infty}\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty}|g^m(s)-g^m(x_0)|\,|H_{\gamma,m}(s-x)|\,ds\right) \\
& +\sum_{m=1}^{\infty}|g^m(x_0)|\left|\int\limits_{-\infty}^{\infty}H_{\gamma,m}(s-x)ds-I_m\right|
\end{aligned}$$

eşitsizliğinin sağladığı görülür. ω_γ ifadesi için Lemma 2.2 kullanılırsa

$$\begin{aligned}
\omega_\gamma^p \;\; \leq \;\; & 2^p\left(\sum_{m=1}^{\infty}\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty}|g^m(s)-g^m(x_0)|\,|H_{\gamma,m}(s-x)|\,ds\right)\right)^p \\
& +2^p\left(\sum_{m=1}^{\infty}|g^m(x_0)|\left|\int\limits_{-\infty}^{\infty}H_{\gamma,m}(s-x)ds-I_m\right|\right)^p
\end{aligned}$$

eşitsizliği yazılabilir. Bu son eşitsizliğin sağ tarafındaki ifadelere sırasıyla

$$\omega_1^{'}=\left(\sum_{m=1}^{\infty}\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty}|g^m(s)-g^m(x_0)|\,|H_{\gamma,m}(s-x)|\,ds\right)\right)^p,$$

ve

$$\omega_2^{'} = \left(\sum_{m=1}^{\infty} |g^m(x_0)| \left| \int_{-\infty}^{\infty} H_{\gamma,m}(s-x)ds - I_m \right| \right)^p$$

diyelim ve daha sonra da iki parçaya ayırdığımız $\omega_1^{'}$ ve $\omega_2^{'}$ integrallerini hesaplayalım. $\omega_2^{'}$ integrali için de A_2 sınıfının (a) şartı olan I_m pozitif sonlu reel sayılar ve $\sum\limits_{m=1}^{\infty} I_m < \infty$ olmak üzere

$$\lim_{\gamma \to \gamma_0} \left[\sum_{m=1}^{\infty} \left| \int_{-\infty}^{\infty} H_{\gamma,m}(s)ds - I_m \right| \right] = 0$$

olduğu göz önüne alınırsa x noktası x_0 noktasına, γ noktasıda γ_0 noktasına yaklaşırken

$$\begin{aligned} \lim_{(x,\gamma)\to(x_0,\gamma_0)} \left(\omega_2^{'}\right) &= \lim_{(x,\gamma)\to(x_0,\gamma_0)} \left(\sum_{m=1}^{\infty} |g^m(x_0)| \left| \int_{-\infty}^{\infty} H_{\gamma,m}(s-x)ds - I_m \right| \right)^p \\ &\le \left(\lim_{(x,\gamma)\to(x_0,\gamma_0)} \sum_{m=1}^{\infty} \left[\sup_{m\in\mathbb{N}} (mB^m) \right] \left| \int_{-\infty}^{\infty} H_{\gamma,m}(s-x)ds - I_m \right| \right)^p \\ &= 0 \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Yani, sonuç olarak $\omega_2^{'}$ integrali için $(x,\gamma) \to (x_0,\gamma_0)$ iken $\left(\omega_2^{'}\right) \to 0$ olduğu görülür.

Şimdi, $\omega_1^{'}$ integrali için de x noktası x_0 noktasına, γ noktasıda γ_0 noktasına yaklaşırken $\omega_1^{'}$ integralinin *sıfıra* yaklaştığını gösterelim.

$$\omega_1^{'} = \left(\sum_{m=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |g^m(s) - g^m(x_0)| \, |H_{\gamma,m}(s-x)| \, ds \right)^p$$

eşitliğinde integrale Teorem 2.1 ile verilen Hölder eşitsizliği uygulanırsa

$$\omega_1^{'} \le \left(\sum_{m=1}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |g^m(s) - g^m(x_0)|^p \, |H_{\gamma,m}(s-x)| \, ds \right)^{\frac{1}{p}} \times \left(\int_{-\infty}^{\infty} |H_{\gamma,m}(s)| \, ds \right)^{\frac{1}{q}} \right)^p$$

eşitsizliği bulunur. Ardından, bu son eşitsizlikteki sonsuz toplama Teorem 2.2 ile verilen Hölder eşitsizliği uygulanırsa

$$\begin{aligned} \omega_1^{'} &\le \left(\left(\sum_{m=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |g^m(s) - g^m(x_0)|^p \, |H_{\gamma,m}(s-x)| \, ds \right)^{\frac{1}{p}} \times \left(\sum_{m=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |H_{\gamma,m}(s)| \, ds \right)^{\frac{1}{q}} \right)^p \\ &= \left(\sum_{m=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |g^m(s) - g^m(x_0)|^p \, |H_{\gamma,m}(s-x)| \, ds \right) \times \left(\sum_{m=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |H_{\gamma,m}(s)| \, ds \right)^{\frac{p}{q}} \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir ve bu eşitsizlikteki ilk toplama

$$\omega'_{11}=\sum_{m=1}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\left|g^{m}(s)-g^{m}(x_0)\right|^{p}\left|H_{\gamma,m}(s-x)\right|ds\right)$$

diyelim. Burada, $\sum\limits_{m=1}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left|H_{\gamma,m}(s)\right|ds$ ifadesi A_2 sınıfının (a) şartından dolayı sonludur ve $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ dir. δ reel sayısı olmak üzere $0<\delta<\delta_0$ için ω'_{11} integralini aşağıdaki gibi dört kısıma ayıralım.

$$\begin{aligned}\omega'_{11} &= \sum_{m=1}^{\infty}\left\{\int_{-\infty}^{x_0-\delta}\left|g^{m}(s)-g^{m}(x_0)\right|^{p}\left|H_{\gamma,m}(s-x)\right|ds\right.\\ &\quad+\int_{x_0-\delta}^{x_0}\left|g^{m}(s)-g^{m}(x_0)\right|^{p}\left|H_{\gamma,m}(s-x)\right|ds\\ &\quad+\int_{x_0}^{x_0+\delta}\left|g^{m}(s)-g^{m}(x_0)\right|^{p}\left|H_{\gamma,m}(s-x)\right|ds\\ &\quad\left.+\int_{x_0+\delta}^{\infty}\left|g^{m}(s)-g^{m}(x_0)\right|^{p}\left|H_{\gamma,m}(s-x)\right|ds\right\}\end{aligned}$$

olsun ve sırasıyla bu integrallere

$$\begin{aligned}\omega'_{111} &= \sum_{m=1}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{x_0-\delta}\left|g^{m}(s)-g^{m}(x_0)\right|^{p}\left|H_{\gamma,m}(s-x)\right|ds\right),\\ \omega'_{121} &= \sum_{m=1}^{\infty}\left(\int_{x_0-\delta}^{x_0}\left|g^{m}(s)-g^{m}(x_0)\right|^{p}\left|H_{\gamma,m}(s-x)\right|ds\right),\\ \omega'_{131} &= \sum_{m=1}^{\infty}\left(\int_{x_0}^{x_0+\delta}\left|g^{m}(s)-g^{m}(x_0)\right|^{p}\left|H_{\gamma,m}(s-x)\right|ds\right),\end{aligned}$$

ve

$$\omega'_{141}=\sum_{m=1}^{\infty}\left(\int_{x_0+\delta}^{\infty}\left|g^{m}(s)-g^{m}(x_0)\right|^{p}\left|H_{\gamma,m}(s-x)\right|ds\right)$$

diyelim ve daha sonra ω'_{111}, ω'_{121}, ω'_{131} ve ω'_{141} integrallerini hesaplayalım.

Öncelikle, ω'_{111} integralini inceleyelim. ω'_{111} integrali için, Lemma 2.2 ve A_2 sınıfının

(d) şartı kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
\omega'_{111} &= \sum_{m=1}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{x_0-\delta}|g^m(s)-g^m(x_0)|^p\,|H_{\gamma,m}(s-x)|\,ds\right)\\
&\le 2^p\sum_{m=1}^{\infty}\left\{\int_{-\infty}^{x_0-\delta}|g^m(s)|^p\,|H_{\gamma,m}(s-x)|\,ds+\int_{-\infty}^{x_0-\delta}|g^m(x_0)|^p\,|H_{\gamma,m}(s-x)|\,ds\right\}\\
&\le 2^p\sum_{m=1}^{\infty}\left\{\left[\sup_{|u|>\frac{\delta}{2}}|H_{\gamma,m}(u)|\right]\int_{-\infty}^{x_0-\delta}|g^m(s)|^p\,ds+\sup_{m\in\mathbb{N}}(m^pB^{mp})\int_{-\infty}^{x_0-\delta}|H_{\gamma,m}(s-x)|\,ds\right\}
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Daha sonra, bu eşitsizliğe norm tanımı uygulanırsa ω'_{111} integrali için,

$$\omega'_{111}\le 2^p\sum_{m=1}^{\infty}\left\{\left[\sup_{|u|>\frac{\delta}{2}}|H_{\gamma,m}(u)|\right]\sup_{m\in\mathbb{N}}\|g^m\|^p_{L_p(\mathbb{R})}+\sup_{m\in\mathbb{N}}(m^pB^{mp})\int_{-\infty}^{x_0-\delta}|H_{\gamma,m}(s-x)|\,ds\right\}$$

eşitsizliği yazılabilir. ω'_{111} integraline benzer şekilde ω'_{141} integrali incelenirse ω'_{141} integrali için de,

$$\begin{aligned}
\omega'_{141} &\le 2^p\sum_{m=1}^{\infty}\left\{\left[\sup_{|u|>\frac{\delta}{2}}|H_{\gamma,m}(u)|\right]\int_{x_0+\delta}^{\infty}|g^m(s)|^p\,ds+|g^m(x_0)|^p\int_{x_0+\delta}^{\infty}|H_{\gamma,m}(s-x)|\,ds\right\}\\
&\le 2^p\sum_{m=1}^{\infty}\left\{\left[\sup_{|u|>\frac{\delta}{2}}|H_{\gamma,m}(u)|\right]\sup_{m\in\mathbb{N}}\|g^m\|^p_{L_p(\mathbb{R})}+\sup_{m\in\mathbb{N}}(m^pB^{mp})\int_{x_0+\delta}^{\infty}|H_{\gamma,m}(s-x)|\,ds\right\}
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir.

Şimdi, ω'_{121} ve ω'_{131} integrallerini hesaplayalım. ω'_{121} ve ω'_{131} integralleri, $\mu-$genelleştirilmiş Lebesgue noktası tanımı yardımıyla Teorem 3.3' e benzer şekilde incelenirse,

$$\left|\omega'_{121}\right|\le\varepsilon\sum_{m=1}^{\infty}mB^{(m-1)}\left\{2\,|H_{\gamma,m}(0)|\,\mu(|x_0-x|)+\int_{x_0-\delta}^{x_0}|H_{\gamma,m}(s-x)|\,\{\mu(x_0-s)\}'_s\,ds\right\} \tag{3.42}$$

ve

$$\left|\omega'_{131}\right|\le\varepsilon\sum_{m=1}^{\infty}mB^{(m-1)}\left(\int_{x_0}^{x_0+\delta}|H_{\gamma,m}(s-x)|\left|\{\mu(s-x_0)\}'_s\right|ds\right) \tag{3.43}$$

eşitsizliklerinin sağlandığı görülür. ω'_{121} ve ω'_{131} integralleri için bulunan (3.42) ve

(3.43) eşitsizlikleri birleştirilirse

$$\left|\omega_{121}^{'}\right| + \left|\omega_{131}^{'}\right| \leq \varepsilon^p \sup_{m\in\mathbb{N}} \left(m^p B^{(m-1)p}\right) \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} |H_{\gamma,m}(s-x)| \left|\{\mu(|x_0-s|)\}_s^{'}\right| ds \right.$$
$$\left. +2\,|H_{\gamma,m}(0)|\,\mu(|x_0-x|)\right\}$$

eşitsizliği bulunur. Sonuç olarak, $1 < p < \infty$ durumundan

$$\begin{aligned}\omega_\gamma \leq\ & 2^{2p} \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \left[\sup_{|u|>\frac{\delta}{2}} |H_{\gamma,m}(u)|\right] \sup_{m\in\mathbb{N}} \|g^m\|_{L_p(\mathbb{R})}^p + \sup_{m\in\mathbb{N}} \left(m^p B^{mp}\right) \int_{-\infty}^{x_0-\delta} |H_{\gamma,m}(s-x)|\, ds \right\} \\ & +2^{2p} \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} \left[\sup_{|u|>\frac{\delta}{2}} |H_{\gamma,m}(u)|\right] \sup_{m\in\mathbb{N}} \|g^m\|_{L_p(\mathbb{R})}^p + \sup_{m\in\mathbb{N}} \left(m^p B^{mp}\right) \int_{x_0+\delta}^{\infty} |H_{\gamma,m}(s-x)|\, ds \right\} \\ & +2^p \varepsilon^p \sup_{m\in\mathbb{N}} \left(m^p B^{(m-1)p}\right) \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} |H_{\gamma,m}(s-x)| \left|\{\mu(|x_0-s|)\}_s^{'}\right| ds \right. \\ & \left. +2\,|H_{\gamma,m}(0)|\,\mu(|x_0-x|)\right\}\end{aligned}$$

eşitsizliğinin sağlandığı görülür. Sonuç olarak, $1 \leq p < \infty$ durumunda $g \in L_p(\mathbb{R})$ fonksiyonu için

$$\lim_{(x,\gamma)\to(x_0,\gamma_0)} \Psi_\gamma(g;x) = \sum_{m=1}^{\infty} I_m g^m(x_0)$$

yaklaşımı elde edilir.

Teorem 3.4, $0 < |x_0 - x| < \frac{\delta}{2}$ ifadesinin $0 < x_0 - x < \frac{\delta}{2}$ durumu için ispatlanmıştır. Diğer durumda benzer şekilde elde edilmektedir.

Sonuç olarak istenilen elde edilmiştir ve ispat tamamlanmıştır. ■

Yani, özel olarak alınan (a, b) aralığı yerine daha genel aralık olan reel sayılar kümesi alınsa bile aynı şartlar altında yakınsamanın sağlandığı görülür.

Bu kesimdeki çalışmalarımızın $p = 1$ durumu "*Fatou type convergence of singular integral operators equipped with infinite sum*" adı ile konferansta sunulmuştur. Ayrıca, $1 < p < \infty$ durumu da "*On pointwise convergence of nonlinear integrals in L_p spaces* $(1 < p < \infty)$" adı ile submit edilmiştir.

4. SONLU TOPLAM İÇEREN İKİ KATLI LİNEER OLMAYAN İNTEGRAL OPERATÖRLERİN NOKTASAL YAKINSAKLIĞI

Bu bölümde, A_3 sınıfı adını verdiğimiz yeni bir çekirdek sınıfının tanımı verildikten sonra aşağıdaki sonlu toplam içeren iki katlı lineer olmayan integral operatörünün $\mu-$genelleştirilmiş Lebesgue noktasında noktasal yakınsaklığı araştırılmıştır. $\lambda \in \Lambda$ reel sayısı ve $(x, y) \in D$ noktaları için

$$U_\lambda(g; x, y) = \sum_{m=1}^{n} \left(\int_a^b \int_c^d [g(s,t)]^m \widetilde{K}_{\lambda,m}(s,t;x,y) dtds \right)$$

operatöründe, $f \in L_1(D)$ fonksiyonu ve $\Lambda \neq \emptyset$ kümesi, negatif olmayan λ reel sayılarını içeren bir indis kümesidir.

Burada, $D = (a,b) \times (c,d)$ dikdörtgensel bölgesi, $\mathbb{R}^2$ nin keyfi sonlu açık bölgesi ve $\widetilde{K}_{\lambda,m}$ çekirdek fonksiyonu, $\lambda \in \Lambda$ reel sayısı için $\widetilde{K}_{\lambda,m} : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}_0^+$ şeklinde tanımlıdır. Ayrıca, $m = 1, 2, ..., n$ olmak üzere g^m fonksiyonu, g fonksiyonunun $m - inci$ kuvvetidir.

Şimdi, $\widetilde{K}_{\lambda,m}$ çekirdek fonksiyonu için A_3 sınıfı tanımını verelim ve daha sonra da bu şartlar altında $U_\lambda(g; x, y)$ integral operatörünün noktasal yakınsaklığını inceleyelim. Onun öncesinde iki katlı integraller için olan $\mu-$genelleştirilmiş Lebesgue noktası tanımını verelim.

İki katlı integraller için olan $\mu-$genelleştirilmiş Lebesgue noktası tanımı Rydzewska (1974) tarafından verilmiştir. Daha sonra benzer tanımlar başkaları tarafından da kullanılmıştır. Aşağıdaki tanım da bunlardan biridir.

Tanım 4.1 $g \in L_1(D)$ ve $0 < h_1, h_2 < \delta_0$ olmak üzere

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{1}{\mu_1(h_1)\mu_2(h_2)} \int_{x_0}^{x_0 \pm h_1} \int_{y_0}^{y_0 \pm h_2} |g(s,t) - g(x_0,y_0)| \, dtds = 0$$

eşitliğinin sağlandığı $(x_0, y_0) \in D$ noktasına g fonksiyonunn $\mu-$genelleştirilmiş Lebesgue noktası denir. Burada, $\mu_1(s) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $(-\delta_0, \delta_0)$ üzerinde mutlak sürekli, $(0, \delta_0)$ üzerinde artan ve $\mu_1(0) = 0$ ayrıca, $\mu_2(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $(-\delta_0, \delta_0)$ üzerinde mutlak sürekli, $(0, \delta_0)$ üzerinde artan ve $\mu_2(0) = 0$ dır (Serenbay 2014).

Tanım 4.2 **(A_3 sınıfı)** $\Lambda \neq \emptyset$, negatif olmayan λ reel sayılarını içeren bir indis kümesi ve λ_0, bu indis kümesinin yığılma noktası olsun. $m = 1, 2, ..., n$ için $\left\{ \widetilde{K}_{\lambda,m} \right\}_{\lambda \in \Lambda}$, $\widetilde{K}_{\lambda,m} : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}_0^+$ integrallenebilen fonksiyonlardan oluşan bir aile olmak üzere $\widetilde{K}_{\lambda,m}$ çekirdek fonksiyonuna aşağıdaki şartları sağladığı takdirde A_3 *sınıfındandır* denir:

a) Z_m pozitif reel sayı olmak üzere herhangi sabit x, y reel sayıları ve $m = 1, 2, ..., n$ için

$$\lim_{\lambda \to \lambda_0} \left| \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \widetilde{K}_{\lambda,m}(s,t;x,y)dt \right) ds - Z_m \right| = 0.$$

b) Herhangi sabit x, y reel sayısı ve her ξ pozitif sayısı için

$$\lim_{\lambda \to \lambda_0} \left[\sup_{|x-s|>\xi,\ |y-t|>\xi} \widetilde{K}_{\lambda,m}(s,t;x,y) \right] = 0.$$

c) Herhangi sabit x, y reel sayısı ve her ξ pozitif sayısı için

$$\lim_{\lambda \to \lambda_0} \int_{|x-s|>\xi} \left(\int_{|y-t|>\xi} \widetilde{K}_{\lambda,m}(s,t;x,y)dt \right) ds = 0.$$

d) Her bir $\lambda \in \Lambda$ için $\widetilde{K}_{\lambda,m}(s,t;x,y)$ çekirdek fonksiyonu, $0 < \delta_0 \leq \delta_1$ reel sayısı olmak üzere s değişkenine göre $(x - \delta_0, x)$ aralığı üzerinde monoton artan bir fonksiyon ve $(x, x + \delta_0)$ aralığı üzerinde ise monoton azalan bir fonksiyondur. Ayrıca, $\widetilde{K}_{\lambda,m}(s,t;x,y)$ çekirdek fonksiyonu, t değişkenine göre $(y - \delta_0, y)$ aralığı üzerinde monoton artan bir fonksiyon ve $(y, y + \delta_0)$ aralığı üzerinde ise monoton azalan bir fonksiyondur. Aynı zamanda her bir $\lambda \in \Lambda$ için $\widetilde{K}_{\lambda,m}(s,t;x,y)$ çekirdek fonksiyonu, (s,t) değişkenlerine göre, $(x - \delta_0, x) \times (y - \delta_0, y)$ ve $(x, x + \delta_0) \times (y, y + \delta_0)$ aralıkları üzerinde ikili monoton artan, $(x, x + \delta_0) \times (y - \delta_0, y)$ ve $(x - \delta_0, x) \times (y, y + \delta_0)$ aralıkları üzerinde ikili monoton azalan bir fonksiyondur.

Bu bölümde incelenen teoremde $\widetilde{K}_{\lambda,m}$ çekirdek fonksiyonu, A_3 sınıfına ait kabul edilmiştir.

Teorem 4.1 $(x_0, y_0) \in D = (a,b) \times (c,d)$ noktası, $g \in L_1(D)$ fonksiyonunun $\mu-$genelleştirilmiş Lebesgue noktası ve g fonksiyonu, D bölgesinde sınırlı bir fonksiyon ise bu takdirde $\Lambda \neq \emptyset$, negatif olmayan λ reel sayılarını içeren bir indis kümesi ve λ_0, bu kümenin bir yığılma noktası olmak üzere $0<\delta\leq\delta_0$ reel sayısı için $\lambda\to\lambda_0$ iken,

$$\sum_{m=1}^{n}\left(\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}\int_{y_0-\delta}^{y_0+\delta}\widetilde{K}_{\lambda,m}(s,t;x_0,y_0)\left|\{\mu_1(|x_0-s|)\}_s'\right|\left|\{\mu_2(|y_0-t|)\}_t'\right|dtds\right)$$

fonksiyonunun sınırlı olduğu S kümesi üzerinde

$$\lim_{\lambda\to\lambda_0}U_\lambda(g;x_0,y_0)=\sum_{m=1}^{n}Z_m\left[g(x_0,y_0)\right]^m$$

gerçeklenir.

Burada, $m=1,2,...,n$ olmak üzere g^m fonksiyonu, g fonksiyonunun $m-inci$ kuvvetidir.

İspat. $(x_0,y_0)\in D$ noktası, $g\in L_1(D)$ fonksiyonunun $\mu-$genelleştirilmiş Lebesgue noktası ve g fonksiyonu, D bölgesinde sınırlı bir fonksiyon olmak üzere $(x_0,y_0)\in D$ için $U_\lambda(g;x_0,y_0)$ operatörü ile $\sum_{m=1}^{n}Z_m\left[g(x_0,y_0)\right]^m$ toplamı arasındaki farkın limitinin *sıfıra* gittiğini göstermeliyiz.

Kabul edelim ki

$$L_\lambda=\left|U_\lambda(g;x_0,y_0)-\sum_{m=1}^{n}Z_m\left[g(x_0,y_0)\right]^m\right|$$

olsun. Öncelikle, hipotez gereği $(x_0,y_0)\in D$ noktası, $g\in L_1(D)$ fonksiyonunun $\mu-$genelleştirilmiş Lebesgue noktası olduğundan limit tanımı gereği her $\varepsilon>0$ için bir $0<\delta<\delta_0$ var öyle ki tüm $0<h_1,h_2\leq\delta<\delta_0$ için

$$\int_{x_0-\delta}^{x_0}\int_{y_0-\delta}^{y_0}|g(s,t)-g(x_0,y_0)|\,dtds\leq\varepsilon\mu_1(h_1)\mu_2(h_2),$$

$$\int_{x_0}^{x_0+\delta}\int_{y_0-\delta}^{y_0}|g(s,t)-g(x_0,y_0)|\,dtds\leq\varepsilon\mu_1(h_1)\mu_2(h_2),$$

$$\int_{x_0-\delta}^{x_0}\int_{y_0}^{y_0+\delta}|g(s,t)-g(x_0,y_0)|\,dtds\leq\varepsilon\mu_1(h_1)\mu_2(h_2)$$

ve

$$\int_{x_0}^{x_0+\delta}\int_{y_0}^{y_0+\delta}|g(s,t)-g(x_0,y_0)|\,dtds\leq\varepsilon\mu_1(h_1)\mu_2(h_2)$$

eşitsizlikleri yazılabilir. Şimdi, $m=1,...,n$ için

$$[g_2(s,t)]^m=\begin{cases}[g(s,t)]^m & , \quad (s,t)\in D\\ 0 & , \quad (s,t)\in\mathbb{R}^2\backslash D\end{cases} \tag{4.1}$$

fonksiyonunu tanımlayalım. L_λ farkı, (4.1) ile tanımlanan g_2^m fonksiyonu yardımıyla

$$\begin{aligned}L_\lambda &= \left|U_\lambda(g;x_0,y_0)-\sum_{m=1}^{n}Z_m\left[g(x_0,y_0)\right]^m\right|\\ &= \left|\sum_{m=1}^{n}\left(\int_a^b\int_c^d\left[g(s,t)\right]^m\widetilde{K}_{\lambda,m}(s,t;x_0,y_0)dtds\right)\right.\\ &\quad -\sum_{m=1}^{n}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left[g_2(x_0,y_0)\right]^m\widetilde{K}_{\lambda,m}(s,t;x_0,y_0)dtds\right)\\ &\quad \left.+\sum_{m=1}^{n}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left[g_2(x_0,y_0)\right]^m\widetilde{K}_{\lambda,m}(s,t;x_0,y_0)dtds\right)-\sum_{m=1}^{n}Z_m\left[g(x_0,y_0)\right]^m\right|\end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir. Ardından D bölgesinden oluşan integral sınırı iki kısma ayrılır ve n sonlu sayı olduğundan toplam ile integral yer değiştirilirse

$$\begin{aligned}L_\lambda &= \left|\int_a^b\int_c^d\left(\sum_{m=1}^{n}\left[g(s,t)\right]^m K_{\lambda,m}(s,t;x_0,y_0)\right)dtds\right.\\ &\quad -\iint_D\left(\sum_{m=1}^{n}\left[g(x_0,y_0)\right]^m K_{\lambda,m}(s,t;x_0,y_0)\right)dtds\\ &\quad -\sum_{m=1}^{n}\left(\iint_{\mathbb{R}^2\backslash D}\left[g(x_0,y_0)\right]^m K_{\lambda,m}(s,t;x_0,y_0)dtds\right)\\ &\quad \left.+\sum_{m=1}^{n}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left[g(x_0,y_0)\right]^m K_{\lambda,m}(s,t;x_0,y_0)dtds\right)-\sum_{m=1}^{n}Z_m\left[f(x_0,y_0)\right]^m\right|\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. g_2^m fonksiyonunun tanımı ve mutlak değer fonksiyonunun özelliği kullanılıp, gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned}
L_\lambda \leq & \int_a^b \int_c^d \left(\sum_{m=1}^{n} \left| [g(s,t)]^m - [g(x_0,y_0)]^m \right| K_{\lambda,m}(s,t;x_0,y_0) \right) dtds \\
& + \sum_{m=1}^{n} \left| [g(x_0,y_0)]^m \right| \iint_{\mathbb{R}^2 \setminus D} K_{\lambda,m}(s,t;x_0,y_0) dtds \\
& + \sum_{m=1}^{n} \left| [g(x_0,y_0)]^m \right| \left| \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} K_{\lambda,m}(s,t;x_0,y_0) dtds - Z_m \right|
\end{aligned}$$

eşitsizliği sağlanır. Şimdi, bu son eşitsizliğin sağ tarafında elde edilen ifadelere sırasıyla

$$\begin{aligned}
L_1 &= \int_a^b \int_c^d \left(\sum_{m=1}^{n} \left| [g(s,t)]^m - [g(x_0,y_0)]^m \right| \widetilde{K}_{\lambda,m}(s,t;x_0,y_0) \right) dtds, \\
L_2 &= \sum_{m=1}^{n} \left| [g(x_0,y_0)]^m \right| \iint_{\mathbb{R}^2 \setminus D} \widetilde{K}_{\lambda,m}(s,t;x_0,y_0) dtds
\end{aligned}$$

ve

$$L_3 = \sum_{m=1}^{n} \left| [g(x_0,y_0)]^m \right| \left| \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \widetilde{K}_{\lambda,m}(s,t;x_0,y_0) dtds - Z_m \right|$$

diyelim ve daha sonra da λ, λ_0 yaklaşırken L_1, L_2, L_3 ifadelerinin ise *sıfıra* yaklaştığını gösterelim.

Öncelikle, L_2 ifadesini ele alalım. A_3 sınıfının (c) şartı yani her $\xi > 0$ için

$$\lim_{\lambda \to \lambda_0} \int_{|x-s|>\xi} \left(\int_{|y-t|>\xi} \widetilde{K}_{\lambda,m}(s,t;x,y) dt \right) ds = 0$$

olduğu dikkate alınırsa

$$\begin{aligned}
\lim_{\lambda \to \lambda_0} (L_2) &= \lim_{\lambda \to \lambda_0} \left(\sum_{m=1}^{n} \left| [g(x_0,y_0)]^m \right| \iint_{\mathbb{R}^2 \setminus D} \widetilde{K}_{\lambda,m}(s,t;x_0,y_0) dtds \right) \\
&= 0
\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Benzer şekilde, A_3 sınıfının (a) şartı olan

$$\lim_{\lambda \to \lambda_0} \left| \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \widetilde{K}_{\lambda,m}(s,t;x_0,y_0) dtds - Z_m \right| = 0$$

eşitliği yardımıyla ise

$$\begin{aligned}
\lim_{\lambda\to\lambda_0}(L_3) &= \lim_{\lambda\to\lambda_0}\left(\sum_{m=1}^{n}\left|[g(x_0,y_0)]^m\right|\left|\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\widetilde{K}_{\lambda,m}(s,t;x_0,y_0)dtds - Z_m\right|\right)\\
&= 0
\end{aligned}$$

olduğu görülür. Yani, sonuç olarak $\lambda \to \lambda_0$ iken $(L_2) \to 0$ ve $(L_3) \to 0$ elde edilir.

Şimdi, L_1 integralini hesaplayalım. Bunun için $0 < \delta < \delta_0$ reel sayısı olmak üzere $(x_0, y_0) \in D$ noktaları için L_1 integralinin sınırını $B_\delta(x_0, y_0) = (x_0-\delta, x_0+\delta)\times(y_0-\delta, y_0+\delta)$ komşuluğu yardımıyla aşağıdaki şekilde iki parçaya ayıralım:

$$\begin{aligned}
L_1 &= \int_a^b\int_c^d\left(\sum_{m=1}^{n}\left|[g(s,t)]^m-[g(x_0,y_0)]^m\right|\widetilde{K}_{\lambda,m}(s,t;x_0,y_0)\right)dtds\\
&= \iint_{D\setminus B_\delta}\left(\sum_{m=1}^{n}\left|[g(s,t)]^m-[g(x_0,y_0)]^m\right|\widetilde{K}_{\lambda,m}(s,t;x_0,y_0)\right)dtds\\
&\quad+\iint_{B_\delta}\left(\sum_{m=1}^{n}\left|[g(s,t)]^m-[g(x_0,y_0)]^m\right|\widetilde{K}_{\lambda,m}(s,t;x_0,y_0)\right)dtds
\end{aligned}$$

olmak üzere sırasıyla bu integrallere

$$L_{11} = \iint_{D\setminus B_\delta}\left(\sum_{m=1}^{n}\left|[g(s,t)]^m-[g(x_0,y_0)]^m\right|\widetilde{K}_{\lambda,m}(s,t;x_0,y_0)\right)dtds$$

ve

$$L_{12} = \iint_{B_\delta}\left(\sum_{m=1}^{n}\left|[g(s,t)]^m-[g(x_0,y_0)]^m\right|\widetilde{K}_{\lambda,m}(s,t;x_0,y_0)\right)dtds$$

diyelim.

Öncelikle, L_{11} integralini inceleyelim. L_{11} integraline mutlak değer fonksiyonunun özelliği dikkate alınır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$\begin{aligned}
L_{11} &\leq \iint_{D\setminus B_\delta}\left(\sum_{m=1}^{n}\left\{\left|[g(s,t)]^m\right|+\left|[g(x_0,y_0)]^m\right|\right\}\widetilde{K}_{\lambda,m}(s,t;x_0,y_0)\right)dtds\\
&\leq \sum_{m=1}^{n}\left(\sup_{\substack{|x-s|>\xi\\|y-t|>\xi}}\widetilde{K}_{\lambda,m}(s,t;x_0,y_0)\left\{\iint_{D\setminus B_\delta}\left|[g(s,t)]^m\right|dtds\right.\right.\\
&\quad\left.\left.+\iint_{D\setminus B_\delta}\left|[g(x_0,y_0)]^m\right|dtds\right\}\right)
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Daha sonra, bu eşitsizliğe norm tanımı kullanılırsa,

$$L_{11} \leq \sum_{m=1}^{n} \left(\sup_{\substack{|x-s|>\xi \\ |y-t|>\xi}} \widetilde{K}_{\lambda,m}(s,t;x_0,y_0) \left\{ \|g^m\|_{L_1(D)} + |[g(x_0,y_0)]^m| (b-a)(d-c) \right\} \right)$$

eşitsizliği bulunur. Sonuç olarak, A_3 sınıfının (b) şartından ve g fonksiyonunun sınırlılığından

$$\lim_{\lambda \to \lambda_0} (L_{11}) = 0$$

sağlanır.

Şimdi, B_δ üzerinden, L_{12} integralini hesaplayalım. L_{12} integral sınırını, B_δ komşuluğu yardımıyla aşağıdaki gibi ayıralım:

$$\begin{aligned}
L_{12} &= \iint\limits_{B_\delta} \left(\sum_{m=1}^{n} |[g(s,t)]^m - [g(x_0,y_0)]^m| \, \widetilde{K}_{\lambda,m}(s,t;x_0,y_0) \right) dtds \\
&= \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} \int_{y_0-\delta}^{y_0+\delta} \left(\sum_{m=1}^{n} |[g(s,t)]^m - [g(x_0,y_0)]^m| \, \widetilde{K}_{\lambda,m}(s,t;x_0,y_0) \right) dtds \\
&\leq \int_{x_0-\delta}^{x_0} \int_{y_0-\delta}^{y_0} \left(\sum_{m=1}^{n} |[g(s,t)]^m - [g(x_0,y_0)]^m| \, \widetilde{K}_{\lambda,m}(s,t;x_0,y_0) \right) dtds \\
&\quad + \int_{x_0}^{x_0+\delta} \int_{y_0-\delta}^{y_0} \left(\sum_{m=1}^{n} |[g(s,t)]^m - [g(x_0,y_0)]^m| \, \widetilde{K}_{\lambda,m}(s,t;x_0,y_0) \right) dtds \\
&\quad + \int_{x_0-\delta}^{x_0} \int_{y_0}^{y_0+\delta} \left(\sum_{m=1}^{n} |[g(s,t)]^m - [g(x_0,y_0)]^m| \, \widetilde{K}_{\lambda,m}(s,t;x_0,y_0) \right) dtds \\
&\quad + \int_{x_0}^{x_0+\delta} \int_{y_0}^{y_0+\delta} \left(\sum_{m=1}^{n} |[g(s,t)]^m - [g(x_0,y_0)]^m| \, \widetilde{K}_{\lambda,m}(s,t;x_0,y_0) \right) dtds
\end{aligned}$$

eşitsizliği sağlanır ve bu eşitsizlikteki integrallere sırasıyla

$$L_{121} = \int_{x_0-\delta}^{x_0} \int_{y_0-\delta}^{y_0} \left(\sum_{m=1}^{n} |[g(s,t)]^m - [g(x_0,y_0)]^m| \, \widetilde{K}_{\lambda,m}(s,t;x_0,y_0) \right) dtds,$$

$$L_{122} = \int_{x_0}^{x_0+\delta} \int_{y_0-\delta}^{y_0} \left(\sum_{m=1}^{n} |[g(s,t)]^m - [g(x_0,y_0)]^m| \, \widetilde{K}_{\lambda,m}(s,t;x_0,y_0) \right) dtds,$$

$$L_{123} = \int_{x_0-\delta}^{x_0} \int_{y_0}^{y_0+\delta} \left(\sum_{m=1}^{n} \left| [g(s,t)]^m - [g(x_0,y_0)]^m \right| \widetilde{K}_{\lambda,m}(s,t;x_0,y_0) \right) dtds,$$

$$L_{124} = \int_{x_0}^{x_0+\delta} \int_{y_0}^{y_0+\delta} \left(\sum_{m=1}^{n} \left| [g(s,t)]^m - [g(x_0,y_0)]^m \right| \widetilde{K}_{\lambda,m}(s,t;x_0,y_0) \right) dtds$$

diyelim. Öncelikle, biliyoruz ki Lemma 2.1 deki eşitlik ve g fonksiyonunun sınırlılığı kullanılırsa, $B_m > 0$ sonlu reel sayısı olmak üzere $m = 1, ..., n$ için

$$|g^m(s,t) - g^m(x_0,y_0)| \leq B_m \, |g(s,t) - g(x_0,y_0)|$$

eşitsizliği yazılabilir. O halde, bu eşitsizlik yardımıyla L_{121}, L_{122}, L_{123} ve L_{124} integrallerini yeniden düzenlersek

$$L_{121} \leq \int_{x_0-\delta}^{x_0} \int_{y_0-\delta}^{y_0} \left(\sum_{m=1}^{n} B_m \, |g(s,t) - g(x_0,y_0)| \, \widetilde{K}_{\lambda,m}(s,t;x_0,y_0) \right) dtds, \tag{4.2}$$

$$L_{122} \leq \int_{x_0}^{x_0+\delta} \int_{y_0-\delta}^{y_0} \left(\sum_{m=1}^{n} B_m \, |g(s,t) - g(x_0,y_0)| \, \widetilde{K}_{\lambda,m}(s,t;x_0,y_0) \right) dtds, \tag{4.3}$$

$$L_{123} \leq \int_{x_0-\delta}^{x_0} \int_{y_0}^{y_0+\delta} \left(\sum_{m=1}^{n} B_m \, |g(s,t) - g(x_0,y_0)| \, \widetilde{K}_{\lambda,m}(s,t;x_0,y_0) \right) dtds \tag{4.4}$$

ve

$$L_{124} \leq \int_{x_0}^{x_0+\delta} \int_{y_0}^{y_0+\delta} \left(\sum_{m=1}^{n} B_m \, |g(s,t) - g(x_0,y_0)| \, \widetilde{K}_{\lambda,m}(s,t;x_0,y_0) \right) dtds \tag{4.5}$$

eşitsizlikleri elde edilir.

Şimdi, sırasıyla bu integralleri $\mu-$genelleştirilmiş Lebesgue noktası tanımını da kullanarak inceleyelim. $\mu-$genelleştirilmiş Lebesgue noktası olduğundan limit tanımı yardımıyla

$$G_1(s,t) = \int_{s}^{x_0} \int_{t}^{y_0} |g(k,l) - g(x_0,y_0)| \, dldk, \tag{4.6}$$

$$G_2(s,t) = \int_{x_0}^{s} \int_{t}^{y_0} |g(k,l) - g(x_0,y_0)| \, dldk, \tag{4.7}$$

$$G_3(s,t)=\int_{s}^{x_0}\int_{y_0}^{t}|g(k,l)-g(x_0,y_0)|\,dldk \tag{4.8}$$

ve

$$G_4(s,t)=\int_{x_0}^{s}\int_{y_0}^{t}|g(k,l)-g(x_0,y_0)|\,dldk \tag{4.9}$$

fonksiyonlarını tanımlayalım. Bu eşitsizlikleri kullanarak, L_{121}, $L_{122,}$ L_{123} ve L_{124} integrallerini inceleyelim.

Teorem 2.10 a göre, $g(s,t)\in L_1(D)$ ve $\widetilde{K}_{\lambda,m}(s,t;x_0,y_0)$ çekirdek fonksiyonu integrallenebilen, monoton bir fonksiyon olduğundan $\widetilde{K}_{\lambda,m}(s,t;x_0,y_0)$ çekirdek fonksiyonu $G_1(s,t)$ fonksiyonuna göre Stieltjes integrallenebilirdir ve bu yüzden (4.2) eşitliği ile tanımlı olan L_{121} integrali için,

$$L_{121}\leq(\mathbf{S})\int_{x_0-\delta}^{x_0}\int_{y_0-\delta}^{y_0}\left(\sum_{m=1}^{n}B_m\widetilde{K}_{\lambda,m}(s,t;x_0,y_0)\right)dG_1(s,t)$$

eşitsizliği sağlanır. Ardından, bu son eşitsizliğe Teorem 2.9 ile verilen kısmi integrasyon yöntemi uygulanırsa,

$$\begin{aligned}
L_{121} \leq\; & \int_{x_0-\delta}^{x_0}\int_{y_0-\delta}^{y_0}\sum_{m=1}^{n}B_mG_1(s,t)d\left(\widetilde{K}_{\lambda,m}(s,t;x_0,y_0)\right)\\
& +\int_{x_0-\delta}^{x_0}\sum_{m=1}^{n}B_mG_1(s,y_0-\delta)d_s\left(\widetilde{K}_{\lambda,m}(s,y_0-\delta;x_0,y_0)\right)\\
& +\int_{y_0-\delta}^{y_0}\sum_{m=1}^{n}B_mG_1(x_0-\delta,t)d_t\left(\widetilde{K}_{\lambda,m}(x_0-\delta,t;x_0,y_0)\right)\\
& +B_mG_1(x_0-\delta,y_0-\delta)\widetilde{K}_{\lambda,m}(x_0-\delta,y_0-\delta;x_0,y_0)
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. (4.6) eşitliğinden $x_0-s\leq\delta$ ve $y_0-t\leq\delta$ iken

$$|G_1(s,t)|\leq\varepsilon\mu_1(x_0-s)\mu_2(y_0-t), \tag{4.10}$$

eşitsizliğinin sağlandığı dikkate alınrsa, L_{121} integrali için

$$\begin{aligned}
|L_{121}| &\leq B_m \Bigg\{ \int_{x_0-\delta}^{x_0}\int_{y_0-\delta}^{y_0} \sum_{m=1}^{n} \varepsilon\mu_1(x_0-s)\mu_2(y_0-t) \left| d\left(\widetilde{K}_{\lambda,m}(s,t;x_0,y_0)\right)\right| \\
&+ \int_{x_0-\delta}^{x_0} \sum_{m=1}^{n} \varepsilon\mu_1(x_0-s)\mu_2(\delta) \left| d_s\left(\widetilde{K}_{\lambda,m}(s,y_0-\delta;x_0,y_0)\right)\right| \\
&+ \int_{y_0-\delta}^{y_0} \sum_{m=1}^{n} \varepsilon\mu_1(\delta)\mu_2(y_0-t) \left| d_t\left(\widetilde{K}_{\lambda,m}(x_0-\delta,t;x_0,y_0)\right)\right| \\
&+\varepsilon\mu_1(\delta)\mu_2(\delta)\left|\widetilde{K}_{\lambda,m}(x_0-\delta,y_0-\delta;x_0,y_0)\right|\Bigg\}
\end{aligned}$$

eşitsizliğinin yazılabildiği görülür. Bu eşitsizliğin sağ tarafındaki ifadelere sırasıyla

$$\begin{aligned}
L_{1211} &= \int_{x_0-\delta}^{x_0}\int_{y_0-\delta}^{y_0} \sum_{m=1}^{n} \varepsilon\mu_1(x_0-s)\mu_2(y_0-t) \left| d\left(\widetilde{K}_{\lambda,m}(s,t;x_0,y_0)\right)\right|, \\
L_{1212} &= \int_{x_0-\delta}^{x_0} \sum_{m=1}^{n} \varepsilon\mu_1(x_0-s)\mu_2(\delta) \left| d_s\left(\widetilde{K}_{\lambda,m}(s,y_0-\delta;x_0,y_0)\right)\right|, \\
L_{1213} &= \int_{y_0-\delta}^{y_0} \sum_{m=1}^{n} \varepsilon\mu_1(\delta)\mu_2(y_0-t) \left| d_t\left(\widetilde{K}_{\lambda,m}(x_0-\delta,t;x_0,y_0)\right)\right|, \\
L_{1214} &= \varepsilon\mu_1(\delta)\mu_2(\delta)\left|\widetilde{K}_{\lambda,m}(x_0-\delta,y_0-\delta;x_0,y_0)\right|
\end{aligned}$$

diyelim ve daha sonrasında L_{1211}, L_{1212}, L_{1213} integrallerine tekrar kısmi integrasyon uygulayalım.

İlk olarak, L_{1211} integralini dikkate alalım. $\widetilde{K}_{\lambda,m}(s,t;x_0,y_0)$ çekirdek fonksiyonu, $(x_0-\delta,x_0)\times(y_0-\delta,y_0)$ aralığında (s,t) değişkenlerine göre artan bir fonksiyon olduğundan

$$d\left(\widetilde{K}_{\lambda,m}(s,t;x_0,y_0)\right)\geq 0$$

sağlanır. O halde, L_{1211} integraline kısmi integrasyon uygulanırsa

$$\begin{aligned}
L_{1211} &= \varepsilon \int\limits_{x_0-\delta}^{x_0} \int\limits_{y_0-\delta}^{y_0} \left(\sum_{m=1}^{n} \widetilde{K}_{\lambda,m}(s,t;x_0,y_0) \left\{ \mu_1(x_0-s) \right\}_s^{'} \left\{ \mu_2(y_0-t) \right\}_t^{'} \right) dtds \\
&+ \varepsilon \mu_2(\delta) \int\limits_{x_0-\delta}^{x_0} \left(\sum_{m=1}^{n} \widetilde{K}_{\lambda,m}(s,y_0-\delta;x_0,y_0) \left\{ \mu_1(x_0-s) \right\}_s^{'} \right) ds \\
&+ \varepsilon \mu_1(\delta) \int\limits_{y_0-\delta}^{y_0} \left(\sum_{m=1}^{n} \widetilde{K}_{\lambda,m}(x_0-\delta,t;x_0,y_0) \left\{ \mu_2(y_0-t) \right\}_t^{'} \right) dt \\
&+ \varepsilon \mu_1(\delta)\mu_2(\delta) \widetilde{K}_{\lambda,m}(x_0-\delta,y_0-\delta;x_0,y_0) \qquad (4.11)
\end{aligned}$$

biçiminde yazılabilir.

Şimdi, L_{1212} integralini ele alalım. $\widetilde{K}_{\lambda,m}(s,y_0-\delta;x_0,y_0)$ çekirdek fonksiyonu, $(x_0-\delta,x_0)$ aralığında s değişkenine göre artan bir fonksiyon olduğundan

$$d_s \left(\widetilde{K}_{\lambda,m}(s,y_0-\delta;x_0,y_0) \right) \geq 0$$

sağlanır. O halde, L_{1212} integralinin kısmi integrasyonu için

$$\begin{aligned}
L_{1212} &= -\varepsilon \mu_1(\delta)\mu_2(\delta) \sum_{m=1}^{n} \widetilde{K}_{\lambda,m}(x_0-\delta,y_0-\delta;x_0,y_0) \\
&+ \varepsilon \mu_2(\delta) \int\limits_{x_0-\delta}^{x_0} \left(\sum_{m=1}^{n} \widetilde{K}_{\lambda,m}(s,y_0-\delta;x_0,y_0) \left\{ \mu_1(x_0-s) \right\}_s^{'} \right) ds
\end{aligned} \qquad (4.12)$$

eşitliği elde edilir.

Son olarak, L_{1213} integralini ele alalım. $\widetilde{K}_{\lambda,m}(x_0-\delta,t;x_0,y_0)$ çekirdek fonksiyonu, $(y_0-\delta,y_0)$ aralığında t değişkenine göre artan bir fonksiyon olduğundan

$$d_t \left(\widetilde{K}_{\lambda,m}(x_0-\delta,t;x_0,y_0) \right) \geq 0$$

sağlanır. Buna göre L_{1213} integraline kısmi integrasyon uygulanırsa

$$\begin{aligned}
L_{1213} &= -\varepsilon \mu_1(\delta)\mu_2(\delta) \sum_{m=1}^{n} \widetilde{K}_{\lambda,m}(x_0-\delta,y_0-\delta;x_0,y_0) \\
&+ \varepsilon \mu_1(\delta) \int\limits_{y_0-\delta}^{y_0} \left(\sum_{m=1}^{n} \widetilde{K}_{\lambda,m}(x_0-\delta,t;x_0,y_0) \left\{ \mu_2(y_0-t) \right\}_t^{'} \right) dt
\end{aligned} \qquad (4.13)$$

yazılabilir.

Sonuç olarak, L_{1211}, L_{1212} ve L_{1213} integralleri için elde ettiğimiz (4.11), (4.12) ve (4.13) sonuçları göz önüne alınırsa, L_{121} integralinin

$$L_{121} \leq \varepsilon \int_{x_0-\delta}^{x_0} \int_{y_0-\delta}^{y_0} \left(\sum_{m=1}^{n} \widetilde{K}_{\lambda,m}(s,t;x_0,y_0) \left\{\mu_1(x_0-s)\right\}_s' \left\{\mu_2(y_0-t)\right\}_t' \right) dtds$$

eşitsizliğini sağladığı görülür.

Şimdi, L_{122} integralini ele alalım. Teorem 2.10 a göre $g(s,t) \in L_1(D)$ ve $\widetilde{K}_{\lambda,m}(s,t;x_0,y_0)$ çekirdek fonksiyonu $(x_0, x_0+\delta) \times (y_0-\delta, y_0)$ aralığı üzerinde integrallenebilen, monoton bir fonksiyon olduğundan $\widetilde{K}_{\lambda,m}(s,t;x_0,y_0)$ çekirdek fonksiyonu $G_2(s,t)$ fonksiyonuna göre Stieltjes integrallenebilirdir ve bu yüzden (4.3) ile tanımlı olan L_{122} integrali için

$$L_{122} \leq (\mathbf{S}) \int_{x_0}^{x_0+\delta} \int_{y_0-\delta}^{y_0} \left(\sum_{m=1}^{n} \widetilde{K}_{\lambda,m}(s,t;x_0,y_0) \right) dG_2(s,t)$$

eşitsizliği sağlanır. Bu son eşitsizliğe Teorem 2.9 ile verilen kısmi integrasyon yöntemi uygulanırsa,

$$\begin{aligned} L_{122} \quad \leq \quad & \int_{x_0}^{x_0+\delta} \int_{y_0-\delta}^{y_0} \sum_{m=1}^{n} G_2(s,t) d\left(\widetilde{K}_{\lambda,m}(s,t;x_0,y_0)\right) \\ & + \int_{x_0}^{x_0+\delta} \sum_{m=1}^{n} G_2(s,y_0-\delta) d_s \left(\widetilde{K}_{\lambda,m}(s,y_0-\delta;x_0,y_0)\right) \\ & - \int_{y_0-\delta}^{y_0} \sum_{m=1}^{n} G_2(x_0+\delta,t) d_t \left(\widetilde{K}_{\lambda,m}(x_0+\delta,t;x_0,y_0)\right) \\ & - G_2(x_0+\delta,y_0-\delta) \widetilde{K}_{\lambda,m}(x_0+\delta,y_0-\delta;x_0,y_0) \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. (4.7) eşitliği dikkate alınırsa, $s - x_0 \leq \delta$ ve $y_0 - t \leq \delta$ iken

$$|G_2(s,t)| \leq \varepsilon \mu_1(s-x_0)\mu_2(y_0-t) \tag{4.14}$$

eşitsizliği sağlanır ve buradan L_{122} integrali için,

$$\begin{aligned}
|L_{122}| \leq & \int\limits_{x_0}^{x_0+\delta}\int\limits_{y_0-\delta}^{y_0}\sum_{m=1}^{n}\varepsilon\mu_1(s-x_0)\mu_2(y_0-t)\left|d\left(\widetilde{K}_{\lambda,m}(s,t;x_0,y_0)\right)\right| \\
& +\int\limits_{x_0}^{x_0+\delta}\sum_{m=1}^{n}\varepsilon\mu_1(s-x_0)\mu_2(\delta)\left|d_s\left(\widetilde{K}_{\lambda,m}(s,y_0-\delta;x_0,y_0)\right)\right| \\
& +\int\limits_{y_0-\delta}^{y_0}\sum_{m=1}^{n}\varepsilon\mu_1(\delta)\mu_2(y_0-t)\left|d_t\left(\widetilde{K}_{\lambda,m}(x_0+\delta,t;x_0,y_0)\right)\right| \\
& +\varepsilon\mu_1(\delta)\mu_2(\delta)\left|\widetilde{K}_{\lambda,m}(x_0+\delta,y_0-\delta;x_0,y_0)\right|
\end{aligned}$$

eşitsizliği bulunur. Bu eşitsizliğin sağ tarafındaki ifadelere sırasıyla

$$\begin{aligned}
L_{1221} &= \int\limits_{x_0}^{x_0+\delta}\int\limits_{y_0-\delta}^{y_0}\sum_{m=1}^{n}\varepsilon\mu_1(s-x_0)\mu_2(y_0-t)\left|d\left(\widetilde{K}_{\lambda,m}(s,t;x_0,y_0)\right)\right|, \\
L_{1222} &= \int\limits_{x_0}^{x_0+\delta}\sum_{m=1}^{n}\varepsilon\mu_1(s-x_0)\mu_2(\delta)\left|d_s\left(\widetilde{K}_{\lambda,m}(s,y_0-\delta;x_0,y_0)\right)\right|, \\
L_{1223} &= \int\limits_{y_0-\delta}^{y_0}\sum_{m=1}^{n}\varepsilon\mu_1(\delta)\mu_2(y_0-t)\left|d_t\left(\widetilde{K}_{\lambda,m}(x_0+\delta,t;x_0,y_0)\right)\right|, \\
L_{1224} &= \varepsilon\mu_1(\delta)\mu_2(\delta)\left|\widetilde{K}_{\lambda,m}(x_0+\delta,y_0-\delta;x_0,y_0)\right|
\end{aligned}$$

diyelim ve daha sonrasında L_{1221}, L_{1222}, L_{1223} integrallerine tekrar kısmi integrasyon uygulayalım. $\widetilde{K}_{\lambda,m}(s,t;x_0,y_0)$ çekirdek fonksiyonu, $(x_0,x_0+\delta)\times(y_0-\delta,y_0)$ aralığı üzerinde (s,t) değişkenine göre azalan bir fonksiyon olduğundan

$$d\left(\widetilde{K}_{\lambda,m}(s,t;x_0,y_0)\right)\leq 0$$

sağlanır. O halde L_{1221} integralinin kısmi integrasyonu

$$\begin{aligned}
L_{1221} = & -\varepsilon\int\limits_{x_0}^{x_0+\delta}\int\limits_{y_0-\delta}^{y_0}\left(\sum_{m=1}^{n}\widetilde{K}_{\lambda,m}(s,t;x_0,y_0)\left\{\mu_1(s-x_0)\right\}_s'\left\{\mu_2(y_0-t)\right\}_t'\right)dtds \\
& -\varepsilon\mu_2(\delta)\int\limits_{x_0-\delta}^{x_0}\left(\sum_{m=1}^{n}\widetilde{K}_{\lambda,m}(s,y_0-\delta;x_0,y_0)\left\{\mu_1(s-x_0)\right\}_s'\right)ds \\
& +\varepsilon\mu_1(\delta)\int\limits_{y_0-\delta}^{y_0}\left(\sum_{m=1}^{n}\widetilde{K}_{\lambda,m}(x_0-\delta,t;x_0,y_0)\left\{\mu_2(y_0-t)\right\}_t'\right)dt \\
& +\varepsilon\mu_1(\delta)\mu_2(\delta)\widetilde{K}_{\lambda,m}(x_0+\delta,y_0-\delta;x_0,y_0) \qquad (4.15)
\end{aligned}$$

şeklindedir.

L_{1222} integralinde de $\widetilde{K}_{\lambda,m}(s, y_0 - \delta; x_0, y_0)$ çekirdek fonksiyonu, $(x_0, x_0 + \delta)$ aralığı üzerinde s değişkenine göre azalan bir fonksiyon olduğundan

$$d_s\left(\widetilde{K}_{\lambda,m}(s, y_0 - \delta; x_0, y_0)\right) \leq 0$$

sağlanır. O halde, L_{1222} integraline kısmi integrasyonu uygulanırsa

$$\begin{aligned} L_{1222} &= -\varepsilon\mu_1(\delta)\mu_2(\delta)\sum_{m=1}^{n}\widetilde{K}_{\lambda,m}(x_0+\delta, y_0-\delta; x_0, y_0) \\ &\quad + \varepsilon\mu_2(\delta)\int\limits_{x_0}^{x_0+\delta}\left(\sum_{m=1}^{n}\widetilde{K}_{\lambda,m}(s, y_0-\delta; x_0, y_0)\left\{\mu_1(s-x_0)\right\}_s^{'}\right)ds \end{aligned} \tag{4.16}$$

eşitliği elde edilir.

Son olarak, L_{1223} integralini ele alalım. $\widetilde{K}_{\lambda,m}(x_0 + \delta, t; x_0, y_0)$ çekirdek fonksiyonu, $(y_0 - \delta, y_0)$ aralığında t değişkenine göre artan bir fonksiyon olduğundan

$$d_t\left(\widetilde{K}_{\lambda,m}(x_0 + \delta, t; x_0, y_0)\right) \geq 0$$

sağlanır. Buna göre, L_{1223} integraline kısmi integrasyon uygulanırsa

$$\begin{aligned} L_{1223} &= -\varepsilon\mu_1(\delta)\mu_2(\delta)\sum_{m=1}^{n}\widetilde{K}_{\lambda,m}(x_0+\delta, y_0-\delta; x_0, y_0) \\ &\quad + \varepsilon\mu_1(\delta)\int\limits_{y_0-\delta}^{y_0}\left(\sum_{m=1}^{n}\widetilde{K}_{\lambda,m}(x_0+\delta, t; x_0, y_0)\left\{\mu_2(y_0-t)\right\}_t^{'}\right)dt \end{aligned} \tag{4.17}$$

yazılabilir.

L_{1221}, L_{1222} ve L_{1223} integralleri için elde ettiğimiz (4.15), (4.16) ve (4.17) sonuçları göz önüne alınırsa, L_{122} integralinin

$$L_{122} \leq -\varepsilon\int\limits_{x_0}^{x_0+\delta}\int\limits_{y_0-\delta}^{y_0}\left(\sum_{m=1}^{n}\widetilde{K}_{\lambda,m}(s, t; x_0, y_0)\left\{\mu_1(s-x_0)\right\}_s^{'}\left\{\mu_2(y_0-t)\right\}_t^{'}\right)dtds$$

eşitsizliğini sağladığı görülür.

Şimdi, (4.4) ile verilen L_{123} integralini ele alalım. Teorem 2.10 a göre, $g(s,t) \in L_1(D)$ ve $\widetilde{K}_{\lambda,m}(s,t;x_0,y_0)$ çekirdek fonksiyonu $(x_0-\delta,x_0)\times(y_0,y_0+\delta)$ aralığı üzerinde integrallenebilen, monoton bir fonksiyon olduğundan $\widetilde{K}_{\lambda,m}(s,t;x_0,y_0)$ çekirdek fonksiyonu $G_3(s,t)$ fonksiyonuna göre Stieltjes integrallenebilirdir ve bu yüzden L_{123} integrali için

$$L_{123} \leq (\mathbf{S}) \int\limits_{x_0-\delta}^{x_0} \int\limits_{y_0}^{y_0+\delta} \left(\sum_{m=1}^{n} \widetilde{K}_{\lambda,m}(s,t;x_0,y_0) \right) dG_3(s,t)$$

eşitsizliği sağlanır. Ardından bu son eşitsizliğe Teorem 2.9 ile verilen kısmi integrasyon formülü uygulanırsa,

$$\begin{aligned} L_{123} \leq & \int\limits_{x_0-\delta}^{x_0} \int\limits_{y_0}^{y_0+\delta} \sum_{m=1}^{n} G_3(s,t) d\left(\widetilde{K}_{\lambda,m}(s,t;x_0,y_0)\right) \\ & - \int\limits_{x_0-\delta}^{x_0} \sum_{m=1}^{n} G_3(s,y_0+\delta) d_s\left(\widetilde{K}_{\lambda,m}(s,y_0+\delta;x_0,y_0)\right) \\ & + \int\limits_{y_0}^{y_0+\delta} \sum_{m=1}^{n} G_3(x_0-\delta,t) d_t\left(\widetilde{K}_{\lambda,m}(x_0-\delta,t;x_0,y_0)\right) \\ & - G_3(x_0-\delta,y_0+\delta)\widetilde{K}_{\lambda,m}(x_0-\delta,y_0+\delta;x_0,y_0) \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. (4.8) eşitliği kullanılırsa, $x_0 - s \leq \delta$ ve $t - y_0 \leq \delta$ iken

$$|G_3(s,t)| \leq \varepsilon\mu_1(x_0-s)\mu_2(t-y_0) \tag{4.18}$$

eşitsizliği sağlanır. Bu ifade L_{123} integralinde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} |L_{123}| \leq & \int\limits_{x_0-\delta}^{x_0} \int\limits_{y_0}^{y_0+\delta} \sum_{m=1}^{n} \varepsilon\mu_1(x_0-s)\mu_2(t-y_0) \left| d\left(\widetilde{K}_{\lambda,m}(s,t;x_0,y_0)\right)\right| \\ & + \int\limits_{x_0-\delta}^{x_0} \sum_{m=1}^{n} \varepsilon\mu_1(x_0-s)\mu_2(\delta) \left| d_s\left(\widetilde{K}_{\lambda,m}(s,y_0+\delta;x_0,y_0)\right)\right| \\ & + \int\limits_{y_0}^{y_0+\delta} \sum_{m=1}^{n} \varepsilon\mu_1(\delta)\mu_2(t-y_0) \left| d_t\left(\widetilde{K}_{\lambda,m}(x_0-\delta,t;x_0,y_0)\right)\right| \\ & + \varepsilon\mu_1(\delta)\mu_2(\delta)\left|\widetilde{K}_{\lambda,m}(x_0-\delta,y_0+\delta;x_0,y_0)\right| \end{aligned}$$

eşitsizliğinin sağlandığı görülür. Bu eşitsizliğin sağ tarafındaki ifadelere sırasıyla

$$\begin{aligned}
L_{1231} &= \int_{x_0-\delta}^{x_0} \int_{y_0}^{y_0+\delta} \sum_{m=1}^{n} \varepsilon\mu_1(x_0-s)\mu_2(t-y_0) \left| d\left(\widetilde{K}_{\lambda,m}(s,t;x_0,y_0)\right)\right|, \\
L_{1232} &= \int_{x_0-\delta}^{x_0} \sum_{m=1}^{n} \varepsilon\mu_1(x_0-s)\mu_2(\delta) \left| d_s\left(\widetilde{K}_{\lambda,m}(s,y_0+\delta;x_0,y_0)\right)\right|, \\
L_{1233} &= \int_{y_0}^{y_0+\delta} \sum_{m=1}^{n} \varepsilon\mu_1(\delta)\mu_2(t-y_0) \left| d_t\left(\widetilde{K}_{\lambda,m}(x_0-\delta,t;x_0,y_0)\right)\right|, \\
L_{1234} &= \varepsilon\mu_1(\delta)\mu_2(\delta) \left|\widetilde{K}_{\lambda,m}(x_0-\delta,y_0+\delta;x_0,y_0)\right|
\end{aligned}$$

diyelim ve daha sonrasında L_{1231}, L_{1232}, L_{1233} integrallerine tekrar kısmi integrasyon uygulayalım. $\widetilde{K}_{\lambda,m}(s,t;x_0,y_0)$ çekirdek fonksiyonu, $(x_0-\delta,x_0)\times(y_0,y_0+\delta)$ aralığında (s,t) değişkelerine göre azalan bir fonksiyon olduğundan

$$d\left(\widetilde{K}_{\lambda,m}(s,t;x_0,y_0)\right) \leq 0$$

sağlanır. O halde L_{1231} integralinin kısmi integrasyonu

$$\begin{aligned}
L_{1231} &= -\varepsilon \int_{x_0-\delta}^{x_0} \int_{y_0}^{y_0+\delta} \left(\sum_{m=1}^{n} \widetilde{K}_{\lambda,m}(s,t;x_0,y_0) \left\{\mu_1(x_0-s)\right\}_s^{'} \left\{\mu_2(t-y_0)\right\}_t^{'} \right) dtds \\
&\quad +\varepsilon\mu_2(\delta) \int_{x_0-\delta}^{x_0} \left(\sum_{m=1}^{n} \widetilde{K}_{\lambda,m}(s,y_0+\delta;x_0,y_0) \left\{\mu_1(x_0-s)\right\}_s^{'} \right) ds \\
&\quad -\varepsilon\mu_1(\delta) \int_{y_0}^{y_0+\delta} \left(\sum_{m=1}^{n} \widetilde{K}_{\lambda,m}(x_0-\delta,t;x_0,y_0) \left\{\mu_2(t-y_0)\right\}_t^{'} \right) dt \\
&\quad +\varepsilon\mu_1(\delta)\mu_2(\delta)\widetilde{K}_{\lambda,m}(x_0-\delta,y_0+\delta;x_0,y_0) \qquad (4.19)
\end{aligned}$$

şeklindedir.

L_{1232} integralinde ise $\widetilde{K}_{\lambda,m}(s,y_0+\delta;x_0,y_0)$ çekirdek fonksiyonu, $(x_0-\delta,x_0)$ aralığında s değişkenine göre artan bir fonksiyon olduğundan

$$d_s\left(\widetilde{K}_{\lambda,m}(s,y_0+\delta;x_0,y_0)\right) \geq 0$$

sağlanır. O halde, L_{1232} integralinin kısmi integrasyonu için

$$
\begin{aligned}
L_{1232} &= -\varepsilon\mu_1(\delta)\mu_2(\delta)\sum_{m=1}^{n}\widetilde{K}_{\lambda,m}(x_0-\delta,y_0+\delta;x_0,y_0) \\
&\quad -\varepsilon\mu_2(\delta)\int\limits_{x_0-\delta}^{x_0}\left(\sum_{m=1}^{n}\widetilde{K}_{\lambda,m}(s,y_0+\delta;x_0,y_0)\left\{\mu_1(x_0-s)\right\}_s^{'}\right)ds
\end{aligned}
\tag{4.20}
$$

eşitliği elde edilir.

Şimdi, L_{1233} integralini ele alalım. $\widetilde{K}_{\lambda,m}(x_0-\delta,t;x_0,y_0)$ çekirdek fonksiyonu, $(y_0,y_0+\delta)$ aralığında t değişkenine göre azalan bir fonksiyon olduğundan

$$
d_t\left(\widetilde{K}_{\lambda,m}(x_0-\delta,t;x_0,y_0)\right)\leq 0
$$

sağlanır. Buna göre, L_{1233} integraline kısmi integrasyon uygulanırsa

$$
\begin{aligned}
L_{1233} &= -\varepsilon\mu_1(\delta)\mu_2(\delta)\sum_{m=1}^{n}\widetilde{K}_{\lambda,m}(x_0-\delta,y_0+\delta;x_0,y_0) \\
&\quad +\varepsilon\mu_1(\delta)\int\limits_{y_0}^{y_0+\delta}\left(\sum_{m=1}^{n}\widetilde{K}_{\lambda,m}(x_0-\delta,t;x_0,y_0)\left\{\mu_2(t-y_0)\right\}_t^{'}\right)dt
\end{aligned}
\tag{4.21}
$$

yazılabilir.

L_{1231}, L_{1232} ve L_{1233} integralleri için elde ettiğimiz (4.19), (4.20) ve (4.21) sonuçları göz önüne alınırsa, L_{121} integralinin

$$
L_{123}\leq-\varepsilon\int\limits_{x_0-\delta}^{x_0}\int\limits_{y_0}^{y_0+\delta}\left(\sum_{m=1}^{n}\widetilde{K}_{\lambda,m}(s,t;x_0,y_0)\left\{\mu_1(x_0-s)\right\}_s^{'}\left\{\mu_2(t-y_0)\right\}_t^{'}\right)dtds
$$

eşitsizliğini sağladığı görülür.

Son olarak, benzer işlemleri L_{124} integraline uygulayalım. Teorem 2.10 a göre, $g(s,t)\in L_1(D)$ ve $\widetilde{K}_{\lambda,m}(s,t;x_0,y_0)$ çekirdek fonksiyonu $(x_0,x_0+\delta)\times(y_0,y_0+\delta)$ aralığı üzerinde integrallenebilen, monoton bir fonksiyon olduğundan, $\widetilde{K}_{\lambda,m}(s,t;x_0,y_0)$ çekirdek fonksiyonu $G_4(s,t)$ fonksiyonuna göre Stieltjes integrallenebilirdir. Bu yüzden L_{124} integrali için

$$
L_{124}\leq(\mathbf{S})\int\limits_{x_0}^{x_0+\delta}\int\limits_{y_0}^{y_0+\delta}\left(\sum_{m=1}^{n}\widetilde{K}_{\lambda,m}(s,t;x_0,y_0)\right)dG_4(s,t)
$$

eşitsizliği sağlanır. Ardından, bu son eşitsizliğe Teorem 2.9 ile verilen kısmi integrasyon uygulanırsa,

$$\begin{aligned}
L_{124} \;\leq\; & \int\limits_{x_0}^{x_0+\delta}\int\limits_{y_0}^{y_0+\delta}\sum_{m=1}^{n} G_4(s,t)d\left(\widetilde{K}_{\lambda,m}(s,t;x_0,y_0)\right) \\
& -\int\limits_{x_0}^{x_0+\delta}\sum_{m=1}^{n} G_4(s,y_0+\delta)d_s\left(\widetilde{K}_{\lambda,m}(s,y_0+\delta;x_0,y_0)\right) \\
& -\int\limits_{y_0}^{y_0+\delta}\sum_{m=1}^{n} G_4(x_0+\delta,t)d_t\left(\widetilde{K}_{\lambda,m}(x_0+\delta,t;x_0,y_0)\right) \\
& +G_4(x_0+\delta,y_0+\delta)\widetilde{K}_{\lambda,m}(x_0+\delta,y_0+\delta;x_0,y_0)
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. (4.9) eşitliği kullanılırsa, $s-x_0 \leq \delta$ ve $t-y_0 \leq \delta$ iken

$$|G_4(s,t)| \leq \varepsilon\mu_1(s-x_0)\mu_2(t-y_0) \tag{4.22}$$

eşitsizliğinin sağlandığı görülür. Bu ifade L_{124} integralinde yazılırsa

$$\begin{aligned}
|L_{124}| \;\leq\; & \int\limits_{x_0}^{x_0+\delta}\int\limits_{y_0}^{y_0+\delta}\sum_{m=1}^{n} \varepsilon\mu_1(s-x_0)\mu_2(t-y_0)\left|d\left(\widetilde{K}_{\lambda,m}(s,t;x_0,y_0)\right)\right| \\
& +\int\limits_{x_0}^{x_0+\delta}\sum_{m=1}^{n} \varepsilon\mu_1(s-x_0)\mu_2(\delta)\left|d_s\left(\widetilde{K}_{\lambda,m}(s,y_0+\delta;x_0,y_0)\right)\right| \\
& +\int\limits_{y_0}^{y_0+\delta}\sum_{m=1}^{n} \varepsilon\mu_1(\delta)\mu_2(t-y_0)\left|d_t\left(\widetilde{K}_{\lambda,m}(x_0+\delta,t;x_0,y_0)\right)\right| \\
& +\varepsilon\mu_1(\delta)\mu_2(\delta)\left|\widetilde{K}_{\lambda,m}(x_0+\delta,y_0+\delta;x_0,y_0)\right|
\end{aligned}$$

eşitsizliği yazılabilir. Bu eşitsizliğin sağ tarafındaki ifadelere sırasıyla

$$\begin{aligned}
L_{1241} &= \int\limits_{x_0}^{x_0+\delta}\int\limits_{y_0}^{y_0+\delta}\sum_{m=1}^{n} \varepsilon\mu_1(s-x_0)\mu_2(t-y_0)\left|d\left(\widetilde{K}_{\lambda,m}(s,t;x_0,y_0)\right)\right|, \\
L_{1242} &= \int\limits_{x_0}^{x_0+\delta}\sum_{m=1}^{n} \varepsilon\mu_1(s-x_0)\mu_2(\delta)\left|d_s\left(\widetilde{K}_{\lambda,m}(s,y_0+\delta;x_0,y_0)\right)\right|, \\
L_{1243} &= \int\limits_{y_0}^{y_0+\delta}\sum_{m=1}^{n} \varepsilon\mu_1(\delta)\mu_2(t-y_0)\left|d_t\left(\widetilde{K}_{\lambda,m}(x_0+\delta,t;x_0,y_0)\right)\right|, \\
L_{1244} &= \varepsilon\mu_1(\delta)\mu_2(\delta)\left|\widetilde{K}_{\lambda,m}(x_0+\delta,y_0+\delta;x_0,y_0)\right|
\end{aligned}$$

diyelim ve daha sonrasında L_{1241}, L_{1242}, L_{1243} integrallerine tekrar kısmi integrasyon uygulayalım. $\widetilde{K}_{\lambda,m}(s,t;x_0,y_0)$ çekirdek fonksiyonu, $(x_0,x_0+\delta)\times(y_0,y_0+\delta)$ aralığında (s,t) değişkenlerine göre artan bir fonksiyon olduğundan

$$d\left(\widetilde{K}_{\lambda,m}(s,t;x_0,y_0)\right) \geq 0$$

sağlanır. O halde L_{1241} integralinin kısmi integrasyonu

$$\begin{aligned} L_{1241} &= \varepsilon \int\limits_{x_0}^{x_0+\delta}\int\limits_{y_0}^{y_0+\delta} \left(\sum_{m=1}^{n} \widetilde{K}_{\lambda,m}(s,t;x_0,y_0)\left\{\mu_1(s-x_0)\right\}_s^{'}\left\{\mu_2(t-y_0)\right\}_t^{'}\right) dtds \\ &\quad -\varepsilon\mu_2(\delta)\int\limits_{x_0}^{x_0+\delta}\left(\sum_{m=1}^{n}\widetilde{K}_{\lambda,m}(s,y_0+\delta;x_0,y_0)\left\{\mu_1(s-x_0)\right\}_s^{'}\right) ds \\ &\quad -\varepsilon\mu_1(\delta)\int\limits_{y_0}^{y_0+\delta}\left(\sum_{m=1}^{n}\widetilde{K}_{\lambda,m}(x_0+\delta,t;x_0,y_0)\left\{\mu_2(t-y_0)\right\}_t^{'}\right) dt \\ &\quad +\varepsilon\mu_1(\delta)\mu_2(\delta)\widetilde{K}_{\lambda,m}(x_0+\delta,y_0+\delta;x_0,y_0) \end{aligned} \tag{4.23}$$

eşitliği şeklindedir.

L_{1242} integralini ele alalım. Burada, $\widetilde{K}_{\lambda,m}(s,y_0+\delta;x_0,y_0)$ çekirdek fonksiyonu, $(x_0,x_0+\delta)$ aralığında s değişkenine göre azalan bir fonksiyon olduğundan

$$d_s\left(\widetilde{K}_{\lambda,m}(s,y_0+\delta;x_0,y_0)\right) \leq 0$$

eşitsizliği sağlanır. O halde L_{1242} integralinin kısmi integrasyonu için

$$\begin{aligned} L_{1242} &= -\varepsilon\mu_1(\delta)\mu_2(\delta)\sum_{m=1}^{n}\widetilde{K}_{\lambda,m}(x_0+\delta,y_0+\delta;x_0,y_0) \\ &\quad +\varepsilon\mu_2(\delta)\int\limits_{x_0-\delta}^{x_0}\left(\sum_{m=1}^{n}\widetilde{K}_{\lambda,m}(s,y_0+\delta;x_0,y_0)\left\{\mu_1(s-x_0)\right\}_s^{'}\right) ds \end{aligned} \tag{4.24}$$

eşitliği elde edilir.

Şimdi, L_{1243} integralini ele alalım. $\widetilde{K}_{\lambda,m}(x_0+\delta,t;x_0,y_0)$ çekirdek fonksiyonu, $(y_0,y_0+\delta)$ aralığında t değişkenine göre azalan bir fonksiyon olduğundan

$$d_t\left(\widetilde{K}_{\lambda,m}(x_0+\delta,t;x_0,y_0)\right) \leq 0$$

sağlanır. Buna göre L_{1243} integraline kısmi integrasyon uygulanırsa

$$\begin{aligned} L_{1243} &= -\varepsilon\mu_1(\delta)\mu_2(\delta)\sum_{m=1}^{n}\widetilde{K}_{\lambda,m}(x_0+\delta,y_0+\delta;x_0,y_0) \\ &\quad +\varepsilon\mu_1(\delta)\int\limits_{y_0}^{y_0+\delta}\left(\sum_{m=1}^{n}\widetilde{K}_{\lambda,m}(x_0+\delta,t;x_0,y_0)\left\{\mu_2(t-y_0)\right\}_t^{'}\right)dt \end{aligned} \tag{4.25}$$

yazılabilir.

L_{1241}, L_{1242} ve L_{1243} integralleri için elde ettiğimiz (4.23), (4.24) ve (4.25) sonuçları göz önüne alınırsa L_{124} integralinin

$$L_{124}\le\varepsilon\int\limits_{x_0}^{x_0+\delta}\int\limits_{y_0}^{y_0+\delta}\left(\sum_{m=1}^{n}\widetilde{K}_{\lambda,m}(s,t;x_0,y_0)\left\{\mu_1(s-x_0)\right\}_s^{'}\left\{\mu_2(t-y_0)\right\}_t^{'}\right)dtds$$

eşitsizliğini sağladığı görülür.

Sonuç olarak L_{121}, L_{122}, L_{123} ve L_{124} integralleri için bulunan sonuçlar

$$\begin{aligned} L_{121} &\le \varepsilon\int\limits_{x_0-\delta}^{x_0}\int\limits_{y_0-\delta}^{y_0}\left(\sum_{m=1}^{n}\widetilde{K}_{\lambda,m}(s,t;x_0,y_0)\left\{\mu_1(x_0-s)\right\}_s^{'}\left\{\mu_2(y_0-t)\right\}_t^{'}\right)dtds, \\ L_{122} &\le -\varepsilon\int\limits_{x_0}^{x_0+\delta}\int\limits_{y_0-\delta}^{y_0}\left(\sum_{m=1}^{n}\widetilde{K}_{\lambda,m}(s,t;x_0,y_0)\left\{\mu_1(s-x_0)\right\}_s^{'}\left\{\mu_2(y_0-t)\right\}_t^{'}\right)dtds, \\ L_{123} &\le -\varepsilon\int\limits_{x_0-\delta}^{x_0}\int\limits_{y_0}^{y_0+\delta}\left(\sum_{m=1}^{n}\widetilde{K}_{\lambda,m}(s,t;x_0,y_0)\left\{\mu_1(x_0-s)\right\}_s^{'}\left\{\mu_2(t-y_0)\right\}_t^{'}\right)dtds \end{aligned}$$

ve

$$L_{124}\le\varepsilon\int\limits_{x_0}^{x_0+\delta}\int\limits_{y_0}^{y_0+\delta}\left(\sum_{m=1}^{n}\widetilde{K}_{\lambda,m}(s,t;x_0,y_0)\left\{\mu_1(s-x_0)\right\}_s^{'}\left\{\mu_2(t-y_0)\right\}_t^{'}\right)dtds$$

şeklindedir. Bulunan bu ifadeler toplanıp,ardından gerekli düzenlemeleri yapılırsa, L_{12} integrali için

$$L_{12}\le\varepsilon\int\limits_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}\int\limits_{y_0-\delta}^{y_0+\delta}\left(\sum_{m=1}^{n}\widetilde{K}_{\lambda,m}(s,t;x_0,y_0)\left|\left\{\mu_1(|x_0-s|)\right\}_s^{'}\right|\left|\left\{\mu_2(|y_0-t|)\right\}_t^{'}\right|\right)dtds$$

sonucuna varılır. Hipotez gereği bu ifadenin sınırlı olduğu noktalar kümesi üzerinde $\lambda\to\lambda_0$ iken $(L_{12})\to 0$ olduğu açıktır. Yani, $(x_0,y_0)\in D$ noktası, $g\in L_1(D)$

fonksiyonunun $\mu-$genelleştirilmiş Lebesgue noktası ve g fonksiyonu, D bölgesinde sınırlı bir fonksiyon ise bu takdirde $\Lambda \neq \emptyset$, negatif olmayan λ reel sayılarını içeren bir indis kümesi ve λ_0, bu kümenin bir yığılma noktası olmak üzere $\lambda \to \lambda_0$ iken,

$$\sum_{m=1}^{n} \left(\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} \int_{y_0-\delta}^{y_0+\delta} \widetilde{K}_{\lambda,m}(s,t;x_0,y_0) \left| \{\mu_1(|x_0-s|)\}_s' \right| \left| \{\mu_2(|y_0-t|)\}_t' \right| dtds \right)$$

fonksiyonunun sınırlı olduğu S kümesi üzerinde

$$\lim_{\lambda \to \lambda_0} U_\lambda(g;x_0,y_0) = \sum_{m=1}^{n} Z_m \left[g(x_0,y_0) \right]^m$$

gerçeklenir.

Sonuç olarak istenilen elde edilmiştir ve ispat tamamlanmıştır. ■

5. TARTIŞMA VE SONUÇ

Matematik, matematiksel fizik, bilgisayar biliminde ve çeşitli mühendislik dallarında önemli uygulama alanlarına sahip olan yaklaşımlar teorisi geçen yüzyılın sonlarında, sürekli fonksiyonlara toplam biçiminde lineer operatörler yardımıyla yaklaşım çalışmaları Weierstrass'ın (1885) verdiği iki teoremle ile başlamıştır. Daha sonra singülerlik kavramı, lineer olmayan integral operatörlerinin durumunu kapsayacak şekilde genişletilmiştir. Lineer olmayan integral operatörlerinin yaklaşım teorisi ve ilgili konularda oynadığı role ilişkin araştırmalara ayrılmış bir dizi makale ortaya çıkmıştır. Bunlara örnek olarak, Musielak (1991, 1993, 1996, 1999, 2000), Świderski ve Wachnicki (2000) örnek olarak verilebilir. Son yıllarda bu konu ile ilgili yapılan çalışmalar lineer olmayan integral operatör ailesinin yakınsaklığının da uygulamalarda ne kadar önemli olduğunu gösterir niteliktedir. Bu nedenle tanımlanacak yeni operatör dizileri yardımıyla elde edilen yaklaşım sonuçlarının uygulama alanlarında da önemli bazı gelişmeler ortaya çıkaracağı beklenmektedir.

Bu bilgiler ışığında, bu tez çalışmasında da öncelikle gerekli tanım ve teoremler verilmiştir. Ayrıca, yaklaşımlar teorisinde integrallenebilen fonksiyonlara yaklaşım, süreklilik noktalarında çokça çalışıldığından yeni çalışma alanları açmak için diğer karakteristik noktalarda da yaklaşımlar incelenmiştir. Bu çalışmada aşağıda verilen lineer olmayan operatörlerin, karakteristik noktalardan biri olan $\mu-$genelleştirilmiş Lebesgue noktasındaki noktasal yakınsaklıkları incelenmiştir.

İkinci bölümün ilk kesiminde, $g \in L_1(a,b)$ fonksiyonu için

$$T_\lambda(g;x) = \int_a^b \sum_{m=1}^{n} g^m(s) K_{\lambda,m}(s;x)ds, \quad \lambda \in \Lambda, \quad x \in (a,b)$$

biçiminde sonlu toplam içeren lineer olmayan integral operatörünün noktasal yakınsaklığı araştırılmıştır. Burada, $K_{\lambda,m} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_0^+$ fonksiyonu, bir çekirdek fonksiyonu olmak üzere özel olarak tanımlanmıştır.

Bu bölümün ikinci kesiminde ise, sonsuz toplam içeren lineer olmayan integral operatörünün noktasal yakınsaklığı araştırılmıştır. Yani, $1 \leq p < \infty$ olmak üzere

$g \in L_p(a,b)$ ve $g \in L_p(\mathbb{R})$ fonksiyonu için

$$\Psi_\gamma(g;x) = \sum_{m=1}^{\infty} \int_a^b g^m(s) H_{\gamma,m}(s-x)ds, \quad \gamma \in \Gamma, \quad x \in (a,b)$$

biçiminde konvolüsyon tipinde olan operatörlerin noktasal yakınsaklığı incelenmiştir. Burada, $\gamma \in \Gamma$ reel sayısı için $H_{\gamma,m} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ çekirdek fonksiyonu, özellikleri önceden verilmiş bir fonksiyondur ve $m = 1, 2, ...$ olmak üzere g^m fonksiyonu, g fonksiyonunun $m - inci$ kuvvetidir.

Çalışmanın en son bölümünde, $g \in L_1(D)$ fonksiyonu ve $D = (a,b) \times (c,d)$ dikdörtgensel bölgesi, $\mathbb{R}^2$ nin keyfi sonlu açık bölgesi olmak üzere

$$U_\lambda(g;x,y) = \sum_{m=1}^{n} \int_a^b \int_c^d [g(s,t)]^m \widetilde{K}_{\lambda,m}(s,t;x,y)dtds, \quad \lambda \in \Lambda, \quad (x,y) \in D$$

biçiminde sonlu toplam içeren iki katlı lineer olmayan integral operatörünün noktasal yakınsaklığı araştırılmıştır. $\lambda \in \Lambda$ reel sayısı için $\widetilde{K}_{\lambda,m} : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}_0^+$ çekirdek fonksiyonu, özellikleri önceden verilmiş bir fonksiyondur ve $m = 1, 2, ..., n$ olmak üzere g^m fonksiyonu, g fonksiyonunun $m - inci$ kuvvetidir.

KAYNAKLAR

Almali, S. E., 2017. *On Approximation Properties for Non-linear Integral Operators,* New Trends in Mathematical Sciences 5 (4), 123-129.

Almali, S. E., 2017. *Approximation of A Class of Non-linear Integral Operators,* CBU J. of Sci., Vol 13 (2), 407-411.

Almali, S. E., Uysal, G., Mishra, V. N., Guller, O. O., 2017. *On Singular Integral Operators Involving Power Nonlinearity*, Korean J. Math. 25 (4), 483-494.

Bardaro, C., Musielak, J., Vinti, G., 2003. *Nonlinear Integral Operators and Applications*, Walter de Gruyter, Berlin, New York.

Butzer, P. L. and Nessel, R. J., 1971. *Fourier Analysis and Approximation*, Academic Press, 554 p., New York and London.

Butzer, P. L., Jansche, S., 1998. *The Exponential Sampling Theorem of Signal Analysis*, Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena 46, suppl., 99–122, Special Volume Dedicated to Prof. Calogero Vinti.

Clarkson, J. A., 1933. *On Double Riemann-Stieltjes Integrals.* Bull. Amer. Math. Soc., 39, no:12, 929-936.

Esen, S., 2002. *Konvolüsyon Tipinde Olmayan İntegral Operatörler Ailesinin Karakteristik Noktalarda Yakınsaklığı ve Yakınsaklık Hızı*, Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Doktora tezi, 95s.

Faddeev, D. K., 1936. *On the Representation of Summable Functions by means of Singular Integrals at Lebesgue Points*, Math. Sbornik, Vol 1 (43), No:3, pp. 351-368.

Fatou, P., 1906. *Séries Trigonometriques et Séries de Taylor*, AM, 30, 335-400.

Fejer, L., 1911. *Sur les Singularites de la Serie de Fourier des Fonctions Continues,* Annales scientifiques de l' Ecole Normale Superieure, 28, 63-104.

Frechet, M. R., 1910. *Extension au cas des Integrals Multiples d'une Definition del'integrale due a Stieltjes.* Nouvelles Annales de Math. 10 (4); 241-256.

Gadjiev, A. D., 1968. *On the Speed of Convergence of Singular Integrals*, Special Problems of Functional Analysis and Its Application, Baku.

Ghorpade, S. R. and Limaye, B. V., 2010. *A Course in Multivariable Calculus and Analysis,* Springer, 475 p., New York.

Guller, O. O., Uysal, G. and Ibikli, E., 2018. *Fatou Type Convergence of Singular Integral Operators Equipped with Infinite Sum*, Int. Conf. on Math. Istanbul, July 3-6, p. 136.

Haciyev, A. D. ve Hacisalihoglu H. H., 1995. *Lineer Pozitif Operatörler Dizilerinin Yakınsaklığı*, A.Ü.F.F. Döner Sermaye Işletme Yayınları, 100 s., Ankara.

Hobson, E. W., 1921. *The Theory of Functions of a Real Variable and the Theory of Fouriers Series*, Vol. 1, Cambridge University Press, 671 p., England.

Karslı, H. and İbikli, E., 2005. *Approximation Properties of Convolution Type Singular Integral Operators Depending On Two Parameters and of Their Derivatives in* $L_1(a, b)$, Proc. 16th Int. Conf. Jangjeon Math. Soc 16, 66-76.

Karslı, H. and İbikli, E., 2007. *On Convergence of Convolution Type Singular Integral Operators Depending On Two Parameters,* Fasc. Math 38, 25-39.

Karslı, H., 2008. *On the Approximation Properties of a Class of Convolution Type Nonlinear Singular Integral Operators,* Georgian Mathematical Journal 15 (1), 77-86.

Karslı, H., 2013. *Some Convergence Results For Nonlinear Singular Integral Operators,* Demonstratio Mathematica 46 (4), 729-740.

Kolmogorov, A. N. and Fomin, S. V., 1975. *"Introductory Real Analysis"*, Translated from the Second Russian Edition and edited by Richard A. Silverman (Corrected reprinting), Dover Publications, Inc., New York, 328-340.

Lebesgue, H., 1909. *Sur les Integrales Singulieres*, Annales de la Faculte des Sciences de Toulouse Ser. 3, 1; 25-117.

Lebesgue, H., 1910. *Sur l'integration des Fonctions Discontinues*, Annales scientifiques de l'Ecole Normale Superieure, 27; 361-450.

Lenze, B., 1989. *On Multidimensional Lebesgue-Stieltjes Convolution Operators*, Int. Series of Numerical Math., Vol. 90, 225-232.

Mamedov, R. G., 1961. *On the Order of Convergence of Functions by the Linear Integral Operators in Lebesgue Points*, Izvestiya Acad. of the Azerbaycan, No:1.

Mamedov, R.G. 1965a. *A Generalization of an Inequality of I. P. Natanson and the order of Convergence of Singular Integrals (in Russian)*, Azerbaıdzan. Gos. Univ. Ucen. Zap. Ser. Fiz.-Mat. Nauk, no. 5; 24-33.

Mamedov, R. G., 1965b. *A Study of Orders of Convergence of One-Dimensional and Multidimensional Singular Integrals,* In: Studies in Theory of Differential Equations and Theory Functions (in Russian), Izdat. Akad. Nauk Azerbaycan SSR., Bakü, 92-108.

Mamedov, R. G., 1967. *Fonksiyonların Lineer Operatörlerle Yaklaşması*, Azerbaycan Devlet Neşriyatı 216 s., Bakü.

Musielak, J., 1983. *On Some Approximation Problems in Modular Spaces*, In Constructive Function Theory (Proc. Int. Conf.,Varna, June 1–5, 1981), pp. 455–461, Publ. House Bulgarian Acad. Sci., Sofia.

Musielak, J., 1991. *Approximation by Nonlinear Singular Integral Operators in Generalized Orlicz Spaces*, Comment. Math. Prace Mat., 31, 79–88.

Musielak, J., 1993. *Nonlinear Approximation in Some Modular Function Spaces*, I. Math. Japon. 38, 83–90.

Musielak, J., 1993. *On the Approximation by Nonlinear Integral Operators with Generalized Lipschitz Kernel over a Compact Abelian Group*, Comment. Math. Prace Mat., 33, 99–104.

Musielak, J., 1996. *Nonlinear Integral Operators with Generalized Lipschitz Kernels*, In: Functional Analysis (Proc.of First Int.Workshop, Trier University, September 26–October 1, 1994), pp. 313–318, de Gruyter, Berlin.

Musielak, J., 1996. *On Some Conservative Nonlinear Integral Operators*, Acta Univ. Lodz. Folia Math. 8, 23–31.

Musielak, J., 1999. *On Nonlinear Integral Operators*, Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena 47, 183–190.

Musielak, J., 2000. *Approximation by a Nonlinear Convolution Operator in Modular Function Spaces*, Rocznik Nauk. Dydakt. Prace Mat., 17, 181–190.

Natanson, I. P., 1940. *Sur un procede de sommation des integrales de Fourier*, Rec. Math. [Mat. Sbornik] N. S., 7 (49); 313-320.

Natanson, I.P., 1960. *Theory of Functions of a Real Variable*. Vol. 2., Translated from the Russian by Leo F. Boron, Frederick Ungar Pub. Co., 265p., NewYork.

Natanson, I. P., 1964. *Theory of Functions of a Real Variable*, Vol 1., Translated from the Russian by Leo F. Boron, Frederick Ungar Pub. Co., 542 p., New York.

Nessel, R. J., 1966. *Contributions to the Theory of Saturation for Singular Integrals in Several Variables*, III, Radial Kernels. Indag. Math., 29. Ser. A., 65-73.

Rudin, W., 1987. *Real and Complex Analysis*, Third edition. McGraw-Hill Book Co., New York, xiv+416 pp.

Rydzewska, B., 1973. *Approximation of Functions by Ordinary Singular Integrals*, Fasciculi Mathematici No:7, 71-81.

Rydzewska, B. 1974. *Approximation des Fonctions de deux Variables par des Integrales Singulieres Doubles,* Fasc. Math., 8; 35-45.

Serenbay, S. K., Dalmanoğlu, Ö. and İbikli E., 2014. *On Convergence of Singular Integral Operators with Radial Kernels.* In Approximation Theory XIV. San Antonio 201, Springer Proceedings in Math&Stac., Vol.83, Springer, 295-308.

Shalit, O. M., 2017. *A First Course in Functional Analysis*, CRC Press, Boca Raton, FL, USA.

Sikkema, P. C., 1983. *Approximation with Convolution Operators Depending on Two Parameters*, Approximation Theory IV (College Station, Tex., 1983), 679-684, Academic Press, New York.

Siudut, S., 1988. *On the Convergence of Double Singular Integrals,* Comment. Math., 28; 143-146.

Siudut, S., 1989. *A theorem of Romanovski Type for Double Singular Integrals*, Comment. Math., 28, no.2., 355-359.

Spivak, M. D., 1994. *Calculus (3rd ed.)*, Publish or Perish, Inc., Houston, Texas.

Stein, E. M., 1970. *Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions*, Princeton University Press, 287 p., New Jersey.

Stein, E. M. and Weiss, G., 1971. *Introduction to Fourier Analysis on Euclidean Spaces*, Princeton University Press, 334 p., New Jersey.

Świderski, T. and Wachnicki, E., 2000. *Nonlinear Singular Integrals Depending on Two Parameters*, Comment. Math. Prace Mat., 15, 181–189.

Taberski, R., 1962a. *Singular Integrals Depending on Two Parameters*, Prace Matematyczne VII, 173-179.

Taberski, R., 1962b. *Some Theorems on Double Integrals Over Rectangles*, Ann. Polon. Math., 11; 209-216.

Taberski, R., 1964. *On Double Integrals and Fourier Series*, Ann. Polon. Math., Vol.15, 97-115.

Tandori, K., 1954. *Über die Konvergenz Singularer Integrale*, Acta Sci. Math. XV, Szeged, 223-230.

Uysal, G. and İbikli, E., 2016. *A Note on Nonlinear Singular Integral Operators Depending on Two Parameters*, New Trends in Mathematical Sciences, 4(1), 104-114.

Uysal, G., 2016. *Üç Parametreye Bağlı İki Katlı Radyal Çekirdekli Singüler İntegrallerin Sınırsız Bölgede Yakınsaklığı*, Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Doktora tezi, 121s.

Uysal, G., Yılmaz, M. M. and İbikli, E., 2017. *On Pointwise Convergence of Bivariate Nonlinear Singular Integral Operators*, Kuwait J. Sci., 44 (2) pp. 46-57.

Vinti, G. and Angeloni, L., 2005. *Rate of Approximation for Nonlinear Integral Operators with Application to Signal Processing*, Differential Integral Equations, Volume 18, No: 8, 855-890.

Yıldırım, N., 2019. *Toplam İçeren Singüler İntegral Operatörler Üzerine*, Karabük Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Yüksek lisans tezi, 55s.

Yılmaz, M. M., 2011. *Üç Parametreye Bağlı İki Katlı Singüler İntegrallerin Yakınsaklığı*, Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Doktora tezi, 78 s.

Yılmaz, M. M., Kirci Serenbay, S. and Ibikli E., 2011. *On Singular Integrals Depending on Three Parameters*, Applied Math. and Computation, Vol. 218, no.3., 1132-1135.

Yılmaz, M. M., 2016. *A Study on Convergence of Non-Convolution Type Double Singular Integral Operators,* New Trends in Mathematical Sciences 4 (4), 67-78.

Yılmaz, M. M., 2018. A *Note On Convergence of Nonlinear General Type Two Dimensional Singular Integral Operators,* Sakarya University Journal of Science 22 (6), 1836-1841.

Zygmund, A., 1959. *Trigonometric Series*, Vol. I-II, Cambridge University Press., 747p. London.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Özge ÖZALP GÜLLER

Doğum Yeri : Ankara

Doğum Tarihi : 20/03/1988

Medeni Hali : Evli

Yabancı Dili : İngilizce

Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl):

Lise : Kurtuluş Yabancı Dil Ağırlıklı Lisesi

Lisans : Gazi Üniversitesi, Matematik Bölümü

Yüksek Lisans : Ankara Üniversitesi

Çalıştığı Kurum/Kurumlar ve Yıl:

Yayınları: Uysal, G., Mishra, V. N., **Guller**, **O. O.** and Ibikli, E., 2016. A generic research on nonlinear non-convolution type singular integral operators. The Korean Journal of Math., 24 (3), 545-565.

Almalı, S. E., Uysal, G., Mishra, V. N. and **Guller, O. O.,** 2016. On singular integral operators involving power nonlinearity. The Korean Journal of Math., 25 (4), 483-494.

Guller, **O. O.** and Ibikli, E., 2017. A theorem on weighted approximation by singular integral operators. Communications Series A1 Mathematics & Statistics 67 (2), 89-98.

Guller, O. O., Uysal, G. and Ibikli, E., 2018. Fatou type convergence of singular integral operators equipped with ınfinite sum. Int. Conf. on Math. Istanbul, July 3-6, p. 136.

Guller, O. O.,2019. On pointwise convergence of nonlinear integrals in L_p spaces $(1 < p < \infty)$.(submitted)