

Öğrencilerin Hacim Formülünü Anlamlandırmalarına Yardım Edelim

*Sinan Olkun**

Özet

Küçük küplerden yapılmış dikdörtgenler prizmaları içerisindeki birim küp sayılarının bulunmasının, hacmin ölçümünün anlaşılması ve hacim formülünün belirlenmesindeki bilişsel çerçeveyi sağladığı kabul edilmektedir. Bu makalede, önce öğrencilerin bu konuda yaşadıkları güçlüklerden ve bu güçlüklerin nedenlerinden bahsedilmektedir. Daha sonra, öğrencilerin yaşadıkları güçlüklerden yola çıkılarak hazırlanmış olan ve hacim formülüne görsel-sezgisel dayanaklar sağlayan etkinlikler sunulmaktadır.

Anahtar Kelimeler

Hacim Ölçümü, Hacim Formülü, Dikdörtgenler Prizması, Birim, Birim Küp.

Abstract

Finding the number of cubes in rectangular solids made of small cubes provides the cognitive framework for understanding the measurement of volume and the formulas for determining the volume. In this article, first, students' difficulties and their reasons are discussed. Then, activities that provide visual and intuitive support for the volume formula are given based on these findings.

Keywords

Measurement of Volume, Volume Formula, Rectangular Prism, Unit, Unit Cube.

*Yrd. Doç. Dr., Abant İzzet Baysal Üniversitesi Eğitim Fakültesi
İlköğretim Matematik Öğretmenliği Ana Bilim Dalı Öğretim Üyesi

SINAN OLKUN
Abant İzzet Baysal Üniversitesi Eğitim Fakültesi
İlköğretim Matematik Öğretmenliği Ana Bilim Dalı
14280 Bolu

Elektronik Posta: solkun@ibu.edu.tr

Yayın ve Diğer Çalışmaları

“İlköğretim 4. Sınıf Öğrencileri Küçük Küplerden Yapılmış Dikdörtgenler Prizmalarını Nasıl Kavramsallaştırırlar?”, *IV. Fen Bilimleri Eğitimi Kongresi: Hacettepe Üniversitesi, 6–9 Eylül, 2000, Ankara.*

“Yurt Dışında Eğitim Alanlarında Lisansüstü Çalışma Yapan Türk Öğrencileri Arasında Bilgisayar ve İnternet Kullanımı Üzerine Bir Çalışma”, *IV. Fen Bilimleri Eğitimi Kongresi: Hacettepe Üniversitesi, 6–9 Eylül, 2000, Ankara* (E. Çakıroğlu’yla).

“An Assessment of School-to-Work Transition in a Vocational High School”, *1999 Annual Meeting of the Southwest Educational Research Association, Ocak 21–23, San Antonio* (H. Şimşek’le).

“Children’s Understanding of Rectangular Solids Made of Small Cubes”, *1999 Annual Meeting of The Southwest Educational Research Association, Ocak 21–23, San Antonio* (J. Knaupp’la).

“Interactive Versus Observational Learning of Spatial Visualization of Geometric Transformations”, *American Educational Research Association (AERA), Nisan 19–23, 1999, Montreal* (G. G. Smith ve J. A. Middleton’la).

Stimulating Children’s Understanding of Rectangular Solids Made of Small Cubes, Yayınlanmamış Doktora Tezi, Arizona State University, 1999.

“An Assessment of School-to-Work Transition in a Vocational High School”, *27th Annual Meeting of the Southeastern Association for Community College Research, Ağustos 2–5, 1998, Pine Mountain* (H. Şimşek’le).

“Okullar İçin Ek Örgütsel Dizayn: Matris Örgüt ve Öğretmen Liderler Aracılığı ile Değişimin Gerçekleştirilmesi”, *Kalkınmada Anabtar*, 125, 1997, 6.

“Mesleki–Teknik Ortaöğretim’de Yeni Bir Model Önerisi”, *Mesleki Eğitim Sempozyumu, 1995, Elazığ* (M. D. Karşlı’yla).

A Qualitative Assessment of School to Work Transition From the Perspectives of Employers and Graduates: A Case Study of Balgat Industrial Vocational and Technical Lycee, Yayınlanmamış Yüksek Lisans Tezi, ODTÜ, 1995.

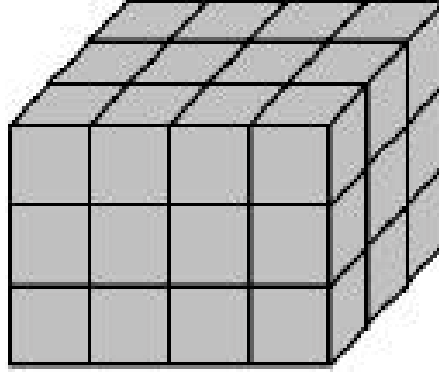
Öğrencilerin Hacim Formülünü Anlamlandırmalarına Yardım Edelim

Sinan Olkun

Küçük küplerden yapılmış dikdörtgenler prizmaları (bkz. Şekil 1) içerisindeki birim küplerin bulunmasında kullanılan akıl yürütmenin, hacim formülünün anlamlandırılması ve hacim ölçümünün anlaşılmasındaki bilişsel çerçeveyi oluşturduğu (Battista ve Clements, 1998; Geddes ve Fortunato, 1993) kabul edilmektedir. Ancak, yapılan araştırmalar ilköğretim (Battista ve Clements, 1996; Ben-Chaim ve diğ., 1985) hatta orta öğretim (Hirstein, 1981) öğrencilerinin küçük küplerden yapılmış dikdörtgenler prizmaları içerisindeki birim küp sayılarını bulmada güçlükler yaşadıklarını göstermektedir.

Şekil 1.

Küçük küplerden yapılmış bir dikdörtgenler prizması



Hirstein (1981), öğrencilerin birim küp sayılarını bulmada yaptığı hataların ‘görünen küpler ya da küp yüzeyleri ile ilgili olduğu’ bulgusundan hareketle, onların hacim ve yüzey alanını karıştırdıklarını iddia etti. Ben-Chaim ve arkadaşları (1985), öğrencilerin prizmanın kenar ve köşelerindeki küpleri bazen iki, bazen de daha çok kere saydıklarını farkettiler. Bu araştırmacılar, öğrencilere dikdörtgenler prizmalarını yalnızca çizim olarak sundukları için öğrencilerin çizimleri doğru anlayamadıkları, yani onları uygun şekilde görselleştiremedikleri sonucuna vardılar.

Battista ve Clements (1996) hem somut küpler hem de çizim kullanarak yaptıkları araştırmada ilköğretim öğrencilerinin her iki durumda da benzer stratejiler kullandıklarını ve benzer hataları yaptıklarını buldular. Böylece onlar, eski araştırmacıların aksine, öğrencilerin hatalarının yanlış uzamsal yapılandırmadan kaynaklandığını iddia ettiler. Uzamsal yapılandırmayı ise; “birim oluşturma, birimler arası ilişkiler oluşturma ve oluşturulan bu yeni bileşik birimleri uygun şekilde öteleyerek tüm yapıyı oluşturma süreci” (Battista ve Clements, 1996: 282) olarak tanımladılar.

Ayrıca öğrencilerin, *görünümler karışımı*, *bireysel küpler* ve *organize küpler* olmak üzere üç değişik kavramsallaştırma geliştirdiklerini ortaya çıkardılar. Dolayısıyla, ancak organize küpler kavramsallaştırmasını gerçekleştirmiş öğrencilerin hacim formülünü anlayabileceğini iddia ettiler, çünkü sadece bu öğrenciler bütüne uygun zihinsel modeli oluşturabilmekteydi.

Peki öğrenciler uygun uzamsal yapılandırmayı nasıl başaracaklar? Bir diğer deyişle, ilkel bir kavramsallaştırmadan daha gelişmiş bir kavramsallaştırmaya nasıl geçecekler? Olkun (1999), yaptığı araştırmada üç aşamalı deneysel bir model kullandı. Birinci aşamada, öğrencilere değişik boyutlarda hem somut küplerden yapılmış prizmalar hem de bu prizmaların çizimlerini içeren etkinlikler sunarak onlardan prizmalardaki küp sayılarını bulmalarını istedi. Öğrencilerin, (1) çizim durumlarına oranla somut cisim durumlarında ve (2) (üç boyutta) çok sayıda küp içeren prizmalara oranla da az sayıda küp içeren prizmalarda daha gelişmiş stratejiler kullandıkları ortaya çıktı. Bu bulgudan hareketle Olkun (1999) araştırmasının ikinci aşamasında, öğrencilere eşit paylaşım bağlamını kullanan etkinlikler sundu. Bu etkinliklerde de yine hem somut küplerden yapılmış prizmaları, hem de onların çizimlerini kullandı. Ancak bu kez etkinlikler önceki bulguların ışığında basitten karmaşığa olacak şekilde düzenlendi. Öğrencilerin, dikdörtgenler prizmaları içindeki küpleri bulurken geliştirdikleri benzer kavramsallaştırmaları prizmaların eşit paylaşımı etkinliklerinde de kullandıkları ortaya çıktı. Etkinliklerin sonuna doğru öğrencilerin “organize küpler” kavramsallaştırmasına ulaştıkları gözlemlendi.

Olkun (1999) araştırmanın üçüncü aşamasında, öğrencilerdeki bu kavramsal gelişimin dikdörtgenler prizmaları içindeki birim küp sayılarının bulunması problemlerinde de kullanılıp kullanılmadığını kontrol etmek amacıyla birinci aşamadaki problemleri öğrencilere tekrar yaptırdı. Öğrencilerin etkinlikler sonucunda kavramsal gelişim kaydederek “organize küpler” kavramsallaştırmasına eriştiklerini gözledi.

- Bu konuda yapılan araştırmaların sonuçlarını özetleyecek olursak;
- öğrencilerin çizimleri, somut prizmalara oranla daha geç anladıkları,
 - büyük prizmaları daha karmaşık buldukları ve
 - birim küplerden oluşmuş prizmaların satır, sütun ve katmanlara dayalı düzenli yapısını zihinlerinde oluşturmakta, yani görselleştirmekte zorlandıkları görülmektedir.

Aşağıda, öğrencilerin bu güçlükleri aşmalarında etkili olduğu saptanmış olan etkinlikler ve bu etkinliklerin nasıl kullanılacağı açıklanmaktadır:

ETKİNLİKLER

Çalışma Düzeni:

- İkili çalışma grupları,
- Çözümlerin sınıf ortamında tartışılması.

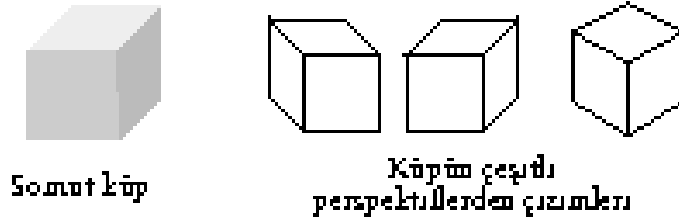
Gerekli Araç–Gereçler:

- Her öğrenci için en az 60 tane olmak üzere 2 cm boyutların da ahşap birim küpler,
- En az beş tane olmak üzere çeşitli renkte boyalı kalemler,
- Çeşitli perspektiflerden birim küp çizimleri,
- Birim küplerden oluşmuş $3 \times 3 \times 1$, $2 \times 2 \times 2$, $3 \times 2 \times 2$, $4 \times 3 \times 2$ ve $5 \times 4 \times 3$ boyutlarında prizma çizimleri.

1. Etkinlik

Şekil 2.

Somut küp ve çeşitli perspektiflerden küp çizimleri



Küpün tanınması

Öğrencilere somut bir küp ve bu küpü temsil eden çeşitli perspektiflerden görüntü sunan küp çizimleri gösterilir (bkz. Şekil 2) ve küpün değişik konumlanışlarına uygun çizimi seçmeleri istenir.

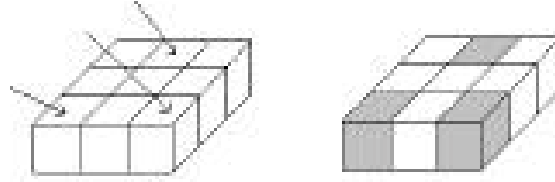
2. Etkinlik

Bir katmanlı bir prizmada herhangi bir küpün tanınması ve belirlenmesi

Öğrencilere birim küplerden yapılmış $3 \times 3 \times 1$ boyutlarında tek katmanlı bir prizmanın çizimi gösterilerek bunu somut küplerden inşa etmeleri istenir. Öğretmen, eliyle somut prizma üzerinde işaret ettiği küpleri öğrencilerden çizim üzerinde boyayarak göstermelerini ister (bkz. Şekil 3).

Şekil 3.

Tek katmanlı somut bir prizma ve onun çizim modeli



Böylece öğrenciler, küpler bir araya gelip bir düzen oluşturduğunda hem somut modelde hem de çizim modelinde bunlardan bazılarının bir, bazılarının iki ve bazılarının da üç yüzeyinin görünebileceğine, bazen bir yüzeyin bile küpü temsil edebileceğine tanık olurlar.

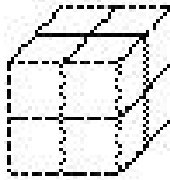
3. Etkinlik

Küçük bir binanın eşit paylaşımı

Öğrencilere 8 birim küpten oluşmuş iki katmanlı ($2 \times 2 \times 2$) bir prizma çizimi verilerek bu prizmayı somut küplerden inşa etmeleri istenir (bkz. Şekil 4). Doğru olarak inşa edilen prizmanın bir apartman bloğu olduğu ve iki kişi arasında eşit bir şekilde paylaşılacak istendiği belirtilir. Eşit iki payın çizim üzerinde boyanarak gösterilmesi istenir. Bunu yapmakta zorlanan öğrencilere somut prizmadan yararlanabilecekleri söylenir.

Şekil 4.

Birim küplerden oluşmuş $2 \times 2 \times 2$ boyutlarında prizmanın çizimi

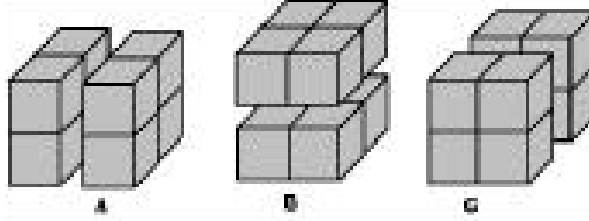


Öğrencilere bu paylaşımı bir kaç değişik şekilde yapabilecekleri belirtilir. Değişik çözümler tepegöz veya benzeri bir yansıtıcı yardımı ile sınıf ortamında tartışılır. Böylece birim küplerden oluşmuş bir dikdörtgenler prizmasının eşit parçalara ayrılabilirliği vurgulanmış olur. Olası çözümler her öğrenci tarafından hem somut prizmada hem de çizimleri üzerin-

de denenir (bkz. Şekil 5 ve 6). Bu şekilde öğrencilere prizmanın katmanlı uzamsal yapısını görselleştirme olanağı tanınmış olur.

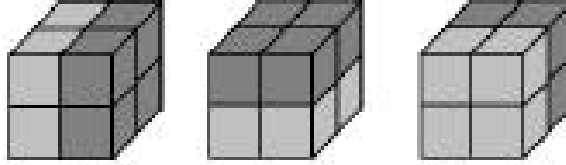
Şekil 5.

Sekiz küpten oluşan prizmanın iki kişi arasında paylaşımına olası çözümlerin somut prizmada gösterilmesi



Şekil 6.

Sekiz küpten oluşan prizmanın iki kişi arasında paylaşımına olası çözümlerin çizim üzerinde boyanarak gösterilmesi



“Aynı prizma 4 kişi tarafından eşit olarak paylaşılmak istenirse ne olur?” sorusu sorularak benzer adımlar izlenir. Bu soru ile öğrencilerin prizmanın satır ve sütun yapısına dikkatleri yöneltilecek bu yapıyı görselleştirmelerine olanak sağlanmış olur.

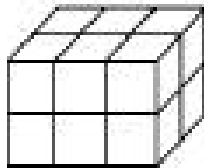
4. Etkinlik

Orta büyüklükte bir binanın eşit paylaşımı

Öğrencilere birim küplerden yapılmış, $3 \times 2 \times 2$ boyutlarında bir prizmanın çizimi verilerek onu somut küplerden inşa etmeleri istenir (bkz. Şekil 7). Çizim ve somut prizmanın aynı ölçülerde olup olmadığı kontrol edilir. Binanın 3 kişi tarafından eşit olarak paylaşılmak istendiği belirtilir. Öğrencilerden üç eşit payı çizim üzerinde boyayarak göstermeleri istenir. Zorlanan öğrencilere somut prizmadan faydalanabilecekleri söylenir.

Şekil 7.

On iki küpten oluşan $3 \times 2 \times 2$ boyutlarında prizma çizimi



Aynı binanın 4 kişi arasında eşit olarak nasıl paylaşılacağı sorulur. İpucu olması açısından prizmanın değişik konumlanışları denebilir. Her aşamada, hata yapan öğrencilerin hatalarını düzeltebilmeleri için prizmaların yedek çizimleri bulundurulur.

Bu etkinlikteki amaç, *bir yandan çizim ve somut prizmalar arasındaki benzerliği vurgularken, bir yandan da öğrencilerin dikkatlerini hem somut hem de çizim olarak sunulan prizmalardaki satır, sütun ve katman yapısına yönelterek, bu durumları görselleştirmelerine katkıda bulunmaktır.*

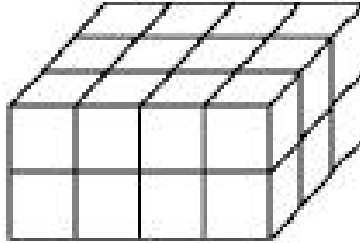
5. Etkinlik

Büyük bir binanın eşit paylaşımı

Öğrencilere, birim küplerden yapılmış, $4 \times 3 \times 2$ boyutlarında bir prizmanın üç adet çizimi verilerek bunu somut küplerden inşa etmeleri istenir (bkz. Şekil 8). Daha sonra binanın sırayla dört kişi, üç kişi ve iki kişi arasında nasıl eşit paylaşılacağı sorulur. Her paylaşımın ayrı ayrı somut prizmada denenmesi ve çizimler üzerinde eşit payların boyanarak gösterilmesi istenir. Değişik çözümler sınıf ortamında herkesin görebileceği bir şekilde tartışılır.

Şekil 8.

Yirmi dört küpten oluşan $4 \times 3 \times 2$ boyutlarında prizmanın çizimi



Burada amaç; *binanın değişik şekillerde katmanlardan oluştuğunu göstermek ve bunun yanında öğrencinin dikkatini prizmanın çeşitli uzamsal özelliklerine çekerek onların bu durumları görselleştirmelerine olanak sağlamaktır.*

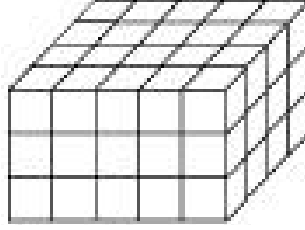
6. Etkinlik

Daha büyük bir binanın eşit paylaşımı

Öğrencilere, $5 \times 4 \times 3$ boyutlarında 60 tane birim küpten yapılmış bir prizmanın üç adet resmi verilerek bunu somut küplerden inşa etmeleri istenir (bkz. Şekil 9). Daha sonra binanın sırayla 5 kişi, 4 kişi ve 3 kişi arasında nasıl eşit paylaşılacağı sorulur. Her paylaşımın ayrı ayrı somut prizmada denenmesi ve çizimler üzerinde eşit payların boyanarak gösterilmesi istenir. Değişik çözümler sınıf ortamında herkesin görebileceği bir şekilde tartışılır.

Şekil 9.

Altmış küpten oluşan 5x4x3 boyutlarında prizma



Bu etkinlikte amaç; önceki etkinliklere ek olarak öğrencilerin daha büyük boyutlardaki prizmaları da benzer şekilde katmanlı yapılar olarak görselleştirmelerine olanak vermektir.

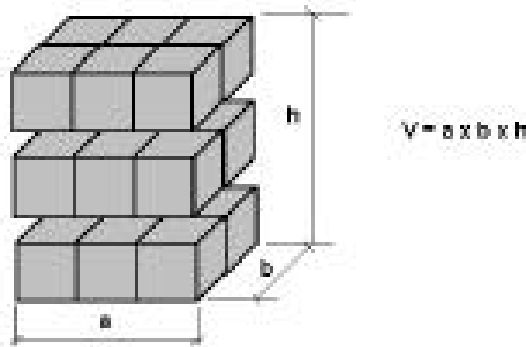
Aynı sınıfta bulunan öğrencilerin bile değişik deneyim ve bilgi işleme hızlarına sahip olabilecekleri göz önünde tutularak her öğrenciden aynı performans beklenmemelidir. Örneğin, bazı öğrenciler doğrudan altıncı etkinliği yapabilirken bazıları birinci etkinlikte bile zorluk çekebilirler. Bu durum, değişik öğrenci gruplamaları ve sınıf içi tartışmaları yoluyla telafi edilebilir. Zor öğrenen öğrenciler için yeteri kadar etkinlik zamanı tanınmalıdır.

Öğrencilerin Hacim Formülü ile Tanıştırılması

Öğrenciler daha sonra veya bir üst sınıfta hacim formülü ile tanıştırdıklarında da benzer yol izlenerek formüle görsel destek sağlanmalıdır. Böylece öğrencilere, hacmin sadece üç sayının çarpılmasına dayalı bir formülden ibaret olmayıp daha ziyade onun somut ve mantıklı bir dayanağı olduğu (bkz. Şekil 10) gerçeğinin sezilmesi olanağı tanınmış olur.

Şekil 10.

Hacim formülünün ($V = 3 \times 2 \times 3$) görsel dayanağı

**Tartışma ve Sonuç**

Sonuç olarak diyebiliriz ki, çeşitli matematiksel bağıntılara görsel-sezgisel dayanaklar oluşturulması, öğrenmenin hem anlamlı ve

kalıcı hale getirilmesi hem de öğrenilen bilgilerin başka alanlara transfer edilebilmesi açısından önem taşımaktadır. Ancak, öğrencilerin probleme görsel–sezgisel desteği veren araçları anlayabilmeleri ve onlardan yararlanarak ilgili matematiksel kavramı oluşturmaları uzun zaman alabilmektedir. Ayrıca bu oluşum, öğretmenin konuyu doğrudan anlatımıyla değil daha çok öğrencilere problem durumları oluşturmaları ve onların uygun zihinsel etkinlikte bulunmalarını sağlama yolu ile gerçekleşmektedir. Bundan dolayı, öğrencilerin fiziksel araçları bizzat kendi elleriyle kurcalamaları, onlarla birşeyler yapmaları ve onları problem çözmede araç olarak kullanmaları önem taşımaktadır.

Bu makalede sunulan etkinlikler, öğrencilerin hacim ölçümü ve hacim formülü ile tanıştırılmasından önce onlara kazandırılması gereken bilgi ve deneyimleri içermektedir. Araştırmalar bu etkinliklerin, doğru ve derin bir hacim kavramına temel oluşturmada etkili olduğunu ve öğrencileri uygun zihinsel faaliyete zorladığını kanıtlamıştır.

Kaynakça

- Battista, M. T. ve Clements, D. H. (1996) “Students’ Understanding of Three-Dimensional Rectangular Arrays of Cubes”, *Journal of Research in Mathematics Education*, 27 (3): 258–292.
- Battista, M. T. ve Clements, D. H. (1998) “Finding the Number of Cubes in Rectangular Cube Buildings”, *Teaching Children Mathematics*, 4 (5): 258–264.
- Ben-Chaim, D., Lappan, G. ve Houang, R. T. (1985) “Visualizing Rectangular Solids Made of Small Cubes: Analyzing and Affecting Students’ Performance”, *Educational Studies in Mathematics*, 16 (4): 389–409.
- Geddes, I. ve Fortunato, D. (1993) “Geometry: Research and Classroom Activities”, D. T. Owens (Ed.), *Research Ideas for the Classroom: Middle Grades Mathematics* (NCTM) içinde: 199–222.
- Hirstein, J. J. (1981) “The Second National Assessment in Mathematics: Area and Volume”, *Mathematics Teacher*, 74: 704–708.
- Olkun, S. (1999) *Stimulating Children’s Understanding of Rectangular Solids Made of Small Cubes*, Yayınlanmamış Doktora Tezi, Arizona State University